UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

NAPREDNA FAZI ARITMETIKA – METOD TRANSFORMACIJE

-master rad-

Mentor: dr Ivana Štajner – Papuga

Student: Marina Mišanović 153m/11

Novi Sad, 2013.

Sadržaj

Uvod

Tema rada pripada teoriji fazi skupova koja je nastala kao novi matematički koncept u polju obrade informacija. Lotfi A. Zadeh je prvi uveo pojam fazi skupa 1965. godine sa osnovnim ciljem da se na matematički formalizovan način predstavi i modelira neodređenost u lingvistici. Reč fazi (eng. fuzzy) je engleskog porekla i označava da je nešto nejasno, neprecizno, neodređeno. Kako se u komunikaciji često koriste neprecizni termini kao što su "mlad čovek", "visoka temperatura" i "velika soba", upravo teorija fazi skupova pomaže pri prevazilaženju ovakvih problema iz svakodnevnog života.

Fazi skup predstavlja uopštenje klasičnog skupa. Kod klasičnih skupova je jasno definisano da element ili pripada ili ne pripada datom skupu, dok kod fazi skupova element može da pripada skupu samo u određenoj meri. Klasične skupove opisuje karakteristična funkcija, koja prima isključivo vrednosti 0 ili 1, a fazi skupovi su predstavljeni funkcijom pripadnosti, koja se odnosi na stepen pripadnosti elementa skupu i može da uzme bilu koju vrednost iz intervala $[0,1]$. Pri definisanju fazi skupa, donosilac odluke ima tu slobodu da funkciju pripadnosti definiše na način koji najviše odgovara njegovim shvatanjima. Upravo ova činjenica omogućava fazi sistemima da se lakše prilagođavaju realnim situacijama u kojima se primenjuju.

Od trenutka definisanja fazi skupova, pa do danas napravljen je ogroman napredak što se ogleda i u razvoju teorije fazi brojeva i fazi aritmetike. Fazi broj predstavlja specijalan slučaj fazi skupa. Fazi aritmetika je prolazila kroz različite faze, od osnovne, preko standardne, pa do napredne fazi aritmetike. Napredna fazi aritmetika, zasnovana na metodu transformacije, se primenjuje u mnogim oblastima, poput procene fazi-racionalnih izraza, te za simulaciju statičkih ili dinamičkih sistema proizvoljne kompleksnosti sa fazi-vrednosnim parametrima.

U radu je dat opsežan pregled savremenih rezultata iz teorije fazi skupova, koji su u određenim poglavljima ilustrovani originalnim primerima. Posebna pažnja je posvećena fazama razvoja fazi aritmetike.

U prvom poglavlju je ilustrovana razlika između klasičnih i fazi skupova. Dat je detaljan pregled osnovnih pojmova i definicija vezanih za fazi skupove, kao i operacija sa fazi skupovima i relacijama. Definisane su trougaone norme i trougaone konorme. Ovo poglavlje je zasnovano na [2,3,6,9,16,22,23,27].

Drugo poglavlje, koje se odnosi na osnovnu fazi aritmetiku, uvodi fazi brojeve i fazi vektore. Opisani su osnovni tipovi fazi brojeva: linearni, Gausovi, kvazi-Gausovi, kvadratni, eksponencijalni i kvazi-eksponencijalni fazi brojevi. Takođe, navedeni su i upoređeni koncepti L-R, diskretnih i dekompozabilnih fazi brojeva, kao i operacija nad na njima. Dat je i Zadeh-ov princip proširenja koji omogućava da se operacije sa klasičnim brojevima prenesu na fazi brojeve. Literatura korišćena za ovo poglavlje je [1,2,4,9,10,14,21,22,27].

U trećem poglavlju je dat pregled standardne fazi aritmetike, koja se definiše kao proširenje binarnih operacija osnovne fazi aritmetike, kako bi se mogli procenjivati fazi racionalni izrazi. Pored osnovnih definicija standardne fazi aritmetike, ovo poglavlje se bavi i diskusijom nedostataka i ograničenja, koji, u nekim slučajevima, umanjuju praktičnost ovog pristupa. Definišu se lokalni i globalni stepen precenjenosti. Rezultati prezentovani u ovom delu su iz [7,9].

Četvrto poglavlje predstavlja metod transformacije kao osnovu napredne fazi aritmetike, koja omogućava značajno poboljšanje fazi aritmetičkih procena proizvoljnih sistema sa fazi-vrednosnim parametrima. Poglavlje daje iscrpan opis postupka simulacije i analize fazi-parametrizovanih modela u okviru tri različita oblika metoda transformacije, opšteg, redukovanog i proširenog. Završava se pregledom efikasnih strategija za implementaciju ovog metoda. Literatura korišćena pri izradi poglavlja je [9,11,12,13,17,18].

Peto poglavlje ističe karakteristična svojstva fazi aritmetike koja pogoduju numeričkom rešavanju problema neodređenosti, pružajući klasifikaciju neodređenosti. Predstavljen je savremeni pristup inverznoj fazi aritmetici, koja je, takođe zasnovana na metodu transformacije. Između ostalog, definisani su defazifikacija kao i mere fazi brojeva, nepreciznost i ekscentričnost. U ovom poglavlju su prikazani rezultati iz [5,8,9,15,19,20,24,25,26].

1. Fazi skupovi

U ovom poglavlju je dat pregled osnovnih pojmova vezanih za fazi skupove, pre svega definicije fazi skupa i funkcije pripadnosti. Definisane su osnovne osobine fazi skupova koje su podudarne osobinama iz klasične teorije skupova, ali i one koje su karakteristične samo za fazi skupove. Takođe su prikazane operacije sa fazi skupovima i relacijama, te su ilustrovane primerima. Kao uopštenja klasičnih operacija, date su t-norme i t-konorme. Ovo poglavlje je zasnovano na [2,3,6,9,16,22,23,27].

1.1. Osnovni pojmovi i definicije

Da bi se fazi skupovi uveli na način koji omogućava njihovo lakše razumevanje, data je paralela sa klasičnim skupovima (eng. crisp sets) kroz naredni primer.

Primer 1.1. [9] Neka je dat neprekidan, neprebrojiv, univerzalni skup X mogućih spoljašnjih temperatura x u stepenima Celzijusovim. Njegov podskup A temperatura smrzavanja se definiše sa

$$A = \{x \in X | x \leq 0\},$$

ili preko karakteristične funkcije

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & za \quad x \leq 0 \\ 0 & za \quad x > 0 \end{cases}, \qquad x \in X.$$

Osobina

$$A(x) =' x\ je\ temperatura\ smrzavanja'$$

omogućava nedvosmislenu definiciju skupa A, odnosno jasnu razliku između elemenata koji pripadaju A i onih koji ne pripadaju.

Ako se sada definiše skup $\tilde{A}$ kao skup niskih temperatura

$$\tilde{A}(x) =' x\ je\ niska\ temperatura'$$

očigledno je da u ovom slučaju nije moguće napraviti jasnu razliku između elemenata koji pripadaju skupu i onih koji su iz njega isključeni.

Zbog ovoga se javlja potreba za uvođenjem fazi skupova, kao generalizacije klasičnih skupova, tako što se dozvoljava da element univerzalnog skupa ne mora u potpunosti da pripada a ni da ne pripada nekom njegovom podskupu, nego da jednostavno pripada sa određenim stepenom ([27]). Da bi se predstavili fazi skupovi, karakteristična funkcija μ_A klasičnog skupa A se može generalizovati na funkciju pripadnosti $\mu_{\tilde{A}}$ fazi skupa $\tilde{A}$.

Definicija 1.1. [22] Funkcija pripadnosti $\mu_{\tilde{A}}$ fazi skupa $\tilde{A}$ je preslikavanje

$$\mu_{\tilde{A}}: X \mapsto [0,1],$$

gde je $\tilde{A}$ podskup univerzalnog skupa X.

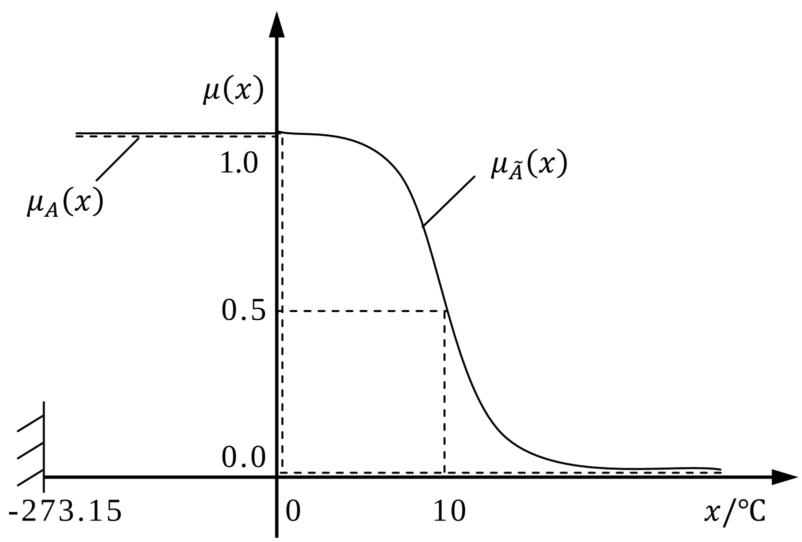
Definicija 1.2. [9] Fazi skup $\tilde{A}$ je skup uređenih parova koji se sastoji od elementa x univerzalnog skupa X i određenog stepena pripadnosti $\mu_{\tilde{A}}(x)$, oblika

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1]\}.$$

U primeru 1.1. za fazi skup $\tilde{A}$ niskih temperatura, jedan od mogućih zapisa funkcije pripadnosti je

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{1}{1 + e^{x-10}}, \qquad x \in X,$$

što je prikazano na slici 1.1.



Slika 1.1. Karakteristična funkcija $\mu_A(x)$ (isprekidana linija) i funkcija pripadnosti $\mu_{\tilde{A}}(x)$ (puna linija)

Pojam relacije je još jedan klasičan pojam koji ima svoje uopštenje u teoriji fazi skupova. Dok klasična relacija ukazuje na to da li su elementi u relaciji ili ne, fazi relacija dozvoljava da elementi samo u određenoj meri budu u datoj relaciji. Za razliku od fazi skupa, relacija se definiše na proizvodu univerzalnih skupova. Tačnije, ako je u pitanju n-arna fazi relacija i dati su univerzalni skupovi X_i, $i = 1,2, \dots, n$, relacija se definiše na $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ ([9]).

Definicija 1.3. [9] n-arna fazi relacija $\tilde{R}$ je uređen par koji se sastoji od elemenata $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ i određenog stepena pripadnosti $\mu_{\tilde{R}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ oblika

$$\tilde{R} = \{((x_1, x_2, \dots, x_n), \mu_{\tilde{R}}(x_1, x_2, \dots, x_n))|$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n, \mu_{\tilde{R}}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0,1]\}.$$

Primer 1.2. Neka je data klasična binarna relacija

$$R = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 | x_1 < x_2\}$$

sa univerzalnim skupovima $X_1 = \{1,5,10\}$ i $X_2 = \{3,6,15,30\}$, koja se može transformisati u relaciju fazi tipa ako se klasični relacioni uslov

$$R(x_1, x_2) = {}' x_1 \ je \ manje \ od \ x_2{}'$$

zameni fazi relacionim uslovom

$$\tilde{R}(x_1, x_2) = {}' x_1 \ je \ mnogo \ manje \ od \ x_2{}'$$

što dovodi do binarne fazi relacije

$$\tilde{R} = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 | x_1 \ll x_2\}.$$

Moguća realizacija fazi relacije $\tilde{R}$ sa vrednostima funkcije pripadnosti $\mu_{\tilde{R}}(x_1, x_2)$ je prikazana tabelom 1.2. Odgovarajuća klasična relacija R je data tabelom 1.1.

	x_2 / x_1	3	6	15	30
	1	1	1	1	1
R:	5	0	1	1	1
	10	0	0	1	1
		$\mu_R(x_1, x_2)$			

Tabela 1.1. Klasična diskretna binarna relacija R u tabelarnoj formi

	x_2	3	6	15	30
	x_1				
	1	0.2	0.5	0.9	1
$\tilde{R}$:	5	0	0.1	0.2	0.5
	10	0	0	0.1	0.2
		$\mu_{\tilde{R}}(x_1, x_2)$			

Tabela 1.2. Diskretna binarna fazi relacija $\tilde{R}$ u tabelarnoj formi

Definicija 1.4. [9] Fazi partitivni skup $\tilde{\mathcal{P}}(A)$ klasičnog skupa A je skup svih mogućih fazi podskupova $\tilde{T}$ od A, odnosno

$$\tilde{\mathcal{P}}(A) = \{\tilde{T} | \tilde{T} \subseteq A\}.$$

Definicija 1.5. [9] Visina $hgt(\tilde{A})$ fazi skupa $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{P}}(X)$ je supremum (maksimum ako je univerzalni skup X konačan) funkcije pripadnosti $\mu_{\tilde{A}}(x)$:

$$hgt(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x).$$

Ako je $hgt(\tilde{A}) = 1$, $\tilde{A}$ se zove normalizovan skup, inače je subnormalizovan.

Definicija 1.6. [9] Jezgro $core(\tilde{A})$ fazi skupa $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{P}}(X)$ je klasični skup svih elemenata $x \in X$ čiji je stepen pripadnosti jednak jedinici, tj.

$$core(\tilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}.$$

Definicija 1.7. [9] Nosač $supp(\tilde{A})$ fazi skupa $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{P}}(X)$ je klasični skup svih elemenata $x \in X$ koji imaju nenula stepen pripadnosti, odnosno

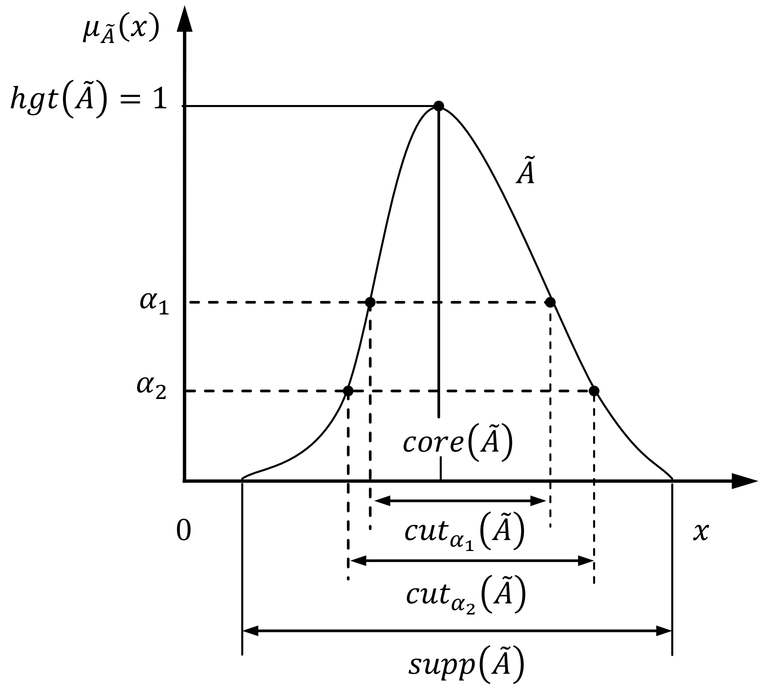
$$supp(\tilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}.$$

Definicija 1.8. [9] α-presek $cut_\alpha(\tilde{A})$ fazi skupa $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{P}}(X)$ je klasični skup svih elemenata $x \in X$ koji pripadaju fazi skupu $\tilde{A}$ sa stepenom najmanje $\alpha \in [0,1]$:

$$cut_\alpha(\tilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}.$$

Jaki α-presek $cut_{\alpha+}(\tilde{A})$ fazi skupa $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{P}}(X)$ se definiše sa:

$$cut_{\alpha+}(\tilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}.$$



Slika 1.2. Funkcija pripadnosti fazi skupa, visina, jezgro, nosač skupa i α-preseci

Definicija 1.9. [9] Kardinalnost $card(\tilde{A}) = |\tilde{A}|$ diskretnog fazi skupa $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{P}}(X)$ sa konačnim nosačem $supp(\tilde{A})$ se može definisati kao

$$card(\tilde{A}) = |\tilde{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) = \sum_{x \in supp(\tilde{A})} \mu_{\tilde{A}}(x).$$

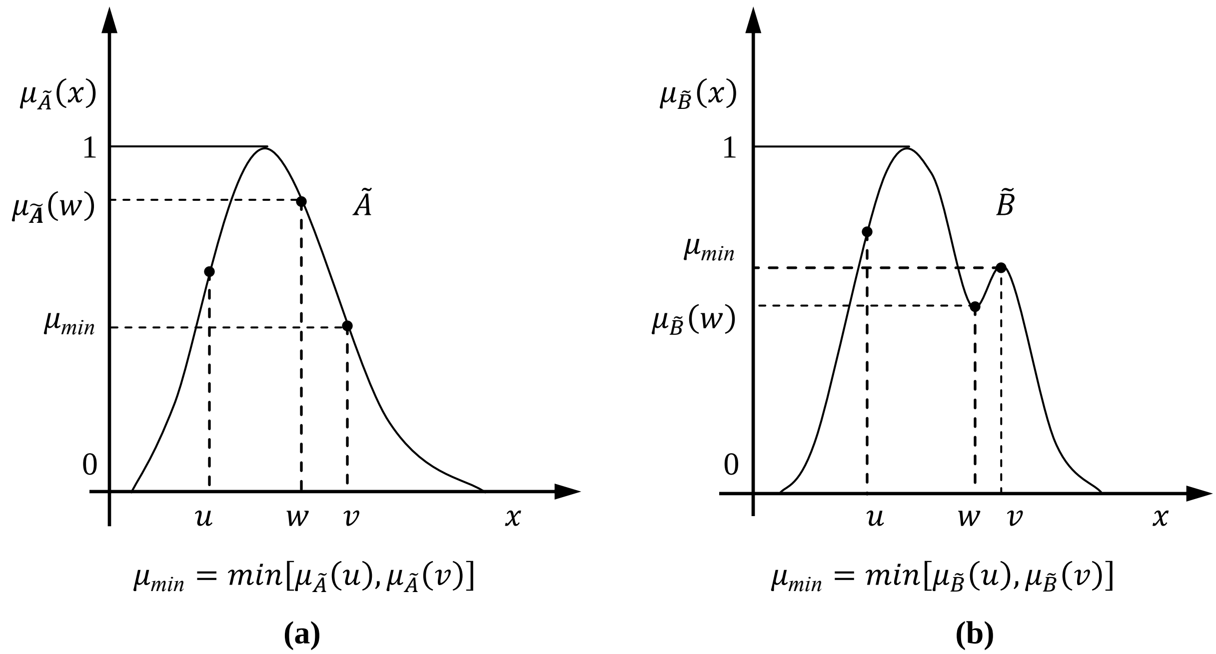
Definicija 1.10. [9] Fazi skup $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{P}}(X)$ je konveksan ako za svaki element $u \in cut_\alpha(\tilde{A})$ i $v \in cut_\alpha(\tilde{A})$ i za svako $\alpha \in [0,1]$ važi

$$\lambda u + (1 - \lambda) v \in cut_\alpha(\tilde{A}) \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

odnosno, u terminu funkcija pripadnosti, fazi skup $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{P}}(X)$ je konveksan ako za sve $u, v, w \in supp(\tilde{A})$ i za $u \leq w \leq v$ važi

$$\mu_{\tilde{A}}(w) \geq min[\mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{A}}(v)].$$

Primer 1.3. [9] Neka su dati fazi skupovi $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ funkcijama pripadnosti $\mu_{\tilde{A}}(x)$ i $\mu_{\tilde{B}}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, kao što je prikazano na slici 1.3. Za fazi skup $\tilde{A}$ na slici 1.3.(a) vrednost pripadnosti $\mu_{\tilde{A}}(w)$ je uvek veća ili jednaka od $min[\mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{A}}(v)]$ za sve $u, v, w \in supp(\tilde{A})$ i $u \leq w \leq v$, ali najmanje jedna kombinacija (u, v, w) se može naći za fazi skup $\tilde{B}$, na slici 1.3.(b) da ovaj uslov nije ispunjen. Stoga, fazi skup $\tilde{A}$ je konveksan dok fazi skup $\tilde{B}$ nije.



Slika 1.3. (a) Konveksan fazi skup $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$, **(b)** Nekonveksan fazi skup $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$

Napomena 1.1. Osobine koje su prethodno definisane za fazi skupove se analogno definišu za fazi relacije.

1.2. Operacije sa fazi skupovima i relacijama

Sledi pregled definicija osnovnih operacija za domen-kompatibilne fazi skupove i relacije ([9,16,22,27]). Domen-kompatibilni fazi skupovi su definisani nad istim univerzalnim skupom, dok su domen-kompatibilne fazi relacije definisane nad istim proizvodom univerzalnih skupova. Operacije sa fazi skupovima i relacijama su date preko operacija nad njihovim funkcijama pripadnosti.

Definicija 1.11. [9] Inkluzija fazi skupa $\tilde{A}$ u drugi fazi skup $\tilde{B}$ se može definisati preko funkcija pripadnosti $\mu_{\tilde{A}}(x)$ i $\mu_{\tilde{B}}(x)$ kao

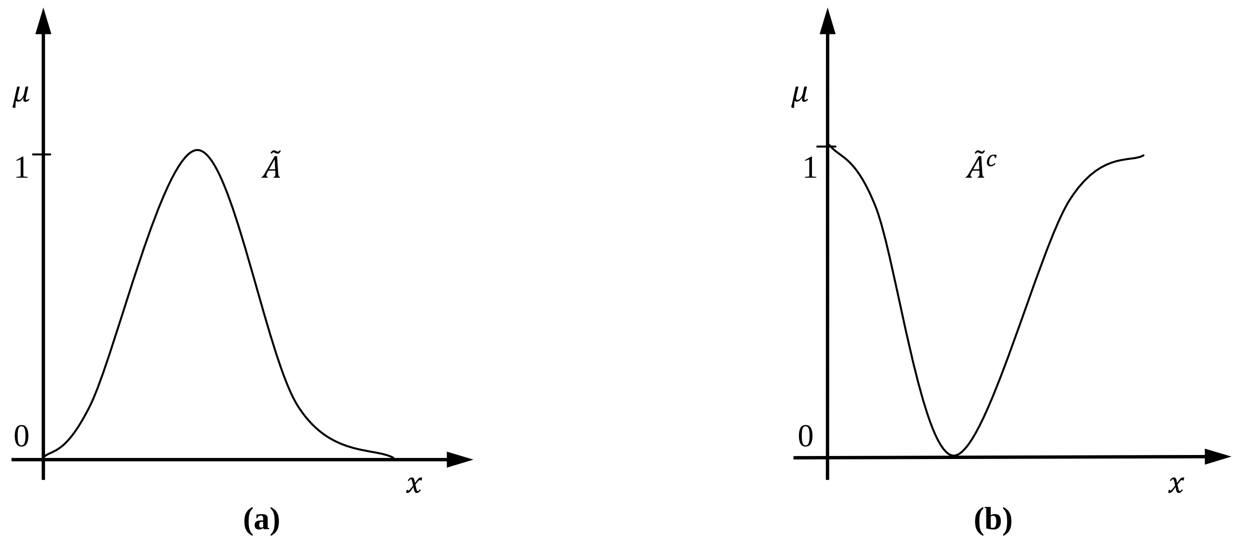
$$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x) \quad \forall x \in X.$$

Definicija 1.12. [9] Jednakost dva fazi skupa $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ se definiše preko funkcija pripadnosti $\mu_{\tilde{A}}(x)$ i $\mu_{\tilde{B}}(x)$ sa

$$\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x) \quad \forall x \in X.$$

Definicija 1.13. [22] Za dati fazi skup $\tilde{A} \subseteq X$ sa funkcijom pripadnosti $\mu_{\tilde{A}}(x)$, funkcija pripadnosti $\mu_{\tilde{A}^c}(x)$ komplementa $\tilde{A}^c$ se može definisati kao

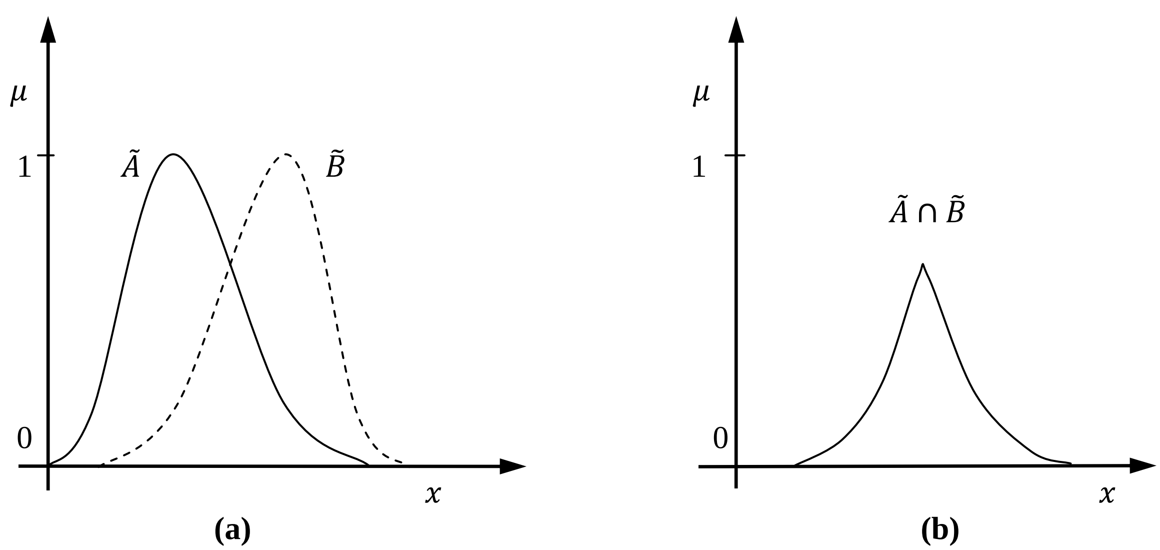
$$\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \quad \forall x \in X.$$



Slika 1.4. Funkcija pripadnosti **(a)** $\mu_{\tilde{A}}(x)$ fazi skupa $\tilde{A}$, **(b)** $\mu_{\tilde{A}^c}(x)$ fazi komplementa $\tilde{A}^c$

Definicija 1.14. [22] Za data dva fazi skupa, $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$, $\tilde{A}, \tilde{B} \subseteq X$ sa funkcijama pripadnosti $\mu_{\tilde{A}}(x)$ i $\mu_{\tilde{B}}(x)$, funkcija pripadnosti $\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)$ preseka $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ se može definisati sa

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = min[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)] \quad \forall x \in X.$$



Slika 1.5. Funkcije pripadnosti **(a)** $\mu_{\tilde{A}}(x)$ i $\mu_{\tilde{B}}(x)$ fazi skupovaa $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$, **(b)** $\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)$ fazi preseka $\tilde{A} \cap \tilde{B}$

Sledi definicija trougaonih normi ili t-normi koje formiraju najopštiju klasu fazi preseka.

Definicija 1.15. [16] Trougaona norma ili t-norma je funkcija $i: [0,1] \times [0,1] \mapsto [0,1]$ koja za sve $\mu_0, \mu_1, \mu_2 \in [0,1]$ zadovoljava sledeće uslove:

I1 (rubni uslov): $i(\mu_0, 1) = \mu_0$

I2 (monotonost): $\mu_1 \leq \mu_2 \Rightarrow i(\mu_0, \mu_1) \leq i(\mu_0, \mu_2)$

I3 (komutativnost): $i(\mu_1, \mu_2) = i(\mu_2, \mu_1)$

I4 (asocijativnost): $i[\mu_0, i(\mu_1, \mu_2)] = i[i(\mu_0, \mu_1), \mu_2]$.

Definicija 1.16. [9] Fazi presek $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ dva fazi skupa $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ je novi fazi skup sa funkcijom priipadnosti oblika

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = i[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)] \quad \forall x \in X,$$

gde je i proizvoljna t-norma.

Primer 1.4. [9,16,22] Četiri najvažnije t-norme:

MIN-presek (eng. MIN-intersection [27]): $i_{min}(\mu_1, \mu_2) = min[\mu_1, \mu_2]$

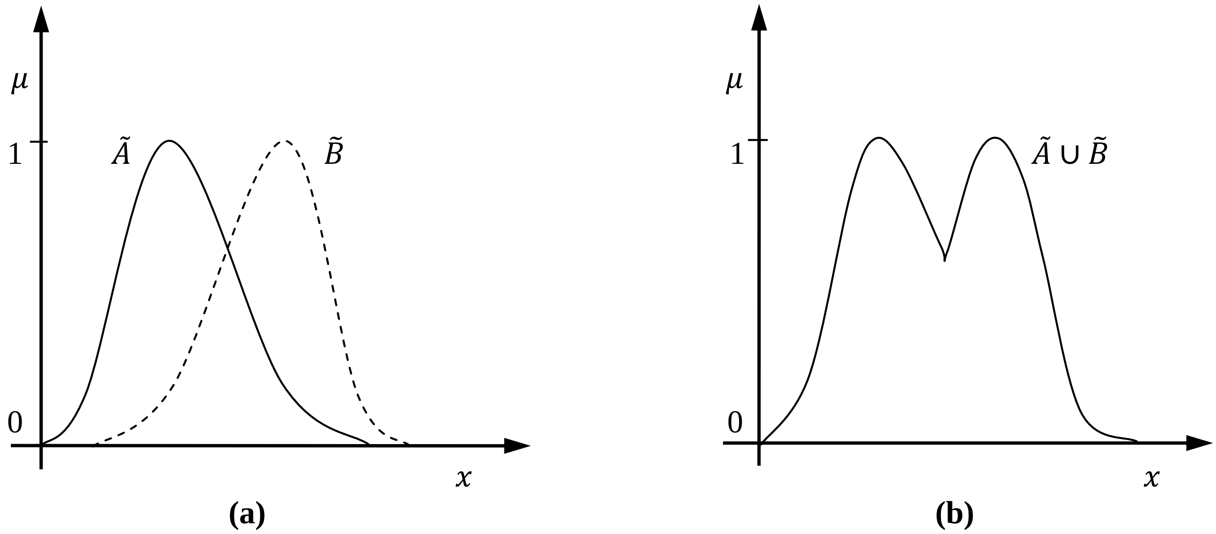
Algebarski proizvod (eng. Algebraic product [27]): $i_{alg}(\mu_1, \mu_2) = \mu_1\mu_2$

Ograničena razlika (eng. Bounded difference [6]): $i_{bnd}(\mu_1, \mu_2) = max[0, \mu_1 + \mu_2 - 1]$

Drastični presek (eng. Drastic intersection [2,3]): $i_{drt}(\mu_1, \mu_2) = \begin{cases} \mu_1 & ako\, je \quad \mu_2 = 1 \\ \mu_2 & ako\, je \quad \mu_1 = 1 \\ 0 & inače. \end{cases}$

Definicija 1.17. [22] Za data dva fazi skupa, $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$, $\tilde{A}, \tilde{B} \subseteq X$ sa funkcijama pripadnosti $\mu_{\tilde{A}}(x)$ i $\mu_{\tilde{B}}(x)$, funkcija pripadnosti $\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)$ unije $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ je oblika

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = max[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)] \quad \forall x \in X.$$



Slika 1.6. Funkcije pripadnosti **(a)** $\mu_{\tilde{A}}(x)$ i $\mu_{\tilde{B}}(x)$ fazi skupovaa $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$, **(b)** $\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)$ fazi unije $\tilde{A}\cup\tilde{B}$

Sledi definicija trougaonih konormi ili t-konormi koje formiraju najopštiju klasu fazi unija.

Definicija 1.18. [16] Trougaona konorma ili t -konorma je funkcija $u: [0,1] \times [0,1] \mapsto [0,1]$ koja za sve $\mu_0, \mu_1, \mu_2 \in [0,1]$ zadovoljava sledeće uslove:

I1 (rubni uslov): $u(\mu_0, 0) = \mu_0$

I2 (monotonost): $\mu_1 \leq \mu_2 \Rightarrow u(\mu_0, \mu_1) \leq u(\mu_0, \mu_2)$

I3 (komutativnost): $u(\mu_1, \mu_2) = u(\mu_2, \mu_1)$

I4 (asocijativnost): $u[\mu_0, u(\mu_1, \mu_2)] = u[u(\mu_0, \mu_1), \mu_2]$.

Sada je moguće definisati opšti oblik unije fazi skupova zasnovan upravo na trougaonim konormama.

Definicija 1.19. [9] Fazi unija $\tilde{A}\cup\tilde{B}$ dva fazi skupa $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ je novi fazi skup dat sledećom funkcijom pripadnosti

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = u[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)] \quad \forall x \in X,$$

gde je u proizvoljna t-konorma.

Primer 1.5. [9,16,22] Četiri najvažnije t-konorme su:

MAX-unija (eng. MAX-union [27]): $u_{max}(\mu_1, \mu_2) = max[\mu_1, \mu_2]$

Algebarska suma (eng. Algebraic sum [27]): $u_{alg}(\mu_1, \mu_2) = \mu_1 + \mu_2 - \mu_1\mu_2$

Ograničena suma (eng. Bounded sum [6]): $u_{bnd}(\mu_1, \mu_2) = max[1, \mu_1 + \mu_2]$

Drastična unija (eng. Drastic union [2,3]): $u_{drt}(\mu_1, \mu_2) = \begin{cases} \mu_1 & ako\ je \quad \mu_2 = 0 \\ \mu_2 & ako\ je \quad \mu_1 = 0 \\ 1 & inače. \end{cases}$

Napomena 1.2. Prethodno navedene operacije sa fazi skupovima se analogno definišu i za fazi relacije.

U nastavku se navodi operacija kompozicije koja je za razliku od prethodnih operacija za fazi relacije koje nisu domen-kompatibilne. Zbog jednostavnosti posmatraju se binarne relacije.

Definicija 1.20. [9] Za date dve binarne fazi relacije $\tilde{R} \subseteq X_1 \times X_2$ i $\tilde{S} \subseteq X_2 \times X_3$ sa funkcijama pripadnosti $\mu_{\tilde{R}}(x_1, x_2)$ i $\mu_{\tilde{S}}(x_2, x_3)$, funkcija pripadnosti $\mu_{\tilde{R}\circ\tilde{S}}(x_1, x_3)$ kompozicije $\tilde{R} \circ \tilde{S}$ se definiše sa

$$\mu_{\tilde{R}\circ\tilde{S}}(x_1, x_3) = \sup_{x_2 \in X_2} min[\mu_{\tilde{R}}(x_1, x_2), \mu_{\tilde{S}}(x_2, x_3)] \quad \forall\, (x_1, x_3) \in X_1 \times X_3.$$

Napomena 1.3. U prethodnoj definiciji za kompoziciju, ukoliko su fazi relacije $\tilde{R}$ i $\tilde{S}$ sa konačnim nosačem, onda se supremum zameni maksimumom.

Primer 1.6. Neka su date dve binarne fazi relacije $\tilde{R} \subseteq X_1 \times X_2$ i $\tilde{S} \subseteq X_2 \times X_3$ u tabeli 1.3. i 1.4. respektivno, definisane na Dekartovom proizvodu univerzalnih skupova $X_1 = \{a_1, b_1\}$, $X_2 = \{a_2, b_2, c_2\}$ i $X_3 = \{a_3, b_3\}$. Rezultati dobijeni primenom kompozicije $\tilde{R} \circ \tilde{S} \subseteq X_1 \times X_3$ su dati u tabeli 1.5, a sledi i postupak za računanje stepena pripadnosti $\mu_{\tilde{R}\circ\tilde{S}}(a_1, a_3)$.

$\tilde{R}$:

x_1 \ x_2	a_2	b_2	c_2
a_1	0.2	0.6	0.9
b_1	0.3	0.7	1
	$\mu_{\tilde{R}}(x_1, x_2)$		

Tabela 1.3. Binarna fazi relacija $\tilde{R}$

$\tilde{S}$:

x_2 \ x_3	a_3	b_3
a_2	0.1	0.4
b_2	0.5	0.6
c_2	0.7	0.8
	$\mu_{\tilde{S}}(x_2, x_3)$	

Tabela 1.4. Binarna fazi relacija $\tilde{S}$

x_1 \ x_3	a_3	b_3
a_1	0.7	0.8
b_1	0.7	0.8
	$\mu_{\tilde{R}\circ\tilde{S}}(x_1, x_3)$	

$\tilde{R} \circ \tilde{S}$:

Tabela 1.5. Kompozicija $\tilde{R} \circ \tilde{S}$

$$\mu_{\tilde{R}\circ\tilde{S}}(a_1, a_3) = max[min\ \left(\mu_{\tilde{R}}(a_1, a_2), \mu_{\tilde{S}}(a_2, a_3)\right),$$

$$min\ \left(\mu_{\tilde{R}}(a_1, b_2), \mu_{\tilde{S}}(b_2, a_3)\right),$$

$$min\ (\mu_{\tilde{R}}(a_1, c_2), \mu_{\tilde{S}}(c_2, a_3))]$$

$$= max\ [min(0.2,0.1)\ , min(0.6,0.5), min(0.9,0.7)] = max[0.1,0.5,0.7] = 0.7$$

2. Osnovna fazi aritmetika

U ovom poglavlju je dat pregled pojmova vezanih za fazi brojeve i fazi vektore. Opisani su neki elementarni primeri fazi brojeva: linearni, Gausovi, kvazi-Gausovi, kvadratni, eksponencijalni i kvazi-eksponencijalni. Predstavljen je princip proširenja kao pristup za prenošenje operacija sabiranja, oduzimanja, množenja i deljenja sa klasičnih na fazi brojeve. Takođe, navedeni su i upoređeni koncepti L-R, diskretnih i dekompozabilnih fazi brojeva, kao i operacija nad na njima. Sve je ilustrovano originalnim primerima. Literatura korišćena za ovo poglavlje je [1,2,4,9,10,14,21,22,27].

2.1. Fazi brojevi i fazi vektori

Od svih tipova fazi skupova najčešće korišćeni pri modelovanju realnih situacija su upravo oni koji su definisani na univerzalnom skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$. U specijalnom slučaju takvi skupovi se nazivaju fazi brojevi. Slično, fazi vektori se mogu uvesti kao specijalna klasa fazi relacija definisanih na $\mathbb{R}^n$.

2.1.1. Fazi brojevi

Sledi definicija i osnovne karakteristike fazi brojeva.

Definicija 2.1. [9] Fazi skup $\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$ se zove fazi broj $\tilde{p}$ ako zadovoljava sledeće uslove:

1. $\tilde{P}$ je normalizovan, tj. $hgt(\tilde{P}) = 1$
2. $\tilde{P}$ je konveksan
3. postoji tačno jedno $\bar{x} \in \mathbb{R}$ takvo da $\mu_{\tilde{P}}(\bar{x}) = 1$, tj. $core(\tilde{P}) = \bar{x}$
4. funkcija pripadnosti $\mu_{\tilde{P}}(x),\ x \in \mathbb{R}$ je bar po delovima neprekidna.

Definicija 2.2. [9] Vrednost $\bar{x}$ koja pokazuje maksimalni stepen pripadnosti, $\mu_{\tilde{P}}(\bar{x}) = 1$, se naziva modalna vrednost fazi broja $\tilde{p}$.

Napomena 2.1. Skup svih fazi brojeva na univerzalnom skupu $\mathbb{R}$ se označava sa $\tilde{\mathcal{P}}'(\mathbb{R})$.

Definicija 2.3. [9] Fazi broj $\tilde{p} \in \tilde{\mathcal{P}}'(\mathbb{R})$ je simetričan ako njegova funkcija pripadnosti $\mu_{\tilde{p}}(x)$ zadovoljava

$$\mu_{\tilde{p}}(\bar{x} + x) = \mu_{\tilde{p}}(\bar{x} - x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Definicija 2.4. [9] Za fazi broj $\tilde{p} \in \tilde{\mathcal{P}}'(\mathbb{R})$ se kaže da je (strogo) pozitivan, u oznaci $\tilde{p} > 0$ ako je $supp(\tilde{p}) \subseteq (0, \infty)$ ili (strogo) negativan, u oznaci $\tilde{p} < 0$ ako je $supp(\tilde{p}) \subseteq (-\infty, 0)$.

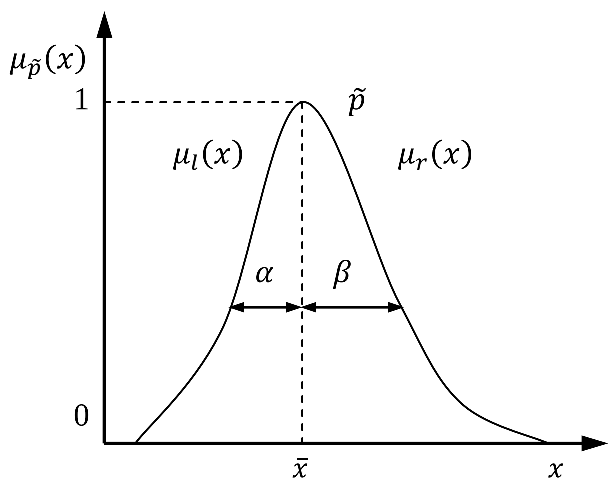
Definicija 2.5. [9] Fazi broj $\tilde{p} \in \tilde{\mathcal{P}}'(\mathbb{R})$ se zove (fazi) nula broj, u oznaci $sgn(\tilde{p}) = 0$ ako nije ni pozitivan ni negativan, odnosno ako $0 \in supp(\tilde{p})$.

2.1.1.1. L-R fazi brojevi

Predstvaljaju najvažniji tip fazi brojeva (uvedeni su u [1,4]). Osnovna ideja L-R reprezentacije fazi brojeva je da se funkcija pripadnosti $\mu_{\tilde{p}}(x)$ fazi broja $\tilde{p}$ podeli na dva dela $\mu_l(x)$ i $\mu_r(x)$, levo i desno od modalne vrednosti $\bar{x}$. Funkcija pripadnosti $\mu_{\tilde{p}}(x)$ se onda može predstaviti preko takozvanih referentnih funkcija (eng. *reference functions*) odnosno funkcija oblika, L i R u sledećoj formi

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \begin{cases} \mu_l(x) = L\left[\dfrac{\bar{x} - x}{\alpha}\right] & za \quad x < \bar{x} \\ \mu_r(x) = R\left[\dfrac{x - \bar{x}}{\beta}\right] & za \quad x \geq \bar{x}. \end{cases}$$

gde α i β predstavljaju odstupanja u levu, odnosno, desnu stranu od $\bar{x}$ (slika 2.1.). L-R fazi broj se u skraćenoj formi može zapisati sa $\tilde{p} = \langle \bar{x}, \alpha, \beta \rangle_{L,R}$.



Slika 2.1. L-R reprezentacija fazi broja $\tilde{p}$

Da bi funkcije $L(u)$ i $R(u)$, $u \in \mathbb{R}_0^+$, bile referentne funkcije za L-R fazi brojeve treba da zadovoljavaju sledeće uslove:

1. $L(u) \in [0,1]$ za svako u i $R(u) \in [0,1]$ za svako u
2. $L(0) = R(0) = 1$
3. $L(u)$ i $R(u)$ su opadajuće na intervalu $[0, \infty)$

4. $L(1) = 0$ ako $min_u\, L(u) = 0$, $\lim_{u\mapsto\infty} L(u) = 0$ ako $L(u) > 0$ za svako u,
   $R(1) = 0$ ako $min_u\, R(u) = 0$, $\lim_{u\mapsto\infty} R(u) = 0$ ako $R(u) > 0$ za svako u.

Definicija 2.6. [9] L-R fazi broj je semi-simetričan ako su referentne funkcije L i R identične, tj. $L(u) = R(u)$ za svako $u \in \mathbb{R}_0^+$. Ukoliko su i vrednosti α i β jednake, L-R fazi broj je simetričan.

U nastavku se navode primeri fazi brojeva koji se često sreću u primenjenoj fazi aritmetici a predstavljaju specijalan slučaj L-R fazi brojeva.

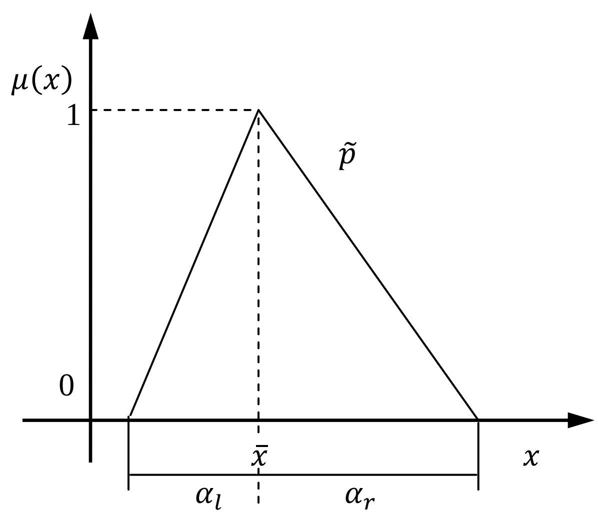
Primer 2.1. [9] **Trougaoni (linearni) fazi broj**

Zbog svoje prilično jednostavne funkcije pripadnosti linearnog tipa, trougaoni (linearni) fazi broj je jedan od najčešće korišćenih fazi brojeva. Trougaoni fazi broj se u skraćenoj formi označava sa $\tilde{p} = tfn(\bar{x}, \alpha_l, \alpha_r)$, gde $\bar{x}$ predstavlja modalnu vrednost fazi broja, a α_l i α_r odstupanje sa leve, odnosno, desne strane od modalne vrednosti, dok se funkcija pripadnosti (slika 2.1.) definiše na sledeći način:

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x-\bar{x}}{\alpha_l} & za \quad \bar{x} - \alpha_l < x < \bar{x} \\ 1 - \frac{x-\bar{x}}{\alpha_r} & za \quad \bar{x} \le x < \bar{x} + \alpha_r \\ 0 & inače \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Skup vrednosti iz univerzalnog skupa $\mathbb{R}$ koje pripadaju fazi broju $\tilde{p}$ se označava kao interval W fazi broja $\tilde{p}$ i definiše sa

$$W = [w_l, w_r] = [\,\bar{x} - \alpha_l, \bar{x} + \alpha_r] = supp(\tilde{p}) \cup \{\,\bar{x} - \alpha_l, \bar{x} + \alpha_r\}.$$

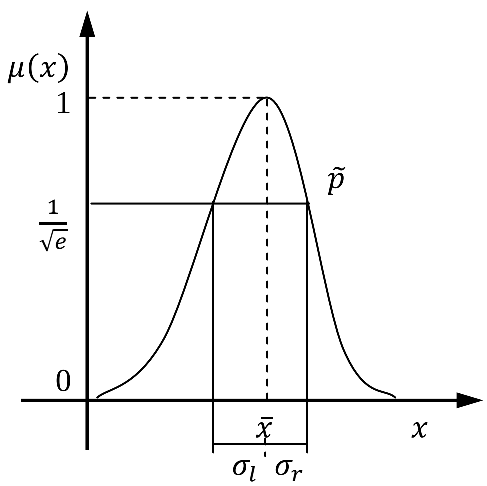


Slika 2.2. Trougaoni fazi broj

Primer 2.2. [9] **Gausov fazi broj**

Funkcija pripadnosti ovog fazi broja je definisana normalizovanom i asimetričnom Gausovom funkcijom. Gausov fazi broj se u skraćenoj formi označava sa $\tilde{p} = gfn(\bar{x}, \sigma_l, \sigma_r)$, gde $\bar{x}$ predstavlja modalnu vrednost fazi broja a σ_l i σ_r odstupanja sa leve, odnosno, desne strane koja odgovaraju standardnoj devijaciji kod Gausove raspodele, dok se funkcija pripadnosti (slika 2.3.) definiše na sledeći način:

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_l^2}} & za \quad x < \bar{x} \\ e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_r^2}} & za \quad x \geq \bar{x} \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



Slika 2.3. Gausov fazi broj

Primer 2.3. [9] **Kvazi -Gausov fazi broj**

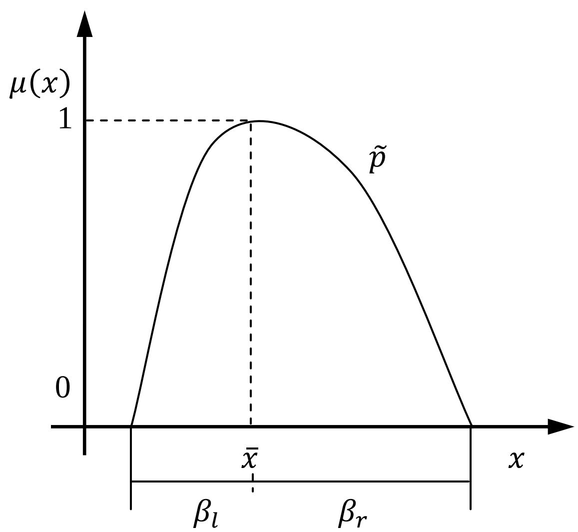
Kvazi-Gausov fazi broj se definiše iz praktičnih razloga a dobija se odsecanjem Gausovog fazi broja za $x < \bar{x} - 3\sigma_l$ i $x > \bar{x} + 3\sigma_r$. Tačnije, stepeni pripadnosti $\mu_{\tilde{p}}(x)$ sa kojima vrednosti $x < \bar{x} - 3\sigma_l$ i $x > \bar{x} + 3\sigma_r$ univerzalnog skupa $\mathbb{R}$ pripadaju fazi broju $\tilde{p}$ su manji od 0.01, pa se zanemaruju. Za prikaz kvazi-Gausovog fazi broja se koristi oznaka $gfn^*(\bar{x}, \sigma_l, \sigma_r)$, a funkcija pripadnosti se definiše kao:

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_l^2}} & za \quad \bar{x} - 3\sigma_l < x < \bar{x} \\ e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_r^2}} & za \quad \bar{x} \leq x < \bar{x} + 3\sigma_r \\ 0 & inače \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Primer 2.4. [9] **Kvadratni fazi broj**

Kvadratni fazi broj, u oznaci $\tilde{p} = qfn(\bar{x}, \beta_l, \beta_r)$, gde je $\bar{x}$ modalna vrednost a β_l i β_r odstupanja sa leve, odnosno desne strane modalne vrednosti, se definiše preko funkcije pripadnosti (slika 2.4.) date sa:

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{(x-\bar{x})^2}{{\beta_l}^2} & za \quad \bar{x} - \beta_l < x < \bar{x} \\ 1 - \frac{(x-\bar{x})^2}{{\beta_r}^2} & za \quad \bar{x} \le x < \bar{x} + \beta_r \\ 0 & inače \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

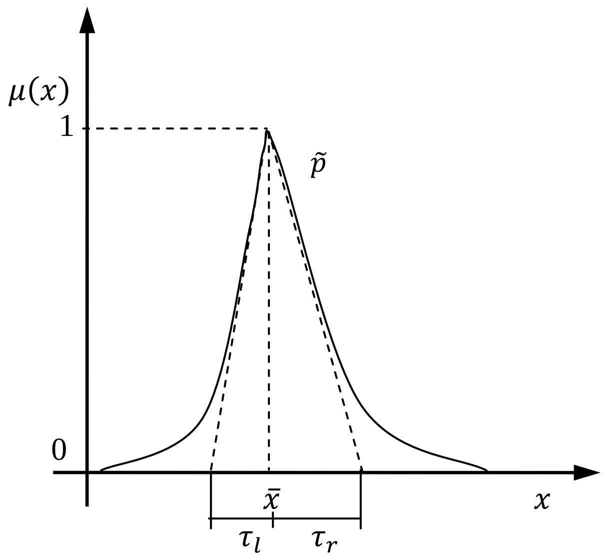


Slika 2.4. Kvadratni fazi broj

Primer 2.5. [9] **Eksponencijalni fazi broj**

Eksponencijalni fazi broj se označava sa $\tilde{p} = efn(\bar{x}, \tau_l, \tau_r)$, gde $\bar{x}$ predstavlja modalnu vrednost a τ_l i τ_r odstupanja u levu i desnu stranu od modalne vrednosti. Njegova funkcija pripadnosti (slika 2.4.) je eksponencijalnog tipa a definiše se kao:

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x-\bar{x}}{\tau_l}} & za \quad x < \bar{x} \\ e^{-\frac{x-\bar{x}}{\tau_r}} & za \quad x \ge \bar{x} \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



Slika 2.5. Eksponencijalni fazi broj

Primer 2.6. [9] **Kvazi-eksponencijalni fazi broj**

Slično kao i kod Gausovog fazi broja i ovde se definiše kvazi-eksponencijalni fazi broj kao eksponencijalni fazi broj sa konačnim nosačem, a dobija se odsecanjem eksponencijalnog fazi broja za $x < \bar{x} - 4.5\tau_l$ i $x > \bar{x} + 4.5\tau_r$. Tačnije, stepeni pripadnosti $\mu_{\tilde{p}}(x)$ sa kojima vrednosti $x < \bar{x} - 4.5\tau_l$ i $x > \bar{x} + 4.5\tau_r$ univerzalnog skupa $\mathbb{R}$ pripadaju fazi broju $\tilde{p}$ su manji od 0.01, pa se zanemaruju. Za prikaz kvazi-eksponencijalnog fazi broja se koristi oznaka $efn^*(\bar{x}, \tau_l, \tau_r)$ a funkcija pripadnosti je data sa:

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x-\bar{x}}{\tau_l}} & za \quad \bar{x} - 4.5\tau_l < x < \bar{x} \\ e^{-\frac{x-\bar{x}}{\tau_r}} & za \quad \bar{x} \le x < \bar{x} + 4.5\tau_r \\ 0 & \quad inače \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Napomena 2.2. Kao što je interval W definisan kod trougaonih fazi brojeva, analogno se definiše i za kvazi-eksponencijalne, kvadratne i kvazi-Gausove fazi brojeve.

2.1.1.2. Diskretni fazi brojevi

Diskretni brojevi se prvi put pojavljuju u [10,14]. Ideja se zasniva na diskretizaciji neprekidne funkcije pripadnosti i predstavljanju fazi brojeva preko diskretnih fazi skupova.

Diskretizacija funkcije pripadnosti $\mu_{\tilde{p}}(x)$ fazi broja $\tilde{p}$ se vrši tako što se izvrši ekvidistantna podela μ-ose na intervale konačne dužine.

Neka je μ-osa podeljena na m intervala dužine $\Delta\mu = \frac{1}{m}$, gde se m naziva diskretizacioni broj. Diskretizacione tačke su date sa $\mu_j = \frac{j}{m}$, $j = 0,1,\dots,m$ i imaju osobine

$$\mu_0 = 1,\ \ \mu_m = 1,\ \ \mu_{j+1} = \mu_j + \Delta\mu,\ \ j = 0,1,\dots,m-1.$$

Tada se fazi broj $\tilde{p}$ može predstaviti u diskretnom obliku kao diskretni fazi skup

$$\tilde{P}^* = \left\{\left(a^{(0)},\mu_0\right),\left(a^{(1)},\mu_1\right),\dots,\left(a^{(m)},\mu_m\right),\left(b^{(m-1)},\mu_{m-1}\right),\left(b^{(m-2)},\mu_{m-2}\right),\dots,\left(b^{(0)},\mu_0\right)\right\}$$

gde je $\left(a^{(m)},\mu_m\right) = \left(b^{(m)},\mu_m\right)$ a $a^{(j)}$ i $b^{(j)}$, $j = 0,1,\dots,m$ zadovoljavaju sledeće jednačine (slika 2.6.):

$$\mu_{\tilde{p}}\left(a^{(j)}\right) = \mu_j \text{ i } \left.\frac{d\mu_{\tilde{p}}(x)}{dx}\right|_{x=a^{(j)}} > 0,\ \ j = 1,2,\dots,m-1,$$

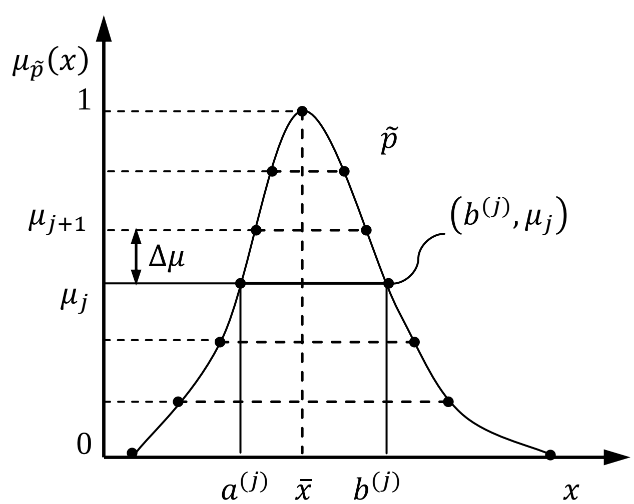
$$\mu_{\tilde{p}}\left(b^{(j)}\right) = \mu_j \text{ i } \left.\frac{d\mu_{\tilde{p}}(x)}{dx}\right|_{x=b^{(j)}} < 0,\ \ j = 1,2,\dots,m-1,$$

$$a^{(0)} = w_l,\ \ b^{(0)} = w_r \ \text{ gde } \ (w_l, w_r) = supp(\tilde{p}),$$

$$a^{(m)} = b^{(m)} = \bar{x} = core(\tilde{p}).$$

Ovde w_l i w_r odgovaraju odstupanjima fazi brojeva, odnosno granicama intervala W kao što je već uvedeno kod trougaonih fazi brojeva.

Napomena 2.3. Diskretni fazi skup sadrži $2m+1$ element, koji su navedeni u rastućem redosledu.



Slika 2.6. Diskretizacija fazi broja $\tilde{p}$

Napomena 2.4. Ukoliko se zahteva ekvidistantna diskretizacija, moguće je izvršiti podelu i x-ose, ali se ipak daje prednost diskretizaciji μ-ose. Razlozi su sledeći: diskretna reprezentacija fazi broja $\tilde{p}$ uvek uključuje njegovu modalnu vrednost i granične vrednosti, za sve fazi parametre je moguće napraviti istu podelu jer funkcija pripadnosti $\mu(x)$ uzima vrednosti iz intervala $[0,1]$ i diskretizacioni interval $\Delta\mu$ je invarijantan u odnosu na aritmetičke operacije.

2.1.1.3. Dekompozabilni fazi brojevi

Koncept dekompozabilnih fazi brojeva ([21]) potiče od teoreme dekompozicije, čija formulacija i dokaz slede u nastavku.

Teorema 2.1. [22] Za svaki fazi podskup $\tilde{A}$ važi

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha cut_{\alpha}(\tilde{A}),$$

gde je $\cup$ unija fazi skupova.

Dokaz: Neka je x proizvoljan fiksan element iz X. Ako se uvede oznaka $\mu_{\tilde{A}}(x) = r$, dobija se

$$\mu_{\bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha cut_{\alpha}(\tilde{A})}(x) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \mu_{\alpha cut_{\alpha}(\tilde{A})}(x) = max\left(\sup_{\alpha\in[0,r]} \mu_{\alpha cut_{\alpha}(\tilde{A})}(x) \, , \, \sup_{\alpha\in(r,1]} \mu_{\alpha cut_{\alpha}(\tilde{A})}(x) \right).$$

Kako je za $\alpha \in [0, r]$ uvek $\mu_{\tilde{A}}(x) = r \geq \alpha$, to je $\mu_{\alpha cut_{\alpha}(\tilde{A})} = \alpha$, a za $\alpha \in (r, 1]$ uvek je $\mu_{\tilde{A}}(x) = r < \alpha$, pa je $\mu_{\alpha cut_{\alpha}(\tilde{A})} = 0$, te važi

$$\mu_{\bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha cut_{\alpha}(\tilde{A})}(x) = \sup_{\alpha\in[0,r]} \alpha = r = \mu_{\tilde{A}}(x).$$

□

Ova teorema važi i za bilo koji fazi broj $\tilde{p}$ kao specijalni slučaj fazi skupa. Tada se funkcija pripadnosti $\mu_{\tilde{p}}(x)$ može na jedinstven način zapisati preko α-preseka u sledećem obliku

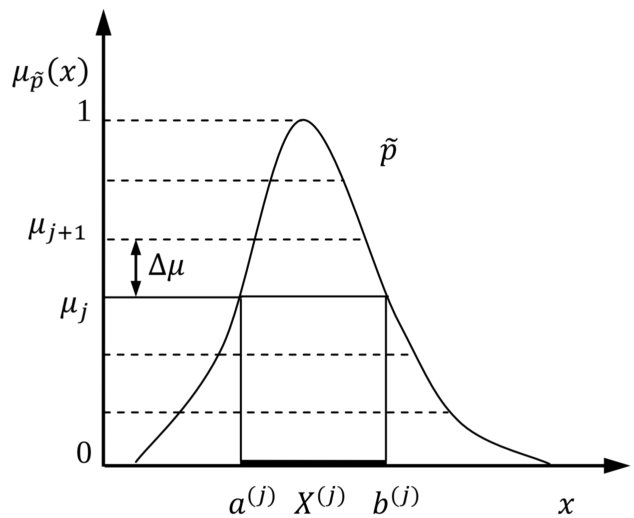
$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \alpha \mu_{cut_{\alpha}(\tilde{p})}(x).$$

Da bi se teorema dekompozicije mogla praktično primeniti potrebno je da se beskonačan broj α-preseka svede na konačan tako što se uzmu u obzir samo diskretne vrednosti $\alpha_j = \mu_j$. Zbog toga se interval $[0,1]$ deli na m intervala dužine $\Delta\mu = \frac{1}{m}$, gde je m dekompozicioni broj. Diskretne vrednosti su date sa $\mu_j = \frac{j}{m}$, $j = 0,1, \dots, m$ i imaju osobine $\mu_0 = 0$, $\mu_m = 1$, $\mu_{j+1} = \mu_j + \Delta\mu$, $j = 0,1, \dots, m-1$. Primenjujući teoremu sada na konačan broj α-preseka, fazi broj $\tilde{p}$ se može predstaviti u dekompozabilnoj formi preko skupa $P = \{X^{(0)}, X^{(1)}, \dots, X^{(m)}\}$ koji sadrži $m + 1$ interval

$$X^{(j)} = \left[a^{(j)}, b^{(j)}\right] = cut_{\mu_j}(\tilde{p}),\ \ a^{(j)} \leq b^{(j)},\ \ j = 1,2,\dots,m,$$

$$X^{(0)} = \left[a^{(0)}, b^{(0)}\right] = [w_l, w_r],\ \ (w_l, w_r) = supp(\tilde{p}).$$

kao što je prikazano na slici 2.7.



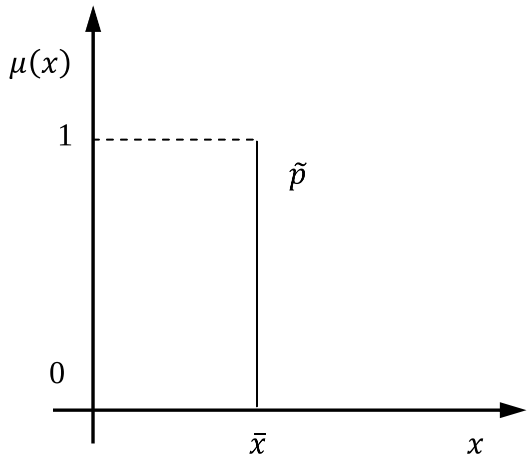
Slika 2.7. Dekompozicija fazi broja $\tilde{p}$ u intervale

2.1.1.4. Fazi singlton

S obzirom da su fazi skupovi uopštenje klasičnih skupova, tako se isto i klasični brojevi mogu posmatrati kao specijalna klasa fazi brojeva. Neka je $\bar{x}$ klasičan broj, tada se on može predstaviti kao fazi broj $\tilde{p} \in \tilde{\mathcal{P}}'(\mathbb{R})$ preko funkcije pripadnosti koja se definiše na sledeći način:

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \begin{cases} 0 & za \quad x < \bar{x} \\ 1 & za \quad x = \bar{x} \\ 0 & za \quad x > \bar{x} \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kada se klasični brojevi posmatraju kao fazi brojevi, onda se oni obično nazivaju fazi singltoni (slika 2.8.).

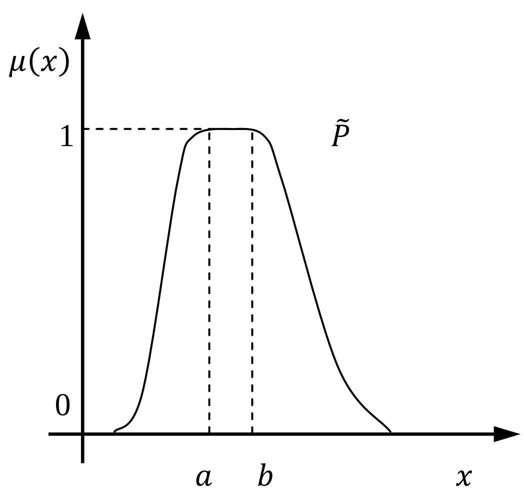


Slika 2.8. Klasični broj (fazi singlton)

2.1.1.5. Fazi interval

Ukoliko fazi skup ne zadovoljava neki od četiri uslova iz definicije fazi broja, onda se on ne može smatrati fazi brojem.

Definicija 2.7. [9] Fazi skup $\tilde{P}$ koji ne zadovoljava treći uslov iz definicije fazi broja, tj. da je $core(\tilde{P}) = \bar{x}$, ali se njegovo jezgro može izraziti preko zatvorenog intervala $[a, b] = core(\tilde{P})$, $a < b$ se naziva fazi interval (slika 2.9.).



Slika 2.9. Fazi interval

2.1.2. Fazi vektori

U nastavku su dati osnovni pojmovi vezani za fazi vektore.

Definicija 2.8. [9] n-arna fazi relacija $\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{R}^n)$ se zove n-dimenzionalni fazi vektor $\tilde{\boldsymbol{p}}$ ako zadovoljava sledeće uslove:

1. $\tilde{P}$ je normalizovana, tj. $hgt(\tilde{P}) = 1$.
2. $\tilde{P}$ je konveksna.
3. Postoji tačno jedan $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ sa osobinom $\mu_{\tilde{P}}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = 1$, tj. $core(\tilde{P}) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$
4. Funkcija pripadnosti $\mu_{\tilde{P}}: \mathbb{R}^n \to [0,1]$, je po delovima neprekidna.

Definicija 2.9. [9] Klasičan vektor $\bar{\boldsymbol{x}}$ definisan sa $\bar{\boldsymbol{x}} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]^T = core(\tilde{\boldsymbol{p}})$ i $\mu_{\tilde{\boldsymbol{p}}}(\bar{\boldsymbol{x}}) = 1$ se zove modalni vektor fazi vektora $\tilde{\boldsymbol{p}}$.

Napomena 2.5. Skup svih fazi vektora na univerzalnom skupu $\mathbb{R}^n$ se označava sa $\tilde{\mathcal{P}}'(\mathbb{R}^n)$.

2.2. Princip proširenja

S obzirom da su definisani svi neophodni pojmovi vezani za fazi brojeve, u nastavku se mogu predstaviti osnovni pristupi za izvođenje operacija nad fazi brojevima.

Zadeh-ov princip proširenja pruža opšti metod za prenošenje operacija sa klasičnim brojevima na fazi brojeve (videti [27]). Definiše se na sledeći način:

Neka je $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ proizvod univerzalnih skupova i F funkcija oblika $F: X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \mapsto Z$ koja preslikava element $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ proizvoda univerzalnih skupova u element $z = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ univerzalnog skupa Z. Dalje, neka je dato n fazi skupova $\tilde{A}_1 \subseteq X_1$, $\tilde{A}_2 \subseteq X_2$, ..., $\tilde{A}_n \subseteq X_n$ definisanih funkcijama pripadnosti $\mu_{\tilde{A}_1}(x_1)$, $\mu_{\tilde{A}_2}(x_2), \dots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)$, $x_i \in X_i$, $i = 1,2, \dots, n$. Tada je funkcija pripadnosti $\mu_{\tilde{B}}(z)$, $z \in Z$ fazi skupa $\tilde{B} \subseteq Z$ za $\tilde{B} = F(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n)$ definisana sa

$$\mu_{\tilde{B}}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{z=F(x_1,x_2,\dots,x_n)} \min\{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \mu_{\tilde{A}_2}(x_2), \dots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)\} & ako \quad \exists z = F(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ 0 & inače. \end{cases}$$

Napomena 2.6. U principu proširenja, ako svaki fazi skup $\tilde{A}_i, i = 1,2, \dots, n$ ima konačan nosač, onda se supremum zameni sa maksimum.

Napomena 2.7. Princip proširenja se može primeniti na diskretne fazi skupove, dobijene od fazi brojeva prilikom diskretizacije funkcije pripadnosti (odeljak 2.1.2.2.).

Primer 2.7. Posmatra se specijalan slučaj principa proširenja, gde $n = 1$. Neka je dat fazi skup $\tilde{A}$, definisan na univerzalnom skupu $X = \mathbb{Z}$ sa $\tilde{A} = \{(-1,0.2), (0,0.5), (1,1.0)(2,0.5), (3,0.2)\}$ i funkcija $z = F(x) = x^2 + 2$. Koristeći princip proširenja, fazi skup $\tilde{B}$, dat na univerzalnom skupu $Z = \mathbb{N}$ se dobija kao $\tilde{B} = F(\tilde{A}) = \tilde{A}^2 + 2 = \{(2,0.5), (3,1.0)(6,0.5), (11,0.2)\}$. Na primer, stepen pripadnosti $\mu_{\tilde{B}}(z = 3)$ se računa na sledeći način:

$$\mu_{\tilde{B}}(z = 3) = \sup_{F(x)=3} \mu_{\tilde{A}}(x) = max[\mu_{\tilde{A}}(x = -1), \mu_{\tilde{A}}(x = 1)] = max[0.2,1.0] = 1.0.$$

Primer 2.8. Sada se razmatra princip proširenja za $n = 2$. Neka su data dva fazi skupa $\tilde{A}_1$ i $\tilde{A}_2$, definisana na univerzalnim skupovima $X_1 = X_2 = \mathbb{Z}$ sa

$$\tilde{A}_1 = \{(0,0.1), (1,0.5), (2,1.0)(4,0.5), (6,0.1)\}$$

$$\tilde{A}_1 = \{(-1,0.2), (0,0.4), (1,1.0)(2,0.6), (3,0.2)\}$$

i funkcija

$$z = F(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1 + x_2.$$

Koristeći princip proširenja, fazi skup $\tilde{B}$, dat na univerzalnom skupu $Z = \mathbb{Q}$ se dobija kao

$$\tilde{B} = F(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) = \frac{1}{2}\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 = \{(-1,0.1), (-0.5,0.2), (0,0.2), (0.5,0.4), (1,0.4), (1.5,0.5),$$

$$(2,1.0), (2.5,0.5), (3,0.6), (3.5,0.2), (4,0.5), (5,0.2), (6,0.1)\}.$$

Kompletan postupak je prikazan u tabelama 2.1. i 2.2. U prvoj koloni i prvom redu tabele 2.1. su navedeni elementi x_1 i x_2 sa odgovarajućim stepenima pripadnosti, fazi skupova $\tilde{A}_1$ i $\tilde{A}_2$ respektivno. Tabela se sastoji od elemenata z, dobijenih primenom funkcije F na elemente x_1 i x_2, i njihovih stepena pripadnosti, dobijenih kao $min[\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \mu_{\tilde{A}_2}(x_2)]$. U tabeli 2.2. su date sve moguće vrednosti za z zajedno sa stepenima pripadnosti. S obzirom da za neke vrednosti z postoji više različitih stepena pripadnosti, za konačan stepen pripadnosti $\mu_{\tilde{B}}(z)$ se uzima njihov supremum i tako se dobija traženi skup $\tilde{B}$.

$x_1^{\langle \mu_{\tilde{A}_1}(x_1)\rangle}$ \ $x_2^{\langle \mu_{\tilde{A}_2}(x_2)\rangle}$	$-1^{\langle 0.2\rangle}$	$0^{\langle 0.4\rangle}$	$1^{\langle 1.0\rangle}$	$2^{\langle 0.6\rangle}$	$3^{\langle 0.2\rangle}$
$0^{\langle 0.1\rangle}$	$-1^{\langle 0.1\rangle}$	$0^{\langle 0.1\rangle}$	$1^{\langle 0.1\rangle}$	$2^{\langle 0.1\rangle}$	$3^{\langle 0.1\rangle}$
$1^{\langle 0.5\rangle}$	$-0.5^{\langle 0.2\rangle}$	$0.5^{\langle 0.4\rangle}$	$1.5^{\langle 0.5\rangle}$	$2.5^{\langle 0.5\rangle}$	$3.5^{\langle 0.2\rangle}$
$2^{\langle 1.0\rangle}$	$0^{\langle 0.2\rangle}$	$1^{\langle 0.4\rangle}$	$2^{\langle 1.0\rangle}$	$3^{\langle 0.6\rangle}$	$4^{\langle 0.2\rangle}$
$4^{\langle 0.5\rangle}$	$1^{\langle 0.2\rangle}$	$2^{\langle 0.4\rangle}$	$3^{\langle 0.5\rangle}$	$4^{\langle 0.5\rangle}$	$5^{\langle 0.2\rangle}$
$6^{\langle 0.1\rangle}$	$2^{\langle 0.1\rangle}$	$3^{\langle 0.1\rangle}$	$4^{\langle 0.1\rangle}$	$5^{\langle 0.1\rangle}$	$6^{\langle 0.1\rangle}$
	$z^{\langle min\left[\mu_{\tilde{A}_1}(x_1),\mu_{\tilde{A}_2}(x_2)\right]\rangle}$, $z = \frac{1}{2}x_1 + x_2$				

Tabela 2.1. Primena principa proširenja za primer 2.8. (korak I)

$z = \frac{1}{2}x_1 + x_2$	$min\left[\mu_{\tilde{A}_1}(x_1),\mu_{\tilde{A}_2}(x_2)\right]$	max
-1	0.1	0.1
-0.5	0.2	0.2
0	0.1, 0.2	0.2
0.5	0.4	0.4
1	0.1, 0.2, 0.4	0.4
1.5	0.5	0.5
2	0.1, 0.4, 1.0	1.0
2.5	0.5	0.5
3	0.1, 0.5, 0.6	0.6
3.5	0.2	0.2
4	0.1, 0.2, 0.5	0.5
5	0.1, 0.2	0.2
6	0.1	0.1
z		$\mu_{\tilde{B}}(z)$

Tabela 2.2. Primena principa proširenja za primer 2.8. (korak II)

2.3. Osnovne fazi aritmetičke operacije

Primarni cilj fazi aritmetike jeste da se definišu osnovne fazi aritmetičke operacije koje odgovaraju operacijama sabiranja, oduzimanja, množenja i deljenja kod klasičnih brojeva. Odnosno, za dva fazi broja $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$, data funkcijama pripadnosti $\mu_{\tilde{p}_1}$ i $\mu_{\tilde{p}_2}$, cilj osnovne fazi aritmetike je da se odredi funkcija pripadnosti $\mu_{\tilde{q}}(z)$, $z \in \mathbb{R}$ fazi broja $\tilde{q} = E(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ gde funkcija E predstavlja jednu od osnovnih aritmetičkih operacija:

$$E_a(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2, \qquad E_s(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \tilde{p}_1 - \tilde{p}_2,$$

$$E_m(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \tilde{p}_1 \tilde{p}_2, \qquad E_d(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \frac{\tilde{p}_1}{\tilde{p}_2}.$$

Formalni pristup za rešenje ovog problema pruža princip proširenja ([9]). Ukoliko se princip proširenja primeni na prethodne pretpostavke, gde su $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$ argumenti a E funkcija, funkcija pripadnosti $\mu_{\tilde{q}}(z)$ fazi broja z se može dobiti iz

$$\mu_{\tilde{q}}(z) = \sup_{z=E(x_1,x_2)} min\{\mu_{\tilde{p}_1}(x_1), \mu_{\tilde{p}_2}(x_2)\} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Problem koji se javlja prilikom direktne primene principa proširenja je što postoji beskonačan broj kombinacija ulaznih vrednosti x_1 i x_2, koje dovode do iste izlazne vrednosti z a da se pritom mogu dobiti različiti stepeni pripadnosti. Da bi se pronašao konačni stepen pripadnosti $\mu_{\tilde{q}}(z)$ za element z, potrebno je naći njihov supremum. Primarni razlog zbog kog dolazi do ovog problema jeste taj što nisu iskorišćene karakteristične osobine koje kvalifikuju fazi skupove kao fazi brojeve. U nastavku su predstavljena tri pristupa za praktičnu implementaciju principa proširenja za osnovne fazi aritmetičke operacije prethodno navedene.

2.3.1. Osnovne operacije nad L-R fazi brojevima

- Sabiranje L-R fazi brojeva ([9])

Neka su data dva L-R fazi broja $\tilde{p}_1 = \langle \bar{x}_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_{L,R}$ i $\tilde{p}_2 = \langle \bar{x}_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle_{L,R}$ istog tipa, tj., istih referentnih funkcija. Suma $E_a(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \tilde{q} = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2$ je opet L-R fazi broj tog tipa oblika $\tilde{q} = \langle \bar{z}, \alpha, \beta \rangle_{L,R}$, sa modalnom vrednošću $\bar{z} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$ i odstupanjima $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ i $\beta = \beta_1 + \beta_2$. Kraće se može zapisati

$$\underbrace{\langle \bar{x}_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_{L,R}}_{\tilde{p}_1} + \underbrace{\langle \bar{x}_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle_{L,R}}_{\tilde{p}_2} = \underbrace{\langle \overbrace{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}^{\bar{z}}, \overbrace{\alpha_1 + \alpha_2}^{\alpha}, \overbrace{\beta_1 + \beta_2}^{\beta} \rangle_{L,R}}_{\tilde{q}}.$$

Napomena 2.8. Da bi operacija sabiranja L-R fazi brojeva bila zatvorena, potrebno je da su fazi brojevi $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$ istog L-R tipa, što znači da su referentne funkcije sa leve strane, oba fazi broja L, a sa desne strane R.

- Oduzimanje L-R fazi brojeva ([9])

Prvo se definiše suprotan broj $-\tilde{p}$ L-R fazi broja $\tilde{p}$ sa $-\tilde{p} = -\langle \bar{x}, \alpha, \beta \rangle_{L,R} = \langle -\bar{x}, \beta, \alpha \rangle_{R,L}$. Iz postupka za izvođenje operacije sabiranja se dobija formula za oduzimanje $\tilde{q} = E_s(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \tilde{p}_1 - \tilde{p}_2$ L-R fazi brojeva:

$$\underbrace{\langle \bar{x}_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_{L,R}}_{\tilde{p}_1} - \underbrace{\langle \bar{x}_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle_{R,L}}_{\tilde{p}_2} = \underbrace{\langle \overbrace{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}^{\bar{z}}, \overbrace{\alpha_1 + \beta_2}^{\alpha}, \overbrace{\beta_1 + \alpha_2}^{\beta} \rangle_{L,R}}_{\tilde{q}}.$$

Napomena 2.9. Da bi operacija oduzimanja L-R fazi brojeva bila zatvorena, potrebno je da su fazi brojevi $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$ suprotnog L-R tipa.

- Množenje fazi brojeva ([9])

Ovde se dodatno pretpostavlja da su fazi brojevi $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$ koji su istog L-R tipa, pozitivni, tj. da važi $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2 > 0$. Prilikom izvođenja formule za množenje $\tilde{q} = E_m(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \tilde{p}_1\tilde{p}_2$ pojavljuje se kvadriranje, te ova operacija nije zatvorena za L-R fazi brojeve. Da bi se zaobišao ovaj nedostatak, tj. eliminisalo kvadriranje predlažu se dve vrste aproksimacija.

1. Tangentna aproksimacija ([2])
   U ovom slučaju se izostavlja kvadratni izraz i dobija formula

$$\underbrace{\langle \bar{x}_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_{L,R}}_{\tilde{p}_1} \cdot \underbrace{\langle \bar{x}_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle_{L,R}}_{\tilde{p}_2} \approx \underbrace{\langle \overbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2}^{\bar{z}}, \overbrace{\bar{x}_1\alpha_2 + \bar{x}_2\alpha_1}^{\alpha}, \overbrace{\bar{x}_1\beta_2 + \bar{x}_2\beta_1}^{\beta} \rangle_{L,R}}_{\tilde{q}_t}.$$

2. Sekantna aproksimacija ([2])
   Kvadratni izraz se zamenjuje linearnim i dobija formula

$$\underbrace{\langle \bar{x}_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_{L,R}}_{\tilde{p}_1} \cdot \underbrace{\langle \bar{x}_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle_{L,R}}_{\tilde{p}_2} \approx \underbrace{\langle \overbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2}^{\bar{z}}, \overbrace{\bar{x}_1\alpha_2 + \bar{x}_2\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2}^{\alpha}, \overbrace{\bar{x}_1\beta_2 + \bar{x}_2\beta_1 + \beta_1\beta_2}^{\beta} \rangle_{L,R}}_{\tilde{q}_s}.$$

Primer 2.9. Neka su dati pozitivni trougaoni fazi brojevi $\tilde{p}_1 = tfn(3,1,1)$ i $\tilde{p}_2 = tfn(5,2,5)$ koji se mogu zapisati u L-R obliku $\tilde{p}_1 = \langle 3,1,1 \rangle_{l,l}$ i $\tilde{p}_2 = \langle 5,2,5 \rangle_{l,l}$. Ako se koristi tangentna aproksimacija, proizvod $\tilde{q} = \tilde{p}_1\tilde{p}_2$ je aproksimiran pomoću trougaonog fazi broja $\tilde{q}_t = \langle 15,11,20 \rangle_{l,l}$, dok je u slučaju sekantne aproksimacije aproksimiran sa $\tilde{q}_s = \langle 15,9,25 \rangle_{l,l}$.

- Deljenje L-R fazi brojevi ([9])

Količnik $\tilde{q} = E_d(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \frac{\tilde{p}_1}{\tilde{p}_2}$ dva L-R fazi broja $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$ se može dobiti tako što se deljenje fazi brojeva $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$ zameni množenjem deljenika $\tilde{p}_1$ inverznim elementom delioca $\tilde{p}_2$, $\tilde{p}_2^{-1} = \frac{1}{\tilde{p}_2}$. Kako operacija inverzije L-R fazi brojeva nije zatvorena, neophodno je koristiti aproksimacije.

Ako se posmatra fazi broj $\tilde{p}$ koji je ili pozitivan ili negativan, tj. $0 \notin supp(\tilde{p})$, dat sa $\tilde{p} = \langle \bar{x}, \alpha, \beta \rangle_{L,R}$, tangentna aproksimacija $(\tilde{p}^{-1})_t$ za inverzni $\tilde{p}^{-1}$ se definiše kao

$$(\tilde{p}^{-1})_t = \langle \frac{1}{\bar{x}}, \frac{\alpha}{\bar{x}^2}, \frac{\beta}{\bar{x}^2} \rangle_{R,L} \approx \tilde{p}^{-1},$$

a sekantna aproksimacija $(\tilde{p}^{-1})_s$ kao

$$(\tilde{p}^{-1})_s = \langle \frac{1}{\bar{x}}, \frac{\beta}{\bar{x}(\bar{x}+\beta)}, \frac{\alpha}{\bar{x}(\bar{x}-\alpha)} \rangle_{R,L} \approx \tilde{p}^{-1}.$$

2.3.2. Osnovne operacije nad diskretnim fazi brojevima

Neka su data dva fazi broja $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$ proizvoljnog znaka. Potrebno je odrediti fazi broj $\tilde{q} = E(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \tilde{p}_1 * \tilde{p}_2,\ \ E \in \{E_a, E_s, E_m, E_d\},\ \ * \in \{+, -, \cdot, /\}$, koji se dobija primenom neke od osnovnih aritmetičkih operacija na fazi brojeve $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$. Ovaj postupak se sastoji od sledećih koraka ([9]):

1. Diskretizacija fazi brojeva $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$ (definisana u odeljku 2.1.1.2.) što dovodi do diskretnih fazi skupova

$$\tilde{P}_1^* = \left\{\left(a_1^{(0)}, \mu_0\right), \left(a_1^{(1)}, \mu_1\right), \dots, \left(a_1^{(m)}, \mu_m\right), \left(b_1^{(m-1)}, \mu_{m-1}\right), \left(b_1^{(m-2)}, \mu_{m-2}\right), \dots, \left(b_1^{(0)}, \mu_0\right)\right\}$$

$$\tilde{P}_2^* = \left\{\left(a_2^{(0)}, \mu_0\right), \left(a_2^{(1)}, \mu_1\right), \dots, \left(a_2^{(m)}, \mu_m\right), \left(b_2^{(m-1)}, \mu_{m-1}\right), \left(b_2^{(m-2)}, \mu_{m-2}\right), \dots, \left(b_2^{(0)}, \mu_0\right)\right\}.$$

2. Primena principa proširenja na diskretne fazi skupove $\tilde{P}_1^*$ i $\tilde{P}_2^*$ kao ulazne fazi skupove, dovodi do diskretnog fazi skupa

$$\tilde{Q}' = \left\{\left(z, \mu_{\tilde{Q}'}(z)\right) | z \in E(supp\left(\tilde{P}_1^*\right) \times supp\left(\tilde{P}_2^*\right))\right\},$$

$$\mu_{\tilde{Q}'}(z) = \sup_{z=E(x_1,x_2)} min\left\{\mu_{\tilde{P}_1^*}(x_1), \mu_{\tilde{P}_2^*}(x_2)\right\},$$

$$x_1 \in\ supp\left(\tilde{P}_1^*\right),\ \ x_2 \in\ supp\left(\tilde{P}_2^*\right).$$

3. Određivanje odgovarajuće diskretne reprezentacije $\tilde{Q}^*$ fazi broja $\tilde{q}$ odabirom $(2m+1)$-og stabilnog elementa $(z, \mu(z))$ iz skupa $\tilde{Q}'$ jer se može desiti da sadrži veći broj elemenata od navedenog, kao i da ne dovode do odgovarajućeg fazi broja koji poseduje sve potrebne osobine.

Definicija 2.10. [9] Vrednost $z = E(x_1, x_2),\ \ x_1 \in supp\left(\tilde{P}_1^*\right),\ \ x_2 \in supp\left(\tilde{P}_2^*\right)$ je stabilan element ako je dobijen kombinacijom elemenata $(x_1, \mu_{\tilde{P}_1^*}(x_1))$ i $(x_2, \mu_{\tilde{P}_2^*}(x_2))$ koji zadovoljavaju uslove:

a) Elementi $(x_1, \mu_{\tilde{P}_1^*}(x_1))$ i $(x_2, \mu_{\tilde{P}_2^*}(x_2))$ imaju isti stepen pripadnosti, tj. $\mu = \mu_{\tilde{P}_1^*}(x_1) = \mu_{\tilde{P}_2^*}(x_2)$. Ovo važi ako je $x_1 = x_1^{(j)} \in \left\{a_1^{(j)}, b_1^{(j)}\right\}$ i $x_2 = x_2^{(j)} \in \left\{a_2^{(j)}, b_2^{(j)}\right\}\ \ j = 0,1, \dots, m.$

b) Elementi $\left(x_1^{(j)}, \mu_j\right)$ i $\left(x_2^{(j)}, \mu_j\right)$ se nalaze na kompatibilnim krivama. U tabeli 2.3. je dat pregled uslova kompatibilnosti u zavisnosti od osnovne aritmetičke operacije i znakova klasičnih argumenata $x_1^{(j)}$ i $x_2^{(j)}$.

Osnovna operacija	Znak $x_1^{(j)}$ i $x_2^{(j)}$	Uslov kompatibilnosti
+	bilo koji	zadovoljava
-	bilo koji	ne zadovoljava
·	isti	zadovoljava
	različiti	ne zadovoljava
/	isti	ne zadovoljava
	različiti	zadovoljava

Tabela 2.3. Uslovi kompatibilnosti

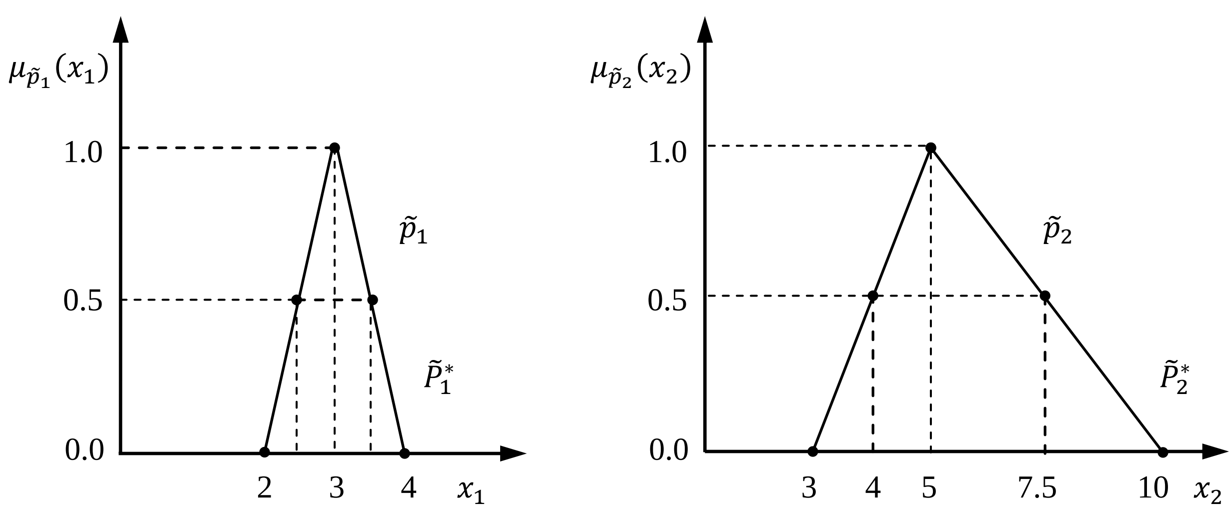
Napomena 2.10. Ako se vrši se operacija množenja ili deljenja, a neki od brojeva je fazi-nula broj (izuzev delioca), uslovi kompatibilnosti se menjaju.

Primer 2.10. Dati su pozitivni trougaoni fazi brojevi $\tilde{p}_1 = tfn(3,1,1)$ i $\tilde{p}_2 = tfn(5,2,5)$, prikazani na slici 2.10. Vrši se diskretizacija μ-ose za dekompozicioni broj $m = 2$, odnosno dužinu intervala $\Delta\mu = 0.5$. Dobijaju se diskretni skupovi

$$\tilde{P}_1^* = \{(2,0), (2.5,0.5), (3,1.0)(3.5,0.5), (4,0)\}$$

$$\tilde{P}_2^* = \{(3,0), (4,0.5), (5,1.0)(7.5,0.5), (10,0)\}$$

kao diskretne reprezentacije fazi brojeva $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$ (slika 2.10.).



Slika 2.10. Fazi brojevi $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$ i njihove diskretne reprezentacije $\tilde{P}_1^*$ i $\tilde{P}_2^*$ za $m = 2$

Osnovna operacija množenja $\tilde{q} = E_m(\tilde{p}_{1,}\tilde{p}_2) = \tilde{p}_1\tilde{p}_2$ se može dobiti primenom principa proširenja na diskretne fazi skupove $\tilde{P}_1^*$ i $\tilde{P}_2^*$, a prema tabelama 2.4. i 2.5.

$x_1^{\langle\mu_{\tilde{P}_1^*}(x_1)\rangle}$ \ $x_2^{\langle\mu_{\tilde{P}_{2'}^*}(x_2)\rangle}$	$3^{\langle 0\rangle}$	$4^{\langle 0.5\rangle}$	$5^{\langle 1.0\rangle}$	$7.5^{\langle 0.5\rangle}$	$10^{\langle 0\rangle}$
$2^{\langle 0\rangle}$	$6^{\langle 0\rangle}$	$8^{\langle 0\rangle}$	$10^{\langle 0\rangle}$	$15^{\langle 0\rangle}$	$20^{\langle 0\rangle}$
$2.5^{\langle 0.5\rangle}$	$7.5^{\langle 0\rangle}$	$10^{\langle 0.5\rangle}$	$12.5^{\langle 0.5\rangle}$	$18.75^{\langle 0.5\rangle}$	$25^{\langle 0\rangle}$
$3^{\langle 1.0\rangle}$	$9^{\langle 0\rangle}$	$12^{\langle 0.5\rangle}$	$15^{\langle 1.0\rangle}$	$22.5^{\langle 0.5\rangle}$	$30^{\langle 0\rangle}$
$3.5^{\langle 0.5\rangle}$	$10.5^{\langle 0\rangle}$	$14^{\langle 0.5\rangle}$	$17.5^{\langle 0.5\rangle}$	$26.25^{\langle 0.5\rangle}$	$35^{\langle 0\rangle}$
$4^{\langle 0\rangle}$	$12^{\langle 0\rangle}$	$16^{\langle 0\rangle}$	$20^{\langle 0\rangle}$	$30^{\langle 0\rangle}$	$40^{\langle 0\rangle}$
	$z^{\langle min[\mu_{\tilde{P}_1^*}(x_1),\mu_{\tilde{P}_{2'}^*}(x_2)]\rangle}$, $z = x_1x_2$				

Tabela 2.4. Primena principa proširenja za primer 2.10. (korak I)

$z = x_1x_2$	$min[\mu_{\tilde{P}_1^*}(x_1), \mu_{\tilde{P}_{2'}^*}(x_2)]$	*max*
6	0	0
7.5	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0, 0.5	0.5
10.5	0	0
12	0, 0.5	0.5
12.5	0.5	0.5
14	0.5	0.5
15	0,1.0	1
16	0	0
17.5	0.5	0.5
18.75	0.5	0.5
20	0	0
22.5	0.5	0.5
25	0	0
26.25	0.5	0.5
30	0	0
35	0	0
40	0	0
z		$\mu_{\tilde{Q}'}(z)$

Tabela 2.5. Primena principa proširenja za primer 2.10. (korak II)

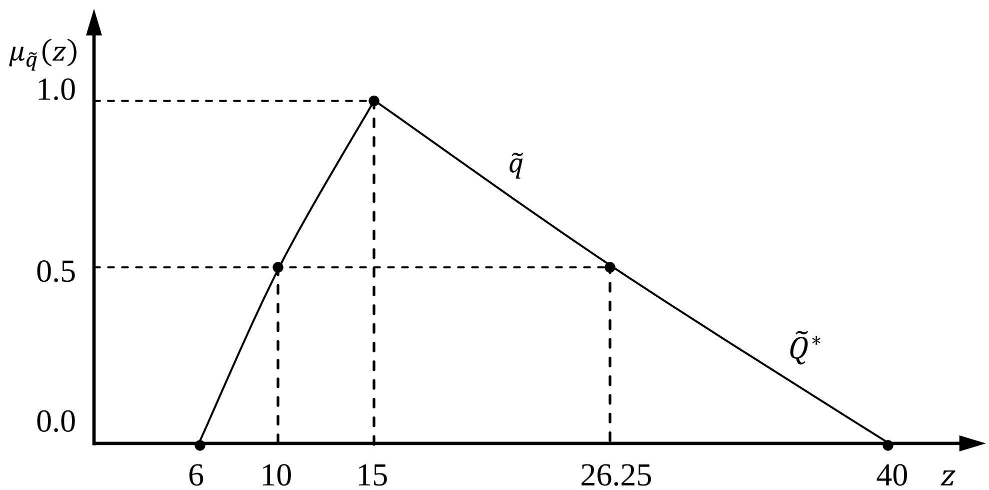
Kao rezultat se dobija diskretni fazi skup

$$\tilde{Q}' = \{(6,0), (7.5,0), (8,0), (9,0), (10,0.5), (10.5,0), (12,0.5), (12.5,0.5)(14,0.5), (15,1.0),$$

$$(16,0), (17.5,0.5), (18.75,0.5)(20,0), (22.5,0,5), (25,0), (26.25,0.5), (30,0)(35,0), (40,0)\}.$$

Međutim, sadrži više od $(2m + 1)$-og elementa, pa je potrebno izbaciti one koji nisu stabilni. Za svaki element iz skupa $\tilde{Q}'$ se proverava da li zadovoljava uslove iz definicije stabilnog elementa. Na primer, element $(6,0)$ je dobijen kombinacijom elemenata $(2,0) \in \tilde{P}_1^*$ i $(3,0) \in \tilde{P}_2^*$ koji imaju isti stepen pripadnosti i nalaze se na kompatibilnim krivama, pa pripada skupu $\tilde{Q}^*$, dok element $(7.5,0)$ dobijen kombinacijom $(2.5,0.5) \in \tilde{P}_1^*$ i $(3,0) \in \tilde{P}_2^*$ nije stabilan jer ne zadovoljava prvi uslov za stabilnost. Konačno, dobija se rešenje (slika 2.11.) dato sa

$$\tilde{Q}^* = \{(6,0), (10,0.5), (15,1.0), (26.25,0.5), (40,0)\}.$$



Slika 2.11. Proizvod $\tilde{q} = \tilde{p}_1\tilde{p}_2$ i njegova diskretna reprezentacija $\tilde{Q}^* = \tilde{P}_1^*\tilde{P}_2^*$ za $m = 2$

2.3.3. Osnovne operacije nad dekompozabilnim fazi brojevima

Osnovne operacije nad fazi brojevima $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$ se vrše primenom operacija na parove intervala $X_1^{(j)}$ i $X_2^{(j)}$ dekompozabilnih fazi brojeva P_1 i P_2, odvojeno za svaki nivo pripadnosti μ_j, $j = 0,1, \dots, m$. Rezultat osnovne operacije $\tilde{q} = E(\tilde{p}_{1,}\tilde{p}_2) = \tilde{p}_1 * \tilde{p}_2$, $* \in \{+, -, \cdot, /\}$ se može zapisati u dekompozabilnom obliku kao

$$Q = E(P_1, P_2) = P_1 * P_2 = \left\{Z^{(0)}, Z^{(1)}, \dots, Z^{(m)}\right\}$$

gde je

$$Z^{(j)} = \left[a^{(j)}, b^{(j)}\right] = \left[a_1^{(j)}, b_1^{(j)}\right] * \left[a_2^{(j)}, b_2^{(j)}\right] = X_1^{(j)} * X_2^{(j)}, \;\; j = 0,1, \dots, m.$$

S obzirom da su $X_1^{(j)}$ i $X_2^{(j)}$ intervali, osnovne operacije se vrše specijalnom aritmetikom, koja se zove intervalna aritmetika.

Osnovne operacije intervalne aritmetike se definišu sa ([9]):

- sabiranje $(*{:=}\, +)$

$$\left[a_1^{(j)}, b_1^{(j)}\right] + \left[a_2^{(j)}, b_2^{(j)}\right] = \left[a_1^{(j)} + a_2^{(j)}, b_1^{(j)} + b_2^{(j)}\right],$$

- oduzimanje $(*{:=}\, -)$

$$\left[a_1^{(j)}, b_1^{(j)}\right] - \left[a_2^{(j)}, b_2^{(j)}\right] = \left[a_1^{(j)} - b_2^{(j)}, b_1^{(j)} - a_2^{(j)}\right],$$

- množenje $(*{:=}\cdot)$

$$\left[a_1^{(j)}, b_1^{(j)}\right] \cdot \left[a_2^{(j)}, b_2^{(j)}\right] = \left[\min(M^{(j)}), \max(M^{(j)})\right],$$

$$M^{(j)} = \left\{a_1^{(j)} a_2^{(j)}, a_1^{(j)} b_2^{(j)}, b_1^{(j)} a_2^{(j)}, b_1^{(j)} b_2^{(j)}\right\},$$

- deljenje $(*{:=}/)$

$$\left[a_1^{(j)}, b_1^{(j)}\right] / \left[a_2^{(j)}, b_2^{(j)}\right] = \left[\min(D^{(j)}), \max(D^{(j)})\right],$$

$$D^{(j)} = \left\{a_1^{(j)}/a_2^{(j)}, a_1^{(j)}/b_2^{(j)}, b_1^{(j)}/a_2^{(j)}, b_1^{(j)}/b_2^{(j)}\right\}, \;\; 0 \notin \left[a_2^{(j)}, b_2^{(j)}\right].$$

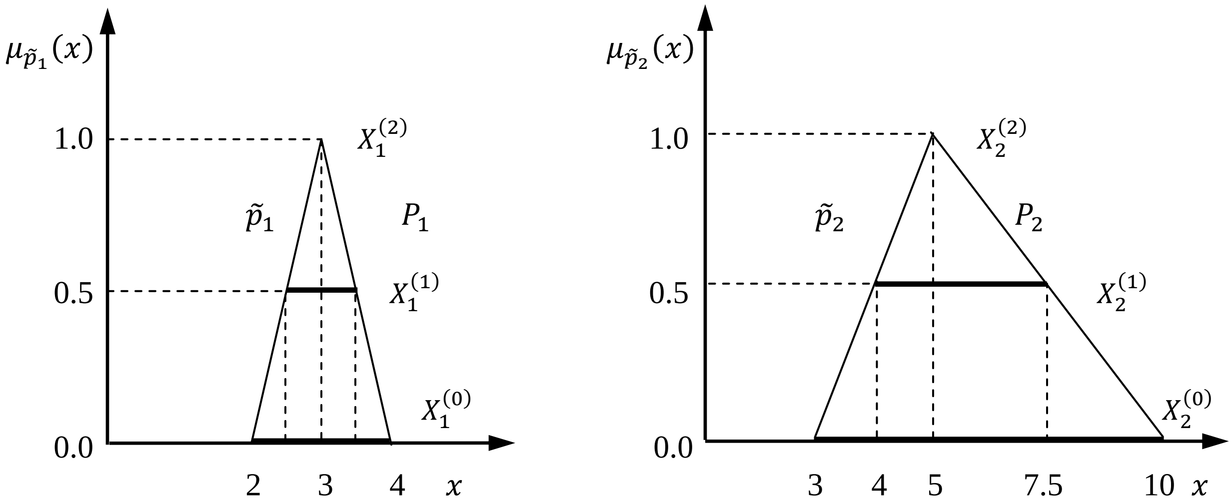
Napomena 2.11. Prethodne jednačine slede iz činjenice da je $E\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right) = X_1^{(j)} * X_2^{(j)}$ neprekidna funkcija nad kompaktnim skupom pa uzima minimalnu i maksimalnu vrednost. Interval $Z^{(j)} = X_1^{(j)} * X_2^{(j)}$ je ponovo zatvoren interval nad $\mathbb{R}$.

Primer 2.11. Dati su pozitivni trougaoni fazi brojevi $\tilde{p}_1 = tfn(3,1,1)$ i $\tilde{p}_2 = tfn(5,2,5)$, prikazani na slici 2.12. Neka je dekompozicioni broj $m = 2$, odnosno dužina intervala $\Delta\mu = 0.5$. Kao rezultat dekompozicije, dobijaju se skupovi intervala

$$P_1 = \{[2,4], [2.5,3.5], [3,3]\}$$

$$P_2 = \{[3,10], [4,7.5], [5,5]\}$$

kao dekompozabilne reprezentacije fazi brojeva $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$ (slika 2.12.).



Slika 2.12. Fazi brojevi $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$ i njihove dekompozabilne reprezentacije P_1 i P_2 za $m = 2$

Osnovna operacija množenja $\tilde{q} = E_m(\tilde{p}_{1,}\tilde{p}_2) = \tilde{p}_1\tilde{p}_2$ se može dobiti primenom intervalne aritmetike odvojeno na svakom nivou pripadnosti μ_j, $j = 0,1,2$:

$$\mu_0 = 0: \quad Z^{(0)} = X_1^{(0)} \cdot X_2^{(0)} = [2,4] \cdot [3,10] = [6,40]$$

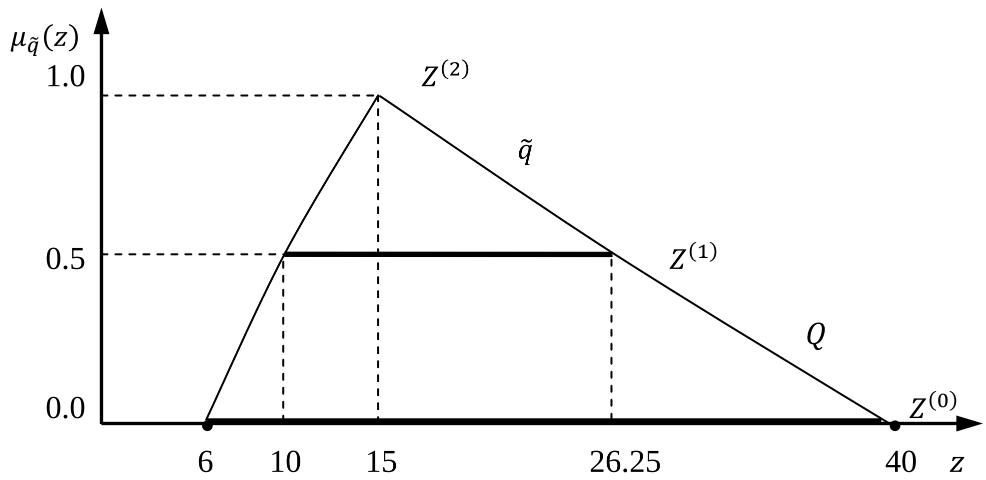
$$\mu_1 = 0.5: \quad Z^{(1)} = X_1^{(1)} \cdot X_2^{(1)} = [2.5,3.5] \cdot [4,7.5] = [10,26.25]$$

$$\mu_2 = 1: \quad Z^{(2)} = X_1^{(2)} \cdot X_2^{(2)} = [3,3] \cdot [5,5] = [15,15].$$

Konačno, proizvod $\tilde{q} = \tilde{p}_1\tilde{p}_2$ se dobija u dekompozabilnom obliku kao

$$Q = P_1 \cdot P_2 = \{Z^{(0)}, Z^{(1)}, Z^{(2)}\} = \{[6,40], [10,26.25], [15,15]\}$$

koji prikazan je na slici 2.13.



Slika 2.13. Proizvod $\tilde{q} = \tilde{p}_1\tilde{p}_2$ i njegova dekompozabilna reprezentacija $Q = P_1 \cdot P_2$ za $m = 2$

Prednost diskretnih i dekompozabilnih fazi brojeva u odnosu na L-R fazi brojeve je u njihovoj prakičnoj primeni. Oba koncepta su podjednako dobra, ali se zbog jednostavnije implementacije češće koristi dekompozicija, zasnovana na intervalnoj aritmetici.

3. Standardna fazi aritmetika

U ovom poglavlju je dat pregled standardne fazi aritmetike, koja se uvodi s ciljem procene fazi racionalnih izraza. Pored osnovnih definicija standardne fazi aritmetike, izložen je njen veliki nedostatak, a to je precenjivenje rezultata problema. Upravo u cilju rešavanja tog problema, uvode se pojmovi lokalnog i globalnog stepena precenjenosti, čiji pregled je takođe dat u ovom poglavlju. Literatura koja je korišćena pri izradi ovog poglavlja je [7,9].

3.1. Definicija standardne fazi aritmetike

Kao proširenje binarnih operacija osnovne fazi aritmetike, definiše se standardna fazi aritmetika da bi se procenili fazi racionalni izrazi oblika $f(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n)$, što podrazumeva uzastopno izvođenje više različitih osnovnih operacija. Posmatrani pristup je zasnovan na konceptu dekompozabilnih fazi brojeva. Elementi $\tilde{p}_i \in \tilde{\mathcal{P}}'(\mathbb{R})$ su fazi brojevi dati funkcijama pripadnosti $\mu_{\tilde{p}_i}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $i = 1,2, \dots, n$, a f je funkcija oblika $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Takođe se pretpostavlja da se fazi-vrednosni izraz može proceniti u konačnom broju koraka, tj. $f(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n)$ je konačan fazi racionalni izraz.

Postupak za procenu fazi racionalnih izraza se sastoji od sledećih koraka ([9]):

1. Dekompozicija ulaznih fazi brojeva

   U prvom koraku, interval $[0,1]$ μ-ose je podeljen na m intervala dužine $\Delta\mu = \frac{1}{m}$, a diskretne vrednosti μ_j $(m+1)$-og nivoa pripadnosti su date sa $\mu_j = \frac{j}{m}$, $j = 0,1, \dots, m$.
   U drugom koraku, argumenti $\tilde{p}_i$, $i = 1,2, \dots, n$, koji se takođe nazivaju i ulazni fazi brojevi, su razloženi na α-preseke što je dovelo do dekompozabilnih reprezentacija

$$P_i = \left\{X_i^{(0)}, X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(m)}\right\}, \ \ i = 1,2, \dots, n,$$

   fazi brojeva $\tilde{p}_i$, gde svaki skup P_i sadrži $m+1$ interval

$$X_i^{(j)} = \left[a_i^{(j)}, b_i^{(j)}\right] = cut_{\mu_j}(\tilde{p}_i), \ \ a_i^{(j)} \leq b_i^{(j)}, \ \ j = 1,2, \dots, m,$$

$$X_i^{(0)} = \left[a_i^{(0)}, b_i^{(0)}\right] = \left[w_{l_i}, w_{r_i}\right], \ \ \left(w_{l_i}, w_{r_i}\right) = supp(\tilde{p}_i).$$

2. Primena intervalne aritmetike

   Fazi racionalni izraz $\tilde{q} = f(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n)$ se dobija procenom intervalno-vrednosnih parametara

$$Z^{(j)} = f\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, \dots, X_n^{(j)}\right), \ \ j = 0,1, \dots, m$$

   odvojeno na svakom nivou pripadnosti μ_j. Procena ovih intervalnih racionalnih izraza se vrši pomoću osnovne intervalne aritmetike, a prema definicijama operacija sa dekompozabilnim brojevima datim u odeljku 2.3.3.

3. Ponovna kompozicija izlaznih intervala

   Kao rezultat primene intervalne aritmetike, vrednost fazi racionalnog izraza se dobija u dekompozabilnoj formi

$$Q = \left\{Z^{(0)}, Z^{(1)}, \cdots, Z^{(m)}\right\}.$$

   Vrednost $\tilde{q}$ fazi racionalnog izraza, koji se takođe naziva i izlazni fazi broj, se može dobiti ponovnom kompozicijom intervala $Z^{(j)}$, $j = 0,1, \cdots, m$ iz Q prema njihovim nivoima pripadnosti μ_j.

Primer 3.1. [9] Neka je dat fazi racionalni izraz

$$\tilde{q} = f(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \tilde{p}_4) = (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)(\tilde{p}_3 - \tilde{p}_4).$$

Tada je odgovarajući intervalni racionalni izraz

$$Z^{(j)} = f\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}, X_4^{(j)}\right) = \left(X_1^{(j)} + X_2^{(j)}\right)\left(X_3^{(j)} - X_4^{(j)}\right), \ \ j = 0,1, \cdots, m,$$

postupno procenjen za svako j na sledeći način:

$$Z_1^{(j)} = X_1^{(j)} + X_2^{(j)} = E_a\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right),$$

$$Z_2^{(j)} = X_3^{(j)} - X_4^{(j)} = E_s\left(X_3^{(j)}, X_4^{(j)}\right),$$

$$Z^{(j)} = Z_1^{(j)} \cdot Z_2^{(j)} = E_m\left(Z_1^{(j)}, Z_2^{(j)}\right).$$

3.2. Nedostaci i ograničenja standardne fazi aritmetike

Nedostatak standardne fazi aritmetike jeste precenjivanje rezultata koji zavise od oblika fazi racionalnog izraza.

Slede definicije pogodnih veličina za određivanje stepena precenjenosti.

Definicija 3.1. [9] Lokalni stepen precenjenosti na nivou pripadnosti μ_j se definiše sa

$$\Omega_{\square}^{(j)}\left(X^{(j)}\right)=\frac{wth\left[f_{\square}\left(X^{(j)}\right)\right]-wth\left[f\left(X^{(j)}\right)\right]}{wth\left[f\left(X^{(j)}\right)\right]}=\frac{wth\left(Z_{\square}^{(j)}\right)-wth\left(Z^{(j)}\right)}{wth\left(Z^{(j)}\right)}, j=0,1,\dots,m-1$$

gde operator “wth” predstavlja širinu intervala.

Lokalni stepen precenjenosti se uvodi da bi se kvantifikovao efekat precenjenosti, koji se pojavljuje prilikom procene fazi racionalnog izraza, datog u obliku “□”, upotrebom standardne fazi aritmetike.

Definicija 3.2. [9] Globalni stepen precenjenosti $\omega_{\square}(\tilde{p})$ je prosečna vrednost lokalnih stepena precenjenosti, na svim nivoima pripadnosti $\mu_j,\ j=0,1,\dots,m-1$, data sa

$$\omega_{\square}(\tilde{p})=\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\Omega_{\square}^{(j)}\left(X^{(j)}\right).$$

Globalni stepen precenjenosti se uvodi kao ukupna mera precenjenosti fazi racionalnog izraza. Iako je zavisnost globalnog stepena precenjenosti od dekompozicionog broja takva da je $\omega_{\square}(\tilde{p})$ bolji za veće vrednosti m, njegove prihvatljive aproksimacije se mogu dostići i za male vrednosti dekompozicionog broja.

Nedostatak standardne fazi aritmetike, kao i lokalni i globalni stepen precenjenosti su ilustrovani sledećim primerima.

Primer 3.2. [9] Neka je dat fazi raconalni izraz

$$f(\tilde{p})=\tilde{p}^3-2\tilde{p}^2-21\tilde{p}-18,$$

koji se procenjuje za ulazni fazi broj

$$\tilde{p}=tfn(1.5,1.5,1.5)$$

simetričnog trougaonog oblika, kao što je prikazano na slici 3.1.(a).

Kada se standardna fazi aritmetika primeni direktno na izraz u originalnom obliku

$$f_D(\tilde{p}) = \tilde{p}^3 - 2\tilde{p}^2 - 21\tilde{p} - 18,$$

dobija se fazi-vrednosni rezultat $f_D(\tilde{p})$, dat na slici 3.1.(b).

Fazi racionalni izraz se može zapisati i u Hornerovoj formi

$$f_H(\tilde{p}) = [(\tilde{p} - 2)\tilde{p} - 21]\tilde{p} - 18.$$

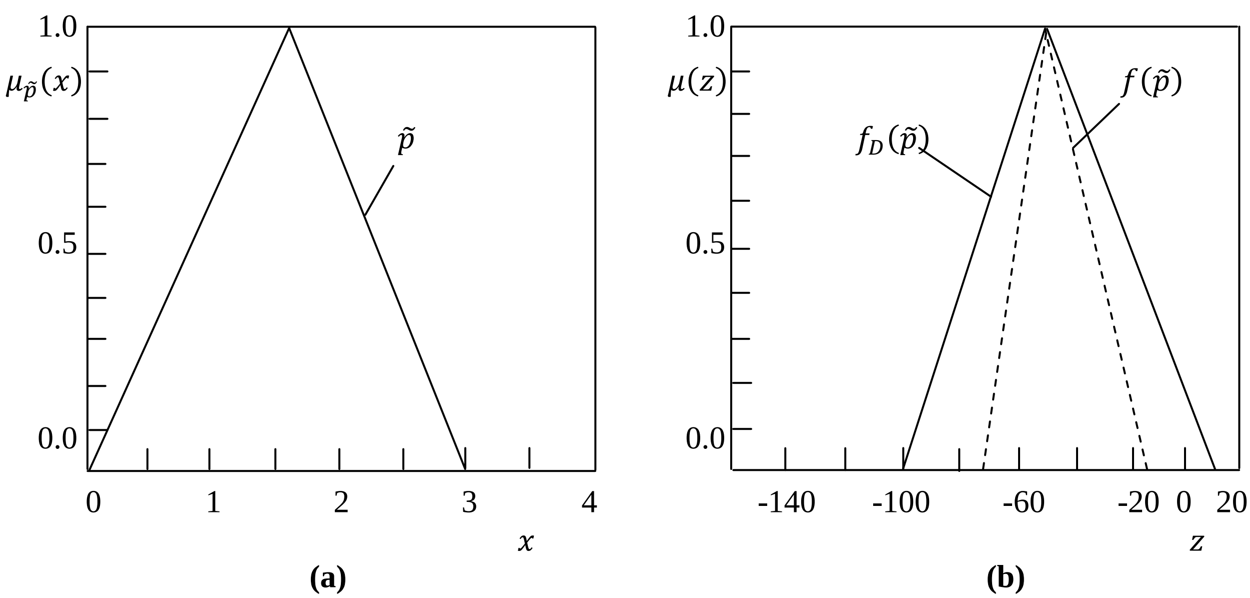
Procena izraza u ovoj formi dovodi do rezultata $f_H(\tilde{p})$, (slika 3.2.(a)).

Ako se sada prvobitni izraz proceni primenom standardne fazi aritmetike na njegov faktorizovani oblik

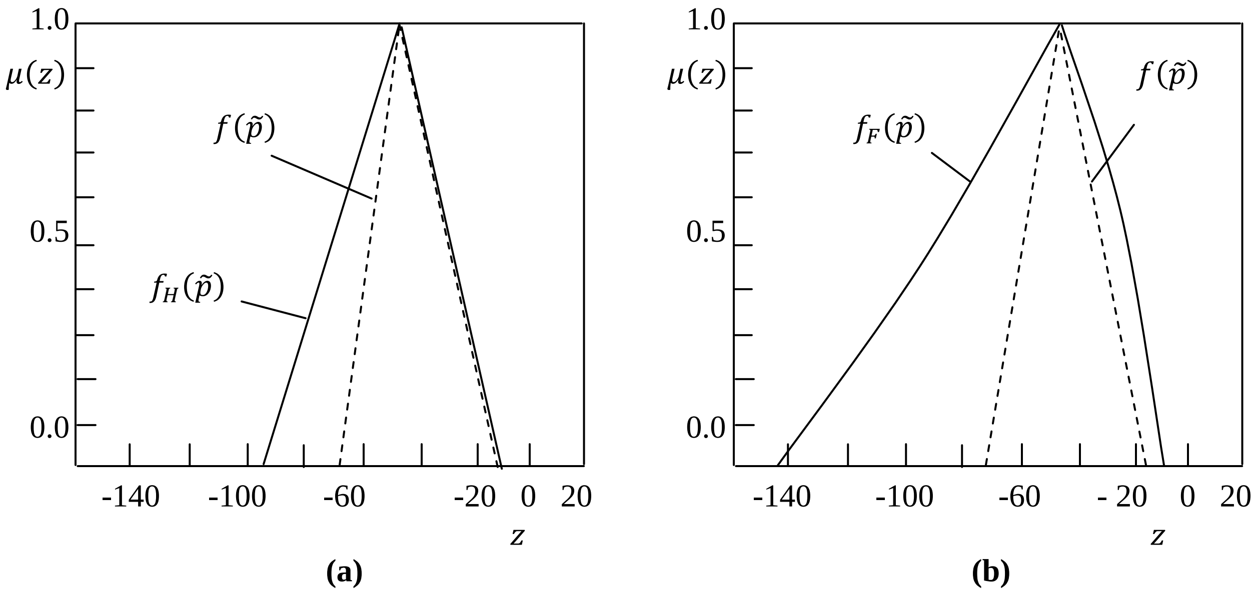
$$f_F(\tilde{p}) = (\tilde{p} + 3)(\tilde{p} + 1)(\tilde{p} - 6),$$

dobija se rezultat $f_F(\tilde{p})$, prikazan na slici 3.2.(b).

Radi poređenja, na svakoj od prethodno pomenutih slika je prikazan i pravi fazi aritmetički rezultat $f(\tilde{p})$, koji se može dobiti numeričkom optimizacijom, a gde je minimalna i maksimalna vrednost funkcije f određena za svaki ulazni interval $X^{(j)}$, $j = 0,1, \dots, m$.



Slika 3.1. (a) Ulazni fazi broj $\tilde{p}$, **(b)** Rezultat $f_D(\tilde{p})$ direktne procene (puna linija) i pravi fazi aritmetički rezultat $f(\tilde{p})$ (isprekidana linija)



Slika 3.2. (a) Rezultat $f_H(\tilde{p})$ procene Hornerove forme (puna linija) i pravi fazi aritmetički rezultat $f(\tilde{p})$ (isprekidana linija), **(b)** Rezultat $f_F(\tilde{p})$ procene faktorizovane forme (puna linija) i pravi fazi aritmetički rezultat $f(\tilde{p})$ (isprekidana linija).

Sa slika se može videti ovaj veliki nedostatak standardne fazi aritmetike. U zavisnosti od oblika fazi racionalnog izraza, dobijaju se različiti rezultati problema a nijedan se ne poklapa sa pravim fazi aritmetičkim rešenjem, tačnije svi ga precenjuju u manjoj ili većoj meri.

Sada se za sve oblike fazi racionalnog izraza izračunava njegova vrednost na nivou pripadnosti $\mu_0 = 0$.

U slučaju direktne procene intervalno-vrednosnog izraza

$$f_D\left(X^{(0)}\right) = \left(X^{(0)}\right)^3 - 2\left(X^{(0)}\right)^2 - 21X^{(0)} - 18$$

za ulazni interval $X^{(0)} = [0,3]$, dobija se

$$Z_D^{(0)} = f_D\left(X^{(0)}\right) = [0,3] \cdot [0,3] \cdot [0,3] - 2[0,3] \cdot [0,3] - 21[0,3] - 18 = [-99,9].$$

Kada se procenjuje izraz u Hornerovoj formi

$$f_H\left(X^{(0)}\right) = \left(\left(X^{(0)} - 2\right)X^{(0)} - 21\right)X^{(0)} - 18$$

za $X^{(0)} = [0,3]$, dobija se

$$Z_H^{(0)} = f_H\left(X^{(0)}\right) = \left(([0,3] - 2)[0,3] - 21\right)[0,3] - 18 = [-99, -18],$$

dok procena faktorizovane forme

$$f_F\left(X^{(0)}\right) = \left(X^{(0)} + 3\right)\left(X^{(0)} + 1\right)\left(X^{(0)} - 5\right)$$

za ulazni interval $X^{(0)} = [0,3]$, dovodi do rezultata

$$Z_F^{(0)} = f_F\left(X^{(0)}\right) = ([0,3] + 3)([0,3] + 1)([0,3] - 6) = [-144, -9].$$

Međutim, pravi fazi aritmetički rezultat $Z^{(0)}$ je dat sa

$$Z^{(0)} = f([0,3]) = [-72, -18]$$

i predstavlja stvarni opseg vrednosti $f\left(X^{(0)}\right)$ za $X^{(0)} = [0,3]$.

Za različite forme $f_D\left(X^{(0)}\right)$, $f_H\left(X^{(0)}\right)$, $f_F\left(X^{(0)}\right)$ intervalnog racionalnog izraza $f\left(X^{(0)}\right)$ na najmanjem nivou pripadnosti μ_0, lokalni stepeni precenjenosti iznose

$$\Omega_D^{(0)} = 100\%, \;\; \Omega_H^{(0)} = 50\%, \;\; \Omega_F^{(0)} = 150\%.$$

Kada se uzme da je $m = 10$, dobijaju se sledeće vrednosti za globalni stepen precenjenosti:

$$\omega_D(\tilde{p}) \approx 79\%, \;\; \omega_H(\tilde{p}) \approx 33\%, \;\; \omega_F(\tilde{p}) \approx 125\%.$$

Napomena 3.1. Svaki realan broj c je ekvivalentan intervalu $[c, c]$, koji se naziva degenerisan.

Primer 3.3. [9] Neka je dat fazi raconalni izraz

$$g(\tilde{p}) = 2\tilde{p} - \tilde{p}^2,$$

koji se procenjuje za simetrični linarni fazi broj

$$\tilde{p} = tfn(1.5,1.5,1.5)$$

kao što je prikazano na slici 3.1.(a).

Kada se standardna fazi aritmetika primeni direktno na izraz u originalnom obliku

$$g_D(\tilde{p}) = 2\tilde{p} - \tilde{p}^2,$$

dobija se fazi-vrednosni rezultat $g_D(\tilde{p})$, dat na slici 3.3.(a).

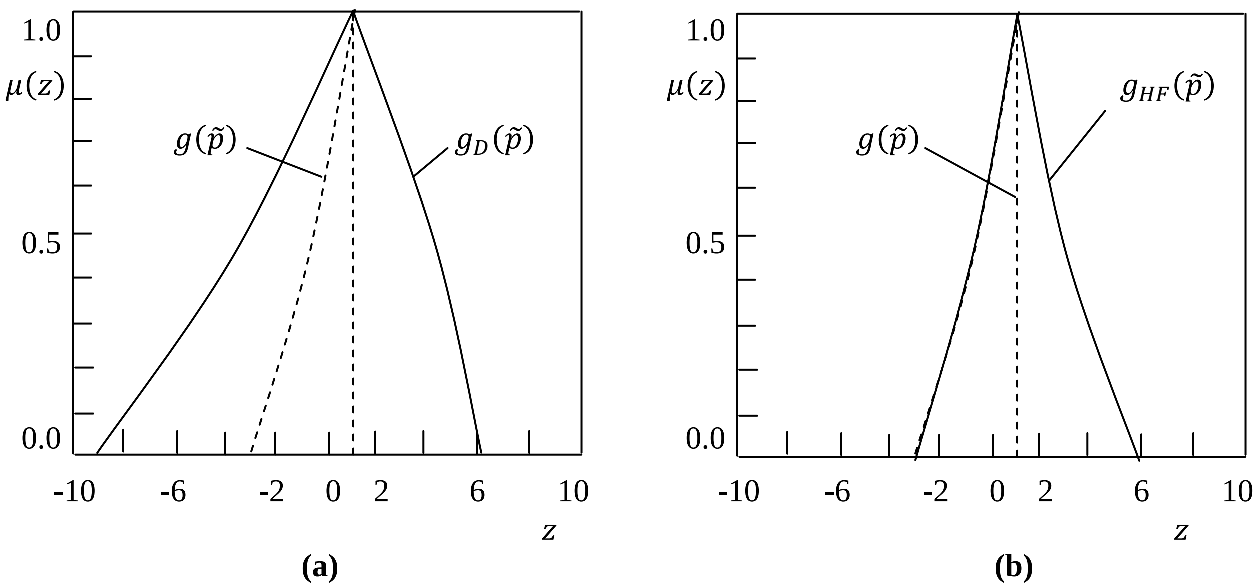
Prvobitni fazi racionalni izraz se može zapisati i u formi

$$g_{HF}(\tilde{p}) = (2 - \tilde{p})\tilde{p},$$

koja se može posmatrati kao Hornerova ili faktorizovana forma od $g(\tilde{p})$.

Njenom procenom se dolazi do rezultata $g_{HF}(\tilde{p})$, (slika 3.3.(b)).

I ovde je zbog poređenja, na svakoj od prethodno pomenutih slika prikazan i pravi fazi aritmetički rezultat $g(\tilde{p})$.



Slika 3.3. (a) Rezultat $g_D(\tilde{p})$ direktne procene (puna linija) i pravi fazi aritmetički rezultat $g(\tilde{p})$ (isprekidana linija), **(b)** Rezultat $g_{HF}(\tilde{p})$ procene Hornerove ili faktorizovane forme (puna linija) i pravi fazi aritmetički rezultat $g(\tilde{p})$ (isprekidana linija).

Kao i u primeru 3.2., efekat precenjenosti se jasno vidi na slikama.

Ponovo se za sve oblike fazi racionalnog izraza izračunava njegova vrednost na nivou pripadnosti $\mu_0 = 0$.

U slučaju direktne procene intervalno-vrednosnog izraza

$$g_D\left(X^{(0)}\right) = 2X^{(0)} - \left(X^{(0)}\right)^2$$

za ulazni interval $X^{(0)} = [0,3]$, dobija se

$$Z_D^{(0)} = g_D\left(X^{(0)}\right) = 2[0,3] - [0,3] \cdot [0,3] = [-9,6].$$

Procena izraza u Hornerovoj ili faktorizovanoj formi

$$g_{HF}\left(X^{(0)}\right) = \left(2 - X^{(0)}\right)X^{(0)}$$

za $X^{(0)} = [0,3]$, dovodi do rezultata

$$Z_{HF}^{(0)} = g_{HF}\left(X^{(0)}\right) = (2 - [0,3])[0,3] = [-3,6].$$

Međutim, pravi fazi aritmetički rezultat $Z^{(0)}$ je dat sa

$$Z^{(0)} = g([0,3]) = [-3,1]$$

i predstavlja stvarni opseg vrednosti $g\big(X^{(0)}\big)$ za $X^{(0)} = [0,3]$.

Za različite forme $g_D\big(X^{(0)}\big)$ i $g_{HF}\big(X^{(0)}\big)$ intervalnog racionalnog izraza $g\big(X^{(0)}\big)$, na najmanjem nivou pripadnosti μ_0, lokalni stepeni precenjenosti iznose

$$\Omega_D^{(0)} = 275\%, \quad \Omega_{HF}^{(0)} = 125\%.$$

Koristeći globalni stepen precenjenosti da se kvantifikuje ukupna precenjenost fazi racionalnog izraza, za dekompozicioni broj $m = 10$ se dobija

$$\omega_D(\tilde{p}) \approx 356\%, \quad \omega_{HF}(\tilde{p}) \approx 114\%.$$

Primer 3.4. [9] Kao problem sa više od jedne promenljive, razmatra se fazi raconalni izraz

$$h(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \frac{\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2}{\tilde{p}_1},$$

koji se procenjuje za simetrične linarne fazi brojeve

$$\tilde{p}_1 = tfn(2{,}1{,}1) \text{ i } \tilde{p}_2 = tfn(4.5{,}0.5{,}0.5),$$

prikazane na slici 3.4.(a).

Kada se standardna fazi aritmetika primeni direktno na izraz u originalnom obliku

$$h_D(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \frac{\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2}{\tilde{p}_1},$$

dobija se fazi-vrednosni rezultat $h_D(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$, dat na slici 3.4.(b).

Početni fazi racionalni izraz se može zapisati i kao

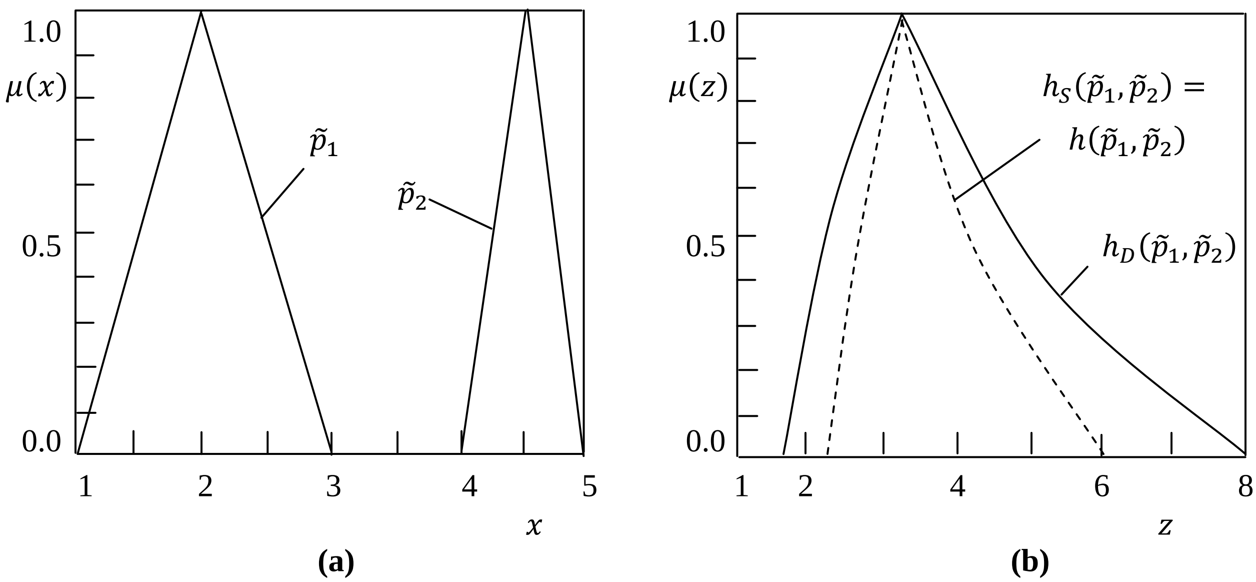
$$\frac{\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2}{\tilde{p}_1} = \underbrace{\frac{\tilde{p}_1}{\tilde{p}_1}}_{=1} + \frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_1}$$

pa se dobija pojednostavljena (eng. simplified) forma

$$h_S(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = 1 + \frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_1}$$

Njenom procenom se dolazi do rezultata $h_S(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$, (slika 3.4.(b)).

Na slici 3.4.(b) je prikazan i pravi fazi aritmetički rezultat $h(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$, koji je zapravo identičan sa $h_S(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$.



Slika 3.4. (a) Ulazni fazi brojevi $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$, **(b)** Rezultat $h_D(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ direktne procene (puna linija) i identične krive rezultata $h_S(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ pojednostavljene forme i pravog fazi aritmetičkog rezultata $h(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ (isprekidana linija)

Jasno je da za $h_S(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ ne postoji precenjenost, dok se efekat precenjivanja za $h_D(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ lako može uočiti, ali se ipak izvodi analitički.

Za sve oblike fazi racionalnog izraza se izračunava njegova vrednost na nivou pripadnosti $\mu_0 = 0$.

U slučaju direktne procene intervalno-vrednosnog izraza

$$h_D\left(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}\right) = \frac{X_1^{(0)} + X_2^{(0)}}{X_1^{(0)}},$$

za ulazne intervale $X_1^{(0)} = [1,3]$ i $X_2^{(0)} = [4,5]$, dobija se

$$Z_D^{(0)} = h_D\left(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}\right) = \frac{[1,3] + [4,5]}{[1,3]} = \frac{[5,8]}{[1,3]} = \left[\frac{5}{3}, 8\right].$$

Kada se procenjije izraz u pojednostavljenoj formi

$$h_S\left(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}\right) = 1 + \frac{X_2^{(0)}}{X_1^{(0)}},$$

za $X_1^{(0)} = [1,3]$ i $X_2^{(0)} = [4,5]$, dobija se

$$Z_S^{(0)} = h_S\left(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}\right) = 1 + \frac{[4,5]}{[1,3]} = 1 + \left[\frac{4}{3}, 5\right] = \left[\frac{7}{3}, 6\right].$$

Pravi fazi aritmetički rezultat $Z^{(0)}$, koji predstavlja stvarni opseg vrednosti $h\left(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}\right)$ za $X_1^{(0)} = [1,3]$ i $X_2^{(0)} = [4,5]$ je dat sa

$$Z^{(0)} = h([1,3],[4,5]) = \left[\frac{7}{3}, 6\right].$$

Za različite forme $h_D\left(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}\right)$ i $h_S\left(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}\right)$ intervalnog racionalnog izraza $h\left(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}\right)$, na nivou pripadnosti μ_0, lokalni stepeni precenjenosti iznose

$$\Omega_D^{(0)} \approx 73\%, \quad \Omega_S^{(0)} = 0\%,$$

dok se za globalni stepen precenjenosti, za dekompozicioni broj $m = 10$ dobijaju vrednosti

$$\omega_D(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) \approx 73\%, \qquad \omega_S(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = 0\%.$$

Razmatrajući prethodno izložene primere, dolazi se do zaključka da primena standardne fazi aritmetike za procenu fazi racionalnih izraza dovodi do rezultata koji obično precenjuju prave rezultate problema. Stepen precenjenosti zavisi od stvarne forme fazi racionalnih izraza i tako dovodi do rezultata u kojima se može desiti da nema precenjenosti, kao i do onih u kojima se precenjenost pojavljuje u velikoj meri. Efekat precenjenosti je ozbiljan nedostatak intervalne aritmetike i još se naziva i problem zavisnosti (videti [7]). Razlog za ovo se može pronaći u činjenici da standardna fazi aritmetika iznosi svaku osnovnu operaciju nad fazi brojevima kao operaciju sa potpuno nezavisnim operatorima. Međutim, u stvarnosti, u mnogim slučajevima nije ovako.

U primerima 3.2. i 3.3. postoji samo jedna fazi-vrednosna promenljiva $\tilde{p}$. Ovo implicira da su fazi-vrednosni delovi izraza $f(\tilde{p})$ i $g(\tilde{p})$, koji se pojavljuju prilikom fazi aritmetičke procene, strogo zavisni. Stoga, operacije između njih se ne smeju izvršiti korišćenjem definicija osnovne fazi aritmetike, jer ona pretpostavlja nezavisnost operatora. Iz tog razloga, precenjenost kod procene izraza $f_D(\tilde{p})$, $f_H(\tilde{p})$ i $f_F(\tilde{p})$ je neizbežna.

U primeru 3.4. postoje dve nezavisne promenljive $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$, a brojilac $\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2$ izraza $h(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ je niti strogo zavisan od imenioca $\tilde{p}_1$ a ni potpuno nezavsian. Dakle, primena standardne fazi aritmetike direktno na $h_D(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ dovodi do precenjenog rezultata. Međutim, fazi racionalni izraz se može podeliti na dva dela, kako je prikazano u pojednostavljenoj formi izraza, jedan sa strogo zavisnim, a drugi sa potpuno nezavisnim promenljivama. S obzirom da količnik dve identične vrednosti mora biti jednak jedinici, izraz $h_S(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ se konačno može zapisati tako da se ulazni fazi brojevi $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$ pojavljuju samo jednom, odnosno da sadrži samo nezavisne operatore, što dovodi do pravog rezultata.

Zbog ovih ograničenja, uvodi se napredna fazi aritmetika, zasnovana na metodu transformacije. Njena oblast primene prevazilazi procenu fazi racionalnih izraza i dozvoljava fazi aritmetičko rešenje složenih sistema iz realnog sveta sa fazi-vrednosnim parametrima modela.

4. Napredna fazi aritmetika - metod transformacije

Ovo poglavlje daje pregled osnovnih pojmova vezanih za naprednu fazi aritmetiku. Napredna fazi aritmetika je zasnovana na metodu transformacije, koji je dat u tri oblika: opštem, redukovanom i proširenom. Takođe su predstavljene efikasne strategije za implementaciju ovog metoda. Literatura korišćena pri izradi poglavlja je [9,11,12,13,17,18].

4.1. Fazi-parametrizovani modeli

Napredna fazi aritmetika, zasnovana na metodu transformacije, se ne koristi samo za procenu fazi racionalnih izraza, kao što je već ranije pomenuto, nego se takođe može primeniti i za simulaciju statičkih ili dinamičkih sistema, proizvoljne složenosti, sa fazi-vrednosnim parametrima.

Definicija 4.1. [9] Modeli koji matematički predstavljaju sisteme sa fazi-vrednosnim parametrima se nazivaju fazi-parametrizovani modeli.

Fazi brojevi koji se pojavljuju u odgovarajućim jednačinama modela se mogu tumačiti kao numeričke reprezentacije neodređenosti različitog porekla. Neodređenost se može naći u parametrima modela ili u početnim i graničnim uslovima.

Iz razloga jednostavnosti, u nastavku se koristi pojednostavljena notacija za fazi-parametrizovane modele, koja se sastoji od sledeće tri ključne komponente:

- Skup od n nezavisnih fazi-vrednosnih parametara $\tilde{p}_i \in \tilde{\mathcal{P}}'(\mathbb{R})$, i odgovarajuće funkcije pripadnosti $\mu_{\tilde{p}_i}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,\dots,n$
- Sam model, koji se sastoji od N funkcija F_r, $r = 1,2,\dots,N$, koje predstavljaju određene operacije nad ulaznim fazi brojevima $\tilde{p}_i$, $i = 1,2,\dots,n$
- N fazi-vrednosnih izlaznih promenljivih $\tilde{q}_r \in \tilde{\mathcal{P}}'(\mathbb{R})$, i odgovarajuće funkcije pripadnosti $\mu_{\tilde{q}_r}(z)$, $z \in \mathbb{R}$, $r = 1,2,\dots,N$ koje se dobijaju kao rezultat funkcija F_r.

Napomena 2.1. Bez gubitka opštosti, nadalje se pretpostavlja da je broj fazi-vrednosnih izlaznih promenljivih $N = 1$, tj. fazi-parametrizovani model je dat sa

$$\tilde{q} = F(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n).$$

Napomena 2.2. U dinamičkim sistemima postoji dodatna ulazna promenljiva, a to je vreme t i u tom slučaju je model dat sa

$$\tilde{q} = F(t; \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n).$$

4.2. Opšti i redukovani metod transformacije

U nastavku, metod transformacije je prikazan u dva oblika, opštem i redukovanom (videti [13]). Takođe se može praviti razlika između simulacije i analize fazi-parametrizovanih sistema.

4.2.1. Simulacija fazi-parametrizovanih sistema

Za naprednu fazi aritmetičku simulaciju fazi-parametrizovanih modela zasnovanu na metodu transformacije se može formulisati sledeći postupak ([9]):

1. Dekompozicija ulaznih fazi brojeva

   Postupak je definisan u odeljku 3.1.

2. Transformacija ulaznih intervala

   - Redukovani metod transformacije

     U slučaju redukovanog metoda transformacije, intervali $X_i^{(j)}$, $i = 1,2,\dots,n$ za svaki nivo pripadnosti μ_j, $j = 0,1,\dots,m$, su transformisani u nizove $\hat{X}_i^{(j)}$ oblika

$$\hat{X}_i^{(j)} = \overbrace{\left(\left(\alpha_i^{(j)}, \beta_i^{(j)}\right), \left(\alpha_i^{(j)}, \beta_i^{(j)}\right), \dots, \left(\alpha_i^{(j)}, \beta_i^{(j)}\right)\right)}^{2^{i-1} \text{ parova}}$$

$$\alpha_i^{(j)} = \underbrace{\left(a_i^{(j)}, \dots, a_i^{(j)}\right)}_{2^{n-i} \text{ elemenata}}, \qquad \beta_i^{(j)} = \underbrace{\left(b_i^{(j)}, \dots, b_i^{(j)}\right)}_{2^{n-i} \text{ elemenata}}.$$

     Očigledno je da se samo granične vrednosti $a_i^{(j)}$ i $b_i^{(j)}$ intervala $X_i^{(j)}$, $i = 1,2,\dots,n$, $j = 0,1,\dots,m$ razmatraju u ovoj transformacionoj šemi. Međutim, ovo se pokazalo kao dovoljno, ako je problem $F(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n)$ monoton, tj. ako je $\frac{dF}{dx} \neq 0$ za $x \in supp(\tilde{p}_i)$, $i = 1,2,\dots,n$ ili ako je problem okarakterisan samo sa jednim neodređenim parametrom, tj. ako je $n = 1$.

   - Opšti metod transformacije

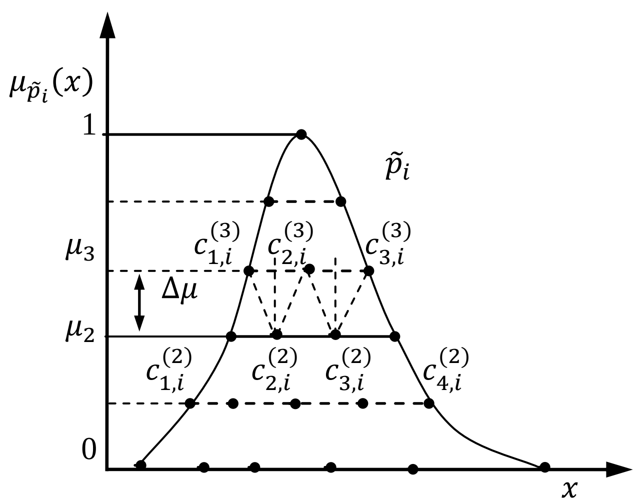
     Ukoliko se očekuje da fazi-parametrizovani model pokaže nemonotono ponašanje, u odnosu na $\bar{n}$, $1 \leq \bar{n} \leq n$, od ukupno $n > 1$, fazi-vrednosnih parametara $\tilde{p}_i$, $i = 1,2,\dots,n$, onda se preporučuje opšti metod transformacije. U ovom slučaju dodatne tačke unutar intervala $X_i^{(j)}$, $i = 1,2,\dots,n$,

$j = 0,1,\dots,m-2$ se razmatraju u transformacionoj šemi (slika 4.1.), a intervali se transformišu u nizove $\hat{X}_i^{(j)}$ oblika

$$\hat{X}_i^{(j)} = \underbrace{\left(\left(\gamma_{1,i}^{(j)},\gamma_{2,i}^{(j)},\dots,\gamma_{(m+1-j),i}^{(j)}\right),\dots,\left(\gamma_{1,i}^{(j)},\gamma_{2,i}^{(j)},\dots,\gamma_{(m+1-j),i}^{(j)}\right)\right)}_{(m-j+1)^{i-1}\quad (m-j+1)-\text{torki}}$$

$$\gamma_{l,i}^{(j)} = \underbrace{\left(c_{l,i}^{(j)},\dots,c_{l,i}^{(j)}\right)}_{(m-j+1)^{n-i}\ \text{elemenata}}$$

$$c_{l,i}^{(j)} = \begin{cases} a_i^{(j)} & \text{za} \quad l = 1, j = 0,1,\dots,m \\ \frac{1}{2}\left(c_{l-1,i}^{(j+1)} + c_{l,i}^{(j+1)}\right) & \text{za} \quad l = 2,3,\dots,m-j, j = 0,1,\dots,m-2 \\ b_i^{(j)} & \text{za} \quad l = m-j+1, j = 0,1,\dots,m. \end{cases}$$



Slika 4.1. Dekompozicija i-tog neodređenog parametra $\tilde{p}_i$, sa dodatnim tačkama koje se razmatraju u opštem metodu transformacije ($m = 5$)

3. Procena modela

Pod pretpostavkom da je fazi-parametrizovani model dat funkcionalnim izrazom $F(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n)$, njegova procena se vrši procenom izraza odvojeno na svakoj od kolona nizova, koristeći aritmetiku za klasične (eng. crisp) brojeve. Preciznije, ako se rešenje sistema $\tilde{q}$ može predstaviti u dekompozabilnom a zatim i transformisanom obliku pomoću nizova $\hat{Z}^{(j)}$, $j = 0,1,\dots,m$, k-ti element ${}^{k}\hat{z}^{(j)}$ niza $\hat{Z}^{(j)}$ je onda određen sa

$${}^{k}\hat{z}^{(j)} = F\left({}^{k}\hat{x}_1^{(j)}, {}^{k}\hat{x}_2^{(j)}, \dots, {}^{k}\hat{x}_n^{(j)}\right),$$

gde ${}^{k}\hat{x}_i^{(j)}$ označava k-ti element niza $\hat{X}_i^{(j)}$.

4. Ponovna transformacija izlaznog niza

   Dekompozabilna reprezentacija fazi-vrednosnog izlaza modela $\tilde{q}$, predstavljena preko skupa

$$Q = \left\{Z^{(0)}, Z^{(1)}, \dots, Z^{(m)}\right\}$$

   koji sadrži $m + 1$ interval

$$Z^{(j)} = \left[a^{(j)}, b^{(j)}\right] = \mathrm{cut}_{\mu_j}(\tilde{q}), \quad a^{(j)} \le b^{(j)}, \quad j = 1,2, \dots, m$$

$$Z^{(0)} = \left[a^{(0)}, b^{(0)}\right] = [w_l, w_r], \quad (w_l, w_r) = supp(\tilde{q})$$

   se može dobiti ponovnom transformacijom nizova $\hat{Z}^{(j)}$ prema rekurzivnim formulama:

$$a^{(j)} = \min_k(a^{(j+1)}, {}^{k}\hat{z}^{(j)}), \quad b^{(j)} = \max_k\left(b^{(j+1)}, {}^{k}\hat{z}^{(j)}\right), \quad j = 0,1, \dots, m-1$$

$$a^{(m)} = \min_k({}^{k}\hat{z}^{(m)}) = \max_k({}^{k}\hat{z}^{(m)}) = b^{(m)}.$$

5. Ponovna kompozicija izlaznih intervala

   Bazirana je na teoremi 2.1. koja je definisana i dokazana u odeljku 2.1.1.3. Ponovnom kompozicijom intervala $Z^{(j)}$, $j = 0,1, \dots, m$ skupa Q prema njihovim nivoima pripadnosti μ_j, se može dobiti izlazna vrednost fazi-parametrizovanog modela $\tilde{q}$.

Primer 4.1. [9] Da bi se ilustrovala šema transformacije za redukovani metod transformacije, posmatra se problem sa $n = 3$ nezavisna neodređena parametra $\tilde{p}_1$, $\tilde{p}_2$i $\tilde{p}_3$. Na nivou pripadnosti $\mu = 0$, neodređeni parametri se mogu predstaviti kao intervalne vrednosti

$$X_1^{(0)} = \left[a_1^{(0)}, b_1^{(0)}\right], \quad X_2^{(0)} = \left[a_2^{(0)}, b_2^{(0)}\right], \quad X_3^{(0)} = \left[a_3^{(0)}, b_3^{(0)}\right].$$

Transformacijom ovi intervali postaju nizovi

$$\hat{X}_1^{(0)} = (a_1^{(0)}, a_1^{(0)}, a_1^{(0)}, a_1^{(0)}, b_1^{(0)}, b_1^{(0)}, b_1^{(0)}, b_1^{(0)})$$

$$\hat{X}_2^{(0)} = (a_2^{(0)}, a_2^{(0)}, b_2^{(0)}, b_2^{(0)}, a_2^{(0)}, a_2^{(0)}, b_2^{(0)}, b_2^{(0)})$$

$$\hat{X}_3^{(0)} = (a_3^{(0)}, b_3^{(0)}, a_3^{(0)}, b_3^{(0)}, a_3^{(0)}, b_3^{(0)}, a_3^{(0)}, b_3^{(0)})$$

gde svaki ima dužinu $2^n = 8$. Svaka od kolona ovih nizova predstavlja jednu od mogućih osam kombinacija donjih i gornjih granica intervala neodređenih parametara.

Kada se rezimira simulacija fazi-parametrizovanih modela dolazi se do zaključka da je dovoljno da se primenjuje metod transformacije u svom redukovanom obliku, ako je problem $F(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n)$ monoton ili ako je problem predstavljen samo jednim neodređenim parametrom. U prvom slučaju, ekstremna vrednost od F se dostiže za kombinaciju klasično-vrednosnih parametara. Iz tog razloga, redukovani metod transformacije dovodi do pravog fazi-vrednosnog rezultata problema. U drugom slučaju, rezultat dobijen korišćenjem redukovanog metoda transformacije može biti različit od pravog rezultata u zavisnosti od trenutnog položaja ekstrema, ukoliko problem ne pokazuje monotono ponašanje. Ova razlika se smanjuje sa povećanjem dekompozicionog broja m. Od velikog značaja je činjenica da rekurzivnosti u okviru ponovne transformacije izlaznog niza obezbeđuju očuvanje osobine konveksnosti za bilo koji fazi-vrednosni rezultat, što garantuje zatvorenost fazi aritmetike zasnovane na metodu transformacije.

Ako se pretpostavi da fazi-parametrizovani model pokazuje nemonotonono ponašanje, preporučuje se opšti metod transformacije. Ovde se u transformacionoj šemi razmatraju dodatne tačke intervala, a njihov broj se povećava za jedan sa svakim nižim nivoom pripadnosti. U ovom slučaju se fazi aritmetički problem procenjuje za više kombinacija klasično-vrednosnih parametara nego kod redukovanog metoda transformacije. Rekurzivne komponente opet imaju istu svrhu, a dobijeni približni rezultat se može poboljšati sa povećanjem dekompozicionog broja.

Za razliku od standardne fazi aritmetike, rezultati dobijeni pomoću metoda transformacije nikada ne precenjuju pravi rezultat problema ali može postojati određeni stepen potcenjenosti, odnosno negativne precenjenosti.

Da bi se pokazala efikasnost metoda transformacije, koriste se primeri 3.2. – 3.4. razmatrani u okviru standardne fazi aritmetike.

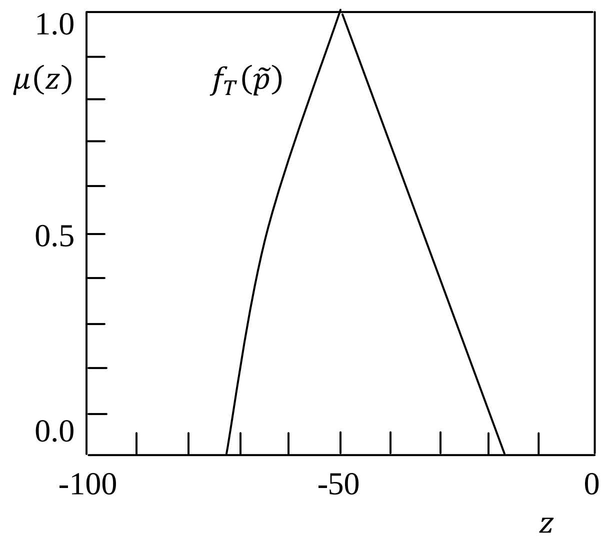
Primer 4.2. [9] Neka je dat fazi racionalni izraz

$$f(\tilde{p}) = \tilde{p}^3 - 2\tilde{p}^2 - 21\tilde{p} - 18,$$

koji se procenjuje za fazi parametar

$$\tilde{p} = tfn(1.5,1.5,1.5)$$

simetričnog trougaonog oblika (slika 3.1.(a)). Pošto je broj neodređenih parametara modela $n = 1$, metod transformacije se može primeniti u redukovanoj formi. Ako se uzme dekompozicioni broj $m = 15$, dobija se rezultat $f_T(\tilde{p})$, kao što je prikazano na slici 4.2. Ovaj rezultat je identičan pravom fazi aritmetičkom rešenju $f(\tilde{p})$ problema, a uslov monotonosti za $f(\tilde{p})$ je ispunjen unutar $supp(\tilde{p}) = [0,3]$.



Slika 4.2. Rezultat $f_T(\tilde{p})$ dobijen redukovanim metodom transformacije

Primer 4.3. [9] Neka je sada dat fazi raconalni izraz

$$g(\tilde{p}) = 2\tilde{p} - \tilde{p}^2$$

koji se procenjuje za simetrični linearni fazi broj

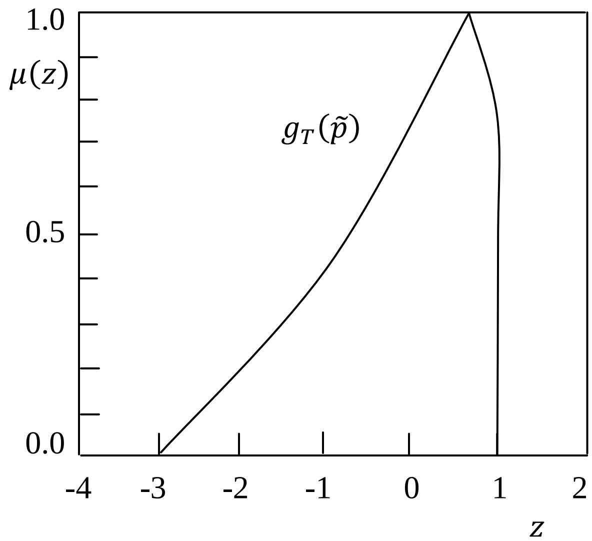
$$\tilde{p} = tfn(1.5,1.5,1.5).$$

Broj neodređenih parametara modela je $n = 1$, pa se metod transformacije može primeniti u redukovanom obliku. Koristeći ponovo broj dekompozicija $m = 15$, dobija se rezultat $g_T(\tilde{p})$, prikazan na slici 4.3. Iako ovaj problem pokazuje nemonotonono ponašanje unutar $supp(\tilde{p})$, svaki rezultat koji se postiže korišćenjem redukovanog metoda transformacije, sa brojem dekompozicija m koji je sadržalac broja tri, se poklapa sa pravim fazi-vrednosnim rezultatom. To je zbog činjenice da $g(x)$ dostiže maksimalnu vrednost za $x = 1$ na nivou pripadnosti $\mu = \frac{2}{3}$. Kao rezultat problema na nivou pripadnosti $\mu_0 = 0$, čija je tačna vrednost $Z^{(0)} = [-3,1]$, dobija se $Z_{T15}^{(0)} = [-3,1]$ za dekompozicioni broj $m = 15$, a $Z_{T14}^{(0)} = [-3,0.9987]$ za broj dekompozicija $m = 14$. Dakle, za $m = 15$, dobija se tačan fazi aritmetički rezultat problema, dok za $m = 14$ pravo rešenje je blago potcenjeno. Potcenjenost se može kvantifikovati pomoću lokalnog stepena precenjenosti, uvedenog u definiciji 3.1. Za kvantifikaciju ukupnog potcenjivanja rezultata problema, može se koristiti globalni stepen precenjenosti, iz definicije 3.2. Ako je $m = 14$, lokalni stepen precenjenosti iznosi

$$\Omega_{\mathrm{T}14}^{(0)}\left(X^{(0)}\right) = \frac{wth([-3,0.9987]) - wth([-3,1])}{wth([-3,1])} = -0.1825\%,$$

dok je globalni stepen precenjenosti

$$\omega_{\mathrm{T14}}^{(0)}(\tilde{p}) = -0.0451\%.$$



Slika 4.3. Rezultat $g_T(\tilde{p})$ dobijen redukovanim metodom transformacije

Primer 4.4. [9] Kao problem sa više od jedne promenljive, razmatra se fazi raconalni izraz

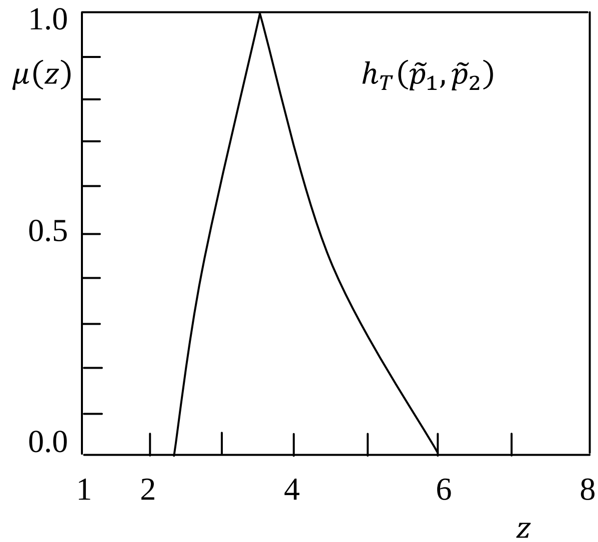
$$h(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \frac{\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2}{\tilde{p}_1},$$

koji se procenjuje za simetrične linarne fazi brojeve

$$\tilde{p}_1 = tfn(2,1,1) \text{ i } \tilde{p}_2 = tfn(4.5,0.5,0.5),$$

kao što je prikazano na slici 3.4.(a).

Čak iako je broj fazi-vrednosnih parametara modela veći od jedan, metod transformacije se može primeniti u svom redukovanom obliku, jer se očekuje da $h(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ pokaže monotonono ponašanje unutar $supp(\tilde{p}_i)$, $i = 1,2$. Koristeći opet isti broj dekompozicija $m = 15$, dobija se rezultat $h_T(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$, koji se podudara sa pravim fazi aritmetičkim rešenjem problema $h(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ (slika 4.4.).



Slika 4.4. Rezultat $h_T(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ dobijen redukovanim metodom transformacije

4.2.2. Analiza fazi-parametrizovanih sistema

Do sada je bio slučaj da fazi-vrednosni rezultat $\tilde{q}$ problema odražava samo ukupan uticaj svih n neodređenih parametara modela $\tilde{p}_i, i = 1,2, \dots, n$ uzetih zajedno. Međutim, dokazano je da stepeni neodređenosti koji se odnose na svaki parametar modela doprinose veoma različito u ukupnom stepenu neodređenosti izlaza modela $\tilde{q}$. Adekvatna kvantifikacija ovih uticaja predstavlja važno pitanje. Da bi se ilustrovao ovaj aspekt, razmatra se sledeći primer.

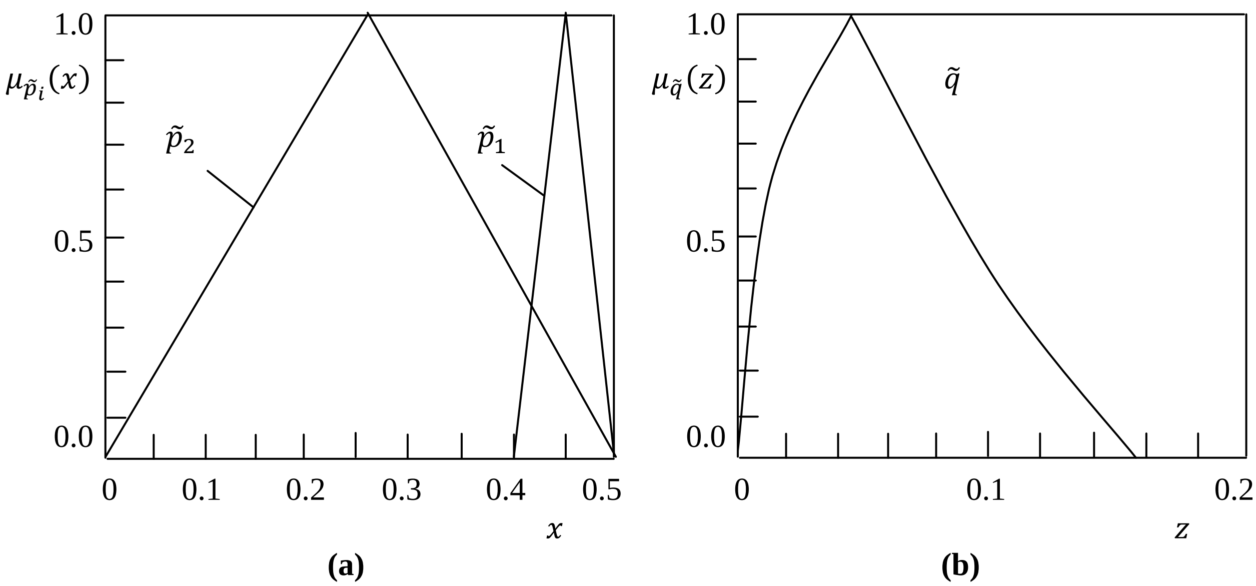
Primer 4.5. [9] Neka je dat fazi-parametrizovani model

$$f(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \tilde{p}_2 cos(\pi \tilde{p}_1).$$

Kada se model proceni za fazi parametre

$$\tilde{p}_1 = tfn(0.45, 0.05, 0.05) \text{ i } \tilde{p}_2 = tfn(0.25, 0.25, 0.25)$$

prikazane na slici 4.5.(a), dobija se fazi-vrednosni rezultat $\tilde{q}$ (slika 4.5.(b)). Ako se osvrne na pitanje stepena u kom svaki od ova dva parametra modela doprinosi ukupnoj neodređenosti rezultata, moglo bi se pretpostaviti da $\tilde{p}_2$ ima veći efekat na neodređenost rezultata nego $\tilde{p}_1$, zbog njegovog odstupanja od modalne vrednosti koje iznosi do ±100%, što je znatno veće od odstupanja od ±11% parametra $\tilde{p}_1$.

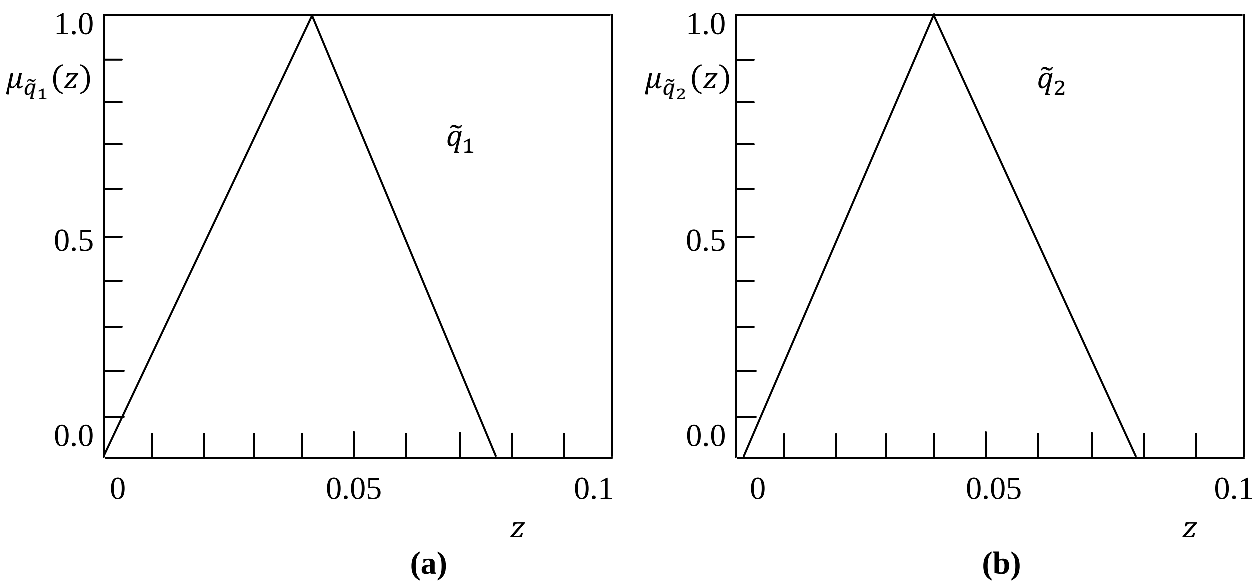


Slika 4.5. (a) Fazi-vrednosni parametri modela $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$, **(b)** Izlazna vrednost $\tilde{q} = f(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$

Odgovor na ovo pitanje se može dobiti ako se ponovo proceni fazi racionalni izraz $f(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$, pod pretpostavkom da je ovaj put jedan od parametara klasičan, dok drugi ostaje fazi. Tačnije, izraz $f(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ se procenjuje dva puta, prvo za fazi broj $\tilde{p}_1$ i klasičnu modalnu vrednost $\bar{x}_2 = core(\tilde{p}_2)$ a zatim za modalnu vrednost $\bar{x}_1 = core(\tilde{p}_1)$ i fazi broj $\tilde{p}_2$. Dobijaju se rezultati

$$\tilde{q}_1 = f(\tilde{p}_1, \bar{x}_2) \quad \text{i} \quad \tilde{q}_2 = f(\bar{x}_1, \tilde{p}_2),$$

gde svaka izlazna vrednost zavisi samo od jedne fazi promenljive (slika 4.6.). Iz skoro identične krive za funkcije pripadnosti od $\tilde{q}_1$ i $\tilde{q}_2$, može se zaključiti da oba parametra $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$ doprinose u istoj apsolutnoj meri u ukupnoj neodređenosti od $\tilde{q}$. Ako se uzme u obzir činjenica da parametar $\tilde{p}_1$, u najgorem slučaju, odstupa samo ±11% od svoje modalne vrednosti, dok je odstupanje od $\tilde{p}_2$ ±100%, relativni stepen uticaja parametra $\tilde{p}_2$ izgleda oko devet puta veći nego parametra $\tilde{p}_1$.



Slika 4.6. (a) Izlazna vrednost $\tilde{q}_1 = f(\tilde{p}_1, \bar{x}_2)$, **(b)** Izlazna vrednost $\tilde{q}_2 = f(\bar{x}_1, \tilde{p}_2)$

Opštu metodologiju za kvantitativno utvrđivanje stepena sa kojim n fazi-vrednosnih parametara $\tilde{p}_i$ fazi-parametrizovanog sistema odvojeno doprinose ukupnoj neodređenosti izlaza $\tilde{q}$ takođe pruža metod transformacije. Umesto svođenja nizova $\hat{Z}^{(j)}$ odmah u intervale $Z^{(j)}$, $j = 0,1, \dots, m$ kao što je urađeno u koraku ponovne transformacije u metodu transformacije, mogu se koristiti zaključci do kojih se dolazi posmatrajući vrednosti i raspored elemenata u $\hat{Z}^{(j)}$. U ovom kontekstu, mogu se odrediti koeficijenti $\eta_i^{(j)}, i = 1,2, \dots, n, j = 0,1, \dots, m-1$.

Definicija 4.2. [9] Koeficijenti $\eta_i^{(j)}$, $i = 1,2, \dots, n$, $j = 0,1, \dots, m-1$, koji su za redukovani metod transformacije definisani kao

$$\eta_i^{(j)} = \frac{1}{2^{n-1}(b_i^{(j)} - a_i^{(j)})} \sum_{k=1}^{2^{n-i}} \sum_{l=1}^{2^{i-1}} \left({}^{s_2}\hat{z}^{(j)} - {}^{s_1}\hat{z}^{(j)}\right)$$

sa

$$s_1(k,l) = k + (l-1)2^{n-i+1}$$

$$s_2(k,l) = k + (2l-1)2^{n-i}$$

a za opšti metod transformacije kao

$$\eta_i^{(j)} = \frac{1}{(m-j+1)^{n-1}(b_i^{(j)} - a_i^{(j)})} \sum_{k=1}^{(m-j+1)^{n-1}} \sum_{l=1}^{(m-j+1)^{i-1}} \left({}^{s_2}\hat{z}^{(j)} - {}^{s_1}\hat{z}^{(j)}\right)$$

sa

$$s_1(k,l) = k + (m-j+1)(l-1)(m-j+1)^{n-i} = k + (l-1)(m-j+1)^{n-i+1}$$

$$s_2(k,l) = k + [(m-j+1)l - 1](m-j+1)^{n-i}$$

gde ${}^{s_1}\hat{z}^{(j)}$ i ${}^{s_2}\hat{z}^{(j)}$ označavaju, respektivno, s_1. i s_2. element niza $\hat{Z}^{(j)}$, se nazivaju uvećavajući faktori (eng. gain factors) i izražavaju efekat neodređenosti i-tog parametra $\tilde{p}_i$ na neodređenost izlazne vrednosti $\tilde{q}$ problema, na nivou pripadnosti μ_j.

Definicija 4.3. [9] Standardizovani srednje uvećavajući faktori $k_i, i = 1,2,\dots,n$, predstavljaju ukupnu meru uticaja a definišu se prema

$$k_i = \frac{\sum_{j=1}^{m-1} \mu_j \left|\eta_i^{(j)}(a_i^{(j)} + b_i^{(j)})\right|}{2\sum_{j=1}^{m-1} \mu_j} = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{m-1} \mu_j \left|\eta_i^{(j)}(a_i^{(j)} + b_i^{(j)})\right|.$$

Standardizovani srednje uvećavajući faktori su uvedeni da bi se dobio nedimenzionalni oblik mere uticaja s obzirom na obično različite dimenzije fazi-vrednosnih parametara.

Definicija 4.4. [9] Normalizovane vrednosti $\rho_i, i = 1,2,\dots,n$, koje predstavljaju relativnu meru uticaja se definišu sa

$$\rho_i = \frac{k_i}{\sum_{q=1}^{n} k_q} = \frac{\sum_{j=1}^{m-1} \mu_j \left|\eta_i^{(j)}(a_i^{(j)} + b_i^{(j)})\right|}{\sum_{q=1}^{n}\sum_{j=1}^{m-1} \mu_j \left|\eta_q^{(j)}(a_q^{(j)} + b_q^{(j)})\right|}.$$

Glavne zasluge metoda transformacije se ogledaju u sledećem:

- Metod transformacije daje nedvosmislen postupak za formiranje mogućih kombinacija donjih i gornjih granica intervala (ili i dodatnih tačaka u slučaju opšteg metoda transformacije) za sve neodređene parametre. To se postiže određivanjem dobro struktuiranog niza za svaki interval fazi parametra, što se može posmatrati kao transformacija intervala u oblast u kojoj se može primeniti aritmetika za klasične brojeve.
- Može se kvantifikovati relativni uticaj neodređnosti svakog parametra na ukupnu neodređenost izlaza modela.
- Računski troškovi za simulaciju neodređenog modela se mogu smanjiti ignorisanjem neodređenosti onih parametara modela čiji se uticaj ispostavi kao zanemarljiv.
- Zbog karakteristične osobine metoda transformacije koja se sastoji u zameni fazi aritmetike sa operacijama nad klasičnim brojevima, njegova oblast primene ne podleže ograničenjima. Bilo kakav problem, uključujući i složene, nemonotone, i dinamičke sisteme, se može simulirati, a takođe se mogu proceniti funkcije kao što su sinus, kosinus ili eksponencijalna funkcija.

- Redukovanje fazi aritmetike na operacije sa klasičnim brojevima znači da se metod transformacije može veoma lako implementirati u odgovarajući softver.
- Za razliku od standardne fazi aritmetike, fazi aritmetika zasnovana na metodu transformacije ne ispoljava efekat precenjivanja. Umesto toga, može postojati određeni stepen potcenjivanja ako sistem pokazuje nemonotono ponašanje. Međutim, razlika između procenjenog i tačnog rešenja se smanjuje sa povećanjem dekompozicionog broja.

S druge strane, karakterističan nedostatak metoda transformacije može biti veliki broj potrebnih procena sistema, posebno ako se posmatra opšti oblik metoda transformacije sa značajnim brojem fazi-vrednosnih parametara modela. To može dovesti do visokih računskih troškova.

4.3. Prošireni metod transformacije

U cilju daljeg smanjenja računskih troškova metoda transformacije smanjenjem broja procena, uvodi se prošireni oblik ranije definisanih verzija metoda transformacije, tzv. prošireni metod transformacije ([11,12]).

U svom opštem obliku, metod transformacije se može uspešno koristiti za simulaciju i analizu fazi-parametrizovanih modela koji su nemonotoni unutar oblasti neodređenosti koju pokriva $\bar{n}, 1 \leq \bar{n} \leq n, n > 1$, fazi-vrednosnih parametara modela $\tilde{p}_i, i = 1,2,\ldots,n$. Međutim, u slučaju $\bar{n} < n$, primena opšteg metoda transformacije zahteva mnogo više računanja nego što je zaista potrebno da se izračuna pravi fazi-aritmetički rezultat. Efikasan pristup za rešavanje ovog ograničenja predstavlja tzv. prošireni metod transformacije. Prema ovom metodu, samo onih $\bar{n}$ parametara koji zapravo uzrokuju nemonotono ponašanje, (bez gubitka opštosti neka su to parametri $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_{\bar{n}}$ koji se još nazivaju i parametri g-tipa) se transforimiše koristeći opštu formu metoda transformacije (videti sliku 4.1.), dok se ostali ($\tilde{p}_{\bar{n}+1}, \tilde{p}_{\bar{n}+2}, \ldots, \tilde{p}_n$ ili parametri r-tipa) transformišu koristeći redukovanu formu (videti sliku 2.7.). Dakle, proširena verzija metoda transformacije obuhvata ranije definisane verzije kao granične slučajeve: opšti oblik za $\bar{n} = n$, a redukovani za $\bar{n} = 0$.

4.3.1. Simulacija fazi-parametrizovanih sistema

Da bi se dobio metod transformacije u proširenom obliku, jednačine koje se odnose na transformaciju ulaznih intervala (korak 2) u okviru odeljka 4.2.1. je potrebno zameniti jednačinama navedenim ispod, dok koraci 1, 3, 4 i 5 ostaju nepromenjeni.

- $i = 1,2,\ldots,\bar{n}$ (parametri g-tipa):

$$\hat{X}_i^{(j)} = \underbrace{\left(\left(\gamma_{1,i}^{(j)}, \gamma_{2,i}^{(j)}, \dots, \gamma_{(m+1-j),i}^{(j)}\right), \dots, \left(\gamma_{1,i}^{(j)}, \gamma_{2,i}^{(j)}, \dots, \gamma_{(m+1-j),i}^{(j)}\right)\right)}_{(m-j+1)^{i-1} \quad (m-j+1)-\text{torka}}$$

za

$$\gamma_{l,i}^{(j)} = \underbrace{\left(c_{l,i}^{(j)}, \dots, c_{l,i}^{(j)}\right)}_{(m-j+1)^{\bar{n}-i} 2^{n-\bar{n}} \text{ elemenata}}$$

$$c_{l,i}^{(j)} = \begin{cases} a_i^{(j)} & \text{za} \quad l = 1, j = 0,1, \dots, m \\ \frac{1}{2}\left(c_{l-1,i}^{(j+1)} + c_{l,i}^{(j+1)}\right) & \text{za} \quad l = 2,3, \dots, m-j, j = 0,1, \dots, m-2 \\ b_i^{(j)} & \text{za} \quad l = m-j+1, j = 0, 1, \dots, m. \end{cases}$$

- $i = \bar{n}+1, \bar{n}+2, \dots, n$ (parametri r-tipa):

$$\hat{X}_i^{(j)} = \overbrace{\left(\left(\alpha_i^{(j)}, \beta_i^{(j)}\right), \left(\alpha_i^{(j)}, \beta_i^{(j)}\right), \dots, \left(\alpha_i^{(j)}, \beta_i^{(j)}\right)\right)}^{(m-j+1)^{\bar{n}} 2^{i-\bar{n}-1} \text{ parova}}$$

$$\alpha_i^{(j)} = \underbrace{\left(a_i^{(j)}, \dots, a_i^{(j)}\right)}_{2^{n-i} \text{ elemenata}}, \quad \beta_i^{(j)} = \underbrace{\left(b_i^{(j)}, \dots, b_i^{(j)}\right)}_{2^{n-i} \text{ elemenata}}.$$

4.3.2. Analiza fazi-parametrizovanih sistema

Da bi se analiza metoda transformacije preformulisala za proširenu verziju tog metoda, jednačine za određivanje uvećavajućih faktora $\eta_i^{(j)}, i = 1,2, \dots, n,\ j = 0,1, \dots, m-1$, je potrebno zameniti jednačinama datim u nastavku, u zavisnosti od indeksa parametra, i. Jednačine za određivanje standardizovanih srednje uvećavajućih faktora k_i, kao i normalizovanih stepena uticaja ρ_i, $i = 1,2, \dots, n$ ostaju nepromenjene.

- $i = 1,2, \dots, \bar{n}$ (parametri g-tipa):

$$\eta_i^{(j)} = \frac{1}{2^{n-\bar{n}}(m-j+1)^{\bar{n}-1}(b_i^{(j)} - a_i^{(j)})} \sum_{k=1}^{2^{n-\bar{n}}(m-j+1)^{\bar{n}-i}} \sum_{l=1}^{(m-j+1)^{i-1}} \left({}^{s_2}\hat{z}^{(j)} - {}^{s_1}\hat{z}^{(j)}\right)$$

za

$$s_1(k,l) = k + (l-1)2^{n-\bar{n}}(m-j+1)^{\bar{n}-i+1}$$

$$s_2(k,l) = k + [(m-j+1)l - 1]2^{n-\bar{n}}\,(m-j+1)^{\bar{n}-i}.$$

- $i = \bar{n} + 1, \bar{n} + 2, \dots, n$ (parametri r-tipa):

$$\eta_i^{(j)} = \frac{1}{2^{n-\bar{n}-1}(m-j+1)^{\bar{n}}(b_i^{(j)} - a_i^{(j)})} \sum_{k=1}^{2^{n-i}} \sum_{l=1}^{2^{i-\bar{n}-1}(m-j+1)^{\bar{n}}} \left({}^{s_2}\hat{z}^{(j)} - {}^{s_1}\hat{z}^{(j)}\right)$$

za

$$s_1(k,l) = k + (l-1)2^{n-i+1}$$

$$s_2(k,l) = k + (2l-1)2^{n-i}.$$

4.3.3. Kriterijum klasifikacije

Da bi se prošireni metod transformacije uspešno koristio, potrebno je svrstati parametre modela $\tilde{p}_i, i = 1,2,\dots,n$ u one koji su g-tipa i r-tipa. Za modele koji nisu mnogo složeni, ukoliko je moguće dostupne u analitičkom obliku, ovaj zadatak se često može izvršiti jednostavno posmatranjem jednačina modela i oblasti neodređenih parametara. Međutim, u slučaju složenijih modela, ovaj pristup se ne može primeniti, pa je neizbežna upotreba kriterijuma klasifikacije. Takav kriterijum je motivisan definisanjem uvećavajućih faktora za opšti metod transformacije u formi

$$\eta_i^{(j)} = \frac{1}{(m-j+1)^{n-1}(b_i^{(j)} - a_i^{(j)})} \sum_{k=1}^{(m-j+1)^{n-i}} \sum_{l=1}^{(m-j+1)^{i-1}} \sum_{r=1}^{m-j} t_{i,j}(k,l,r)$$

za

$$t_{i,j}(k,l,r) = {}^{s(k,l,r+1)}\hat{z}^{(j)} - {}^{s(k,l,r)}\hat{z}^{(j)}$$

$$s(k,l,r) = k + [(m-j+1)(l-1) + r - 1](m-j+1)^{n-i}.$$

Kada se uzme u obzir samo najniži nivo pripadnosti, odnosno $\mu_0 = 0, j = 0$, izlazna vrednost $\tilde{q}$ fazi-parametrizovanog modela se može smatrati kao strogo nemonotona u odnosu na parametar modela $\tilde{p}_i$, ako su $m(m+1)^{n-1}$ elemenata skupa

$$T_{i,0} = \left\{t_{i,0}(1,1,1), t_{i,0}(1,1,2), \dots, t_{i,0}\left((m+1)^{n-i}, (m+1)^{i-1}, m\right)\right\}$$

svi ili pozitivni ili negativni. Na osnovu toga se definiše kriterijum za klasifikaciju parametara $\tilde{p}_i, i = 1,2,\dots,n$.

Definicija 4.5. [9] Fazi-vrednosni parametar modela $\tilde{p}_i$ je parametar tipa r ako normalizovani proizvod τ_i minimalnog i maksimalnog elementa skupa $T_{i,0}$, prelazi određeni prag $0 < \varepsilon \ll 1$, odnosno, ako

$$\tau_i = \frac{min(T_{i,0})\, max(T_{i,0})}{m(m+1)^{n-1}(b_i^{(0)} - a_i^{(0)})} > \varepsilon.$$

Inače, parametar modela $\tilde{p}_i$ se može smatrati parametrom tipa g.

Za mnoge primere, pretpostavka $\varepsilon = 10^{-16}$ se pokazala kao vrlo praktična.

Iako primena kriterijuma klasifikacije zahteva dodatni računski napor, postoji jasna prednost. Kriterijum klasifikacije poziva samo na delimično izvršenje metoda transformacije u opštem obliku, ograničavajući se na najniži nivo pripadnosti i izostavljajući korake ponovne transformaciije i ponovne kompozicije.

Efikasnost proširenog metoda transformacije zajedno sa predočenim kriterijumom klasifikacije, je ilustrovana sledećim primerima.

Primer 4.6. [9] Neka je data funkcija

$$\tilde{q} = f(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3) = sin(\tilde{p}_1) + \tilde{p}_2{}^2 - \tilde{p}_3$$

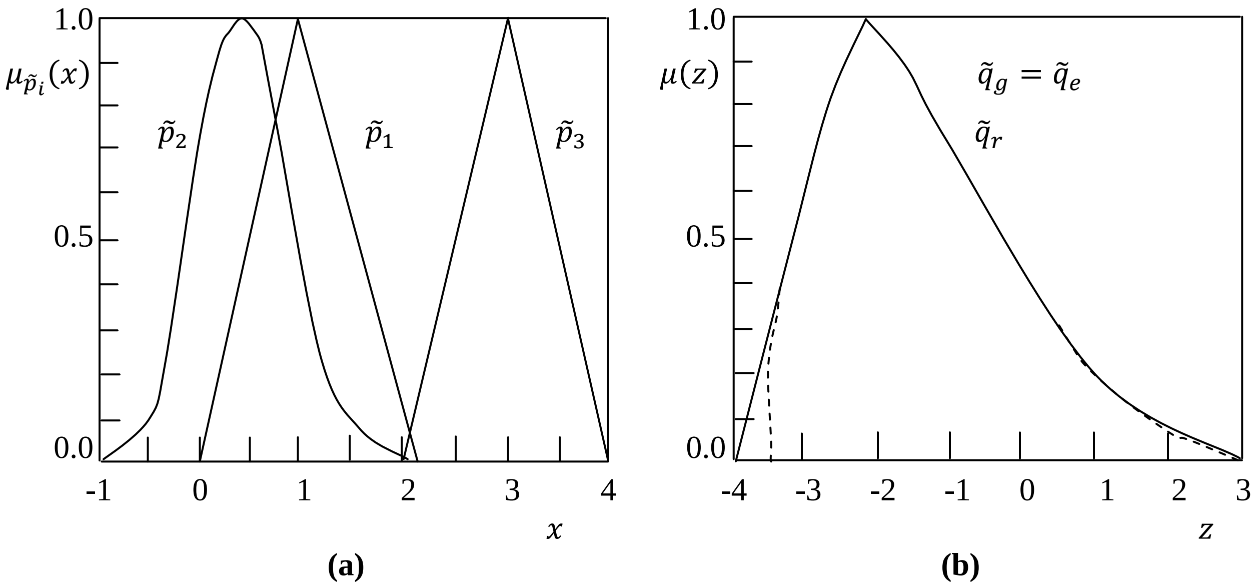
koja se procenjuje za simetrične fazi-vrednosne parametre

$$\tilde{p}_1 = tfn\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), \qquad \tilde{p}_2 = gfn^*\,(0.5{,}0.5{,}0.5), \qquad \tilde{p}_3 = tfn(3{,}1{,}1)$$

prikazane na slici 4.7.(a). Primenom metoda transformacije u opštem, kao i u redukovanom obliku sa brojem dekompozicija $m = 10$, dobijaju se fazi-vrednosni rezultati $\tilde{q}_g$ i $\tilde{q}_r$, (slika 4.7.(b)). Dok se pravi fazi-aritmetički rezultat problema poklapa sa fazi brojem $\tilde{q}_g$, fazi broj $\tilde{q}_r$ ga značajno potcenjuje. Očigledno, ovaj neuspeh redukovanog metoda transformacije je zbog nemonotonog ponašanja. To se može dokazati numerički, primenom kriterijuma klasifikacije, koji daje

$$\tau_1 \approx -2.75 \cdot 10^{-9}, \qquad \tau_2 \approx -1.21 \cdot 10^{-7}, \qquad \tau_3 \approx +6.83 \cdot 10^{-9}.$$

Kako je $\tau_1, \tau_2 < \varepsilon$ i $\tau_3 > \varepsilon$ za $\varepsilon = 10^{-16}$, $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$ se mogu smatrati parametrima g-tipa, dok je $\tilde{p}_3$ parametar r-tipa. Prema tome, model se može uspešno ponovo simulirati pomoću proširenog metoda transformacije za $\bar{n} = 2$, što dovodi do izlazne vrednosti modela $\tilde{q}_e$ koja je identična $\tilde{q}_g$ (slika 4.7.(b)), ali zahteva manje izračunavanja.



Slika 4.7. (a) Fazi-vrednosni parametri modela $\tilde{p}_1$, $\tilde{p}_2$ i $\tilde{p}_3$, **(b)** Izlazne vrednosti $\tilde{q}_g = \tilde{q}_e$ (puna linija) za opšti i prošireni metod transformacije ($\bar{n} = 2$), i $\tilde{q}_r$ (isprekidana linija) za redukovani metod transformacije

Na kraju, kao rezultat analize modela, mogu se dobiti relativni uticaji ρ_i, fazi-vrednosnih parametara modela $\tilde{p}_i$, $i = 1,2,3$ na neodređenost izlazne vrednosti $\tilde{q}_g = \tilde{q}_e$ fazi-vrednosne funkcije f :

$$\rho_1 = 12.64\%, \qquad \rho_2 = 12.48\%, \qquad \rho_3 = 74.88\%.$$

To znači, ako se pretpostavi da svaki od parametara $\tilde{p}_i$, $i = 1,2,3$ izlaže istu količinu relativne neodređenosti u odnosu na njegovu modalnu vrednost, oko tri četvrtine ukupne neodređenosti izlazne vrednosti modela proizvodi neodređenost od $\tilde{p}_3$, a ostatak neodređenost od $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$, u približno jednakom odnosu.

4.4. Efikasna implementacija metoda transformacije

U cilju postizanja efikasnije implementacije metoda transformacije i smanjenja računskih troškova na minimum, razvijeni su određeni pristupi (videti [17,18]) koji se zasnivaju na sledećem:

1. korišćenje posebnih struktura, funkcija, i alata koje pruža programski jezik koji se koristi
2. smanjenje broja efikasnih procena modela u odnosu na zahtevani broj u okviru metoda transformacije.

U nastavku su prikazani samo oni pristupi koji se mogu primeniti na probleme iz svakodnevnice.

4.4.1. Struktura višedimenzionalnog niza

Jednodimenzionalni nizovi $\hat{X}_i^{(j)}$ u koje su transformisani intervali $X_i^{(j)}$ neodređenih parametara $\tilde{p}_i$, $i = 1,2,\cdots,n$, na nivou pripadnosti μ_j, $j = 0,1,\cdots,m$, se mogu predstaviti višedimenzionalnim nizovima.

Uzimajući u obzir prednost uobičajene strukture niza kao i činjenicu da se elementi niza ponavljaju, u [17,18] je data pojednostavljena notacija višedimenzionalnog niza

$$\hat{X}_{D,d} = [s_1, s_2, \dots, s_T]_{D,d}$$

gde D označava ukupnu dimenziju niza, a d je dimenzija prema kojoj su elementi s_t, $t = 1,2,\dots,T$ niza, redom raspoređeni. U svim ostalim dimenzijama, elementi se jednostavno kopiraju tako da je dobijeni niz veličine T za $D = 1$, $(T \times T)$ za $D = 2$, $(T \times T \times T)$ za $D = 3$.

Primer 4.7. [9] Kao prvi primer, razmatra se višedimenzionalni niz dat u formi

$$\hat{X}_{2,1} = [-1,5]_{2,1}.$$

Ova notacija je ekvivalentna matrici

$$\hat{X}_{2,1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix},$$

gde su $T = 2$ elementa niza s_1 i s_2 raspoređeni prema dimenziji $d = 1$ (indeks vrste) niza.

Primer 4.8. [9] Kao drugi primer, razmatra se višedimenzionalni niz dat u obliku

$$\hat{X}_{2,2} = [4,5,1,3]_{2,2}.$$

Ova zapis je ekvivalentan matrici

$$\hat{X}_{2,2} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

gde su $T = 4$ elementa niza s_1, s_2, s_3, s_4 raspoređeni prema dimenziji $d = 2$ (indeks kolone) niza.

Koristeći koncept višedimenzionalnih nizova u okviru metoda transformacije, ukupna dimenzija D niza odgovara broju n nezavisnih parametara modela $\tilde{p}_i$, $i = 1,2,\cdots,n$ a dimenzija

d odgovara indeksu i odgovarajućeg fazi parametra. Prema ovoj notaciji, niz $\hat{X}_i^{(j)}$ opšteg metoda transformacije se može zapisati u formi

$$\hat{X}_{n,i}^{(j)} = \left[c_{1,i}^{(j)}, c_{2,i}^{(j)}, \dots, c_{m-j+1,i}^{(j)}\right]_{n,i},$$

za

$$c_{l,i}^{(j)} = \begin{cases} a_i^{(j)} & \text{za} \quad l = 1, j = 0,1, \dots, m \\ \dfrac{1}{2}\left(c_{l-1,i}^{(j+1)} + c_{l,i}^{(j+1)}\right) & \text{za} \quad l = 2,3, \dots, m-j, j = 0,1, \dots, m-2 \\ b_i^{(j)} & \text{za} \quad l = m-j+1, j = 0,1, \dots, m. \end{cases}$$

dok se za redukovani metod transformacije dobija

$$\hat{X}_{n,i}^{(j)} = \left[a_i^{(j)}, b_i^{(j)}\right]_{n,i}.$$

Ovo zapisivanje jednodimenzionalnih nizova kao višedimenzionalnih olakšava generaciju nizova i smanjuje složenost njihovog indeksiranja. Štaviše, pored lakšeg korišćenja, novo predstavljanje nizova se pokazuje računski efikasnijim a mogu se koristiti i moćni softverski paketi, koji su dostupni za obradu višedimenzionalnih nizova.

4.4.2. Pojednostavljivanje šeme dekompozicije

Računska složenost metoda transformacije se može efikasno pojednostaviti ukoliko se primene određene mere na kombinacije vrednosti parametara koje se ponavljaju. Ovo je potpuno ispravno ako se metod transformacije primenjuje u opštem obliku i ako su fazi-vrednosni parametri modela okarakterisani funkcijama pripadnosti simetričnog trougaonog oblika. U tom slučaju se iz postupka procene modela mogu isključiti kombinacije koje se ponavljaju i vreme za računanje je ušteđeno.

U ovom kontekstu, u [17,18] se ide korak dalje i predlaže ponovno korišćenje što je više moguće kombinacija za različite α-preseke, pravilnim izborom unutrašnjih tačaka intervala. Tačnije, predlaže se razmatranje samo onih unutrašnjih tačaka na određenom nivou pripadnosti koje su već korišćene na višim nivoima. Ovaj cilj pojednostavljivanja originalne šeme dekompozicije se može postići, na primer, zamenom $c_{l,i}^{(j)}$ u opštem metodu transformacije u koraku 2 odeljka 4.2.1. sa

$$c_{l,i}^{(j)} = \begin{cases} a_i^{(j)} & \text{za} \quad l = 1, j = 0,1, \dots, m \\ c_{l-1,i}^{(j+2)} & \text{za} \quad l = 2,3, \dots, m - j, j = 0,1, \dots, m - 2. \\ b_i^{(j)} & \text{za} \quad l = m - j + 1, j = 0\,,1, \dots, m. \end{cases}$$

Za simetrične funkcije pripadnosti trougaonog tipa, nova definicija je identična prethodnoj definiciji.

U opštem metodu transformacije, ovom tehnikom se može postići smanjenje računske kompleksnosti, ali se zato obično dobijaju manje precizni rezultati u odnosu na originalnu formulaciju.

5. Dodaci fazi aritmetike

U ovom poglavlju je dat pregled karakterističnih osobina fazi aritmetike koje pogoduju numeričkom rešavanju problema neodređenosti. Predstavljen je savremeni pristup inverznoj fazi aritmetici, koja je zasnovana na metodu transformacije. Definisane su mere fazi brojeva, nepreciznost i ekscentričnost kao i defazifikacija. Rezultati prezentovani u ovom delu su iz [5,8,9,15,19,20,24,25,26].

5.1. Obrada neodređenosti sa fazi aritmetikom

Neodređenost se može posmatrati kao posledica nedostatka informacija (videti [20]). Tačnije, informacije koje čine osnovu određenog modela mogu biti nepotpune, neprecizne, delimične, nepouzdane, nejasne ili kontradiktorne. Ovi nedostaci informacija su povezani sa različitim vrstama neodređenosti, koje se mogu meriti i obrađivati na različite načine koristeći alate iz klasične teorije skupova, teorije fazi skupova, teorije verovatnoće i teorije mogućnosti. Ovom prilikom akcenat je na dva tipa neodređenosti: nepreciznost i nejasnoća. Mogu se razlikovati dve glavne kategorije neodređenosti: slučajne neodređenosti, koje nastaju zbog delimičnog ili potpunog nedostatka informacija, i namerne neodređenosti, koje su najčešće posledica pojednostavljenja. Sledi pregled tipičnih primera ovih neodređenosti.

Slučajne neodređenosti:

- rasipanje (eng. scatter) ili varijabilnost (eng. variability) parametara modela
- šum merenja (eng. measurement noise) ili drugi nemodelirani signali poremećaja koji otežavaju identifikaciju parametara modela
- nejasnoća, koja je, na primer, prisutna ako su uključene verbalne karakterizacije vrednosti parametara, kao što su granični uslov "skoro stegnut (eng. nearly clamped)" ili početni uslov "velika brzina (eng. high velocity)"
- idealizacija, koja se uvek pojavljuje u postupcima modeliranja kada su sistemi iz realnog sveta predstavljeni matematičkim modelima.

Namerne neodređenosti:

- pojednostavljenje modela iz različitih razloga i svrhe, kao što je postizanje analitičkih rešenja, smanjenje vremena simulacije ili primena postojećih teorija.

Dva metoda za predstavljanje neodređenosti u kontekstu nepreciznosti se izdvajaju kao važna (videti [5]): teorija verovatnoće i intervalano računanje. U prvom metodu se neodređeni parametri modeliraju slučajnim promenljivama, dok se u drugom oblasti nepreciznosti predstavljaju klasičnim skupovima. Novi metod, na koji se fokusira ovaj rad, jeste da se neodređeni parametri modela kvantifikuju pomoću fazi brojeva i prati neodređenost kroz sisteme korišćenjem fazi aritmetike ([9]).

Prednosti ovog pristupa nad metodom intervalnog računanja su očigledni. Pored efekta precenjivanja, koji se smatra velikim nedostatkom intervalne aritmetike, predstavljanje oblasti vrednosti nepreciznih parametara modela klasičnim skupovima je suprotno shvatanju nepreciznosti.

Koristeći teoriju verovatnoće, neodređeni parametri modela se predstavljaju kao slučajne promenljive i kvantifikuju preko funkcija gustina. Funkcija gustine izlazne vrednosti modela se obično određuje numerički, pomoću Monte-Carlo metoda. Tačnije, modeli se procenjuju za veliki broj kombinacija vrednosti parametara, nasumično generisanih prema definisanim raspodelama. Međutim, za prethodno navedene tipove neodređenosti, primena teorije verovatnoće, često nije opravdana niti tačna. U slučaju šuma merenja ili rasipanja parametara modela može se primeniti teorija verovatnoće i Monte-Carlo metod. Ako neodređenost potiče iz idealizacije ili pojednostavljenja, korišćenje teorije verovatnoće nije opravdano, a u slučaju nejasnoća, to je čak i netačno. Nejasnoća u verbalnoj karakterizaciji daje motivaciju za uvođenje fazi skupova. Slučajevi idealizacije ili pojednostavljenja su uvek prisutni kod složenih sistema iz realnog sveta koji se bilo nenamerno ili namerno predstavljaju idealizovanim ili pojednostavljenim modelima. S obzirom na ovako grubu strukturu većine modela, sasvim je opravdano da se nepreciznost prati širenjem oblasti parametra modela od klasične do fazi. Ova definicija je u skladu sa pojmom fazi restrikcije (eng. fuzzy restriction) koju je predložio Zadeh ([25]). Fazi restrikcija se može tumačiti kao raspodela mogućnosti, koja je povezana sa fazi promenljivom na isti način kao što je raspodela verovatnoća povezana sa slučajnom promenljivom ([26]).

Kao alternativa za teoriju verovatnoće ili Monte-Carlo simulacije, korišćenje pristupa mogućnosti ima nekoliko dobrihih karakteristika:

- Mere mogućnosti su često mnogo bolje usklađene sa ljudskom percepcijom kvantifikacije nepreciznosti nego mere verovatnoće.
- U praktičnoj primeni se češće traže mogući domeni izlaznih promenljivih nego informacije o verovatnoćama.
- Za dobijanje krivih za funkcije pripadnosti izlaznih fazi promenljivih je obično potrebno znatno manje procena modela u odnosu na dobijanje krivih pomoću Monte-Carlo simulacija (videti primer 5.1).
- Ako se pristup mogućnosti fazi aritmetike koristi da se kvantifikuje nepreciznost u kontekstu rasipanja ili šuma, ukupan efekat svih neodređenih parametara modela zajedno (iako su različitog porekla) se može se odrediti u jednom koraku simulacije. Štaviše, istovremena analiza svih parametara modela, odnosno određivanje uticaja neodređenosti

parametara na ukupnu neodređenost izlazne vrednosti modela može da se vrši pomoću analize u okviru metoda transformacije.

Primer 5.1. [9] Neka je dat funkcionalni izraz

$$z = f(x_1, x_2, x_3) = sin(x_1) + {x_2}^2 - x_3,$$

koji se procenjuje i za fazi-vrednosne parametre i za slučajne promenljive. U prvom slučaju, problem je dat sa

$$\tilde{q} = f(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3) = sin(\tilde{p}_1) + {\tilde{p}_2}^2 - \tilde{p}_3$$

gde su fazi-vrednosni parametri $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3$ definisani fazi brojevima simetričnog kvazi-Gausovog oblika prema

$$\tilde{p}_1 = gfn^* \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{9}\right), \qquad \tilde{p}_2 = gfn^* \, (0.5, 0.5, 0.5), \qquad \tilde{p}_3 = gfn^* \, (3, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

kao što je prikazano na slici 5.1.(a). Odgovarajući fazi-vrednosni rezultat $\tilde{q}$ (slika 5.1.(b)), se može dobiti pomoću metoda transformacije u proširenom obliku za $\bar{n} = 2$ (slično kao u primeru 4.6.). Ovo zahteva 1012 procena datog funkcionalnog izraza ako je dekompozicioni broj $m = 10$ i ne primenjuju se napredni koncepti efikasne implementacije (odeljak 4.4.).

U drugom slučaju, problem se može formulisati kao

$$q = f(p_1, p_2, p_3) = sin(p_1) + {p_2}^2 - p_3$$

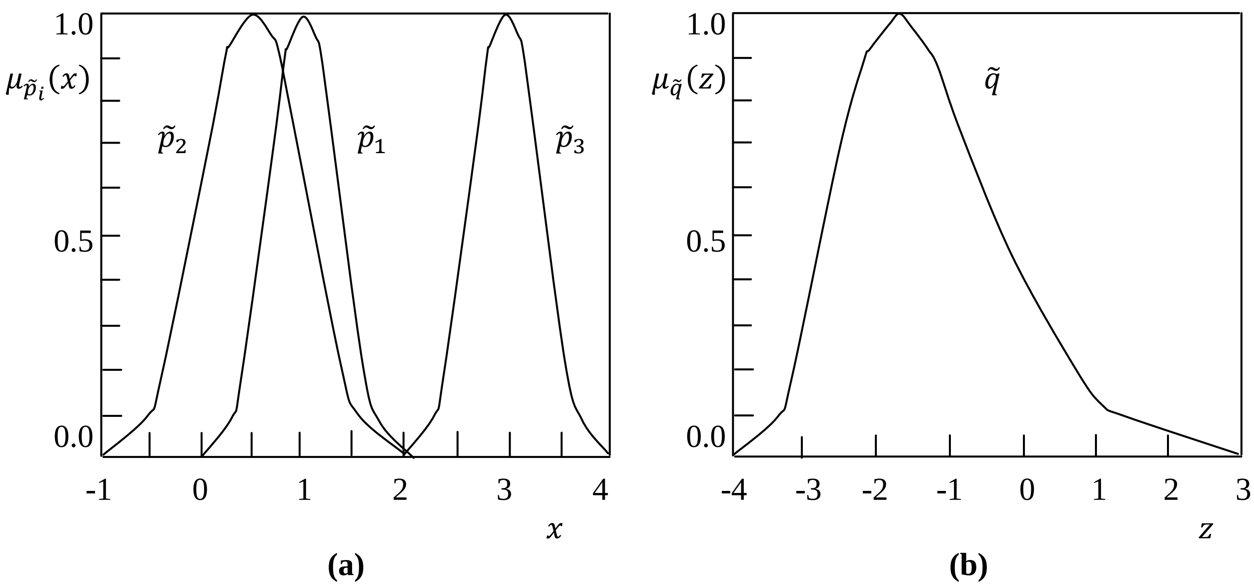
gde su p_1, p_2, p_3 slučajne promenljive za koje se pretpostavlja da imaju normalnu raspodelu sa srednjim vrednostima m_1, m_2, m_3 i standardnim devijacijama σ_1, σ_2, σ_3 datim sa

$$\begin{array}{lll} p_1: & m_1 = \dfrac{\pi}{3} & \sigma_1 = \dfrac{\pi}{9} \\ p_2: & m_2 = 0.5 & \sigma_2 = 0.5 \\ p_3: & m_3 = 3 & \sigma_3 = \dfrac{1}{3}. \end{array}$$

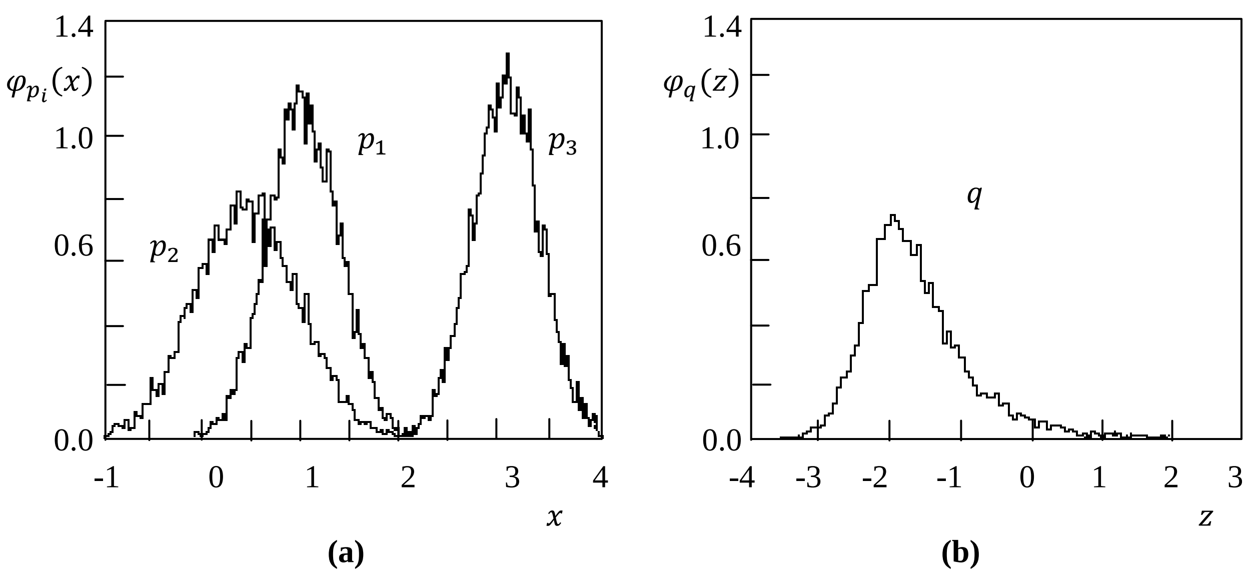
Da bi se numerički procenio izraz pomoću Monte-Carlo simulacije, potrebno je generisati skup od 10000 uzoraka za svaku od slučajnih promenljivih $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3$. One se mogu prikazati kao normalizovani histogrami $\varphi_{p_i}(x)$ (slika 5.1.(a)) i pritom zadovoljavaju

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{p_i}(x) \mathrm{d}x = 1.$$

Dobijeni histogram $\varphi_q(z)$ za izlaz q funkcionalnog izraza je prikazan na slici 5.1.(b).



Slika 5.1. (a) Fazi-vrednosni parametri modela $\tilde{p}_1$, $\tilde{p}_2$ i $\tilde{p}_3$, **(b)** Izlazna vrednost $\tilde{q}$ dobijena proširenim metodom transformacije za $\bar{n} = 2$, $m = 10$ (ukupan broj procena funkcije: 1012)



Slika 5.2. (a) Histogrami slučajnih promenljivih p_1, p_2, p_3 , **(b)** Histogram izlazne slučajne promenljive q dobijen Monte-Carlo simulacijom (ukupan broj procena funkcije: 10000)

Da bi se dobila funkcija gustine pomoću Monte-Carlo simulacije potrebno je znatno više procena funkcije modela nego kod pristupa mogućnosti zasnovanog na fazi aritmetici.

Što se tiče definicija funkcija pripadnosti neodređenih parametara modela, ne postoji neko univerzalno uputstvo kako da se odrede. Zapravo, stvarni pristup prilično zavisi od tipa neodređenosti koju treba da predstavlja fazi broj.

5.2. Inverzna fazi aritmetika

Fazi brojevi koji se pojavljuju u jednačinama fazi-parametrizovanih modela se mogu tumačiti kao numeričke reprezentacije neodređenosti različitog porekla. Neodređenosti u parametrima modela se mogu svrstati u različite grupe, prema njihovoj vrsti porekla. Dokle god se neodređenost javlja zbog nejasnoće, rasipanja ili varijabilnosti, fazi-vrednosni parametri modela se mogu unapred definisati bez većih problema što se postiže uključivanjem histograma izmerenih podataka. U slučaju idealizacije ili pojednostavljenja, neodređenosti u parametrima modela obično odražavaju efekte činjenica koje slučajno nisu uzete u obzir prilikom postupka modeliranja ili su namerno zanemarene kao posledica pojednostavljenja. Funkcije pripadnosti tih parametara se ne mogu definisati na direktan način. U stvari, one treba da budu identifikovane na osnovu fazi-vrednosnog izlaza modela i njegove funkcije pripadnosti, izvedenih iz eksperimentalnih podataka. Rešenje ovog problema nije trivijalno i zahteva primenu inverzne fazi aritmetike, pa se uvodi novi pristup, koji je prvobitno predstavljen u [8].

Fazi-parametrizovani model je predstavljen sistemom jednačina oblika

$$\tilde{q}_1 = F_1(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n),$$

$$\vdots = \vdots$$

$$\tilde{q}_N = F_N(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n).$$

Preduslov za primenu inverzne fazi aritmetike jeste invertibilnost sistema, odnosno, njegovo jedinstveno rešenje. Iz tog razloga se dalje razmatraju samo oni modeli gde su izlazne promenljive $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_N$ strogo monotone u odnosu na svaki od parametara modela $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n$. Ovo omogućava simulaciju i analizu modela primenom metoda transformacije u redukovanom obliku i takođe izostavljajući rekurzivne komponente u poslednjem koraku ponovne transformacije.

S obzirom na strukturu definisanog fazi-parametrizovanog modela, glavni problem inverzne fazi aritmetike je identifikacija fazi-vrednosnih parametara modela $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n$ na osnovu datih vrednosti za izlazne varijable $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_N$. U slučaju $N < n$ problem identifikacije je neodređen, dok za $N > n$ njegovo rešenje zahteva primenu postupka optimizacije. Zbog toga se razmatra samo slučaj $N = n$, gde je broj izlaznih promenljivih identičan broju neodređenih parametara modela.

Iako nalaženje rešenja za problem inverzne fazi aritmetike izgleda prilično jednostavno i lako, bar za linearne sisteme (jednačine modela se rešavaju po parametrima $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n$ a obrnuti model se procenjuje pomoću metoda transformacije sa $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n$ kao ulaznim promenljivama), ovaj postupak pada jer dovodi do značajnog precenjivanja rasplinutosti (eng. fuzziness) parametara modela $\tilde{p}_i, i = 1,2, \dots, n$. (videti primer 5.2.). Razlog za ovaj neuspeh se nalazi u osnovnom preduslovu metoda transformacije, koji zahteva da fazi-vrednosni ulazni parametri budu strogo nezavisni. Ovaj uslov nikad ne može biti ispunjen za jednačine inverznog modela, jer su svi ulazni parametri $\tilde{q}_r,\ r = 1,2,\dots,n$ u slučaju inverzne procene funkcionalno zavisni od parametara modela $\tilde{p}_i,\ i = 1,2,\dots,n$.

Da bi se uspešno rešio inverzni fazi aritmetički problem, može se primeniti sledeća šema, koja predstavlja kombinaciju simulacije i analize iz metoda transformacije ([9]):

1. Određivanje modalnih vrednosti $\check{\bar{x}}_1, \check{\bar{x}}_2, \dots, \check{\bar{x}}_n$

   Modalne vrednosti $\bar{x}_i = core(\tilde{p}_i)$ stvarnih parametara modela $\tilde{p}_i,\ i = 1,2,\dots,n$ i modalne vrednosti $\bar{z}_r = core(\tilde{q}_r)$ izlaznih promenljivih $\tilde{q}_r,\ r = 1,2,\dots,n$ su povezane sistemom jednačina

$$\bar{z}_1 = F_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

$$\vdots = \vdots$$

$$\bar{z}_n = F_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n).$$

   Polazeći od n datih vrednosti $\bar{z}_r,\ r = 1,2,\dots,n$ inverznog problema, n modalnih vrednosti $\check{\bar{x}}_i = core(\check{\tilde{p}}_i)$ još uvek nepoznatih fazi-vrednosnih parametara modela $\check{\tilde{p}}_i,\ i = 1,2,\dots,n$ se mogu odrediti ili analitički, rešavanjem prethodno definisanog sistema jednačina po $\bar{x}_i,\ i = 1,2,\dots,n$ što se lako može uraditi za linearne sisteme, ili numerički rešavanjem sistema jednačina pomoću određenog iterativnog postupka.

2. Izračunavanje uvećavajućih faktora

   Za određivanje jednostranih uvećavajućih faktora $\eta_{ri+}^{(j)}$ i $\eta_{ri-}^{(j)}$ potrebno je simulirati model za neke pretpostavljene neodređene parametre $\tilde{p}_i^*,\ i = 1,2,\dots,n$, korišćenjem redukovanog metoda transformacije. Tačnije, za modalne vrednosti od $\tilde{p}_i^*$ se uzimaju izračunate vrednosti $\check{\bar{x}}_i,\ i = 1,2,\dots,n$ a rasplinutost treba da se podesi na dovoljno veliku vrednost, tako da pravi opseg neodređenosti $\check{\tilde{p}}_i$ bude pokriven.

3. Određivanje parametara $\check{\tilde{p}}_1, \check{\tilde{p}}_2, \dots, \check{\tilde{p}}_n$

   Pozivajući se na reprezentaciju fazi brojeva u dekompozabilnom obliku, donje i gornje granice intervala fazi parametara $\check{\tilde{p}}_i$ na $(m+1)$-nom stepenu pripadnosti μ_j se definišu sa $\check{a}_i^{(j)}$i $\check{b}_i^{(j)}$ a granice datih izlaznih vrednosti $\tilde{q}_r$ sa $\check{c}_i^{(j)}$i $\check{d}_i^{(j)}$. Granice intervala $\check{a}_i^{(j)}$i $\check{b}_i^{(j)}$, na osnovu kojih se izvode funkcije pripadnosti nepoznatih parametara modela $\check{\tilde{p}}_i$, $i = 1,2,\dots,n$ se mogu odrediti iz

$$\begin{bmatrix} \breve{a}_1^{(j)} \\ \breve{b}_1^{(j)} \\ \breve{a}_2^{(j)} \\ \breve{b}_2^{(j)} \\ \vdots \\ \breve{a}_n^{(j)} \\ \breve{b}_n^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \breve{\breve{x}}_1 \\ \breve{\breve{x}}_1 \\ \breve{\breve{x}}_2 \\ \breve{\breve{x}}_2 \\ \vdots \\ \breve{\breve{x}}_n \\ \breve{\breve{x}}_n \end{bmatrix} + H^{(j)^{-1}} \begin{bmatrix} c_1^{(j)} - \bar{z}_1 \\ d_1^{(j)} - \bar{z}_1 \\ c_2^{(j)} - \bar{z}_2 \\ d_2^{(j)} - \bar{z}_2 \\ \vdots \\ c_n^{(j)} - \bar{z}_n \\ d_n^{(j)} - \bar{z}_n \end{bmatrix}$$

gde je

$$H^{(j)} = \begin{bmatrix} H_{11}^{(j)} & H_{12}^{(j)} & \dots & H_{1n}^{(j)} \\ H_{21}^{(j)} & H_{22}^{(j)} & \dots & H_{2n}^{(j)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{n1}^{(j)} & H_{n2}^{(j)} & \dots & H_{nn}^{(j)} \end{bmatrix}$$

$$H_{r,i}^{(j)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \eta_{ri-}^{(j)}(1 + sgn(\eta_{ri-}^{(j)})) & \eta_{ri+}^{(j)}(1 - sgn(\eta_{ri+}^{(j)})) \\ \eta_{ri-}^{(j)}(1 - sgn(\eta_{ri-}^{(j)})) & \eta_{ri+}^{(j)}(1 + sgn(\eta_{ri+}^{(j)})) \end{bmatrix}$$

za $i, r = 1,2, \dots, n,\ \ j = 0,1, \dots, m-1.$

Vrednosti $\breve{a}_i^{(m)} = \breve{b}_i^{(m)}, i = 0,1, \dots, n$ za nivo pripadnosti $\mu_m = 1$ su već određene modalnim vrednostima $\breve{\breve{x}}_i$.

Da bi se proverili identifikovani parametri modela $\breve{\breve{p}}_1, \breve{\breve{p}}_2, \dots, \breve{\breve{p}}_n$ jednačine modela se mogu ponovo simulirati pomoću metoda transformacije, koristeći $\breve{\breve{p}}_1, \breve{\breve{p}}_2, \dots, \breve{\breve{p}}_n$ kao ulazne fazi parametre.

Ukoliko se razmatra specijalan slučaj za $n = 1$ prethodno navedene jednakosti postaju

$$\begin{bmatrix} c_1^{(j)} - \bar{z}_1 \\ d_1^{(j)} - \bar{z}_1 \end{bmatrix} = H_{11}^{(j)} \begin{bmatrix} \breve{a}_1^{(j)} - \breve{\breve{x}}_1 \\ \breve{b}_1^{(j)} - \breve{\breve{x}}_1 \end{bmatrix}$$

$$c_1^{(j)} - \bar{z}_1 = \eta_{ri-}^{(j)} \left(\breve{a}_1^{(j)} - \breve{\breve{x}}_1 \right)$$

$$d_1^{(j)} - \bar{z}_1 = \eta_{ri+}^{(j)} \left(\breve{b}_1^{(j)} - \breve{\breve{x}}_1 \right)$$

za $\eta_{ri+}^{(j)}, \eta_{ri-}^{(j)} > 0$

odnosno,

$$c_1^{(j)} - \bar{z}_1 = \eta_{ri+}^{(j)} \left(\breve{b}_1^{(j)} - \breve{\breve{x}}_1 \right)$$

$$d_1^{(j)} - \bar{z}_1 = \eta_{ri-}^{(j)} \left(\breve{a}_1^{(j)} - \breve{\breve{x}}_1 \right)$$

za $\eta_{ri+}^{(j)}, \eta_{ri-}^{(j)} < 0$.

Napomena 5.1. Slučaj gde $\eta_{ri+}^{(j)}$ i $\eta_{ri-}^{(j)}$ imaju različite algebarske znakove se ne može desiti zbog pretpostavke o monotonosti izlaza $\tilde{q}_r$.

Kao što se može videti iz prethodnih jednačina, ova formulacija inverzne fazi aritmetike garantuje da je pozitivno odstupanje od modalne vrednosti $\bar{z}_1$ posledica pozitivnog odstupanja od $\breve{\breve{x}}_1$ ako su uvećavajući faktori pozitivni, odnosno negativnog odstupanja od $\breve{\breve{x}}_1$ ako su uvećavajući faktori negativni. Analogno važi i za negativno odstupanje od $\bar{z}_1$.

Napomena 5.2. Ne postoji uvek rešenje inverznog fazi aritmetičkog problema. Takav problem se naziva nekorektan (eng. ill-posed) i u tom slučaju je

$$\breve{a}_i^{(j)} \leq \breve{\breve{x}}_i, \qquad \breve{b}_i^{(j)} \geq \breve{\breve{x}}_i, \qquad i = 1,2, \dots, n, \qquad j = 0,1, \dots, m-1.$$

Primer 5.2. [9] Razmatra se model reda $n = 2$ koji je linearan u odnosu na fazi-vrednosne parametre. Dat je fazi racionalnim izrazima

$$\tilde{q}_1 = F_1(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = -4\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2$$

$$\tilde{q}_2 = F_2(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = 3\tilde{p}_1 - 2\tilde{p}_2$$

koji se mogu zapisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \end{bmatrix}.$$

Da bi se dobile izlazne vrednosti modela $\tilde{q}_1$ i $\tilde{q}_2$, koje će poslužiti kao ulazne vrednosti za inverzni problem, model se procenjuje za parametre modela

$$\tilde{p}_1 = gfn^*(1,0.05,0.05)$$

$$\tilde{p}_2 = tfn(2,0.3,0.2),$$

prikazane na slici 5.3.(a). Odnosno, parametar modela $\tilde{p}_1$ je definisan kao fazi broj kvazi-Gausovog oblika sa modalnom vrednošću $\bar{x}_1 = 1$ i standardnom devijacijom $\sigma_1 = 5\%\bar{x}_1 = 0.05$, a $\tilde{p}_2$ je dat linearnim fazi brojem sa modalnom vrednošću $\bar{x}_2 = 2$ i odstupanjem $\alpha_{2L} = 15\%\bar{x}_2 = 0.3$ u levu stranu, odnosno $\alpha_{2R} = 10\%\bar{x}_2 = 0.2$ u desnu stranu. Kao rezultat procene fazi racionalnih izraza, dobijaju se fazi-vrednosni izlazi $\tilde{q}_1$ i $\tilde{q}_2$ sa modalnim vrednostima $\bar{z}_1 = -2$ i $\bar{z}_2 = -1$, prikazani na slici 5.3.(b).

Na osnovu prethodno navedene šeme za inverznu fazi aritmetiku, dobijaju se sledeći rezultati ([9]):

1. Modalne vrednosti $\check{\bar{x}}_1$ i $\check{\bar{x}}_2$

   Na osnovu modalnih vrednosti $\bar{z}_1 = -2$ i $\bar{z}_2 = -1$ od $\tilde{q}_1$ i $\tilde{q}_2$, mogu se odrediti modalne vrednosti $\check{\bar{x}}_1$ i $\check{\bar{x}}_2$

$$\begin{bmatrix} \check{\bar{x}}_1 \\ \check{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2. Uvećavajući faktori η_{ri+} i η_{ri-}, $i, r = 1,2$

   Kao rezultat analize sistema, koristeći redukovani metod transformacije, dobijaju se sledeći uvećavajući faktori

$$\eta_{11+}^{(j)} = \eta_{11-}^{(j)} = -4, \qquad \eta_{12+}^{(j)} = \eta_{12-}^{(j)} = 1,$$

$$\eta_{21+}^{(j)} = \eta_{21-}^{(j)} = 3, \qquad \eta_{22+}^{(j)} = \eta_{22-}^{(j)} = -2,$$

$$j = 0,1, \dots, m-1.$$

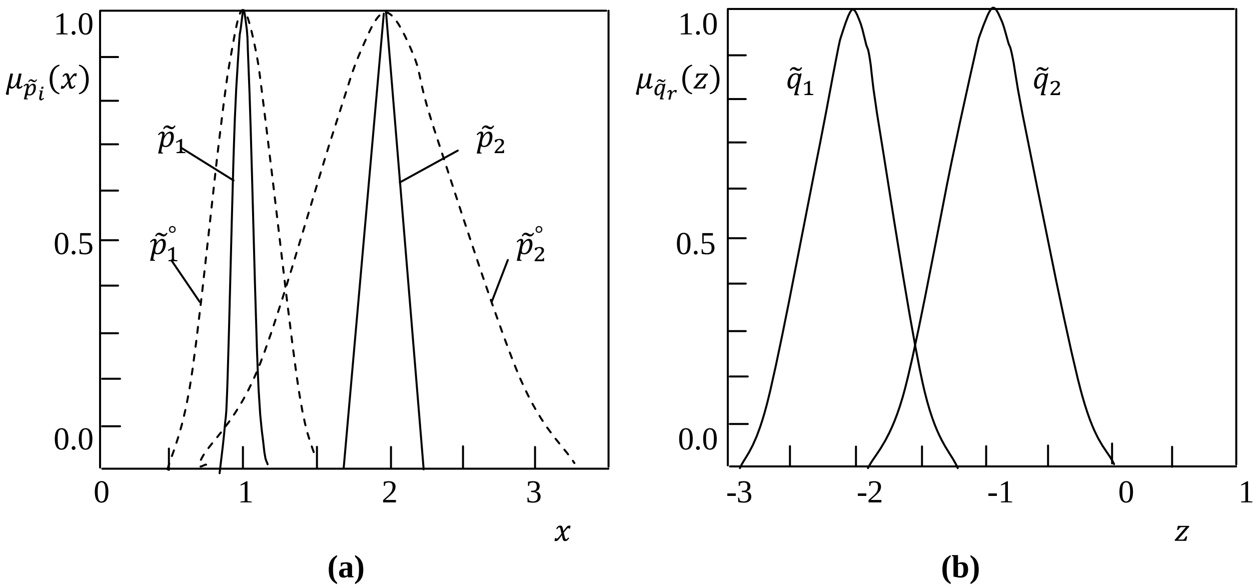
3. Parametri modela $\check{\tilde{p}}_1$ i $\check{\tilde{p}}_2$

   Nepoznati parametri modela $\check{\tilde{p}}_1$ i $\check{\tilde{p}}_2$ se dobijaju iz jednačina, gde je matrica $H^{(j)}$ određena kao

$$H^{(j)} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad j = 0,1, \dots, m-1.$$

Pošto su originalni parametri modela $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$ poznati za ovaj primer, procenjeni parametri modela $\check{\tilde{p}}_1$ i $\check{\tilde{p}}_2$ se mogu direktno uporediti s njima. Zaključuje se da su funkcije pripadnosti koje se odnose na originalne i procenjene parametre modela identične (slika 5.3.(a)), stoga dodatna ponovna simulacija sistema radi poređenja originala i ponovno simuliranih izlaznih varijabli nije potrebna. Da bi se ilustrovala mana direktne procene inverznog modela pomoću metoda transformacije sa $\tilde{q}_1$ i $\tilde{q}_2$ kao fazi-vrednosnim ulaznim parametrima, precenjeni rezultati $\mathring{\tilde{p}}_1$ i $\mathring{\tilde{p}}_2$ za parametre modela $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$, dobijeni ovom metodom, su takođe prikazani na slici 5.3.(a).

Napomena 5.3. Može se uočiti karakteristična osobina linearnih sistema a to je identitet uvećavajućih faktora s leve i desne strane, kao i njihova nezavisnost od nivoa pripadnosti μ_j.



Slika 5.3. (a) Originalni parametri modela $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$(puna linija), ocenjeni parametri $\check{\tilde{p}}_1$ i $\check{\tilde{p}}_2$ (identični sa njima), precenjeni parametri $\tilde{p}_1^{\circ}$ i $\tilde{p}_2^{\circ}$ (isprekidana linija) **(b)** Izlazne vrednosti $\tilde{q}_1$ i $\tilde{q}_2$

5.3. Defazifikacija fazi brojeva

Postoji veliki broj specijalnih fazi aritmetičkih problema koji zahtevaju definiciju takozvanog postupka defazifikacije. Cilj defazifikacije je da se transformišu fazi-vrednosni elementi u klasično-vrednosne elemente. Da bi se ovo izvelo na ispravan način i istovremeno očuvao maksimum informacija o neodređenosti, postupak defazifikacije se može definisati u okviru metoda transformacije. Tačnije, fazi brojevi se mogu defazifikovati direktno iz njihovih transformisanih reprezentacija izostavljanjem koraka ponovne transformacije i ponovne kompozicije u šemi metoda transformacije.

Napomena 5.4. Iako se u nastavku operacija defazifikacije definiše za fazi brojeve, može se primeniti i na fazi vektore.

Ako se posmatra fazi broj $\tilde{v}$, dat u transformisanom obliku

$$\hat{V} = \left\{\hat{V}^{(0)}, \hat{V}^{(1)}, \dots, \hat{V}^{(m)}\right\}$$

gde je $\hat{V}^{(j)}$ niz na nivou pripadnosti $\mu_j = \frac{j}{m}$, defazifikovani fazi broj

$$v^{\circ} = defuzz(\tilde{v})$$

se u zavisnosti od verzije metoda transformacije koja je primenjena određuje na sledeći način ([9]):

- redukovani metod transformacije

$$v^{\diamond} = \frac{1}{2^n(m+1)} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=1}^{2^n} {}^{k}\hat{v}^{(j)}$$

- opšti metod transformacije

$$v^{\diamond} = \frac{1}{(m+1-j)^n(m+1)} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=1}^{(m+1-j)^n} {}^{k}\hat{v}^{(j)}$$

- prošireni metod transformacije

$$v^{\diamond} = \frac{1}{2^{n-\bar{n}}(m+1-j)^{\bar{n}}(m+1)} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=1}^{2^{n-\bar{n}}(m+1-j)^{\bar{n}}} {}^{k}\hat{v}^{(j)}.$$

U svim slučajevima, vrednost ${}^{k}\hat{v}^{(j)}$ označava *k*-ti element niza $\hat{V}^{(j)}$.

Lako se može utvrditi da u specijalnom slučaju kada je $\hat{V}$ dato kao transformisana reprezentacija

$$\hat{V} = \hat{X}_i = \left\{\hat{X}_i^{(0)}, \hat{X}_i^{(1)}, \dots, \hat{X}_i^{(m)}\right\}$$

ulaznog fazi parametra $\tilde{p}_i,\ i = 1,2,\dots,n$, defazifikovana vrednost je data kao aritmetička sredina granica intervala na svim nivoima pripadnosti, tj.

$$v^{\diamond} = x_i^{\diamond} = defuzz(\tilde{p}_i) = \frac{1}{2(m+1)} \sum_{j=0}^{m} a_i^{(j)} + b_i^{(j)}$$

$$\left[a_i^{(j)}, b_i^{(j)}\right] = cut_{\mu_j}(\tilde{p}_i), \qquad \mu_j = \frac{j}{m}, \qquad j = 1,2,\dots,m$$

$$\left[a_i^{(0)}, b_i^{(0)}\right] = \left[w_{l_i}, w_{r_i}\right], \qquad (w_l, w_r) = supp(\tilde{p}_i).$$

Informacije kodirane u transformisanim reprezentacijama fazi brojeva jasno nadmašuju one u ponovno transformisanim elementima. Konkretno, ako niz $\hat{V}$ sadrži kompleksno-vrednosne elemente, kao što su transformisane reprezentacije polova oscilatornih sistema, metoda defazifikacije se pokazuje kao veoma uspešna, jer izbegava dvosmisleni korak ponovne transformacije u slučaju dvodimenzionalnih fazi vektora.

5.4. Mere fazi brojeva

U cilju kvantifikacije stepena neodređenosti svojstvenog fazi skupovima, postoji veliki broj pristupa predloženih od strane raznih autora (npr. [19,20]). U većini slučajeva, poseban akcenat se stavlja na merenje stepena rasplinutosti, koja se odnosi na nejasnoću proizašlu iz nepreciznih granica fazi skupa. U [15] je predložen indeks rasplinutosti definisan kao Hamming-ova udaljenost između funkcije pripadnosti fazi skupa i karakteristične funkcije njemu najbližeg klasičnog skupa, a u [24] suština rasplinutosti fazi skupa se odnosi na ublažavanje razlike između skupa i njegovog komplementa, odnosno, u njihovom nepraznom preseku. Kao posebna klasa fazi skupova, fazi brojevi se mogu koristiti da se kvantifikuje parametarska neodređenost u okviru simulacije i analize neodređenih sistema primenom metoda transformacije. U tu svrhu se definišu nepreciznost i ekscentričnost fazi brojeva koje su se pokazale kao korisne mere.

5.4.1. Nepreciznost fazi brojeva

Definicija 5.1. [9] Nepreciznost $imp(\tilde{v})$ fazi broja $\tilde{v}$ se definiše kao aproksimacija njegove kardinalnosti

$$card(\tilde{v}) = |\tilde{v}| = \int_{x\in X} \mu_{\tilde{v}}(x)\mathrm{d}x = \int_{x\in supp(\tilde{v})} \mu_{\tilde{v}}(x)\mathrm{d}x$$

sa

$$imp(\tilde{v}) = \frac{1}{2m}\sum_{j=0}^{m-1}\left[wth\left(V^{(j)}\right) + wth\left(V^{(j+1)}\right)\right] = \frac{1}{2m}\left[wth\left(V^{(0)}\right) + 2\sum_{j=1}^{m-1} wth\left(V^{(j)}\right)\right],$$

gde su $V^{(j)},\ j = 0,1,\dots,m$ intervalno-vrednosni elementi dekompozabilne reprezentacije V od $\tilde{v}$, dati sa

$$V = \left\{V^{(0)}, V^{(1)}, \dots, V^{(m)}\right\}$$

$$V^{(j)} = cut_{\mu_j}(\tilde{v}),\ \ \mu_j = \frac{j}{m}, j = 1,2,\dots,m,$$

$$V^{(0)} = [w_l', w_r'],\ \ (w_l', w_r') = supp(\tilde{v})$$

a w_l' i w_r' su donja i gornja granica intervala od $\tilde{v}$.

Definicija 5.2. [9] Relativna nepreciznost $imp_{\bar{v}}(\tilde{v})$ fazi broja $\tilde{v}$ u odnosu na njegovu modalnu vrednost $\bar{v} = core(\tilde{v})$ se definiše za $\bar{v} \neq 0$ sa

$$imp_{\bar{v}}(\tilde{v}) = \frac{imp(\tilde{v})}{\bar{v}} = \frac{imp(\tilde{v})}{core(\tilde{v})}.$$

5.4.2. Ekscentričnost fazi brojeva

Definicija 5.3. [9] Ekscentričnost $ecc(\tilde{v})$ fazi broja $\tilde{v}$ se definiše kao razlika između njegove defazifikovane i modalne vrednosti, odnosno sa

$$ecc(\tilde{v}) = v^{\diamond} - \bar{v} = defuzz(\tilde{v}) - core(\tilde{v}).$$

Napomena 5.5. U specijalnom slučaju kada je $\tilde{v}$ dat nezavisnim ulaznim fazi parametrima $\tilde{p}_i,\ i = 1,2,\dots,n$ simetričnog oblika, defazifikovana vrednost $v^{\diamond}$od $\tilde{v}$ se poklapa sa njegovom modalnom vrednošću $\bar{v}$, tj.$ecc(\tilde{v}) = 0$. Osim toga, svaka izlazna vrednost modela $\tilde{q}$ kog karakteriše linearna zavisnost parametara modela $\tilde{p}_i, i = 1,2,\dots,n$ pokazuje nula ekscentričnost ukoliko parametri modela imaju simetričan oblik. Nasuprot tome, ako se za simetrične parametre modela $\tilde{p}_i, i = 1,2,\dots,n$ uoči nenula ekscentričnost izlaza modela $\tilde{q}$, može se izvesti zaključak o postojanju nelinearne zavisnosti parametara modela.

U nastavku je uvedena standardizovana mera ekscentričnosti.

Definicija 5.4. [9] Specifična ekscentričnost $\overline{ecc}(\tilde{v})$ fazi broja $\tilde{v}$, predstavlja ekscentričnost fazi broja u odnosu na njegovu nepreciznost, tj.

$$\overline{ecc}(\tilde{v}) = \frac{ecc(\tilde{v})}{imp(\tilde{v})}.$$

Primer 5.3. [9] Neka je dat fazi raconalni izraz

$$g(\tilde{p}) = 2\tilde{p} - \tilde{p}^2,$$

koji se procenjuje za simetrični linarni fazi broj

$$\tilde{p} = tfn(1.5,1.5,1.5)$$

prikazan na slici 5.4.(a). Koristeći redukovani metod transformacije za dekompozicioni broj $m = 15$, dobija se fazi-vrednosni izlaz $\tilde{q} = g(\tilde{p})$, (slika 5.4.(b)). Kada se izračuna defazifikacija, nepreciznost i ekscentričnost parametra modela $\tilde{p}$ i izlaza $\tilde{q}$, dobijaju se sledeći rezultati:

$$\bar{x} = core(\tilde{p}) = 1.5 \qquad x^{\diamond} = defuzz(\tilde{p}) = 1.5$$

$$imp(\tilde{p}) = 1.5 \qquad imp_{\bar{x}}(\tilde{p}) = 100\%$$

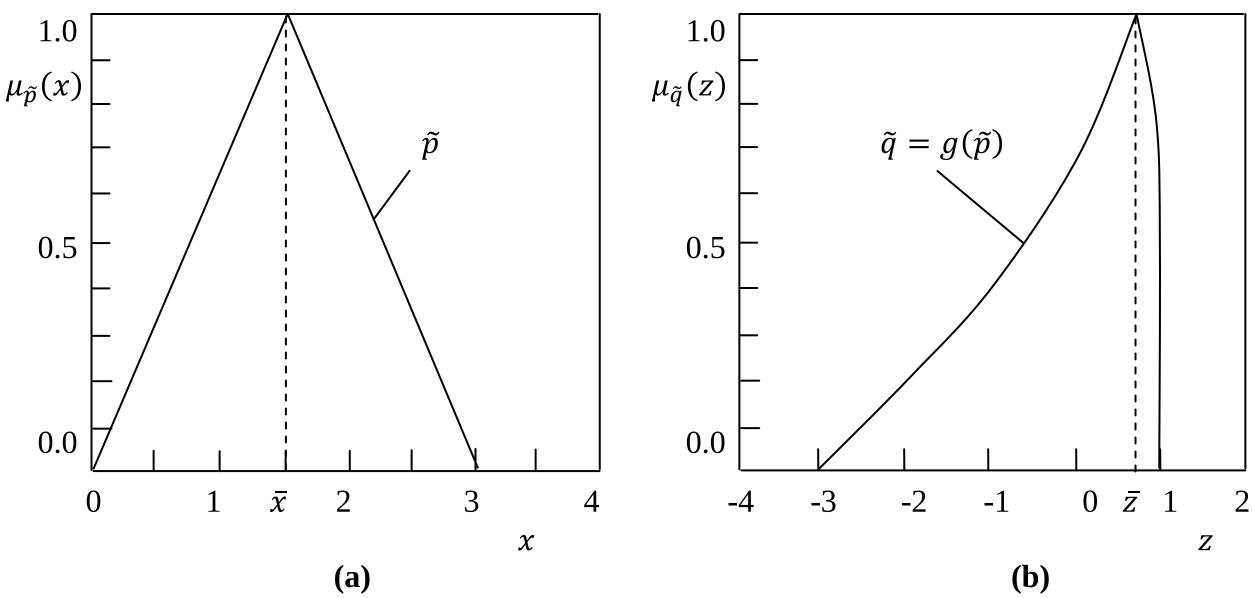
$$ecc(\tilde{p}) = 0 \qquad \overline{ecc}(\tilde{p}) = 0\%.$$

$$\bar{z} = core(\tilde{q}) = 0.75 \qquad z^{\diamond} = defuzz(\tilde{q}) \approx 0.44$$

$$imp(\tilde{q}) \approx 1.72 \qquad imp_{\bar{z}}(\tilde{q}) \approx 230\%$$

$$ecc(\tilde{q}) \approx -0.31 \qquad \overline{ecc}(\tilde{q}) \approx -18\%.$$

Očigledno je da nelinearna priroda fazi racionalnog izraza u odnosu na fazi-vrednosni parametar $\tilde{p}$ potiče od nenula ekscentričnosti izlazne vrednosti $\tilde{q}$.



Slika 5.4. (a) Fazi-vrednosni parametar $\tilde{p}$, **(b)** Izlazni fazi broj $\tilde{q} = g(\tilde{p})$

Zaključak

U radu su izloženi osnovni koncepti teorije fazi skupova. Fazi skupovi su uvedeni kao uopštenja klasičnih skupova a fazi brojevi kao numeričke reprezentacije neodređenosti različitog porekla. Tačnije, fazi brojevi omogućavaju da se konstruiše matematički model jezičkih izraza kao što su „mnogo“, „najmanje“ ili „približno“. Rad u fazi okruženju predstavlja jedan od pogodnih načina da se predstavi i modelira neodređenost i nepreciznost, prisutna u svakodnevnom životu.

Pored osnovnih pojmova vezanih za fazi skupove i fazi brojeve, predstavljeni su različiti koncepti u kojima su definisani postupci za izvođenje operacija nad fazi skupovima i fazi brojevima. Princip proširenja pruža opšti metod za prenošenje operacija sa klasičnim brojevima na fazi brojeve. Predstavljena su tri tipa fazi brojeva koji se najčešće koriste: L-R, diskretizovani i dekompozabilni fazi brojevi i prikazano je kako se princip proširenja primenjuje na njih. Da bi se proširila primena fazi aritmetike, pre svega na procenu fazi racionalnih izraza, predstavljena je standardna fazi aritmetika, koja je bazirana na intervalnoj aritmetici. Međutim, standardna fazi aritmetika ima ozbiljan nedostatak a to je precenjivanje pravog rezultata problema, gde stepen precenjenosti zavisi od oblika fazi racionalnog izraza. Kao sledeći stupanj razvoja fazi aritmetike, pojavljuje se napredna fazi aritmetika koja se ističe po tome što ne postoje značajna ograničenja u njenoj oblasti primene i može se koristiti za simulaciju statičkih ili dinamičkih sistema proizvoljne kompleksnosti sa fazi-vrednosnim parametrima. Osnova napredne fazi aritemtike jeste metod transformacije. Metod transformacije je dat u tri verzije, opštoj, redukovanoj i proširenoj. Ukoliko se očekuje da fazi-parametrizovani model pokaže nemonotono ponašanje, koristi se opšti oblik, za monoton fazi-parametrizovani model je neophodna primena redukovanog oblika, dok prošireni kombinuje prethodna dva.

Najveći značaj fazi aritmetike je upravo u širokom spektru primena u mnogim oblastima poput mehaničkog, geotehničkog, biomedicinskog i kontrolnog inženjeringa.

Izložena materija je iscrpan pregled rezultata pogodna da bi se savladali osnovni pojmovi iz teorije fazi skupova i može pružiti dobru podlogu za dalja istraživanja, naročito u oblasti primene fazi aritmetike u inženjerskim nakauma.

Literatura

[1] Dubois D., Prade H., Fuzzy real algebra: Some results, *Fuzzy Sets and Systems*, 2:327-348, 1979.

[2] Dubois D., Prade H., *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 44, Academic Press, New York – London, 1980.

[3] Dubois D., Prade H., A class of fuzzy measures based on triangular norms, *International Journal of General Systems*, 8:43-61, 1982.

[4] Dubois D., Prade H., Operations on fuzzy numbers, *International Journal of Systems Science*, 9:613-626, 1978.

[5] Dubois D., Prade H., *Possibility theory: An aproach to Computerized Processing of Uncertainty*, Plenum, New York, 1988.

[6] Giles R., Lucasiewicz logic and fuzzy theory, *International Journal of Man-Machine Studies*, 8:313-327, 1976.

[7] Hansen E. R., *Global Optimization Using Interval Analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992

[8] Hanss M., An approach to inverse fuzzy arithmetic, In *Proc. of the 22nd International Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society – NAFIPS 2003*, pp. 474-479, Chicago, IL, USA, 2003.

[9] Hanss M., *Applied Fuzzy Arithmetic: An Introduction with Engineering Applications*, Springer, 2005.

[10] Hanss M., On the implementation of fuzzy arithmetical operations for engineering problems, In *Proc. of the 18th International Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society – NAFIPS '99*, pp. 462 – 466, New York, NY, USA, 1999.

[11] Hanss M., Simulation and analysis of fuzzy-parameterized models with the extended transformation method, In *Proc. of the 22nd International Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society – NAFIPS 2003*, pp. 462-467, Chicago, IL, USA, 2003.

[12] Hanss M., The extended transformation method for the simulation and analysis of fuzzy-parameterized models, *International Journal of Uncertaintly, Fuzziness and Knowledge – Based Systems*, 11(6):711-727, 2003.

[13] Hanss M., The transformation method for the simulation and analysis of systems with uncertain parameters, *Fuzzy Sets and Systems* 130(3):277-289, 2002.

[14] Hanss M., Willner K., A fuzzy arithmetical approach to the solution of finite element problems with uncertain parameters, *Mechanics Research Comunications*, 27:252-272, 2000.

[15] Kaufmann A., *Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets – Vol. 1: Fundamental Theoretical Elements*, Academic Presss, New York, 1975.

[16] Klement E. P., Mesiar R., Pap E., *Triangular Norms*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[17] Klimke A., An efficient implementation of the transformation method of fuzzy arithmetic, In *Proc. of the 22nd International Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society – NAFIPS 2003*, pp. 468-473, Chicago, IL, USA, 2003.

[18] Klimke A., An efficient implementation of the transformation method of fuzzy arithmetic, Technical report 2003/009, Institute of Applied Analysis and Numerical Simulation, University of Stuttgart, http://preprints.ians.uni-stuttgart.de, 2003.

[19] Klir G. J., Folger T. A., *Fuzzy Sets, Uncertainty and Information*, Prentice – Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.

[20] Klir G. J., Wierman M. J., *Uncertainty – Based Information*, Phisica-Verlag, Heidelberg, 1999.

[21] Moore R. E., *Interval Analysis*, Prentice – Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.

[22] Pap E., *Fazi mere i njihova primena*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1999.

[23] Wang Z., Klir G. J., *Fuzzy Measure Theory*, Plenum Press, New York, 1992.

[24] Yager R. R., On the measure of fuzziness and negation, Part I: Membership in the unit interval, *International Journal of General Systems*, 5(4):189-200, 1979.

[25] Zadeh L. A., Calculus of fuzzy restrictions, *Fuzzy sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes* (eds. Zadeh L. A., Fu K. S., Tanaka K., Shimura M.), pp. 1-39, New York, 1975., Academic Press

[26] Zadeh L. A., Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, *Fuzzy Sets and Systems*, 1:3-28, 1978.

[27] Zadeh L. A., Fuzzy sets, *Information and Control*, 8:338-353, 1965.

Biografija

Marina Mišanović je rođena 5. januara 1990. godine u Zenici, Bosna i Hercegovina. U periodu od 1996. do 2004. godine je pohađala osnovnu školu „Vuk Karadžić“ u Bijeljini. U Bijeljini je završila i gimnaziju ”Filip Višnjić”, opšti smer, 2008. godine. Iste godine je upisala Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu. Na departmanu za matematiku i informatiku, opredelila se za smer primenjena matematika - matematika finansija. Osnovne studije je završila u junu 2011. godine sa prosekom 9.68, kada je upisala i master studije, na istom fakultetu, odlučivši se ponovo za modul matematika finansija. Zaključno sa januarskim ispitnim rokom 2013. godine je položila sve predviđene ispite sa prosečnom ocenom 9.71 i time stekla uslov za odbranu master rada. U toku studija je bila dobitnik raznih nagrada i stipendija.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Marina Mišanović
AU

Mentor: dr Ivana Štajner – Papuga
ME

Naslov rada: Napredna fazi aritmetika – metod transformacije
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s/en
JI

Zamlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2013.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (5/82/27/10/34/0/0)
FOR (broj poglavlja/strana/lit.citata/tabela/slika/grafika/priloga)

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Primenjena matematika
ND

Predmetne odrednice, ključne reči: Fazi skup, fazi broj, fazi aritmetika
PO, **UDK**

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČS

Važna napomena:
VN

Izvod: U ovom radu je dat detaljan pregled osnovnih pojmova vezanih za fazi skupove i fazi brojeve. Predstavljene su različite faze razvoja fazi aritmetike. Akcenat se stavlja na naprednu fazi aritmetiku zasnovanu na metodu transformacije.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 11.06.2013.
DP

Datum odbrane: Septembar 2013.
DO

Članovi komisije:
Predsednik: dr Zagorka Lozanov – Crvenković, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor: dr Ivana Štajner – Papuga, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Arpad Takači, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
KO

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Textual printed material
TR

Contents code: Master's thesis
CC

Author: Marina Mišanović
AU

Mentor: dr Ivana Štajner – Papuga
ME

Title: Advanced Fuzzy Arithmetic – The Transformation Method
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: s/en
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2013.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (5/82/27/10/34/0/0)
PD (chapters/pages/literature/tables/pictures/graphs/add.lists)

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Applied mathematics
SD

Subject Key words: Fuzzy set, fuzzy number, fuzzy arithmetic
SKW

Holding data: In the library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: In this paper is given a detailed review of the basic concepts related to fuzzy sets and fuzzy numbers. It is presented different stages of development of fuzzy arithmetic. The emphasis is on advanced fuzzy arithmetic based on the transformation method.
AB

Accepted on Scientific board on: 11.06.2013.
AS

Defended: September 2013
DE

Thesis Defend board:
President: dr Zagorka Lozanov – Crvenković, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Mentor: dr Ivana Štajner – Papuga, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member: dr Arpad Takači, full professor, Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad
DB