UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Fazi statistička analiza i procene

Master rad

Mentor:

dr Ivana Štajner-Papuga

Kandidat:

Marina Padejčev

Novi Sad, 2015.

Sadržaj:

Predgovor

Odlučivanje u realnom životu se veoma često zasniva na nepotpunim i neizvesnim informacijama. Neodređenost i nepreciznost je moguće modelirati na nekoliko načina, a jedan od načina je pristup koji je baziran na fazi skupovima, to jest rad u fazi okruženju. Fazi skup je uopštenje klasičnog skupa kod koga se pripradnost elemenata određuje stepenom pripadnosti, tj. brojem iz intervala [0,1]. Teorija fazi skupova dozvoljava rad sa jezičkim promenljivim, što znači da je mogućnost grešaka koje nastaju pri donošenju odluka na osnovu nepreciznih i nepotpunih podataka na niskom nivou.

Sa druge strane, statistika kao naučna disciplina se bavi masovnim pojavama, odnosno pojavama koje sadrže velik broj elemenata, takvih da svi imaju zajedničku osobinu koja pokazuje određenu razliku (varijabilnost). Mnoge osnove statistike, kao što su npr. aritmetička sredina, medijana i mod, su neophodan alat pri ispitivanju karakteristika raspodela posmatranih populacija. Ovi statistički parametri mogu se brzo izračunati iz skupa podataka i oni su osnovni podaci koji su veoma zastupljeni u aplikacijama. Međutim, postoji još pristupa koji se mogu koristiti za izračunavanje statističkih parametara. Jedan od pristupa koji se upotrebljava za istraživanje populacije, specijalo za ispitivanje mišljenja populacije, zbog svoje fleksibilnost pri radu u uslovima neodređenosti, zasniva se na upotrebi fazi logike. Posebno, kada hoćemo da znamo mišljenje javnosti o na primer zagađenju životne sredine, fazi statistika predstavlja moćni alat za istraživanje.

Na početku rada biće dat pregled klasičnih pojmova statistike kao što su aritmetička sredina, medijana i mod, itd. i svaki pomenuti pojam će biti formulisan. Takođe će biti reči i o testiranju hipoteza koje omogućavaju da se podaci dobijeni iz uzorka mogu kombinovati sa statističkom teorijom i na taj način izvode zaključci o celoj populaciji. Mada sve prethodno navedeno spada u gradivo redovnih studija, pregled tih pojmova je neophodan jer olakšava isticanje prednosti i mana fazi statistike, te doprinosi dobijanju jedne svrsishodne celine. Literatura korišćena za ovo poglavlje je $[1, 7, 11, 12, 15, 16]$.

U drugom delu rada biće defiisani osnovni pojmovi teorije fazi skupova, te samim tim i fazi statistike. Tačnije, govoriće se o fazi skupovima, fazi logici i operacijama, fazi relacijama, fuziji fazi podataka, fazi brojevima... Ovo poglavlje je zasnovano na $[2, 3, 4, 8, 9, 10, 13, 14, 19, 20, 21]$.

Fokus narednog dela je na definisanju i analizi pojmova kao što su fazi mod, fazi medijana i fazi aritmetička sredina. Biće predstavljene i njihove međusobne iteracije. Takođe će biti dati primeri koji ilustruju tehnike analize fazi podataka. Rezultati dobijeni iz primera pokazuju da je fazi statistika u tim slučajevima preciznija u odnosu na klasičnu statistiku ($[13, 18, 19]$).

Na kraju rada će se govoriti o testiranju hipoteza sa fazi podacima. Literatura korišćena za izradu ovog poglavlja je $[5, 6, 13, 17, 19]$.

1. Analiza numeričkih obeležja

Fokus prvog poglavja je na klasičnoj statistici, te sadrži uvodne pojmove i kratak prikaz nekih klasičnih statističkih postupaka koji su esencijalni za razumevanje nadogradnje u fazi okruženju, što i jeste primarna tema ovog rada (videti $[1, 7, 11, 12, 15, 16]$).

Prvi podaci o postojanju statističke analize datiraju nekoliko vekova pre naše ere. Oko 4000 godina pre nove ere u Kini i 3000 godina p.n.e. u Egiptu su izvršena prva prebrojavanja stanovništva, a prvi organizovani popisi sprovedeni su u starom veku u Rimskoj republici. Krajem XVIII i početkom XIX veka izvršeni su prvi organizovani popisi stanovništva što predstavlja ozbiljnije korake u razvoju statističkog istraživanja. U našim krajevima početkom XIX veka statistikom se bavila grupa ljudi u Beogradu, a kasnije i u Velikoj školi. Zahvaljujući ovoj grupi statistika je dostigla visok nivo u našim krajevima, tako da su prvi popisi stanovništva sprovedeni 1890. i 1910. godine i to po tadašnjim najvišim evropskim standardima. Tokom XX veka dolazi do razvoja računara i velike upotrebe statističkih metoda u analizama masovnih pojava. One predstavljaju skup elemenata sa zajedničkim, ali varirajućim obeležjima, na primer: zaposleni u nekom preduzeću, ptice...

Nauka koja predstavlja metodologiju kojom se istražuju masovne pojave da bi se otkrile zakonitosti koje njima vladaju, a da bi se na osnovu ovih zakonitosti mogla izvršiti određena predviđanja je ***statistika*** (*eng. status – stanje, država*). Statistika obuhvata postupak prikupljanja, prikazivanja, analize i korišćenja podataka u cilju izvođenja zaključaka. Danas se statistika najviše koristi za davanje procena, opisivanje pojava i procenu rizika.

Za masovne pojave često se koriste i termini kao što su statistički skup i populacija. ***Statistički skup (populacija, osnovni skup)*** je skup svih elemenata na kojima se statistički posmatra određena pojava. Pojedinačni ***elementi statističkog skupa*** još se zovu i ***statističke jedinice***. Posmatrani statistički skup mora biti relativno homogen, odnosno da njegovi elementi imaju bar jednu zajedničku osobinu (što je više zajedničkih osobina statistički skup je homogeniji). ***Obim populacije*** je broj elemenata u populaciji i označava se sa $\boldsymbol{N}$. Po veličini razlikujemo: *konačne* (njih čini konačan broj elemenata, na primer svi igrači jednog kluba) *i beskonačne populacije* (broj elemenata je beskonačan ili je toliko velik da je nemoguće sagledati čitavu populaciju, na primer svi klipovi kukuruza na jednoj njivi). Elementi populacije se razlikuju po osobinama koje se nazivaju ***statistička obeležja*** ili samo ***obeležja***. Ako je $E = \{e_i\}_{i \in I}$ populacija tada je obeležje dato sa preslikavanjem $X: E \to S$, gde je S skup vrednosti obeležja. Po obeležju elementi populacije liče jedni drugima, ali se po njemu i međusobno razlikuju. Sa stanovišta teorije verovatnoće, obeležja su slučajne promenljive (varijable) koje se obeležavaju sa velikim slovom X i ona mogu biti:

- *atributivna (kvalitativna)* – određuju se opisno (pol osobe, boja kose, ...);

- *numerička (kvantitativna) obeležja* – određuju se brojčano i dalje se dele na: **diskretna** (vrednosti ovih obeležja mogu biti samo određeni brojevi, na primer broj automobila koji prođu kroz neku raskrsnicu u određenom vremenskom intervalu) i **neprekidna obeležja** (vrednost može biti bilo koji broj iz nekog intervala, na primer vreme čekanja autobusa).

Izvršiti statističku analizu na čitavoj populaciji je uglavnom nemoguće, a ekonomski i vremenski neopravdano. Zbog toga je potrebno izvršiti uzorkovanje populacije (odabir nekih elemenata na kojima se vrši statistička analiza na osnovu koje se dobijaju određeni zaključci koji važe za celu populaciju). Prilikom uzorkovanja populacije način na koji se sprovodi nije proizvoljan već mora ispuniti određene zahteve. ***Uzorak*** je konačan podskup statističkog skupa (populacije) nastao uzorkovanjem. ***Obim uzorka*** je broj elemenata u uzorku i obeležava se sa $\boldsymbol{n}$. Uzorak predstavlja uređenu n – torku $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ u kojoj X_k predstavlja posmatrano obeležje k – tog elementa u uzorku. ***Realizovana vrednost uzorka*** je registrovana vrednost posmatranog obeležja za svaki element uzorka, odnosno to je uređena n – torka brojeva $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, gde x_k predstavlja realizovanu vrednost obeležja X_k. Jedini uslov koji mora biti zadovoljen je da je uzorak reprezentativan, a to se postiže slučajnim odabirom elemenata i po određenim pravilima teorije verovatnoće. Slučajan uzorak se dobija postupkom kod kojeg svaki elemenat populacije ima istu verovatnoću da bude izabran u uzorak, a ukoliko imamo više uzoraka istog obima i oni imaju istu verovatnoću da budu izabrani.

1.1 Prikupljanje, uređivanje i prikazivanje statističkih podataka

Sledi pregled postupaka koji se koriste prilikom pripreme za obradu statističkih podataka, a to su prikupljanje, uređivanje i prikazivanje statističkih podataka (videti $[12, 15, 16]$). Najbolje bi bilo da se ovi postupci primenjuju na celoj populaciji, ali se to ne dešava često u praksi jer je populacija beskonačna, pa se zbog toga posmatra uzorak. U cilju veće preciznosti navode se formalne definicije uzorka i slučajne promenljive:

Definicija 1.1. $[15]$ Preslikavanje $X: \Omega \to \mathbb{R}$ je slučajna promenljiva nad prostorom verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ako $X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$ za svako $S \in \mathcal{B}$, gde je $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borelovo[1] σ–polje, gde je Ω skup elementarnih događaja, $\mathcal{F}$ je podskup partitivnog skupa od Ω, P verovatnoća događaja.

Definicija 1.2. $[15]$ Preslikavanje $X = (X_1, X_2, \dots, X_n), X: \Omega \to \mathbb{R}^n$, jeste n - dimenzionalna slučajna promenljiva na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ako za svako $S \in \mathcal{B}_n$ važi

$$\{\omega |\, X(\omega) \in S\} = \{X \in S\} = X^{-1}(S) \in \mathcal{F}.$$

Definicija 1.3. $[15]$ Slučajne promenljive $X_1, X_2, \dots$ su nezavisne ako su događaji $X_1^{-1}(S_1), X_2^{-1}(S_2), \dots$ nezavisni, za sve Borelove skupove $S_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), i = 1, 2, \dots$

Definicija 1.4. $[12]$ Neka se na populaciji E posmatra obeležje X. Prost slučajan uzorak obima n za obeležje X je n-torka nezavisnih slučajnih promenljivih $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ od kojih svaka ima istu raspodelu kao i obeležje X.

U daljem tekstu biće dati postupci koji se mogu primeniti i za populaciju (konačnu) i za uzorak.

Prikupljanje statističkih podataka:

Postupak koji se sprovodi nakon definisanja zadatka, cilja i predmeta istraživanja je proces prikupljanja statističkih podataka. Prikupljene informacije koje sadrže nepotpune i neistinite podatke dovele bi do toga da konačan rezultat statističkog istraživanja sadrži grešku. Postoje dve vrste grešaka:

[1] Borelovo σ – polje $[15]$ – je σ – polje definisano nad skupom realnih brojeva. Formira se pomoću familije poluotvorenih intervala $[a, b), a, b \in \mathbb{R}$.

- Sistematska - lako uočljiva, na primer: neispravnost mernog instrumenta, neistinito izjašnjavanje ispitanika;

- Slučajna - teško je identifikovati jer se ne javlja pri svakom merenju i ne javlja se istim intenzitetom. Uz ovu grešku uglavnom ide pretpostavka o poništenju njenog uticaja posmatranog na globalnom nivou.

Statističko posmatranje i prikupljanje podataka vrši se na više načina:

- Merenjem (telesna masa, visina stanovništva nekog područja...);

- Anketom / upitnikom (daje nesigurne podatke u odnosu na podatke dobijene merenjem zbog subjektivnosti ispitanika).

Uređivanje statističkih podataka:

Dobijeni podaci o vrednostima obeležja koje imaju ispitivani elementi populacije dati su kao niz neuređenih numeričkih podataka. Njihovo uređivanje se vrši predstavljanjem po veličini, od najmanje do najveće vrednosti. Tako uređen niz vrednosti posmatranog obeležja predstavlja ***uređenu statističku seriju***, gde je x_i, $i = 1,2, \dots, N$ i-ti član, i nazivamo ih ***negrupisanim podacima.***

Napomena: Sa X_k je označeno obeležje k – tog elementa u uzorku, a x_k je realizovana vrednost posmatranog obeležja X_k.

Prikazivanje statističkih podataka:

Registrovanje vrednosti obeležja na elementima populacije (uzorka), kao rezultat prikupljanja podataka, dobija se niz vrednosti $x_1, x_2, \dots, x_N$ koje je potrebno prikazati na najbolji mogući način tako da su karakteristike obeležja lako uočljive. Prikazivanje uređenih podataka može biti ***tabelarno*** i ***grafičko***. Podatke je potrebno prvo grupisati u grupe ili klase, a zatim odrediti i broj podataka u svakoj grupi ili klasi. Broj podataka se zove ***apsolutna frekvencija*** ili kraće ***frekvencija*** i uglavnom se prikazuje u tabeli. Relativne i kumulativne frekvencije računamo uz pomoć k različitih vrednosti $x_1, x_2, \dots, x_k$ sa odgovarajućim apsolutnim frekvencijama $f_1, f_2, \dots, f_k$.

- *Relativna frekvencija p_i:*

$$p_i = \frac{f_i}{N}, \qquad i = 1, 2, \dots, k$$

N – obim populacije.

- *Kumulativne frekvencije F^i:*

$$F^{\,i} = \sum_{j=1}^{i} f_j \ , \qquad i = 1, 2, \dots, k$$

- *Kumulativno relativne frekvencije F_i^r:*

$$F_i^r = \sum_{j=1}^{i} p_j \ , \qquad i = 1, 2, \dots , k$$

Relativne frekvencije predstavljaju verovatnoću pojavljivanja pojedinih vrednosti obeležja ako ih posmatramo kao slučajne promenljive. ***Kumulativno relativne frekvencije*** predstavljaju funkciju raspodele obeležja koje se posmatra kao slučajna promenljiva.

Grafički prikaz podataka vrši se uz pomoć poligonalnih linija, kružnih i stubičastih dijagrama, histograma. Poligonalna linija povezuje tačke sa koordinatama $(x_1,\ f_1)$, $(x_2,\ f_2)$, ... , $(x_k,\ f_k)$.

Kod populacija sa velikim brojem elemenata, registrovane vrednosti obeležja se grupišu u određene intervale. Broj intervala se računa po formuli

$$k = 1 + 3{,}322 \cdot \log N$$

gde je N obim populacije. Širina intervala se dobija po formuli

$$d = \frac{x_{max} - x_{min}}{k}$$

gde su x_{max} i x_{min} najveća i najmanja vrednost obeležja u populaciji.

1.2 Izračunavanje parametara raspodele obeležja

Prikupljanje, uređivanje i prikazivanje podataka, analizirano u prethodnom odeljku 1.1, samo je priprema podataka za njihovu dalju obradu. Za izvođenje određenih zaključaka o raspodeli ispitivanog obeležja u populaciji, ili u uzorku, potrebno je izračunati određene veličine (parametre) koje prikazuju ponašanje raspodeljenosti obeležja u posmatranoj populaciji. Parametre delimo u tri osnovne grupe ($[1, 7, 11, 12, 16]$):

- Parametri srednje vrednosti (mere srednje vrednosti ili centralne tendencije);
- Parametri varijabiliteta (mere disperzije);
- Parametri oblika raspodele (mere oblika raspodele).

1.2.1 Parametri srednje vrednosti

Pojava centralne tendencije odaje utisak da elementi teže da se grupišu oko srednje vrednosti. Ova pojava se meri srednjim vrednostima koje se dele na:

- Izračunate – matematičke sredine (aritmetička, geometrijska, harmonijska, …);
- Srednje brojeve – pozicione sredine (medijana, mod).

Zavisnost prirode promene ispitivanog obeležja nam govori koji od tri izračunata parametra srednje vrednosti treba koristiti kao relevantnu meru srednje vrednosti datog obeležja posmatrane populacije (ili uzorka). Ukoliko je ***promena linearno zavisna*** treba koristiti aritmetičku sredinu. Linearna zavisnost se vidi tako što je ukupna grupna vrednost obeležja jednaka aritmetičkom zbiru obeležja svakog člana grupe. Kada je ***promena direktno proporcionalna*** potrebno je koristiti geometrijsku sredinu. Ova promena se uočava tako što je ukupna grupna vrednost obeležja jednaka proizvodu obeležja svakog člana grupe (procenat). Harmonijsku sredinu koristimo kod ***promena*** koje su ***obrnuto proporcionalne***. Ova promena se prepoznaje na sledeći način, smanjuje se grupna vrednost obeležja prilikom povećanja broja članova grupe i obrnuto.

U nastavku sledi pregled klasičnih pojmova statistike (videti $[1, 7, 11, 12]$):

Aritmetička sredina

Prosta aritmetička sredina populacije se dobija tako što se saberu vrednosti jedinica jednog posmatranja i zatim se taj zbir podeli sa ukupnim brojem tih jedinica,

$$\bar{X}_N = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\ .$$

$\bar{X}_N$ – aritmetička sredina populacije,

$X_1, X_2, \dots , X_N$ - vrednosti jedinica populacije,

N – ukupan broj jedinica populacije.

Prosta aritmetička sredina uzorka se dobija na isti način:

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\ ,$$

$\bar{X}_n$ – aritmetička sredina uzorka,

$X_1, X_2, \dots , X_n$ – vrednosti jedinica uzorka,

n – ukupan broj jedinica uzorka.

Ukoliko se obeležja ponavljaju dobijamo ***ponderisanu aritmetičku sredinu uzorka*** koja se računa po obrascu:

$$\bar{X} = \frac{f_1X_1 + f_2X_2 + \cdots + f_kX_k}{f_1 + f_2 + \cdots + f_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_iX_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_iX_i$$

gde je: f_i – apsolutna frekvencija i – te grupe,

k – broj grupa,

n – ukupan broj elemenata u uzorku.

Veoma često je potrebno izračunati aritmetičku sredinu već izračunatih aritmetičkih sredina, tada je statistička serija od n jedinica podeljena na k podskupova $(n_1 + n_2 + \cdots +$

$n_k = n$) čije su aritmetičke sredine poznate $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_k$. Sada aritmetičku sredinu računamo po obrascu:

$$\bar{X} = \frac{n_1\bar{X}_1 + n_2\bar{X}_2 + \cdots + n_k\bar{X}_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i\bar{X}_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\bar{X}_i\,.$$

Takođe, moguće je izračunati ***aritmetičku sredinu populacije***, za negrupisane podatke, koja se označava sa $\boldsymbol{m}$,

$$m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\,,$$

i za grupisane podatke

$$m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i X_i\,.$$

Na isti način moguće je izračunati aritmetičku sredinu uzorka (populacije) za realizovane vrednosti tako što se u formule umesto nerealizovanih vrednosti obeležja X_i stavljaju realizovane vrednosti x_i.

Prednosti aritmetičke sredine su što je lako razumljiva svakome i što koristi sve vrednosti prilikom izračunavanja. Mane su te što na nju utiču ekstremne vrednosti i što se ne može izračunati ukoliko je poslednji interval kod grupisanih podataka otvoren. Više o aritmetičkoj sredini se može pronaći u ($[1, 7, 11, 12]$).

Medijana

Medijana je vrednost onog elementa koji deli skup na dva jednaka dela, tačnije to je vrednost obeležja koja se nalazi u sredini uređenog skupa. Medijana je poziciona srednja vrednost i može se odrediti samo u uređenom statističkom skupu.

Za neprekidne slučajne promenljive X, vrednost medijane M_e je data sa osobinom

$$P\{X < M_e\} = P\{X \geq M_e\} = \frac{1}{2}.$$

Za diskretne slučajne promenljive ova vrednost ne mora da postoji, pa se uzima ona vrednost medijane za koju važi

$$P\{X < M_e\} \leq \frac{1}{2} \quad i \quad P\{X > M_e\} \leq \frac{1}{2}.$$

Medijana M_e za obeležje X je vrednost obeležja koja ređa vrednosti obeležja u rastući varijacioni niz, $y_1, y_2, \dots, y_N$ i deli na dva jednaka dela.

$$M_e = \begin{cases} y_{\frac{N+1}{2}}, & za\ N\ neparno, \\ \dfrac{y_{\frac{N}{2}} + y_{\frac{N}{2}+1}}{2}, & za\ N\ parno. \end{cases}$$

Prednosti medijane u odnosu na aritmetičku sredinu su te što je lako shvatljiva i što se jednostavno i brzo određuje. Na nju ne utiču ekstremne vrednosti i može se izračunati i ako je poslednji interval kod grupisanih podataka otvoren. Jedna od mana medijane je ta što je nepodesna za teorijska razmatranja, a uz to postoje i praktični nedostaci. Osnovni nedostaci su ti što prilikom izračunavanja ne koristi sve dostupne informacije i što se podaci moraju svrstati u rastući niz. Na primer, levo i desno od medijane se mogu menjati vrednosti elemenata, a da vrednost medijane ostaje ista. Odatle vidimo da je medijana manje osetljiva od aritmetičke sredine na promenu vrednosti elemenata ([1, 7, 11, 12]).

Mod

Mod (modus, modalna sredina) je vrednost obeležja sa najvećom frekvencijom, odnosno vrednost koja se najviše puta javlja u statističkom skupu. On je poziciona sredina i zavisi od položaja onog elementa koji ima najveću frekvenciju, a ne od vrednosti svih elemenata. U rasporedu frekvencija mod se prvo odredi približno, odnosno pronađe se klasa koja sadrži najveću frekvenciju, a nakon toga se za vrednost moda uzme sredina te klase.

Skup koji sadrži jedan mod je ***unimodalan*** i ovo je karakteristika homogenih skupova, a za skup sa dva ili više njih kaže se da je ***bimodalan*** ili ***multimodalan*** – ***polimodalan*** (nehomogeni skupovi).

Prednosti moda su slične kao i kod medijane, a mane su te što ne koristi sve dostupne informacije, kao i medijana, i što podaci nekada nemaju mod ili imaju višestruki.

U praksi se najčešće koristi aritmetička sredina, a najmanje mod (videti [1, 11, 12]).

1.2.2 Parametri varijabiliteta

Srednje vrednosti su uprošćene karakteristike statističkog skupa ako se ne poznaje varijabilitet elemenata skupa.

Mera varijabiliteta (srednje apsolutno odstupanje, varijansa, standardna devijacija, koeficijent varijacije, …) je uvedena da bi se varijabilitet mogao brojčano iskazati ([1, 11, 12]).

Srednje apsolutno odstupanje

Srednje apsolutno odstupanje populacije D se dobija kao srednja vrednost apsolutnih odstupanja vrednosti svih obeležja (elemenata) populacije (statističkog skupa) od njihove aritmetičke sredine

$$D = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|X_i - \bar{X}|$$

ili

$$D = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}|X_i - \bar{X}|f_i \, .$$

Mana ove mere varijabiliteta je ta što prilikom izračunavanja zanemaruje predznak razlike tako da čitav postupak nije algebarski i zbog toga ova mera nije pogodna za dalja teorijska razmatranja ([11]).

Varijansa (disperzija) i standardna devijacija

Ova mera varijabiliteta je nastala zbog želje da se otkloni nedostatak srednjeg apsolutnog odstupanja.

Disperzija populacije:

Postupkom deljenja zbira kvadrata odstupanja sa brojem elemenata statističkog skupa, dobija se prosečni kvadrat odstupanja vrednosti elemenata od njihove aritmetičke sredine, ***varijansa*** σ^2,

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})^2$$

ili

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(X_i - \bar{X})^2 f_i \ .$$

Ovaj postupak je algebarski ispravan jer su odstupanja kvadratna, a samim tim je varijansa pogodna za dalja teorijska razmatranja.

Standardna devijacija je pozitivna vrednost kvadratnog korena varijanse, $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

Takođe, ove mere varijabiliteta je moguće primeniti i na uzorak:

Disperzija uzorka:

- Ako je poznata srednja vrednost obeležja, m tada je

$$\hat{S}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2,$$

$$\hat{S}_n = \sqrt{\hat{S}_n^2}\ .$$

- Ako je nepoznata srednja vrednost obeležja, m tada je

$$\bar{S}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2,$$

$$\bar{S}_n = \sqrt{\bar{S}_n^2}\ .$$

- Popravljena disperzija uzorka:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\bar{X}_n^2\right),$$

$$S = \sqrt{S^2}\ .$$

Više o varijansi i standardnoj devijaciji se može pronaći u $[11, 12]$.

Napomena: Gore navedene mere varijabiliteta su prikazane sa nerealizovanim vrednostima.

Koeficijent varijacije

Promenom merne jedinice menja se i apsolutna vrednost standardne devijacije, što dovodi do toga da se pomoću standardne devijacije i drugih razmatranih mera varijabiliteta ne može vršiti upoređivanje varijabiliteta obeležja. Kao posledica toga uvodi se nova relativna mera varijabiliteta ***koeficijent varijacije.*** Koeficijent varijacije populacije (V) se dobija kao količnik standardne devijacije i aritmetičke sredine posmatranog obeležja.

$$V = \frac{\sigma}{\bar{X}} 100\%.$$

Takođe, koeficijent varijacije uzorka je dat sa:

$$V = \frac{S}{\bar{X}_n}.$$

Ova mera je relativan broj jer su standardna devijacija i aritmetička sredina obeležja iskazane istim mernim jedinicama, a najčešće se iskazuje u procentima.

Ukoliko je koeficijent varijacije manji to znači da je veća koncentracija elemenata skupa oko aritmetičke sredine (homogeniji skup) i obrnuto, veći koeficijent varijacije pokazuje veće rasipanje elemenata skupa oko aritmetičke sredine (heterogeniji skup).

Najbolja mera varijabiliteta je varijansa, odnosno standardna devijacija. Ona zadovoljava najvažnije uslove: uzma u obzir varijabilitet svih elemenata statističkog skupa, ima konkretno i shvatljivo značenje i pogodna je za računanje i dalja teorijska razmatranja ($[11, 12]$).

2. Testiranje hipoteza

Testiranje hipoteza je još jedna oblast statističke analize koja je u širokoj upotrebi. Podaci iz uzorka se koriste za proveru istinitosti tvrđenja o vrednosti parametara populacije. Dalji tekst se odnosi samo na uzorak. Na osnovu statističkih istraživanja moguće je postaviti pretpostavke o posmatranom obeležju, te pretpostavke se zatim proveravaju na osnovu podataka dobijenih uzorkovanjem. Ove pretpostavke se još nazivaju i ***hipoteze***, postoji:

- ***Nulta hipoteza,*** $\boldsymbol{H_0}$ je hipoteza ili pretpostavka koja se smatra istinitom na početku testiranja.

- ***Alternativna hipoteza,*** $\boldsymbol{H_1}$ je hipoteza koja je suprotna hipotezi H_o.

Statistički test $\boldsymbol{\tau}$, je postupak provere hipoteza, odnosno postupak donošenja odluke o prihvatanju ili odbacivanju hipoteza na osnovu realizovanog uzorka $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Oblast odbacivanja C_τ, nulte hipoteze je oblast koja se bira iz skupa $\mathbb{R}^n$, $C_\tau \subset \mathbb{R}^n$. Odluka o prihvatanju ili odbacivanju nulte hipoteze se donosi na osnovu sledećih činjenica:

- Ako realizovani uzorak $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pripada C_τ, hipoteza H_0 se odbacuje;

- Ako realizovani uzorak $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ne pripada C_τ, ne odbacuje se hipoteza H_0.

Prilikom testiranja hipoteza može doći do dve greške koje su posledica odabira uzorka jer on podleže pravilima slučajnosti.

Greška I vrste nastaje kada je hipoteza H_0 tačna, ali upravo zbog slučajnosti odabira uzorka, uzorak padne u kritičnu oblast C_τ i zbog pravila statističkog testa se hipoteza H_0 odbacuje. Verovatnoća da se desi greška prve vrste označava se sa α i još se naziva prag značajnosti testa,

$$\alpha = \mathrm{P}(\mathrm{H}_0 \; se\ odbacuje \; | H_0 \;\; je\ istinita),$$

$$\alpha = P_{H_o}\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C_\tau\}.$$

Najčešće vrednosti koje se uzimaju za prag značajnosti su 0,1; 0,01 i 0,05.

Greška II vrste se javlja kada je alternativna hipoteza H_1 tačna (H_0 netačna) i kada uzorak zbog slučajnosti padne van kritične oblasti C_τ, tada se hipoteza H_o ne odbacuje. Oznaka koja se koristi za obeležavanje verovatnoće greške druge vrste je β, a vrednost $1 - \beta$ je verovatnoća da se greška druge vrste ne javi,

$$\beta = P(H_0 \; se \; ne \; odbacuje \mid H_0 \; je \; neistinita),$$

$$\beta = P_{H_1}\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \notin C_\tau\}.$$

	Stvarna situacija	
Odluka nakon testa	*H_0 je tačna*	*H_1 je tačna*
Ne odbacuje se H_0	1-α	Greška druge vrste, β
Odbacuje se H_0	Greška prve vrste, α	1-β

Tabela 1. [12]

Detaljnije objašnjeno u $[1, 12, 16]$.

Za testiranje hipoteza uglavnom se koristi test statistika $T = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$, kritična oblast je $C(T) \subset \mathbb{R}$, a odluka o odbacivanju (prihvatanju) hipoteze H_0 se donosi na sledeći način:

- Ako realizovana vrednost t_{reg} statistike T ne pripada $C(T)$, ne odbacuje se hipoteza H_0;
- Ako realizovana vrednost t_{reg} statistike T pripada $C(T)$, hipoteza H_0 se odbacuje.

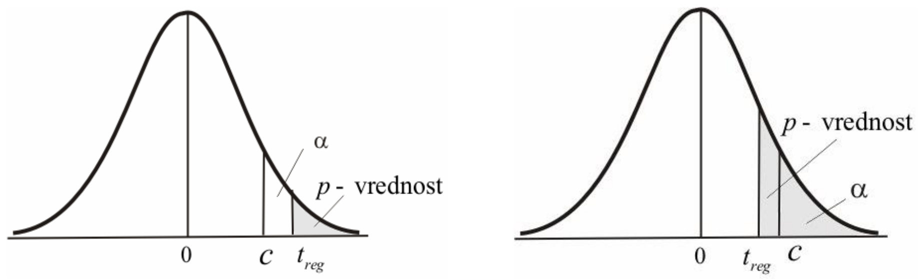
Većina testova posmatra obeležja koja imaju $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ raspodelu.

Statistički test može koristiti p – vrednosti, gde je p – vrednost veličina kritične oblasti čija je granica registrovana vrednost, t_{reg} test statistike. Ukoliko je oblast odbacivanja nulte hipoteze oblika $\{T > c\}$, tada se verovatnoća

$$p = P_{H_0}\{T > t_{reg}\}$$

naziva p – vrednost. Odluka se donosi na sledeći način ($[12]$):

- Ako je $p < \alpha$, H_0 se odbacuje;
- Ako je $p > \alpha$, H_0 se ne odbacuje.



Slika 1. [12]

Sledi pregled nekih klasičnih testova značajnosti, čije navođenje je bitno jer će o ovim testovima biti reči i kasnije kada se bude govorilo o fazi okruženju.

2.1 Testiranje hipoteza o aritmetičkoj sredini populacije

Za testiranje hipoteza o aritmetičkoj sredini populacije važna je veličina uzorka n. Ukoliko je $n > 30$ tada je reč o velikom uzorku i primenjuje se $z - test$, odnosno za $n \leq 30$ koristi se $t - test$ i uzorak je mali. Ove hipoteze su vezane za ocenu parametra m kod normalne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ raspodele.

Testira se hipoteza $H_0(m = m_0)$ protiv alternativnih hipoteza $H_1(m > m_0)$, $H_1(m < m_0)$ i $H_1(m \neq m_0)$.

Sledi pregled testova u slučaju kada je σ^2 poznata, odnosno nepoznata (videti $[1, 12]$).

Disperzija obeležja kada je σ^2 je poznata

1. **Gornji (donji) jednostrani test**

   Ovaj test testira hipotezu $H_0(m = m_0)$ protiv alternativne hipoteze $H_1(m > m_0)$ (alternativna hipoteza za donji test $H_1(m < m_0)$). Važno je odrediti kritičnu oblast c, pod pretpostavkom da je H_0 tačna, pa odstupanja $\bar{X}_n - m_0 \geq c$ smatramo značajnim. Kritična oblast (nivo značajnosti) α je zadata na sledeći način:

$$\alpha = P_{H_0}\{\bar{X}_n - m_0 \geq c\}\,.$$

Ako je hipoteza H_0 tačna tada statistika $\bar{X}_n$ ima $\mathcal{N}(m_0, \frac{\sigma^2}{n})$ raspodelu, a test statistika

$$T = \frac{\bar{X}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n} : \mathcal{N}(0,1).$$

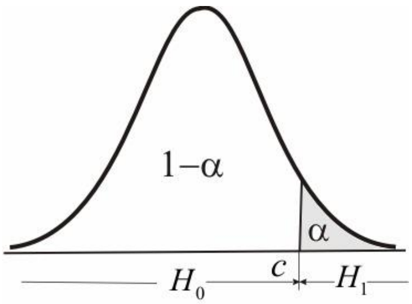
Vrednost c za gornji jednostrani test se određuje iz

$$\alpha = P_{H_0}\{T \geq c\} = P_{H_0}\left\{\frac{\bar{X}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n} \geq c\right\},$$

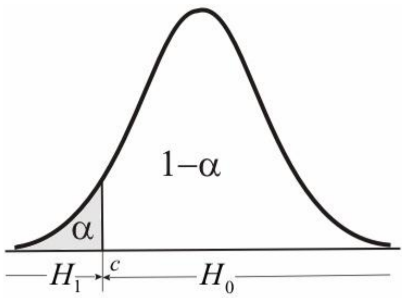
gde je c kvantil[2] reda $1-\alpha$ normalne raspodele (*Slika 2.*). Analogno, vrednost c za donji jednostrani test se dobija iz

$$\alpha = P_{H_0}\{T \leq c\} = P_{H_0}\left\{\frac{\bar{X}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n} \leq c\right\}.$$

Sada je c kvantil reda α normalne $\mathcal{N}(0,1)$ raspodele (*Slika 3.*).



Slika 2. [12]



Slika 3. [12]

Kritična oblast gornjeg testa je oblika

$$C = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): \bar{x}_n \geq c\} = [c, \infty),$$

odnosno donjeg testa

[2] Kvantili:[12] Za slučajnu promenljivu X, kvantil reda p, $p \in (0,1)$, je vrednost slučajne promenljive M_p sa osobinom $P\{X < M_p\} \leq p$ i $P\{X > M_p\} \leq 1-p$. Medijana je kvantil reda 0.5.

$$C = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{k=1}^{n} x_k \leq c\right\} = (-\infty, c].$$

2. Dvostrani test

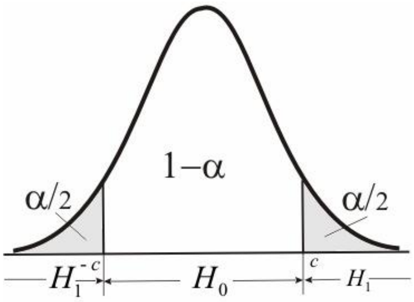
Test testira nultu hipotezu $H_0(m = m_0)$ protiv alternativne $H_1(m \neq m_0)$. Sada male i velike vrednosti aritmetičke sredine u odnosu na m_0 govore da nulta hipoteza nije tačna. Kritična oblast

$$C = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{k=1}^{n} x_k \geq c_1, \sum_{k=1}^{n} x_k \leq c_2\right\} = (-\infty, -c] \cup [c, \infty).$$

Test

$$\alpha = P_{H_0}\{|T| \geq c\} = P_{H_0}\left\{\frac{|\overline{X_n} - m_0|}{\sigma}\sqrt{n} \geq c\right\}.$$

Sada je c kvantil reda $1 - \frac{\alpha}{2}$ normalne $\mathcal{N}(0,1)$ raspodele (*Slika 4.*).



Slika 4. [12]

Disperzija obeležja kada σ^2 nije poznata

Sada nije moguće koristiti test statistiku $T = \frac{\bar{X}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n}$, jer standardna devijacija σ nije poznata i mora se izračunati iz uzorka. Ocena koja se koristi za σ je $\bar{S}_n$ i koristi se test statistika

$$T = \frac{\bar{X}_n - m_0}{\bar{S}_n}\sqrt{n-1}$$

koja ima Studentovu raspodelu sa $n - 1$ stepeni slobode ([1, 12]).

1. Gornji (donji) jednostrani test

Ovaj test testira nultu hipotezu $H_0(m = m_0)$ protiv alternativne $H_1(m > m_0)$ (alternativna hipoteza za donji jednostrani test je $H_1(m < m_0)$). Kao i kod testova kod kojih je disperzija σ^2 bila poznata, potrebno je naći c vrednost. Ukoliko je hipoteza H_0 tačna, statistika $\bar{X}_n : \mathcal{N}(m_0, \frac{\sigma^2}{n})$, a test statistika

$$T = \frac{\bar{X}_n - m_0}{\bar{S}_n}\sqrt{n-1}$$

ima Studentovu raspodelu sa $n - 1$ stepeni slobode. Vrednost c za gonji test se dobija iz uslova

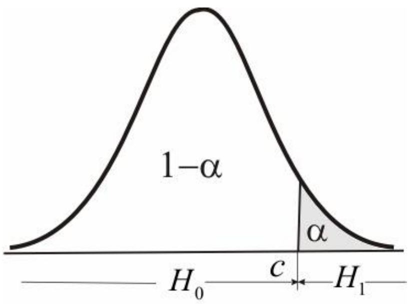
$$\alpha = P_{H_0}\{T \geq c\} = P_{H_0}\left\{\frac{\bar{X}_n - m_0}{\bar{S}_n}\sqrt{n-1} \geq c\right\},$$

c je kvantil reda $1 - \alpha$ Studentove raspodele sa $n - 1$ stepenom slobode. Međutim, vrednost c za donji jednostrani test se dobija iz sledećeg uslova

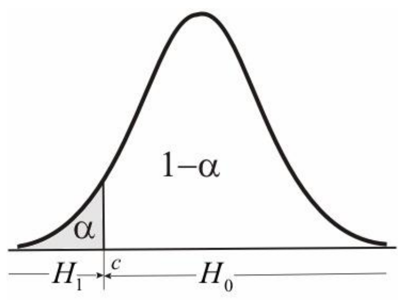
$$\alpha = P_{H_0}\{T \leq c\} = P_{H_0}\left\{T = \frac{\bar{X}_n - m_0}{\bar{S}_n}\sqrt{n-1} \leq c\right\},$$

gde je c kvantil reda α Studentove raspodele sa $n - 1$ stepeni slobode.

Kritična oblast gornjeg testa je $C = [c, \infty)$ (*Slika 5.*), odnosno donjeg jednostranog testa $C = (-\infty, c]$ (*Slika 6.*).



Slika 5. [12]



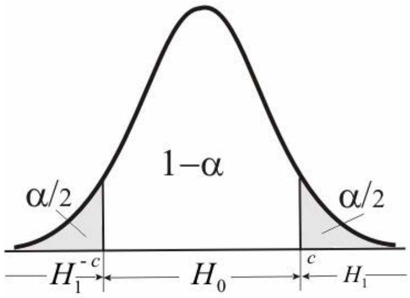
Slika 6. [12]

2. **Dvostrani test**

Testira se nulta hipoteza $H_0(m = m_0)$ protiv preostale alternativne hipoteze $H_1(m \neq m_0)$. Koristi se

$$\alpha = P_{H_0}\{|T| \geq c\} = P_{H_0}\left\{|T| = \frac{|\bar{X}_n - m_0|}{\bar{S}_n}\sqrt{n-1} \geq c\right\},$$

c je kvantil reda $\frac{\alpha}{2}$ Studentove raspodele sa $n-1$ stepeni slobode. Kritična oblast je $C = (-\infty, -c] \cup [c, \infty)$ (*Slika 7.*).



Slika 7. [12]

Za opisivanje testova korišćena je literatura $[1, 12]$.

Takođe, potrebno je prikazati neparametarski Pirsonov χ^2 – test koji će biti razmatran kasnije i u fazi okruženju. Osnovna ideja ovog testa je da se vrši upoređivanje realizovanih sa očekivanim frekvencijama koje se dobijaju pod pretpostavkom da je osnovna hipoteza tačna. Važno je napomenuti da se i ovde koristi pretpostavka da je uzorak slučajan i da su uzorci međusobno nezavisni.

Test homogenosti

Za potrebe ovog testa posmatra se r populacija i iz svake je izvučen slučajan uzorak obima $n_i, i = 1, 2, \dots, r$ čiji elementi mogu pripadati nekoj od c kategorija. Za obim uzorka važi:

$$n_i = O_{i1} + O_{i2} + \cdots + O_{ic}\ , i = 1, 2, \dots, r$$

gde je O_{ij} broj elemenata i – tog uzorka koji pripada j – toj kategoriji, $j = 1, 2, \dots, c$. Takođe, važi da je ocena za verovatnoću p_{ij} data sa

$$\hat{p}_{ij} = \frac{O_{ij}}{n}.$$

Nulta hipoteza za test homogenosti je $H_0(p_{1j} = p_{2j} = \cdots = p_{rj}, j = 1, 2, \ldots, c)$ koja kaže da su sve verovatnoće u istoj koloni jednake, odnosno populacije su homogene. Alternativna hipoteza H_1(bar dve verovatnoće u istoj koloni nisu iste), odnosno populacija nije homogena. Test statistika je

$$T = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{l} \frac{\left(O_{ij} - E_{ij}\right)^2}{E_{ij}},$$

gde je $E_{ij} = \frac{n_i C_j}{n}$, $C_j = O_{1j} + O_{2j} + \cdots + O_{rj}$, realizovane frekvencije su O_{ij} dok su očekivane E_{ij}. Test statistika neće imati velike vrednosti ukoliko je hipoteza H_0 tačna, tačnije nema velikih razlika između realizovanih i očekivanih frekvencija. Vrednost c se dobija iz

$$\alpha = P_{H_0}\{T \geq c\},$$

gde je c kvantil reda $1 - \alpha$ χ^2 raspodele sa $(r-1)(l-1)$ stepeni slobode. Odluke o prihvatanju ili odbacivanju nulte hipoteze se donose na osnovu sledećeg:

- Hipoteza H_0 se ne odbacuje ukoliko je registrovana vrednost t_{reg} test statistike T manja od c;

- H_0 se odbacuje ako je registrovana vrednost t_{reg} test statistike T veća ili jednaka od c.

Više o neparametarskim testovima se može videti u $[1, 12]$.

3. Fazi skupovi

U ovom poglavlju dat je pregled osnovnih pojmova iz teorije fazi skupova (videti $[3, 8, 10, 13, 20, 21]$).

Prve rezultate u oblasti fazi skupova dao je L. Zadeh[3] 1965. godine i od tada se teorija fazi skupova razvijala u različitim pravcima i mnogim disciplinama. Primena ove teorije može se naći u veštačkoj inteligenciji, informatici, medicini, robotici...

3.1 Osnovni pojmovi i definicije

Osnovna razlika između klasičnih skupova i fazi skupova je ta što fazi skupovi dopuštaju da neki element pripada nekom skupu u određenoj meri. Da bi se omogućilo lakše razumevanje fazi skupova data je paralela sa klasičnim skupovima (*eng. crisp sets*) kroz *Primer 1.* Literatura korišćena za izradu ovog dela je $[3, 8, 10, 13, 20]$.

Definicija 3.1. $[3]$ Funkcija pripadnosti μ, je preslikavanje $\mu: U \to [0, 1]$ gde je U univerzalni skup.

Poznato je da se stepen neodređenosti modelira određenom verovatnoćom koja je takođe funkcija sa vrednostima iz intervala $[0, 1]$. Kroz naredni primer je najlakše uočiti razliku u primeni verovatnoće i funkcije pripadnosti.

Primer 1. Neka je X skup svih puteva na zaraćenom području, a njegov fazi podskup $\mathcal{A}$ skup puteva pogodnih za preživljavanje. Putevi koji vode ka savezničkim trupama će imati funkciju pripadnosti 1, dok će putevi ka neutralnim snagama imati funkciju pripadnosti 0.6, a ka protivničkim trupama 0. Neka se u toku rata vojnik nađe na raskrsnici puteva sa dva putokaza. Na prvom putokazu piše verovatnoća 0.85 da je to put ka preživljvanju, a na drugom putokazu je upisana funkcija pripadnosti $\mu_{\mathcal{A}} = 0.85$. Postavlja se pitanje koji će put vojnik izabrati? Funkcija pripadnosti $\mu_{\mathcal{A}} = 0.85$ znači da putokaz pokazuje put između savezničkih trupa i neutralnih snaga što je za vojnika najbolje rešenje. Izborom prvog putokaza vojnik može ići putem koji vodi ka saveznicima, ali ga isto tako može odvesti ka neprijateljskim trupama. Na osnovu toga, očigledan izbor vojnika će biti drugi putokaz.

[3] Lotfi A. Zadeh (rođen 04.02.1921. Baku, Azerbejdžan) je matematičar, elektro inženjer i informatičar koji se smatra osnivačem fazi matematike, teorije fazi skupova i fazi logike.

Sledeći primer ilustruje situaciju kada nije moguće napraviti jasnu razliku između temperature smrzavanja (naučno definisana) i niskih temperatura, odnosno hladnog vremena pošto klasifikacija temperature u velikoj meri zavisi od lične percepcije.

Primer 2. [**8**] Neka je U neprekidan, neprebrojiv i univerzalan skup mogućih spoljašnjih temperatura u u Celzijusovim stepenima. Neka je njegov podskup klasičan skup A temperatura smrzavanja koji se definiše sa

$$A = \{u \in U |\ u \leq 0\},$$

ili preko funkcije pripadnosti

$$\mu_A(u) = \begin{cases} 1, & u \leq 0 \\ 0, & u > 0 \end{cases}, \qquad u \in U\,.$$

Osobina

$$A(u) = u\ \ je\ \ temperatura\ \ smrzavanja,$$

omogućava jasnu definiciju skupa A, tačnije daje jasnu razliku između elemenata koji pripadaju skupu A, odnosno onih koji ne pripadaju.

Ako se sada definiše skup

$$B(u) = u\ \ je\ \ niska\ \ temperatura\ ,$$

vidi se da nije moguće napraviti jasnu razliku između elemenata koji pripadaju skupu i onih koji ne pripadaju.

Zbog ovakvih situacija javlja se potreba za uvođenjem fazi skupova, tako što se dozvoljava da element univerzalnog skupa ne mora u potpunosti da pripada, a ni da ne pripada nekom njegovom podskupu, nego da jednostavno pripada sa određenim stepenom ([18]).

Definicija 3.2. [**3**] Neka je A klasičan podskup univerzalnog skupa U. Fazi skup $\mathcal{A}$ je skup uređenih parova $\big(x, \mu_{\mathcal{A}}(x)\big)$ definisan na sledeći način:

$$\mathcal{A} = \big\{\big(x, \mu_{\mathcal{A}}(x)\big) : x \in A, \mu_{\mathcal{A}}(x) \in [0,1]\big\},$$

gde je x elemenat klasičnog skupa A i zadovoljava neku osobinu P, a $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ je broj iz intervala $[0,1]$ koji označava stepen zadovoljenja osobine P.

Na dalje, koristiće se sledeće oznake:

- $A, B, C, \dots$ - klasični skupovi;
- $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$ - fazi skupovi.

Sledeći primer je po ugledu na primer iz [13].

Primer 3. Neka je klasičan skup A skup mladih ljudi,

$$A = [0, 40),$$

podskup univerzalnog skupa U, $U = [0, 100]$,

$$\mu_{\mathcal{A}}: [0, 100] \to \{0, 1\},$$

$$\mu_{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 40 \\ 0, & x \ge 40 \end{cases}.$$

I neka Nenad pripada skupu mladih ljudi A.

Sada posmatrajući fazi skup $\mathcal{B} = Nenad\ je\ mlad$, dobijamo neodređenost, jer na primer, osobe koje imaju 15 i 38 godina su mlade osobe, a osobe od 40 i 70 godina su iste starosti na osnovu funkcije pripadnosti. Možemo zaključiti da postoji drastična razlika između osoba koje imaju 38 i 40 godina.

U praksi se veoma često koristi diskretan univerzalan skup, $U = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$. Sledeći primer ilustruje primenu diskretnog univerzanog skupa.

Primer 4. [**3**] Neka je $\mathcal{A} = \{(x_1, 0.1), (x_2, 0.5), (x_3, 0.3), (x_4, 0.8), (x_5, 1), (x_6, 0.2)\}$ fazi skup. Elementi $x_i,\ i = 1, 2, \dots, 6$ nisu nužno brojevi, oni pripadaju klasičnom skupu $A = \{x_1, x_2, \dots, x_6\}$, $A \subset U$ je diskretan skup. Funkcija pripadnosti $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ uzima vrednosti iz intervala $[0, 1]$:

$$\mu_{\mathcal{A}}(x_1) = 0.1, \mu_{\mathcal{A}}(x_2) = 0.5, \mu_{\mathcal{A}}(x_3) = 0.3, \mu_{\mathcal{A}}(x_4) = 0.8, \mu_{\mathcal{A}}(x_5) = 1, \mu_{\mathcal{A}}(x_6) = 0.2.$$

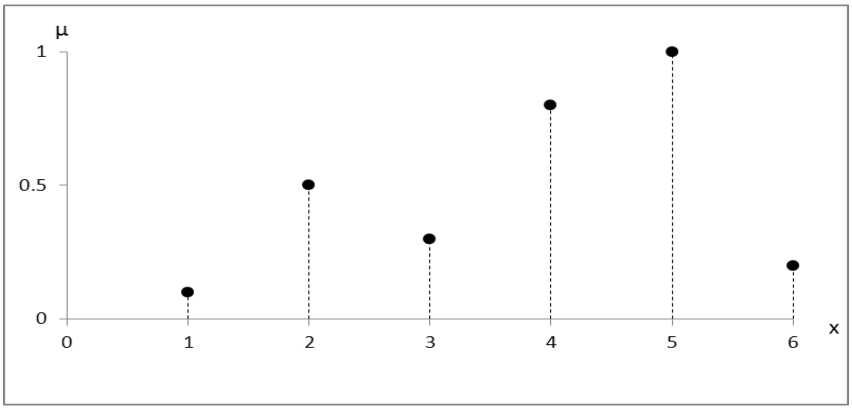
Element x_5 u potpunosti pripada fazi skupu $\mathcal{A}$, dok elemenat x_1 je na granici pripadnosti skupu jer je $\mu_{\mathcal{A}}(x_1) = 0.1$ blizu 0; x_6 i x_3 malo više pripadaju fazi skupu $\mathcal{A}$ u odnosu na x_1, dok elemenat x_4 skoro u potpunosti pripada skupu $\mathcal{A}$, a elemenat x_2 je više ili manje u skupu $\mathcal{A}$. Funkcija pripadnosti elemenata koji ne pripadaju skupu A je 0.

Elemente x_i u A možemo predstaviti na dva različita načina:

- Pretpostavimo da su $x_i,\ i = 1, 2, \dots, 6$ celi brojevi. Neka je $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5, x_6 = 6$ i neka pripadaju skupu $A = \{1, 2, \dots, 6\}$ koji je podskup diskretnog univerzalnog skupa $U = N$. Fazi skup $\mathcal{A}$ postaje

$$\mathcal{A} = \{(1, 0.1), (2, 0.5), (3, 0.3), (4, 0.8), (5, 1), (6, 0.2)\},$$

  a funkcija pripadnosti $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ je prikazana na *Slici 8*.



Slika 8.

- Pretpostavimo sada da su elementi $x_i,\ i = 1, 2, \dots, 6$ *Miloševi* prijatelji i da se zovu: x_1 je *Marko*, x_2 je *Aleksandar*, x_3 *Uroš*, x_4 *Jovan*, x_5 *Igor* i x_6 je *Branislav*. Skup *Miloševih* prijatelja,

$$A = \{Marko, Aleksandar, Uroš, Jovan, Igor, Branislav\},$$

  je podskup univerzalnog skupa U koji čine svi *Miloševi* prijatelji. Fazi skup $\mathcal{A}$ čine bliski *Miloševi* prijatelji, $A \subseteq U$:

$$\mathcal{A} = \{(Marko, 0.1), (Aleksandar, 0.5), (Uroš, 0.3), (Jovan, 0.8), (Igor, 1), (Branislav, 0.2)\}.$$

  Ovo je diskretan slučaj jer Miloš ne može imati beskonačan broj bliskih prijatelja.

U klasičnim skupovima prilikom opisivanja jezičkih promenljivih lako mogu da se uoče nedostaci, koji se ne javljaju u fazi skupovima, kod kojih se funkcija pripadnosti iskazuje stepenom pripadnosti koji uzima vrednosti od 0 do 1.

3.2 Operacije sa fazi skupovima

U narednom tekstu govoriće se o operacijama sa fazi skupovima koje su prirodna uopštenja operacija sa klasičnim skupovima. Zato je prirodno da formule za operacije sa klasičnim skupovima iskazanim sa karakterističnim funkcijama prenesemo na funkcije pripadanja. Posmatraćemo fazi skupove definisane nad istim univerzalnim skupom. Neka su dati sledeći fazi skupovi ([14]):

$$\mathcal{A} = \{(x, \mu_{\mathcal{A}}(x)) : \mu_{\mathcal{A}}(x) \in [0,1]\},$$

$$\mathcal{B} = \{(x, \mu_{\mathcal{B}}(x)) : \mu_{\mathcal{B}}(x) \in [0,1]\}.$$

Operacije sa $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ su predstavljene preko operacija nad funkcijama pripadnosti $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ i $\mu_{\mathcal{B}}(x)$.

Definicija 3.3. [14] Presek fazi skupova $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, definišemo:

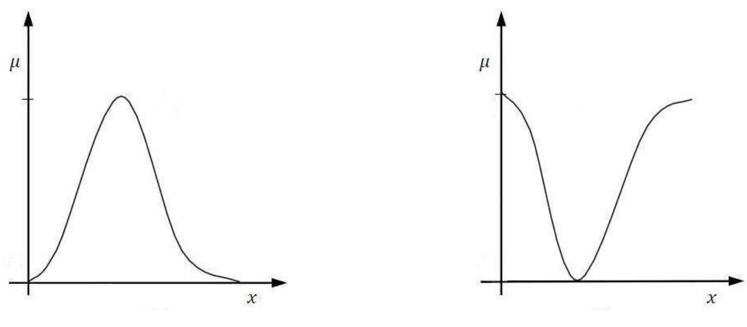
$$\mu_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}(x) = min(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x)), x \in U.$$

Definicija 3.4. [14] Uniju fazi skupova $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, definišemo:

$$\mu_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}(x) = max(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x)), x \in U.$$

Definicija 3.5. [14] Za dati fazi skup $\mathcal{A}$ sa funkcijom pripadnosti $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ možemo definisati funkciju pripadnosti $\mu_{\mathcal{A}^c}(x)$ komplementa $\mathcal{A}^c$,

$$\mu_{\mathcal{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\mathcal{A}}(x), \qquad x \in U.$$



a) $\mathcal{A}$ b) $\mathcal{A}^c$

Slika 9.

Definicija 3.6. [3] Kažemo da su fazi skupovi $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ jednaki, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, ako i samo ako za svako $x \in U$, važi

$$\mu_{\mathcal{A}}(x) = \mu_{\mathcal{B}}(x).$$

Definicija 3.7. [3] Fazi skup $\mathcal{A}$ je podskup fazi skupa $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, ako za svako $x \in U$, važi

$$\mu_{\mathcal{A}}(x) \leq \mu_{\mathcal{B}}(x).$$

Definicija 3.8. [3] Fazi skup $\mathcal{A}$ je strogi podskup fazi skupa $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, ako je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ i $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$, ili

$$\mu_{\mathcal{A}}(x) \leq \mu_{\mathcal{B}}(x), \qquad \forall x \in U,$$

$$\mu_{\mathcal{A}}(x) < \mu_{\mathcal{B}}(x), \qquad za\ najmanje\ jedno\ x \in U.$$

Definicija 3.9. [8] Inkluziju fazi skupa $\mathcal{A}$ u drugi fazi skup $\mathcal{B}$ definišemo preko funkcija pripadnosti $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ i $\mu_{\mathcal{B}}(x)$,

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \iff \mu_{\mathcal{A}}(x) \leq \mu_{\mathcal{B}}(x), \qquad \forall x \in U.$$

Primer 5. Neka je dat skup godina U i neka fazi skup $\mathcal{A}$ predstavlja mlade, a fazi skup $\mathcal{B}$ stare ljude. U *Tabeli 2.* date su vrednosti funkcija pripadnosti $\mu_{\mathcal{A}}$, $\mu_{\mathcal{B}}$. Pronaći $\mu_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}(x)$ i $\mu_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}(x)$.

a) Diskretan slučaj, $U = \{5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80\}$:

Godine	*Mladi* $\mu_{\mathcal{A}}$	*Stari* $\mu_{\mathcal{B}}$	$\mu_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}$	$\mu_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}$
5	1	0	1	0
10	1	0	1	0
20	0.8	0.1	0.8	0.1
30	0.5	0.2	0.5	0.2
40	0.2	0.4	0.4	0.2
50	0.1	0.6	0.6	0.1
60	0	0.8	0.8	0
70	0	1	1	0
80	0	1	1	0

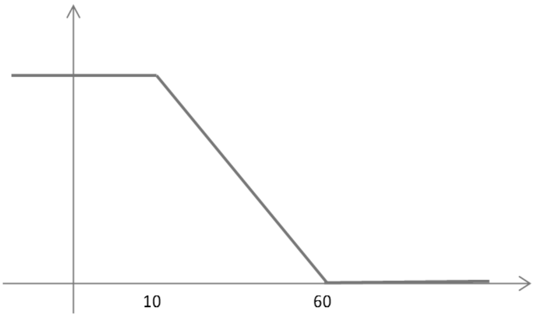
Tabela 2.

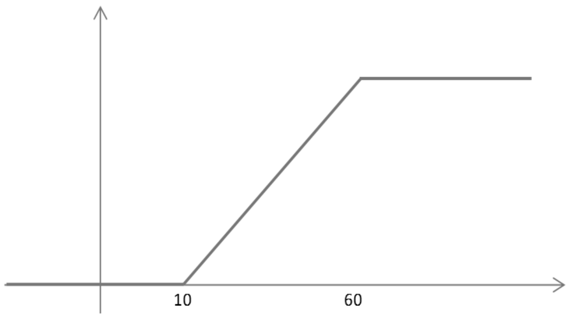
- Unija dva fazi skupa se traži iz izraza $\mu_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}(x) = \max_{x\in U}\big(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x)\big)$;
- Presek dva fazi skupa se računa iz izraza $\mu_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}(x) = \min_{x\in U}\big(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x)\big)$.

b) Neprekidan slučaj, $U \in [0, +\infty)$:

$$\mu_{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} 1, 0 \le x \le 10 \\ 1 - \dfrac{1}{50}(x-10), 10 < x \le 60 \\ 0, \qquad x > 60 \end{cases}$$

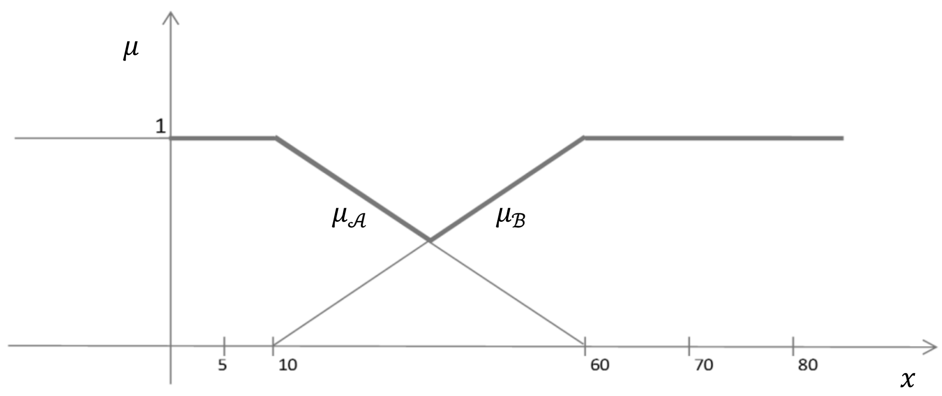
$$\mu_{\mathcal{B}}(x) = \begin{cases} 0, 0 \le x \le 10 \\ \dfrac{1}{60}(x-10), 10 < x \le 60 \\ 1, \qquad x > 60 \end{cases}$$





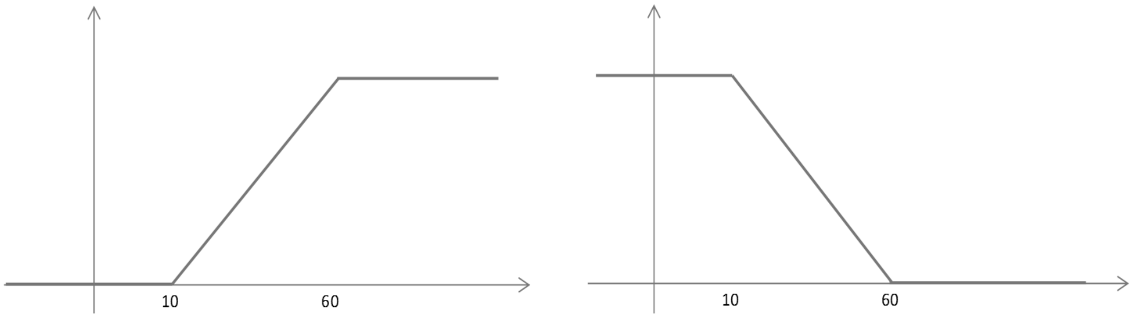
Slika 10.: a) $\mathcal{A}$ b) $\mathcal{B}$

Unija (*Slika 11.*) i presek (*Slika 13.*) se računaju na isti način i slikovito su prikazani.

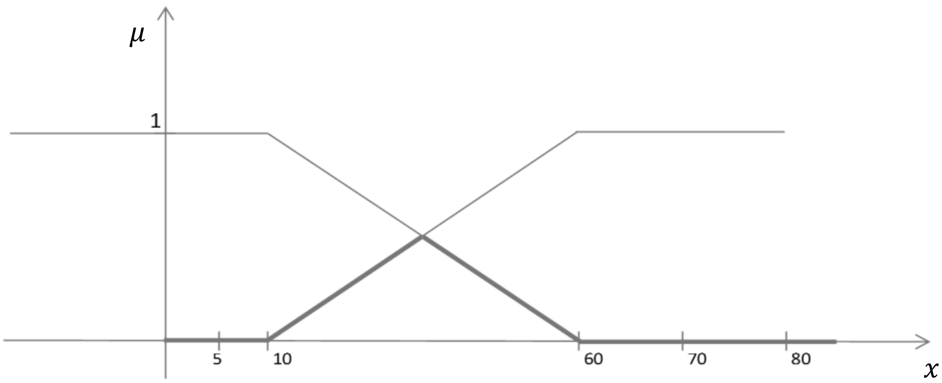


Slika 11.: Unija dva fazi skupa

Međutim, presek mladih i starih ljudi se može dobiti i na sledeći način $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^c = \mathcal{A}^c \cap \mathcal{B}^c$, odnosno to su ljudi srednjih godina. Za grafički prikaz prvo je potrebno prikazati $\mathcal{A}^c$ i $\mathcal{B}^c$.



Slika 12.: $\mathcal{A}^c$ $\mathcal{B}^c$



Slika 13.: Presek dva fazi skupa

Kod klasičnih skupova članovi ili poseduju ili ne poseduju određenu osobinu (izraženu sa 0 ili 1), za razliku od njih, elementi fazi skupova mogu delimično posedovati neku osobinu (izraženu između 0 i 1). Na primer, postoji mnogo nijansi sive boje između crne i bele ([3]). Veoma je važno naglasiti da zbog toga za fazi skupove ne važi zakon isključenja trećeg (*Slika 11. i Slika 13.*) ,

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^c \neq \emptyset \ \wedge \ \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^c \neq U$$

3.3 Trougaone norme

Trougaone norme (*eng. triangular norms*) ili kraće t – norme i trougaone konorme ili kraće t – konorme imaju široku upotrebu u fazi skupovima (videti $[8, 9, 10, 13, 14]$). Danas je u najvećoj upotrebi definicija koju je dao A. Sklar[4] 1959. godine. Međutim, smatra se da se termin trougaonih normi prvi put pojavio 1942. godine u radu K. Mengera[5]. U ovom poglavlju biće dati osnovni pojmovi i definicije vezane za t – norme i t – konorme pošto su ove operacije svoju upotrebu, pored upotrebe u teoriji probabilističkih metričkih prostora, pronašle i u teoriji fazi skupova i fazi logike.

Definicija 3.10. $[\mathbf{14}]$ Trougaona norma T je funkcija $T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ takva da za svako $x, y, z \in [0,1]$ važe uslovi:

- *T1 (komutativnost)*: $T(x,y) = T(y,x)$,
- *T2 (asocijativnost)*: $T\big(x, T(y,z)\big) = T(T(x,y), z)$,
- *T3 (monotonost)*: za $y \leq z \implies T(x,y) \leq T(x,z)$,
- *T4 (rubni uslov)*: $T(x,1) = x$.

Definicija 3.11. $[\mathbf{14}]$ Trougaona norma je konveksna kada za svako $x, y, u, v \in [0,1]$ postoje $r \in [x,u]$, $s \in [y,v]$, tako da je $T(x,y) \leq c \leq T(u,v)$, $c = T(r,s)$.

Primer 6. $[\mathbf{8}, \mathbf{9}, \mathbf{14}]$ Četiri elementarne t – norme:

1. $T_M(x,y) = \min(x,y)$, min – presek (*eng. min - intersection*);
2. $T_P(x,y) = xy$, algebarski proizvod (*eng. algebraic product*);
3. $T_L(x,y) = \max(0, x+y-1)$, ograničena razlika (*eng. bounded difference*);
4. $T_W(x,y) = \begin{cases} x, ako\ je\ y = 1 \\ y, ako\ je\ x = 1 \\ 0, inače \end{cases}$ drastični presek (*eng. drastic intersection*).

Za elementarne trougaone norme važi

$$T_W < T_L < T_P < T_M,$$

gde je $T_1 \leq T_2$ ako je $T_1(x,y) \leq T_2(x,y)$, $\forall (x,y) \in [0,1]$.

[4] Abe Sklar (1910. – 2004.) je bio američki naučnik i počasni profesor primenjene matematike na Institutu za tehnologiju, Ilinois.
[5] Karl Menger (1902. – 1985.) je austrijski naučnik koji je bio profesor na Univerzitetu u Beču, Univerzitetu Notre Dame, Institutu za tehnologiju, Ilinois.

Definicija 3.12. $[9]$ Fazi presek $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ dva fazi skupa $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ daje novi fazi skup čija je funkcija pripadnosti oblika

$$\mu_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}(x) = T(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x)) \ \ za\ \forall x \in X,$$

gde je T proizvoljna t – norma.

Definicija 3.13. $[14]$ Trougaona konorma ili t – konorma je funkcija S: $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ takva da za $\forall x, y, z \in [0,1]$ važe uslovi:

- *S1 (komutativnost)*: $S(x,y) = S(y,x)$,
- *S2 (asocijativnost)*: $S\big(x, S(y,z)\big) = S(S(x,y), z)$,
- *S3 (monotonost)*: $y \leq z \Longrightarrow S(x,y) \leq S(x,z)$,
- *S4 (rubni uslovi)*: $S(0,x) = x$.

Očigledno je da se t – norme i t – konorme razlikuju samo po rubnim uslovima. Opšti oblik unije fazi skupova zasnovan je baš na trougaonim konormama.

Napomena: t – konormu, S uveli su Schweizer i Sklar kao dualnu operaciju za t – normu, T,

$$S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y), \qquad x, y \in [0,1].$$

Bilo koja t – konorma S se može predstaviti na prethodni način. Takođe, važi i obrnuto

$$T(x,y) = 1 - S(1-x, 1-y), \qquad x, y \in [0,1].$$

Primer 7. $[\mathbf{8}, \mathbf{9}, \mathbf{14}]$ Četiri elementarne t – konorme:

1. $S_M(x,y) = \max(x,y)$, max – unija (*eng. max - union*);
2. $S_P(x,y) = x + y - xy$, algebarska suma (*eng. algebraic sum*);
3. $S_L(x,y) = \min(1, x+y)$, ograničena suma (*eng. bounded sum*);
4. $S_W(x,y) = \begin{cases} x & ako\ je\ y = 0 \\ y & ako\ je\ x = 0 \\ 1 & inače \end{cases}$, drastična unija (*eng. drastic union*).

Definicija 3.14. $[9]$ Fazi unija $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ dva fazi skupa $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ daje novi fazi skup čija je funkcija pripadnosti oblika

$$\mu_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}(x) = S(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x)) \ \ za\ \forall x \in X,$$

gde je S proizvoljna t – konorma.

Napomena: Definicija 3.4 se dobija kao specijalni slučaj kada se umesto S uzme konorma S_M.

Napomena: Primer 4. je moguće rešiti i preko t – normi i t – konormi tako što se umesto T uzme elementarna t – norma T_M, a umesto S t – konorma S_M i to je specijalan slučaj. Takođe, mogu se upotrebiti i druge t – norme i t – konorme, na primer T_P i S_P, tada će funkcije pripadnosti za fazi skupove $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ biti:

- $\mu_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}(x) = T_P\big(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x)\big) = \mu_{\mathcal{A}}(x) \cdot \mu_{\mathcal{B}}(x)$;
- $\mu_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}(x) = S_P\big(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x)\big) = \mu_{\mathcal{A}}(x) + \mu_{\mathcal{B}}(x) - \mu_{\mathcal{A}}(x) \cdot \mu_{\mathcal{B}}(x)$.

Godine	*Mladi* $\mu_{\mathcal{A}}$	*Stari* $\mu_{\mathcal{B}}$	$\mu_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}$	$\mu_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}$	S_p $\mu_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}$	T_p $\mu_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}$
5	1	0	1	0	1	0
10	1	0	1	0	1	0
20	0.8	0.1	0.8	0.1	0.82	0.08
30	0.5	0.2	0.5	0.2	0.6	0.1
40	0.2	0.4	0.4	0.2	0.52	0.08
50	0.1	0.6	0.6	0.1	0.64	0.06
60	0	0.8	0.8	0	0.8	0
70	0	1	1	0	1	0
80	0	1	1	0	1	0

Tabela 3.

Može se zaključiti da u zavisnosti od karaktera problema (ljudi) mogu se izabrati različite t – norme i t – konorme pa su samim tim i rešenja problema različita, što se može videti u prethodnoj tabeli (*Tabela 3.*).

3.4 Fazi logika

Uopštenje klasične logike je viševrednosna logika što znači da tvrdnje u njoj mogu imati više od dve istinitosne vrednosti. Fazi logiku je izumeo L. Zadeh (1973. godine), uvođenjem fazi skupova i relacija u sistem viševrednosne logike. Veliku primenu ima u stvaranju metoda i tehnika za suočavanje sa jezičkim promenljivama i olakšava opisivanje reči kao što su: *veoma*, *malo*, *skoro*, ... ($[2, 3, 8, 10, 13, 14]$)

Princip klasične logike se oduvek dovodio u pitanje jer je svaka tvrdnja ili tačna ili netačna. Razlog za to je proveravanje istinitosnih vrednosti za iskaze koji opisuju buduće događaje, kao na primer: *Sutra će pasti vrednost evra*. Budući događaji se ne mogu proceniti ni kao tačni ni kao netačni. Njihova vrednost se ne zna sve dok se taj događaj ne desi.

Pretpostavlja se da neki iskaz ima tri istinitosne vrednosti: *tačan* sa oznakom *1*, *netačan* oznaka *0* i *neutralan* sa oznakom *0.5* (Lukašievičeva[6] tro – vrednosna logika). Skup istinitosnih vrednosti je tada $T_3 = \{0, 0.5, 1\}$. Neka su p i q iskazi čije vrednosti pripadaju skupu T_3 i tada se logički veznici definišu na sledeći način:

- Negacija: $\bar{p} = 1 - p$;
- Konjukcija: $p \wedge q = \min(p, q)$;
- Disjunkcija: $p \vee q = \max(p, q)$;
- Implikacija: $p \Longrightarrow q = \min(1, 1 - p + q)$;

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$
1	1	0	0	1	1	1
1	0.5	0	0.5	0.5	1	0.5
1	0	0	1	0	1	0
0.5	1	0.5	0	0.5	1	1
0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	1
0.5	0	0.5	1	0	0.5	0.5
0	1	1	0	0	1	1
0	0.5	1	0.5	0	0.5	1
0	0	1	1	0	0	1

Tabela 4. Tabela istinitosnih vrednosti za p i q

Viševrednosna logika se dobija, za $n \geq 3$, kada su istinitosne vrednosti nekog iskaza date u vidu racionalnih brojeva iz intervala $[0, 1]$, tako da taj interval dele na jednake delove, prilikom toga formira se skup

[6] Jan Łukasiewicz (1878. – 1956.) je bio poljski profesor analitičke filozofije, matematičke logike i istorije logike.

$$T_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}.$$

Jezičke (lingvističke) promenljive su promenljive čije su vrednosti izražene rečima ili rečenicama. Zbog nemogućnosti definisanja ovih promenljivih, koriste se fazi skupovi i fazi logika za njihovu aproksimaciju i na taj način se dobijaju precizni podaci. Jezičke promenljive imaju značajnu ulogu u nekim oblastima finansijskih i menadžerskih sistema, jer opisuju promene kao što su *inflacija*, *investicija*, *rizik*, *profit*, ...

Neka je dat fazi skup, $x \in U$ sa funkcijom pripadnosti $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ i neka je dat jezički modifikator, m koji opisuje pojmove kao što su veoma, skoro, negacija... Neka je sa mA označen modifikovan fazi skup čija je funkcija pripadnosti $\mu_{mA}(x)$ i koji se koristi za definisanje sledećeg:

- *Veoma:* $\mu_{veomaA}(x) = [\mu_A(x)]^2$*;*
- *Skoro:* $\mu_{skoroA}(x) = [\mu_A(x)]^{\frac{1}{2}}$*;*
- *Negacija:* $\mu_{neA}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

Promenljiva istina je u fazi logici opisana na puno različitih načina. Baldvinova definicija uvedena je 1979. godine i prikazana je na sledeći način:

$$tačno \triangleq \{(x, \mu_{tačno}(x)) | x \in [0,1], \mu_{tačno}(x) = x, \mu \in [0,1]\}.$$

Sada su gore navedeni modifikatori primenjeni na funkciju $\mu_{tačno}(x) = x, \mu \in [0,1]$ i daju sledeće:

- $\mu_{veoma\ tačno}(x) = [\mu_{tačno}(x)]^2 = x^2$;
- $\mu_{skoro\ tačno}(x) = [\mu_{tačno}(x)]^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}$;
- $\mu_{neistinito}(x) = \mu_{netačno}(x) = 1 - x$.

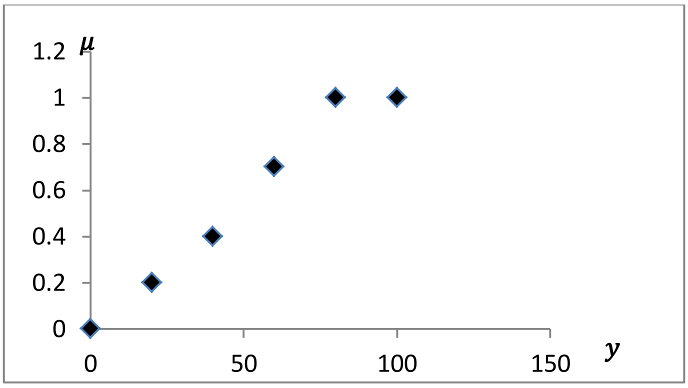
Analogno,

- $\mu_{veoma\ netačno}(x) = (1-x)^2$;
- $\mu_{skoro\ netačno}(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}}$.

Primer 8. [2] Neka je dat fazi skup $A_f = \{dobar\ kredit\}$ sa funkcijom pripadnosti koja je definisana na sledeći način (*Tabela 4.*, *Slika 15.*):

y	0	20	40	60	80	100
$\mu_{dobar}(y)$	0	0.2	0.4	0.7	1	1

Tabela 5.



Slika 14.

Fazi skup $A_f = \{dobar\ kredit\}$ je predstavljen preko gore navedenih modifikatora:

y	0	20	40	60	80	100
$\mu_{loš}(y)$	1	0.8	0.6	0.3	0	0
$\mu_{veoma\ dobar}(y)$	0	0.04	0.16	0.49	1	1
$\mu_{skoro\ dobar}(y)$	0	0.45	0.63	0.84	1	1

Tabela 6.

Takođe, moguće je logičke veznike definisati i preko t – norme T i t – konorme S. Tada je negacija c data sa $c(x) = 1 - x$ za t – normu T, a za t – konormu S koja je dualna sa T negacija je data sa $S(x, y) = c(T(c(x), c(y))$. Zatim, logičke operacije u $[0, 1]$ – vrednosnoj logici su date na sledeći način:

- *konjukcija*: $x \wedge_T y = T(x, y) = \min(x, y)$;

- *disjunkcija:* $x \vee_T y = S(x, y) = \max(x, y)$.

Implikaciju u $[0, 1]$ – vrednosnoj logici je moguće definisati uz pomoć funkcije $I_T: [0, 1]^2 \to [0, 1]$ i ona je data na sledeći način $I_T(x, y) = S(c(x), y) = c(T(x, c(y)))$. Za dve osnovne t – norme T_M i T_L važi:

$$I_{T_M}(x, y) = \begin{cases} y, & x + y \geq 1 \\ 1 - x, & inače \end{cases} \qquad \text{i} \qquad I_{T_L}(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ 1 - x + y, & inače \end{cases}.$$

3.5 Fazi brojevi

Najčešće korišćeni tipovi fazi skupova pri modelovanju realnih situacija su upravo oni koji su definisani na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$, koji se poklapa sa univerzalnim skupom U. Specijalan slučaj takvih skupova su fazi brojevi. Više o fazi brojevima se može pronaći u $[2, 8, 9, 10, 13, 14, 20]$.

Definicija 3.15. [**8**] Neka je $\mathcal{A}$ fazi podskup od $\mathbb{R}$ i on se zove *fazi broj* a ako zadovoljava sledeće uslove:

1. $\mathcal{A}$ je konveksan;
2. Postoji tačno jedno $x \in \mathbb{R}$ tako da je $\mu_a(x) = 1$;
3. Funkcija pripadnosti $\mu_a(x)$, $x \in \mathbb{R}$ je neprekidna (bar po delovima);
4. Za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$ tako da je $x < y < z$ važi $\mu_a(y) \geq \min((\mu_a(x), \mu_a(z))$.

Napomena: Definicija dozvoljava da je 1 dostignuta na celom intervalu i to je fazi interval, a u ovom radu će se posmatrati situacija kada je 1 dostignuta u jednoj tački i to je fazi broj.

Napomena: Skup svih fazi brojeva a je označen sa $\mathcal{A}'(\mathbb{R})$.

Definicija 3.17. [**8**] Fazi broj $a \in \mathcal{A}'(\mathbb{R})$ je simetričan ako njegova funkcija pripadnosti $\mu_a(x)$ zadovoljava:

$$\mu_a(\bar{x} + x) = \mu_a(\bar{x} - x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Definicija 3.18. [**8**] Za fazi broj $a \in \mathcal{A}'(\mathbb{R})$ se kaže da je *strogo pozitivan* $(a > 0)$ ako je $supp(a) \subseteq (0, \infty)$ ili *strogo negativan* $(a < 0)$ ako je $supp(a) \subseteq (-\infty, 0)$, pri čemu je $supp_{x \in U} \mu_a(x) > 0$, $U = \mathbb{R}$.

Definicija 3.19. [**8**] Fazi broj $a \in \mathcal{A}'(\mathbb{R})$ se zove *(fazi) nula broj*, $sgn(a) = 0$, ako nije ni pozitivan ni negativan, odnosno ako $0 \in supp(a)$.

3.5.1 Trougaoni fazi brojevi

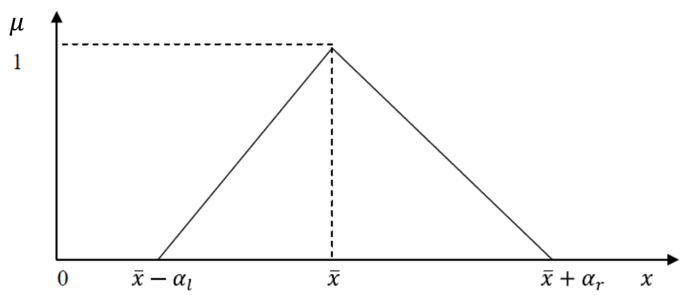
Najčešće korišćeni fazi brojevi sa stanovišta primene su trougaoni fazi brojevi. Najveću primenu imaju u društvenim naukama, finansijama, menadžmentu i mnogim drugim naukama ([2, 8]).

Trougaoni fazi brojevi imaju linearnu funkciju pripadnosti (tj. funkcije oblika su linearne), pa se zato ovi brojevi još nazivaju i ***linearni fazi brojevi***. Funkcija pripadnosti je definisana na sledeći način:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x - \bar{x}}{\alpha_l}, & x - \alpha_l < x < \bar{x} \\ 1 - \dfrac{x - \bar{x}}{\alpha_r}, & \bar{x} \leq x < \bar{x} + \alpha_r \\ 0, & inače \end{cases}.$$

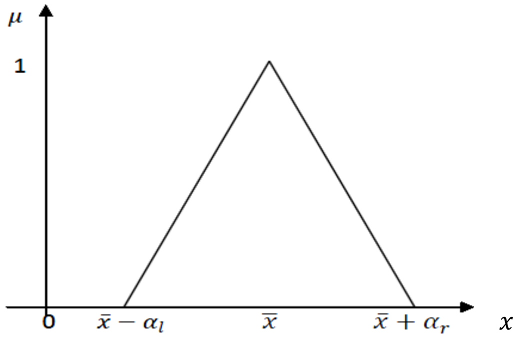
Napomena: Modalna vrednost fazi broja a je vrednost $\bar{x}$ kojoj odgovara maksimalni stepen pripadnosti.

Oznaka za trougaoni fazi broj je $a = tfn(\bar{x}, \alpha_l, \alpha_r)$ ili $a = (\bar{x} - \alpha_l,\ \bar{x},\ \bar{x} + \alpha_r)$, gde su α_l i α_r odstupanja sa leve, odnosno desne strane od modalne vrednosti $\bar{x}$ (*Slika 15.*).



Slika 15.

Nosač fazi broja je interval $[\bar{x} - \alpha_l,\ \bar{x} + \alpha_r]$. Često se u sredini nosećeg intervala nalazi tačka $\bar{x} = \frac{(\bar{x}-\alpha_l)+(\bar{x}+\alpha_r)}{2}$, pa stavljajući tu vrednost u funkciju pripadnosti dobija se simetričan (centralni) trougaoni fazi broj (*Slika 16.*).



Slika 16.

Funkcija pripadnosti trougaonih fazi brojeva se sastoji iz dva linearna dela koji se spajaju u tački $(\bar{x}, 1)$. Levi deo $a_l = (\bar{x} - \alpha_l,\ \bar{x},\ 1)$ i desni $a_r = (1,\ \bar{x},\ \bar{x} + \alpha_r)$. Levi trougaoni fazi broj je pogodan za opisivanje pojmova kao što su: *veoma malo, mlad, mali rizik, mali profit...*, dok se desni trougaoni fazi broj koristi za pojmove: *veoma pozitivno (veliko), veoma star, veliki rizik, veliki profit...*

Veoma bitna osobina trougaonih fazi brojeva je ta što se lako mogu konstruisati na osnovu malog broja raspoloživih podataka. Pretpostavlja se da se može odredi najmanja i najveća moguća vrednost nekog nepotpunog podatka koji se posmatra. Na taj način dobija se noseći interval $[\bar{x} - \alpha_l,\ \bar{x} + \alpha_r]$. Vrh trougaonog fazi broja će biti u tački $(\bar{x}, 1)$ ukoliko se odredi da je $\bar{x}$ najpogodniji da predstavlja posmatranu vrednost. Na ovaj način se dobijaju tri vrednosti pomoću kojih se može konstruisati trougaoni fazi broj i na gore naveden način zapisati njegova funkcija pripadnosti. Kraći zapis takvog fazi broja je $(\bar{x},\ a_l,\ a_r)$.

Napomena: Trougaoni fazi brojevi predstavljaju najčešće korišćen slučaj LR fazi brojeva. Osnovna ideja LR brojeva je da se funkcija pripadnosti $\mu(x)$ nekog fazi broja podeli na dva dela, $\mu_l(x)$ i $\mu_r(x)$, odnosno levo i desno od modalne vrednosti $\bar{x}$, dok L i R predstavljaju referentne funkcije (funkcije oblika). Više o LR fazi brojevima se može pronaći u $[8, 14]$.

3.5.2 Operacije sa fazi brojevima pomoću trougaonih normi

Elementarne operacije na skupu fazi brojeva zasnivaju se na primeni uopštene verzije Zadehovog principa proširenja, uz pomoć kojeg se izračunava zbir fazi brojeva (videti $[4, 8, 14]$).

Definicija 3.20. [8] Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ fazi podskupovi klasičnih skupova $X_1, X_2, \ldots, X_n$, redom, i neka je dato preslikavanje $f: X_1 \times \ldots \times X_n \rightarrow Y$ takvo da za svaku n – torku $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n$ važi $f(x_1, \ldots, x_n) = y \in Y$. Rezultat *Zadehovog principa proširenja* je $B = f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, fazi podskup od Y čija je funkcija pripadnosti:

$$\mu_B(y) = \begin{cases} sup_y\ min\{\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)\}, & ako\ \exists\ y = f(x_1, \dots, x_n) \\ 0, & inače \end{cases}.$$

Odnosno, princip proširenja kaže da je slika nekog fazi skupa opet fazi skup čija je funkcija pripadnosti data na gore navedeni način.

Princip proširenja uopšten korišćenjem t – normi se još zove *Zadehov sup* - T princip proširenja:

Definicija 3.21. [8] Neka su $A_1, A_2, \dots, A_n$ fazi podskupovi klasičnih skupova $X_1, X_2, \dots, X_n$, redom, i neka je dato preslikavanje $f: X_1 \times \dots \times X_n \to Y$ takvo da za svaku n – torku $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ važi $f(x_1, \dots, x_n) = y \in Y$. Za proizvoljnu t – normu T, rezultat *uopštenog principa proširenja* je $B = f(A_1, A_2, \dots, A_n)$, fazi podskup od Y čija je funkcija pripadnosti:

$$\mu_B(y) = \begin{cases} sup_y\ T\{\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)\}, & ako\ \exists\ y = f(x_1, \dots, x_n) \\ 0, & inače \end{cases}.$$

Formule za izračunavanje zbira fazi brojeva pomoću određenih t – normi moguće je dobiti uz pomoć uopštenog principa proširenja. Oznaka $\oplus_{\diamond}{}_{i=1}^{n} A_i$ predstavlja zbir fazi brojeva $A_1, A_2, \dots, A_n$, gde je $\diamond \in \{T_M,\ T_D, T_P, \dots\}$. Ukoliko se za t – normu uzme norma T_M, najjača t – norma, dobija se originalni Zadehov princip proširenja i tada se fazi brojevi mogu sabirati na osnovu sledećeg tvrđenja.

Tvrđenje 1. [4] Neka su dati fazi brojevi $A_i = \langle \bar{x}_i,\ \alpha_i,\ \beta_i \rangle_{LR},\ i = 1, 2, \dots, n$. Zbir tih fazi brojeva u oznaci $\oplus_{T_M}{}_{i=1}^{n} A_i$ je novi fazi broj $\oplus_{T_M}{}_{i=1}^{n} A_i = \langle \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i,\ \sum_{i=1}^{n} \beta_i \rangle_{LR}$.

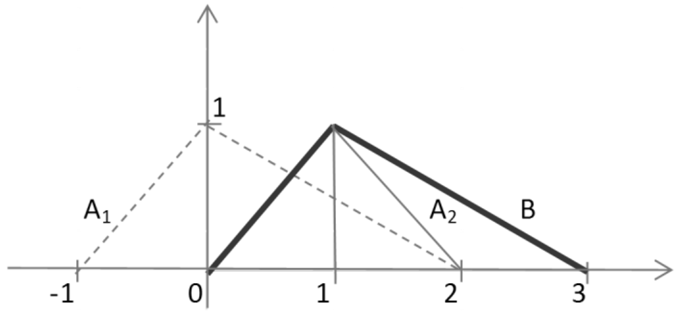
Takođe, moguće je uzeti normu T_D i tada se sabiranje vrši na osnovu sledećeg tvrđenja:

Tvrđenje 2. [4] Neka su dati fazi brojevi $A_i = \langle \bar{x}_i,\ \alpha_i,\ \beta_i \rangle_{LR},\ i = 1, 2, \dots, n.$ T_D – zbir brojeva, u oznaci $\oplus_{T_D}{}_{i=1}^{n} A_i$, je novi fazi broj $\oplus_{T_D}{}_{i=1}^{n} A_i = \langle \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i,\ \max \alpha_i,\ \max \beta_i \rangle_{LR}$.

Sledeći primer je dat po ugledu na primere iz [4].

Primer 9. Neka su dati fazi brojevi $A_1 = \langle 0, 1, 2 \rangle$ i $A_2 = \langle 1, 0, 1 \rangle$.

Koristeći *Tvrđenje 2.* dobija se da je fazi broj $B = \langle 0 + 1, \max\{1, 0\}, \max\{2, 1\} \rangle = \langle 1, 1, 2 \rangle$.



Slika 17.: Zbir fazi brojeva preko T_D norme

Tvrđenje 3. [4] Neka su dati LR – fazi intervali, $A_i = (l_i,\ r_i,\ \alpha,\ \beta)_{LR},\ i = 1, 2, \dots, n$. Ukoliko su $\log L$ i $\log R$ konkavne funkcije tada je T_P – zbir, u oznaci $\bigoplus_{T_P}{}_{i=1}^{n} A_i$, dat sa

$$\bigoplus_{T_P}{}_{i=1}^{n} A_i(x) = \begin{cases} L^n\left(\dfrac{l-x}{n\alpha}\right), & ako\ l - n\alpha \leq x \leq l, \\ 1, & ako\ l \leq x \leq r, \\ R^n\left(\dfrac{x-r}{n\beta}\right), & ako\ r \leq x \leq r + n\beta, \\ 0, & ostali\ slučajevi. \end{cases}$$

U ovom radu se neće dublje analizirati date formule, ali više o tome se može pronaći u [4, 8].

3.6 Fuzija fazi podataka

Neka se posmatra statistički regresioni problem sa nezavisnom X i zavisnom Y promenljivom, a umesto podataka $\left(x^{(i)}, y\right),\ i = 1, 2, \dots, n$ se posmatraju fazi podaci. Sada se pretpostavlja da je $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ slučajni d – dimenzionalni vektor, a Y slučajna promenljiva. Klasični skup $X = a$ je generalizovan sa fazi skupom $X = A_f$, gde je $a \in \mathbb{R}^d$, A_f je fazi podskup od $\mathbb{R}^d$. Posmatrani podaci su u formi ako – onda (*eng. if – then*) pravila i ono se označava sa R_i (videti [13]).

R_i: **Ako** za X_1 postoji fazi podskup A_{f1i}, za X_2 fazi podskup A_{f2i}, ..., za X_d fazi podskup A_{fdi}, **onda** za Y postoji fazi podskup B_f, gde su A_{fji} i B_{fi} fazi podskupovi od $\mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n,\ j = 1, 2, \dots, d$.

Glavna svrha regresije je da se aproksimira $Y = g(X)$ uz pomoć parova koji su unapred poznati. Za regresiju tipa *model – free* dato je pravilo. Ovo pravilo se predstavlja uz pomoć nekoliko koraka koji čine proces:

1. **Korak** – postoje pravila (R_i) za modeliranje jezičkih promenljivih A_{fji} i B_{fi};
2. **Korak** – izbor logičkog veznika, na primer: t – norme, operator fazi implikacije, operator ako – onda...; =, ⇒.
3. **Korak** – izbor operatora fuzije;
4. **Korak** – izbor operatora defazifikacije.

Jedan od načina za izbor logičkog veznika je: Neka je C_f fazi podskup od ℝ, koji sadrži odgovarajuće vrednosti od Y i koji zavisi od ulaznih promenljivih $(x_1,\ x_2, \dots, x_d)$ gde se zavisnost definiše na sledeći način:

$$\mu_{C_f}(y) = S\left(T\left(A_{fji}(x)\right)\right), \qquad i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, d,$$

gde su S i T uzajamno dualna trougaona norma i konorma.

Izbor S i T, t – norme i t – konorme, zavisi od posmatranog problema. Na primer, neka je $S = \vee = max$ i $T = \wedge = min$, tada je $\mu_{C_f}(y) = \max\left(min A_{fji}(x)\right), i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, d$.

Za dobijanje jedne izlazne vrednosti y potrebno je transformisati funkciju pripadnosti C_f u realan broj $D(C_f)$. Ovaj postupak transformacije naziva se ***defazifikacija***. Izračunavanje očekivane vrednosti je poseban oblik defazifikacije i dobija se na sledeći način:

$$D(C_f) = \frac{\int y\mu_{C_f}(y)dy}{\int \mu_{C_f}(y)dy}.$$

Ne postoji jedinstven način da se izvrši proces defazifikacije, ali postoji nekoliko metoda koje se koriste za ovaj proces, a to su:

- Metod za izračunavanje centra oblasti (CAM);
- Metod sredine maksimuma (MMM);
- Metod visine defazifikacije (HDM);

U ovom radu biće prikazan najpopularniji metod, a o ostalim metodama i procesu defazifikacije više se može pronaći u $[2, 13]$.

Metod za izračunavanje centra oblasti (CAM)

Pretpostavimo da rezultat sakupljanja podataka rezultira funkcijom pripadnosti $\mu_{agg}(z),\ z \in [z_0, z_q]$. Potrebno je interval $[z_0, z_q]$ podeliti na q jednakih (ili skoro jednakih) podintervala čiji su članovi $z_1, z_2, \dots, z_{q-1}$. Vrednost $\hat{z}_c$ po ovom metodu je prosečna vrednost broja z_k,

$$\hat{z}_c = \frac{\sum_{k=1}^{q-1} z_k \mu_{agg}(z_k)}{\sum_{k=1}^{q-1} \mu_{agg}(z_k)}.$$

Ovaj metod se još naziva *metod centra gravitacije* jer ukoliko se uzme da je posmatrana oblast deo tankog parčeta metala ili drveta tada će ta oblast biti centar gravitacije.

Primer 10. [**2**] Neka je dat interval $[0, 80]$ koji je potrebno podeliti na 8 jednakih delova čija je širina 10.

Broj $z_k = 10, 20, \dots, 70$ čije su funkcije pripadnosti date u *Tabeli 7.*

z_k	10	20	30	40	50	60	70
$\mu_{agg}(z_k)$	1/6	1/6	1/3	2/3	2/3	2/3	1/3

Tabela 7.

Tada je

$$\hat{z}_c = \frac{10\left(\frac{1}{6}\right) + 20\left(\frac{1}{6}\right) + \cdots + 70\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{415}{3}}{\frac{9}{3}} = 46.11 \approx 46\,.$$

O procesu defazifikacije takođe će biti reči i u *odeljku 5.*

4. Fazi statistička analiza i procene

U istraživanju društvenih nauka, mnoge odluke i procene se donose na osnovu ljudskog mišljenja koje se dobija uz pomoć anketa i upitnika. Metod koji se najčešće koristi daje mogućnost odabira samo jednog odgovora sa liste ponuđenih, što znači da ne postoji mogućnost kombinovanja određenog dela jednog odgovora sa nekim delom drugog odgovora. Na primer, može se odabrati ili crna ili bela boja, a nikako siva boja. Ovi klasični procesi često ignorišu fazi logiku, ponekad se čak i dvosmisleno mišljenje u ljudskoj logici može odraziti na njihovo ponašanje i prepoznavanje.

Klasična statistika vrši uzorkovanje tako što posmatra jedan odgovor (ili je crna ili je bela boja). Ukoliko bi ljudi mogli da koriste funkciju pripadnosti da izraze stepen osećanja koja su bazirana na njihovom odabiru, tada bi rezultat bio bliži realnom razmišljanju.

U ovom delu rada koristiće se fazi skupovi, fazi statistička analiza i biće definisani pojmovi, kao što su fazi mod, fazi medijana i fazi aritmetička sredina i njihove međusobne interakcije. Takođe, tehnika rešavanja i analiziranja fazi podataka biće objašnjena kroz osnovne primere ([13]).

Napomena: Posmatra se univerzalan skup U i obeležje X. Za razliku od klasičnog slučaja obeležje se više ne tretira kao slučajna promenljiva, već kao fazi vrednost. Dalje, neka je $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ podskup univerzalnog skupa U, $A \subseteq U$, tada važi $X: A \longrightarrow [0,1]$, i neka su $\{\mu_1(X), \mu_2(X), \dots, \mu_n(X)\}$ funkcije pripadnosti obeležja X i važi $\mu_X(A) = \mu_i(X)$. Posmatra se diskretan slučaj te se fazi broj X može zapisati:

$$\mu_U(X) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(X) I_{A_i}(X), \tag{1}$$

gde je $I_{A_i}(x) = 1$ ako je $x \in A_i$, ili $I_{A_i}(x) = 0$ ako je $x \notin A_i$. U mnogim literaturama fazi broj se zapisuje kao

$$\mu_U(X) = \frac{\mu_1(X)}{A_1} + \frac{\mu_2(X)}{A_2} + \cdots + \frac{\mu_n(X)}{A_n}, \tag{2}$$

gde „ + “ označava „ili“, a „ $\div$ “ označava vezu između $\mu_i(X)$ i A_i, a umesto toga se koristi izraz $\mu_U(X) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(X) I_{A_i}(X)$. Takođe, važi sledeći zapis:

$$\mu_U(X) = \mu_X(A) \tag{3}$$

U cilju poštovanja literature i zbog jednostavnosti dalje će se koristiti zapis (1).

Sledeći primer na lep način ilustruje primenu izraza (2):

Primer 11. $[13]$ Koliko sati dnevno utrošite na vežbanje?

Neka je U univerzalni skup, a skup $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $A \subseteq U$, neka označava broj sati utrošenih na dnevno vežbanje. Tada je fazi broj $X = sati\ vežbanja$ koji se mogu izraziti na sledeći način:

$$\{\mu_0(X) = 0.25, \mu_1(X) = 0.6, \mu_2(X) = 0.1, \mu_3(X) = 0.05, \mu_4(X) = 0\}.$$

Ovaj zapis se može zapisati i uz pomoć (3):

$$\{\mu_X(0) = 0.25, \mu_X(1) = 0.6, \mu_X(2) = 0.1, \mu_X(3) = 0.05, \mu_X(4) = 0\}.$$

Tada se fazi broj za utrošene sate za vežbanje dobija iz izraza (2):

$$\mu_A(X) = \frac{0.25}{0} + \frac{0.6}{1} + \frac{0.1}{2} + \frac{0.05}{3} + \frac{0}{4}$$

Primer 12. Neka je $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B \subseteq U$, broj izdatih knjiga jedne biblioteke na dnevnom nivou, $Y = broj\ knjiga$ je fazi broj koji se može predstaviti na sledeći način:

$$\{\mu_0(X) = 0.5, \mu_1(X) = 0.2, \mu_2(X) = 0.8, \mu_3(X) = 0, \mu_4(X) = 0.5, \mu_5 = 0.06\}.$$

Fazi broj za broj izdatih knjiga se dobija iz sledećeg izraza (2):

$$\mu_B(Y) = \frac{0.5}{0} + \frac{0.2}{1} + \frac{0.8}{2} + \frac{0}{3} + \frac{0.5}{4} + \frac{0.06}{5}\ .$$

4.1 Fazi aritmetička sredina, medijana i mod

Fazi statistička analiza koristi pojmove kao što su fazi aritmetička sredina, fazi medijana i fazi mod. Više o ovim pojmovima se može pronaći u $[13, 18, 19]$.

Fazi aritmetička sredina

U daljem tekstu biće date osnovne definicije fazi aritmetičke sredine i kroz primere će biti prikazan način na koji se dolazi do nje. Za razliku od klasičnog slučaja gde se za računanje medijane uzimaju cele vrednosti, npr. crno i belo, fazi medijana koristi i vrednosti poput sive boje.

Definicija 4.2. $[13, 19]$ **Fazi aritmetička sredina (podaci sa višestrukim vrednostima):** Neka je U univerzalni skup, $L = \{L_1, L_2, \dots, L_k\}$ skup sa k – jezičkih promenljivih na U i neka je $\left\{Fx_i = \frac{m_{i1}}{L_1} + \frac{m_{i2}}{L_2} + \cdots + \frac{m_{ik}}{L_k}, i = 1, 2, \dots, n\right\}$ slučajni fazi uzorak na U. Neka m_{ij} $(\sum_{j=1}^{k} m_{ij} = 1)$ zavisi od L_j. Tada je fazi aritmetička sredina definisana na sledeći način:

$$F\bar{x} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{i1}}{L_1} + \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{i2}}{L_2} + \cdots + \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{ik}}{L_k}.$$

Napomena: Iz prethodne definicije se može videti da m_{i1} zavisi od L_1, m_{i2} od L_2 itd.

Definicija 4.3. $[13, 19]$ **Fazi aritmetička sredina (podaci sa intervalnim vrednostima):** Neka je U univerzalni skup i $\{Fx_i = [a_i, b_i], a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$ slučajni fazi uzorak na U. Tada je fazi aritmetička sredina definisana na sledeći način:

$$F\bar{x} = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right].$$

Definicija 4.4. $[18]$ Neka je $S_i = (a_i, b_i), i = 1, 2, \dots, n$ fazi interval. Ako je f_i frekvencija niže vrednosti a_i i g_i frekvencija više vrednosti b_i, onda je fazi aritmetička sredina $F\bar{x}$ uzorka $\{S_i\}$ prosečna vrednost fazi intervala $F\bar{x} = (a, b)$, gde je

$$a = \frac{\sum f_i a_i}{\sum f_i}\ (prosečan\ minimum), \qquad b = \frac{\sum g_i b_i}{\sum g_i}\ (prosečan\ maksimum).$$

Definicija 4.5. $[\mathbf{18}]$ Očekivana fazi vrednost uzorka $\{S_i\}$ je $E\ F\bar{x} = \frac{a+b}{2}$.

Primer 13. $[\mathbf{13}]$ Neka je $x_1 = [2,3]$, $x_2 = [3,4]$, $x_3 = [4,6]$, $x_4 = [5,8]$, $x_5 = [3,7]$ početna plata za 5 novih svršenih master studenata.

Tada će fazi aritmetička sredina za početnu platu biti

$$F\bar{x} = \left[\frac{2+3+4+5+3}{5}, \frac{3+4+6+8+7}{5}\right] = [3.4, 5.6]$$

Primer 14. $[\mathbf{13}]$ Neka je data vremenska serija $\{x_t\} = \{0.8, 1.6, 2.8, 4.2, 3.6, 3.1, 4.3, 3.5\}$, $t = 1, 2, \ldots, 8$.

Ukupan opseg je $4.3 - 0.8 = 3.5$. Biće predstavljeni jednaki podintervali intervala $[0.8, 4.3]$, neka je $U = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$. Uvode se jezičke promenljive za posmatrane podintervale:

$$veoma\ nisko = L_1 \propto (0,1],\ \ nisko = L_2 \propto (1,2],\ \ srednje = L_3 \propto (2,3],$$

$$visoko = L_4 \propto (3,4],\ \ veoma\ visoko = L_5 \propto (4,5],$$

gde $\propto$ znači *'u odnosu na'*. Sredine intervala su:

$$\{m_1 = 0.5, m_2 = 1.5, m_3 = 2.5, m_4 = 3.5, m_5 = 4.5\}.$$

Jasno se vidi da $x_1 = 0.8$ pada između 0.5 i 1.5, tada

$$\frac{1.5 - 0.8}{1.5 - 0.5} = 0.7 \in L_1, \qquad \frac{0.8 - 0.5}{1.5 - 0.5} = 0.3 \in L_2,$$

fazi vrednost od x_1 je $F_1 = (0.7, 0.3, 0, 0, 0)$. Na ovaj način dobile su se sledeće vrednosti (*Tabela 8.*):

	Veoma nisko = 1	*Nisko = 2*	*Srednje = 3*	*Visoko = 4*	*Veoma visoko = 5*
F_1	0.7	0.3	0	0	0
F_2	0	0.9	0.1	0	0
F_3	0	0	0.7	0.3	0
F_4	0	0	0	0.3	0.7
F_5	0	0	0	0.9	0.1
F_6	0	0	0.4	0.6	0
F_7	0	0	0	0.2	0.8

Tabela 8.

Očekivana fazi vrednost za vremensku seriju je:

$$F\bar{x} = \frac{\frac{0.7}{8}}{1} + \frac{\frac{0.3+0.9}{8}}{2} + \frac{\frac{0.1+0.7+0.4}{8}}{3} + \frac{\frac{0.3+0.3+0.9+0.6+0.2}{8}}{4} + \frac{\frac{0.7+0.1+0.8}{8}}{5}$$

$$= \frac{0.09}{1} + \frac{0.15}{2} + \frac{0.15}{3} + \frac{0.29}{4} + \frac{0.2}{5}$$

Fazi medijana

Sledi pregled osnovnih definicija i primera vezanih za fazi medijanu. Fazi medijana, kao i fazi aritmetička sredina, dozvoljava upotrebu vrednosti između 0 i 1, odnosno od ranije sive boje.

Definicija 4.6. $[13]$ **Fazi medijana (podaci sa višestrukim vrednostima):** Neka je U univerzalni skup, $L = \{L_1, L_2, \dots, L_k\}$ skup sa k – jezičkih promenljivih na U i neka je $\left\{x_i = \frac{m_{i1}}{L_1} + \frac{m_{i2}}{L_2} + \cdots + \frac{m_{ik}}{L_k}, i = 1, 2, \dots, n\right\}$ slučajan fazi uzorak na U. Neka je $S_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, k$, $T = 1 \cdot S_1 + 2 \cdot S_2 + \cdots + k \cdot S_k$. Tada je L_j minimum i važi

$$\sum_{i=1}^{j} S_i \geq \left[\frac{T}{2}\right]$$

(gde je $\left[\frac{T}{2}\right]$ najveći integral koji je manji ili jednak sa $\frac{T}{2}$) se zove fazi medijana $\{x_i\}$ uzorka. Odnosno,

$$Fmedijana\ (x_i) = \left\{ L_j : minimum\ j\ tako\ da\ \sum_{i=1}^{j} S_i \geq \left[\frac{T}{2}\right] \right\}.$$

Definicija 4.7. $[13]$ **Fazi medijana (podaci sa intervalnim vrednostima):** Neka je U univerzalni skup i $\{Fx_i = [a_i, b_i], a_i, b_i \in R, i = 1, 2, \dots, n\}$ slučajan fazi uzorak na U. Neka je c_j sredina i l_j dužina intervala $[a_i, b_i]$. Tada je fazi medijana definisana:

$$Fmedijana = (c; r), \qquad c = medijana\,\{c_j\}, \qquad r = \frac{medijana\,\{l_j\}}{2}.$$

Definicija 4.8. $[18]$ Fazi medijana uzorka $\{S_i\}$ je definisana kao $Fmedijana = (m_l,\, m_u)$, gde je $m_l = medijana\ od\ \{a_i\}$ i $m_u = medijana\ od\ \{b_i\}$.

Primer 15. $[13]$ Pretpostavlja se da zajednica želi da uvede kaznu za zagađivanje životne sredine. Stoga su angažovali 5 stručnjaka koji će odrediti visinu kazne. U *Tabeli 9.* je iznos kazne koje su stručnjaci predložili:

$Stručnjaci$	A	B	C	D	E
$Iznos\ kazne$	$3 \sim 5$	$6 \sim 8$	$5 \sim 8$	$7 \sim 10$	$13 \sim 19$

Tabela 9.

Predložena kazna stručnjaka E je mnogo viša od ostalih. Stoga, ako se koristi sredina za određivanje iznosa kazne rezultat neće biti realan pošto dominira iznos kazne stručnjaka E. Međutim, upotreba fazi medijane deluje kao dobra ideja za rešavanje problema u slučajevima kada je nemoguće primeniti tradicionalnu medijanu. Proces dobijanja fazi medijane na osnovu *Definicije 4.7.*:

1. Potrebno je pronaći sredine intervala, a to su: $4, 7, 6.5, 8.5, 16$ i zatim ih staviti u varijacioni niz $4, 6.5, 7, 8.5, 16$. Lako se može videti da je medijana $c = 7$.
2. Zatim je potrebno pronaći širine intervala i to su: $2, 2, 3, 3, 6$. Sada je medijana $\frac{r}{2} = 3$ $(r = 1.5)$.
3. Fazi medijana: $[7 - 1.5, 7 + 1.5] = [5.5, 8.5]$.

Fazi mod

Uz pomoć literature $[13, 18]$ definisan je pojam fazi moda sa višestrukim i intervalnim vrednostima. Fazi mod, isto kao i fazi aritmetička sredina i kao fazi medijana, dozvoljava upotrebu fazi vrednosti na sledeći način:

Definicija 4.9. $[13]$ **Fazi mod (podaci sa višestrukim vrednostima):** Neka je U univerzalni skup, $L = \{L_1, L_2, \dots, L_k\}$ skup sa k – jezičkih promenljivih na U i $\{FS_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ slučajan fazi uzorak na U. Za svaki uzorak FS_i određena jezička promenljiva L_j, m_{ij} $(\sum_{j=1}^{k} m_{ij} = 1)$ i neka je $S_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, k$. Tada se maksimalna vrednost S_j (uzimajući u obzir L_j) naziva fazi mod (FM) ovog uzorka i definisan je na sledeći način:

$$FM = \left\{ L_j | S_j = \max_{1 \le i \le k} S_i \right\}.$$

Definicija 4.10. $[13]$ **Fazi mod (podaci sa intervalnim vrednostima):** Neka je U univerzalni skup, $L = \{L_1, L_2, \dots, L_k\}$ skup sa k – jezičkih promenljivih na U i $\{FS_i = [a_i, b_i], a_i, b_i \in R,\ i = 1, 2, \dots, n\}$ slučajan fazi uzorak na U. Za svaki uzorak FS_i, ako postoji interval $[c, d]$ koji obuhvata određeni uzorak, tada se taj uzorak zove grupa. Neka je MS skup grupa koji sadrži maksimalni broj uzorka, tada je fazi mod (FM) definisan:

$$FM = [a, b] = \{\cap\, [a_i, b_i] | [a_i, b_i] \subset MS\}.$$

Ukoliko interval $[a, b]$ ne postoji (na primer, $[a, b]$ je prazan skup) tada se kaže da fazi uzorak nema fazi mod.

Definicija 4.11. $[18]$ Fazi mod uzorka $\{S_i\}$ je definisan kao $FM = (m_l, m_u)$, gde je $m_l = mod\ od\ \{a_i\}$ i $m_u = mod\ od\ \{b_i\}$.

Izabran je primer iz $[13]$ u kome se pravi paralela između klasičnog i fazi pristupa.

Primer 16. Pretpostavlja se da 8 glasača traži predsednika između 4 kandidata. Rezultati glasanja dati su u *Tabeli 10.* dobijeni sa dva različita tipa glasanja (tradicionalno (klasično) protiv fazi glasanja):

Glasač \ Kandidat	*tradicionalno glasanje*				*fazi glasanje*			
	A	B	C	D	A	B	C	D
1		V				0.7	0.3	
2	V				0.5		0.4	0.1
3				V			0.3	0.7
4			V		0.4		0.6	
5		V				0.6	0.4	
6				V	0.4		0.4	0.6
7		V				0.8	0.2	
8			V				0.8	0.2
Total	1	3	2	2	1.3	2.1	3.4	1.6

Tabela 10.

Iz tradicionalnog glasanja može se videti da je za kandidata B glasalo 3 glasača. Otud je mod glasanja B.

Sa druge strane, kod fazi glasanja, kandidat B ima ukupnu pripadnost 2.1, dok kandidat C ima 3.4.

Tačnije, glasači daju prednost fazi glasanju i kao što se može videti, kandidat C u odnosu na kandidata B više zaslužuje da bude predsednik.

4.2 Heurističke osobine povezane sa fazi statistikom

Karakteristike populacije su opisane uz pomoć statističkih parametara, ali mnoge su izostavljene, kao što su očekivanje, medijana i mod. U društveno – naučnom istraživanju ljudskog mišljenja, klasični parametri nisu dovoljni za aplikaciju, stoga se koristi i fazi mod.

Neka je U univerzalni skup, $L = \{L_1, L_2, \dots, L_k\}$ skup k – jezičkih promenljivih na U i $\{FS_i,\ i = 1, 2, \dots, n\}$ slučajan fazi uzorak na U (podaci sa diskretnim fazi brojem). Naredne osobine se koriste za prikazivanje aplikacija koje predstavljaju definiciju fazi moda ([13]).

1. Fazi medijana i fazi aritmetička sredina postoje i jedinstvene su, ali fazi mod može da ne postoji.

2. Za diskretni fazi uzorak ako sredina intervala i interval proizilaze iz simentrične funkcije pripadnosti tada će sredina fazi aritmetičke sredine uzorka biti jednaka sa sredinom fazi medijane.

3. Ako za kontinuirani fazi uzorak osnova distribucije proizilazi iz desne (leve) distribucije, tada će interval vrednosti fazi uzorka biti veći (manji) od fazi medijane uzorka.

4. Za diskretan fazi uzorak upotrebljava se nivo značajnosti α za uzorak veličine n.

5. Ako je maksimalna pripadnost m_{ij} u svakom fazi uzorku Fx_i veća od nivoa značajnosti α i nalazi se u L_j, tada je fazi mod uzorka konzistentan sa klasičnim modom.

6. Ukoliko postoji pripadnost m_{ij} u svakom fazi uzorku Fx_i sa vrednostima $m_{ij} > 0.5$, tada je fazi mod konzistentan sa klasičnim modom za bilo koji nivo značajnosti $\alpha \geq 0.5$.

7. Ukoliko postoje uzorci čija maksimalna pripadnost pada na dve ili više vrednosti skupa $L = \{L_1, L_2, \dots, L_k\}$, tada se ne može izračunati klasičan mod, a da se tom prilikom ne odbace ti uzorci. Međutim, izborom odgovarajućeg nivoa značajnosti α, fazi mod može se izračunati na sledeći način:

$$S_j = \sum_{i=1}^{n} I_{ij} \quad \text{i} \quad FM = \left\{ L_j | S_j = \max_{1 \leq i \leq k} S_i \right\}.$$

8. Za kontinuirane uzorke koji proizilaze iz simetrične distribucije, sredina fazi moda i sredina fazi medijane uzorka će se poklapati.

Napomena: Ukoliko je izabran nivo značajnosti α prevelik tada je vrednost fazi moda mala i obrnuto.

Primer 17. **[13]** Za određivanje stepena zagađenosti životne sredine $P\ (0 < P < 1)$, angažovano je 12 stručnjaka. Date su jezičke promenljive:

$$L = \{L_1 = OK,\ L_2 = umereno,\ L_3 = štetno,\ L_4 = veoma\ štetno,\ L_5 = rizično\}\,.$$

U sledećim *Tabelama 11. i 12.* su prikazani rezultati stručnjaka:

Zagađenost / *Stručnjaci*	*OK*	*Umereno*	*Štetno*	*Veoma štetno*	*Rizično*
1	0.5	0.4	0.1		
2		0.4		0.6	
3		0.4	0.6		
4		0.6	0.4		
5	0.4	0.6			
6				0.3	0.7
7		0.4		0.6	
8			0.4	0.6	
9				0.2	0.8
10		0.1	0.3	0.6	
11	0.7	0.3			
12		0.7	0.3		
Ukupno:	1.6	3.9	2.1	2.9	1.5

Tabela 11.: Fazi rezultati

Zagađenost / Stručnjaci	OK	Umereno	Štetno	Veoma štetno	Rizično
1	v				
2				v	
3		v			
4			v		
5		v			
6					v
7				v	
8				v	
9					v
10				v	
11	v				
12		v			
Ukupno:	2.0	3	1	4	2

Tabela 12.: Klasični rezultati

Kao što se može videti iz prethodnih tabela, najviši stepen zagađenosti kod fazi rezultata (fazi mod) je 3.9 (*umerena zagađenost*), a kod klasičnih rezultata mod je 4 (*veoma štetno*). Međutim, stepen zagađenosti za termin *veoma štetno* u *Tabeli 11*. je 2.9, što je daleko manje od 3.9 pa se može zaključiti da su fazi rezultati precizniji i daju mnogo jasniji prikaz stepena zagađenosti životne sredine. Drugim rečima, fazi mod realnije prikazuje rezultate u odnosu na klasičan mod.

Primer 18. [**13**] Pretpostavlja se da stanovnici jedne oblasti žele da odrede kaznu za zagađivanje reke i u tu svrhu su angažovali 10 stručnjaka. Rezultati su dati u *Tabeli 13*. koja prikazuje iznose kazni u milionima dinara:

Faktori / Stručnjaci	Voda w=0.4	Čvrst otpad w=0.25	Smrad w=0.2	Hemikalije w=0.1	Buka w=0.05
1	[10, 12]	[15, 20]	[12, 15]	[22, 30]	[8, 10]
2	[8, 9]	[8, 10]	[10, 13]	[6, 8]	[12, 13]
3	[5, 7]	[20, 25]	[19, 20]	[9, 11]	[20, 22]
4	[12, 15]	[20, 28]	[11, 12]	[20, 23]	[15, 18]
5	[20, 30]	[14, 19]	[10, 20]	[14, 16]	[16, 20]
6	[7, 9]	[16, 21]	[13, 15]	[8, 9]	[25, 30]
7	[8, 10]	[10, 12]	[22, 24]	[10, 11]	[31, 35]
8	[5, 6]	[7, 8]	[17, 19]	[12, 15]	[20, 23]
9	[11, 12]	[11, 14]	[22, 28]	[18, 20]	[10, 12]
10	[11, 13]	[22, 26]	[14, 16]	[10, 12]	[16, 22]
Fazi medijana	[9, 11]	[14.5, 19.5]	[14, 16]	[11, 13]	[17, 20]
Fazi aritmetička sredina	[9.7, 12.3]	[14.3, 18.3]	[15, 18.2]	[12.9, 15.5]	[17.3, 20.5]

Tabela 13.

Vrednosti fazi medijane se dobijaju na sledeći način, krajnje vrednosti intervala se poređaju u varijacioni niz i zatim se primeni definicija koja je ranije definisana u radu. Na primer, posmatraju se donje vrednosti intervala za *Vodu* i dobija se varijacioni niz $5, 5, 7, 8, 8, 10, 11, 11, 12, 20$ iz kojeg sledi da je fazi medijana za *Vodu* $\frac{8+10}{2} = 9$. Isti način primeniti za računanje fazi medijane ostalih štetnih faktora.

Fazi aritmetička sredina se dobija kada se krajnje vrednosti intervala saberu, a zatim i podele sa brojem stručnjaka. Na primer, fazi aritmetička sredina za *Vodu* je: $\frac{1}{10}(10 + 8 + 5 + 12 + 20 + 7 + 8 + 5 + 11 + 11) = \frac{1}{10} \cdot 97 = 9.7$. Na isti način odrediti fazi aritmetičku sredinu za ostale faktore zagađenja reke.

Sada je potrebno odrediti širine i centre intervala za fazi medijanu i fazi aritmetičku sredinu (na primer, interval fazi medijane za *Vodu* je $[9, 11]$ širina je 2, a centar intervala je 10, interval za fazi aritmetičku sredinu $[9.7, 12.3]$ širina intervala je 2.6, a centar intervala je 11). Kada su sve ove vrednosti određene može da se odredi iznos kazne za zagađivanje reke tako što se centar intervala pomnoži sa odgovarajućom w iz tabele:

- Fazi medijana:

  $10 \cdot 0.4 + 17 \cdot 0.25 + 15 \cdot 0.2 + 12 \cdot 0.1 + 18.5 \cdot 0.05 = 13.4;$

- Fazi aritmetička sredina:

  $11 \cdot 0.4 + 16.3 \cdot 0.25 + 16.6 \cdot 0.2 + 19.2 \cdot 0.1 + 19.4 \cdot 0.05 = 14.8.$

5. Testiranje hipoteza sa fazi aritmetičkom sredinom

Testiranje hipoteza je veoma važno za pronalaženje rešenja u praktičnim problemima. Uobičajena pretpostavka je da se koriste precizni brojevi, ali mnogo je realnije posmatrati fazi vrednosti koje su ne - precizni brojevi[7] i tada će i test statistika koja se koristi imati takve vrednosti.

U ovom poglavlju, biće dati fazi procesi statističke odluke kojom se testiranje hipoteza može preformulisati u statistiku sa intervalnim vrednostima. Takođe, koristiće se definicije fazi aritmetičke sredine, fazi udaljenosti, a analiziraće se i njihova međusobna povezanost ($[5,6,13,17,19]$).

Svi statistički metodi koji se koriste za fazi testiranje aritmetičke sredine zasnivaju se na klasičnoj teoriji odlučivanja, proširena Neyman – Pearson-ova lema o najmoćnijem testu nije dovoljno istražena iz dva razloga:

- Lako izračunanje (*eng. soft - computing*) kritične oblasti sa fazi brojevima još uvek nije poznato;

- Distribucije za fazi populacije su nejasne, nepotpune i nepoznate.

Defazifikacija je proces koji daje merljive rezultate u fazi logici, sa obzirom na fazi skupove i odgovarajući stepen pripadnosti. Obično se koristi u kontroli fazi sistema i ima niz pravila uz pomoć kojih se broj promenljivih transformiše u fazi rezultat, odnosno rezultat je opisan preko pripadnosti fazi skupovima. Fazi sistemi predstavljaju i upravljaju nepreciznim i neizvesnim informacijama koristeći teoriju fazi skupova. Mnogi od ovih fazi sistema uključuju kao poslednji korak proces defazifikacije koji preslikava fazi skup (koji je u stvari srž fazi sistema) u klasičnu vrednost.

Definicija 5.1. $[13]$ **Defazifikacija za fazi diskretan podatak:** Neka je D fazi uzorak na posmatranom domenu U sa jezičkim promenljivim $\{L_i,\ i = 1, 2, \dots, k\}$. $\mu_D(L_i) = m_i$ je pripadnost koja uzima u obzir L_i, $\sum_{i=1}^{n} \mu_D(L_i) = 1$. Vrednost defazifikacije za diskretni fazi uzorak je $D_f = \sum_{i=1}^{k} m_i L_i$.

[7] Pojam ne – preciznih brojeva je mnogo složeniji od pojma fazi brojeva jer on sadrži fazi brojeve i brojeve unutar fazi intervala. Tipičan primer ovih brojeva je životni vek nekog sistema koji se ne može tačno odrediti, ali može biti predstavljen preko intervala vrednosti.

Primer 19. $[13]$ Neka je $D = \frac{0}{1} + \frac{0.2}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{0.3}{4} + \frac{0}{5}$ (zapis na osnovu gore navedenog načina (2)) diskretan fazi uzorak sa jezičkim promenljivim $\{L_1 = 1, L_2 = 2, L_3 = 3, L_4 = 4, L_5 = 5\}$ i pripadnostima $\{m_1 = 0,\ m_2 = 0.2,\ m_3 = 0.5,\ m_4 = 0.3,\ m_5 = 0\}$, tada je vrednost defazifikacije fazi uzorka D

$$D_f = \sum_{i=1}^{k} m_i L_i = 0 \cdot 1 + 0.2 \cdot 2 + 0.5 \cdot 3 + 0.3 \cdot 4 + 0 \cdot 5 = 3.1$$

Definicija 5.2. $[13]$ **Defazifikacija za fazi intervalne podatke:** Neka je C fazi uzorak na posmatranom domenu U sa osloncem (eng. support) $[a, b]$. C je fazi interval od $\mathbb{R}$ uz $[a, b]$ i tada je $C_f = \frac{\int_a^b x\mu(x)dx}{\int_a^b \mu(x)dx}$ vrednost defazifikacije fazi uzorka C.

Primer 20. $[13]$ Neka je C fazi uzorak sa osloncem $[0, 2]$ i funkcijom pripadnosti $\frac{1}{2}$. Tada je vrednost defazifikacije fazi uzorka C

$$C_f = \frac{\int_a^b x\mu(x)dx}{\int_a^b \mu(x)\, dx} = \frac{\int_0^2 \left(\frac{x}{2}\right) dx}{\int_0^2 \left(\frac{1}{2}\right) dx} = 1$$

Veoma je važno dati definicije za udaljenost fazi skupova.

Definicija 5.3. $[13]$ **Rastojanje za diskretan fazi uzorak:** Neka su A i B dva fazi uzorka na skupu U sa funkcijama pripadnosti μ_A, μ_B. Tada

i. Euklidsko rastojanje,

$$d_E(A, B) = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)\right)^2} \;;$$

ii. Haming[8]-ovo rastojanje daje broj neusklađenih komponenti od A i B,

$$d_H(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{\{x_i :\, \mu_A(x_i) \neq \mu_B(x_i)\}}(x_i)\,,$$

gde je $n = |U|$ kardinalnost skupa U.

[8] Ričard Vesli Haming (*eng. Richard Wesley Hamming* (1915. – 1998.)) je bio američki matematičar čiji rad ima mnoštvo uticaja na polju informatike i telekomunikacija.

Definicija 5.4. $[13,19]$ **Rastojanje za intervalni fazi uzorak:** Neka su A i B dva fazi uzorka sa funkcijama pripadnosti $\mu_A(x) = f(x)$ ako je $x \in [a,b]$, $0 \le f(x) \le 1$, $\mu_B(y) = g(y)$, ako je $y \in [c,d]$, $0 \le g(y) \le 1$. Tada su date sledeće definicije rastojanja:

i. $d_1(A,B) = inf\{|x = y|: x \in A, y \in B\}$,

ii. $d_2(A,B) = sup\{|x = y|: x \in A, y \in B\}$,

iii. $d_3(A,B) = inf\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$,

iv. $d_4(A,B) = sup\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$,

gde je $\varepsilon_1 = inf\{\varepsilon: [c,d] \subset [a-\varepsilon, b+\varepsilon]\}$, $\varepsilon_2 = inf\{\varepsilon: [a,b] \subset [c-\varepsilon, d+\varepsilon]\}$.

Definicija 5.5. $[13,19]$ **Fazi jednakost za diskretne podatke:** Neka je dat skup U, niz jezičkih promenljivih $L = \{L_1, L_2, \dots, L_k\}$ na U, $\left\{X_i = \frac{m_{i1}}{L_1} + \frac{m_{i2}}{L_2} + \cdots + \frac{m_{ik}}{L_k},\ i = 1,2\right\}$, $\sum_{j=1}^{k} m_{ij} = 1$ su dva slučajna uzorka iz U. Ako je $m_{1j} = m_{2j}$, $j = 1,2,\dots,k$ tada se kaže da je uzorak X_1 fazi jednak sa X_2, u oznaci $X_1 \approx_F X_2$.

Definicija 5.6. $[13,19]$ **Fazi indeks za jednakost diskretnih podataka:** Neka je dat skup U, niz jezičkih promenljivih $L = \{L_1, L_2, \dots, L_k\}$ na U i $\left\{X_i = \frac{m_{i1}}{L_1} + \frac{m_{i2}}{L_2} + \cdots + \frac{m_{ik}}{L_k},\ i = 1,2\right\}$, $\sum_{j=1}^{k} m_{ij} = 1$ su dva slučajna uzorka iz U. Vrednost defazifikacije za diskretan fazi uzorak X_i je $D_{if} = \sum_{j=1}^{k} m_{ij} L_j$. Ako je $D_{1f} = D_{2f}$ tada se kaže da je X_1 fazi indeks jednak sa X_2, u oznaci $X_1 \approx_I X_2$.

Definicija 5.7. $[13,19]$ **Fazi jednakost za intervalne podatke:** Neka su A i B dva fazi skupa sa funkcijama pripadnosti $\mu_A(x) = f(x)$ ako je $x \in [a,b], 0 \le f(x) \le 1$, $\mu_B(y) = g(y)$, ako važi $y \in [c,d], 0 \le g(y) \le 1$. Ako A i B imaju isti oslonac i ako su f, g konveksne funkcije tada se kaže da je A fazi jednak sa B, u oznaci $A =_F B$ ili kraće $A =_F [a,b]$.

Definicija 5.8. $[13,19]$ **Fazi pripadnost za intervalne podatke:** Neka su A i B dva fazi skupa sa funkcijama pripadnosti $\mu_A(x) = f(x)$ ako je $x \in [a,b], 0 \le f(x) \le 1$, $\mu_B(y) = g(y)$, ako važi $y \in [c,d], 0 \le g(y) \le 1$. Ako se oslonac od A nalazi u osloncu od B i ako su f, g konveksne funkcije, tada se kaže da A pripada B, u oznaci $A \in_F B$ ili kraće $A \in_F [c,d]$.

Osobina 1. $[13,19]$ Neka su A i B dva fazi skupa sa funkcijama pripadnosti $\mu_A(x) = f(x)$ ako je $x \in [a,b]$, $0 \le f(x) \le 1$, $\mu_B(y) = g(y)$, ako važi $y \in [c,d], 0 \le g(y) \le 1$. Fazi jednakost implicira fazi pripadnost, obrnuto ne važi.

Dokaz: Ako važi da je $A =_F B$, odnosno $A =_F [a, b]$, tada važi $[a, b] = [a, b]$ što implicira $[a, b] \subset [a, b]$. Dakle, važi da je $A \in_F [a, b]$.

■

Sledi osobina za fazi jednakost sa određenim uslovima:

Osobina 2. $[\mathbf{13}, \mathbf{19}]$

a) Svaki fazi skup C sa osloncem $[m, n]$ nema presek sa osloncima skupova A i B. Ako je $b < m$, $d < m$ i $d_1(A, C) = d_1(B, C)$, $d_2(A, C) = d_2(B, C)$ tada je $A =_F B$.

b) Svaki fazi skup C sa osloncem $[m, n]$ nema presek sa osloncima skupova A i B. Ako je $a > n$, $c > n$ i $d_1(A, C) = d_1(B, C)$, $d_2(A, C) = d_2(B, C)$ tada je $A =_F B$.

Dokaz:

a) Ako $d_1(A, C) = d_1(B, C)$, odnosno iz *Definicije 5.4.* se zna da je

$$inf\{|x - z| : x \in A, z \in C\} = inf\{|y - z| : y \in B, z \in C\} \Rightarrow m - b = m - d \Rightarrow b = d\,.$$

Ako je $d_2(A, C) = d_2(B, C)$ odnosno iz *Definicije 5.4.*

$$sup\{|x - y| : x \in A, y \in B\} = sup\{|y - z| : y \in B, z \in C\} \Rightarrow n - a = n - c \Rightarrow a = c\,.$$

Tada je $A =_F B$.

b) Analogno.

■

Osobina 3. $[\mathbf{13}, \mathbf{19}]$ Svaki fazi skup C sa osloncem $[m, n]$ nema presek sa osloncima skupova A i B. Ako je $A \in_F B$ tada $d_1(A, C) \geq d_1(B, C)$ i $d_2(A, C) \leq d_2(B, C)$, obrnuto ne važi.

Dokaz: Dokazaće se slučaj kada je $d < m$, ostali slučajevi se dokazuju analogno.
Kako je $A \in_F B$, $a \geq c$, $n - a \leq n - c$, $b \leq d$, $m - b \geq m - d$ tada sledi da je $d_1(A, C) \geq d_1(B, C)$ i $d_2(A, C) \leq d_2(B, C)$.

■

Napomena: Ako se uzme da je $[a,b] = [3,5]$, $[c,d] = [18,\ 21]$, $[m,n] = [10,12]$ tada važi da je $d_1(A,C) \geq d_1(B,C)$ i $d_2(A,C) \leq d_2(B,C)$. Međutim, $A \notin_F B$ jer ne važi da je $A \in_F B,\ A =_F [a,b],\ B =_F [c,d] \Rightarrow [a,b] \in_F [c,d] \Rightarrow [3,5] \in_F [18,\ 21]$.

Osobina 4. $[\mathbf{13},\mathbf{19}]$ Neka je $[a,b] \cap [c,d] = \emptyset$ i $d - c \geq b - a$, tada je $d_3(A,B) = c - a$ ako važi $b < c$ i $d_3(A,B) = b - d$ ako je $a > d$.

Dokaz: Za $b < c$ važi,

$\varepsilon_1 = inf\{\varepsilon: [c,d] \subset [a - \varepsilon, b + \varepsilon]\} = d - b, \quad \varepsilon_2 = inf\{\varepsilon: [a,b] \subset [c - \varepsilon, d + \varepsilon]\} = c - a.$
$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = (d - c) - (b - a) \geq 0 \Rightarrow d_3(A,B) = inf\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} = c - a.$

■

Osobina 5. $[\mathbf{13},\mathbf{19}]$ Neka je $[a,b] \cap [c,d] \neq \emptyset$ i $[a,b] \not\subset [c,d]$ i $d - c \geq b - a$, tada je $d_3(A,B) = c - a$ ako važi $a < c$ i $d_3(A,B) = b - d$ ako je $b > d$.

Dokaz: Kako je $d - c \geq b - a$, odnosno $d - b \geq c - a$, dalje je dokaz identičan dokazu *Osobine 4.*

■

Osobina 6. $[\mathbf{13},\mathbf{19}]$ Ako je $[a,b] \subset [c,d]$ tada važi $d_3(A,B) = 0$.

Dokaz: Iz *Definicije 5.4.* ,

$\varepsilon_1 = inf\{\varepsilon: [c,d] \subset [a - \varepsilon, b + \varepsilon]\} > 0\ , \varepsilon_2 = \{\varepsilon: [a,b] \subset [c - \varepsilon, d + \varepsilon]\} = 0 \ \ \Rightarrow$

$d_3(A,B) = inf\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} = 0.$

■

Osobina 7. $[\mathbf{13},\mathbf{19}]$ Za svaki fazi skup C sa osloncem $[m,n]$, važi:

a) Ako je $n - m \geq d - c$ i $A \in_F B$ tada $d_3(A,C) \leq d_3(B,C)$;

b) Ako je $n - m \geq d - c$ i $A =_F B$ tada $d_3(A,C) = d_3(B,C)$.

Dokaz:

a) Ako je $A \in_F B$ tada $a \geq c,\ b \leq d$ i razlikuju se sledeći slučajevi:

- $d < m \Rightarrow\ d_3(A,C) = m - a \leq m - c = d_3(B,C)$;
- $c > n \Rightarrow\ d_3(A,C) = b - n \leq d - n = d_3(B,C)$;

- $c < m, a < m, d \geq m \Rightarrow \; d_3(A, C) = m - a \leq m - c = d_3(B, C)$;
- $c < m, a \geq m \Rightarrow \; d_3(A, C) = 0 < m - c = d_3(B, C)$;
- $c \geq m, d \leq n \Rightarrow \; d_3(A, C) = 0 = d_3(B, C)$;
- $c \leq n, b > n, d > n \Rightarrow \; d_3(A, C) = b - n \leq d - n = d_3(B, C)$;
- $c \leq n, b \leq n, d > n \Rightarrow \; d_3(A, C) = 0 < d - n = d_3(B, C)$.

b) Analogno.

■

5.1 Testiranje hipoteza sa fazi uzorkom

Testiranje hipoteza o fazi aritmetičkoj sredini sa intervalnim podacima je nova istraživačka tema. Na osnovu nivoa značajnosti δ se odlučuje da li će se sprovesti jednostrani ili dvostrani test. Testiranje hipoteza sa fazi uzorkom se razlikuje po nivou značajnosti od klasičnog testiranja.

Problem testiranja fazi hipoteza nezavisno su proučavali mnogi autori i u svojim radovima koristili tehnike za rešavanje problema sa fazi podacima. Dolazili su do novih problema koji su nepostojeći u klasičnom statističkom pristupu ([6, 13, 19]).

Neka je $\overline{Fx}$ fazi aritmetička sredina uzorka, $\bar{x}_f$ je defazifikacija od $\overline{Fx}$, a μ_0 je vrednost defazifikacije od $\overline{Fx}$. Unutar fazi nivoa značajnosti i fazi kritične vrednosti F_δ testira se hipoteza $H_o: \overline{Fx} = F\mu_0$, gde je $F\mu_0$ fazi aritmetička sredina populacije U, a $\left\{x_i = \frac{m_{i1}}{L_1} + \frac{m_{i2}}{L_2} + \cdots + \frac{m_{ik}}{L_k},\ i = 1, 2, \dots, n\right\}$, $\sum_{j=1}^{k} m_{ij} = 1$ skup slučajnih uzoraka iz populacije U. Neka je μ vrednost defazifikacije od $F\mu$, tada gore navedena hipoteza postaje $H_0: \mu = \mu_0$.

Sledi pregled testiranja hipoteza:

- Testiranje hipoteza o fazi indeksu jednakosti za fazi aritmetičku sredinu sa diskretnim podacima;

- Testiranje hipoteza sa kontinuiranom fazi aritmetičkom sredinom;

- Testiranje hipoteza o fazi pripadnosti sa ograničenim uzorcima;

- Testiranje hipoteza o fazi pripadnosti sa neograničenim uzorcima.

Testiranje hipoteza o fazi indeksu jednakosti za fazi aritmetičku sredinu sa diskretnim podacima

Koraci prilikom testiranja:

1) Testira se hipoteza $H_0: F\mu = F\mu_0$ protiv alternativne hipoteze $H_1: F\mu \neq F\mu_0$;
2) Potrebno je pronaći $\overline{Fx}$ iz slučajnog uzorka $\{x_i, i = 1, 2, \dots, n\}$;
3) Nivo odluke: ako unutar fazi nivoa značajnosti F_δ važi $|\bar{x}_f - \mu_o| > \delta$ tada se hipoteza H_0 odbacuje.

Napomena: Ukoliko važi da je $\mu_o - \bar{x}_f > \delta$ tada se primenjuje levi test za testiranje hipoteze $H_0: F\mu \leq F\mu_0$ i ako ovaj uslov važi, hipoteza H_0 se odbacuje. Analogno se primenjuje desni test.

Testiranje hipoteza sa kontinuiranom fazi aritmetičkom sredinom

1) Neka je Ω domen sa fazi aritmetičkom sredinom $[a, b]$ i neka je skup slučajnih uzoraka $\{x_i = [x_{li}, x_{ui}], i = 1, 2, \dots, n\}$;
2) Testira se hipoteza $H_0: F\mu =_F [a, b]$ protiv alternativne hipoteze $H_1: F\mu \neq_F [a, b]$;
3) Naći $\overline{Fx} = [x_l, x_u]$ iz slučajnog uzorka $\{x_i, i = 1, 2, \dots, n\}$;
4) Odluka o odbacivanju hipoteze H_0 se sprovodi ako unutar nivoa značajnosti F_δ važi $|x_l - a| > k$ ili $|x_u - b| > k$, gde je $k = \delta r$ $(r = b - a)$.

Testiranje hipoteza o fazi pripadnosti sa ograničenim uzorcima

1) Testira se hipoteza $H_0: F\mu \in_F [a, b]$ protiv alternativne hipoteze $H_1: F\mu \notin_F [a, b]$;
2) Iz slučajnog uzorka $\{x_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ traži se $\overline{FX} = [x_l, x_u]$;

3) Unutar nivoa značajnosti F_δ traži se $k = \delta r$, gde je $r = b - a$, i ako važi $x_l < a - k$ ili $x_u > b + k$ hipoteza H_0 se odbacuje.

Testiranje hipoteza o fazi pripadnosti sa neograničenim uzorcima

1) Testira se hipoteza $H_0: F\mu \in_F F\mu_0 = (-\infty, b]$ protiv alternativne hipoteze $H_1: F\mu \notin_F (-\infty, b]$;

2) Iz slučajnog uzorka $\{x_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ traži se $\overline{FX} = (\infty, x_u]$;

3) Uslov za odbacivanje hipoteze H_0 je $x_u > b + k$, gde je $k = \delta r$.

Ili:

1) Testira se hipoteza $H_0: F\mu \in_F [a, \infty)$ protiv alternativne hipoteze $H_1: F\mu \notin_F [a, \infty)$;

2) Iz slučajnog uzorka $\{x_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ traži se $\overline{FX} = [x_l, \infty)$;

3) Unutar nivoa značajnosti F_δ ukoliko važi $x_l < a - k, k = \delta r$ tada se odbacuje hipoteza H_0.

Iz [19] je izabran primer koji prikazuje primenu procesa testiranja hipoteze na svakodnevni problem.

Primer 21. Administracija jedne kompanije želi da iskontroliše uključivanje klima uređaja radi uštede električne energije. Misle da je potrebno uključiti klima uređaj kada temperatura dostigne 28^0C. Međutim, administracija želi da čuje i mišljenje osoblja (njih petoro) po pitanju tolerancije na toplotu. Rezultati su sledeći: $[27, \infty), [26, \infty), [29, \infty), [24, \infty), [26, \infty)$.

Testira se hipoteza $H_0: \mu = [28, \infty)$ protiv hipoteze $H_1: \mu \neq [28, \infty)$. Potrebno je izračunati $\overline{FX} = [26.4, \infty)$, donja granica intervala dobijena je na sledeći način:

$$\frac{1}{5}(27 + 26 + 29 + 24 + 26) = \frac{1}{5} \cdot 132 = 26.4$$

Neka je nivo značajnosti $\delta = 0.2$, pa sledi $28 - 26.4 = 1.6 > 0.2$ i zbog toga se odbacuje hipoteza $H_0: \mu = [28, \infty)$. Takođe, sugerisano je da se klima uređaj uključuje kada je temperature ispod 28^0C.

Primer 22. [13] Farmer želi da predstavi novi način prženja piletine i zbog toga je pozvao 5 stručnjaka. Nakon što su probali piletinu upitani su da daju fazi ocene, odnosno da izaberu odgovor između sledećih ponuđenih:

$$veoma\ nezadovoljavajuće = 1,\ \ nezadovoljavajuće = 2,\ \ nema\ razlike = 3,$$
$$zadovoljavajuće = 4,\ \ veoma\ zadovoljavajuće = 5.$$

Procene stručnjaka su date u *Tabeli 14.:*

Stručnjaci \ Ocene	1	2	3	4	5
A	0	0	0	0.7	0.3
B	0	0	0	0	1
C	0	0.4	0.6	0	0
D	0	0	0	0.8	0.2
E	0.1	0.9	0	0	0

Tabela 14.

Neka se testira hipoteza o fazi indeksu jednakosti: $H_0: \bar{X}_f = 3$ protiv alternativne hipoteze $H_1: \bar{X}_f \neq 3$. Neka je fazi nivo značajnosti $\delta = 0.1$ i $\bar{x}_f = 2.4$, dobija se da je
$\mu_0 - \bar{x}_f = 3 - 2.4 = 0.6 > 0.1$ $\Rightarrow$ hipoteza H_0 se odbacuje.

Farmer neće primenjivati nove tehnike prženja piletine jer je fazi indeks $\bar{x}_f$ manji od 3.

5.2 Fazi χ^2 – test homogenosti

Neka je U univerzalni skup, $L = \{L_1, L_2, \dots, L_k\}$ skup k – jezičkih promenljivih na U $(\sum_{j=1}^{k} m_{ij} = 1)$, $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ i $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ dva slučajna fazi uzorka izvučena iz populacija A, B sa funkcijama pripadnosti mA_{ij} i mB_{ij}.

Posmatra se vektor n dužine k, $n = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ za koji važi $\sum_i n_i = n$. Pirsonov hi-kvadrat test $\left(\chi^2 = \sum_i \sum_j \frac{n_{ij} - e_{ij}}{e_{ij}}\right)$ je test koji se koristi za određivanje značajnosti razlika između posmatranih podataka i teorijski očekivane frekvencije podataka. Velike vrednosti odstupanja između posmatranih i očekivanih frekvencija podataka daće veliku vrednost za χ^2 (videti $[13, 18]$).

χ^2 test homogenosti se koristi za testiranje hipoteza fazi uzorka koji može biti: diskretan i sa intervalnim podacima.

Testiranje hipoteza o homogenitosti za diskretan fazi uzorak

1) Testira se hipoteza da dve populacije imaju isti koeficijent distribucije, odnosno

$H_0: F\mu_A =_F F\mu_B$ gde je $F\mu_A = \frac{\frac{1}{m}MA_1}{L_1} + \frac{\frac{1}{m}MA_2}{L_2} + \cdots + \frac{\frac{1}{m}MA_k}{L_k}$,

$F\mu_B = \frac{\frac{1}{m}MB_1}{L_1} + \frac{\frac{1}{m}MB_2}{L_2} + \cdots + \frac{\frac{1}{m}MB_k}{L_k}$, $MA_j = \sum_{i=1}^{m} mA_{ij}$, $MB_j = \sum_{i=1}^{m} mB_{ij}$;

2) Koristi se statitika $\chi^2 = \sum_{i \in A,B} \sum_{j=1}^{c} \frac{([Mi_j] - e_{ij})^2}{e_{ij}}$. Za testiranje Pirsonovog hi – kvadrat testa potrebno je decimalne brojeve Mi_j prebaciti u cele brojeve, na primer brojevi veći od 0.5 posmatraće se kao 1, a ostatak će se odbaciti;

3) Ako važi $\chi^2 > \chi^2_\alpha(k-1)$ unutar nivoa značajnosti α, tada se hipoteza H_0 odbacuje.

Testiranje hipoteza o homogenosti fazi uzorka sa intervalnim podacima

1) Neka su $\{a_i = [a_{li}, a_{ui}],\ i = 1, 2, \dots, m\}$ i $\{b_i = [b_{li}, b_{ui}],\ i = 1, 2, \dots, n\}$ dva slučajna uzorka iz populacija A, B;

2) Hipoteza: Dve populacije A, B imaju isti koeficijent distribucije, odnosno

$$H_0: F\mu_A =_F F\mu_B \text{ gde je } F\mu_A = \frac{\frac{1}{m}MA_1}{L_1} + \frac{\frac{1}{m}MA_2}{L_2} + \dots + \frac{\frac{1}{m}MA_k}{L_k},$$

$$F\mu_B = \frac{\frac{1}{m}MB_1}{L_1} + \frac{\frac{1}{m}MB_2}{L_2} + \dots + \frac{\frac{1}{m}MB_k}{L_k}, \ MA_j = \sum_{i=1}^{m} mA_{ij}, \ MB_j = \sum_{i=1}^{m} mB_{ij};$$

3) Koristi se statitika $\chi^2 = \sum_{i\in A,B} \sum_{j=1}^{c} \frac{([Mi_j]-e_{ij})^2}{e_{ij}}$;

4) Ako važi $\chi^2 > \chi^2_\alpha(k-1)$ unutar nivoa značajnosti α, tada se hipoteza H_0 odbacuje.

Primer 23. $[\mathbf{13}]$ Političke partije uoči izbora žele da znaju stepen popularnosti partije, odnosno da li za partiju glasanju žene ili muškarci. Sprovedena je anketa i rezultati su analizirani uz pomoć tradicionalnog i fazi pristupa (*Tabela 15.).*

	Popularnost partije (klasični pristup)			*χ^2 - test homogenosti*	*Popularnost partije (fazi pristup)*			*χ^2 - test homogenosti*
Partija	*A*	*B*	*Ostale*	χ^2=8.27>5.99= $\chi^2_{0.05}$ (2)	*A*	*B*	*Ostale*	χ^2=3.78<5.99= $\chi^2_{0.05}$ (2)
Muškarci	220	280	100		216.2	268.5	114.3	
Žene	170	150	80		158.1	154.7	87.2	

Tabela 15.

Testira se nulta hipoteza H_0 : *nema razlike u glasanju žena i muškaraca* protiv alternativne hipoteze H_1 : *postoje razlike u glasanju žena i muškaraca*. Koristi se nivo značajnosti $\alpha = 0.05$. Iz tabele se vidi da se kod klasičnog pristupa hipoteza H_0 odbacuje jer je registrovana vrednost testa van kritične oblasti, dok se kod fazi pristupa hipoteza H_0 ne odbacuje jer je vrednost unutar kritične oblasti.

Zaključak

U radu su dati osnovni pojmovi teorije fazi skupova koji su uvedeni zbog uopštenja klasičnih skupova, dok su fazi brojevi uvedeni zbog numeričke reprezentacije neodređenosti različitog porekla. Fazi brojevi pomažu u konstruisanju matematičkih modela sa jezičkim promenljivim (izrazima), na primer: „visoko“, „malo“, „približno“. Predstavljanje i modeliranje neodređenosti i nepreciznosti koja je prisutna u svakodnevnom životu, moguće je sprovesti na mnogo načina, a jedan od pogodnih načina je rad sa fazi skupovima, odnosno rad u fazi okruženju. Fazi statistička analiza je nastala upravo zbog nejasnih uzoraka i nepreciznih informacija dobijenih na osnovu ljudskih misli u određenim sredinama.

Na početku rada dat je pregled osnovnih statističkih pojmova sa kursa iz Statistike. Ovaj pregled je od velikog značaja za kasnije uspostavljenu paralelu sa fazi okruženjem. Takođe, definisani su pojmovi vezani za fazi skupove, fazi brojeve, fazi logiku i fazi statističku analizu. Fazi statistička analiza obuhvata rad sa fazi aritmetičkom sredinom, fazi modom i fazi medijanom. U radu je dat iscrpan pregled ilustrovanih primera koji objašnjavaju postupak dobijanja fazi aritmetičke sredine, fazi moda, fazi medijane i pregled primera koji reprezentuju primenu testiranja hipoteza sa fazi uzorcima u realnim životnim problemima. Rezultati datih primera pokazuju da je fazi statistika sa jednostavnim računom bliža stvarnom ljudskom razmišljanju jer dozvoljava da se odgovor na pitanje vrednuje sa vrednostima između 0 i 1, što kod klasične statistike nije slučaj. Takođe, u radu je pokazano kako se operacije preseka i unije fazi skupova definišu pomoću trougaonih normi i trougaonih konormi i date su operacije sa fazi brojevima uz pomoć trougaonih normi.

Izložena tematika je pregled rezultata koja je pogodna za razumevanje osnovnih pojmova iz teorije fazi skupova i može pružiti dobru podlogu za dalja istraživanja.

Literatura

[1] Adžić N., *Statistika,* Centar za matematiku i statistiku Fakulteta tehničkih nauka, Novi Sad, 2006.

[2] Bojadziev G., Bojadziev M., *Fuzzy logic for business, finance and management,* World Scientific 1999.

[3] Bojadziev G., Bojadziev M., *Fazzy sets, fazzy logic, applications,* World Scientific 1995.

[4] De Baets B., Marková - Stupňanová A., *Fuzzy Sets and Systems: Analytical expressions for the addition of fuzzy intervals*, Elsevier, 1997. (page 203 – 213)

[5] Filzmoser P., Viertl R., *Testing hypotheses with fuzzy data: The fuzzy p – value,* Metrika Springer – Verlag, 2004. (page 21 - 29)

[6] Grzegorzewski P., Hryniewicz O., *Testing Statistical Hypotheses in Fuzzy Environment,* Methware & Computing 4, Systems Research Institute, Polish Academy of Sciences, 1997. (page 203 – 217)

[7] Hadživuković S., *Statistički metodi,* Univerzitet u Novom Sadu, Poljoprivredni fakultet Novi Sad, 1991.

[8] Hanss M., *Applied Fuzzy Arithmetic: An Introduction with Engineering Applications*, Springer, 2005.

[9] Klement E. P., Mesiar R., Pap E., *Triangular Norms*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[10] Klir G. J., Yuan B., *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*, Prentice Hall P T R, Upper Saddle River, New Jersey, 1995.

[11] Koprivica M., *Šumarska biometrika*, Institut za šumarstvo, Beograd, 1997.

[12] Lozanov – Crvenković Z., *Statistika*, Novi Sad, 2011.

[13] Nguyen H. T., Wu B., *Fundamentals of Statistics with Fuzzy Data*, 2006.

[14] Pap E., *Fazi mere i njihova primena*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno – matematički fakultet Novi Sad, 1999.

[15] Rajter – Ćirić D., *Verovatnoća*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno – matematički fakultet u Novom Sadu, 2009.

[16] Stojanović S., *Matematička statistika*, Naučna knjiga, Beograd, 1980.

[17] Van Leekwijck W., Kerre E., *Defuzzification: criteria and classification,* Fuzzy Sets and Systems, Elsevier, 1999. (page 159 – 178)

[18] Wu B., Chang S.-K., *On Testing Hypothesis of Fuzzy Sample Mean,* Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 2007. (page 197 - 209)

[19] Wu B., Sun C., *Fuzzy statistics and computation on the lexical semantics: How much do you think? And how many?,* National Chengchi University and Jin – Wen College of Business and Technology, Taiwan, 1996. (page 337 - 346)

[20] Zadeh L. A., *Fuzzy Sets*, Information And Control 8, 1965. (page 338 – 353)

[21] Zimmermann H. – J., *Fuzzy Set Theory,* John Wiley & Sons, Inc. , Volume 2, May/June 2010.

Biografija

Marina Padejčev je rođena 15. maja 1989. godine u Kikindi. Osnovnu školu „Vuk Karadžić“ u Kikindi završila je 2004. godine kao nosilac Vukove diplome. U Kikindi je završila i gimnaziju „Dušan Vasiljev“, prirodno – matematički smer, 2008. godine.

Na departmanu za matematiku i informatiku, upisuje smer primenjena matematika – matematika finansija. U oktobru 2011. godine položila je sve ispite predviđene planom i programom i time stekla zvanje Matematičar primenjene matematike. Nakon toga, iste godine upisuje master studije odlučivši se ponovo za modul matematika finnsija. Položila je sve ispite zaključno sa aprilskim ispitnim rokom 2014. godine i time stekla uslov za odbranu master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: *Monografska dokumentacija*

TD

Tip zapisa: *Tekstualni štampani materijal*

TZ

Vrsta rada: *Master rad*

VR

Autor: *Marina Padejčev*

AU

Mentor: *dr Ivana Štajner – Papuga*

ME

Naslov rada: *Fazi statistička analiza i procene*

NR

Jezik publikacije: *Srpski (latinica)*

JP

Jezik izvoda: *s/en*

JI

Zemlja publikovanja: *Republika Srbija*

ZP

Uže geografsko područje: *Vojvodina*

UGP

Godina: *2015.*

GO

Izdavač: *Autorski reprint*

IZ

Mesto i adresa: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*

MA

Fizički opis rada: *(5/66/21/15/17/0/0)*

FOR (broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)

Naučna oblast: *Matematika*

NO

Naučna disciplina: *Primenjena matematika*

ND

Predmetne odrednice, ključne reči: *Fazi skup, fazi broj, fazi statistička analiza*

PO, UDK

Čuva se: *U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno –matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu*

ČS

Važna napomena: *nema*

VN

Izvod: *U ovom radu je dat detaljan pregled osnovnih pojmova vezanih za fazi skupove, fazi brojeve i fazi logiku. Kroz konkretne primere prikazana je primena fazi statističke analize u procesu donošenja odluka.*

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: *11.06.2013.*

DP

Datum odbrane: *2015.*

DO

Članovi komisije:

Predsednik: *dr Zagorka Lozanov – Crvenković, redovni profesor Prirodno – matematičkog fakulteta u Novom Sadu*

Mentor: *dr Ivana Štajner – Papuga, vanredni profesor Prirodno – matematičkog fakulteta u Novom Sadu*

Član: *dr Ljiljana Gajić, redovni profesor Prirodno – matematičkog fakulteta u Novom Sadu*

KO

UNIVERSITY OF NOVI SAD

FACULTY OF NATURAL SCIENCES & MATHEMATICS

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: *Monograph documentation*

DT

Type of record: *Textual printed material*

TR

Contents code: *Master's thesis*

CC

Author: *Marina Padejčev*

AU

Mentor: *dr Ivana Štajner – Papuga*

ME

Title: *Fuzzy statistical analysis and estimations*

TI

Language of text: *Serbian (Latin)*

LT

Language of abstract: *s/en*

LA

Country of publication: *Republic of Serbia*

CP

Locality of publication: *Vojvodina*

LP

Publication year: *2015.*

PY

Publisher: *Author's reprint*

PU

Publication place: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*

PP

Physical description: *(5/66/21/15/17/0/0)*

PD (chapters/pages/literature/tables/pictures/graphs/add. lists)

Scientific field: *Mathematics*

SF

Scientific discipline: *Applied mathematics*

SD

Subject Key words: *Fuzzy set, Fuzzy number, Fuzzy statistical analysis and estimations*

SKW

Holding data: *In the library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad*

HD

Note: *none*

N

Abstract: *In this paper is given a detailed review of the basic concepts related to fuzzy sets, fuzzy numbers and fuzzy logic. Application of fuzzy statistical analysis in decision making process is shown through the examples.*

AB

Accepted on Scientific board on: *11.06.2013*.

AS

Defended: *2015.*

DE

Thesis Defend board:

President: *dr Zagorka Lozanov – Crvenković, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad*

Mentor: *dr Ivana Štajner – Papuga, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad*

Member: *dr Ljiljana Gajić, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad*

DB