



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU
I INFORMATIKU



Marina Radić

MATEMATIČKE OSNOVE VRTLOŽNOSTI

-Master rad-

Novi Sad, 2015

Želim da izrazim veliku zahvalnost i poštovanje mentoru, prof. dr Marku Nedeljkovu. Posebno želim da se zahvalim na slobodi koju sam imala u radu, na strpljenju i stručnim savetima, sugestijama i pojašnjenu nejasnoća sa kojima sam se susretala razrađujući navedenu temu. Takođe, zahvaljujem se i članovima komisije, dr Dori Seleši i dr Srboljubu Simiću.

Prirodno-matematički fakultet,
Novi Sad

Marina Radić

Sadržaj

1 Uvod	5
2 Osnove dinamike fluida	7
2.1 Osnovni pojmovi	8
2.1.1 Gustina.....	8
2.1.2 Viskoznost.....	8
2.1.3 Delovanje sila na fluid	9
2.2 Osnovni zakoni dinamike fluida	11
2.2.1 Zakon održanja mase (jednačina kontinuiteta)	12
2.2.2 Zakon održanja momenta (drugi Njutnov zakon kretanja).....	13
2.2.3 Zakon održanja energije	15
3 Jednačine fluidnog kretanja.....	17
3.1 Granični uslovi	17
3.2 Ojlerove i Navije-Stoksove jednačine	17
3.2.1 Izvođenje Ojlerovih jednačina za nestišljive fluide.....	19
4 Vrtložnost-pojam, generisanje i matematičke osnove	21
4.1 Uvodni pojmovi	21
4.1.2 Odnos vektora polja brzine i vrtložnosti	22
4.2 Vrtložne linije, listovi (sheets) i vrtložne cevi	24
4.3 Generisanje vrtložnosti.....	27
4.3.1 Generisanje vrtložnosti udarnim talasima	30
4.3.2 Generisanje vrtložnosti slobodnim konvektivnim tokom i uzgonom	30
4.3.3 Generisanje vrtložnosti barokliničkim efektom	31
4.4 Rotacija i vrtložnost, matematička veza i jednačine.....	33
4.4.1 Klasa egzaktnih rešenja za Navije- Stoksove jednačine	36
4.5 Istezanje i kompresija vrtložnosti u trodimenzionalnim Ojlerovim jednačinama	39
4.5.1 Istezanje uključujući matrice \mathbf{D} i \mathbf{P}	40
4.5.2 Okatinijeva relacija između tenzora naprezanja i matrice Hesijana pritiska	40
4.5.3 Jednačine koje povezuju α i χ	41
4.6 Vrtložnost i izentropski tok	43
4.7 Funkcija strujanja i vrtložnost	46
4.7.1 Lid-driven cavity problem	48
4.7.2 Formulacija vrtložnog strujanja za trodimenzionalne tokove	53

4.8 Klasična vrtložna kretanja i modeli	56
4.8.1 Lamb -Čapljinin dipolni vrtlog 23	58
4.8.2 Burgersova rešenja za Ojlerove jednačine.....	60
4.8.3 Dinamički istegnuti vrtlozi kao rešenja trodimenzionalnih Navije-Stoksovih jednačina ...	61
4.8.4 Hilov sferični vrtlog.....	66
5 Slaba L^∞ rešenja jednačine vrtložnosti.....	67
5.1 Vrtložno-strujna formulacija i slaba rešenja	68
5.2 Egzistencija i jedinstvenost slabog rešenja	70
6 Primer realnog vrložnog vrltoga: Uragan.....	75
6.1 Struktura i kretanje uragana	75
6.2 Jednostavano matematičko modeliranje uragana	77
6.2.1 Pretpostavke modela	77
7 Zaključak.....	84
8 Literatura	86
9 Biografija.....	88

1 Uvod

Mehanika fluida svoju značajnost krije u stvaranju teorije kroz vekove. Mehanika fluida je imala veoma jak uticaj na razvoj pojedinih oblasti nauke kao što su mehaničko, hidrauličko i aeronautičko inženjerstvo.

Interesovanje za dinamiku fluida javilo se još u antičkoj Grčkoj, kada je živeo i radio jedan od najpoznatijih matematičara i inženjera tog vremena, Arhimed. Međutim, glavni razvoj mehanike fluida morao je da sačeka formulaciju drugog Njutnovog zakona kretanja. Taj zakon je primenjen na fluide od strane švajcarskog matematičara Leonarda Ojlera.

Iako je tema ovog master rada bazirana na matematičkim osnovama, te matematičke osnove ne bi imale tolikog smisla ako bi se striktno odvojile od teorije mehanike fluida. Zbog toga su, u prvom delu master rada objašnjeni osnovni pojmovi mehanike fluida i predstavljeni su osnovni zakoni dinamike fluida. Ojler je prepoznao kako se zakoni dinamike fluida mogu predstaviti u jednostavnom obliku ako se pretpostavi da su nestišljivi ili idealni. Jednačine fluidnog kretanja, Navije-Stoksove i Ojlerove jednačine koje su isto predstavljene u prvom delu rada, posmatrane su, takođe, pod pretpostavkom da je fluidni tok nestišljiv. Za realne fluide teorija se značajno komplikuje.

Cilj master rada jeste da predstavi i objasni matematičke osnove pojma vrtložnosti, pa je najveći deo master rada posvećen upravo tome. Zašto je pojam vrtložnosti, koji se matematički definiše kao rotor vektorskog polja toliko važan? Vrtložnost nije lako merljiva (postojanje tačnog metra vrtložnosti kao izuma bilo bi od neprocenjive vrednosti za brojne eksperimentne i teorijske primene) i iz definicije se vidi da nema naročitu fizičku značajnost, ne razlikuje se posebno od bilo kog gradijenta polja brzine. Zbog toga je u radu odmah nakon uvoda u pojam vrtložnosti, objašnjen odnos između gradijenta brzine i vrtložnosti. Značajnost vrtložnosti je u tome što je ona, barem za kretanje homogenih nestišljivih fluida, svojstvo toka od velike važnosti, i nije preterano reći da su svi problemi takvih tokova postavljeni kao pitanje o snazi i lokaciji vrtložnosti. Činjenica da je jedan od najvećih nerešenih problema dinamike fluida turbulentacija, koja predstavlja nasumično, haotično polje vrtložnosti, govori u prilog pomenutoj značajnosti.

Vrtložnost obezbeđuje moćne, kvalitativne opise za veoma važne fenomene u mehanici fluida. Formiranje i razdvajanje graničnih slojeva koji se opisuju u terminima proizvodnje, konvekcije i difuzije vrtložnosti. U radu je dat pregled mogućih načina generisanja vrtložnosti. Generisanja, u smislu da jednačine opisuju nastanak pojave koju izaziva, npr. šok talas, konvekciju ili baroklinički efekat, i da u sebi sadrže i odgovarajući gradijen brzine sa ostalim bitnim parametrima, pa se primenom rotora dolazi i do jednačina koje opisuju vrtložno kretanje. Predstavljen je i način na koji se dolazi do jednačine vrtložnosti i matematički su opisani pojmovi kao što su konvekcija i isatezanje vrtložnosti, kao i situacije kada dolazi do imenovanih pojava.

U radu su prikazana analitička, vrtlog rešenja Navije-Stoksovih jednačina. Predstavljena su i Bugersova rešenja za Ojlerovu jednačinu i dinamički istegnuti vrtlozi kao rešenja Navije-Stoksovih jednačina, zatim Lamb-Čapljinov dipol i Hilov sferični vrtlog. U formulaciji navedenih rešenja se koristi funkcija protoka.

Gore navedena rešenja su klasična. Ukoliko je početna brzina glatka, sa konačnom energijom, tada postoji jedinstveno globalno rešenje 2D Ojlerovih jednačina. Ukoliko, to nije zadovoljeno ne može se

tvrđiti postojanje jedinstvenog globalnog rešenja. U mnogim fizičkim problemima javlaju se izuzetno nestabilne strukture, čija dinamika ne može biti opisana jednostavnim glatkim modelom. Zbog toga se uvodi pojam slabog rešenja. Eliptični kolumnarni vrtlozi su primer slabog rešenja 2D Ojlerovih jednačina.

2 Osnove dinamike fluida

Mehanika fluida obuhvata pojave koje su vezane za dva agregatna stanja tela: tečno i gasovito, ali i za sve vrste mešavina sva tri agregatna stanja (čvrsto, tečno i gasovito). Gasovito telo karakteriše vrlo velika pokretljivost i deformabilnost. Njegovo ponašanje je potpuno suprotno od ponašanja čvrstog tela. Tečno telo se nalazi na sredini između ova dva stanja. U mehanici fluida posmatra se kretanje delića koji je u potpunosti ispunjen materijom. Naziv fluid se odnosi na tečnosti i gasove zbog njihovih zajedničkih osobina.

U klasičnoj mehanici, fluid se definiše kao materija koja je neprekidna, kontinualna, dok je fluidni prostor potpuno ispunjen. Fluid se može definisati na osnovu njegovog ponašanja kada se nade pod dejstvom sila.

Sile mogu da deformatišu telo na sledeći način:

- istezanje
- komprimovanje¹
- uvrtanje

Fluidi se veoma lako deformatišu i pri tome se ne vraćaju u prethodni oblik te mogu da *teku*, stoga, može se reći da je fluid stanje materije u kome ona može da teče i menja oblik i zapreminu pod dejstvom veoma slabih međumolekularnih² sila. Definisanje svojstava fluida, obuhvatajući i tečnosti i gasove, leži u lakoći i načinu njihove deformacije. Čvrsta tela mogu promeniti svoj oblik samo onda kada dođe do promene u spoljašnjem stanju. Sa druge strane, deo fluida nema periferni oblik i homogeni delovi čestica se mogu lako preuređiti.

Postoje sledeći, osnovni, modeli fluida [3]:

- ◊ *miran fluid (stabilan)*- fluid u stanju mirovanja. Može da bude stišljiv i nestišljiv, ali se uvek posmatra kao neviskozan, jer se viskozne sile (sile trenja) ne javljaju pri mirovanju fluida.
- ◊ *nestišljiv fluid* - fluid kod koga je gustina konstantna. Može da bude viskozan ili neviskozan
- ◊ *idealni (savršeni) fluid* – fluid koji je neviskozan. To je model fluida u kojem su nađenja prva rešenja kretanja. Njegove čestice se kreću potpunom slobodom.
- ◊ *stišljiv (kompresibilan) fluid* – fluid čija je gustina promenjiva, a elastične sile (sile pritiska) dominantne. Viskozni efekti se obično zanemaruju. Model ovakvog fluida primenjuje se u dinamici gasova.
- ◊ *realan fluid* – stvaran fluid kod koga su izražene i viskozne i elastične sile. Za realan fluid postoji ograničen broj tačno rešenih problema.

Vrlo važni pojmovi koji se sreću u mehanici fluida, a koji su od velike važnosti za evoluciju dinamičkih jednačina jesu gustina, pritisak, viskoznost i difuzija. To su samo neka od mehaničkih (pritisak, gustina) i uzrokovanih svojstava fluida (viskoznost, stišljivost, toplotno širenje i dr.), međutim postoje i termička svojstva (temperatura, entalpija, unutrašnja energija i dr.). Neka od tih

¹ Komprimovanje znači kompresija ili sabijanje, prigušivanje ili zgušnjavati.

² Privlačne i odbojne sile među česticama fluida. Suština ovoga rada jeste u matematičkim osnovama teorije vrtložnosti, fizički pojmovi i pojave su ukratko i pojednosatavljeni objašnjeni

svojstava, koja su najvažnija za temu ovog master rada detljnije su objašnjena odmah ispod, dok će neka biti ukratko objašnjena u delovima u kojima se spominju.

2.1 Osnovni pojmovi

Naziv fluid odnosi se i na tečnosti i na gasove zato što u prirodi ima dosta slučajeva kada se gasovi ponašaju kao da su nestišljivi. To se dešava kada su brzine gasne struje znatno manje od brzine kojom se zvuk prostire kroz gas, ili kada su gasovi izloženi dejstvu malih razlika u pritiscima u poređenju s absolutnim pritiscima koji u njima vladaju.

Pod fluidnim delićem se podrazumeva tako mala količina materije da njen oblik ne igra nikakvu ulogu pri posmatranju. Delići imaju uvek istu masu, ali im se zapremina i oblik mogu menjati tokom vremena.

2.1.1 Gustina

Gustina je osobina materije koja opisuje na koji način je „spakovana“ materija, tj. na koji način su povezani atomi i, samim tim, koju zapreminu zauzima određena masa materije.

Fluidni delić ima svoju masu koja se tokom vremena ne menja. Srednja gustina ρ se dobija kada se neka konačna masa m podeli zapreminom V u kojoj se sadrži [8]:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)$$

Ako se vrlo mala zapremina fluida ΔV , mase Δm , okupljene oko neke tačke M , bilo kako smanjuje, ali ipak tako da tačka M stalno ostaje u toj smanjivanoj zapremini, onda granična vrednost odnosa $\Delta m / \Delta V$ kada ΔV teži nuli predstavlja gustinu fluida ρ neprekidne sredine u tački M :

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

Gustina nestišljivih fluida se ne menja, ali zato se menja gistica stišljivih fluida. Pri porastu pritiska gistica postaje veća, prema tome, gistica stišljivih fluida je direktno сразмерna pritisku.

2.1.2 Viskoznost

Svojstvo fluida da pri svom strujanju pruža otpor relativnom klizanju svojih čestica poznato je pod nazivom **viskoznost** ili **unutrašnje trenje**. Sila trenja uslovljava da sloj tečnosti, koji se kreće brže, povlači za sobom susedni sloj koji se kreće sporije i to je jedno od najvažnijih svojstava fluida.

Kišne kapljice prilikom pada na staklo se lepe za tu površinu, mada na njih deluje sila Zemljine teže koja ih svlači na zemlju. U dodirnoj površini kapljica i stakla vlada sila koja je u stanju da zaustavi kapljice (athezija). Čvrsta površina koči strujanje. Sa površine se kočenje prenosi u unutrašnjost struje, jer se fluidni delići lepe među sobom (kohezija) [8].

Posmatrajmo laminarno (slojevito) kretanje fluida preko ravne površine. Brzina fluida koji dodiruje prizemnu površinu je ravna nuli, dok dalji slojevi imaju veće brzine. Kako gornji delovi fluida imaju veću brzinu od onih ispod, između njih se javlja trenje, tj. javlja se sila tako usmerena da koči slojeve koji se brže kreću, odnosno ubrzava one slojeve koji se sporije kreću. Ova sila se zove sila viskoznog trenja. Veličina ove sile koja se opire relativnom kretanju bilo koja dva sloja direktno je srazmerna dodirnoj površini S između slojeva i gradijenta brzine $\frac{du}{dy}$ tj. [14]:

$$\tau = \mu S \frac{du}{dy} \quad (2.1.2.1)$$

gde je μ dinamička viskoznost.

Jednačina (2.1.2.1) je poznata kao Njutnov zakon viskoznog trenja.

U mehanici fluida, kao i u hidraulici i pneumatici se često koristi kinematička viskoznost ν , koja se dobija deljenjem dinamičke viskoznosti sa gustinom fluida:

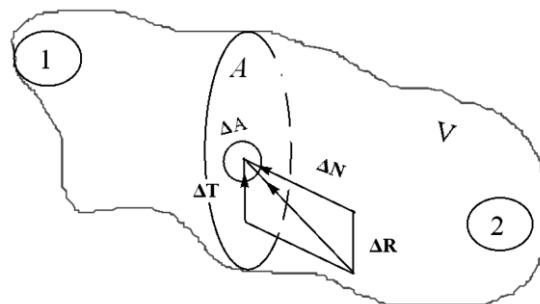
$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Dinamička i kinematička viskoznost zavise od prirode fluida, od temperature i pritiska kome je izložen.

2.1.3 Delovanje sile na fluid

Na masu fluida u nekoj zapremini deluju razne sile, poput sile Zemljine teže, sile gravitacije i inercije. Te sile deluju na svaki delić fluida u posmatranoj zapremini i nazivaju se **zapreminske** ili **spoljašnje sile**. Odnose se na jedinicu mase, pa se tako spoljašnje sile po jedinici mase označavaju sa F .

Pored navedenih sile javljaju se i **površinske sile** R , koje nisu jednake u različitim tačkama posmatrane površne fluida. Prvo, treba uočiti neku zapreminu V koju ispunjava fluid i podeliti je nekom površinom A na dva dela, 1 i 2 (slika 1). Kako su fluidni delići izuzetno pokretljivi, to svaki od delova podeljene zapremine može zadržati svoj oblik samo ako na njega deluju sile, koje zanemaruju uticaj odsečenog dela, u svim tačkama koje pripadaju zajedničkoj površini A . Za razliku od spoljašnjih sila one se određuju prema jedinici površine na koju deluju. Zato se ovakve sile zovu površinskim silama R .



Slika 1: Delovanje površinskih sile

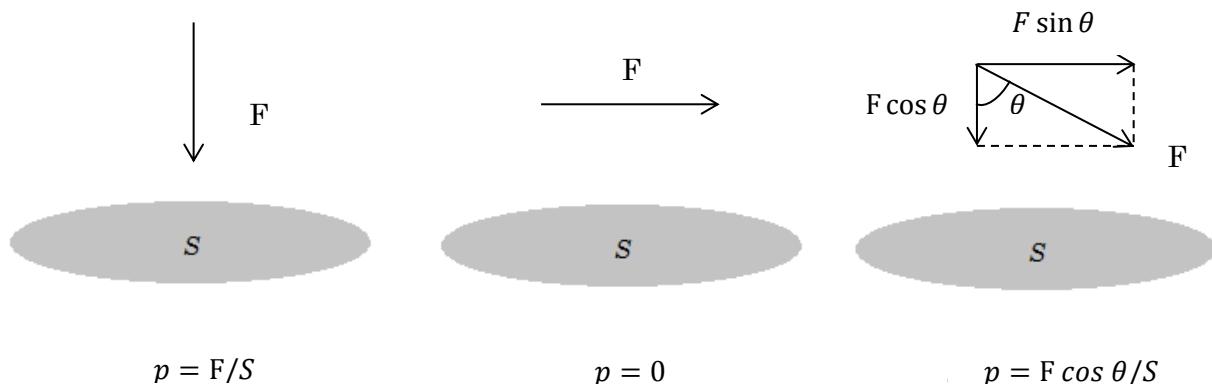
Mali deo ΔA granične površine A trpi elementarnu površinsku silu $\Delta \mathbf{R}$, koja se može rastaviti na komponentu $\Delta \mathbf{N}$ normalnu na površini ΔA i tangentnu komponentu $\Delta \mathbf{T}$ koja leži u ravni površine ΔA . U opštem slučaju, površinske sile \mathbf{R} nisu jednake u raznim tačkama posmatrane površine A, pa ni u tačkama male površine ΔA koja je proizvoljno izabrana.

Tangentne komponente površinskih sile izazivaju klizanje fluidnih delića. Kako su delići vrlo pokretljivi, dovoljna je i najmanja sila da bi se promenio oblik fluidne mase pod uslovom da se ne ograničava vreme delovanja sile. Iz toga sledi da se smicajne sile moraju međusobno uravnotežavati kada fluid miruje. Fluid u mirovanju se ponaša kao da je savršen.

Delovanje sile na fluid je značajno jer pritisak koji se javlja unutar fluida zavisi od površinskih i spoljašnjih sile. Upravo te sile izazivaju pomeranje fluida. Pritisak predstavlja odnos sile i površine i povezan je sa gustom fluida. Tako, na primer, brže se menja u vodi nego u vazduhu. Jedinica za pritisak je Paskal ($[Pa] = \frac{N}{m^2}$).

$$p = \frac{F}{S}$$

S je telo na čiju površinu deluje normalna sila F, slika 2.



Slika 2: Odnos sile, pritiska i površine

Pritisak slabo utiče na dinamičku viskoznost fluida dok na kinematičku viskoznost ima presudanu važnost, jer je kod dinamičke viskoznosti gustina izrazita funkcija od pritiska, a njome se ona deli.

Viskoznost tečnosti se neznatno menja dokle god su pritisci srazmerno mali, pri čemu, za vodu, nešto opadaju sa pojačavanjem pritiska, dok za ostale tečnosti rastu.

2.2 Osnovni zakoni dinamike fluida

Pojam vrtložnosti je povezan, kako sa pojmom Ojlerovih jednačina tako i sa pojmom Navije-Stoksovih jednačina, jer sama jednačina koja opisuje vrtložno kretanje se izvodi iz navedenih jednačina. O jednačini vrtložnosti će biti više reči u narednim poglavljima. Da bi se razumela sama suština vrtložnosti bitan je način na koji se dolazi do matematičkog opisa iste. Da bi bilo jasno šta jednačina vrtložnosti matematički predstavlja, bitno je razumeti matematičke forme Ojlerovih i Navije-Stoksovih jednačina, a za njihov opis vrlo su važni pojedini zakoni dinamike fluida, od kojih će ukratko biti, matematički, predstavljeni: zakon održanja mase, zakon momenta i zakon održanja energije.

Za naredne delove važne su sledeće teoreme i definicije kao i činjenica da sile koje deluju na deo materije fluida mogu biti dva tipa. Kao prvo postoji sile pritiska, a kao drugo postoji spoljašnje sile kao što je već navedeno, gravitacija ili magnetno polje koje vrše pritisak po jedinici zapremine.

Propozicija 2.1.1 (Transportna formula) [16]: *Neka je $W \subset \mathbb{R}^N$ otvorena, ograničena oblast sa glatkim granicom i neka je X putanja čestice koja određuje glatko polje brzine u . Tada za bilo koju glatku funkciju $f(x, t)$ važi:*

$$\frac{d}{dt} \int_{X(W,t)} f \, dx = \int_{X(W,t)} [f_t + \operatorname{div}_x(fu)] \, dx$$

Dokaz: Promenom koordinata $\alpha \rightarrow X(\alpha, t)$ zamenjuje se integracija preko domena koji se stalno menja $X(W, t)$ u integraciju po fiksnom domenu W :

$$\frac{d}{dt} \int_{X(W,t)} f(x, t) \, dx = \int_W f(X(\alpha, t), t) J(\alpha, t) d\alpha$$

gde se Jakobijan transformacije $J(\alpha, t)$ definiše sa:

$$J(\alpha, t) = \det(\nabla_\alpha X(\alpha, t)), \quad \nabla_\alpha = [(\partial/\partial\alpha_1), (\partial/\partial\alpha_2), \dots, (\partial/\partial\alpha_N)]$$

Sledeća, obična, nelinearna, diferencijalna jednačina definiše preslikavanje putanje čestice $(X(\cdot, t): \alpha \rightarrow X(\alpha, t))$ i navodi se bez dokaza.

$$\frac{dX}{dt}(\alpha, t) = \mathbf{u}(X(\alpha, t), t), \quad X(\alpha, 0) = \alpha. \quad (2.2.1)$$

Primenom (2.2.1) dobija se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{X(W,t)} f(x, t) \, dx &= \int_W \left[\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dX}{dt} \cdot \nabla f \right) J + f \frac{\partial J}{\partial t} \right] d\alpha \\ &= \int_W \left[\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u}_x \cdot \nabla f + f \operatorname{div}_x \mathbf{u} \right) J \right] d\alpha \\ &= \int_{X(W,t)} [f_t + \operatorname{div}_x(f\mathbf{u})] \, dx \end{aligned}$$

U radu će biti dosta govora o nestišljivim fluidima i nestišljivim tokovima. Za pojam nestišljivi fluid, u fizičkom smislu, već je rečeno da znači da se gustina fluida ne menja pod dejstvom sila, a za sam tok kažemo da je nestišljiv ako je zapremina toka koji zavisi od oblasti u kojoj ga posmatramo i vremena, jednaka zapremini te oblasti, tj. :

Definicija 2.2.1 [16]: *Tok $X(\cdot, t)$ je nestišljiv ako je za sve podoblasti W sa glatkim granicama i bilo koje $t > 0$ zapremina očuvana, tj.*

$$\text{zapremina } X(W, t) = \text{zapremina } W$$

Propozicija 2.2.2: *Neka $X(\cdot, t)$ predstavlja putanje čestice koja preslikava glatko vektorsko polje $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$. Onda je*

$$\frac{\partial J}{\partial t} = (\operatorname{div}_x \mathbf{u})|_{(X(\alpha, t), t)} J(\alpha, t)$$

Iz propozicije 2.2.1 koja predstavlja transportnu formulu sledi da je za $f \equiv 1$, $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Sledeća propozicija daje ekvivalentne uslove za slučaj kada je tok nestišljiv.

Propozicija 2.2.3: *Za glatke tokove sledeća tri uslova su ekvivalentna:*

1. tok je nestišljiv tj. $\forall W \subset \mathbb{R}^N, t \geq 0$ zapremina $X(W, t) = \text{zapremina } W$
2. $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$
3. $J(\alpha, t) = 1$

2.2.1 Zakon održanja mase (jednačina kontinuiteta)

Neka je W fiksna podoblast oblasti D (W se ne manja sa vremenom). Stopa promene mase u W iznosi:

$$\frac{d}{dt} m(W, t) = \frac{d}{dt} \int_W \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_W \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dV$$

gde je masa označena sa m , a gustina, kao prostorna funkcija vremena je označena sa ρ . Neka ∂W označava granicu od W , neka je ta granica glatka, i neka \mathbf{n} označava jediničnu, spoljašnju normalu definisanu u skoro svim tačkama na granici ∂W i neka dA označava element površine na ∂W . Stopa protoka zapremine kroz ∂W po jedinici površine je $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ i stopa protoka mase po jedinici površine iznosi $\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$.

Princip održanja mase može se preciznije definisati na sledeći način:

Definicija 2.2.1.1: *Stopa porasta mase u W jednaka je stopi po kojoj masa ulazi kroz ∂W :*

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho dW = - \int_{\partial W} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA \quad (2.2.1.1)$$

Ovo je integralni oblik zakona održanja mase. A po teoremi divergencije³ ovaj zapis je jednak sa:

$$\int_W \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \right\} = 0 \quad (2.2.1.2)$$

Kako važi za sve podoblasti W , zapis je ekvivalentan sa:

$$\left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \right\} = 0 \quad (2.2.1.3)$$

Poslednja jednačina predstavlja diferencijalni oblik zakona održanja mase, takođe poznat kao *jednačina kontinuiteta*.

Ako ρ i \mathbf{u} nisu dovoljno glatke funkcije da bi opravdale sve korake koji vode do diferencijalnog oblika zakona održanja mase onda se koristi integralni oblik navedenih jednačina.

2.2.2 Zakon održanja momenta (drugi Njutnov zakon kretanja)

U narednih par redova opisan je postupak kojim se dobija izraz za takozvani materijalni izvod koji je veoma čest u dinamičkim jednačinama a samim tim važan je i za temu ovog master rada.

Neka je $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ putanja koju prati čestica fluida tako da je polje brzine dato sa:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$$

tj.:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t).$$

Dalje, neka je ubrzanje čestice fluida dato sa:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t)$$

Primenom izvoda složene funkcije (the chain rule), ovaj izraz postaje:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.$$

Ako uvedemo sledeće oznake za parcijalne izvode polja brzine:

$$\mathbf{u}_x = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \quad \mathbf{u}_t = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad \text{itd.}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(x, y, z, t), u_2(x, y, z, t), u_3(x, y, z, t)),$$

³ Teorema divergencije, poznatija kao Gaus-Ostrogradski teorema vektorskog računa glasi: Neka je V oblast u prostoru sa granicom ∂V , tada zapreminska (trostruki) integral divergencije od \mathbf{F} po V i površinski integral od \mathbf{F} po granici ∂V su povezani n sledeći način

$$\int_V \operatorname{div}(\mathbf{F}) dV = \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$$

dobijamo:

$$\mathbf{a}(t) = u_1 \mathbf{u}_x + u_2 \mathbf{u}_y + u_3 \mathbf{u}_z$$

što se, takođe, zapisuje kao:

$$\mathbf{a}(t) = \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$$

gde je:

$$\partial_t \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \text{ a } \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}.$$

A operator gradijenta ∇ definisan je sa:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N} \right)^t,$$

Izraz:

$$\frac{D}{Dt} = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (2.2.2.1)$$

se naziva *materijalni izvod*, on u račun unosi činjenicu da je fluid u kretanju i da se pozicija čestice fluida menja sa vremenom. Zaista ako je $f(x, y, z, t)$ bilo koja funkcija vremena i prostora (skalarna ili vektorska), onda se primenom izvoda složene funkcije dobija:

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t), t) = \partial_t f + \mathbf{u} \cdot \nabla f = \frac{Df}{Dt}(x(t), y(t), z(t), t)$$

Za sada, posmatrajmo idealan fluid. Kao što je već navedeno takav fluid ima sledeća svojstva: pri bilo kom kretanju fluida postoji funkcija $p(\mathbf{x}, t)$ koja se naziva pritisak takva da ako je S površina u fluidu sa izabranom jediničnom normalom \mathbf{n} , sila pritiska koji se vrši na površinu S po jediničnoj površi $\mathbf{x} \in S$, i vremenu t iznosi $p(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}$:

$$\text{Sila kroz } S \text{ po jedinici površi} = p(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}.$$

Prepostavlja se da sila deluje u pravcu \mathbf{n} i da sila deluje ortogonalno na površ S ; tj ne postoji tangencijalana sila.

Prema Korinu i Mardsenu[5], odsustvo tangencijalnih sila implicira da ne postoji način da rotacija otpočne unutar fluida, niti, ako je postojala na početku, da se zaustavi. Čak i sada može se utvrditi fizički problem pri posmatranju idealnog fluida zbog obilja rotacija u realnom fluidu (u blizini vesala u čamcu, u tornadu).

Ako je W oblast u fluidu u određenom trenutku vremena t , tada je ukupna sila koja se vrši na fluid unutar W (u smislu pritiska) na granici iznosi:

$$S_{\partial W} = \{\text{sila na } W\} = - \int_{\partial W} p \mathbf{n} \, dA$$

(negativan predznak jer je \mathbf{n} usmereno ka spoljašnjosti). Ako je \mathbf{e} neki fiksni vektor u prostoru, teorema divergencije daje:

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{S}_{\partial W} = - \int_{\partial W} p e \cdot \mathbf{n} \, dA = - \int_W \operatorname{div}(pe) \, dV = - \int_W (\nabla p) \cdot \mathbf{e} \, dV.$$

Tada je,

$$\mathbf{S}_{\partial W} = - \int_W \nabla p \, dV.$$

Ako sa $\mathbf{b}(x, t)$ označimo silu tela po jedinici mase, ukupna sila tela je:

$$\mathbf{B} = \int_W \rho \mathbf{b} \, dV$$

Tako je na bilo kom delu fluida:

$$\text{Sila po jedinici zapremine} = -\nabla p + \rho \mathbf{b}.$$

Prema drugom Njutnovom zakonu (*sila = masa × ubrzanje*) dobijamo diferencijalni oblik **drugog Njutnovog zakona za neviskozne fluide**:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{b}. \quad (2.2.2.2)$$

2.2.3 Zakon održanja energije

Jednačine koje su do sada uvedene, jednačina kontinuiteta i diferencijalni oblik drugog Njutnovog zakona, daju četiri jednačine ako je reč o trodimenzionalnom prostoru ($n+1$ jednačina u n dimenzionalnom prostoru), a to upravo sledi iz činjenice da je jednačina $D\mathbf{u}/Dt$ vektorska sastavljena od tri skalarne jednačine. Međutim, u slučaju trodimenzionalnog prostora javlja se pet nepoznatih funkcija: \mathbf{u}, ρ i p . Da bi kretanje fluida bilo u potpunosti određeno nedostaje još jedna jednačina.

Za kretanje fluida u domenu D , sa poljem brzine \mathbf{u} , kinetička energija u oblasti $W \subset D$ je:

$$E_{\text{kinetička}} = \frac{1}{2} \int_W \rho \|\mathbf{u}\|^2 \, dV$$

gde je $\|\mathbf{u}\|^2 = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)$ kvadratna dužina vektorske funkcije \mathbf{u} . Prepostavimo da ukupna energija fluida može da se zapiše na sledeći način:

$$E_{\text{ukupna}} = E_{\text{kinetička}} + E_{\text{unutrašnja}}.$$

gde je $E_{unutrašnja}$ unutrašnja energija, što je energija koju ne možemo videti na makroskopskoj skali, i izvodi se iz izvora kao intermolekularni potencijal. Ako se energija upumpa u fluid ukupna energija će se promeniti [5].

Stopa promene kinetičke energije dela fluida koji se kreće W_t se računa na sledeći način:

$$\frac{d}{dt} E_{kinetička} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_{W_t} \rho \|\mathbf{u}\|^2 dV \right] \quad (*)$$

Koristimo transportnu formulu datu propozicijom 2.1.1. Dakle,

$$(*) = \frac{1}{2} \int_{W_t} \rho \frac{D\|\mathbf{u}\|^2}{Dt} dV$$

Raspisujemo izraz $\frac{D\|\mathbf{u}\|^2}{Dt}$ na sledeći način:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} \|\mathbf{u}\|^2 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + \frac{1}{2} (u_1 \frac{\partial}{\partial x} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) \\ &\quad + u_2 \frac{\partial}{\partial y} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + u_3 \frac{\partial}{\partial z} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)) \\ &= u_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \\ &\quad + u_2 \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) + u_3 \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) \\ &= \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Konačno stopa promene kinetičke energije dela fluida koji se kreće kroz W_t :

$$\frac{d}{dt} E_{kinetička} = \frac{1}{2} \int_{W_t} \rho \left\{ \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right\} dV \quad (2.2.3.1)$$

3 Jednačine fluidnog kretanja

Pre uvođenja jednačine vrtložnosti, važno je predstaviti jednačine fluidnog kretanja, Ojlerove i Navije-Stoksove jednačine koje su od velikog značaja za teoriju vrtložnosti. Navije-Stoksove i Ojlerove jednačine su široko rasprostranjene u mehanici fluida kao bazne jednačine i obezbeđuju matematičke principe fluidnog kretanja. Posebno su efikasne za jednostavna fluidna kretanja. Složeniji problemi, pogotovo kada je u pitanju polje turbulencije, ne mogu se rešiti Navije-Stoksovim jednačinama, pa se dosta pažnje posvećivalo istraživanju njihove rešivosti. Koriste se da bi se modelovalo vreme, okeanske struje, tok iz slavine. Još uvek nije dokazano da trodimenzionalna rešenja uvek postoje, ili da ne postoje. Navije-Stoksova jednačina je nelinearna parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda, čiji rešavanje je moguće samo aproksimativnim metodama, tj. rešenja se mogu tražiti samo za idealizovane atmosferske i hidrosferske probleme zanemarujući članove koji veoma malo utiču na razmatrane procese, dok su Ojlerove jednačine prvog reda.

3.1 Granični uslovi

Vodeće jednačine koje opisuju kretanje fluida su diferencijalne jednačine, pa specifikacija bilo kog problema mora sadržati granične uslove. Postoji veliki broj tipova granica i previše je opširno i zahtevno uzimati ih sve u obzir, zbog toga će biti razmotren najuobičajeniji tip granice u fluidnoj oblasti, kruti nepropusni zid. Fluid, dakle, ne može proticati kroz zid. Uslov da tangencijalna komponenta brzine bude jednaka nuli na granici sa čvrstim telom je poznat kao uslov adherencije i važi za sve $v \neq 0$ (kinematička konstanta viskoznosti je različita od nule). Takav uslov, u kome nema klizanja na granici odgovara Dirihielovom graničnom uslovu.

3.2 Ojlerove i Navije-Stoksove jednačine

Nestišljivi tokovi homogenih fluida u celom prostoru \mathbb{R}^N , $N = 2, 3$ su rešenja sistema jednačina:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (3.2.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, \infty) \quad (3.2.2)$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{v}_0, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (3.2.3)$$

gde je $\mathbf{u}(x, t) \equiv (u_1, u_2, \dots, u_N)^t$ je polje brzine, $p(x, t)$ je skalarni pritisak D/Dt je materijalni izvod (izvod duž putanje čestice) objašnjen u 2.1.2:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^N u^j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

div je divergencija vektorskog polja,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial u^j}{\partial x_j}.$$

Definicija 3.2: Vektorsko polje \mathbf{f} je preslikavanje $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ koje svakom vektoru \mathbf{x} dodeljuje vektor $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Dok je Laplasov, delta operator Δ :

$$\Delta = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Data kinematicka konstanta viskoznosti $\nu \geq 0$ se može posmatrati kao recipročna vrednost Rejnoldovog broja R_e .

Rejnoldsov broj R_e u mehanici fluida predstavlja kriterijum da li je fluidni (tečni ili gasoviti) tok apsolutno miran (laminaran) ili je u proseku stabilan sa malim fluktacijama (turbulentan). Kada je Rejnoldsov broj manji od 2000, tok u cevi je laminaran, a pri vrednostima većim od 2000 tok je turbulentan. 1883. Godine Ozborn Rejndolds, engleski inženjer i fizičar, pokazao je da je prelazak iz laminarnog u turbulentni tok jednak količniku proizvoda brzine toka, prečnika preseka cevi kroz koju tok prolazi, gustine mase i apsolutne viskoznosti. Ovaj broj je bezdimenzionalan.

Za $\nu > 0$ jednačina (3.2.1) se naziva Navije–Stoksova, a za $\nu = 0$ navedena jednačina se redukuje na Ojlerove jednačine za nestišljive fluide. Ove jednačine slede iz zakona održanja mase (jednačina kontinuiteta).

Gore navedeni oblik jednačina fluidnog kretanja (3.2.1) je bio Langražov oblik za nestišljive tokove homogenih fluida. Ojlerov oblik Ojlerovih jednačina za nestišljive tokove fluida u $\mathbb{R}^N, N = 2, 3$ glasi:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (3.2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.2.5)$$

\mathbf{g} predstavlja gravitacionu silu koja deluje na jedinicu mase (ranije u radu smo spominjali silu tela \mathbf{b} , gravitacija je primer sile tela).

Ojlerove jednačine koje opisuju kretanje idealnog, stišljivog fluida u $\mathbb{R}^N, N = 2, 3$ imaju sledeći oblik:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (3.2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0 \quad (3.2.7)$$

Jednačine (3.2.4) i (3.2.6) predstavljaju drugi Njutnov zakon kretanja o kome je bilo reči ranije, a (3.2.5) i (3.2.7) predstavljaju zakon održanja mase po kome se Ojlerove jednačine kretanja za stišljive i nestišljive fluide razlikuju.

Iraz $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ u jednačini (3.2.1) objašnjava kako divergencija utiče na brzinu. Primer takvog ponašanja može biti uzet iz prirode, na primer tok reke. Ako se tok reke sužava poput levka u jednom delu (konvergira) onda ukupna brzina toka raste. Ako se, pak, tok širi (divergira) onda brzina toka opada.

Iraz ∇p se u (3.2.1) može shvatiti da se čestice kreću kako se pritisak menja, posebno, kao tendencija da se udalje iz oblasti gde je pritisak viši. Međutim, što je gustina veća, teže je kretanje.

Ojlerove jednačine su nelinearne i kao što se vidi iz graničnog uslova divergencija $\nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \partial_j u_j$ nestaje.

Obe jednačine, Ojlerove i Navije-Stoksove su invarijantne u odnosu na Galilijske transformacije: Ako se koordinate pomere sa konstantnom brzinom tj. $y = x + vt$, onda je $\mathbf{u}(y, t) = \mathbf{u}(x, t) + \mathbf{v}$. Ako se koordinate rotiraju za neki fiksni ugao, onda se i brzina rotira za taj isti ugao.

3.2.1 Izvođenje Ojlerovih jednačina za nestišljive fluide

U delu 2. navedeni su osnovni zakoni dinamike, pre svega zakon održanja mase i zakon održanja energije. Ojlerove jednačine se lako izvode koristeći upravo ove zakona kao što sledi.

Neka je D oblast u dvodimenzionalnom ili trodimenzionalnom prostornom polju sa fluidom. Neka je $\mathbf{x} \in D$ tačka u oblasti D , $\mathbf{x} = (x, y, z)$ i posmatramo česticu fluida koja prolazi kroz tačku \mathbf{x} u vremenu t . Dalje, neka $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ označava brzinu pomenute čestice fluida koja se kreće. Za svako fiksirano vreme \mathbf{u} je vektorsko polje u D koje nazivamo vektorsko polje fluida.

U svakom vremenskom trenutku prepostavimo da fluid ima dobro definisanu gustinu mase koja je ranije pomenuta, a označavamo je sa $\rho(\mathbf{x}, t)$. Neka je W proizvoljna podoblast. Masa fluida u podoblasti W je odgovarajući integral gustine po toj oblasti. U daljem radu se prepostavlja da su funkcije \mathbf{u} i ρ dovoljno glatke da bi se mogle vršiti odgovarajuće operacije kalkulusa.

Prepostavimo da je tok fluida nestišljiv, da je celokupna energija kinetička i da je stopa promene kinetičke energije u delu fluida jednak stopi po kojoj pritisak i ostale sile tela deluju [5].

$$\frac{d}{dt} E_{kinetička} = - \underbrace{\int_{\partial W_t} p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA}_{prvi deo} + \underbrace{\int_{W_t} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} dV}_{drugi deo}. \quad (3.2.1.1)$$

\mathbf{b} predstavlja silu tela po jedinici mase (npr. $\mathbf{b} = \mathbf{g}$ gde je \mathbf{g} gravitaciono ubrzanje), dok $\rho \mathbf{b}$ predstavlja silu tela po jedinici zapremine.

Primenom zakona održanja energije (2.2.3.1) po kome je

$$\frac{d}{dt} E_{kinetička} = \int_{W_t} \rho \left\{ \mathbf{u} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \right\} dV$$

i teoreme divergencije u prvom delu jednakosti (3.2.1.1) dobija se:

$$\begin{aligned}\int_{W_t} \rho \left\{ \mathbf{u} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \right\} dV &= - \int_{W_t} (\operatorname{div}(p\mathbf{u}) - \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}) dV \\ &= - \int_{W_t} (\mathbf{u} \cdot \nabla p - \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}) dV\end{aligned}$$

jer je $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Prethodna jednačina je posledica zakona održanja momenta [5]. Ako pretpostavimo da je $E = E_{\text{kinetička}}$, onda fluid mora biti nestišljiv (osim ako je $p = 0$), jer u realnim fluidima uvek postoji unutrašnje trenje kao posledica mođumolekulskih sila, a kod idealnih, nestišljivih fluida se dejstvo međumolekularnih sila zanemaruje. U slučaju nestišljivog toka fluida Ojlerove jednačine su date sa:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{b}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

sa graničnim uslovom $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ na ∂D . $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ je oblik jednačine kontinuiteta kada je fluid nestišljiv, a onda se gustina mase ne menja tokom vremena, pa je $D\rho/Dt = 0$ sasvim jasno.

4 Vrtložnost-pojam, generisanje i matematičke osnove

U fizičkom smislu, vrtlozi su posebne pojave koje nastaju iz fluidnog kretanja, rotacijom fluidnih elemenata. Intuitivne slike ovako organizovanih struktura nalaze se svuda oko nas, od apstaraktnih univerzumskih pojava, koje ne možemo primetiti, do vrlo jednostavnih i lako uočljivih. Od slučajeva spiralnih galaksija u univerzumu do crvene mrlje na Jupiteru i raznih drugih ciklona, od uragana do tornada, od vrtloga načinjenih avionskim kretanjem do kovitlanja u turbinama, od vrtložnih prstenova koji se pojavljuju u oblaku nuklearnih eksplozija do vrtloga koji se pojavljuje kada se pusti određena količina vode da se izlije kroz slivnik kade. Vrtložnost koja je svojstvo fluida ima važnu ulogu u aerodinamici i rotirajućim tokovima.

Da li postoji razlika u ponašanju vrtložnosti? Naravno da postoji, a grubo govoreći to sve zavisi od vrste fluida kao i prostora u kome se vrtložnost javlja. Ako se, na primer, radi o idealnom fluidu i o neograničenom prostoru onda će vrtložnost biti neuništiva. Velika crvena mrlja na Jupiteru je ciklon koji se vekovima zadržavao na tom području. Navedene pojave vrtložnosti govore u prilog činjenici da je vrtložnost veoma važna u polju hidrodinamike, elektromagnetike, a i same meteorologije i njene dinamike.

4.1 Uvodni pojmovi

Vrtložnost definišemo kao rotor vektora brzine fluida, ili fizički kao ugaonu brzinu u određenoj tački u prostoru. Dakle, vrtložnost ima egzaktnu matematičku definiciju. Kada govorimo o vrtložnosti, skoro uvek je povezujemo sa pojmom rotacije i neke vrste translacije i cirkulacije. To, ipak, nije toliko striktno jer postoje nerotirajući tokovi kod kojih vrtložnost nije jednaka nuli. Ono što se za vrtložnost može reći je da ona predstavlja meru rotacije koja se ne može videti (mikroskopsko svojstvo). Da bi se prikazali matematički modeli, odnosno jednačina vrtložnosti, njena evolucija i generisanje, kao i sve bitne osobine potrebno je uvesti i objasniti ključne pojmove.

U daljem radu polje brzine biće označeno sa \mathbf{u} , a rotor datog polja, odnosno vektor vrtložnosti sa ξ .

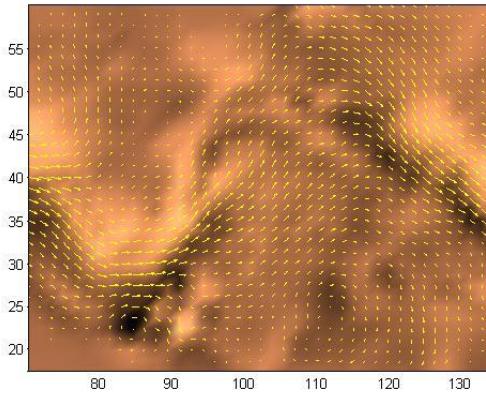
Definicija 4.1.1: Rotor vektorskog polja. *Rotor vektorskog polja \mathbf{F} označava se sa $\operatorname{curl} \mathbf{F}$ ili $\nabla \times \mathbf{F}$ i definiše se kao vektorsko polje koje ima magnitudu jednaku maksimalnoj cirkulaciji u svakoj tački i normalno je na ravan cirkulacije u svakoj tački.*

Fizički smisao rotora vektorskog polja je rotacija.

U Dekartovom koordinatnom sistemu, rotor vektorskog polja $\mathbf{F} = (u_1, u_2, u_3)$ je

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

Na slici 3. je dat primer rotora ugaone brzine u jednoj ravni sa vektorima brzine predstavljenim u istoj ravni.



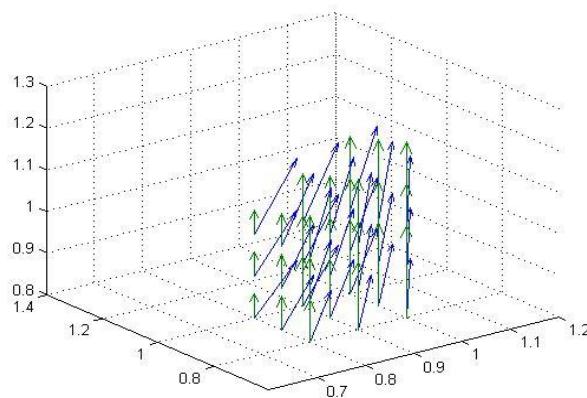
Slika 3: Primer rotora ugaone brzine u jednoj ravni sa vektorima brzine predstavljenim u istoj ravni,
(slika preuzeta sa sajta <http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/curl.html>)

4.1.2 Odnos vektora polja brzine i vrtložnosti

Već je navedeno da se vrtložnost definiše, u matematičkom smislu kao rotor vektorskog polja brzine. Međutim, kada se govori o vrtložnosti, obavezno se mora voditi računa o osnovnim zakonima dinamike fluida. Ako je fluid nestišljiv jednačina kontinuiteta se svodi na $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Ako se uzme primer kada nije zadovoljen navedeni uslov

$$\mathbf{u} = (x_2^2, x_1^2, x_3^2)$$

i ako se grafički predstavi dato polje brzine, odnosno njegovi vektori i rotor tog polja sa slike 4. se vidi da ti vektori nisu međusobno normalni.



Slika 4: Vektori polja brzine za polje bolje brzine $\mathbf{u} = (x_2^2, x_1^2, x_3^2)$ i rotor tog polja,
(Slika dobijena u programskom jeziku Matlab)

Plavi vektori su vektori brzine, a zelena boja označava rotor. Vidi se da ovi vektori međusobno nisu ortogonalni, ali takođe je i $\nabla \cdot \mathbf{u} \neq 0$. Kada je u pitanju polje brzine \mathbf{u} u R^2 , odnosno tok je

dvodimenzionalni i ako za to polje važi $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, pomenuti vektori jesu ortogonalni. O tome govori sledeća teorema:

Teorema 4.1.2.1: Neka je \mathbf{u} glatko rešenje Ojelrove jednačine u \mathbb{R}^2 . Tada su sledeće veličine održane tokom vremena:

Ukupan fluks vrtložnosti

$$\Omega_2 = \int_{\mathbb{R}^2} \xi \, dx$$

Heličnost je nula, $H_2 \equiv 0$, gde je H_2 definisano sa:

$$H_2 = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{u} \cdot \xi \, dx.$$

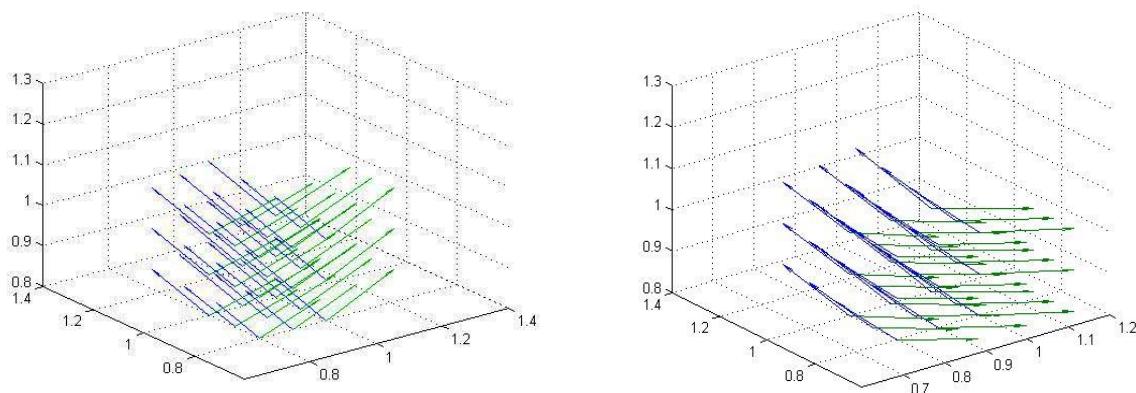
Heličnost je, dakle skalarna vrednost definisana kao integral unutrašnjeg proizvoda vektora brzine i vrtložnosti.

U slučaju trodimenzionalnog toka može se naći primer gde je polje brzine ima divergenciju 0 ali i dalje nemamo normalnost.

Sledeći primer pokazuje da ako je polje takvo da važi $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, $\mathbf{u} = (-xy, 1/2y^2, xy)$ to i dalje ne znači da je vektor brzine normalan na vrtložnost. O tome govori slika 5.

Suština odnosa nije u dimenziji polja, već u heličnosti polja. Kada heličnost polja nije nula, vrtložnost i brzina neće biti normalni vektori.

Normalizovana heličnost uzima vrednosti između -1 i 1 i fizički predstavlja ugao između vektora brzine i vektora vrtložnosti. Normalizovana heličnost je dobar indikator koji ukazuje kako je polje brzine orijentisano u odnosu na vektorsko polje vrtložnosti za dati tok.



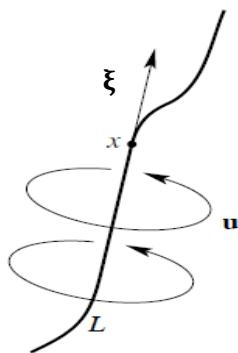
Slika 5: Levo su prikazani vektori polja brzine za polje brzine $\mathbf{u} = (-xy, 0.5y^2, xy)$ i rot tog polja, desno isto to za polje brzine $\mathbf{u} = (-0.8x, 0.8y, xy)$

4.2 Vrtložne linije, listovi (sheets) i vrtložne cevi

Pojmovi kao što su vrtložna linija i vrtložna cev često će se pominjati u narednim delovima rada, pa je zbog toga bitno te pojmove unapred predstaviti i objasniti.

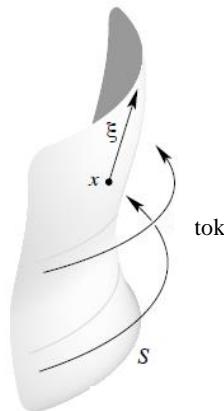
Vrtložna linija se definiše analogno strujnicama, kao linija u fluidu, tako da je u svakoj tački date linije vektor vrtložnosti tangentan liniji. Tačnije vrtložna linija je u svakoj tački paralelna vektoru vrtložnosti. Jačina vektora vrtložnosti nije svuge ista duž linije vrtloga kao što ni vektor brzine nije neizbežno konstantan duž strujnice.

Vrtložna linija ne može početi i završiti se u unutrašnjosti fluida, ali se kreće sa fluidom, a prikazana je na slici 6.



Slika 6: Vrtložna linija
(Slika preuzeta iz knjige A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics [5])

Vrtložni list se definiše kao površina u fluidu koja je tangentna u svakoj tački na vektor vrtložnosti, slika 7.



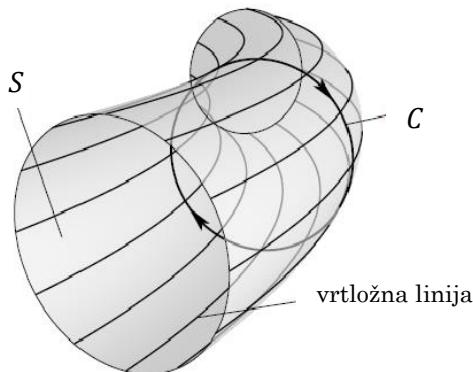
Slika 7: List vrtloga,
(Slika preuzeta iz knjige A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics [5])

Koncept kinematike vrtložnosti tokova se prirodno opisuje upotrebom koncepta vrtložnih filamenata i vrtložnih cevi.

Vrtložna cev, slika 8, se sastoji od dvodimenzionalne površine S koja je svugde tangentna sa ξ , sa vrtložnim linijama provućenim kroz svaku tačku granične krive C površi S . Jednostavnije rečeno,

vrtložna cev je kolekcija vrtložnih linija. Ove vrtložne linije su integralne krive vrtložnosti ξ i proširene su što je više moguće u svim pravcima. Dakle, vektor vrtložnosti ξ je paralelan bočnoj površini vrtložne cevi, tj. $\xi \cdot \mathbf{n} = 0$. Snaga vrtložne cevi se definiše kao cirkulacija oko iste (o cirkulaciji će biti više reči kasnije) i konstantna je duž cevi. Približnije, snaga vrtložne cevi je integral vrtložnosti preko otvorene površi koja seče vrtložnu cev i koji je nezavisan od izbora navedene otvorene površi. Zbog toga se vrtložna cev i linije koje je formiraju ne mogu nikada završiti. Sledi da je cirkulacija oko zatvorene, svodljive krive jednaka integral vrtložnosti oko otvorene površi ograničene krivom. One se moraju širiti do bekonačnosti ili se zatvoriti u petlje.

Prosečna magnituda vrtložnosti unutar vrtložne cevi je obrnuto proporcionalna presečnoj površini tube.

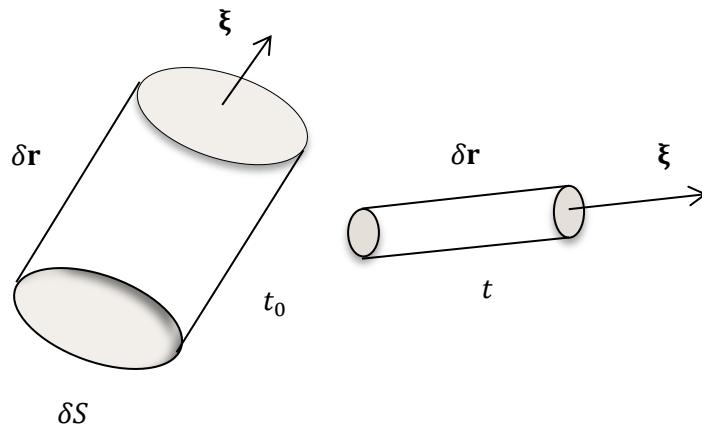


Slika 8: Vrtložna cev koja se sastoji od vrtložnih linija provučenih kroz tačke krive C ,
(Slika preuzeta iz knjige *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics* [5])

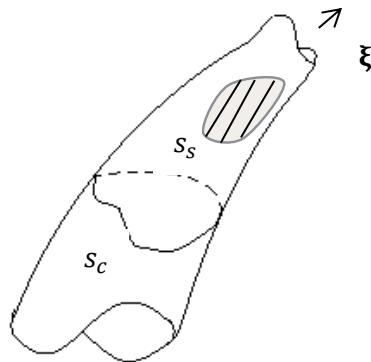
Označimo sa s_C proizvoljnu, zatvorenu, fluidnu kružnu putanju na površini vrtložne cevi i koja je opkružuje (slika 10). Pod prepostavkom da je u pitanju kretanje takvo da je cirkulacija oko bilo koje kružne putanje konstanta, onda će i cirkulacija oko ove fluidne kružne putanje biti konstantna. Neka je s_s kružna fluidna putanja na površni vrtložne cevi ali tako da je ne opkružuje (slika 10). Fluks vrtložnosti kroz površinu ograničenu ovakvom kružnom putanjom biće nula.

Važna veza između vrtložnosti i dužine fluidnog elementa sledi iz zakona održanja inteziteta vrtložne cevi. Neka je t_0 određeni trenutak, dužina malog fluidnog elementa (element vrtložne cevi) je $\delta\mathbf{r}(t)$, a površina preseka $\delta S(t_0)$. Uzimajući u obzir male veličine elemenata, pravci vektora $\delta\mathbf{r}$ i ξ se poklapaju. U narednom trenutku t , cev će promeniti svoju veličinu i poziciju kao što je prikazano na slici 9. Prema zakonu održanja vrtložnog fluksa:

$$|\xi(t)|\delta S(t) = |\xi(t_0)|\delta S(t_0)$$



Slika 9: Koncept izduživanja linije vrtloga



Slika 10: Šema proizvoljne vektorske tube

Prema zakonu održanja mase:

$$\rho \delta S \delta s|_t = \rho \delta S \delta s|_{t_0}$$

Uzimajući u obzir pravac vektora, dobija se sledeća veza:

$$\frac{(\xi/\rho)_t}{|\xi(\rho)|_{t_0}} = \frac{\delta \mathbf{s}(t)}{|\delta \mathbf{s}(t_0)|}$$

ili, ako je fluid nestišljiv:

$$\frac{\xi(t)}{|\xi(t_0)|} = \frac{\delta \mathbf{s}(t)}{|\delta \mathbf{s}(t_0)|}$$

Prethodni izraz ima prilično očigledno, fizičko značenje. Pri promeni veličine malog fluidnog elementa, vektor lokalne vrtložnosti se menja baš kao i dužina malog elemnta. Može se zaključiti da istezanje linije vrtložnosti vodi ka pojačanju vrtložnosti. Ovakv efekat je važan u analizi turbulentacije[1].

Vrtložni prsten je vrtlog torusnog oblika u fluidu. Oblast gde se fluid najviše kovitla oko zamišljene osne linije formira zatvorenu petlju. Dominatni tok u vrtložnom prstenu se naziva torodialan.

4.3 Generisanje vrtložnosti

Vrtložnost je sastavni deo cirkulacije, a na pojedinačnim lokacijama predstavlja čistu rotaciju i naglašava ideju kako se fluid može rotirati. Vrtložnost dozvoljava jasan razvoj matematičkog izučavanja fluidnog kretanja. Stresovi koji se javljaju unutar fluida zavise od gradjenata brzine, pa je i sama vrtložnost kombinacija istih. Vrtložno polje je solenoidalno⁴. Ako ξ predstavlja vektor vrtložnosti onda je:

$$\operatorname{div} \xi = 0,$$

jer je divergencija rotora identički jednaka nuli. Upravo zato što je divergencija vrtložnosti jednaka nuli *fluks vrtložnosti* izvan bilo koje zatvorene površi unutar fluida je nula. Ako je zatvorena površ vrtložna cev, onda se *vrtložne cevi* moraju zatvoriti u sebi tako da formiraju *vrtložni prsten*. Vektor vrtložnosti ima brojna svojstva koja karakterišu vektor brzine nestišljivog fluida [17].

U narednom delu su predstavljeni načini na koje se može generisati vrtložnost, a u daljim delovim rada predstavljeno je detaljno izvođenje jednačine vrtložnosti, pa se tako dolazi i do zapažanja da za neviskozne fluide vrtložnost se prenosi i izteže duž putanje čestice za trodimenzionalne tokove, dok za dvodimenzionalne dolazi do održanja duž putanje čestice.

Postavlja se pitanje kako tok koji je početno nerotirajući može proizvesti vrtložnost? Trusdel[22] je zaključio sledeće: "U kretanju homogenih, viskoznih, nestišljivih fluida, pod dejstvom konzervativne, strane sile i sa početkom od kraja, ako postoje konačne, stacionarne granice prema kojima tečnost odilazi bez klizanja, onda moraju postojati neke čestice čija vrtložnost nije analitička funkcija vremena u početnom trenutku."

Mera vrtložnosti se teško određuje, ali samo prisustvo vrtložnosti u fluidu se lako određuje računanjem cirkulacije koju označavamo sa Γ i definiše se na sledeći način [5]:

Neka je C jednostavna zatvorena kontura u fluidu u trenutku $t = 0$. Neka je C_t kontura duž toka. Drugim rečima:

$$C_t = \varphi_t(C)$$

Gde je φ_t funkcija toka fluida.

Definicija 4.3.1: Cirkulacija oko C_t se definiše kao krivolinijski integral

$$\Gamma_{C_t} = \oint_{C_t} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}. \quad (4.3.1)$$

Prema Stoksovom teoremi⁵ navedeni integral može biti transformisan u površinski:

⁴ U vektorskom računu solenoidalno vektorsko polje (ili nestišljivo vektorsko polje) je vektorsko polje \mathbf{v} sa divergencijom jednakoj nuli: $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$.

⁵ Ako su projekcije $u_x(x, y, z), u_y(x, y, z)$ i $u_z(x, y, z)$, neke vektorske funkcije $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, neprekidne kao i njihovi odgovarajući parcijalni izvodi, na površi S , koja je zatvorena prostornom krivom C , tada je: $\oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS (= \iint_S (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S})$

$$\Gamma = \oint_{C_t} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_S \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

gde je S površina ograničena orijentisanom krivom C_t . \mathbf{n} je jedinična normala.

Kada se kruto telo rotira ugaonom brzinom ω , onda je brzina na razdaljini r od ose obrtanja jednaka:

$$\mathbf{u} = r\omega$$

Cirkulacija Γ je jednaka:

$$\Gamma = \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r \mathbf{u} = 2r^2 \omega$$

a vrtložnost:

$$\xi = \frac{\Gamma}{\pi r^2} = 2r^2 \omega$$

Specijalan slučaj krute rotacije je planeta Zemlja.

Veoma bitan rezultat u teoriji vrtložnosti jeste Kelvinova teorema o cirkulaciji, ali pre formulacije teoreme objasnićemo pojam izentropskog toka. Izentropski tok je stišljiv tok u kome entropija⁶ ostaje konstantna u polju toka. Ako se entropija fluidnog elementa kreće duž strujnice i ostaje konstantna u toku, onda je tok izentropski duž strujnice. Vrednost entropije može biti različita duž različitih strujnica. Jedan primer je polje toka koje nastaje nakon udarnog talasa. Takav tok je adijabatski⁷ i reverzibilan.

Teorema 4.3.1 [5] (Kelvinova teorema o cirkulaciji): Za izentropski tok (specijalan slučaj barotropskog⁸ toka kada je pritisak funkcija gustine) bez spoljašnjih sila, cirkulacija Γ_{C_t} je konstantna tokom vremena.

U slučaju nestišljivih, barotropskih tokova stopa promene cirkulacije oko zatvorene konture koja se sastoji od istih fluidnih elemenata je jednaka nuli.

Dokaz: Koristimo činjenicu da je tok izentropski bez spoljašnjih sila, tj. $\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla w$, gde w predstavlja entalpiju⁹, i koristimo lemu:

$$\frac{d}{dt} \int_{C_t} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_t} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{s}$$

⁶ Entropija je težnja sistema da pređe u stanje veće neuređenosti, dakle entropija je merilo neuređenosti sistema

⁷ Izraz koji se javlja u termodinamici. Adijabatski proces je proces u kojem nema prenosa toplove prema ili iz fluida. Naziv „adijabatski“ doslovno znači odsutnost prenosa toplove.

⁸ Barotropski tok je generalizacija barotropske atmosfere (izraz koji se javlja u meteorologiji i predstavlja takvu atmosferu u kojoj gustina zavisi samo od pritiska). Dakle, to je tok u kome je pritisak samo funkcija gustine i obrnuto.

⁹ Entalpija se definiše kao termodinamički potencijal koji se sastoji od unutrašnje energije sistema plus proizvod pritiska i zapreme sistema.

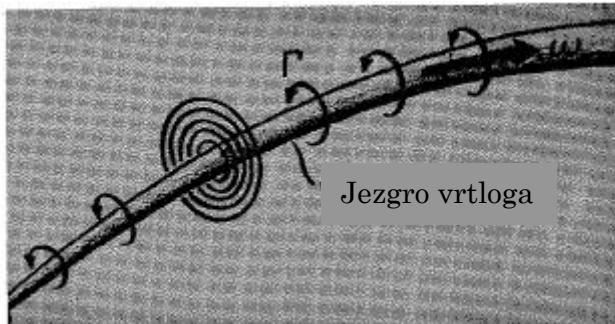
$$= - \int_{C_t} \nabla w \cdot ds = 0 \quad (C_t \text{ je zatvorena kriva})$$

Posledica 4.1 (Helmholcovo održanje fluksa vrtložnosti): Za glatko rešenje \mathbf{u} Ojlerove jednačine, fluks vrtložnosti $F_{S(t)}$ kroz površinu $S(t)$ i koji se kreće sa fluidom:

$$F_{S(t)} = \int_{S(t)} \boldsymbol{\xi} \cdot ds,$$

je konstantan u odnosu na vreme.

Nerotirajuće sile tela, koje se često sreću u problemima vezanim za dinamiku fluida, ne proizvode cirkulaciju. Samim tim, efekat sile tela može biti izostavljen kada je reč o generisanju vrtložnosti. Šta to sve znači? Ako postoji određena cirkulacija oko C onda fluid koji leži na površini ograničenoj sa C mora posedovati vrtložnost. Ako je cirkulacija nula za svaku krivu u određenoj oblasti onda fluid u toj oblasti ne može posedovati vrtložnost i kretanje se naziva nerotirajuće. Vrtložnost može biti rasprostranjena kroz celi fluid, mada je vrtložnost često velika samo na tankoj niti fluida dok je ostatak fluida praktično bez vrtložnosti. Cela vrtložnost se može sjediniti u koncentrične vrtložne linije oko kojih se fluid rotira. Konačna veličina cirkulacije oko jezgra zahteva da vrtložnost bude beskonačna na liniji vrtloga, koja ima površinu preseka jednaku nuli, slika 11.



Slika 11: Šematski prikaz jezgra vrtloga ugrađenog u, inače, nerotirajući fluid,
(Slika preuzeta iz rada *Film Notes for Vorticity*, Massachusetts Institute of Technology [20])

U neviskoznim, nestišljivim fluidima uniformne gustine i u neviskoznim stišljivim fluidima (pod pretpostavkom da je tok homentropski¹⁰), unutrašnje sile vrtložnosti ne postoje. Ali u stišljivim, nehomentropskim fluidima, sile pritiska obezbeđuju unutrašnje izvore vrtložnosti.

Ako su vrtložni izvori usled dejstva pritiska odsutni, vrtložni fluks ili cirkulacija ne mogu biti kreirani u unutrašnjosti fluida.

Poznati su brojni načini generisanja vrtložnosti, a neki su navedeni u nastavku.

¹⁰ U mehanici fluida homentropski tok ima uniformnu i konstantnu entropiju. U termodinamici je mera broja specifičnih načina na koje termodinamički sistem može biti uređen kao mera poremećaja.

4.3.1 Generisanje vrtložnosti udarnim talasima

Jedan način da se stvori vrtložno kretanje je upravo udarni talas, i takav način formiranja vrtložnosti u fluidnom kretanju je prvo posmatrao Hadamard [12] i koji je uočio da tok postaje rotirajući nedugo nakon udarnog talasa. To pakazuju i Kroko–Vazsoni [17] jednačine date na sledeći način:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\xi} - T \nabla S = \mathbf{f} - \nabla H + \boldsymbol{\mu} \quad (4.3.1.1)$$

gde H , T i S predstavljaju entalpiju, temperaturu i entropiju, redom. $\boldsymbol{\mu}$ predstavlja skup svih viskoznih sила, dok prethodna jednačina u odsustvu viskoznosti postaje Krokova jednačina. $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\xi}$ se naziva Lambov vektor i prenosi čestice fluida koje se kreću u okolini u smeru kretanja vrtložnosti. $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\xi}$ se javlja u evoluciji i transverzalnih i logitudinalnih procesa. Vektor vrtložnosti $\boldsymbol{\xi}$ zavisi od stope promene entalpije i entropije i normalan je na strujnice. Ako sve strujnice imaju isto H i različito S dolazi do formiranja vrtložnosti.

U ovom delu rada još uvek nije navedena jednačina vrtložnosti, međutim, ako bi se primenio rotor i divergencija na jednačinu (4.3.1.1) lako se dolazi do jednačine transporta vrtložnosti što predstavlja matematičku vezu između navedene jednačine (4.3.1.1) i vrtložnosti.

4.3.2 Generisanje vrtložnosti slobodnim konvektivnim¹¹ tokom i uzgonom

Ovo je važan izvor vrtložnosti u atmosverskim¹² i okeanografskim¹³ tokovima. Slobodan konvektivni tok biva uzrokovani uzgonom. Uzgon je sila koja deluje na sva tela uronjena u fluida koji se nalazi u potencijalnom polju sila. Sila uzgona suprotnog je smera od vektora težine tela u gravitacijskom polju, a intezitet joj je proporcionalan zapremini uronjenog tela u gustini fluida. Temperaturne razlike izazivaju različita ponašanja u fluidu, hladni fluidi teže da opadaju, a topli da rastu. Ove temperaturne razlike uzrokuju promene u fluidnim svojstvima. U ovom slučaju se često koriste aproksimacije, jer je detaljna analiza kompleksna. U takvim aproksimacijama varijacije svih osobina osim gustine se zanemaruju. Jednačina kontinuiteta u slučaju konstantne gustine ima oblik:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Navija-Stoksova jednačina je data sa:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}$$

¹¹ Konvekcija u fizici predstavlja prenos toplote strujanjem fluida. Postoji prirodna i nametnuta konvekcija. U meteorologiji, konvekcija predstavlja prenos toplote vertikalnim strujanjem gase. Vazduh se uz površinu zemlje zagreje i postaje ređi, pa se diže uvis jer ga potiskuje i nadomješta hladniji, gušći vazduh iz visina. Razlikuje se **slobodna konvekcija**, koja nastaje zbog razlika u gustini vazduha i prisilna konvekcija koja nastaje pri dizanju vazduha uz padine brda.

¹² Atmosferski tok uobičajeno podrazumeva regionalna kretanja vazduha oko površine sa niskim i visokim pritiskom

¹³ Okeanski tokovi koji su često posledica turbulencija i predmet su izučavanja fizičke geografije koja se bavi okeanskim istraživanjima.

gde \mathbf{F} predstavlja silu tela, i uobičajeno predstavlja efekat gravitacije, tj. $\mathbf{F} = \rho\mathbf{g}$. Gravitaciono ubrzanje se izvodi preko potencijala i dato je sa $\mathbf{g} = -\nabla\varphi$. Sa promenom gustine, $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$, očigledno dolazi do promene sile \mathbf{F} . Dakle, \mathbf{F} sada postaje:

$$\mathbf{F} = -(\rho_0 + \Delta\rho)\nabla\phi = -\nabla(\rho_0\phi) + \Delta\rho\mathbf{g}$$

Kada se date promene uvedu u Navije-Stoksovou jednačinu dobije se:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla(\rho_0\phi + p) + \Delta\rho\mathbf{g} + \mu\nabla^2\mathbf{u}.$$

Uvedimo oznaku $P = \rho_0\phi + p$. Tada Navije-Stoksova jednačina ima oblik [17]:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla P + \Delta\rho\mathbf{g} + \mu\nabla^2\mathbf{u}.$$

Pod pretpostavkom da su sva ubrzanja u toku mala u odnosu na $|\mathbf{g}|$, onda zavisnost ρ od T (temperatura) može biti linearizovana, tj.:

$$\Delta\rho = -\alpha\rho_0\Delta T,$$

gde je α koeficijent širenja u fluidu. Dalje se lako dobija Bosineskova dinamička jednačina:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \left(\frac{-1}{\rho}\right)\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u} - \mathbf{g}\alpha\Delta T. \quad (4.3.2.1)$$

Izraz $-\mathbf{g}\alpha\Delta T$ u prethodnoj jednačini je poznat kao uzgonska sila.

Očekuje se da širok domen ponašanja dinamike fluida zavisi od važnosti uzgonske sile. Kada je uzgonska sila zanemarljiva, pojaviće se konvekcija. Kada se to dešava samo zbog kretanja, javlja se slobodna konvekcija. Ako se primeni rotor na jednačinu (4.3.2.1), dobija se jednačina vrtložnosti.

4.3.3 Generisanje vrtložnosti barokliničkim efektom

Rezultat Kelvinove teoreme za potencijalne sile tela i neviskozne tokove daje sledeću jednakost:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = -\oint \frac{dp}{\rho} \quad (4.3.3.1)$$

Γ predstavlja cirkulaciju, p pritisak, a ρ gusatinu kao i do sada.

U opštem slučaju, barotropska situacija je ona u kojoj se površina konstantnog pritiska i površina konstantne gusotine podudaraju, a baroklinička je ona u kojoj se one seku. U fluidu koji nije iste gusotine sve vreme, izvor vrtložnosti u jednačini vrtložnosti će se pojaviti kada god se površine konstantne gusotine i površine konstantnog pritiska ne poklapaju. Dobar primer koji ilustruje barokliničko generisanje cirkulacije je primer kopneno-morskog povetarca. Temperaturne razlike između vazduha preko površine mora i površine zemlje prave razlike u gusini zemljane vazdušne mase i vazdušne mase mora.

Kao što je gore opisano, baroklinički termin je izvor vrtložnosti u jednačini vrtložnosti i izведен je uzimanjem rotora gradijenta pritiska u Navije-Stoksovoj jednačini:

$$\nabla \times \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p \right) = \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p$$

Dakle, jasno se vidi da je baroklinički izraz različit od nule ukoliko se gradijent pritiska i gradijent gustine ne poklapaju.

4.4 Rotacija i vrtložnost, matematička veza i jednačine

Već je navedno da su pojava vrtložnosti i rotacije povezane. To do sada u radu nije matematički opisano. Cela priča o vrtložnosti može lepo matematički da se predstavi i opiše, što i jeste cilj ovog master rada.

Naime, ako je $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ polje brzine fluida, onda se njegov rotor:

$$\boldsymbol{\xi} = \nabla \times \mathbf{u} = (\partial_y u_3 - \partial_z u_2, \partial_z u_1 - \partial_x u_3, \partial_x u_2 - \partial_y u_1)$$

naziva polje vrtložnosti toka.

Pokazaćemo da je u malim okolinama svake tačke fluida polje brzine \mathbf{u} zbir (krute) translacije, deformacije i (krute) rotacije $\boldsymbol{\xi}/2$, što je generalna činjenica za vektorska polja u \mathbb{R}^3 . Neka je \mathbf{x} tačka u \mathbb{R}^3 , i neka je $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{h}$ obližnja tačka. Tada važi sledeće [5]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \times \mathbf{h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (4.4.1)$$

gde je $\mathbf{D}(x)$ simetrična matrica dimenzija 3×3 , a $h^2 = \|\mathbf{h}\|^2$ je kvadratna dužina od \mathbf{h} .

Dokaz formule (4.4.1): Neka je:

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \partial_x u_1 & \partial_y u_1 & \partial_z u_1 \\ \partial_x u_2 & \partial_y u_2 & \partial_z u_2 \\ \partial_x u_3 & \partial_y u_3 & \partial_z u_3 \end{bmatrix}$$

matrica Jakobijana od \mathbf{u} . Prema Tejlorovom razvoju sledi,

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (4.4.2)$$

gde $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}$ predstavlja matrično množenje, a \mathbf{h} vektor kolonu. Neka je:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\top]$$

gde \top označava transponovanje i

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^\top].$$

Tada je:

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{D} + \mathbf{S} \quad (4.4.3)$$

Lako se proverava da je \mathbf{S} oblika:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Gde je $\xi_1 = \partial_y u_3 - \partial_z u_2$, $\xi_2 = \partial_z u_1 - \partial_x u_3$, a $\xi_3 = \partial_x u_2 - \partial_y u_1$, tj $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Takođe, lako se proverava da je:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{h} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{h} \quad (4.4.4)$$

■

Kada uvrstimo (4.4.3) i (4.4.4) u (4.4.2) sledi formula (4.4.1).

Posledica 4.4.1 [5]: Svako nestišljivo polje brzine $\mathbf{u}(x, t)$ je suma infinitezimalne rotacije, translacije i deformacije brzina.

\mathbf{D} se naziva tenzor deformacije, dok je \mathbf{S} rotirajuća matrica. Kako je \mathbf{D} simetrična matrica transformacija sličnosti se može svesti na dijagonalnu sa elementima d_i na dijagonalni. Ako je tok nestišljiv onda je $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ i $\operatorname{tr} \mathbf{D} = \sum_{i=1}^3 d_{ii} = 0$, gde tr predstavlja trag matrice. \mathbf{D} je simetrična matrica i za neku rotirajuću matricu Λ važi da je $\Lambda \mathbf{D} \Lambda^\top = \operatorname{diag}(d_1, d_2, d_3)$.

Kako je trag matrice invarijantan u odnosu na ortogonalne transformacije i kako je trag matrice \mathbf{D} jednak nuli sledi da je:

$$d_1 + d_2 + d_3 = 0 \quad (4.4.5)$$

Da bi se opisala veza između vrtložnosti i deformacije uvodi se jedna velika klasa egzaktih, jednostavnih rešenja Navije-Stoksovih i Ojlerovih jednačina.

Propozicija 4.4.2 [16]: Neka je $\mathbf{D}(t)$ realna simetrična matrica 3×3 , sa $\operatorname{tr} \mathbf{D}(t) = 0$. Tada se vrtložnost $\boldsymbol{\xi}(t)$ računa iz ODJ:

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \mathbf{D}(t) \cdot \boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{\xi}|_{t=0} = \boldsymbol{\xi}_0 \in \mathbb{R}^3 \quad (4.4.6)$$

gde je asimetrična matrica \mathbf{S} data u obliku $\mathbf{S} \cdot \mathbf{h} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{h}$. Onda su:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}(t) \times \mathbf{x} + \mathbf{D}(t) \mathbf{x} \quad (4.4.7)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2} [\mathbf{D}_t(t) + \mathbf{D}^2(t) + \mathbf{S}^2(t)] \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \quad (4.4.8)$$

egzaktna rešenja trodimenzionalnih Ojlerovih i Navije – Stoksovih jednačina.

Pritisak p ima kvadratno ponašanje po \mathbf{x} i ova rešenja imaju fizičko značenje samo lokalno u prostoru i vremenu. Kako je brzina linearna po \mathbf{x} , efekti viskoznosti ne utiču na ova rešenja. Navedena rešenja predstavljaju model tipičnog lokalnog ponašanja nestišljivih tokova.

Dokaz propozicije 4.4.2: Računanjem izvoda ∂_{x_k} Navije-Stoksovih jednačina (3.2.1) po komponentama dobija se:

$$(\mathbf{u}_{x_k}^i)_t + \mathbf{u}^j (\mathbf{u}_{x_k}^i)_{x_j} + \mathbf{u}_{x_k}^i \mathbf{u}_{x_j}^i = -p_{x_i x_k} + \mathbf{v}(\mathbf{u}_{x_j}^i)_{x_i x_j}$$

Uvodi se označa $V \equiv (\mathbf{u}_{x_k}^i)$ i $P \equiv (p_{x_i x_k})$ za Hesijan matrice za pritisak p , i dobija se matrična jednačina za V :

$$\frac{DV}{Dt} + V^2 = -P + \nu\Delta V. \quad (4.4.9)$$

Matrica V se dekomponuje na simetrični i asimetrični deo, $\mathbf{D} = \frac{1}{2}[V + V^\top]$, $\mathbf{S} = \frac{1}{2}[V - V^\top]$. Tada \mathbf{D} i \mathbf{S} zadovoljavaju formulu $V^2 = \mathbf{D}^2 + \mathbf{S}^2 + (\mathbf{DS} + \mathbf{SD})$ gde je prvi izraz simetričan, a drugi asimetričan. Uvrstimo formulu za V^2 u jednačinu (4.4.9). Sledi da je simetričan deo te formule dat sa:

$$\frac{D\mathbf{D}}{Dt} + \mathbf{D}^2 + \mathbf{S}^2 = -P + \nu\Delta\mathbf{D} \quad (4.4.10)$$

a asimetričan:

$$\frac{D\mathbf{S}}{Dt} + \mathbf{DS} + \mathbf{SD} = \nu\Delta\mathbf{S} \quad (4.4.11)$$

Koristi se da je $\mathbf{S} \cdot \mathbf{h} = \frac{1}{2}\xi \times \mathbf{h}$, $\xi \times \mathbf{h} = (\xi_2 h_3 - \xi_3 h_2, -\xi_1 h_3 + \xi_3 h_1, \xi_1 h_2 - \xi_2 h_1)$, \mathbf{D} je simetrična matrica i bez umanjenja opštosti može se pretpostaviti da je $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, d_2, d_3)$, pa nakon množenja i sređivanja jednačine (4.4.11) dobije se da se jednačina (4.4.11) može posmatrati kao sledeća jednačina:

$$\frac{D\xi}{Dt} = \mathbf{D}\xi + \nu\Delta\xi. \quad (4.4.12)$$

Jednačina vrtložnosti (4.4.12) je izvedena direktno iz Navije-Stoksove jednačine. Kako je $\text{curl } \mathbf{u} = \xi$, i ξ ne zavisi od prostorne promenljive \mathbf{x} , onda su oba izraza $\Delta\xi$ i $\mathbf{u} \cdot \Delta\xi$ jednaka nuli.

Jednačina vrtložnosti (4.4.12) se stoga redukuje na ODJ:

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathbf{D}\xi \quad (4.4.13)$$

Za dato \mathbf{D} lako se može odrediti ξ . Ako je $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, onda je \mathbf{D} matrica 3×3 i (4.4.13) se svodi na sistem tri obične diferencijalne jednačine, koje se lako rešavaju sa obzirom da je data matrica dijagonalna.

Primer 6.1: Rotirajući mlaz. Iz (4.4.5) bez umanjenja opštosti može se pretpostaviti da je $\mathbf{D} = (-d_1, -d_2, d_1 + d_2)$. Vektor vrtložnosti u $t = 0$ ima koordinate $\xi_0 = (0, 0, \xi_0)$. Tada se (4.4.6) svodi na skalarnu jednačinu, običnu diferencijalnu jednačinu:

$$\frac{d\xi}{dt} = (d_1 + d_2)\xi$$

Odakle se, rešavanjem ODJ dobija da je:

$$\xi(t) = \xi_0 e^{(d_1 + d_2)t}$$

Vrtložnost raste eksponencijalno sa vremenom, s obzirom da su d_i –ovi pozitivni brojevi.

U slučaju da je $\mathbf{D} = 0$ i $\xi_0 = (0, 0, \xi)$ dobija se vrtlog. Iz (4.4.7) sledi da je:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \left(-\frac{1}{2}\xi_0 x_2, \frac{1}{2}\xi_0 x_1, 0 \right)$$

Ovaj tok predstavlja krutu rotaciju u (x_1, x_2) ravni, sa ugaonom brzinom $\frac{1}{2}\xi_0$.

Nerotirajući tok koji postaje naprezajući (nezavisan od x_3) stavljanjem da je $\xi_0 = 0$ i $\mathbf{D} = (-d, d, 0), d > 0$. Iz jednačine (4.4.7) dobija se:

$$\mathbf{u}(x, t) = (-dx_1, dx_2, 0).$$

Ovaj tok je nerotirajući.

Ostaje još da se pokaže da simetrični deo u Navije-Stoksovoj jednačini (4.4.7) određuje pritisak p . ξ određuje \mathbf{S} preko $\mathbf{S} \cdot \mathbf{h} = \frac{1}{2}\xi \times \mathbf{h}$, (4.4.10) daje:

$$-P = \frac{D\mathbf{D}}{Dt} + \mathbf{D}^2 + \mathbf{S}^2$$

Desna strana prethodne jednačine predstavlja simetričnu matricu. Kako je $P(t)$ simetrična matrica, ona predstavlja Hesian skalarne funkcije. Zapravo, $p(x, t)$ je eksplisitna funkcija:

$$p(x, t) = \frac{1}{2}P(t)x \cdot x$$

Takvo p i \mathbf{u} zadovoljavaju Navije-Stoksove jednačine.

Može se pokazati da svaki dvodimenzionalni tok uvek generiše veliku familiju trodimenzionalnih tokova sa izduživanjem.

4.4.1 Klasa egzaktnih rešenja za Navije- Stoksove jednačine

Sledeća, velika, klasa egzaktnih “shear-layer” rešenja Navije-Stoksovih jednačina dobro ilustruje efekte konvekcije, vrtložnog izduživanja i difuzije. U jednačini (4.4.12) izraz $D\xi/Dt$ predstavlja konvekciju od ξ duž putanje čestice. Izraz $\mathbf{D}\xi$ je, kao što je već napomenuto, odgovoran za vrtložno istezanje. Vrtložnost ξ se povećava (smanjuje) kada se poklopi sa karakterističnim vektorom koji odgovara pozitivnom (negativnom) karakterističnom korenu matrice \mathbf{D} . Viskozni izraz $\nu\Delta\xi$ vodi ka difuziji vrtložnosti.

Neka je dat nerotirajući tok (strain flow) [16]:

$$\mathbf{u}(x, t) = (-\gamma x_1, \gamma x_2, 0)^T, \quad \gamma > 0$$

Sa odgovarajućim pritiskom:

$$p(x, t) = \frac{1}{2}\gamma(x_1^2 + x_2^2)$$

Neka postoji i treća komponenta brzine koja zavisi od vremena i od promenljive x_1 . Tada, tražimo rešenje Navije-Stoksovih jednačina sa brzinom:

$$\mathbf{u}(x, t) = (-\gamma x_1, \gamma x_2, u_3(x_1, t))^\top$$

A vrtložnost koja odgovara toj brzini je $\xi = (0, -\partial u_3 / \partial x_1, 0)$

Navije-Stoksova jednačina za treću komponentu polja brzine \mathbf{u} je:

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} - \gamma x_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \nu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}$$

$$u_3|_{t=0} = u_3(x_1)$$

Jednačina vrtložnosti za drugu komponentu ξ_2 je (lako se odredi diferenciranjem prethodne jednačine po x_1):

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial t} - \gamma x_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = \gamma \xi_2 + \nu \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1^2} \quad (4.4.1.1)$$

$$\xi_{2,t}|_{t=0} = \xi_{2,0}(x_1) = -\frac{\partial u_{3,0}}{\partial x_1}(x_1) \quad (4.4.1.2)$$

gde $-\gamma x_1$ predstavlja konvekciju brzine, $\gamma \xi_2$ vrtložno izduženje, difuzija je predstavljena kroz izraz $\nu \partial^2 \xi_2 / \partial x_1^2$. U ovom slučaju se vrtložnost povećava sa porastom vremena, jer se podudara sa karakterističnim korenom matrice $\mathbf{D} = \text{diag}(-\gamma, \gamma, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ koji odgovara pozitivnom γ . U zavisnosti od vrednosti koje primaju γ i ν mogući su različiti "shear-layer" tokovi.

Brzina se određuje iz vrtložnosti preko integralnog operatora koji nema lokalni karakter:

$$u_3(x_1, t) = - \int_{-\infty}^{x_1} \xi_2(\eta_1, \tau) d\eta_1 \quad (4.4.1.3)$$

Osnovni „Shear-layer“ tok. (videti [16]) Ako se u (4.4.1.1) uvrsti $\gamma = 0$, $\nu = 0$ onda je:

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial t} = 0$$

pa je $\xi(x_1) = (0, \xi_0(x_1), 0)$, a iz (4.4.1.3) sledi da je:

$$\mathbf{u} = (0, 0, u_0(x)), \quad x \in \mathbb{R}$$

Sledeći tok je nešto složeniji jer se dodaje viskoznost u odnosu na prethodni slučaj

Viskozno „Shear-Layer“ rešenje. Dakle $\gamma = 0$ i $\nu > 0$. Jednačina (4.4.1.1) se redukuje na topotnu jednačinu, gde je:

$$\xi_t = \nu \xi_{xx}$$

$$\xi|_{t=0} = \xi_0(x)$$

Rešenje ξ je dato sa:

$$\xi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|^2/4\nu t} \xi_0(y) dy$$

Dok je brzina, na osnovu prethodnih veza jednaka:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|^2/4\nu t} v_0(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

Difuzija širi rešenja ξ i \mathbf{u} .

Naredna rešenja ukazuju na mogućnost izduženja vrtložnosti.

Neviskozna, napregnuta „Shear-layer“ rešenja. U ovom slučaju je $\gamma > 0$, a $\nu = 0$. Jednačina (4.4.1.1) se redukuje na linearnu ODJ jednačinu:

$$\xi_t - \gamma x \xi_x = \gamma \xi$$

Koja se upotrebom karakterističnih krivi svodi na ODJ, dobijajući tako rešenje:

$$\xi(x, t) = \xi_0(xe^{\gamma t})e^{\gamma t},$$

A odgovarajuća komponenta brzine je data sa:

$$\mathbf{u}(x, t) = u_0(xe^{\gamma t}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

4.5 Istezanje i kompresija vrtložnosti u trodimenzionalnim Ojlerovim jednačinama

U ovom delu se i dalje radi o nestišljivim tokovima i problemima vezanim za iste. Postavlja se pitanje kako iztezanje, skuplanje i pravac vrtložnosti za trodimenzionalne nestišljive Ojlerove jednačine mogu biti posmatrani. Ovakva razmatranja će svakako uzimati u obzir vezu između matrice naprezanja:

$$D_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

i matrice Hesijana pritiska definisane sa:

$$P_{i,j} = \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j}$$

koja je bazirana na radu Galantija, Gibona i Heritidža[9]. Ova matrica je bila od velikog značaja. Na primer, koristili su je Jeong i Husein (1995) u svom radu *On the identification of a vortex* prilikom ispitivanja kada je vrtlog zaista vrtlog. Kriterijum je bila matrica P koja je trebala imati dva pozitivna i jedan negativan karakteristični koren.

U prethodnim delovima je objašnjen način na koji se dolazi do jednačine vrtložnosti:

$$\frac{D\xi}{Dt} = \mathbf{D}\xi \quad (4.5.1)$$

Taj oblik je koristan za naredno razmatranje.

Vrtložno istezanje igra veoma važnu ulogu. Od posebne je važnosti kada su u pitanju dugo nerešeni problemi o tome da li trodimenzionalna Navije-Stoksova rešenja glatkim početnim uslovom mogu spontano razviti singularnost u konačnom vremenu \mathbf{t}^* . Beale [2] je dokazao da Ojlerova rešenja mogu eksplodirati samo ako maksimum od $|\xi|$ divergira kada $\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{t}^*$. Tj. za nestišljive Ojlerove jednačine je poznato da su lokalno dobro postavljene za $u_0 \in H^S, S > \frac{n}{2} + 1$. Bale-Kato-Majda [2] su postavili sledeći kriterijum za „eksploziju“: Ako se ekslozija javlja u vremenu T , onda je:

$$\int_0^T \|\xi\|_\infty dt = +\infty$$

$\int_0^T \|\xi\|_\infty dt$ kontroliše rast svih veličina i ništa ne može eksplodirati ukoliko ova veličina ne eksplodira. Konstantin, Fiferman i Majda [6] su posmatrali vektor vrtložnosti u tački \mathbf{x} i u obližnjoj tački $\mathbf{x} + \mathbf{y}$. Uglovi između vrtložnih linija su određeni pomoću relativne orientacije od $\xi(\mathbf{x})$ i $\xi(\mathbf{x} + \mathbf{y})$. Singularnost se može sprečiti ako uglovima između vrtložnih linija u susedstvu nije dozvoljeno da postanu preveliki. Velike krivine u vrtložnim linijama su stoga neophodne da bi se singularitet formirao.

4.5.1 Istezanje uključujući matrice D i P

Uočimo nestišljive, trodimenzionale Ojlerove jednačine:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

Tada vrtložnost $\xi = \nabla \times \mathbf{u}$ zadovoljava:

$$\frac{D\xi}{Dt} = \xi \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{D}\xi$$

Iz poslednje jednačine sledi da skalarna magnituda vrtložnosti zadovoljava:

$$\frac{D\xi}{Dt} = \alpha \xi$$

gde je stopa istezanja α definisana sa:

$$\alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{\xi \cdot \mathbf{D}\xi}{\xi \cdot \xi}$$

U tački \mathbf{x} , kada je $\alpha > 0$, javlja se vrtložno istezanje a kada je $\alpha < 0$ javlja se vrtložna kompresija. Neka je $\sigma = \xi \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{D}\xi$ oznaka za vektor vrtložnog istezanja.

Skalar α se može posmatrati kao ocena za karakteristični koren matrice \mathbf{D} . Uvodimo sledeću oznaku:

$$\chi = \frac{\xi \times \mathbf{D}\xi}{\xi \cdot \xi}$$

Ono što je važno kada su u pitanju α i χ jeste njihovo ponašanje u trodimenzionalnom Ojlerovom toku u blizini oblasti singulariteta.

4.5.2 Okatinijeva relacija između tenzora naprezanja i matrice Hesijana pritiska

Okatini [18] je 1993. godine pokazao da vektor vrtložnog iztezanja σ zadovoljava relaciju:

$$\frac{D\sigma}{Dt} = -P \xi$$

Dokaz navedene jednakosti se lako izvodi. Totalni diferencijal od $\sigma_i = \xi_j u_{i,j}$:

$$\begin{aligned} \frac{D\sigma_i}{Dt} &= \frac{D\xi_j}{Dt} u_{i,j} + \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{Du_i}{Dt} \right) - \xi_j u_{k,j} u_{i,k} \\ &= \sigma_j u_{i,j} - \sigma_k u_{i,k} + \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

$$= -P_{i,j}\xi_j$$

Dakle svi članovi prilikom izvođenja koji nisu sadržali izraz za pritisak su nestali. Kako je $\sigma = \mathbf{D}\xi$:

$$\frac{D(\xi \times \mathbf{D}\xi)}{Dt} = -\xi \times P\xi$$

kada se ξ poklopi sa karakterističnim vektorom od \mathbf{D} , mora da se poklopi i sa karakterističnim korenom od P , a ako se ξ poklopa sa karakterističnim korenom od P onda je $\xi \times \mathbf{D}\xi$ konstanta kretanja [11].

4.5.3 Jednačine koje povezuju α i χ

Veza između $\mathbf{D}\xi$ i $P\xi$ koristi i opisuje vezu između α i χ . Ova dva objekta imaju svoje ekvivalentne koje dobijemo tako što matricu \mathbf{D} zamenimo sa P :

$$\alpha_p = \frac{\xi \cdot P\xi}{\xi \cdot \xi} \quad \chi_p = \frac{\xi \times P\xi}{\xi \cdot \xi}$$

Diferenciranjem α i χ i korštenjem elementarne vektorske algebra dolazimo do sledećih jednačina:

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \chi^2 - \alpha - \alpha_p \quad (4.5.3.1)$$

$$\frac{D\chi}{Dt} = -2\alpha - \chi_p \quad (4.5.3.2)$$

Dalje, navodimo vezu između uglova.

Neka je θ ugao između ξ i $\mathbf{D}\xi$:

$$\tan\theta = \frac{\chi}{\alpha}$$

Kada se ξ poklopi sa karakterističnim korenom od \mathbf{D} onda je $\theta = 0$. Za fluidni element u tački x specifične vrednosti ugla θ mogu interpretirati na sledeći način [9]:

Kada je $\theta = 0$, ξ i $\mathbf{D}\xi$ su paralelni i javlja se samo izduživanje

Kada je $\theta = \pi/2$ vektori ξ i $\mathbf{D}\xi$ su ortogonalni i kako je $D\xi/Dt = \mathbf{D}\xi$ onda se u ovom slučaju ξ rotira ali se ne izdužuje.

Slučaj kada je $\theta = \pi$ predstavlja nepodudaranje. U slučaju $\alpha < 0$ vrtložnost kolapsira brzo u malim vrednostima.

Kada je $0 < \theta < \pi/2$ dolazi i do rotacije i do izduživanja

Tada na osnovu jednačina (4.5.3.1) i (4.5.3.2), množenjem odgovarajućim izrazima i njihovim oduzimanjem dolazi se do jednačine:

$$\frac{D \tan \theta}{Dt} = -\alpha \tan^3 \theta - \left(\alpha - \frac{\alpha_p}{\alpha} \right) \tan \theta - \frac{\chi_p}{\alpha}$$

Zbog negativnog kubnog izraza uvek postoji tendencija da se ugao smanju u $\alpha > 0$ kvadrantnoj ravni ukoliko ga pritisak ne natera da se ponaša suprotno [9].

Jednačine (4.5.3.1) i (4.5.3.2) nisu autonomne i za Ojlerove tokove a_p i χ_p ostaju konstantni kako se tok razvija.

Primer: (α, χ) jednačine

Teća komponenta brzine Navije-Stoksovih jednačina za sledeća polja brzine:

$$\mathbf{u} = \left(\frac{\gamma y}{2}, -\frac{\gamma x}{2}, \gamma z \right) \text{ i } \mathbf{u} = (-\gamma y, -\gamma x, \gamma z)$$

za koja je $\xi = (0,0,\xi) = (0,0,-\gamma)$ isto, jednaka je:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma z \quad (4.5.3.3)$$

(bitna je samo treća komponenta brzine zbog skalarnog množenja sa ξ , čije prve dve komponente su nula).

Iz:

$$P_{i,j} = \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j}$$

i iz (4.5.3.3) poslednja vrsta matrice \mathbf{P} je jednaka $(0,0,-\gamma)$, odakle je:

$$\alpha_p = \frac{\xi \cdot P\xi}{\xi \cdot \xi} = \frac{\gamma^2}{\gamma^2} = 1$$

$$\chi_p = \frac{\xi \times P\xi}{\xi \cdot \xi} = 0$$

Tada se jednačine (4.5.3.1) i (4.5.3.2) svode na:

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \chi^2 - \alpha - 1$$

$$\frac{D\chi}{Dt} = -2\alpha$$

4.6 Vrtložnost i izentropski tok

Propozicija 4.6.1 [5]: Ako se površina (kriva) kreće sa tokom izentropskog fluida i ako predstavlja vrtložni list (liniju) u trenutku $t = 0$, onda ostaje takva sve vreme.

Dokaz: Neka je \mathbf{n} jedinična normala na S , tako da je u trenutku $t = 0$, prema hipotezi $\xi \cdot \mathbf{n} = 0$. Pozivajući se na teoremu cirkulacije, fluks od ξ kroz neki deo $\tilde{S} \subset S$ u nekom kasnijem trenutku je takođe nula:

$$\iint_{\tilde{S}_t} \xi \cdot \mathbf{n} \, dA = 0$$

Sledi da je $\xi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$ identički na površini S_t , pa S ostaje vrtložni list. Ako je $\xi(\mathbf{x}) \neq 0$, onda je u lokalnom smislu vrtložna linija presek dva vrtložna lista. ■

Propozicija 4.6.2: Za izentropski tok (u otsustvu spoljašnjih sila) gde je $\xi = \nabla \times \mathbf{u}$ i $\boldsymbol{\omega} = \xi/\rho$, sledi:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} = 0 \quad (4.6.1)$$

Takđe važi:

$$\boldsymbol{\omega}(\varphi(\mathbf{x}, t), t) = \nabla \varphi_t(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, 0), \quad (4.6.2)$$

gde je φ_t projekcija toka, a $\nabla \varphi_t$ je matrica Jakobijskog transformatora.

Pre dokaza Propozicije 4.6.2, bitno je navesti Ojlerove jednačine za kretanje fluida u izentropskom toku, jer će taj podatak biti važan u samom dokazu. Dakle, Ojlerove jednačine za izentropski tok, bez dejstva spoljašnjih sila:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla w \quad (4.6.3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$$

gde w označava entalpiju. (videti [5]).

Na posmatranoj oblasti, tj. domenu, a na granici te oblasti važi uslov $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$.

U dokazu se koristi i vektorska jednakost:

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}) = 2(\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{F} + 2\mathbf{F} \times \operatorname{curl} \mathbf{F}.$$

Dokaz: Iz navedene vektorske jednakosti sledi:

$$\frac{1}{2} \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{u} \times \operatorname{curl} \mathbf{u}$$

Uvrštavanjem izraza za $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ iz prethodne jednakosti u jednačinu (4.6.3) dobija se:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} \times \operatorname{curl} \mathbf{u} = -\nabla w.$$

Primenom rotora i uzimajući u obzir da je $\nabla \times \nabla f = 0$ sledi:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} - \operatorname{curl}(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\xi}) = 0.$$

Sada koristimo identitet:

$$\operatorname{curl}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F} \operatorname{div} \mathbf{G} - \mathbf{G} \operatorname{div} \mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G}$$

pa je nakon sređivanja:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} - (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \boldsymbol{\xi} (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$$

Uvedimo sada sledeće označke:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}(\varphi(\mathbf{x}, t), t) \quad \text{i} \quad \mathbf{G}(\mathbf{x}, t) = \nabla \varphi_t(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, 0).$$

Prema jednačini (4.6.1) $\partial \mathbf{F} / \partial t = (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{u}$. Sa druge strane, prema složenom izvodu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} &= \nabla \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right] \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, 0) = \nabla(\mathbf{u}(\varphi(\mathbf{x}, t), t)) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, 0) \\ &= (\nabla \mathbf{u}) \cdot \nabla \varphi_t(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, 0) = (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \end{aligned}$$

\mathbf{F} i \mathbf{G} zadovoljavaju iste linearne, diferencijalne jednačine prvog reda. Pošto se poklapaju u $t = 0$ i rešenja su jedinstvena, sledi da su izrazi jednaki. ■

Ako posmatramo dvodimenzionalni tok, tada je $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$, a $\boldsymbol{\xi}$ ima samo jednu komponentu $\xi = (0, 0, \xi)$. Tada teorema o cirkulaciji tvrdi da ako je \sum_t neka oblast u ravni koja se kreće sa fluidom, onda:

$$\int_{\sum_t} \xi \, dA = \text{konstantno tokom vremena}$$

U dve dimenzije, jednačina (4.6.2) se svodi na:

$$\frac{\xi}{\rho}(\varphi(\mathbf{x}, t), t) = \frac{\xi}{\rho}(\mathbf{x}, 0), \quad (4.6.4)$$

Gde je ξ/ρ skalarna veličina.

Relacija (4.6.1) za trodimenzionalne tokove opisuje znatno komplikovanije ponašanje. U dvodimenzionalnoj vrtložnoj geometriji se javljaju pojmovi vrtložni list i vrtložna linija. U trodimenzionalnoj geometriji se javljaju novi, složeniji pojmovi, kao što je vrtložna cev.

Uvodimo pojam snage vrtložne cevi koji će biti objašnjena kroz Helmholtcovu teoremu za izentropske fluide. Snaga vrtložne cevi ima i jednu lepu osobinu o čemu, takođe, govori navedena teorema.

Teorema 5.1.1(Helmholcova teorema) [5]: Pretpostavimo da je fluid izentropski. Tada:

Ako su C_1 i C_2 su dve krive koje opkružuju vrtložnu cev onda važi:

$$\int_{C_1} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}.$$

Ova zajednička vrednost se naziva snaga vrtložne cevi.

Snaga vrtložne cevi je konstantna tokom vremena, dok se cev kreće sa fluidom

Dokaz: Neka su C_1 i C_2 orjentisane krive. Površinu vrtložne cevi sačinjuju od dela između krivih C_1 i C_2 označićemo sa S i površinski krajevi, tačnije preseci tube pomenutim krivama, označavamo sa S_1 i S_2 , redom. Sve dok je ξ tangentna lateralnoj površini, S je vrtložni list. Označimo sa V celokupnu oblast tube između krivih C_1 i C_2 . Tada je $K = S + S_1 + S_2$ granica od V . Prema Gausovoj teoremi:

$$0 = \int_V \nabla \cdot \xi \, dx = \int_K \xi \cdot dA = \int_{S_1 + S_2} \xi \cdot dA + \int_S \xi \cdot dA,$$

a prema Stoksovom:

$$\int_{C_1} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_1} \xi \cdot dA \quad \text{i} \quad \int_{C_2} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_2} \xi \cdot dA$$

Tako da važi a). Deo b) sledi iz Kelvinove teoreme. ■

Ako se vrtložna cev izduži, njena presečna površina se povećava, a magnitudo vrtložnosti ξ mora da poraste, o čemu je već bilo govora. Dakle, izduživanje vrtložne cevi može povećati vrtložnost ali je ne može stvoriti.

Vrtložna cev sa nultom snagom ne može se “završiti” u unutrašnjosti fluida. Ali svakako formira vrtložne prstenove (na primer dim cigarete može da formira takve prstenove) koji se šire ka beskonačnosti, ili se vežu za čvrstu granicu.

Razlika između dvodimenzionalnog i trodimenzionalnog zakona održanja za vrtložnost je veoma važna. Održanje vrtložnosti razmatrano u dve dimenzije je pomoćna alatka u razvoju teorije o postojanju i jedinstvenosti rešenja Ojlerovih i Navije-Stoksovih jednačina. Vrlo je važno postojanje teorema o egzistenciji za sve vreme. Za sada je poznato da glatko rešenje postoji samo u dve dimenzije.

4.7 Funkcija strujanja i vrtložnost

Poznato je od ranije u radu da primenom rotora na Navije-Stoksove jednačine dovodi do sledeće evolucije vrtložnosti:

$$\frac{D\xi}{Dt} = \xi \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \Delta \xi \quad (4.7.1)$$

Za dvodimenzionalne tokove je $\xi = \xi(x_1, x_2, t) = \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1$ skalarno vektorsko polje toka, a u_1 i u_2 su komponente vektora \mathbf{u} . Pri tome je ξ ortogonalno na \mathbf{u} i vrtložno istezanje nestaje, pa je stoga $\xi \cdot \nabla \mathbf{u} \equiv 0$. Vrtložna jednačina (5.2.1) se sada redukuje na:

$$\frac{D\xi}{Dt} = \nu \Delta \xi \quad (4.7.2)$$

Može se primetiti da za neviskozne tokove ($\nu = 0$) jednačina (4.7.2) predstavlja održanje vrtložnosti duž putanje čestice i to specijalno svojstvo razdvaja dvodimenzionalne od trodimenzionalnih tokova. U tom slučaju posmatramo sledeću jednačinu vrtložnosti za dvodimenzionalne nestišljive, neviskozne tokove:

$$\frac{D\xi}{Dt} = \partial_t \xi + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \xi = 0 \quad (4.7.3)$$

Sada uvodimo pojam funkcije protoka i tako dolazimo do imenovane jednačine vrtložnosti. Pretpostavka je da je tok konstantna na nekom ravnskom domenu D , sa fiksiranim granicama ∂D . Pretpostavimo da je D jednostavno povezano ("nema rupa"). Prema teoriji nestišljivosti, $\partial_{x_1} u_1 = -\partial_{x_2} u_2$, i korišćenjem vektorskog računa, nalazimo da postoji skalarna funkcija $\psi(x_1, x_2, t)$ na D koja je jedinstvena do na aditivnu konstantu, takva da je [5]:

$$u_1 = \partial_{x_2} \psi \quad \text{i} \quad u_2 = -\partial_{x_1} \psi. \quad (4.7.4)$$

Dakle:

$$\mathbf{u} = (\partial_{x_2} \psi, -\partial_{x_1} \psi) \equiv \nabla \psi. \quad (4.7.5)$$

Ova funkcija se naziva funkcija protoka za fiksirano vreme t . Funkcija protoka je definisana za nestišljive tokove u dve dimenzije, kao i u tri dimenzije sa osnom simetrijom. Strujnice leže na linijama nivoa funkcije ψ . Zaista, neka $(x(s), y(s))$ predstavlja strujnicu tako da je $x_1' = u_1(x_1, x_2)$ i $x_2' = u_2(x_1, x_2)$. Onda:

$$\frac{d}{ds} \psi(x_1(s), x_2(s), t) = \partial_{x_1} \psi \cdot x_1' + \partial_{x_2} \psi \cdot x_2' = -u_2 u_1 + u_1 u_2 = 0$$

∂D leži na liniji nivoa funkcije ψ , i može da se podesi konstanta tako da je:

$$\psi(x_1, x_2, t) = 0 \quad \text{za } (x_1, x_2) \in \partial D.$$

Skalarna vrtložnost je sada data sa:

$$\xi = \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1 = -\partial_{x_1}^2 \psi - \partial_{x_2}^2 \psi = -\Delta \psi$$

Sada možemo da sumiramo jednačine za ξ za dvodimenzionalni, idealni nestišljivi tok kao što sledi:

$$\frac{D\xi}{Dt} = \partial_t \xi + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \xi = 0 \quad (4.7.6)$$

$$\xi = -\Delta \psi$$

$$\psi = 0 \quad \text{na} \quad \partial D$$

$$u_1 = \partial_y \psi \quad \text{i} \quad u_2 = -\partial_x \psi$$

Ove jednačine određuju navedeni tok u potpunosti.

Jednačina $\xi = \Delta \psi$ se naziva Poasonova jednačina za ψ . Rešenje ove jednačine dobija se sa konvolucijom sa Nenjutnovskim potencijalom:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln|x - y| \xi(y, t) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

Možemo da izračunamo gradijent od ψ diferencirajući pod integralom, a brzina \mathbf{u} može biti izračunata pomoću ψ , računanjem gradijenta kao u jednačini (4.7.5):

$$\mathbf{u}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{K}_2(x - y) \xi(x, y) dy, \quad (4.7.7)$$

gde je $K_2(\cdot)$ jezgro definisano sa:

$$K_2(x) = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{x_2}{|x|^2}, \frac{x_1}{|x|^2} \right)^T$$

Jednačina (4.7.7) je analogna dobro poznatom Bio-Savarovom zakonu¹⁴ za magnetno polje indukovano strujom u žici.

Sledeća propozicija predstavlja vezu između Navije-Stoksove jednačine i formulacije vrtložnosti preko funkcije protoka, odnosno, ukazuje na slučaj kada su te dve formulacije ekvivalentne na celom \mathbb{R}^2 prostoru.

Propozicija 4.7.1 [16]: Za dvodimenzionalne tokove koji nestaju dovoljno brzo kada $|x| \rightarrow \infty$, Navije-Stoksove jednačine su ekvivalentne sledećoj formulaciji vrtložnosti:

$$\frac{D\xi}{Dt} = \nu \Delta \xi, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty), \quad (4.7.8)$$

$$\xi|_{t=0} = \xi_0$$

¹⁴ Neka je V glatko vektorsko polje na Ω i neka se to polje posmatra kao distribucija električne struje, onda Bio-Savarova formula glasi:

$$BS(V)(y) = (1/4\pi) \int_{\Omega} V(x) \times (y - x)/|y - x|^3 d(vol_x)$$

i daje rezultirajuće magnetno polje u trodimenzionalnom prostoru.

Za Bio-Savarovu formulu važi $\nabla \times BS(V) = V$ na Ω ako i samo ako je V polje bez divergencije i tangentno je granici od Ω

gde se brzina \mathbf{u} računa preko ξ upotrebom Bio-Savarovog zakona:

$$\mathbf{u}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{K}_2(x - y) \xi(x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

uključujući jezgro $K_2(x) = (2\pi|x|^2)^{-1}(-x_2, x_1)^T$.

Slično, i pritisak može da se računa iz Poasonove jednačine:

$$-\Delta p = \sum_{i,j} \mathbf{u}_{x_j}^i \mathbf{u}_{x_i}^j$$

Kada se koristi funkcija protoka ψ skalarna vrtložna jednačina (4.7.8) sa $\nu = 0$ se transformiše na:

$$\xi_t + \mathcal{J}(\psi, \Delta\psi) = 0$$

gde je \mathcal{J} Jakobijan definisan sa:

$$\mathcal{J}(\psi, \Delta\psi) = \det \begin{bmatrix} \psi_{x_1} & \psi_{x_2} \\ \Delta\psi_{x_1} & \Delta\psi_{x_2} \end{bmatrix}$$

Da bi postojalo stabilno, neviskozno rešenje (bazni „Shear-layer“ tok, $\xi_t = 0$) treba da je $\mathcal{J}(\psi, \Delta\psi) = 0$. To implicira da su $\nabla^\perp \psi$ i $\nabla^\perp \Delta\psi$ paraleni pa imaju iste integralne krive, linije nivoa od ψ i $\Delta\psi$. Zbog toga ψ i $\Delta\psi$ moraju biti funkcionalno zavisne o čemu govori naredna teorema.

Teorema 4.7.1: *Funkcija protoka ψ na domenu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ definiše stabilno rešenje dvodimenzionalnih Ojlerovih rešenja na Ω ako i samo ako je:*

$$\Delta\psi = F(\psi) \tag{4.7.9}$$

za neku funkciju F .

Funkcija F je u opštem slučaju nelinearna.

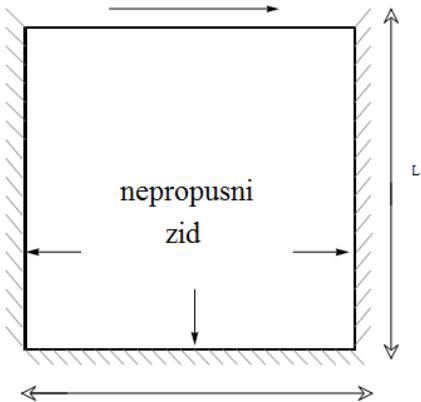
Mirni, neviskozni vrtlozi su radikalno simetrična rešenja 2D Ojlerovih jednačina. Naime, ako su $\xi_0 = \xi_0(r)$, $r = |x|$ radikalno simetrična, glatka vrtložnost, kako je laplasijan invarijantan u odnosu na rotaciju rešenje ψ_0 , $\Delta\psi_0 = \xi_0$ je, takođe radikalno simetrično pa je $\mathcal{J}(\psi_0, \Delta\psi_0) = 0$.

$$\mathbf{u} = (-\psi_{x_2}, \psi_{x_1}) = \left(-\frac{x_2}{r}, \frac{x_1}{r} \right) \psi'(r)$$

gde prim označava izvod po r .

4.7.1 Lid-driven cavity problem

Lid-driven cavity je klasičan problem u dinamici fluida za nestišljive, viskozne tokove koji je opširno izučavan i moguće je pronaći brojne radove u literaturi na ovu temu. Na slici 12 je prikazana kvadratna šupljina sa tri stacionarna zida i jednim pokretnim zidom koji se kreće konstantnom brzinom. U ovom poglavljju ćemo odrediti stabilna i nestabilna rešenja ovog problema i odrediti pritisak i brzinu unutar kavitacije.



Slika 12: lid-driven cavity skica

Posmatramo dvodimenzionalne jednačine za nestišljivi, Njutnovski tok.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_e} \nabla^2 u_1, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R_e} \nabla^2 u_2, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} &= 0.\end{aligned}$$

Kao i do sada, u_1 i u_2 su komponente brzine u pravcima x i y , R_e je rejnoldsov broj, a p označava pritisak.

Što se tiče granice, na svim zidovima je primenjen homogeni Dirihilov granični uslov, $u_1 = 0$, i $u_2 = 0$, osim za pokretni zid koji ima brzinu $u_1 = \text{const.}$ u pravcu x , i $u_2 = 0$.

Problem rešavamo koristeći vrtložno-strujnu formulaciju koja je uvedena u delu 4.6 i koristeći programski jezik matlab rešenja ćemo prikazati grafički. Pri rešavanju nestabilnog Navije-Stoksovog sistema datog preko vrtložno-strujne formulacije, koristi se SOR (Successive Over Relaxation) metod za rešavanje (numerički) jenačine funkcije protoka, a eksplisitni Ojlerov za rešavanje jednačine momenta. Ali pre toga, predstavićemo problem teorijski.

Koristeći definiciju funkcije protoka i primenjujući na jednačinu kontinuiteta dobijamo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.$$

Vrtložnost u terminima u_1 i u_2 je jednaka:

$$\xi = \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}.$$

Jednačina momenta može biti zapisana na sledeći način:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{R_e} \nabla^2 \xi.$$

Sa, druge strane videli smo u prethodnom poglavlju da se vrtložnost moži zapisati preko funkcije protoka:

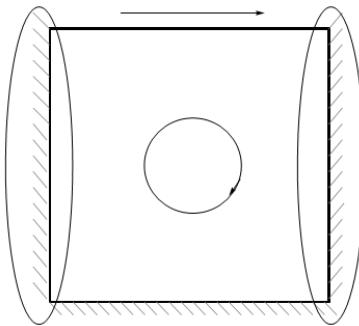
$$\nabla^2 \xi = -\psi$$

Granični uslovi

Granični uslovi mogu biti zapisani u terminima funkcije protoka na sledeći način:

$$\begin{cases} \text{levo}: u_1 = 0 \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \rightarrow \psi = \text{const.} \\ \text{desno}: \end{cases}$$

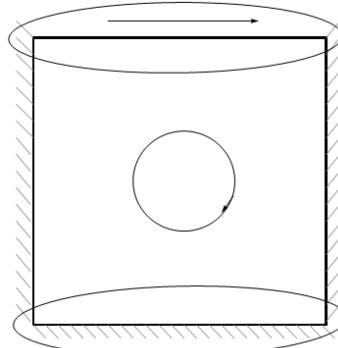
Izrazi *levo* i *desno* označavaju levu i desnu granicu što pokazuje sledeća slika:



Slika 13: Leva i desna granica lid-driven cavity skice

Zatim, razmatramo gornju i donju granicu (slika 14), tj.:

$$\begin{cases} \text{vrh}: u_2 = 0 \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \rightarrow \psi = \text{const.} \\ \text{dno}: \end{cases}$$



Slika 14: Donja i gornja (vrh i dno) granica lid-driven cavity skice

To znači da je svuda na granici ψ konstantno (granice se spajaju (kvadrat), pa konstanta mora biti ista na svim granicama). Zapravo, ψ je definisano preko izvoda i biramo da ψ ima konstantnu vrednost, a zbog jednostavnosti neka to bude nula.

Pored normalne komponente brzine, nula tangencijalna brzina mora biti predstavljena. Tako se dobijaju dalji granični uslovi , slika 15:

$$\begin{cases} \text{levo}: u_2 = 0 \rightarrow -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \\ \text{desno}: \end{cases}$$

$$\begin{cases} dno: u_1 = 0, \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \\ vrh: u_1 = U_{lid} \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y} = U_{lid} \end{cases}.$$

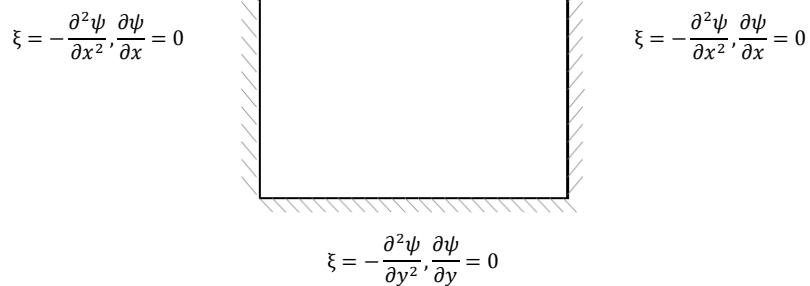
Vrtložnost na *zidu* se računa preko funkcije protoka za koju smo rekli da je konstanta. Dakle, na desnoj i levoj granici jednaka je:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\xi$$

a na gornjoj i donjoj granici je:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\xi$$

$$\xi = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \frac{\partial \psi}{\partial y} = U_{lid}$$



Slika 15: Granični uslovi

Numerička šema

Za rešavanje ovako definisanog problema koristi se uniformna mreža u vremenu i prostoru. Naredni koraci opisuju metod rešavanja. Funkcija protoka se rešava SOR metodom:

$$\psi_{i,j}^{k+1} = \frac{\alpha}{4} (\psi_{i+1,j}^k + \psi_{i-1,j}^k + \psi_{i,j+1}^k + \Delta x \Delta y \xi_{i,j}^k) + (1 - \alpha) \psi_{i,j}^k.$$

α je parameter relaksacije ($0 < \alpha < 1$), a Δx i Δy razmaci unutar rešetke. Jasno je da je $\psi = 0$ na granicama.

Zatim se određuje ξ na granicama na sledeći način:

$$\xi_{vrh} = (\psi_{i,n_y} - \psi_{i,n_{y-1}}) \frac{2}{\Delta y} - U_{lid} \frac{2}{\Delta y} + \mathcal{O}(\Delta y)$$

$$\xi_{dno} = (\psi_{i,1} - \psi_{i,2}) \frac{2}{\Delta y} + \mathcal{O}(\Delta y)$$

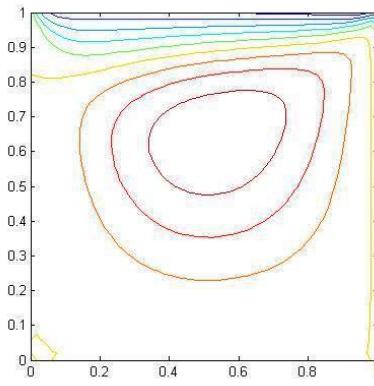
$$\xi_{levo} = (\psi_{1,j} - \psi_{2,j}) \frac{2}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

$$\xi_{desno} = (\psi_{n_x,j} - \psi_{n_{x-1},j}) \frac{2}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

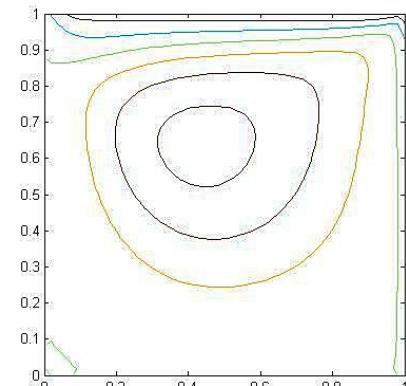
Rešavanje vrtložnosti za unutrašnje čvorove rešetke:

$$\begin{aligned} \xi_{i,j}^{n+1} = & \xi_{i,j}^n - \Delta t \left[\left(\frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) \left(\frac{\xi_{i+1,j}^n - \xi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right) - \left(\frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right) \left(\frac{\xi_{i,j+1}^n - \xi_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\xi_{i+1,j}^n + \xi_{i-1,j}^n + \xi_{i,j+1}^n + \xi_{i,j-1}^n - \xi_{i,j}^n}{\Delta x \Delta y} \right) \right] . \end{aligned}$$

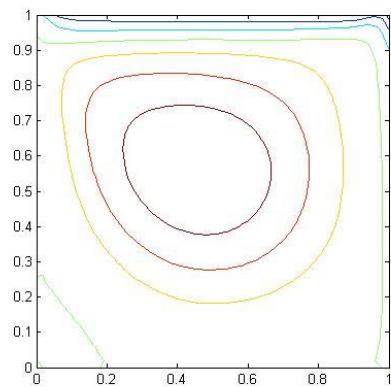
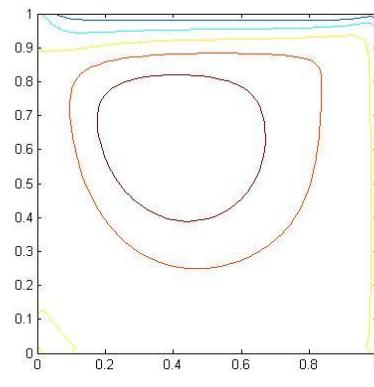
Na naredna četiri grafika su prikazana stabilna rešenja za različite vrednosti Rejnoldsovog broja. Kod uzima u obzir navedene uslove, odrđuje funkciju protoka i vrtložnost u unutrašnjim čvorovima, vrtložnost na granici i brzinu.



a)



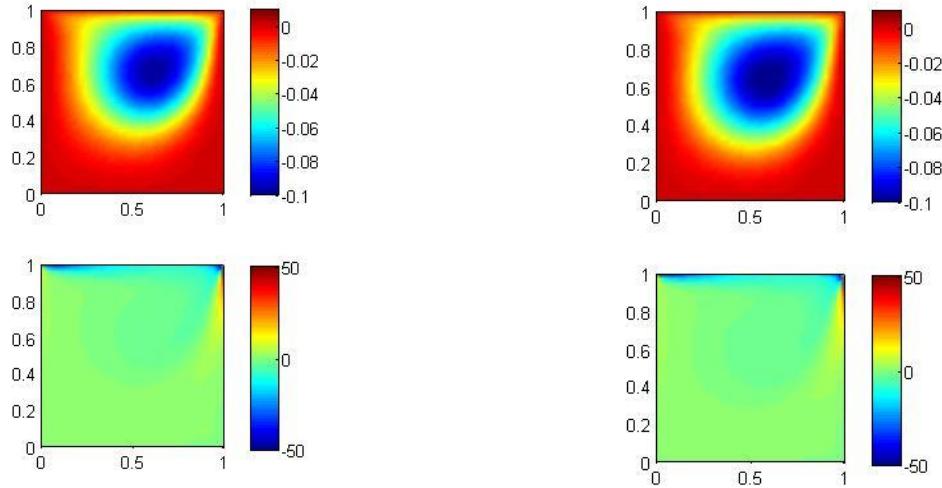
b)



c)

d)

Slika 16: Grafički prikaz konturnih linija funkcije protoka pri različitim vrednostima Rejnoldsovog broja (rešetka 51×51), na prikazu a) birano je da Rejnoldsov broj bude 200, a pod b) 300. Prikazi c) i d) su za malo veće vrednosti Rejnoldsovog broja 500 i 1000 redom. Takođe je za izbor Rejnoldsovog broja 1000 podešen koeficijent relaksacije na 0,4. Dok je u ostalim slučajevima posmatrana vrednost 1 pomenutog koeficijenta



Slika 17: Grafički prikazi nestabilnog rešenja, levo Rejnoldsov broj je 300, a desno 500.

4.7.2 Formulacija vrtložnog strujanja za trodimenzionalne tokove

Za trodimenzionalni, nestišljivi, idealni tok važi:

$$\frac{D\xi}{Dt} - (\xi \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0 \quad (4.7.2.1)$$

$$\Delta \mathbf{A} = -\xi, \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0$$

$$\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Koristimo $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ da bi se moglo pisati $\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A}$, gde je \mathbf{A} birano tako da je $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. Vektor \mathbf{A} nije jedinstveno određen. Za vrtložnost važi sledeće (uz pretpostavku $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$):

$$\xi = \operatorname{curl} \mathbf{u} = \operatorname{curl}(\operatorname{curl} \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A}.$$

Formulacija vrtložnog strujanja za trodimenzionalni Navije-Stoksov tok se može izvesti analogno određivanjem trodimenzionalnog polja brzine \mathbf{u} , $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, u terminima vrtložnosti koje se koristi za rešavanje trodimenzionalne vrtložne jednačine:

$$\frac{D\xi}{Dt} = \xi \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \Delta \xi.$$

Ono što je zanimljivo u ovom slučaju je da navedena reformulacija opisuje kako deformacija brzine isteže vrtložnost (putem izraza $\cdot \nabla \mathbf{u}$).

Treba odrediti ξ i \mathbf{u} , rešavanjem predeterminisanog sistema (tri jednačine, četiri nepoznate):

$$\begin{aligned}\xi &= \operatorname{curl} \mathbf{u} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^3\end{aligned}\tag{4.7.2.2}$$

Propozicija 4.7.1.1: Hodžova dekompozicija. [16] Neka je $\xi \in L^2$ glatko vektorsko polje u \mathbb{R}^3 , koje nestaje dovoljno brzo kada $|x| \rightarrow \infty$. Onda važi sledeće:

Jednačine (4.7.2.2) imaju glatko rešenje \mathbf{u} koje nestaje kada $|x| \rightarrow \infty$ ako i samo ako:

$$\operatorname{div} \xi = 0$$

Ako je $\operatorname{div} \xi = 0$, onda je rešenje \mathbf{u} određeno sa:

$$\mathbf{u} = -\operatorname{curl} \psi$$

gde je vektorska funkcija strujanja ψ rešenje Poasonove jednačine:

$$\Delta \psi = \xi$$

Eksplicitna formula za \mathbf{u} je:

$$\mathbf{u}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{K}_3(x-y)\xi(y)dy$$

gde je matrica jezgra \mathbf{K}_3 dimenzija 3×3 data sa:

$$\mathbf{K}_3(x)h = \frac{1}{4\pi} \frac{x \times h}{|x|^3}, \quad h \in \mathbb{R}^3$$

Dokaz : Podsetimo se sledećih vektorskih identiteta: za glatko vektorsko polje ψ u \mathbb{R}^3 ,

$$\operatorname{div} \operatorname{curl} \psi = 0 \tag{4.7.2.3}$$

$$-\operatorname{curl} \operatorname{curl} \psi + \nabla \operatorname{div} \psi = \Delta \psi \tag{4.7.2.4}$$

Ako \mathbf{u} rešava jednačinu (4.7.2.2) onda $\operatorname{curl} \mathbf{u} = \xi$ i na osnovu jednakosti (4.7.2.3) sledi da mora biti $\operatorname{div} \xi = 0$. Sada dokazujemo suprotno, ako je $\operatorname{div} \xi = 0$, onda postoji vektorsko polje \mathbf{u} koje rešava jednačine (4.7.2.2). Uočimo Poasonovu jednačinu:

$$\Delta \psi = 0$$

Ako:

$$\psi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\xi(y)}{|x-y|} dy$$

Definišemo $h = -\operatorname{curl} \operatorname{curl} \psi$ i $k = \nabla \operatorname{div} \psi$. Zbog toga što je $\xi \in L^2$ je glatka i nestaje dovoljno brzo kada $|x| \rightarrow \infty$, imamo da je $h(x) = \mathcal{O}(|x|^{-3})$ i $k(x) = \mathcal{O}(|x|^{-3})$ za $|x| \gg 1$ tako da $h, k \in L^2$. Primenjujući unutrašnji proizvod (L^2) sa k dobijamo:

$$\langle k, k \rangle = \langle \xi, k \rangle - \langle h, k \rangle$$

Zbog pretpostavke da je $\operatorname{div} \xi = 0$, $\operatorname{div} h = 0$ i k je gradijent od $\operatorname{div} \psi$. Koristeći uslov ortogonalnosti dobijamo da je $\langle \xi, k \rangle = \langle h, k \rangle = 0$. $\langle k, k \rangle = 0$, primenjujući da je $k \equiv 0$, identitet (4.7.2.3) daje:

$$\xi = \operatorname{curl}(-\operatorname{curl} \psi)$$

Neka je vektorsko polje \mathbf{u} definisano na sledeći način: $\mathbf{u} = -\operatorname{curl} \psi$. Ovaj vektor nema divergenciju. Kada izračunamo rotor konvolucije sa Njutnovskim potencijalom dobijamo:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x-y}{|x-y|^3} \times \xi(y) dy$$

Ovo vektorsko polje \mathbf{u} nije u L^2 ali i dalje nestaje dovoljno brzo kada $|x| \rightarrow \infty$. [16]

4.8 Klasična vrtložna kretanja i modeli

Sada će biti prezentovani neki klasični modeli vrtložnosti. Neki od njih imaju istorijski značaj, a neka su, opet primeri specijalnih slučajeva kada se mogu dobiti jednostavna i lepa rešenja.

Za opisivanje geometrijskih svojstava stubnih vrtloga (columnar vortices) (vodeni mlaz je primer intezivnog, stubnog vrtloga, slika 18) i vrtložnih prstenova uobičajeno se koriste cilindrične koordinate.



Slika 18: Vodeni mlaz, intenzivni, stubni vrtlog

Slika preuzeta sa sajta <http://lite987.com/see-a-spectacular-waterspout-swirl-over-the-waters-of-tampa-bay-video/>

Postoji veliki broj egzaktnih rešenja koja koriste navedeni zapis, a koja su interesantna za razmatranje, stoga se uvodi cilindrični koordinatni sistem (r, θ, z) sa $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i $\xi = (\xi_r, \xi_\theta, \xi_z)$. Opšta formula za neki vektor \mathbf{A} je:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} e_r & r e_\theta & e_z \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_z \\ A_r & r A_\theta & A_z \end{vmatrix} \quad (4.8.1)$$

pa su, onda, komponente vrtložnosti date sa:

$$\xi_r = \frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, \quad \xi_\theta = \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial r}, \quad \xi_z = \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_2)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \quad (4.8.2)$$

Kroko-Vožonji jednačina (4.3.1.1) je već pomenuta u delu (4.3.1). One mogu biti zapisane i u cilindričnom koordinatnom sistemu. Napomenuto je da se od tih jednačina lako dolazi do transportne jednačine vrtložnosti. Uvrštavanjem (4.8.2) u date jednačine dobija se vrtložna transportna jednačina:

$$\begin{aligned} \frac{D\xi_r}{Dt} &= \xi \cdot \nabla u_1 + \nu \left(\nabla^2 \xi_r - \frac{\xi_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \xi_\theta}{\partial \theta} \right), \\ \frac{D\xi_\theta}{Dt} + \frac{u_2 \xi_r}{r} &= \xi \cdot \nabla u_2 + \frac{\xi_\theta u_1}{r} + \nu \left(\nabla^2 \xi_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \xi_r}{\partial \theta} - \frac{\xi_\theta}{r^2} \right), \\ \frac{D\xi_z}{Dt} &= \xi \cdot \nabla u_3 + \nabla^2 \xi_z \end{aligned} \quad (4.8.3)$$

gde je, sada:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_1 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + u_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Ukoliko je $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ onda ako je i $\mathbf{u} = (0, u_2(r, t), 0)$, tada je $\xi = (0, 0, \xi_z(r, t))$ ima samo jednu nenula komponentu. Ova vrsta vrtloga se naziva **čist vrtlog**, sa svim linijama vrtložnosti postavljenim duž ose i sve strujnice su zatvoreni krugovi centrirani oko z – osa. Ako je u_3 nenula i r – zavisna, ξ_θ će se pojaviti toliko da će linije brzine i vrtložnosti postati uvojne. Takvi vrtlozi se nazivaju **virovi**. Imaju nenula heličnu gustinu h , $h = \xi \cdot \mathbf{u}$ (skalarni proizvod brzine i vrtložnosti se fizički interpretira kao helična gustina). Helična gustina h je povezana sa heličnošću preko izraza $H = \int_{\Omega} h \, d\mathbf{x}$. Ako je helična gustina identički jednaka nuli, onda dvodimenzionalni tok opisuje situaciju kada vektor vrtložnosti poseduje samo jednu nenula komponentu ortogonalnu na ravan toka.

Neka je $\psi(r, t) = r\psi_\theta$ Stoksova funkcija protoka. Za $\mathbf{u} = (u_1, 0, u_3)$. Tada je:

$$u_1 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_3 = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (4.8.4)$$

Vrtložnost, odnosno njene vodeće jednačine mogu biti iskazane u terminima dve skalarne funkcije, ψ i $i = ru_2$. Iz jednačina (4.8.2) i (4.8.4) sledi:

$$\xi_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial z}, \quad (4.8.5a)$$

$$\xi_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial r}, \quad (4.8.5b)$$

$$\xi_\theta = - \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right]. \quad (4.8.5c)$$

Konture od Γ i ψ na (r, z) su preseci vrtložnih površina i strujnih površina sa ravni, redom.

Većina postojećih egzaktnih vrtlog rešenja, bez obzira da li su u pitanju viskozna ili neviskozna mogu biti dobijena ukoliko se jednačine (4.8.3) linearizuju. To bi se moglo postići ukoliko bi tok bio Generalizovani Beltramijev tok. Ekstremna situacija kada je $\xi \times \mathbf{u} = 0$ i $\xi \cdot \mathbf{u} \neq 0$, implicira da su strujnice uvek paralelne vrtložnim linijama, tj. $\xi = \zeta \mathbf{u}$, gde ζ predstavlja torziju susednih vektorskih linija. Ovakav tok se naziva Beltramijev tok. Lamb vektor je osnovni izvor nelinearnosti i kada on nestane dobija se željena linearizacija. Važnost Beltramijevog toka leži u tome što on ima nelinearna rešenja Navije–Stoksovih i Ojlerovih jednačina. Beltramijev tok se definiše kao polje \mathbf{u} koje zadovoljava $\nabla \times \mathbf{u} = \gamma \mathbf{u}$. To implicira da je \mathbf{u} karakteristični vector rotora povezanog sa korenom γ . Ukoliko je $\gamma = \text{const.}$ Tok se specijalno naziva Trkalijenov (Aris 1962). Dok Beltramijev tok predstavlja ekstremnu klasu trodimenzionalnih vrtložnih tokova, mnogo šira klasa vrtložnih tokova može biti opisana ako se oslabi uslov $\xi \times \mathbf{u} = 0$ na:

$$\nabla \times (\xi \times \mathbf{u}) = 0 \quad \text{ili} \quad \xi \times \mathbf{u} = \nabla \chi$$

Gde je χ harmonijska funkcija takva da je $\Delta \chi = 0$, opisuje generalizovani Beltramijev tok. Takav tok ima lepa svojstva. Ovaj tok omogućava da nestišljiva, Helmholcova jednačina data sa:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \nabla \times (\xi \times \mathbf{u}) - \nu \Delta \xi = 0$$

bude linearizovana i tako omogućava dobijanje brojnih analitičkih vrtložnih rešenja, od kojih su neka vrlo korisna.

4.8.1 Lamb -Čapljinin dipolni vrtlog [23]

Lambov dipol je vrtložna struktura sa neprekidnom vrtložnom distribucijom unutar kružne oblasti. On je stacionarno rešenje dvodimenzionalne jenačine vrtložnosti kada se ne javljaju viskozni efekti i kada je domen beskonačan. Kada se viskozni efekti uzmu u obzir vrtložnost se prostire preko veće površine i snaga dipola se smanjuje, ali se i brzina smanjuje.

Neka se posmatra tok načinjen od dva vrtloga čija je evolucija opisana Navije-Stoksovima jednačinama u njihovom nestišljivom toku. Vrtložna osa je z -osa, a x i y ose su prostorne koordinate u poprečnom pravcu. Vektor vrtložnosti je, kao i do sada označen sa ξ . Neka su vrtlozi blago uzburkani i da, stoga razlažu tok na zbir koji sadrži bazni tok, stacionarni, dvodimenzionalni vrtlžni par i trodimenzionalne nestabile poremećaje. Polje brzine vezano za preturbacije je označeno sa $\mathbf{u}' = (u'_1, u'_2, u'_3)$, a polje brzine baznog toka $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, 0)$. Bazni tok zavisi samo od x i y i prepostavka je da paralelan sa z -osom. Ukupna brzna toka jednaka je $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \epsilon \bar{\mathbf{u}}$, gde je ϵ infinitezimalno. Jednačina dinamičkog poremećaja se dobija zamenom navedenog izraza za polje brzine u Navije-Stoksoviju jednačinu. Sledi:

$$\nabla \mathbf{u}' = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \nabla \mathbf{u}' = -\mathbf{u}' \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} - \nabla p' + \nu \Delta \mathbf{u}'$$

Neka je O tačka smeštena u središtu između dva vrtloga. Na osnovu simetrije baznog toka oko (Oxy) ravni, poremećaji mogu biti podeljeni u dva dela.

Jedan od prvih netrivijalnih rešenja u teoriji vrtložnosti bilo je predloženo pre oko sto godina od strane Lamba i Čapljinina, koji su radili nezavisno. Lamb-Čapljininov model uzima za prepostavku linearu relaciju između vrtložnosti i funkcije protoka $\xi = -k^2 \psi$, gde je k konstantno, unutar izolovane kružne oblasti prečnika $r = a$ i sa potencijalnim tokom $\xi = 0$ u spoljašnjoj regiji $r > a$. Odnosno, k je nula izvan posmatranog kruga. Konstantu k su koristili Meleško i Van Heijns, koji su i dokazali teorijsku pozadinu Lamb-Čapljinin dipola. Linearna veza je rešenje jednačine $\Delta \psi = f(\psi)$ koja karakteriše stajalna rešenja Ojlerovih jednačina. Neka su r i θ polarne koordinate u (Oxy) ravni. Funkcije protoka za LČD je:

$$\psi = \begin{cases} -\frac{2u}{kJ_0(ka)} J_1(kr) \sin \theta, & r < a \\ u \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta, & r > a \end{cases}, \quad \text{za } f = -k^2 \psi$$

Gde su J_0 i J_1 Beselove funkcije nultog i prvog reda. Vrednost od k je data kontinualnošću tangencijalne brzine na granici dipola i tako je izabrana da je $J_1(ka) = 0$.

Naime, ako želimo da pokažemo da je $\psi_1 = -\frac{2u}{kJ_0(ka)} J_1(kr) \sin \theta$, (za $r < a$) posmatramo:

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = f(\psi)$$

što je u polarnim koordinatama:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = f(\psi) \quad (4.8.1.1)$$

Čapljin je izabrao da ψ bude sledeća funkcija:

$$f(\psi) = -k^2\psi, \quad k \text{ je konstanta} \quad (4.8.1.2)$$

i tražio rešenje u obliku:

$$\psi(r, \theta) = Z(r)\sin\theta. \quad (4.8.1.3)$$

Uslovi za neprekidnost brzina:

$$\nu_r = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad \nu_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

a na granici kada je $r = a$ važi:

$$\psi = \psi_2$$

Zamenom (4.8.1.3) u (4.8.1.2) u (4.8.1.1) dobija se:

$$\frac{\partial^2(Z(r)\sin\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(Z(r)\sin\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(Z(r)\sin\theta)}{\partial\theta^2} + k^2Z(r)\sin\theta = 0$$

Odakle sledi da je:

$$\sin\theta = 0 \text{ ili } r^2Z''(r) + rZ'(r) + (k^2r^2 - 1)Z(r) = 0$$

Beselova jednačina je oblika:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

Odakle vidimo sličnost gore navedene jednačine $r^2Z''(r) + rZ'(r) + (k^2r^2 - 1)Z(r) = 0$ upravo sa Beselovom jednačinom. Za određivanje rešenja Beselove koriste se stepeni redovi. Rešenje se traži u obliku:

$$y(x) = x^n \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

Koristeći tu ideju, posle određene algebre dolazi se do sledećeg rešenja:

$$\psi_1 = -\frac{2u}{kJ_o(ka)} J_1(kr)\sin\theta, \quad r < a.$$

4.8.2 Burgersova rešenja za Ojlerove jednačine

Burgersovi vrtlozi. 1938. godine Tejlor je prihvatio činjenicu da nadmetanje između istezanja i viskozne difuzije vrtložnosti mora biti mehanizam kontrolisanja rasipanja energije u turbulenciji. Dekadu kasnije, Burger je otkrio egzaktno rešenje koje opisuje mirne vrtložne cevi i slojeve u lokalno uniformnim tokovima gde su dva efekta u ravnoteži. Burger je predstavio vrtlog kao matematički model koji ilustruje teoriju turbulencije i uočio je da vrtlog ima svojstvo da stopa viskoznog rasipanja po jedinici dužine vrtloga je nezavisna od visokog Rejnoldsovog broja [23].

Burgerov vrtlog predstavlja jedan odličan primer ravnoteže između konvekcije, intenzivnosti i difuzije vrtložnosti.

Da bi se razmatrala ovakva rešenja polazi se od polja brzine oblika:

$$\mathbf{u} = \left(-\frac{\gamma}{2}x, \frac{\gamma}{2}y, \gamma z \right) + (-\psi_y, \psi_x, 0)$$

gde je γ konstanta ili funkcija vremena. U ovom primeru, smatra se da je γ konstanta. Dakle, $\xi = (0, 0, \xi)^T$ i $\Delta\psi = \xi$. U ovom slučaju matrica naprezanja \mathbf{D} ima blok dijagonalnu formu. To se lako vidi iz $D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$. Npr. za $D_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(-\frac{\gamma}{2}x)}{\partial z} - \psi_{yz} + \frac{\partial(\gamma z)}{\partial x} \right) = 0$. Daljim raspisivanjem na isti način se dobije da su D_{31} , D_{23} i D_{32} takođe nula pa matrica \mathbf{D} ima oblik:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

Karakteristični polinom ove matrice je:

$$p(\lambda) = [(\lambda - D_{11})(\lambda - D_{22}) - (\lambda - D_{12})(\lambda - D_{21})](\lambda - \gamma)$$

Odakle se jasno vidi da je jedan karakteristični koren matrice upravo γ , a njemu odgovarajući karakteristični vektor $(0, 0, 1)^T$. Dakle, vektor vrtložnosti ξ je paralelan karakterističnom vektoru matrice \mathbf{D} . Zbog toga je ugao θ definisan ranije u radu jednak 0. Kako je $\xi = (0, 0, \xi)^T$ iz $D\mathbf{D}/Dt = \mathbf{D}\xi$ se dobija:

$$\xi_t - \gamma(x\xi_x + y\xi_y) + (\psi_x\xi_y - \psi_y\xi_x) = \gamma\xi \quad (b1)$$

Vrtložnost je funkcija samo po r ($r^2 = x^2 + y^2$) koja odgovara Burgersovom osnosimetričnom vrtlogu. Rešavanjem jednačine $\Delta\psi = \psi_{xx} + \psi_{yy} = \xi$, tj. korišćenjem $r^2 = x^2 + y^2$ dobija se:

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{1}{r} \int_0^r s\xi(s, t) ds$$

Sada je $x\xi_x + y\xi_y = r\xi_r$ i $x\psi_y - y\psi_x = 0$, pa jednačina (b1) postaje:

$$\xi_t = \gamma \left(\xi + \frac{r}{2} \frac{d\xi}{dr} \right)$$

koja sa početnom vrednošću $\xi_0 = \xi(r, 0)$ ima rešenje u obliku:

$$\xi(r, t) = e^{\gamma t} \xi_0 \left(r e^{\frac{\gamma t}{2}} \right)$$

Posledica od $\theta = 0$ je:

$$\frac{D\alpha}{Dt} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{D\chi}{Dt} = 0$$

Zbog toga, Burgerova rešenja se ponašaju kao ekvilibrijumska rešenja sistema u Langražovom smislu, mada ta rešenja ne moraju nužno biti stabilna.

4.8.3 Dinamički istegnuti vrtlozi kao rešenja trodimenzionalnih Navije-Stoksovih jednačina

Izduženi vrtlozi Burgerovog tipa koji su egzaktna rešenja Navije-Stoksovih jednačina su tipična rešenja koja se koriste da ilustruju pojedine paradigme moderne teorije turbulencije. Neka je:

$$\mathbf{u} = (u_1(x, y, t), u_2(x, y, t), \gamma(x, y, t)z + W(x, y, t))$$

polje brzine koje se razmatra, a u_1, u_2, γ i W su funkcije samo od x, y i t . To će učiniti da se jednačina treće komponente vrtložnosti razdvoji od W . Vektor vrtložnosti se lako odredi kao rotor brzine \mathbf{u} , dakle:

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (W_y + z\gamma_y, -W_x - z\gamma_x, u_{2,x} - u_{1,y})$$

Neka se razmatraju Navije-Stoksove jednačine (3.1.1):

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

U ovom slučaju Laplasijan se može posmatrati kao 2D operator, sa obzirom da su u_1, u_2, γ, ξ_3 i W sve funkcije koje zavise od x, y i t . Dakle:

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Vektor vrtložnosti mora zadovoljavati jednačinu:

$$\frac{D\boldsymbol{\xi}}{Dt} = \mathbf{D}\boldsymbol{\xi} + \nu \Delta \boldsymbol{\xi}$$

gde je \mathbf{D} , kao što je poznato od ranije matrica naprezanja.

Teorema 4.8.3.1 [10]: Za dato vektorsko polje \mathbf{u}, ξ_3, W i γ zadovoljavaju:

$$\frac{D\xi_3}{Dt} = \gamma\xi_3 + \nu\Delta_2\xi_3 \quad (4.8.3.1)$$

$$\frac{DW}{Dt} = -\gamma W + \nu\Delta_2 W \quad (4.8.3.2)$$

$$\frac{D\gamma}{Dt} + \gamma^2 + p_{zz}(t) = \nu\Delta_2\gamma \quad (4.8.3.3)$$

gde u_1 i u_2 zadovoljavaju uslov kontinuteta:

$$u_{1,x} + u_{2,y} + \gamma = 0$$

Napomena: Dvostruki parcijalni izvod pritiska po z , $p_{zz}(t)$, mora biti prostorno uniforman što je ograničenje koje je neophodno za postojanje takvog toka.

Dokaz: Treća komponenta Navijer-Stoksovih jednačina, kada se uvrsti u njih izraz za brzinu \mathbf{u} ($\mathbf{u}_3 = \gamma z + W$) je

$$\begin{aligned} \nu(z\Delta_2\gamma + \Delta_2W) - p_z &= \frac{D}{Dt}(\gamma z + W) \\ \frac{D}{Dt}(\gamma z + W) &= \frac{\partial(\gamma z + W)}{\partial t} + (u_1 \frac{\partial}{\partial x} + u_2 \frac{\partial}{\partial y} + (\gamma z + W) \frac{\partial}{\partial z})(\gamma z + W) \\ &= z \frac{\partial\gamma}{\partial t} + zu_1 \frac{\partial\gamma}{\partial x} + zu_2 \frac{\partial\gamma}{\partial y} + z\gamma^2 \\ &\quad + \frac{\partial W}{\partial t} + u_1 \frac{\partial W}{\partial x} + u_2 \frac{\partial W}{\partial y} + \gamma W \\ &= z \left(\frac{D\gamma}{Dt} + \gamma^2 \right) + \left(\frac{DW}{Dt} + \gamma W \right) \\ \nu(z\Delta_2\gamma + \Delta_2W) - p_z &= z \left(\frac{D\gamma}{Dt} + \gamma^2 \right) + \left(\frac{DW}{Dt} + \gamma W \right) \end{aligned}$$

Nakon integracije po z dobija se:

$$-p(x, y, z, t) = \frac{1}{2}z^2 \left(\frac{D\gamma}{Dt} + \gamma^2 - \nu\Delta_2\gamma \right) + z \left(\frac{DW}{Dt} + \gamma W - \nu\Delta_2 W \right) + f(x, y, t) \quad (4.8.3.4)$$

Iz prve dve komponente Navije-Stoksovih jednačina:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 u_{1,x} + u_2 u_{1,y} - \nu\Delta u_1 &= -p_x \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 u_{2,x} + u_2 u_{2,y} - \nu\Delta u_2 &= -p_y \end{aligned}$$

se vidi da su p_x i p_y nezavisni od z . Da bi to bilo tačno koeficijenti uz z i z^2 moraju zadovoljavati sledeće:

$$\frac{DW}{Dt} + \gamma W - \nu \Delta_2 W = c_1(t)$$

$$\frac{D\gamma}{Dt} + \gamma^2 - \nu \Delta_2 \gamma = c_2(t)$$

Može se pretpostaviti da je $c_1(t) = 0$ bez gubitka opštosti. U tom slučaju dobija se da je $c_2(t) = -p_{zz}$, odakle sledi da p_{zz} mora biti prostorno uniformno.

Matrica naprezanja u ovom slučaju je:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} u_{1,x} & \left(\frac{1}{2}\right)(u_{1,y} + u_{2,x}) & \left(\frac{1}{2}\right)(z\gamma_x + W_x) \\ \left(\frac{1}{2}\right)(u_{1,y} + u_{2,x}) & u_{2,y} & \left(\frac{1}{2}\right)(z\gamma_y + W_y) \\ \left(\frac{1}{2}\right)(z\gamma_x + W_x) & \left(\frac{1}{2}\right)(z\gamma_y + W_y) & \gamma \end{bmatrix}$$

Raspisivanjem izraza $\mathbf{D}\xi$ dolazi se do sledećeg:

$$(\mathbf{D}\xi)_3 = \gamma\xi_3$$

Odakle sasvim jasno sledi:

$$\frac{D\xi_3}{Dt} = \gamma\xi_3 + \nu\Delta_2\xi_3$$

Time je teorema dokazana. Sada se postavlja pitanje mogućnosti i načina rešivosti jednačina iz prethodne teoreme. Takva razmatranja se vrše u nastavku.

Neka je sada $u_1 = -\frac{\gamma}{2}x - \psi_y$, $u_2 = -\frac{\gamma}{2}y + \psi_x$, $\psi(x, y, t)$ je funkcija protoka dok u_3 ostaje isto kao što je i do sada bilo. Ovako definisano polje brzine se razlikuje samo po članu W u odnosu na polje koje je razmatrano pri određivanju Burgerovog rešenja Ojlerovih jednačina.

Promenljiva γ je funkcija samo od vremena $\gamma = \gamma(t)$ i sada se može posmatrati kao stopa naprezanja. U tom slučaju, jednačine iz prethodne teoreme postaju:

$$\frac{D\xi_3}{Dt} = \gamma(t)\xi_3 + \nu\Delta_2\xi_3$$

$$\frac{DW}{Dt} = -\gamma(t)W + \nu\Delta_2W$$

gde je totalni izvod:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\gamma}{2} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) + J_{x,y}(\psi, \cdot)$$

Sada se uvode nove koordinate, odnosno koristi se Landgrenova transformacija. On je uveo transformacije i za stišljive i za nestišljive tokove i tako omogućio rešavanje jednačina za definisano polje brzine. Dakle on je uveo sledeće transformacije:

$$s(t) = \exp\left(\int_0^t \gamma(t') dt'\right) \quad (4.8.3.5)$$

$$\zeta = s^{1/2}x, \quad \eta = s^{1/2}y, \quad \tau = \int_0^t s(t') dt'$$

Jednačina vrtložnosti ξ_3 i komponenta brzine W se sada reskaliraju u nove promenljive koje su jednostavnije za rad:

$$\Omega_3(\zeta, \mu, \tau) = s^{-1}\xi_3(x, y, t) \quad \text{i} \quad \mathcal{W}(\zeta, \mu, \tau) = s W(x, y, t) \quad (4.8.3.6)$$

U (ζ, μ) ravni operator $\tilde{\Delta}_2$ se definiše kao:

$$\tilde{\Delta}_2 = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

i operator $D/D\tau$ kao:

$$\frac{D}{D\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + J_{\zeta, \mu}(\psi, \cdot)$$

gde je $\psi(\zeta, \mu, \tau) = \psi(x, y, t)$. Sada jednačine (4.8.3.1), (4.8.3.2), (4.8.3.3) mogu biti transformisane u nove jednačine sa skaliranim promenjivim Ω_3 , \mathcal{W} i u novom koordinatnom početku (ζ, μ, τ) .

Teorema 4.8.3.2: $\Omega_3(\zeta, \mu, \tau)$ evoluira u odgovarajuće 2D Navije-Stoksove jednačine:

$$\frac{D\Omega_3}{D\tau} = v \tilde{\Delta}_2 \Omega_3 \quad (4.8.3.7)$$

sa $\Omega_3 = \tilde{\Delta}_2 \psi$, $\mathcal{W}(\zeta, \mu, \tau)$ je pozitivni scalar i određuje se rešavanjem 2D linearog problema:

$$\frac{D\mathcal{W}}{D\tau} = v \tilde{\Delta}_2 \mathcal{W} \quad (4.8.3.8)$$

Stopa naprezanja $\gamma(t)$ određuje se iz Rikatijeve jednačine:

$$\dot{\gamma} + \gamma^2 + p_{zz}(t) = 0.$$

Napomena: Lundgren je pokazao da rešenja jednačine (4.8.3.7) mogu biti preslikana ponovo na 3D problem. Kada je $\gamma < 0$ postoji mogućnost da se domen $t \in [0, \infty]$ može preslikati na konačnu oblast τ -ose. Na primer, ako je $\gamma = -\gamma_0 = \text{const.}$, $\gamma_0 > 0$, onda $s = \exp(-\gamma_0 t)$ i $\tau = \gamma_0^{-1}[1 - \exp(-\gamma_0 t)]$. Otuda se $t \in [0, \infty]$ preslikava na $\tau \in [0, \gamma_0^{-1}]$.

Rikatijeva jednačina za γ

Jednačine (4.8.3.6) pokazuju da znak od γ određuje da li će ξ_3 i W rasti ili opadati (s je definisano preko γ , $s(t) = \exp\left(\int_0^t \gamma(t') dt'\right)$). Kako γ zavisi samo od t , tada se jednačina (4.8.3.3) redukuje na:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \gamma^2 + p_{zz}(t) = 0, \text{ tj. } -p_{zz}(t) = \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \gamma^2.$$

Ako se primeni izvod po t na $s(t) = \exp\left(\int_0^t \gamma(t') dt'\right)$ dobije se:

$$\dot{s} = \left(\int_0^t \gamma(t') dt' \right)'_t \left[\exp\left(\int_0^t \gamma(t') dt'\right) \right] = \gamma(t)s(t),$$

pa ako se još jednom primeni izvod po t , dobija se sledeća jednakost:

$$\ddot{s} = s \frac{\partial \gamma}{\partial t} + s\gamma^2 = s \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \gamma^2 \right).$$

Kako je $-p_{zz}(t) = \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \gamma^2$, dalje je:

$$\ddot{s} = -sp_{zz}(t),$$

tj.

$$\ddot{s}(t) + s(t)p_{zz}(t) = 0. \quad (4.8.3.9)$$

Neka je $p_{zz}(t) = -a^2 = \text{const.}$

Tada jednačina (4.8.3.9) ima rešenje:

$$s = e^{\pm at} \text{ ili } s = \cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}.$$

Sada iz $s(t) = \exp\left(\int_0^t \gamma(t') dt'\right) = \exp(\pm at)$ sledi da je:

$$\int_0^t \gamma(k) dk = \pm at.$$

Odakle, jasno sledi da je $\gamma = \pm a$, a u slučaju $s = \cosh at$, $\gamma = a \tanh at = a(\exp(at) - \exp(-at))/(\exp(at) + \exp(-at))$.

Za drugi oblik od γ važi da $\gamma \rightarrow a$, kada $t \rightarrow a$.

Landgren je pronašao spiralna rešenja za Navije-Stoksove jednačine, odnosno za jednačinu Ω_3 . U neviskoznom slučaju, njegova ideja je bila da traži rešenje za jednačinu (4.8.3.7) u formi skupa Dirakovih δ funkcija:

$$\Omega_3(\rho, \theta, \tau) = 2\pi \sum_j \Gamma_j(\rho) \delta[\theta - \tilde{\Omega}(\rho)\tau - \theta_j],$$

gde je ρ 2D radikalna promenljiva u $\zeta - \mu$ ravni tako da je $\rho^2 = \zeta^2 + \mu^2$. $\tilde{\Omega}(\rho) = \rho^{-1}u^{(\theta)}$ se uzima kao prosečna ugaona brzina. Vrtložni listovi imaju spiralnu strukturu u prethodnoj jednačini, $\theta = \tilde{\Omega}(\rho)\tau$.

Vratimo se na jednačinu:

$$\frac{\partial \Omega_3}{\partial \tau} = \nu \left(\frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \rho} \right)$$

koja je difuzna, odnosno topotna jednačina, pa je osnosimetrično rešenje ove jednačine dano sa:

$$\Omega_3(\rho, \tau) = \frac{a}{\tau} \exp\left(-\frac{\rho}{4\nu\tau}\right).$$

Neka je $\gamma_0 = \text{konst.}$ $\gamma_0 > 0$. Onda je $s = \exp(\gamma_0 t)$ i $\tau = \gamma_0^{-1}(\exp(\gamma_0 t) - 1)$. Tada je:

$$\xi_3 = s\Omega_3 = \frac{a\gamma_0 \exp(\gamma_0 t)}{\exp(\gamma_0 t) - 1} \exp\left\{-\frac{\gamma_0 \exp(\gamma_0 t)r^2}{4\nu(\exp(\gamma_0 t) - 1)}\right\}$$

U slučaju da vreme teži ka beskonačnosti tada se u:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\exp(\gamma_0 t)}{\exp(\gamma_0 t) - 1}$$

javlja neodređeni izraz " $\frac{\infty}{\infty}$ " pa može da se primeni Lapitalovo pravilo, odakle sledi da je navedeni limes 1. Koristeći svojstva limesa, lako se dobije da je:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_3 = a\gamma_0 \exp\left\{-\frac{\gamma_0 r^2}{4\nu}\right\}$$

Jednačina (4.8.387) ima ekvivalentno rešenje kao i (4.8.3.7), osno-simetričnu tačku izvora:

$$W(\rho, \tau) = \frac{l}{\tau} \exp\left(-\frac{\rho}{4\nu\tau}\right)$$

gde zbog dimenzionalnih razloga mora biti $l \equiv a$.

4.8.4 Hilov sferični vrtlog

Hilov sferični vrtlog predstavlja jedan od najboljih primera mirnog rotirajućeg rešenja klasičnih jednačina koje opisuje neviskozne, nestišljive fluidne tokove. Sferični vrtlog je poznat kao član jednoparametarske familije stabilnih vrtložnih prstenova.

Sferični vrtlog može biti predstavljen Stoksovom funkcijom protoka

$$\psi(r, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2} U \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) r^2 \sin^2 \theta, & r > a \\ -\frac{3}{4} U \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 \sin^2 \theta, & r < a \end{cases}$$

korišćenjem sferičnih polarnih koordinata sa koordinatnim početkom O u centru vrtloga. Tačka stagnacije je u $r = a$, $\theta = 0$. Razdaljina od ose simetrije iznosi $s = r \sin \theta$. Vrtložna distribucija je dana sa $\xi = (0, 0, \xi)$, gde je

$$\xi = -\frac{1}{r \sin \theta} D^2 \psi, \quad D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

5 Slaba L^∞ rešenja jednačine vrtložnosti

Mnogi problemi u fizici se odlikuju visoko nestabilnim strukturama čija kompletna dinamika ne može biti opisana jednostavnim, glatkim modelima. Zog toga su naredna dva poglavља ovog master rada posvećenja rešenjima Ojlerovih jednačina koja nisu glatka. Dakle, egzistenciji i jedinstvenosti slabih rešenja koja su značajna po tome što su prikladna za modeliranje izolovanih oblasti intenzivne vrtložnosti. Na primer, takva oblast se koristi za modelovanje evolucije uragana.

Eliptični vrtlozi su samo jedan primer klase slabih rešenja vrtložno-strujnog oblika 2D Ojlerovih jednačina, u kojima je vrtložnost prekidna ali ograničena. U pitanju su slaba rešenja sa konstantnom vrtložnošću unutar eliptične oblasti koja se rotira. Eliptični, stubni vrtlozi mogu postojati bez prisustva spoljašnjeg toka i u tom slučaju elipse su uniformno rotirajuća rešenja Ojlerove jednačine. Jednostavno se rotiraju sa konstantnom ugaonom brzinom bez promene oblika. Ukoliko se uvede tok sa naprezanjem uzrokovane da elipse ostaju elipse, ali sa drugačijim oblikom.

Prepostavlja se da je eliptični, stubni vrtlog beskonačan u pravcu z -ose. Presek tog vrtloga čini elipsu $E(t)$ sa parametrima $a(t)$ i $b(t)$ i uglom rotacije $\theta(t)$. Neka je $\psi(x, t)$, $x = (x_1, x_2)$ funkcija protoka. Tada je:

$$-\Delta_x \psi(x, t) = \begin{cases} \xi, & \text{unutar } E(t) \\ 0, & \text{drugde} \end{cases}$$

Brzina \mathbf{u} je neprekidna kroz $E(t)$ što se uzima kao granični uslov. Ako je ugao rotacije nula onda se polje brzine računa prema Lamb-u (videti [15]) na sledeći način:

$$(u_1, u_2) = U(a, b)x$$

gde je

$$U(a, b) = \begin{cases} \frac{\xi}{a+b} \begin{bmatrix} 0 & -a \\ b & 0 \end{bmatrix}, & \text{unutar } E(t) \\ \frac{\xi}{\sqrt{a^2+\lambda^2} + \sqrt{b^2+\lambda^2}} \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{a^2+\lambda^2} \\ \sqrt{b^2+\lambda^2} & 0 \end{bmatrix}, & \text{drugde} \end{cases},$$

a parametar $\lambda > 0$ zadovoljava:

$$\frac{x_1^2}{a^2 + \lambda} + \frac{x_2^2}{b^2 + \lambda} = 1.$$

$R(\theta)$ je standardna matrica rotacije na \mathbb{R}^2 :

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Unutar elipse brzina \mathbf{u} linearno zavisi od x i samim tim očuvava oblik vrtloga. Jednačina elipse je data sa:

$$x^t E(a, b, \theta) = x^t \left(R(\theta) \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{bmatrix} R(-\theta) \right) = 1$$

Definisanjem putanje čestice na granici i diferenciranjem jednačine elipse po t dobija se jednačina:

$$U^T E + \dot{E} + EU = 0$$

Ako se u datu jednačinu uvrste tačni oblici od U i E dobijaju se jednačine koje opisuju Kirhofov mirni, eliptični, kolumnarni vrtlog. Kirhofov eliptični vrtlog je jednostavan primer vrtložne izolovane, uniformne putanje vrtloga. Vrtložnost je distribuirana uniformno preko eliptične oblasti sa konstantnim količnikom $\lambda = a/b$, gde je a glavna osa. (videti [16])

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt}(t) &= 0 \\ \frac{db}{dt}(t) &= 0, \\ \frac{d\theta}{dt}(t) &= \xi \frac{ab}{(a+b)^2} \equiv \frac{\Gamma}{\pi(a+b)^2} \end{aligned}$$

gde je $\Gamma = \xi\pi ab$ je ukupna cirkulacija vrtloga.

5.1 Vrtložno-strujna formulacija i slaba rešenja

Uvod: Pregled važnih definicija

Neka Ω predstavlja otvoren skup od \mathbb{R}^n i neka $C^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}_0$ predstavlja skup funkcija koje su definisane nad Ω i imaju neprekidne izvode zaključno sa redom m . Definišemo sledeće pojmove:

Definicija 5.1.1: Nosač neprekidne funkcije $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ označavamo sa $\text{supp } f$, a on predstavlja athenenciju skupa $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$.

Definicija 5.1.2: Podskup $C_0^m(\Omega)$ skupa $C^m(\Omega)$ predstavlja skup funkcija čiji su nosači kompaktni u Ω ($\text{supp } f$ je ograničen i $\text{supp } f \subset \Omega$) tj.

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega) : \text{supp } f \subset \subset \Omega\}$$

Skup $C^\infty(\Omega)$ se naziva prostor test funkcija.

Definicija 5.1.3: $L^p(\Omega)$ predstavlja prostor merljivih kompleksnih funkcija u definisanih na Ω za koje važi

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$$

$L^p(\Omega)$ je vektorski prostor

$$\|u\|^p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \right)^{1/p}$$

je norma na $L^p(\Omega)$ za $1 \leq p < \infty$.

Ideja ovog dela jeste formulisati koncept slabih rešenja 2D Ojlerovih jednačina sa početnom vrtložnošću $\xi_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Pojam slabog rešenja nije jedinstveno definisan, ali se definiše tako da što bolje odgovara fizičkom modelu koji jednačina opisuje.

Prisetimo se jednačine:

$$\frac{D\xi}{Dt} = 0$$

$$\xi|_{t=0} = 0$$

gde se brzina \mathbf{u} određuje pomoću vrtložnosti iz:

$$\mathbf{u}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{K}_2(x - y) \xi(x, y) dy,$$

sa jezgrom:

$$\mathbf{K}_2(x) = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{x_2}{|x|^2}, \frac{x_1}{|x|^2} \right)^T$$

. Da bi se pomenuta rešenja odredila, treba prethodnu jednačinu posmatrati u ekvivalentnom zapisu preko vrtložno-strujne formulacije. Korektan oblik proizilazio iz transportne formule

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi \xi dx = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{D\varphi}{Dt} \xi dx + \int_{\mathbb{R}^2} \varphi \frac{D\xi}{Dt} dx$$

Integraljenjem po t dobija se:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, T) \xi(x, T) dx - \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, 0) \xi(x, 0) dx \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \frac{D\varphi}{Dt} \xi dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \varphi \frac{D\xi}{Dt} dx dt \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

Definicija 5.1.4 [16]: Neka je dato $\xi_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, (\mathbf{u}, ξ) je slabo rešenje vrtložno-strujne formulacije 2D Ojlerovih jednačina sa sa početnim podatkom $\xi_0(x)$, pod uslovom da:

$$\begin{aligned} & \xi \in L^\infty([0, T]; L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)), \\ & \mathbf{u} = K * \xi \text{ i } \xi = \operatorname{curl} \mathbf{u}, \\ & \text{za sve } \varphi \in C^1([0, T]; C_0^1(\mathbb{R}^2)) \end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, T) \xi(x, T) dx - \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, 0) \xi_0(x) dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \frac{D\varphi}{Dt} \xi dx dt. \quad (5.1.2)$$

* označava konvoluciju

Propozicija 5.1.1:

Svako glatko rešenje 2D Ojlerove jednačine je slabo rešenje u smislu definicije 8.1
Obrnuto, ako je gore navedno slabo rešenje dodatno C^1 glatko onda je to klasično rešenje.

Dokaz: Dokaz pod *i*. sledi iz same konstrukcije. Da bi se dokazao deo *ii*. pretpostavimo da je (\mathbf{u}, ξ) C^1 glatko slabo rešenje.

Poređenjem (5.1.1) i (5.1.2) dobija se da je:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \frac{D\varphi}{Dt} \xi dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \varphi \frac{D\xi}{Dt} dx dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \frac{D\varphi}{Dt} \xi dx dt.$$

Što daje:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \varphi \frac{D\xi}{Dt} dx dt = 0, \quad \forall \varphi \in C^1([0, T]; C_0^1(\mathbb{R}^2))$$

Kako je $\frac{D\xi}{Dt}$ neprekidno, to implicira da je $\frac{D\xi}{Dt} = 0$ odvojeno.

5.2 Egzistencija i jedinstvenost slabog rešenja

Prema definiciji iz prethodnog dela jasno sledi da glatka rešenja zadovoljavaju istu, pa samim tim klasa rešenja nije prazna. Sledeća teorema govori o egzistenciji slabog rešenja.

Teorema o egzistenciji slabih rešenja: Neka je početna vrtložnost $\xi_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Tada, uvek postoji slabo rešenje (\mathbf{u}, ξ) vrtložno-strujne formulacije 2D Ojlerovih jednačina u smislu definicije (5.1.4).

Klasa slabih rešenja je mnogo šira od klase glatkih rešenja. Kirhofovi eliptični vrtlozi su najjednostavnija slaba rešenja, koja nisu glatka. Iako je evolucija navedenih eliptičnih rešenja prilično jednostavna, uopštena vortex-patch rešenja mogu razviti veoma kompleksne strukture. Neka je $\xi_0^\epsilon, \epsilon > 0$ glačanje¹⁵ (aproksimira glatku funkciju) početne vrednosti za $\xi_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Prvo, bira se $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \rho \geq 0, \int_{\mathbb{R}^2} \rho dx = 1$. Zatim se definiše glačanje za ξ :

$$\xi_0^\epsilon = J_\epsilon \xi_0 = \epsilon^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} \rho \left(\frac{x-y}{\epsilon} \right) \xi_0(y) dy, \quad \epsilon > 0$$

Na osnovu leme (lema 3.5 [7]) koja predstavlja svojstva glačanja važi sledeće:

$$\|\xi_0^\epsilon\|_{L^\infty} \leq \|\xi_0\|_{L^\infty}$$

$$\|\xi_0^\epsilon\|_{L^1} \leq \|\xi_0\|_{L^1}$$

¹⁵ Glačanje (eng. mollifier) je operator koji datu funkciju koja nije glatka aproksimira glatkom, pa je onda on iz prostora $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, dakle to je glatka funkcija sa posebnim svojstvima. O svojstvima i teoremama vezanim za ovu oblast može se više pročitati iz literature [16]

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\xi_0^\epsilon - \xi_0\|_{L^1} = 0$$

Ova rešenja takođe zadovoljavaju jednakost (6.6) koja definiše slaba rešenja:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, T) \xi^\epsilon(x, T) dx - \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, 0) \xi_0^\epsilon(x) dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \frac{D^\epsilon \varphi}{Dt} \xi^\epsilon dx dt. \quad (5.2.1)$$

za sve $\varphi \in C^1([0, T]; C_0^1(\mathbb{R}^2))$ gde je $(D^\epsilon/Dt) = (\partial/\partial t) + \mathbf{u}^\epsilon \cdot \nabla$.

Sledeća propozicija govori o ograničenjima za \mathbf{u}^ϵ i ξ^ϵ , kao i o konvergenciji istih, redom \mathbf{u} i ξ . Propozicija se zasniva na teoriji potencijala i biće navedena bez dokaza.

Propozicija 5.2.1: Neka je početna vrtložnost $\xi_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ i neka su \mathbf{u}^ϵ i ξ^ϵ glatka rešenja regulisana početnom vrednošću ξ_0^ϵ na interval $[0, T]$. Onda, za sve $t \in [0, T]$:

\mathbf{u}^ϵ i ξ^ϵ su uniformno ograničena rešenja, i

$$\|\mathbf{u}^\epsilon(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq c_1 \|\xi^\epsilon(\cdot, t)\| \leq c_2 \|\xi_0\|,$$

gde je $\|\xi_0\| = \|\xi_0\|_{L^1} + \|\xi_0\|_{L^\infty}$

Postoji funkcija $\xi(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ i $\mathbf{u} = K * \xi$ takva da $\forall t \in [0, T]$:

$$\xi^\epsilon(\cdot, t) \rightarrow \xi(\cdot, t) \text{ u } L^1(\mathbb{R}^2)$$

$$\mathbf{u}^\epsilon(\cdot, t) \rightarrow_x \mathbf{u}(\cdot, t) \text{ lokalno}$$

\rightarrow_x označava uniformnu konvergenciju u prostoru promenljivih.

Dokaz teoreme o egzistenciji slabih rešenja: Ostaje da se pokaže da su granične funkcije \mathbf{u} i ξ slaba rešenja u smislu definicije (5.1.4). Treba pokazati da (5.2.1) konvergira ka:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \frac{D\varphi}{Dt} \xi dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \varphi \frac{D\xi}{Dt} dx dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \frac{D\varphi}{Dt} \xi dx dt$$

kada koeficijent *glačanja* teži ka 0.

Kako φ ima kompaktan nosač, $\mathbf{u}^\epsilon \rightarrow_x \mathbf{u}$ lokalno, $\xi^\epsilon \rightarrow \xi$ u L^1 i ξ^ϵ je uniformno ograničeno, konvergencija nelinearnog izraza se dobija Lebegovom teoremom dominantne konvergencije.

Lebegova teorema dominantne konvergencije: Neka je $\{f_n\}$ niz realnih, merljivih funkcija na merljivom prostoru (S, Σ, μ) . Pretpostavimo da niz konvergira tačkasto ka funkciji f i izdominirana je nekom funkcijom g u smislu da:

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

Za sve brojeve n u skupu indeksa niza i za sve tačke $x \in S$. Onda je f integrabilna i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S |f_n - f| d\mu = 0$$

što takođe implicira:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S f_n d\mu = \int_S f d\mu$$

dakle:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{u}^\epsilon \cdot \nabla \varphi \xi^\epsilon dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \xi dx dt$$

Teoremu o jedinstvenosti slabog rešenja navodimo sa dokazom, dok pomoćnu lemu 5.2.1 navodimo bez dokaza. Dokaz te leme se može pogledati u knjizi *Vorticity and Incompressible Flow* [16].

Lema 5.2.1: Neka slabo rešenje (u smislu definicije 5.1.4) dvodimenzionalne Ojlerove jednačine $\xi(\cdot, t) \in L_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ ima kompaktan nosač $\text{supp } \omega(\cdot, t) \subset \{x: |x| \leq R(t)\}$. Tada, za sve $1 < p < \infty$ važi:

$$\|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^p} \leq c(\|\xi_0\|_p)p \quad (5.2.2)$$

Teorema o jedinstvenosti slabog rešenja [16]: Neka početna vrtložnost $\xi_0 \in L_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ ima kompaktan nosač $\text{supp } \xi_0 \subset \{x: |x| \leq R_0\}$. Onda je slabo rešenje $\xi \in L^\infty[0, \infty; L_0^\infty(\mathbb{R}^2)]$ jedinstveno.

U dokazu ove teoreme se koristi Helderova nejednakost koja glasi:

Neka je (S, Σ, μ) i neka su $p, q \in [1, \infty)$ tako da je $1/p + 1/q = 1$. Tada za sve merljive, realne ili kompleksne funkcije f i g na S važi:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Dokaz[16]: Pokazaćemo prvo da bilo koje slabo rešenje $\xi(x, t)$ koje zadovoljava definiciju 5.1.4 sa početnom vrednošću $\xi_0(x)$, $\text{supp } \xi_0 \subset \{x: |x| \leq R_0\}$ zadovoljava:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \xi(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \xi_0(x, t) dx. \quad (5.2.3)$$

Bilo koje rešenje $\xi(\cdot, t) \in L^1 \cap L^\infty$ ima uniformno ograničenu brzinu \mathbf{u} , $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq c\|\xi\|$. Nosač ima konačnu brzinu prostiranja pa postoji uniformno rastuća, ograničena funkcija $R(t)$, takva da je $\text{supp } \xi(\cdot, t) \subset \{x: |x| \leq R(t)\}$. Prisetimo se jednakosti (5.1.2) iz definicije (5.1.4):

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, T) \xi(x, T) dx - \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, 0) \xi_0(x) dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \frac{D\varphi}{Dt} \xi dx dt. \quad (5.2.4)$$

gde je $\varphi \in C^1([0, T]; C_0^1(\mathbb{R}^2))$. Kako je $\xi(\cdot, t) \subset \{x: |x| \leq R(T)\}$ za sve $0 \leq t \leq T$, tada i bilo koja test funkcija koja zadovoljava $\varphi(x, t) = 1$ za sve $0 \leq t \leq T$ i $|x| \leq R(T)$ daje nulu na desnoj strani jednakosti (5.2.4). Tako dobijamo jednakost (5.2.3).

Prepostavimo sada da postoje dva slaba rešenja ξ_j i $\mathbf{u}_j = K_2 * \xi_j$, $j = 1, 2$ sa istom početnom vrednošću $\xi_0 \in L_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\text{supp } \xi_0(\cdot, t) \subset \{x: |x| \leq R_0\}$. Brzine \mathbf{u}_j zadovoljavaju 2D Ojlerove jednačine:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_j + \mathbf{u}_j \cdot \nabla \mathbf{u}_j = -\nabla p_j,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_j = 0$$

Iako svaka pojedinačna brzina \mathbf{u}_j nema konačnu energiju, njihova razlika $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ ima:

$$E(t) \equiv \int_{\mathbb{R}^2} (\boldsymbol{\omega}(x, t))^2 dx < \infty. \quad (5.2.5)$$

Pokažimo to:

Kako je $\text{supp } \xi_j(\cdot, t) \subset \{x: |x| \leq R_j(T)\}$, korišćenjem asimptotskog proširenja za jezgro K_2 doijamo:

$$\mathbf{u}_j(x, t) = \frac{c}{|x|} \int_{\mathbb{R}^2} \xi_j(y, t) dy + \mathcal{O}(|x|^{-2}) \quad \text{za } |x| > 2R_j(T)$$

Tada se zbog jednakosti (5.2.3) integralni delovi u $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ poništavaju, pa ostaje sa je $\boldsymbol{\omega} = \mathcal{O}(|x|^{-2})$ za $|x| > 2\max_j R_j(T)$. To ukazuje na tačnost ocene (5.2.5).

Kako $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ ima konačnu energiju i zadovoljava:

$$\boldsymbol{\omega}_t + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}_2 = -\nabla(p_1 - p_2)$$

uzimajući L^2 unutrašnji proizvod ove jednačine sa $\boldsymbol{\omega}$ i integraleći po delovima dobija se:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t) - \int_{\mathbb{R}^2} \boldsymbol{\omega}^2 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 dx + \int_{\mathbb{R}^2} (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}_2) \boldsymbol{\omega} dx = \int_{\mathbb{R}^2} (p_1 - p_2) \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} dx$$

gde je $\boldsymbol{\omega}^2 = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}$.

Zatim, Helderova nejednakost daje:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^2} \boldsymbol{\omega}^2 |\nabla \mathbf{u}_2| dx \\ &\leq 2 \|\nabla \mathbf{u}_2\|_{L^p} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\boldsymbol{\omega}|^{\frac{2p}{p-1}} dx \right)^{(p-1)/p} \\ &\leq 2 \|\nabla \mathbf{u}_2\|_{L^p} \left(\|\boldsymbol{\omega}(\cdot, t)\|_{L^p}^{2/(p-1)} \int_{\mathbb{R}^2} |\boldsymbol{\omega}|^2 dx \right)^{(p-1)/p} \end{aligned}$$

Ocena (5.2.2) primenjena na $\|\nabla \mathbf{u}_2\|_{L^p}$ kao i činjenica da su brzine \mathbf{u}_j uniformno ograničene vodi ka:

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq pM E(t)^{1-\frac{1}{p}}, \quad (5.2.6)$$

Gde je $M = c(\|\boldsymbol{\omega}_0\|_{L^\infty}) \|\boldsymbol{\omega}_0\|_{L^\infty}$.

Želimo da dobijemo da je $E(t) \equiv 0$ za sve $t > 0$. Kako je $E(0) = 0, E(T) = 0$ je trivijalno rešenje nejednakosti (5.2.6). Međutim, ova nejednakost nema jedinstvena rešenja. Maksimalno rešenje $\bar{E}(t)$ za $(0, T)$ je $\bar{E}(t) = (Mt)^p$ i bilo koje rešenje $E(t)$ zadovoljava $E(t) \leq \bar{E}(t)$.

Sada uzimamo u razmatranje jedan interval $[0, T^*]$ takav da je $MT^* \leq \frac{1}{2}$. Puštajući da $p \rightarrow \infty$ dobija se:

$$E(t) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^p \rightarrow 0,$$

Tako da je $(t) \equiv 0, \forall 0 \leq t \leq T^*$. Ponavljujući postupak, zaključujemo da je $E(t) = 0, \forall 0 \leq t \leq T$, pa je onda i $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ skoro svuda.

Jedinstvenost važi za slaba rešenja $\xi \in L^\infty[0, \infty; L^1(\mathbb{R}^2)]$ bez kompatnog nosača.

6 Primer realnog vrltoga: Uragan

Ideja ovog dela je da pokaže da u prirodi postoje vrtložna kretanja za čiji matematički opis se koristi potencijalno vektorsko polje u kome je vektor vrtložnosti jednak nuli. To znači vrtložno kretanje bez vrtložnosti i podvlači paralelu između ta dva pojma.

Tropski ciklon je opšti izraz za intenzivan voden sistem niskog pritiska koji se formira iznad okeana i koji je podstaknut tropskim okeanskim vodama. U severnom Atlanskom okeanu i istočnom Pacifiku jaki tropski cikloni se nazivaju uragani. Početak razvoja jednog uragana podrazumeva već postojeće poremećaje u atmosferi koji zahtevaju određene atmosferske i okeanske uslove za razvoj u uragan.

Uraganski vetar se rotira suprotno od kretanja kazaljki na satu u severnoj hemisferi. Jači vetar je zastupljen u zidu "oka" uragana (prikazano je na slici 19). Prečnik uragana je u proseku deset milja, odnosno oko šesnaest kilometara.

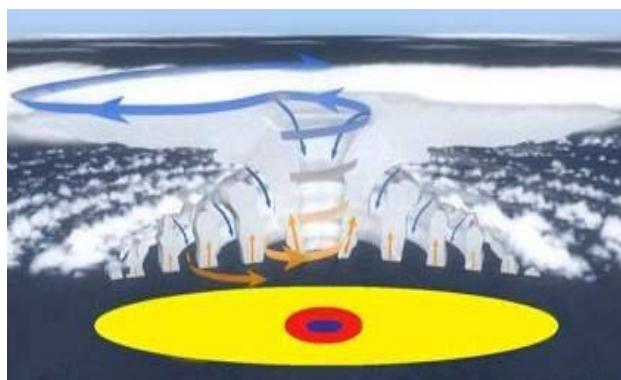
Uraganima upravljuju globalni vetrovi i njihova aktivnost variira od sezone do sezone i u zavisnosti od klimatskih uslova koji se razlikuju po vremenskim skalama.



*Slika 19:*Uragan Izabela u Atlanskom okeanu , 15 septembar 2003 godine,
NOAA (slika je preuzeta sa sajta <http://www.hurricanescience.org/gallery/>)

6.1 Struktura i kretanje uragana

Zreo uragan je skoro cirkularnog oblika. Vetrovi uragana u centru oluje su veoma laki (plavi krug na slici ispod), ali se povećavaju veoma brzo i dostižu maksimalno do 10-50km do centra (crveni kružni prsten na slici 20) i onda polako opadaju ka spoljnem sloju oluje (žuti krug).



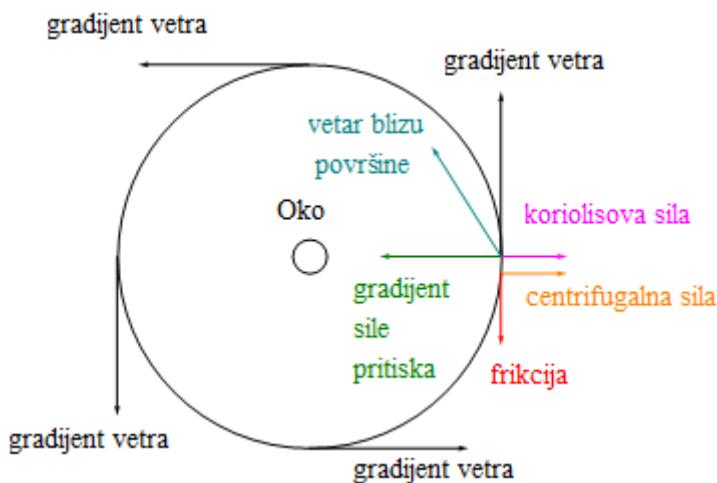
Slika 20: Vertikalni presek kroz centar uragana. Slikovito je objašnjeno

ponašanje vetra u različitim delovima oluje (slika preuzeta sa sajta <http://www.hurricanescience.org/science/science/hurricanestructure/> [13])

Veličina polja vetra uragana je obično nekoliko stotina kilometara, iako je veličina polja vetra sa uraganskim silama u proseku mnogo manja oko 161 km po času.

Jedna od najvećih tropskih oluja ikada zabeleženih bio je Tajfun Tip (Severno zapadni Tihi okean, 12. oktobar 1979 godine) koji je imao prečnik oko 2100 km, a najmanja takva oluja bio je ciklon Trejsi u Australiji, 1974. godine. Jedan uragan može se raspasti na više delova.

Cirkulacija vetra uragana se može lepo objasniti posmatrajući sledeću sliku:



Slika 21: Osnovna cirkulacija vetra uragana

Gradijent sile pritiska (zelena linija na slici 21) je usmerena levo od vetra prema centru nižeg pritiska u oko uragana. Koriolisova sila (purpurna linija) i centrifugalna sila (narandžasta linija) su usmerene desno od vetra u pravcu suprotnom od oka uragana. Ravnoteža između ove tri sile se naziva gradijent ravnoteže vetra. Sila trenja (crvena linija) je suprotnog smera od gradijenta vetra. Sila trenja usporava vetar, što smanjuje centrifugalnu i Koriolisovu силу, ali ne deluje na gradijent sile pritiska. Kao rezultat trenje uzrokuje da vetar blizu zemljine površine bude usmeren ugaono ka unutrašnjosti oka uragana.

Kretanje uragana od jednog mesta do drugog je poznato kao uragansko širenje. Preovladavajući vetrovi koji okružuju uragan, poznati i kao okružno polje vetra, jesu ono što vodi uragan duž svoje putanje. Uragan se širi u prvcima njegovog polja vetra.

6.2 Jednostavano matematičko modeliranje uragana

Svake godine područja naseljena stanovništvom bivaju opustošena širom sveta dejstvom uragana. U kritičnim regijama se razvijaju brojni načini upozoravanja stanovništva na moguću pojavu uragana, odnosno razvijaju se modeli predviđanja uragana. Takvi modeli iziskuju veliko poznavanje matematike te odlično programersko i numeričko znanje, jer su sami po sebi veoma komplikovani. Time se bave vodeći, nacionalni centri za izučavanje i predviđanje uragana. Dinamika fluida se koristi da bi se bolje razumelo formiranje oluje i olakšala mogućnost predviđanja. U opisivanju oluja kao i njihovom predviđanju veliku ulogu ima i statistika, posebno zbog toga što se koriste istorijski podaci. Tu su i opreaciona istaraživanja, a najznačajnije je matematičko programiranje.

Ideja, u ovom master radu, jeste konstruisati jednostavan matematički model uragana koristeći bazne principe fluidnog toka i svojstva vektorskog toka. Kada se konstruišu modeli, najčešće se uvode brojne pretpostavke, ali tako da simulacije ostanu verodostojne realnim pojavama. U ovom slučaju, konstruiše se jednostavan model pa je samim tim broj pretpostavki veći.

6.2.1 Pretpostavke modela

Uragini su komplikovani trodimenzionalni tokovi i moraju se uvesti brojne pojednostavljujuće pretpostavke o strukturi uragana i svojstvima fluidnog toka. Te pretpostavke su potrebne da bi se konstruisao model vektorskog polja koje bi moglo da opisuje jedno ovakvo trodimenzionalno kretanje. Neka je u pitanju uragan Isak, slika 22, koji je zadesio obalu Lusijane, Bahami, 21 avgust 2012. godine.



Slika 22: Satelitski snimak uragana Isak, (Slika preuzeta sa sajta [https://en.wikipedia.org/wiki/Hurricane_Isaac_\(2012\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Hurricane_Isaac_(2012))/)

Da bi se modelirala vlaga u uraganu Isak kao jednom idealnom fluidu, to znači da je on nestišljiv i njegova viskoznost može biti zanemarena. Iskustvo je pokazalo da se voda može smatrati nestišljivim fluidom, dok vodena para ne može. Nestišljivost se može smatrati razumnom pretpostavkom za osnovni model uragan, jer nije u zatvorenoj posudi gde bi se mogle pojaviti sile pritiskanja. Svi fluidi poseduju određeni nivo viskoznosti, na primer ulja imaju veliku viskoznost, dok voda ne, pa je

prepostavka o nepostojanju viskoznosti za osnovni model prihvatljiva. Sledeća prepostavka je da je tok u stabilnom stanju, u smislu da brzina u bilo kojoj tački fluida ne varira sa vremenom. Iako je uragan trodimenzionalni tok, u ovom jednostavnom slučaju modeluje se dvodimenzionalni, horizontalni presek toka, pa je prepostavka da fluid u preseku teče horizontalno. Već je bilo govora o načinu rotiranja kada je u pitanju uragan, dakle u pitanju je kovitlanje suprotno smeru kazaljki oko oka uragana u kojem se fluid javlja u obliku kiše. Niži pritisak u oku uragana uzrokuje unutrašnje zatele vazdušne mase i kružni vetar oko oka doprinosi vrtložnim efektima.

Prvo, treba odrediti eksplisitnu formulu za Isakovo polje brzine $\mathbf{u}(x, y)$. Treba zamisliti pravougaoni koordinatni sistem sa njegovim centrom u oku uragana i y – osom koja se širi ka severu. Sa obzirom na pomenutu strukturu uragana, vektorsko polje je najlakše sagraditi od dva. Jedno koje će predstavljati jednostavni "vrtložni tok" koji se kreće u smeru suprotnom smeru kazaljki na satu u krugovima oko oka uragana i drugi "ponorni" tok. Dakle, ideja je da se koristi metod super pozicije iz dinamike fluida i tako se, formiranjem vrtložnog polja toka i ponornog toka dođe do eksplisitnog izraza za polje brzine Isak uragana, $\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{u}_1(x, y) + \mathbf{u}_2(x, y)$.

1. Modelovanje vrtložnog toka

Vrtložni tok u smeru kretanja suprotnom od smera kretanja kazaljki na satu, idelanog fluida ima četiri karakteristike koje ga definišu:

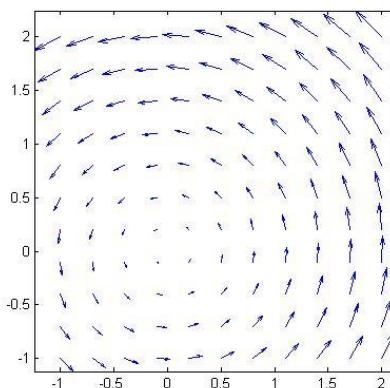
Vektor brzine u tački (x, y) je tangentan krugu čiji centar je smešten u koordinatnom početku i koji prolazi kroz tačku (x, y)

Pravac vektora brzine u tački (x, y) ukazuje na kretanje u smeru suprotnom od smera kazaljki na satu

Brzina fluida je konstantna na krugovima koji su smešteni u koordinatnom početku

Brzina fluida duž kruga je inverzno proporcionalna prečniku kruga (i samim tim brzina teži ka $+\infty$ kada prečnik kruga teži ka 0)

Takvo vektorsko polje koje predstavlja vrtložni tok u kretanju suprotnom od smera kazaljki bi trebalo na osnovu intuicije i gore navedene slike uragana, da izgleda slično sledećem vektorskom polju:



Slika 23: Slika vektorskog polja $\mathbf{u}(x, y) = (-y, x)$, programski jezik matlab

U dinamici fluida snaga k vrtložnog toka se definiše da bude 2π puta brzina fluida duž jediničnog kruga. Ako je snaga vrtložnog toka poznata, onda brzina fluida duž bilo kog drugog kruga može biti biti određena iz činjenice da je brzina obrnuto proporcionalna poluprečniku kruga.

Za potencijalni vrtložni tok važi:

$$\psi = -K \ln r$$

gde je K konstanta koja ukazuje na snagu vrtloga. Strujnice su date koncentričnim krugovima. Snaga vrtloga se može opisati koriteći koncept cirkulacije Γ , $\Gamma = \oint_c V d s$.

U cilindričnim koordinatama je $u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$, $u_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r}$, dakle:

$$u_r = 0, \quad \text{i} \quad u_\theta = \frac{K}{r}$$

Kada zatvorena kriva sadrži tačku singulariteta (kao u slučaju vrtloga), onda je cirkulacija različita od nule:

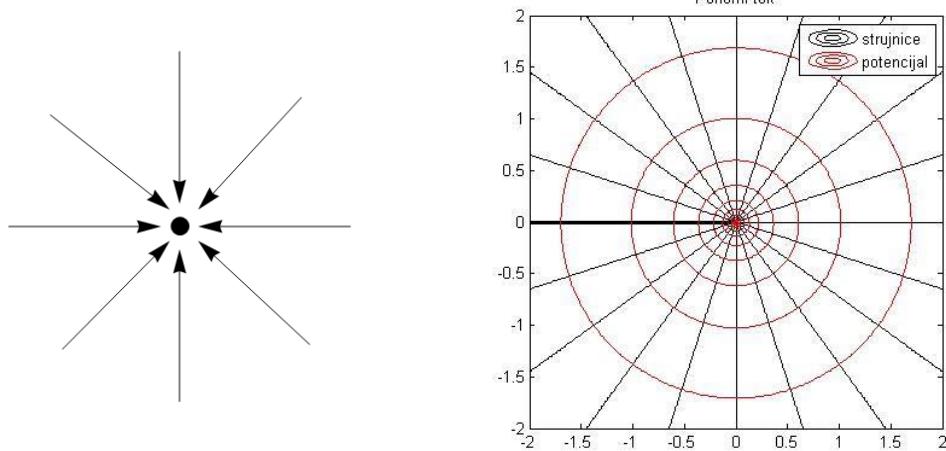
$$\Gamma = \int_0^{2\pi} \frac{K}{r} r d\theta = 2\pi K$$

Ove jednačine opisuju takozvani „potencijalni vrtložni tok“ koji je koristan model za fenomene kao što je tornado ili vir. Zbog toga se i kombinuje sa ponornim tokom kako bi se opisao složeniji tok poput uragana. U potencijalnom vrtlogu, fluid se kreće u koncentričnim krugovima sa brzinom u_θ koja opada sa $1/r$ gde r predstavlja radikalno odstojanje od centra vrtloga. Takav tok je nerotirajući ali glavni tok može sadržati vrtloge gde su strujnice krugovi, ali individualni elementi fluida se ne mogu rotirati ili narušavati formiranje nerotirajućeg toka. Uniformni tokovi su nerotirajući, ali su trivijalni i lako se predviđaju.

6.2.2 Modelovanje ponornog toka

Naime, iz gore pomenute strukture uragana, a i sa same slike vidi se da u delu oka uragana nema rasipanja toka niti negovog širenja, već u tom delu se tok ponaša kao kada se voda pusti iz kade da otiče kroz slivnik. Dakle, oko uragana je poput slivnika. Kao što je rečeno, da bio se došlo do toka i polja brzine koji opisuju uragan, pravi se superpozicija dva toka od koji se drugi ponaša na upravo navedeni način. Superpozicija znači jednostavno spajanje njihovih polja brzine ili potencijala ili funkcija protoka.

Kakav je to tok koji treba generisati? Taj tok izgleda kao na slici 22, samo što poseduje karakteristike koje su vezane za uragan Isak.



Slika 24: Ponorni tok

Ponorni tok u početku zamišljenog koordinatnog Sistema može biti posmatran kao linija normalna na z -ravan (radi se o dvodimenzionalom prostoru, odnosno o ravni koja je normalna na z ravan) duž koje se fluid emituje po jedinici dužine $2\pi\Lambda$, onda se kaže da koordinatni početak predstavlja ponor snage Λ . Tačnije, u mirnom ponoru količina fluida \dot{m} koji protiče kroz cilindričnu površ prečnika r i jedinične dužine je konstantna, tada je $(\dot{m})_{izvan} = (\dot{m})_{unutar}$, gde je:

$$\dot{m} = 2\pi r u_r \rho.$$

Odavde sledi da je brzina:

$$u_r = \frac{\dot{m}}{2\pi\rho} \cdot \frac{1}{r} = \frac{\Lambda}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} = \frac{K}{r}$$

K je snaga ponora (izvora) $K = \frac{\dot{m}}{2\pi\rho} = \frac{\Lambda}{2\pi}$, a Λ je zapreminska stopa protoka.

Ako je $\Lambda < 0$ tok predstavlja ponor, u slučaju da je $\Lambda > 0$ tok predstavlja izvor. Stopa zapremine protoka po jediničnom rasponu \Im po krugu prečnika r se računa na sledeći način:

$$\Im = \int_0^{2\pi} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = \int_0^{2\pi} u_r r d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\Lambda}{2\pi r} r d\theta = \Lambda$$

Odavde jasno vidimo da Λ predstavlja stopu zapremine ka unutrašnjosti izvora.

Definicija funkcije protoka u cilindričnim polarnim koordinatama daje:

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Znamo da za ponorni tok važi:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{K}{r} \tag{6.2.2.1}$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0. \tag{6.2.2.2}$$

Iz jednačina (6.2.2.1) i (6.2.2.2) sledi da je:

$$\psi = K\theta + C_1.$$

Dalje, ako je (biramo $C_1 = 0$):

$$\psi = K \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right), \quad (6.2.2.3)$$

onda, kako je:

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6.2.2.4)$$

Primenom izvoda na jednačinu (6.2.2.3) po y i po x redom, dolazi se do sledećih jednačina:

$$u_1(x, y) = K \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$u_2(x, y) = K \frac{y}{x^2 + y^2},$$

Kako je $K = \frac{\Lambda}{2\pi}$, i pošto je u pitanju ponor, sledi:

$$u_1(x, y) = -\frac{\Lambda}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$u_2(x, y) = -\frac{\Lambda}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \Lambda > 0.$$

U svim delovima, osim koordinatnog početka, $(x, y) = (0, 0)$, gore navedena funkcija protoka zadovoljava $\nabla^2 \psi = 0$.

Osnovni model koji opisuje tok uragana se sada može dobiti superpozicijom prethodna dva :

$$\mathbf{u}(x, y) = -\frac{1}{2\pi(x^2 + y^2)} (\Lambda x + \Gamma y, \Lambda y - \Gamma x) \quad (6.2.2.5)$$

Za uragan Isak, pretpostavlja se da važe sledeće informacije: 20 km od oka brzina vetra ima komponetu 15km/h prema oku i tangencijalnu komponentu, smer obrnut smeru kazaljki na časovniku 45km/h. Kako je radijalna brzina objekta u pravcu radijusa, na osnovu ovih podataka i

$$u_r = \frac{\Lambda}{2\pi r}, u_\theta = 0 \quad \text{i} \quad u_r = 0, u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Sledi da je $\Lambda = 600\pi \text{ km}^2/\text{h}$ i $\Gamma = 1800\pi \text{ km}^2/\text{h}$.

Posmatrajmo sada model koji opisuje tok uragana prikazan sa (6.2.2.5). Funkcija protoka koja opisuje dati model može se zapisati sa:

$$\psi = -\frac{\Lambda}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(x^2 + y^2). \quad (6.2.2.6)$$

Ovo se može lako proveriti koristeći vezu između funkcije protoka i brzine u kartezijanskom koordinatnom sistemu.

Vektor vrtložnosti posmatranog toka (6.2.2.5) je:

$$\xi = \partial_x u_2 - \partial_y u_1 = \frac{1}{2\pi(x^2+y^2)^2} (\Gamma x^2 - \Gamma y^2 - 2\Lambda yx, -\Gamma y^2 + \Gamma x^2 - 2\Lambda xy).$$

Ako sada uvedemo i pojam *skalarnog potencijala*, tj. potencijala brzine \mathbf{u} definisanog sa:

$$\mathbf{u} = -\nabla\phi,$$

$$u_1 = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad u_2 = -\frac{\partial\phi}{\partial y}.$$

Naravno, i dalje razmatramo model u dve dimenzije.

Kako smo u analizi ispred odredili izraze za komponente brzina za oba toka, vrtložni i ponorni, lako dolazimo i do oblika za funkciju ϕ za oba toka:

$$\phi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Za vrtložni tok, a za ponorni:

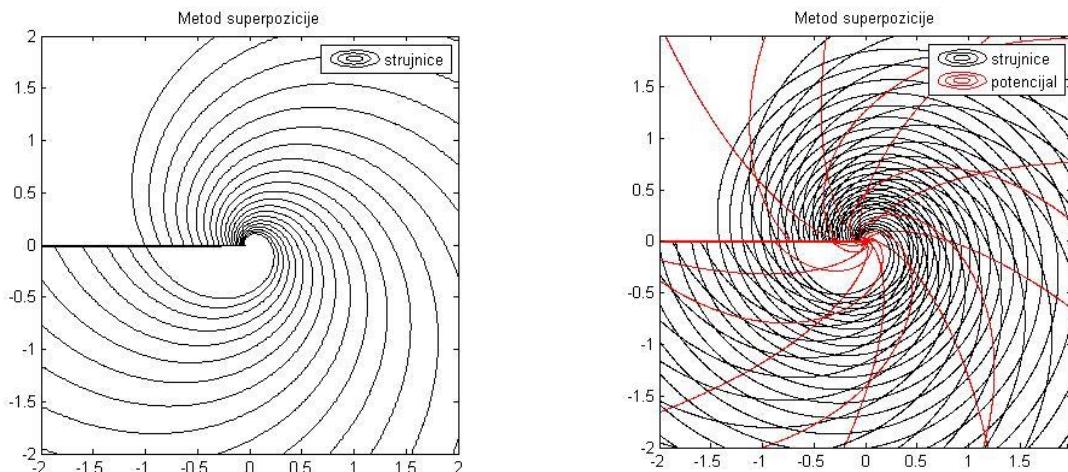
$$\phi = -\frac{\Lambda}{2\pi} \ln(x^2 + y^2).$$

Za model koji opisuje tok uragana, s obzirom da je dobijen jednostavnim spajanjem prethodno navedena dva toka potencijal brzine se lako dobije spajanjem potencijala brzina ta dva toka, vrtložnog i ponornog. Dakle:

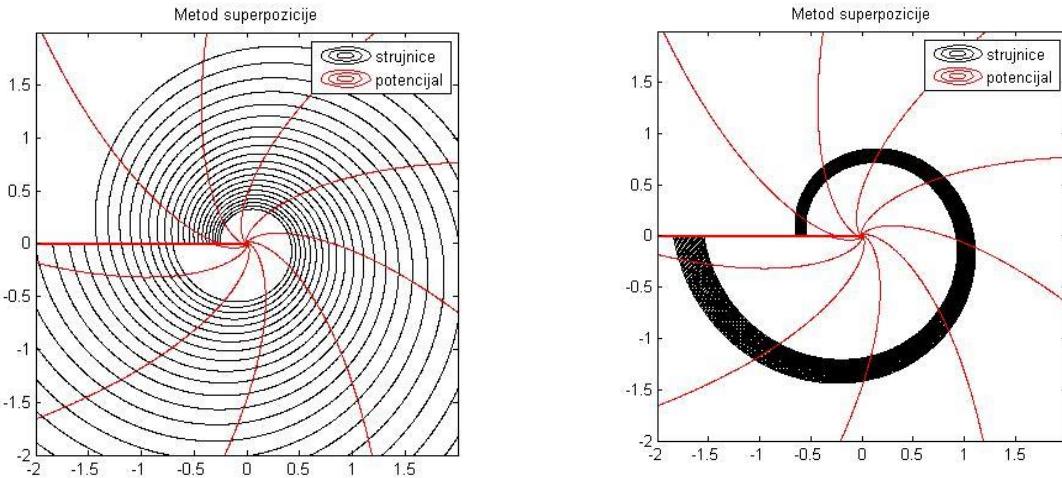
$$\phi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{\Lambda}{2\pi} \ln(x^2 + y^2). \quad (6.2.2.7)$$

Koristimo izraze (6.2.2.6) i (6.2.2.7) da bi smo grafički predstavili strujnice toka uragana opisanog modelom (6.2.2.5).

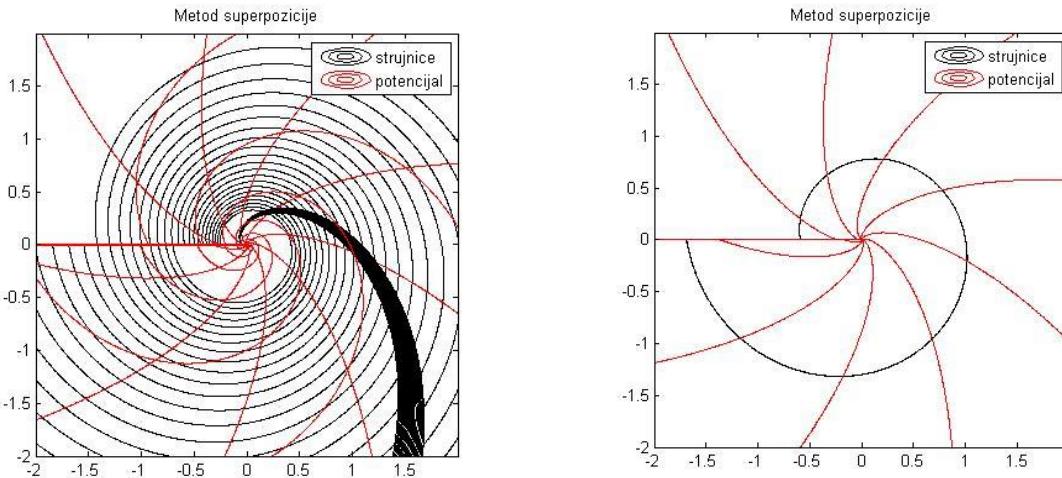
Ukoliko bi smo stavili da je $\Lambda = 1, \Gamma = 1$ dobijamo sledeći grafički prikaz:



Slika 25: Grafički prikaz modela uragana (strujnice i potencijal brzine) opisanog izrazom (6.2.2.5) dobijen u programskom jeziku Matlab. Na slici levo su prikazani samo strujnice a na slici desno i potencijal za vrednosti $\Lambda = 1, \Gamma = 1$.



Slika 26: Grafički prikaz modela uragana za izvore: levo $\Gamma = 1.8, \Lambda = 0.6$, desno $\Gamma = 18, \Lambda = 6$



Slika 27: Grafički prikaz modela uragana za izvore: levo $\Gamma = 20, \Lambda = 40$, desno $\Gamma = 1800, \Lambda = 600$. Slika desno odražava realnu situaciju uragana Isak za koga su izračunati Λ i Γ .

Vidimo da su strujnice za model uragana (6.2.2.5) spiralnog oblika. Naime ako izraz:

$$\psi = -\frac{\Lambda}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(x^2 + y^2).$$

Zapišemo kao:

$$\psi = k\theta + \eta \ln r.$$

Ako nametnemo da je $\psi = 0$, sledi da je:

$$k\theta = -\eta \ln r, \quad tj. \ln r = -\frac{k\theta}{\eta},$$

Odakle sledi da je:

$$r = ve^{-k\theta/\eta}.$$

i jasno se vidi da su strujnice logaritamske spirale.

7 Zaključak

Zamislite idealnost da svakoj pojavi u prirodi koja ima jasan fizički smisao možemo dodeliti jednu matematičku jednačinu koja će je u potpunosti opisati. Istina, takva jednostavnost bi u pozadini krila veoma razrađenu, do tančina organizovanu matematičku teoriju, bez i jedne dileme i bez nerešenih problema. A možda se ni tada ne bi postigla takva jednostavnost i savršenstvo? Ipak, može se reći da su prirodne nauke napredovale u svome sjedinjavanju i nalaženju opšteg zapisa između onog jasnog, u prirodi vidljivog i onog apstraktnog. Cela zemaljska, ljudska populacija se svakodnevno susreće sa pojmom vremenske prognoze, prognozom vremenskih nepogoda, pojave ciklona i oluja, širenjem zagađenosti životne sredine, a zapravo je mali deo ljudske populacije svestan da iza toga, osim savremene tehnologije stoje ozbiljne matematičke i fizičke teorije, složeni matematički modeli i postupci modeliranja. Sve to navedeno je u polju delovanja dinamike fluida i govori u prilog njenom razvoju i značajnosti kako teorijskoj tako i praktičnoj.

Tema master rada birana je zbog lepote veze između fizičkih pojava i matematičkog opisa istih, a sama vrtložnost veoma je korisna kao osobina fluida. Vrtložnost u odabranom trenutku posmatranja predstavlja meru lokalne rotacije ili kovitlanja fluidnog elementa. Matematički je vrtložnost rotor vektorskog polja brzine, a odnos ta dva vektorska polja je takav da su za dvodimenzionalne nestišljive tokove njihovi vektori uvek ortogonalni. U radu su predstavljene jednačine fluidnog kretanja Navije-Stoksove i Ojlerove jednačine, za nestišljive fluide. Primenom rotora na navedene jednačine dolazi se do jednačine vrložnosti koja je, takođe, opisana u radu. Generisanje vrtložnosti, u matematičkom smislu odnosi se na postupak dobijanja jednačine vrtložnosti polazeći ili od Kroco-Vasnay jednačine ili razmatranjem konvektivnog toka sa silom uzgona. Za pojam vrtložnosti se vezuju vrtložno istezanje i vrtložna kompresija, pa je u radu naveden oblik jednačine kada se jasno vidi pojava oba slučaja. Takođe je uzet u razmatranje odnos između vektora vrtložnosti ξ i vektora $D\xi$, (D je matrica naprezanja), pa u zavisnosti od njihovog međusobnog položaja javljaju se osobine vrtložnog istezanja ili kompresije. Za problem viskoznih tokova na granici bez klizanja koje odgovaraju čvrstim površinama varijacijske jednačine koje su potrebne da bi se odredila vrednost vrtložnosti na takvim granicama, mogu se izvesti iz Poasonove jednačine za funkciju protoka (strujanja). U radu je opisana formulacija vrtložnog strujanja za dvodimenzionalne, nestišljive, neviskozne tokove kao i trodimenzionalne tokove.

Kada se govori o dinamici fluida numerički postupci rešavanja istih su nezaobilazni. Međutim, kada je reč o vrtlozima oni mogu biti analitička rešenja Navije-Stoksovih i Ojlerovih jednačina. Tako su, u radu obrađeni Lamb-Čapljinov dipol koji predstavlja vrtložnu strukturu sa neprekidnom vrtložnom distribucijom unutar kružne oblasti i stacionarno je rešenje dvodimenzionalne jenačine vrtložnosti kada se ne javljaju viskozni efekti, zatim, izduženi vrtlozi Burgerovog tipa koji su egzaktna rešenja Navije-Stoksovih jednačina i tipična su rešenja koja se koriste da ilustruju pojedine paradigme moderne teorije turbulencije. Pored navedenih tu je i Hilov sferični vrtlog koji predstavlja jedan od najboljih primera mirnog rotirajućeg rešenja klasičnih jednačina koje opisuje neviskozne, nestišljive fluidne tokove.

Vrtložno kretanje je primetno u prirodi a čine ga, na primer ciklonski vrtlog u atmosferi, vulkanski vrtložni prsten, vrtložno kretanje u okeanima. U master radu smo se odlučili za prikaz jednostavnog matematičkog modela uragana. Jedan izuzetno složen i kompleksan sistem u osnovi sadrži ideju

superpozicije dva toka, a u master radu smo se odlučili da tokove predstavimo u ravni. Nacionalni meteorološki centri se bave predvidjanjem nastanka takvih ciklona i koriste složene modele i savremenu tehnologiju kako bih njihova procena bila tačna. Ideja dela master rada posvećenog jednostavnom matematičkom opisu uragana govori u tome da u prirodi postoje vrtložna kretanja za čiji pojednostavljen opis se koristi potencijalno vektorsko polje u kome je vektor vrtložnosti jednak nuli. To znači vrtložno kretanje bez vrtložnosti i podvlači paralelu između ta dva pojma.

8 Literatura

- [1] Aleseenko S. V., Kubin A. P., Okulov L. V., *Theory of Concentrated Vortices: An introduction*, Russian academy of science, Springer, New York, 2007
- [2] Beale J. T., Kato T., Majda A., Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations, Comm. Math. Phys., Volume 94
- [3] Bukurov M., *Mehanika fluida-knjiga prva:osnove*, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, 2013
- [4] CFD Education Center, *Lid-driven cavity flow* preuzeto sa http://cfdblogvienna.blogspot.co.at/p/computational-fluid-dynamics_22.html 10.08.2015. godine
- [5] Chorin A., Marsden E. J., *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, American Mathematics Society (MOS) Subject Classification (1980): 76-01
- [6] Constantin P., Fefferman C., Majda A. J. *Geometric constraints on potentially singular solutions for the 3-D Euler equations*, Communications in Partial Differential Equations, 1996
- [7] Encyclopedia Britanica Science, *Reynolds Number, Physics* preuzeto sa <http://www.britannica.com/science/Reynolds-number> 15.07.2015. godine
- [8] *Fizička svojstva fluida* preuzeto sa <http://sr.scribd.com/doc/51188063/1-Fizicka-svojstva-fluida#scribd> 20.06.2015. godine
- [9] Galanti B., Gibbon D. J., Heritage M., *Vorticity alignment results for the three-dimensional Euler and Navier–Stokes equations*, Nonlinearity **10** (1997) 1675–1694
- [10] Gibbon D. J, Fokas A. S., Doering C. R., *Dynamically stretched vortices as solutions of the 3D Navier–Stokes equations*, Physica D 132 , 497–510, 1999
- [11] Gibbon D. J., Galanti B., Kerr M. R. ,*Stretching & compression of vorticity in the 3D Euler equations*,
- [12] Hadamard, J. Sur les Tourbillons Produit par les Ondes De Choc. Note III. Lecons sur la Propagation des Ondes. In: Herman, A. (ed.). Paris, 362 (1903)
- [13] Hurricanes: Science and Society Hurricane Science, Hurricane Structure, Hurricane Movement preuzeto sa <http://www.hurricanescience.org/> 30.05.2015. godine
- [14] Janjić J., Bikit I., Cindoro N., *Opšti kurs fizike, I Deo*, III izdanje, Nauka, Beograd, 1983

- [15] Lamb H., *Hydrodynamics*, University of Florida, New York, Dover publication, 1945
- [16] Majda A. J., Bertozzi A. L., *Vorticity and Incompressible Flow*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002
- [17] Mc Cormack Percival, *Vortex, Molecular Spin and Nanovorticity: An Introduction*, University of Illinois at Chicago, SpringerLondon, 2012
- [18] Ohkitani K., *Eigenvalue problems in three-dimensional Euler flows*, Phis. Fluids, 1993, A 5 2570-2572
- [19] Saffman G.P., *Dinamics of Vorticity*, J. Flwid Mech. (1981), eel. 100, p p . 49-55Scribd
- [20] Shapiro A. H., *Film Notes for Vorticity*, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts
- [21] Snieder R., *A Guided Tour of Mathematical Physics*, Utrecht University, Netherlands, 1998
- [22] Truesdell, C. *The Kinematics of Vorticity*, Indiana University Press, Bloomington (1954)
- [23] Tryggesson H., *Analitical Vortex Solutions to the Navier-Stokes Equation*, Thesis for the degree of Doctor of Philosophy, Växjö University, Sweden 2007
- [24] WolframMathWorld *Curl* preuzeto sa <http://mathworld.wolfram.com/Curl.html> 05.06.2015. godine
- [25] Wu J. Z., Ma H. Y., Zhou M. D. , *Vorticity and Vortex Dynamics*, Springer, Heidelberg 2006
- [26] www.wikipedia.org¹⁶
- [27] <http://www.wiley.com/college/anton/0471472441/horizons/hurricane.pdf>

¹⁶ Korišćena za utvrđivanje podataka o pominjanim ličnostima i za stvaranje ličnih ideja za diskusiju

9 Biografija



Marina Radić je rođena 16.12.1991. u Ljuboviji. Završila je osnovnu školu „Vuk S. Karadžić“ u Bratuncu i upisala srednju elektrotehničku školu u Srednjoškolskom centru u Bratuncu. Srednju školu je završila 2010. godine kao đak generacije, a potom je upisala osnovne akademske studije Primjenjene matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, modul Matematika finansija. 2013 godine Marina završava osnovne akademske studije sa prosečnom ocenom 9.92 i iste te godine upisuje master studije na istom usmerenju. Položila je sve ispite predvidene nastavnim planom i programom junskom roku 2015. godine.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: *Monografska dokumentacija*

TD

Tip zapisa: *Tekstualni štampani materijal*

TZ

Vrsta rada: *Master rad*

VR

Autor: *Marina Radić*

AU

Mentor: *dr Marko Nedeljkov*

MN

Naslov rada: *Matematičke osnove vrtložnosti*

NR

Jezik publikacije: *srpski (latinica)*

JP

Jezik izvoda: *s/en*

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2015

GO

Izdavač: *Autorski reprint*

IZ

Mesto i adresa: *Novi Sad, departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4*

MA

Fizički opis rada: (7/94/27/0/27/9/0)

(broj poglavlja, broj strana, broj lit. citata, broj tabela, broj slika, broj grafika, broj priloga)

FO

Naučna oblast: *Matematika*

NO

Naučna disciplina: *Parcijalne diferencijalne jednačine*

ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: *Jednačine fluidnog kretanja, Generisanje vrtložnosti, Jednačina vrtložnosti, Vrtložno-strujna formulacija, Klasična vrtložna kretanja i modeli, Jednostavno matematičko modeliranje uragana*

PO

UDK

Čuva se: *Biblioteka departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu*

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: *Glavni zadatak ovog master rada jeste da objasni pojam vrtložnosti i ukaže na njegovu važnost u dinamici fluida. Vrtložnost, kao osobina fluida nije lako merljiva. Njena značajnost je u tome što je ona, barem za kretanje homogenih nestišljivih fluida, svojstvo toka od velike važnosti i nije preterano reći da su svi problemi takvih tokova postavljeni kao pitanje o snazi i lokaciji vrtložnosti.*

Na početku smo dali kratak opis osnovnih pojmoveva iz mehanike fluida i predstavili osnovne zakone dinamike fluida.

U narednom delu smo opisali jednačine fluidnog kretanja iz kojih se, primenom rotora dobija jednačina vrtložnosti. Zatim smo definisali osnovne pojmove vezane za vrtložnost i vrtložna kretanja. Objasnili smo odnos vektora vrtložnosti i gradijenta brzine kao i neke od mogućih načina generisanja vrtložnosti. Tako smo došli do pojma jednačine vrtložnosti kome je posvećena posebna pažnja. Dali smo pregled vrtloga koji su analitička rešenja Navije-Stoksovih jednačina. Zbog brojnih nestabilnih struktura koje se javljaju u fizici i čija dinamika ne može biti opisana glatkim modelima, smatrali smo da je važno uvesti i objasniti pojam slabih rešenja, a kao primer slabog rešenja obrađeni su stubni, eliptični vrtlozi.

I na kraju, kako je matematičko modeliranje realnih vrtloga, vrtloga koji se javljaju u prirodi izuzetno složeno, u radu je opisan jedan pojednostavljen model uragana, ali tako da se priroda i način njegovog kretanja mogu naslutiti iz navedenog modela.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: *April 2015.*

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: *dr Srboljub Simić, redovni profesor, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu*

Član: *dr Dora Seleši, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad*

Mentor: *dr Marko Nedeljkov, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu*

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE KEY
WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification umber:

INO

Document type: *Monograph type*

DT

Type of record: *Printed text*

TR

Contents Code:

CC

Author: *Marina Radić*

AU

Mentor: *Marko Nedeljkov, PhD*

MN

Title: *Mathematical view at vorticity*

TI

Language of text: *Serbian (Latin)*

LT

Language of abstract: *s/en*

LA

Country of publication: *Serbia*

CP

Locality of publication: *Vojvodina*

LP

Publication year: 2015

PY

Publisher: *Author's reprint*

PU

Publ. place: *Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*

PP

Physical description: (7/94/27/0/27/9/0)

(number of sections/pages/references/tables/pictures/graphs/appendices)

PD

Scientific field: *Mathematics*

SF

Scientific discipline: *Partial Differential Equations*

SD

Subject/Key words: *Equations of fluid motion, Generation of vorticity, Vorticity equation, Vorticity-stream formulation, Classic vortical movement and models, Simple mathematical modeling of hurricane*

SKW

UC:

Holding data: *The library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty Science, University of Novi Sad*

HD

Note:

N

Abstract: *The focus of this thesis is to explain concept of vorticity and point out what is it's importance in fluid dynamics. Vorticity is not easily measureable. For the motion of homogeneous incompressible fluids it is the property of the flow field of crucial import, and it is not an exaggeration to say that all the problems of such flows can be posed as questions about the strength and location of vorticity.*

At the beginning of the thesis we gave brief overview of the theory of fluid mechanics, and we introduced the main laws of fluid dynamics. In addition, we defined basic concepts that are useful in the theory of vorticity movement. We also explained relation between vorticity vector and velocity gradient, and introduced some ways of vorticity generation. Special attention was paid to concept of vorticity equation. It is possible to find analytical vortex solutions to the Navier-Stokes equation, so we have explained some of them. Many physical problems possess localized, highly unstable structures whose complete dynamics cannot be described by a simple smooth model. That unstable structures appears in the theory of vortex solutions so we explained a concept of weak solutions and considered elliptical, columnar vortices as a family of exact solutions to the Euler equation.

And finally, as the mathematical modelling of real vortices, appearing in nature is very complicated, in the thesis is described simple model of hurricane, but it's nature and way of it's movement are still noticeable.

AB

Accepted by the Scientific Board on: April 2015

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President: *Srboljub Simić, PhD, full professor, Faculty of Tehincal Science, University of Novi Sad*

Member: *Dora Seleši, PhD, associate professor, Faculty of Science, University of Novi Sad*

Mentor: *Marko Nedeljkov, PhD, full professor, Faculty of Science, University of Novi Sad*