Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno - matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Marina Mijić

Bejzove mreže i njihova primena

- Master rad -

Mentor
dr Zagorka Lozanov - Crvenković

Novi Sad, 2018.

Sadržaj

1 Predgovor

Under Bayes theorem, no theory is perfect. Rather, it is a work in progress, always subject to further refinement and testing

Nate Silver

Bejzova statistika, nasuprot klasičnoj odnosno frekvencionističkoj statistici, nudi drugačiji pristup problemu. Dok se u klasičnoj statistici zaključak donosi koristeći različite tehnike koje se primenjuju na uzorak, nakon čega se zaključak uopštava na celu populaciju, princip Bejzove statistike je drugačiji. On navodi početne verovatnoće događaja koje se kasnije ažuriraju na osnovu prikupljenih dokaza. Svaki novi dokaz zahteva da se verovatnoće prilagode novim podacima.[13]

Kako bi se bliže sagledala vrsta problema za koju Bejzova statistika nudi rešenje, sledi primer. Osoba A je pobedila u trci osobu B tri puta, i dva puta je izgubila od osobe B. Postavlja se pitanje, na koga uložiti novac u sledećoj trci? Logičan izbor bila bi osoba A, ali šta ako se zna da je kiša padala oba puta kada je osoba B pobedila, a svaki put kada je pobedila osoba A, bilo je lepo vreme? Jasno, rastu šanse da će pobediti osoba B, ali za koliko? Odgovor na ovo pitanje daje Bejzova teorema, koja se nalazi u osnovi cele Bejzove statistike. Suština leži u tome što se postojeće verovatnoće mogu promeniti pod uticajem činjenica koje naknadno postanu poznate. Prethodno navedeni primer jasno demonstrira takvu situaciju. Ako je poznato da je osoba A imala više pobeda od osobe B, njena verovatnoća za pobedu je veća, ali samo ako se ne uzme u obzir činjenica da je svaki puta bilo lepo vreme kada je osoba A pobedila, a kada je pobedila osoba B padala je kiša. Svaki novi dokaz će promeniti verovatnoću događaja. Dakle, Bejzova teorema računa verovatnoću događaja, ali uzimajući u obzir određenu činjenicu za koju je dokazano da utiče na njega.

Kada je reč o jednostavnim slučajevima gde postoji jedan faktor koji utiče na posmatrani događaj, Bejzova teorema ima rešenje. U komplikovanijim slučajevima, kada postoji više promenljivih i više uzročno - posledičnih veza, problem rešavaju Bejzove mreže. Bejzove mreže su usmereni, aciklični grafovi kod kojih vrhovi predstavljaju promenljive, a grane zavisnost između datih slučajnih promenljivih. Svake dve promenljive u Bejzovoj mreži koje su zavisne, povezane su strelicama, te tako formiraju oblik mreže.

Sledi kratak pregled sadržaja rada.

U prvom poglavlju rada govoriće se o Tomasu Bejzu (Thomas Bayes) po kome je Bejzova teorema dobila naziv. Biće reči o nastanku Bejzovih mreža kao i on njihovom razvoju kroz vreme.

Kako bi se definisala Bejzova teorema, u drugom poglavlju uvode se osnovni pojmovi iz teorije verovatnoće. Takođe, biće reči i o teoriji grafova, što će se dalje koristiti prilikom formiranja Bejzovih mreža.

Naredno poglavlje odnosi se način formiranja Bejzovih mreža kao i postupak dodeljivanja uslovnih verovatnoća svakoj od promenljivih u mreži. Zatim se uvodi pojam propagacije unapred i propagacije unazad koje su od velike koristi kada je neka od promenljivih u mreži poznata, jer znatno olakšavaju postupak računanja. Svake dve promenljive u mreži, za koje se pokaže da su nezavisne, smanjuju broj uslovnih verovatnoća koje je neophodno izračunati. U tu svrhu definisaće se GS (Grow - Shrink) algoritam, koji se koristi pri ispitivanju zavisnosti promenljivih u mreži.

U četvrtom poglavlju objašnjen je princip rada Netike (Netica), softvera koji je namenjen rešavanju problema Bejzovih mreža. Računanje uslovnih verovatnoća je jednostavno kada je mreža sastavljena iz malog broja promenljivih, te se verovatnoće mogu računati "peške". S druge strane, kod Bejzovih mreža koje sadrže veći broj promenljivih, ovaj postupak se znatno komplikuje. U takvim slučajevima, Netika nudi rešenje, ona računa uslovne verovatnoće na osnovu unetih parametara.

Poslednje poglavlje baviće se primenom Bejzovih mreža. Njihova zastupljenost je jako velika, posebno kada je reč o primeni u medicini. Jedna od primena, kojom će se ovo poglavlje i baviti, odnosi se na dijagnostikovanje autizma kod dece. Najpre će biti predstavljen medicinski pristup koji se koristi prilikom postavljanja dijagnoze autizma. Biće navedeni i neki od njegovih nedostataka, gde će Bejzov pristup biti ponuđen kao alternativno rešenje. Na kraju sledi praktičan primer postavljanja dijagnoze autizma koristeći model Bejzovih mreža.

***

Na kraju, želela bih da se zahvalim svojoj mentorki, prof. dr Zagorki Lozanov - Crvenković, na posvećenosti, korisnim savetima i upustvima koje sam dobila tokom izrade ovoga rada, kao i za uloženi trud i svo preneto znanje tokom osnovnih i master studija.

Takođe, želela bih da se zahvalim i članovima komisije, prof. dr Ljiljani Gajić i prof. dr Ivani Štajner – Papuga, kao i ostalim profesorima, koji su zaslužni za svo znanje stečeno tokom studija, koje danas uspešno primenjujem u praksi.

Posebnu zahvalnost dugujem mojim roditeljima i sestri za podršku koju su mi pružili tokom studija.

Marina Mijić

2 Bejzova statistika - nastanak i razvoj

Celokupna Bejzova statistika oslanja se na Bejzovu teoremu koja danas predstavlja elementarno, ali veoma jako statističko oruđe. Autor pomenute teoreme je engleski matematičar i sveštenik Tomas Bejz (Thomas Bayes) za koga se može reći da je uveo novi način zaključivanja u statistici. Ovakav pristup verovatnoću događaja shvata u subjektivnom smislu, dopušta uključivanje apriornih informacija, koje će kasnije biti modifikovane na osnovu prikupljenih dokaza. I to je suštinska razlika u odnosu na klasičan način zaključivanja u statistici. Ovakav pristup problemu bio je razlog da Bejzova teorema probudi interesovanje mnogih i postane predmet raznih diskusija. Bejzova statistika danas predstavlja veoma široku oblast koja je našla primenu gotovo u svim naučnim disciplinama.

2.1 Tomas Bejz (Thomas Bayes) - Biografija

Tomas Bejz je bio engleski matematičar, o čijem životu malo toga može sa tačnošću da se kaže. S druge strane, kada se govori o njegovom naučnom radu, doprinos je jako veliki, posebno kada je reč o njegovom uticaju na polju statistike [19].

Bejz je rođen u Londonu, 1702. godine, a umro je 1761. godine. Idući stopama svoga oca, pri završetku studija teologije i logike na Univerzitetu u Edinburgu, pripremao se za ulogu sveštenika. U međuvremenu, na studijama, javilo mu se interesovanje za matematikom gde će i ostaviti svoj najveći pečat. Kada je reč o njegovom naučnom radu, poznato je da je objavio svega dva rada. Prvo delo je iz oblasti teologije, a drugo se tiče matematike:

1. *Divine Benevolence, or an Attempt to Prove That the Principal End of the Divine Providence and Government is the Happiness of His Creatures (1731)*

2. *An Introduction to the Doctrine of Fluxions, and a Defence of the Mathematicians Against the Objections of the Author of The Analyst*

Iako je objavio samo jedno delo iz oblasti matematike, Bejz je bio veoma cenjen matematičar. Bio je izabran za člana Kraljevskog društva 1742. godine zahvaljujući svojim neobjavljenim radovima, uglavnom iz oblasti geometrije. Bejz nikada nije objavio dela koja su predstavljala njegova najveća dostignuća. Tek nakon njegove smrti Ričard Pris (Richard Price) [1] je korigovao i objavio neke od njegovih radova.

[1]Ričard Pris (Richard Prise) bio je američki romanopisac i scenarista, poznat je po delima: *The Wanderers (1974), Clockers(1992)* i *Lush Life(2005)*

Bejzovo rešavanje problema "inverzne" verovatnoće prezentovano je u *"An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances"* nakon njegove smrti, čime su rešeni mnogi problemi prilikom računanja verovatnoće određenih događaja. Kako bi se lakše razumelo šta tačno podrazumeva problem "inverzne" verovatnoće sledi jednostavan primer istog. Neka je dat određen broj belih i crnih kuglica, koja je verovatnoća da izvučena kuglica bude crna? Ili obratno, ako se pretpostavi da je izvučena kuglica crna, šta se može reći o broju crnih i belih kuglica?

2.2 Bejzova statistika - nastanak i razvoj

Kao što je u prethodnom poglavlju napomenuto, Tomas Bejz postigao je mnoga dostignuća, ali ona su bila nepoznata javnosti sve do njegove smrti. Kao i druga njegova dela, tako je i Bejzova teorema, koja predstavlja veliki pomak na polju statistike, formulisana i objavljena tek nakon njegove smrti. Pjer Simon Laplas (Pierre Simon Laplace) [2] dao je savremenu matematičku formu ovom delu i obelodanio ga. Ovakav novi pristup statistike brzo se pokazao primenljivim u rešavanju nekih praktičnih problema toga vremena, a za koja ranije nisu pronađena rešenja. Alan Tjuring (Alan Turing) [3] iskoristio je ovaj metod kako bi dekodirao nemačku enigmu i tako spasio saveznika od poraza u Drugom svetkom ratu. Mornarica USA koristila ga je za pronalazak sovjetske mornarice.

Pre nego je otkrivena i definisana Bejzova teorema postojao je jedan pristup u statistici, jedan način zaključivanja. Takav pristup nazvan je klasičnim odnosno frekvencionističkim [14]. Klasična, u odnosu na Bejzovu statistiku, ima drugačiji pristup problemu i drugačiji smer zaključivanja. Ona ne podrazumeva postavljanje *a priori* verovatnoće, samim tim nema početnog gubitka na tačnosti. Njen pristup bazira se na eksperimentu i uzorku. Dakle, tačnost pomenute tehnike zavisi od tačnosti koju obezbedi eksperiment. Ovde već može nastati problem ako se posmatraju događaji koji se retko pojavljuju. Dakle, klasičan pristup rešavanju problema ne može uvek dati odgovor u praksi.

Kako bi se jasno videle razlike, kao i prednosti i mane, sledi poređenje pomenuta dva metoda [3]. Suština frekvencionističke statistike jeste u ponavljanju eksperimenta, pod istim uslovima, veliki broj puta. Uobičajen primer je bacanje novčića. Eksperiment se ponavlja veliki broj puta i svaki put se beleži da li je palo pismo ili glava. S druge strane, Bejzov pristup podrazumeva formiranje određenog broja hipoteza koje će činiti potpun sistem događaja. Zatim dodeljivanje početnih verovatnoća svakoj od promenljivih. Do datih verovatnoća može se doći pomoću nekih prethodnih istraživanja, teorijskih zaključaka i slično. Ova verovatnoća naziva se *a priori* jer je to polazna verovatnoća, do koje se nije došlo na osnovu nekih merenja ili prikupljanja dokaza, nego je ona rezultat subjektivnog izbora. Sledeći korak podrazumeva računanje verovatnoća posmatranih promenljivih na osnovu podataka koji su prikupljeni istraživanjem. Ova verovatnoća naziva se *a posteriorna*. Suština je u tome da se *a priori* verovatnoće menjaju u skladu sa novodobijenim dokazima. Ovakav način računanja verovatnoća daje mogućnost ažuriranja verovatnoća kroz vreme. Svaki put kada se prikupe novi dokazi, na osnovu njih računa se nova *,a posteriori,* verovatnoća. Ova osobina Bejzovog zaključivanja nazvana je raznovrsnost in-

[2]Pjer Simon Laplas (Pierre Simon Laplace) bio je francuski matematičar i astronom. Dao je veliki doprinos na polju matematičke astronomije. Poznat je i kao tvorac matematičke fizike i Laplasove jednačine.

[3]Alan Tjuring (Alan Tjuring)bio je engleski matematičar, logičar i kriptograf. Radio je u školi za kodiranje i šifre. U Drugom svetskom ratu, upućen je u odeljenje koje se bavilo pokušajima razbijanja šifara nemačke mašine za kodiranje, čuvene Enigme. U tome je i uspio. Tjuringov pristup kasnije je postao poznat kao "Tjurongova kriptološka bomba"

terpretacije (**diachronic interpretation**).

2.3 Prednosti i mane Bejzove statistike

Glavna kritika na račun Bejzove statistike odnosi se na subjektivan izbor *a priori* verovatnoće. Ne postoji jedinstveni način računanja ove verovatnoće, ona zavisi od osobe koja vrši izračunavanje. Tako, različite osobe dobiće različite vrednosti *a priori* verovatnoće, a time može doći do nepodudaranja u krajnjem zaključku. Međutim, pokazalo se u praksi, da je baš postavljanje početnih verovatnoća hipoteza neophodno za donošenje zaključaka. Na praktičnom primeru, u jednom od narednih poglavlja, biće objašnjen značaj postavljanja *a priori* verovatnoća.

Sa filozofske strane gledišta javljaju se kritike zbog dodeljivanja verovatnoća hipotezama. Smatra se da je hipoteza nesto što je ili tačno ili netačno, nema smisla dodeljivati im verovatnoće. S druge strane, dobra osobina jeste da se jednom izračunata *a priori* verovatnoća može koristiti kao takva bez obzira koliko novih dokaza i podataka se uzima u obzir. Ovo je jako korisna osobina jer se prikupljanjem novih podataka proces računanja ne komplikuje. Takođe, podaci mogu da se uzimaju u obzir kako se pojavljuju, ništa nije unapred definisano.

3 Osnovni pojmovi iz teorije verovatnoće i teorije grafova

U ovome delu rada definisani su osnovni pojmovi koji su potrebni kako bi se uvela definicija Bejzove teoreme [2]. Kao što je u uvodnom delu napomenuto, Bejzova mreža predstavlja jedan aciklični graf, s toga će u nastavku biti reči i o teoriji grafova [7, 8, 9].

3.1 Uslovna verovatnoća i Bejzova teorema

Neka je (Ω, F, P) prostor verovatnoća, gde je P(B)$>$ 0. Ako realizacija događaja B može uticati na realizaciju događaja A, onda je reč o uslovnoj verovatnoći. Verovatnoća događaja A pod uslovom da se desio događaj B označava se sa P(A|B).

Definicija 3.1.1. *Neka je (Ω, F, P) prostor verovatnoća i A, B ∈ F, pri čemu je P(B)>0. Uslovna verovatnoća P(A|B) definiše se na sledeći način*

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

Ukoliko je događaj A nezavisan od događaja B, odnosno realizacija događaja B ne utiče na realizaciju događaja A, važi

$$\mathrm{P(A|B)} = \mathrm{P(A)}$$

Kako je

$$\mathrm{P(AB)} = \mathrm{P(A|B)}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

Onda je

$$\text{P(AB)} = \text{P(A)P(B)}$$

Pod uslovom da važi P(A) $>$ 0 i P(B) $>$ 0 iz odnosa

$$\text{P(A|B)}=\frac{P(AB)}{P(B)} \text{ i } \text{P(B|A)}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

direktno sledi takozvano pravilo množenja

$$\text{P(AB)} = \text{P(A|B)P(B)} = \text{P(B|A)P(A)}$$

Tako se dobija još jedan izraz za uslovnu verovatnoću:

$$\text{P(A|B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

Pravilo množenja se može primeniti na izraz za verovatnoću preseka konačno mnogo skupova:

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)...P(A_n|A_1A_2...A_{n-1})$$

Definicija 3.1.2. *Neka je (Ω , F, P) prostor verovatnoća i $H_1, ..., H_n \in F$ zadovoljavaju sledeće uslove:*

1. $P(H_i) > 0$, i = *1,...n*
2. $H_i \cap H_j = \emptyset, i, j = 1, ...n, i \neq j,$
3. $\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega$

Događaji $H_1, ..., H_n$ nazivaju se hipotezama, a $H_1, ..., H_n$ potpun sistem događaja.

Teorema 1. *(Formula totalne verovatnoće) Ako je $\{H_1, ..., H_n\}$ potpun sistem događaja, onda*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i),$$

za svako $A \in F$.

Dokaz. Kako je $A = \sum_{i=1}^{n} AH_i$, onda je

$$P(A) = P(\sum_{i=1}^{n} AH_i) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)$$

.

□

Na formulu totalne verovatnoće nadovezuje se Bejzova formula koju je uveo Tomas Bejz u 18.veku. Ona razmatra situaciju u kojoj jedna osobina entiteta ima direktan uticaj na neku drugu osobinu tog entiteta. Na primer, prisustvo ili odsustvo bolesti ima direktan uticaj na to da li će test za tu bolest biti pozitivan ili negativan. U ovom konkretnom slučaju, primenom Bejzove formule dobija se uslovna verovatnoća da osoba ima bolest ako je test bio pozitivan. Dakle, data formula računa verovatnoću da se potvrdi skup početnih hipoteza, ako se desio događaj A. Do nje se dolazi tako što se pretpostavi da je zadat potpun sistem događaja i da su poznate verovatnoće svake od hipoteza, $P(H_i)$, i = 1,...,n. Postavlja se pitanje, koliku verovatnoću ima svaka od hipoteza H_i , i = 1,..,n ako je poznat da se desio događaj A. Odnosno, potrebno je svakoj od hipoteza dodeliti novu verovatnoću $P(H_i \setminus A)$, i = 1,...,n

Teorema 2. *(Bejzova formula) Ako je* $\{ H_1, ..., H_n \}$ *potpun sistem događaja, onda važi*

$$P(H_m|A) = \frac{P(H_m)P(A|H_m)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)},$$

$m = 1, ..., n, A \in F, P(A) > 0$

Dokaz. Koristeći definiciju uslovne verovatnoće i formulu totalne verovatnoće, sledi

$$P(H_m|A) = \frac{P(H_mA)}{P(A)} = \frac{P(H_m)P(A|H_m)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)}$$

m = 1,...,n

□

Slede dva primera kao ilustracija Bejzove teoreme [1].

Primer 3.1.1. *Muškarci čine 51 % odraslog stanovništva jednog grada, odnosno 49 % stanovništva čine žene. Slučajno je izabrana jedna osoba.*

1. *Kolika je verovatnoća da je odabrana osoba muškarac?*

2. *Kasnije se saznalo da je izabrana osoba pušač. Poznato je da 9.5 % muške populacije čine pušači, dok u tu grupu spada samo 1.7 % žena. Ukoliko se iskoristi ova informacija, na koji način bi se dobila verovatnoća da je odabrana osoba muškog pola?*

Biće korištene sledeće oznake:

M - Slučajno odabrana osoba je muškarac

$\overline{M}$ - Slučajno odabrana osoba je žena

C - Slučajno odabrana osoba je pušač

$\overline{C}$ - Slučajno odabrana osoba je nepušač

1. Pre nego budu iskorištene informacije date u drugom delu zadatka, poznato je samo da 51% stanovnika čine muškarci, pa je verovatnoća da će biti odabran muškarac P(M) =51%. Odnosno, verovatnoća da će odabrana osoba biti žena iznosi $P(\overline{M}) =$ 49%

2. S obzirom na dodatne informacije, važi sledeće:

   - P(M) = 51%, jer 51 % stanovništva čine muškarci
   - $P(\overline{M})$ = 49%, jer 49 % stanovništva čine žene,
   - $P(C|M)$ = 9.5% predstavlja verovatnoću da je osoba koja je izabrana pušač, ako je poznato da je ta osoba muškarac
   - $P(C|\overline{M})$ = 1.7% predstavlja verovatnoću da je osoba koja je izabrana pušač, ako je poznato da je ta osoba žena.

Primenom Bejzove formule, gde je M događaj H_1, $\overline{M}$ je događaj H_2, a C je događaj A, dobija se rešenje problema:

$$P(M|C) = \frac{P(M)P(C|M)}{P(M)P(C|M) + P(\overline{M})P(C|\overline{M})} = \frac{0.51 * 0.095}{0.51 * 0.095 + 0.49 * 0.017} = 0.8533$$

Pre nego što se znalo da je izabrana osoba pušač, verovatnoća da je pomenuta osoba muškog pola iznosila je 51 %. Nakon saznanja da je osoba pušač, verovatnoća da je izabrana osoba muškog pola porasla je na 85.33 %. Ovu situaciju objašnjava činjenica da je mnogo više pušača muškaraca nego žena.

Primer 3.1.2. *Potrebno je uraditi rutinsku kontrolu dijagnostičkom radiografijom, nakon čega se ispostavi da je rendgen pozitivan na kancer pluća. Poznato je da ovaj test ima lažnu negativnu stopu 0.4 i lažnu pozitivnu stopu 0.02. Ili drugim rečima, 40% je verovatnoća da će test biti negativan iako je kancer prisutan i 2% je verovatnoća da će test biti pozitivan čak i kada kancer ne postoji. Takođe je poznato da je verovatnoća oboljenja od kancera 0,001, odnosno jedna od 1000 osoba ima kancer. Postavlja se pitanje koja je verovatnoća da zaista kancer postoji, ako je rendgentski test bio pozitivan.*

Na osnovu uslova zadatka mogu se definisati uslovne verovatnoće:

P(test je pozitivan | kancer pluća je prisutan) = 0.6
P(test je pozitivan | kancer pluća nije prisutan) = 0.02

Sada je potrebno izračunati sledeću verovatnoću:

P(kancer pluća je prisutan | test je pozitivan)

Koristeći sve poznate informacije i primenom Bejzove teoreme moguće je izračunati traženu verovatnoću. Koristiće se sledeće oznake:

1. A - kancer pluća je prisutan
2. $\overline{A}$ - kancer pluća nije prisutan
3. B - test je pozitivan
4. $\overline{B}$ - test je negativan

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})} = \frac{0.6 * 0.001}{0.6 * 0.001 + 0.02 * 0.999} = 0.29$$

Na osnovu dobijenog rezultata sledi zaključak da, iako je test pozitivan, verovatnoća prisustva kancera je mala i iznosi 0.029.

3.2 Teorija grafova

Grafovi su matematičke strukture koje se sastoje iz čvorova i grana koje ih povezuju. Oni imaju široku praktičnu primenu. Različite veze koje postoje u prirodi mogu se predstaviti pomoću grafova i to tako što se čvorovima predstave objekti, a granama veze koje postoje između njih.

Definicija 3.2.1. *Neka je V neprazan skup i E skup parova elemenata iz V. Uređeni par (V, E) naziva se graf. Elementi skupa V nazivaju se čvorovi, a elementi skupa E nazivaju se grane.*

Definicija 3.2.2. ***Orentisani graf*** *ili* ***digraf*** *G = (V,E) je uređeni skup parova čvorova i grana gde je $E \subseteq V$ x V. On ima orentaciju, grana (a,b) počinje u tački a, a završava se u tački b. S druge strane ako se može smatrati da je grana koja spaja čvorove a i b isto što i grana koja spaja čvorove b i a, kaže se da je graf* ***neorentisan****.*

Definicija 3.2.3. ***Put dužine k*** *($k \geq 1$) grafa = (V,E) je niz grana, oblika*

$$(v_0, v_1), (v_1, v_2), ..., (v_{k-1}, v_k)$$

kod orentisanih grafova, odnosno

$$\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, ..., \{v_{k-1}, v_k\}$$

kod neorentisanih.

Definicija 3.2.4.

- ***Prost (elementarni) put*** *je put koji kroz svaki čvor prolazi tačno jednom.*
- ***Zatvoren (kružni) put*** *je put koji se završava u istom čvoru u kojem i počinje.*
- ***Kontura(ciklus)dužine n*** *je elementarni kružni put.*

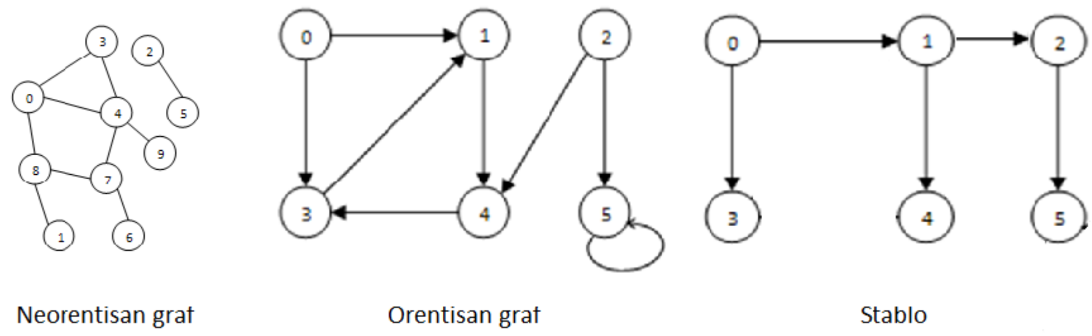
Definicija 3.2.5. *Graf koji sadrži barem jedan ciklus naziva se* ***cikličan*** *graf. U suprotnom kaže se da je graf* ***acikličan****.*

Definicija 3.2.6. ***Povezan graf*** *je takav neorentisan graf kod koga su bilo koja dva čvora povezana putem. Ako postoje dva čvora koja se ne mogu povezati, graf je* ***nepovezan****.*

Definicija 3.2.7. ***Stepen grafa*** *je broj grana grafa koji imaju kraj u jednom čvoru. Čvor stepena 1 naziva se* ***izolovani čvor****.*

- Dve grane su **susedne** ako sadrže isti čvor.
- Grana koja spaja čvor sa samim sobom naziva se **petlja**.
- Graf koji nema nijednu petlju je **prost graf**.
- Onaj graf kod koga su svaka dva čvora povezana granom naziva se **kompletan (potpun) graf**.

Stabla predstavljaju najjednostavniju, ali i najvažniju klasu grafova. Pomoću stabala moguće je predstaviti organizacionu strukturu firme ili porodična stabla.



Definicija 3.2.8. ***Stablo*** *ili* ***drvo*** *je povezan graf koji ne sadrži konture (ciklus). Dodavanjem bilo koje grane dobija se kontura. Dakle stablo je maksimalni graf bez kontura.*

Definicija 3.2.9. *Jedan od načina na koji se grafovi predstavljaju jeste pomoću matrice susedstva.* ***Matrica susedstva*** *po čvorovima grafa $G = (V, E)$ je binarna matrica $A = (a_{ij})$ reda $n \times n$, definisana sa:*

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{ako postoji grana od čvora i do čvora j} \\ 0, & \textit{ako ne postoji grana od čvora i do čvora j} \end{cases}$$

za svako $i = 1,\ldots n$, $j = 1,\ldots,n$.

Primer 3.2.1. *Za graf (V,E) definisan sa $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ i $E = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_4\}\}$, matrica susedstva ima sledeći oblik*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kao što je već napomenuto, grafovi se koriste za modeliranje i rešavanje raznih praktičnih problema. Kako se takvi problemi rešavaju pomoću računara i različitih programa, pokazalo se da je najjednostavnije predstaviti graf pomoću matrice. Najčešće korištena matrična iterpretacija grafa je upravo matrica susedstva.

4 Bejzove mreže

Bejzova mreža (engl. Bayesian Network) daje mogućnost modeliranja međusobne zavisnosti velikog broja promenljivih. Kada se radi o odnosu dve zavisne promenljive, zaključivanje je jednostavno. U tom slučaju odgovor daje Bejzova teorema, kao sto je i prikazano u primerima 3.1.1 i 3.1.2. Međutim, mnogo komplikovaniji slučaj nastaje kada postoji više zavisnih promenljivih.

Sledi primer situacije u kojoj tražene uslovne verovatnoće, zbog kompleksnosti, ne mogu biti izračunate pomoću Bejzove teoreme [1]. Pretpostavka je da postoji situacija gde je nekoliko karakteristika entiteta povezano lancem. Na primer, da li je osoba pušač ili ne, ima direktan uticaj na to da li pomenuta osoba ima bronhitis ili rak pluća. Dalje, prisustvo ili odsustvo svake od ovih bolesti ima direktan uticaj na to da li osoba oseća umor ili ne. Takođe, prisustvo ili odsustvo raka pluća ima direktan uticaj na rezultat koji će pokazati rendgenski snimak. Iz prethodnog primera lako se zaključuje da svaka od promenljivih utiče na neku drugu promenljivu ili zavisi od neke promenljive. To bi dalje značilo da one mogu na određeni način da se povežu lancem, što i jeste prvi korak u formiranju Bejzove mreže. Za promenljive koje su u direktoj vezi neophodno je da se definišu uslovne verovatnoće, i to na osnovu ranijih iskustava i teorijskog znanja osobe koja vrši zaključivanje. Sledeći korak jeste određivanje uslovnih verovatnoća za karakteristike koje nisu u direktoj vezi. Na primer, može biti potrebno da se odredi verovatnoća prisustva kancera pluća i bronhitisa ako se zna da je osoba pušač, oseća umor i rendgenstki test je pozitivan.

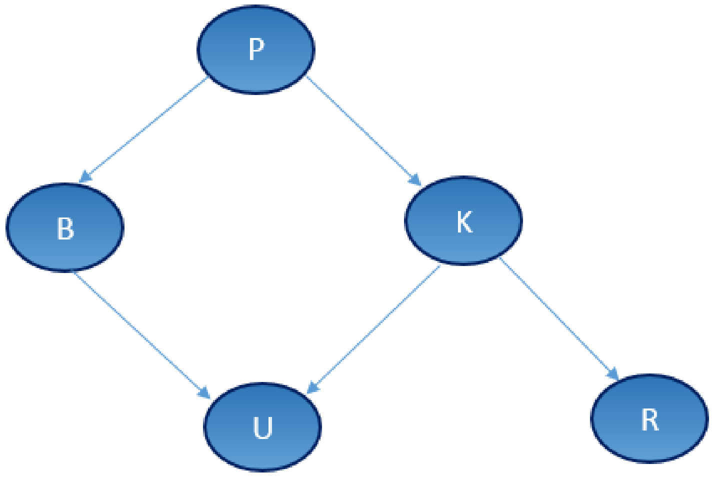
Bejzove mreže predstavljaju usmerene, aciklične grafove gde čvorovi imaju ulogu promenljivih, a grane predstavljaju njihovu međupovezanost. Povezivanje promenljivih predstavlja osnovni problem, jer je potrebno jasno utvrditi u kakvoj su vezi svake dve promenljive koje se posmatraju. Zatim sledi dodeljivanje uslovnih verovatnoća, što takođe zahteva mnogo znanja iz oblasti koja je predmet ispitivanja. Iz tako formiranog modela moguće je izvesti zaljučak o svakoj od promenljivih, uzimajući u obzir uticaj koje na nju imaju druge promenljive.

4.1 Markovljevo svojstvo

Kada se govorilo o uslovnoj verovatnoći definisano je i pravilo množenja, koje kaže da se verovatnoća preseka konačno mnogo događaja $A_1, A_2, ...A_n$ definiše na sledeći način:

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)...P(A_n|A_1A_2...A_{n-1})$$

Ovaj izraz se pojednostavljuje ako se pretpostavi da važi Markovljevo svojstvo [1]. Ono predstavlja jednu od osobina Bejzovih mreža koja podrazumeva da svaki od čvorova u mreži zavisi samo od svojih roditelja. To bi značilo da se prilikom računanja uslovne verovatnoće za svaku promenljivu u mreži uzima u obzir samo verovatnoća njenih roditelja. Na slici ispod dat je primer Bejzove mreže [1]. Svaki čvor posmatraće se kao promenljiva čiju verovatnoću je potrebno izračunati.



Slika 1: Bejzova mreža

Ukoliko se primeni pravilo množenja, verovatnoća preseka događaja koji čine mrežu bila bi sledeća:

$$P(RUKBP) = P(R|UKBP)P(U|KBP)P(K|BP)P(B|P)P(P)$$

Uzimajući u obzir da važi Markovljevo svojstvo, jasno je da će, na primer, događaj K zavisiti samo od P, jer je on njegov jedini roditelj. Ponavljajući isti postupak za svaki čvor u mreži, verovatnoća preseka ovih događaja je sledeća

$$P(RUKBP) = P(R|K)P(U|BK)P(K|P)P(B|P)P(P)$$

Kako čvor P predstavlja koren mreže jer nema roditelje, za njega neće postojati uslovne verovatnoće. Ukoliko čvor ima dva ili više roditelja, u obzir se uzimaju verovatnoće svakog od njih. U ovome primeru samo čvor U ima dva roditelja.

4.2 Postupak oblikovanja Bejzove mreže

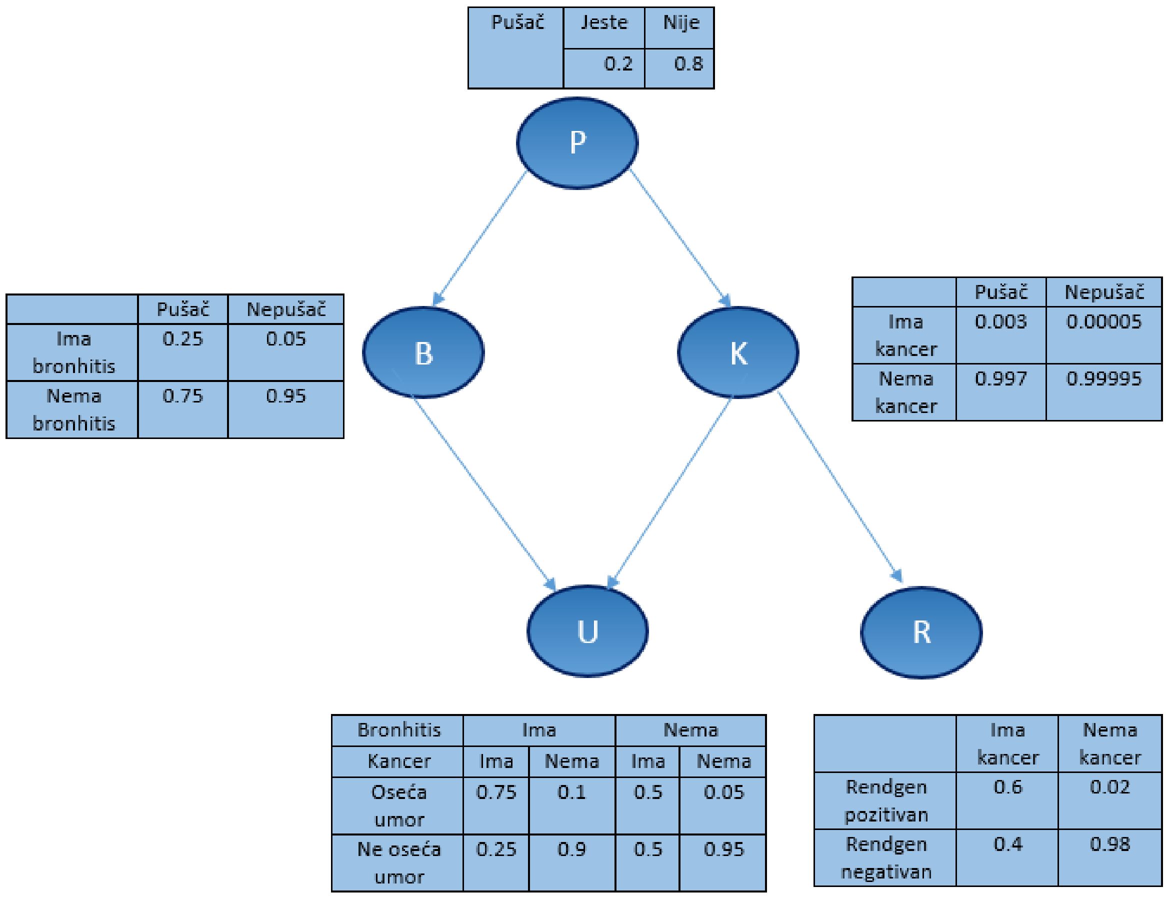
Kako bi se oblikovala Bejzova mreža, najpre je potrebno definisati problem, zatim dodeliti *a priori* verovatnoće svakoj promenljivoj [13]. Dakle, potrebno je definisati sledeće:

- čvorove u mreži (promenljive u problemu koji se rešava)
- mogući ishod svakog čvora (vrednosti koje prima svaka od promenljivih)
- grane u mreži (međusobna zavisnost promenljivih)
- raspodela verovatnoća svake od promenljivih u zavisnosti od raspodele verovatnoća njihovih roditelja u mreži

Sledeći korak podrazumeva dodeljivanje *a priori* verovatnoća. One predstavljaju početne verovatnoće koje se dodeljuju promenljivim, a do njih se dolazi na osnovu nekih prethodnih istraživanja. Kada je u pitanju Bejzova mreža, *a priori* verovatnoća podrazumevala bi očekivanje ishoda svake od promenljivih kada nije poznat dokaz ni za jedan čvor u mreži.

Promenljiva na koju u mreži ne utiče niti jedna druga promenljiva naziva se **roditelj**, odnosno **koren**. One se prve postavljaju u mreži. Zatim se roditelji granama povezuju sa promenljivim na koje imaju direktan uticaj i one se nazivaju **deca**. Ovaj postupak se nastavlja sve dok se ne dodje do krajnjih promenljivih, one koje nemaju decu, odnosno ne utiču ni na jednu promenljivu. Sličan postupak se primenjuje i prilikom dodeljivanja *a priori* verovatnoća. Najpre je neophodno dodeliti *a priori* verovatnoće promenljivima koje predstavljaju koren u mreži. Na primer, to može biti verovatnoća da je posmatrana osoba pušač. Zatim se za svaku promenljivu koja ima roditelje formira tablica uslovne verovatnoće. Za svaku promenljivu potrebno je uzeti u obzir sve kombinacije verovatnoća njenih roditelja. Broj roditelja promenljive određuje dimenzionalnost tablice.

Sada će na primeru sa Slike 1. biti analizirana međusobna zavisnost čvorova u mreži. Prisustvo bronhitisa odnosno raka pluća zavisi od toga da li je osoba pušač ili ne. Dalje, rezultat rendgentskog snimka zavisi od prisustva, odnosno odsustva raka pluća, ali s druge strane nije povezano sa bronhitisom. Dakle, ova promenljiva ima jednog roditelja. Promenljiva U, prisustvo umora, ima dva roditelja, zavisi i od brohitisa i od raka pluća. Kako bi ovaj model bio potpun, potrebno je pridružiti svakoj promenljivoj odgovarajuću uslovnu verovatnoću, na način koji je prethodno definisan. Svakoj od promenljivih koja ima roditelje pridružuju se tablice uslovnih verovatnoća koje će uzeti u obzir svaki od ishoda njenih roditelja. Sa povećanjem broja roditelja raste i broj uslovnih verovatnoća koje će biti pridružene pomenutoj promenljivoj. Na primer, čvoru koji ima dva rodtelja biće pridružene ukupno 4 verovatnoće, jer svaki od roditelja ima dva stanja u kojem može da se nalazi. Dakle, ukupan broj uslovnih verovatnoća koje se pridružuju čvoru, koji ima n roditelja, iznosi 2^n.
Na slici ispod, prethodno predstavljena Bejzova mreža upotpunjena je tablicama uslovnih verovatnoća [1].



Pušač	Jeste	Nije
	0.2	0.8

	Pušač	Nepušač
Ima bronhitis	0.25	0.05
Nema bronhitis	0.75	0.95

	Pušač	Nepušač
Ima kancer	0.003	0.00005
Nema kancer	0.997	0.99995

Bronhitis	Ima		Nema	
Kancer	Ima	Nema	Ima	Nema
Oseća umor	0.75	0.1	0.5	0.05
Ne oseća umor	0.25	0.9	0.5	0.95

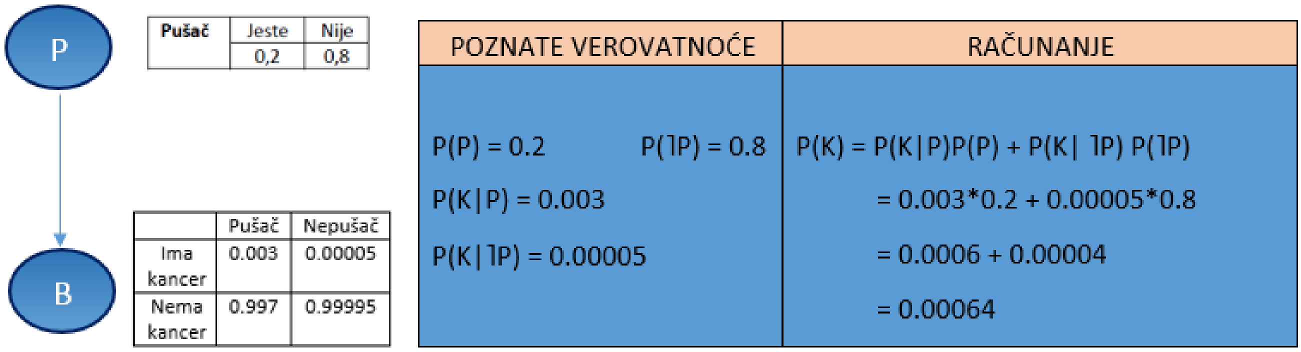
	Ima kancer	Nema kancer
Rendgen pozitivan	0.6	0.02
Rendgen negativan	0.4	0.98

Slika 2: Bejzova mreža i *a priori* verovatnoće

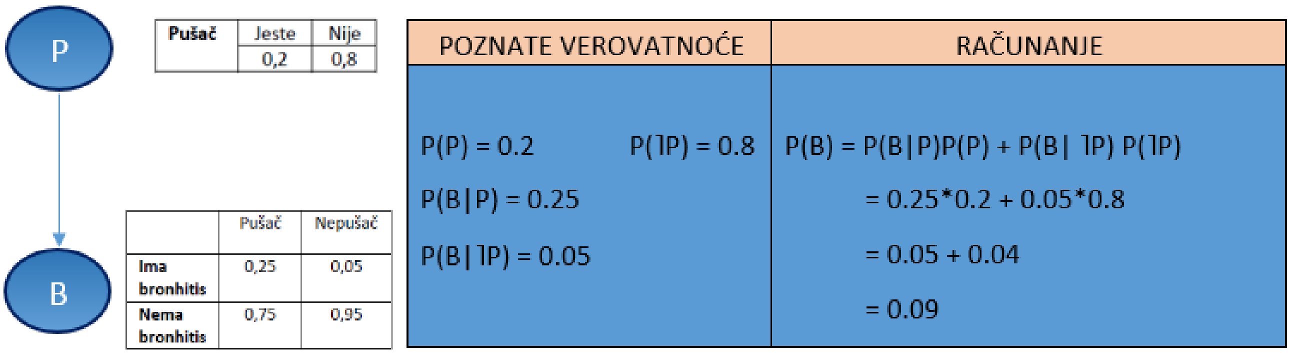
Promenljiva **Pušač** je koren u ovome primeru. S toga se njoj promenljive dodeljuju na osnovu subjektivnog mišljenja stručnjaka. Promenljiva **Kancer** ima jednog roditelja, **Pušač**, njena tablica uslovnih verovatnoća formirana je u zavisnosti od toga da li je osoba pušač ili ne. Ukoliko je osoba pušač, verovatnoća da pomenuta osoba ima kancer iznosi 0,003, a ukoliko nije pušač, ova verovatnoća je znatno manja i iznosi 0,00005. Analogno se izvodi zaključak i za promenljivu **Bronhitis**, koja takođe ima jednog roditelja. Ukoliko je osoba pušač, verovatnoća da ima bronhitis iznosi 0,25. S druge strane, za nepušača ova verovatnoća iznosi 0,05. Za razliku od prethodne dve, promeljiva **Umor** ima dva roditelja, jer prisustvo umora može biti povezano i sa bronhitisom i sa kancerom. S toga, ovoj promenljivoj treba dodeliti 4 uslovne verovatnoće, kako bi se uzeli u obzir svi slučajevi.

4.3 Računanje a priori verovatnoća čvorova

Problem u Bejzovoj mreži mora biti postavljen tako da je moguće izračunati *a priori* verovatnoće svih čvorova. Postupak je takav da se zaključivanje odvija sledno niz mrežu. *A priori* verovatnoće čvorova koji nemaju roditelje ne zavise od ostalih čvorova u mreži. S toga je njihova *a priori* verovatnoća unapred data. Dalje se računaju *a priori* uslovne verovatnoće njihove dece, i tako redom niz mrežu sve dok se ne dođe do poslednjeg čvora koji nema decu. Na prethodnom primeru biće demonstriran postupak računanja *a priori* verovatnoća. Promenljiva **Pušač** nema rodtelje, dakle njena *a priori* verovatnoća je data i biće korištena u daljem postupku računanja. Promenljiva **Kancer** ima jednog roditelja i poznate uslovne verovatnoće, s toga se može izračunati njena *a priori* verovatnoća. Potrebno je izračunati verovatnoću da je kancer prisutan u zavisnosti od toga da li je posmatrana osoba pušač ili ne.



Dakle, verovatnoća da osoba ima kancer iznosi 0.00064 i tako dobijena verovatnoća je *a priori* verovatnoća za datu promenljivu. Sada se mogu izračunati *a priori* verovatnoće njene dece. Promenljiva kancer imala je jednog roditelja, pa je računanje bilo jednostavno. Za računanje *a priori* verovatnoće promenljive umor bilo bi potrebno izračunati *a priori* verovatnoće dve druge promenljive, kancer i bronhitis, pa bi račun bio nešto složeniji. Uslovna verovatnoća promenljive bronhitis biće izračunata analogno kao i prethodna.

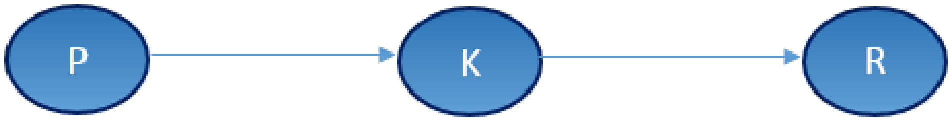


Ovaj postupak se nastavlja sve dok se ne dođe do čvora koji nema decu. Na taj način mogu se izračunati *a priori* verovatnoće svih promenljivih, uz prethodno izračunavanje *a priori* verovatnoća njihovih roditelja.

4.4 Propagacija unapred i propagacija unazad

4.4.1 Propagacija unapred

U nekim slučajevima može se desiti da su ishodi nekih promenljivih poznati. Dakle za njih postoje dokazi, te u tome slučaju verovatnoću date promenljive nije potrebno računati na prethodno opisani način. Propagacija unazad je situacija u kojoj je poznat ishod nekog od čvorova koji predstavlja dete, te se u skladu s tim menjaju ishodi za roditelje datog čvora. Analogno, kada je poznat ishod čvora koji je roditelj, na osnovu toga zaključuje se kakav je ishod njegove dece [13]. Ako se posmatra prethodni primer i pretpostavi da je poznato da osoba jeste pušač, potrebno je, pod tom pretpostavkom, izračunati kolika je verovatnoća da je rendgen pozitivan. U ovome slučaju reč je o propagaciji unapred, pošto se zaključuje u smeru strelica, od roditelja prema deci.



Pušač	Jeste	Nije
	0.2	0.8

	Pušač	Nepušač
Ima kancer	0.003	0.00005
Nema kancer	0.997	0.99995

	Ima kancer	Nema kancer
Rendgen pozitivan	0.6	0.02
Rendgen negativan	0.4	0.98

Pod pretpostavkom da je osoba pušač, najpre je potrebno izračunati verovatnoću prisutnosti kancera. Iz tablice uslovne verovatnoće to se može lako zaključiti. Verovatnoća da osoba ima kancer sada iznosi 0,003. Ova verovatnoća je daleko veća kada je poznato da je osoba pušač, što ima smisla, jer pušači češće obolevaju od pomenute bolesti. Sledeći korak jeste računanje verovatnoće da je rendgenski snimak pozitivan, ali uzimajući u obzir nove verovatnoće promenljive kancer.

POZNATE VEROVATNOĆE	RAČUNANJE
P(P) = 1 P(R\¬K) = 0.02 P(K\P) = 0.003 P(R\K) = 0.6 P(¬K\P) = 0.997	P(R\P) = P(R\K)P(K\P) + P(R\ ¬K) P(¬K\P) = 0.6*0.003 + 0.02*0.997 = 0.0018+ 0.01994 = 0.02174

Dakle, ako je poznato da je osoba pušač, verovatnoća da će rendgenski snimak biti pozitivan iznosi 0.02174.

4.4.2 Propagacija unazad

Kako poznavanje ishoda nekog čvora koji je roditelj može uticati na ishode njegove dece, tako važi i u obratnom slučaju. Ako je poznat ishod čvora koji je dete, to utiče na ishod njegovih roditelja. U takvom slučaju reč je o propagaciji unazad. Koristeći prethodni primer, pretpostavimo da je poznato da osoba ima kancer i potrebno je zaključiti kolika je verovatnoća da je osoba pušač. Ovu verovatnoću moguće je dobiti direktno koristeći Bejzovu teoremu. Situacija je slična kao i u prethodnom slučaju s tim što se sada zaključivanje vrši u suprotnom smeru, poznato je da osoba ima kancer i potrebno je izračunati *a priori* verovatnoću njenog roditelja, promenljive pušač. Zaključak je da ukoliko posmatrana osoba ima kancer, verovatnoća da je ista i pušač iznosi 0,9375. Što

POZNATE VEROVATNOĆE	RAČUNANJE
$P(K\|P) = 0.003$ $P(P) = 0.2$ $P(K) = 0.00064$	$P(P\|K) = \frac{P(K\|P)*P(P)}{P(K)}$ $= \frac{0.003*0.2}{0.00064} = 0.9375$

će značiti da kancer pluća u većini slučajeva implicira da je oboljela osoba pušač. Ovo je primer situacije u kojoj je potrebno izvršiti i propagaciju unapred i propagaciju unazad. Razlog za to je taj što promenljiva čiji ishod je poznat ima i roditelje i decu.

4.5 Međusobna zavisnost čvorova i d - separacija

U prethodnom poglavlju objašnjeno je kako poznavanje ishoda jednog čvora utiče na ishode ostalih čvorova u mreži. Kako bi se smanjio broj verovatnoća koje je potrebno izračunati, od velike koristi je poznavanje međusobne zavisnosti čvorova u mreži [5, 13]. Ukoliko je za dva čvora poznato da su nezavisna, onda poznavanje ishoda jednog od njih neće uticati na ishod drugog čvora. Tada nije potrebno trošiti vreme na njegovo računanje. Sledi definicija pojmova koji će u nastavku biti korišteni.

- Za lanac X→ Z→ Y se kaže da je usmeren po principu glava - rep.
- Za lanac X← Z→ Y se kaže da je usmeren po principu rep - rep.
- Za lanac X→ Z← Y se kaže da je usmeren po principu glava - glava.

Algoritam D - separacije koristan je prilikom izračunavanja međusobne zavisnosti čvorova u Bejzovoj mreži.

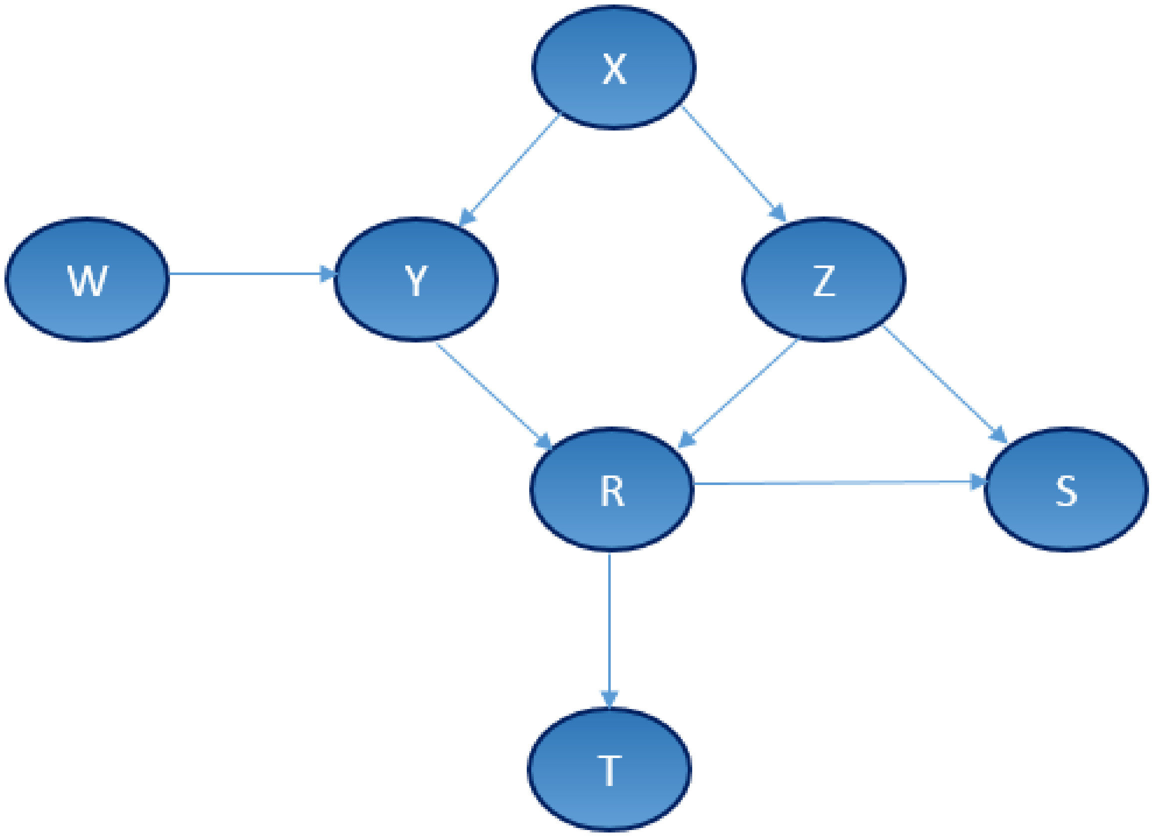
Definicija 4.5.1. *Neka je dat graf (V, E), $A \subseteq V$, X i Y su čvorovi unutar V - A i ρ je lanac između X i Y. Put ρ je blokiran ako važi jedan od sledećih uslova:*

I. Postoji čvor $Z \in A$ na putu ρ i grane čvora Z su usmerene po principu ***glava - rep****.*

II. Postoji čvor $Z \in A$ na putu ρ i grane čvora Z su usmerene po principu ***rep - rep****.*

III. Postoji čvor Z , tako da ni Z niti bilo koji od njegovih potomaka nije u A i grane čvora Z su usmerene po principu ***glava - glava****.*

Lanac je blokiran ako važi bar jedan od gore navedenih uslova. Može postojati jedan ili više čvorova koji blokiraju jedan lanac.



Slika 3: Primer blokiranja lanca

1. Lanac [Y,X,Z,S] je blokiran od strane čvora X jer su stralice vezane za čvor X orentisane po principu rep - rep. Lanac je takođe blokiran od strane čvora Z jer su njegove grane orentisane po principu glava - rep.

2. Lanac [W,Y,R,S] je blokiran od strane čvora R jer su grane vezane za čvor R orentisane po principu glava - rep.

Definicija 4.5.2. *Neka su X i Y dva čvora unutar mreže. Kaže se da za njih važi d - separacija ako je svaki lanac koji ih spaja blokiran.*

Sa prethodnog primera može se uočiti sledeće:

1. X i R su d - separabilni jer je lanac [X,Y,R] blokiran od strane čvora Y, a lanac [X,Z,R] od strane čvora Z.

2. X i T su d - separabilni jer je lanac [X,Y,R,T] blokiran od strane čvora Y, a lanac [X,Z,R,T] od strane čvora Z i lanac [X,Z,S,R,T] od strane čvorova Z i S.

3. Y i Z su d - separabilni jer je lanac [Y,X,Z] blokiran od strane čvora X, lanac [Y,R,Z] od strane čvora R, a lanac [Z,R,S,Z] od strane čvora S.

4. W i S su d - separabilni jer je lanac [W,Y,R,S] blokiran od strane čvora Z, lanac [W,Y,R,Z,S] je blokiran od strane čvorova Y, R i Z, a lanac [W,Y,X,Z,S] od strane Z.

Ovakav princip znatno smanjuje broj verovatnoća koje je potrebno izračunati, posebno kada je reč o promenljivim koje imaju veliki broj roditelja. Koristeći pomenuti algoritam, za svaku promenljivu u mreži moguće je ispitati zavisnost sa svim ostalim promenljivim. Na taj način identifikuju se promenljive koje su nezavisne u odnosu na posmatranu promenljivu te se one ne uzimaju u obzir u daljem postupku računanja.

4.6 GS (Grow - Shrink) algoritam Markovljevog pokrivača

4.6.1 Definicija i način konstruisanja Grow - Shrink algoritma

GS (Grow - Shrink) algoritam funkcioniše tako što identifikuje okruženje svake promenljive u mreži [5]. Cilj jeste ispitati međusobnu zavisnost neke promenljive, koja se posmatra, sa svim ostalim promenljivim u mreži. Pomenuto ispitivanje zavisnosti bazira se na algoritmu d - separacije. Za svaki put koji povezuje posmatranu promenljivu sa ostalim promenljivim u mreži ispituje se da li je blokiran. Rezultat jeste pokrivač koji će sadržati samo promenljive koje su zavisne u odnosu na posmatranu promenljivu. U nekim situacijama, kao na primer kada postoji veliki broj promenljivih, gusto povezanih, GS algoritam ne radi. U takvim situacijama koristi se algoritam Monte Carlo, koji primenjuje konstantan broj testova kako bi dobio isti rezultat sa velikim verovatnoćama.

Dalje će se govoriti o načinu na koji funkcioniše GS algoritam i biće korištene sledeće oznake:

- X $\sim$ Y podrazumeva da su promenljive X i Y nezavisne
- X $\simeq$ Y podrazumeva da su promenljive X i Y zavisne

Definicija 4.6.1. ***Markovljen pokrivač****. Za promenljivu $X \in \Gamma$, Markovljev pokrivač $BL(X) \subseteq \Gamma$ je skup promenljivih u mreži tako da za svako $Y \in \Gamma$ - $BL(X)$ - X važi $X \sim Y$ | $BL(X)$. Drugim rečima, promenljiva X je nezavisna od svih promenljivuh koje su izvan Markovljevog pokrivača, $BL(X) \cup X$.*

Sa B(X) biće označen pokrivač promenljive X i on se sastoji od promenljivih koje su roditelji i deca posmatrane promenljive X.

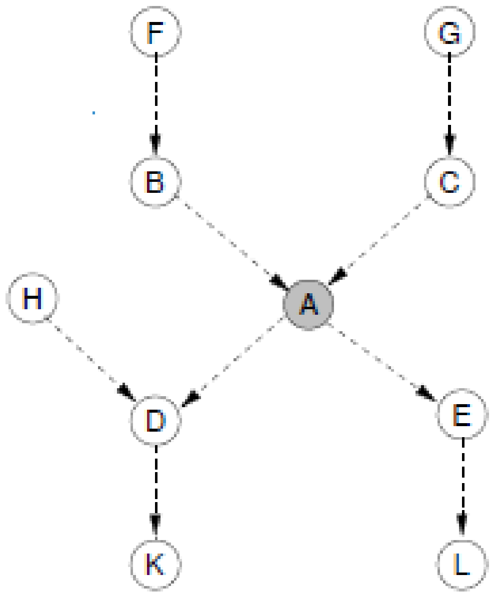
1. S $\longleftarrow$ $\emptyset$
2. Sve dok $\exists Y \in \Gamma - \{X\}$ tako da $Y \nvdash X \mid S$, S $\longleftarrow$ S $\cup \{Y\}$. **Growing (rastuća) faza**
3. Sve dok $\exists Y \in S$ tako da $Y \vdash X \mid S - \{Y\}$, S $\longleftarrow$ S $- \{Y\}$. **Shrinking (opadajuća) faza**
4. B(X) $\longleftarrow$ S

Slika 4: GS algoritam Markovljevog pokrivača

Na Slici 4. objašnjen je način na koji funkcionise GS algoritam. On se sastoji iz dve faze, rastuće i opadajuće. Za početak se posmatra prazan skup **S** koji se vremenom puni, tokom Growing (rastuće) faze. Promenljive se dodaju u skup **S** ukoliko postoji zavisnost sa promenljivom X, a uzimajući u obzir trenutni sastav skupa **S**. Ideja je prilično jednostavna, sve dok postoje promenljive koje su zavisne u odnosu na promenljivu X, one se dodaju u skup **S**, i na taj način formira se Markovljev pokrivač. Potrebno je ispitati zavisnost svake od promenljivih u mreži sa promenljivom koja se posmatra. Nakon ovog procesa dobija se skup, pokrivač, koji može da sadrži i promenljive koje ne bi trebale biti u pokrivaču. One su se ipak našle tu zbog redosleda kojim su se promenljive dodavale u skup S. Ova greška se otklanja u sledećoj fazi. Shrinking (opadajuća) faza je proces u kojem se proverava da li sve promenljive koje se nalaze u pokrivaču zaista treba da budu tu. U zavisnosti od redosleda kojim su promenljive dodate u skup **S**, može se desiti da se na kraju za neke promenljive ispostavi da su ipak nezavisne u odnosu na promenljivu koja se posmatra. Takve promenljive potrebno je isključiti iz pokrivača.

4.6.2 Primer za ilustraciju

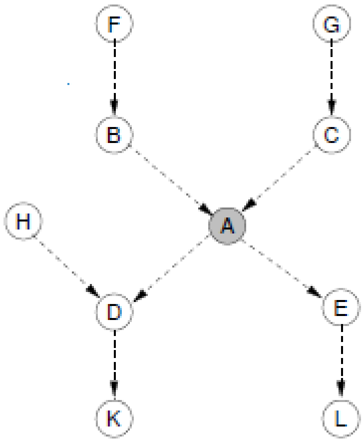
Na primeru jedne Bejzove mreže biće ilustrovan GS algoritam. Promenljiva koja će se posmatrati je A, ostale promenljive koje čine Bejzovu mrežu su: B, C, D, E, F, G, H, K, L. Za svaku od promenljivih biće ispitano, u zavisnosti od odnosa sa posmatranom promenljivom A, da li ulazi u sastav Markovljevog pokrivača ili ne. Bejzova mreža koja se koristi u ovome primeru ima sledeći oblik:



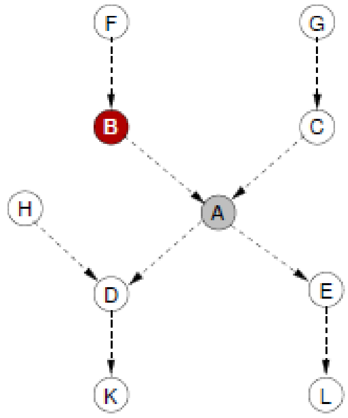
Slika 5: Bejzova mreža

Posmatra se i skup **S** koji je, kao što je ranije naglašeno, na početku prazan. Zatim sledi objašnjenje **Growing faze**.

1. Zavisnost promenljivih B i A, Markovljev pokrivač je prazan skup, **S** = { }.



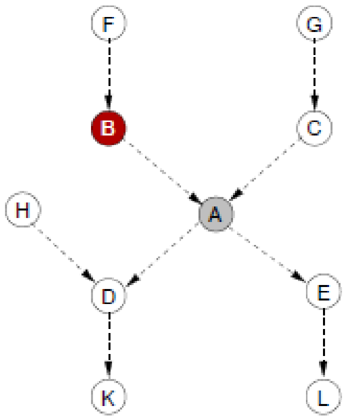
Slika 6: **Test** A ∼ B | { }



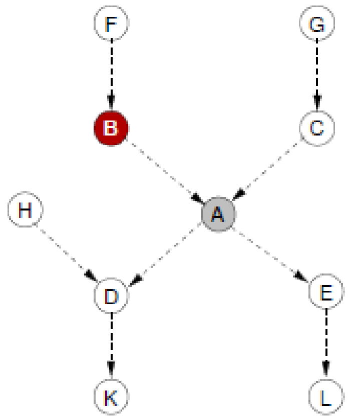
Slika 7: **Rezultat** A ≃ B | { }

Zaključak: Promenljive A i B su zavisne, odnosno put B - A nije blokiran, te se promenljiva B može dodati u skup **S**.

2. Zavisnost promenljivih F i A, Markovljev pokrivač je **S** = {B}.



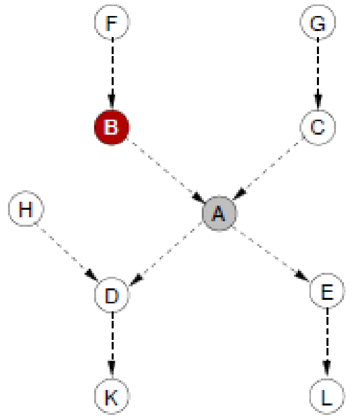
Slika 8: **Test** A ∼ F | {B}



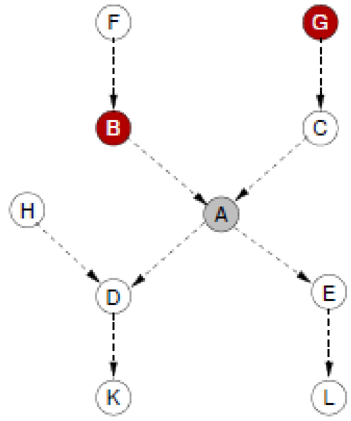
Slika 9: **Rezultat** A ∼ F | {B}

Zaključak: Kako je put F - A blokiran od strane promenljive B, koja je uključena u skup **S**, ovaj test nezavisnosti promenljivih A i F je tačan. Promenljiva F neće biti uključena u skup **S**, ostaje **S** = {B}

3. Zavisnost promenljivih G i A, Markovljev pokrivač je **S** ={B}.



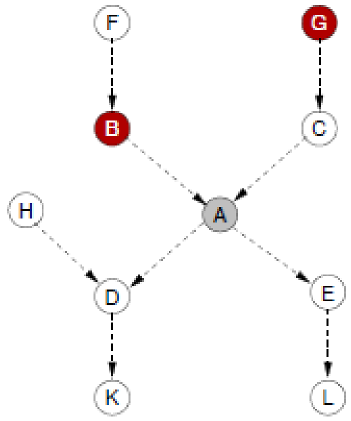
Slika 10: **Test** A $\sim$ G | {B}



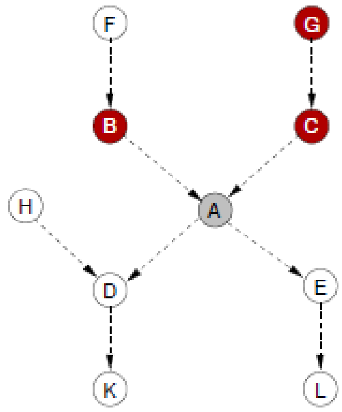
Slika 11: **Rezultat** A $\simeq$ G | {B}

Zaključak: Put G - A nije blokiran, te promenljiva G može biti uključena u skup **S**, **S** = {B, G}.

4. Zavisnost promenljivih C i A, Markovljev pokrivač je **S** = {B, G}.



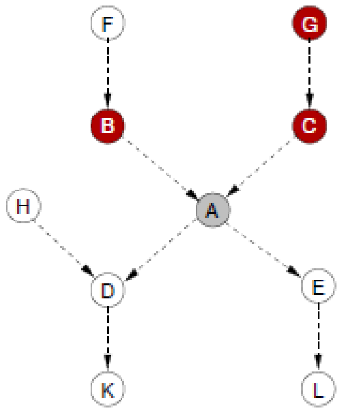
Slika 12: **Test** A $\sim$ C | {B,G}



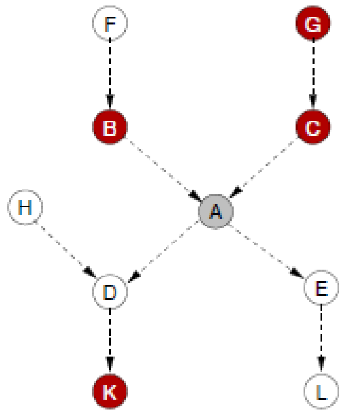
Slika 13: **Rezultat** A $\simeq$ G | {B,G}

Zaključak: Analogno prethodnom slučaju, put C - A nije blokiran, dakle promenljiva C se dodaje u pokrivač, **S** postaje **S** = {B, G, C}.

5. Zavisnost promenljivih A i K, Markovljev pokrivač je **S** = {B, G, C}.



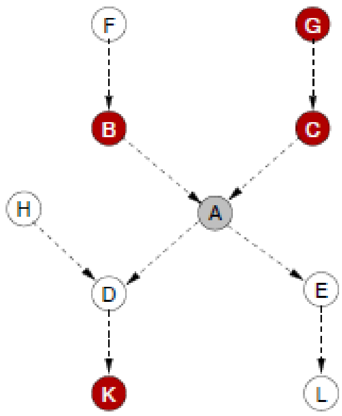
Slika 14: **Test** $A \sim K \mid \{B,G,C\}$



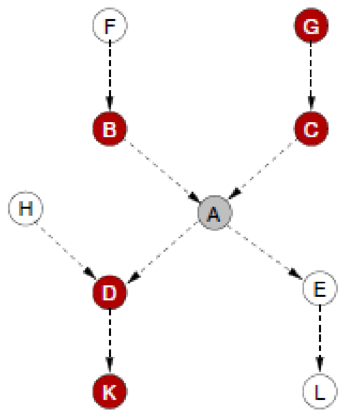
Slika 15: **Rezultat** $A \simeq K \mid \{B,G,C\}$

Zaključak: Put A - K nije blokiran što implicira da se promenljiva K dodaje u Markovljev pokrivač, **S** = {B, G, C, K}.

6. Zavisnost promenljivih A i D, Markovljev pokrivač je **S** = {B, G, C, K}.



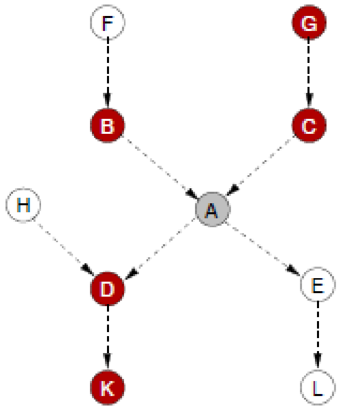
Slika 16: **Test** $A \sim D \mid \{B,G,C,K\}$



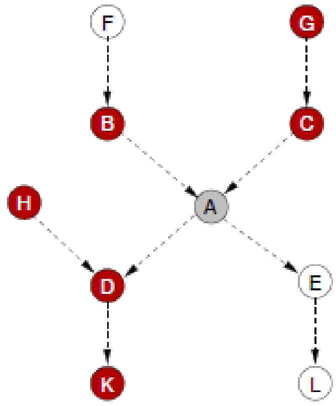
Slika 17: **Rezultat** $A \simeq D \mid \{B,G,C,K\}$

Zaključak: Promenljiva D može ući u skup **S** jer put A - D nije blokiran, **S** = {B, G, C, K, D}.

7. Zavisnost promenljivih A i H, Markovljev pokrivač je **S** = {B, G, C, K, D}.



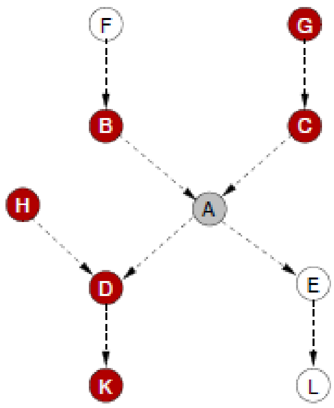
Slika 18: **Test** A $\sim$ H | {B,G,C,K,D}



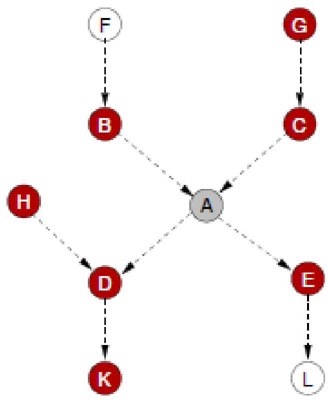
Slika 19: **Rezultat** A $\simeq$ H | {B,G,C,K,D}

Zaključak: U skladu sa pravilima d - separacije, promenljive A i H su zavisne, s toga promenljivu H treba dodati u skup **S**, **S** = {B, G, C, K, D, H}.

8. Zavisnost promenljivih A i E, Markovljev pokrivač je **S** = {B, G, C, K, D, H}.



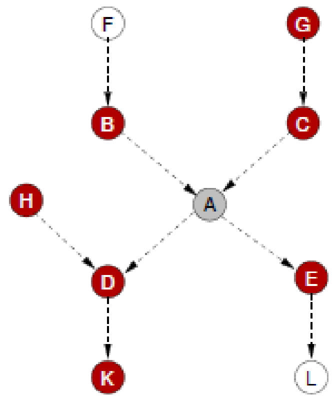
Slika 20: **Test** A $\sim$ E | {B,G,C,K,D,H}



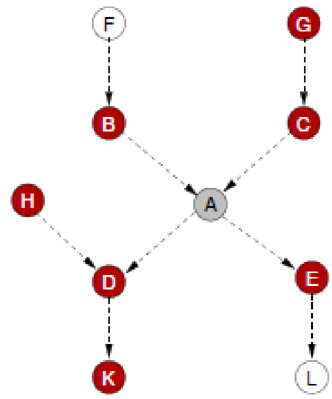
Slika 21: **Rezultat** A $\simeq$ E | {B,G,C,K,D,H}

Zaključak: Put A - E nije blokiran, promenljiva E ulazi u sastav skupa **S**, **S** = {B, G, C, K, D, H, E}.

9. Zavisnost promenljivih A i L, Markovljev pokrivač je **S** = {B, G, C, K, D, H, E}.



Slika 22: **Test** A ∼ L | {B,G,C,K,D,H,E}

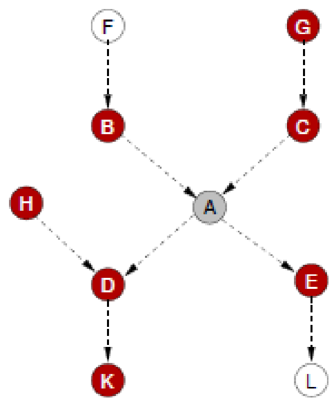


Slika 23: **Rezultat** A ∼ L | {B,G,C,K,D,H,E}

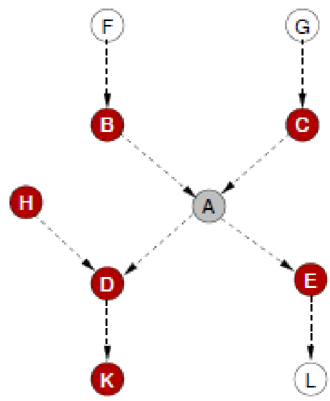
Zaključak: Put A - L je blokiran od strane promenljive E, te su promenljive A i L nezavisne, skup **S** se ne menja.

Nakon što je ispitana zavisnost svake od promenljivih u mreži sa promenljivom A, sledi provera tačnosti dobijenog Markovljevog pokrivača. **Shrinking faza** proverava da li neka od promenljivih treba biti isključena iz pokrivača.

10. Zavisnost promenljivih G i A, Markovljev pokrivač je **S** = {B, G, C, K, D, H, E}.



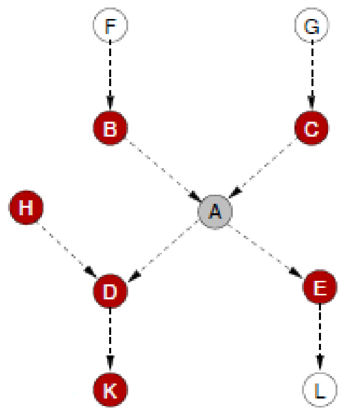
Slika 24: **Test** A ∼ G | {B,C,K,D,H,E}



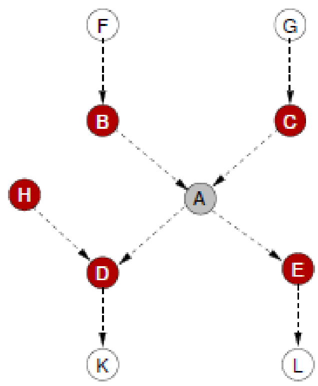
Slika 25: **Rezultat** A ∼ G | {B,C,K,D,H,E}

Zaključak: Posmatrajući zavisnost promenljivih G i A, pod trenutnim uslovima, može se uočiti da je put G - A blokiran od strane promenljive C, te je promenljivu G neophodno isključiti iz skupa. Skup **S** čine sledeće promenljive, **S** = {B,C,K,D,H,E}.

11. Zavisnost promenljivih A i K, Markovljev pokrivač je **S** = {B, C, K, D, H, E}.



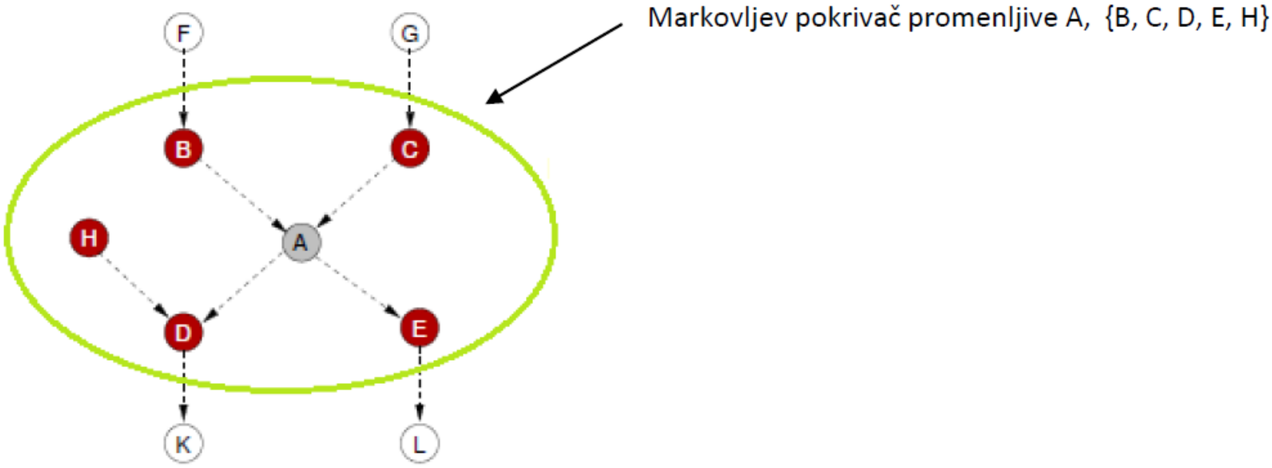
Slika 26: **Test** A ∼ K | {B,C,D,H,E}



Slika 27: **Rezultat** A ∼ K | {B,C,D,H,E}

Zaključak: S obzirom da je i promenljiva D u sastavu skupa **S**, ona blokira put A - K te promenljivu K treba isključiti iz skupa **S**, dakle Markovljev pokrivač je **S** = {B, C, D, H, E}.

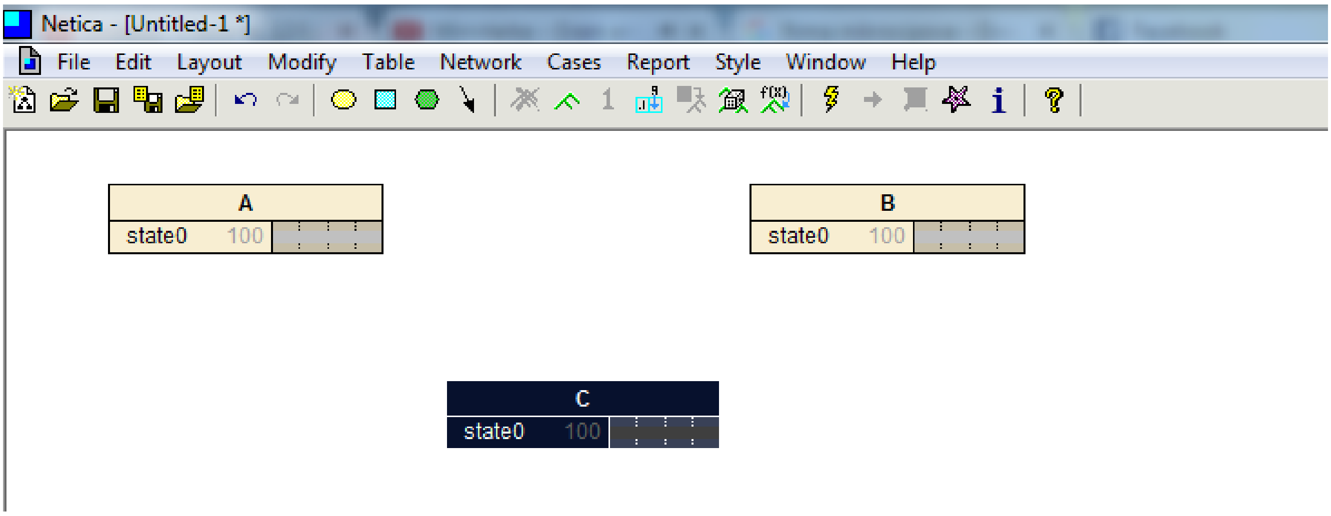
Nakon sprovedene analize, može se zaključiti koje promenljive čine Markovljev pokrivač promenljive A, i on ima sledeći oblik:



Slika 28: Markovljev pokrivač

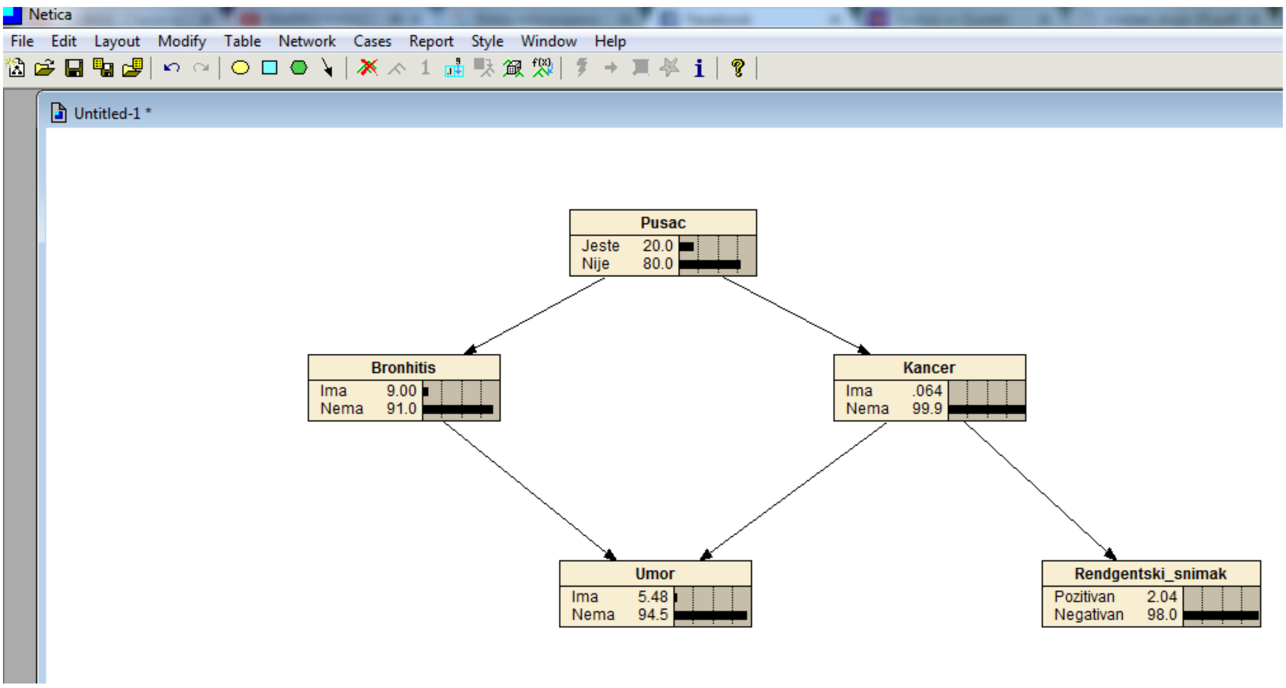
4.7 Netika

Izračunavanje verovatnoća u Bejzovim mrežama koje imaju veliki broj čvorova može biti jako komplikovano ukoliko bi se verovatnoće računale "peške". U svrhu što jednostavnijeg rada sa Bejzovim mrežama razvijen je poseban softver, Netika [10, 11, 18]. Princip rada ovoga programa je krajnje jednostavan. Potrebno je uneti čvorove, uslovne verovatnoće i strelicama prikazati zavisnost datih promenljivih. Na slici ispod nalazi se izgled prozora Netike.



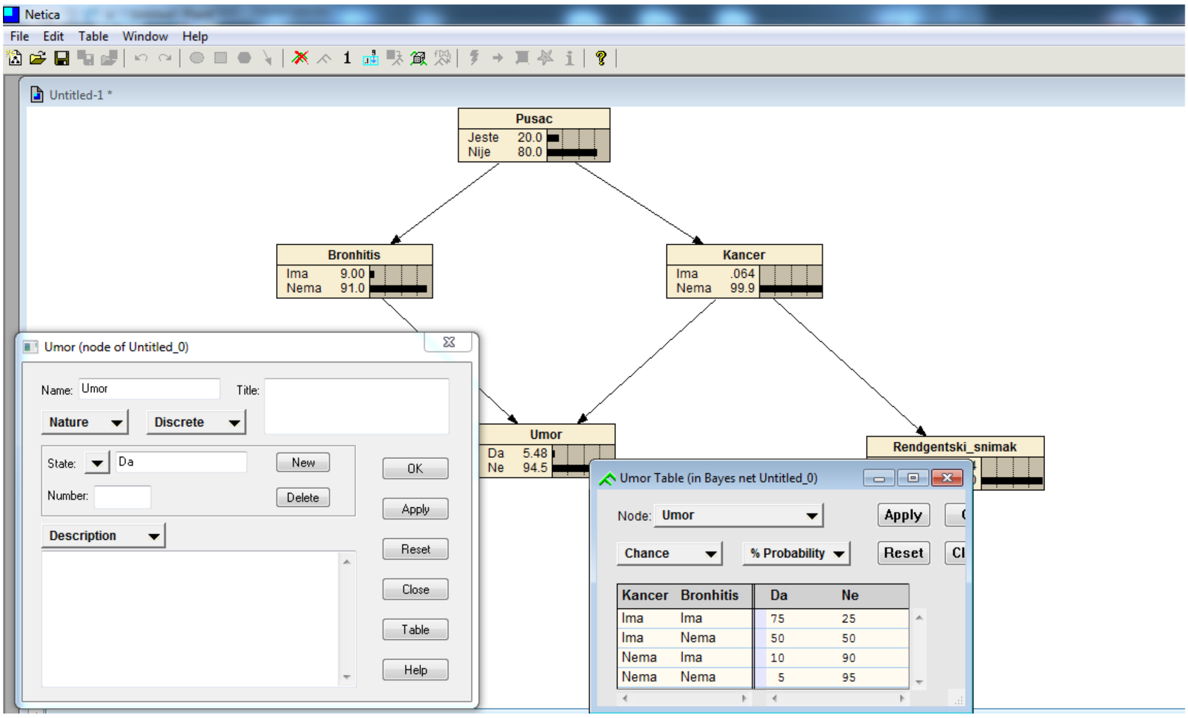
Slika 29: Izgled prozora Netike

Ukratko će biti objašnjeno kako radi Netika, koristeći primer sa Slike 4. Prethodno su potrebne verovatnoće računate ”peške”, a sada će biti pokazano kako taj proces može da se pojednostavi pomoću Netike. Za početak je potrebno dodati promenljive, i to pomoću žutog kruga koji se nalazi u gornjem levom uglu. Pored njega nalazi se strelica, koja služi za povezivanje čvorova. Dakle, dodaju se sve promenljive kao u prethodnom primeru i povezuju na odgovarajući način.



Slika 30: Primer Bejzove mreže u Netici

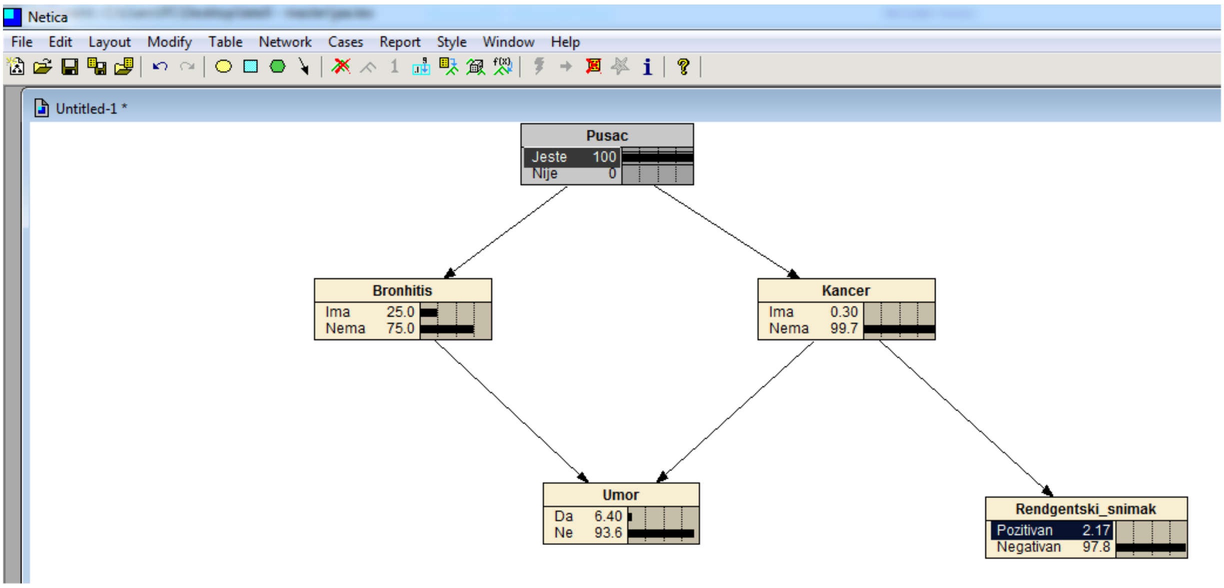
Zatim je mrežu potrebno dopuniti uslovnim verovatnoćama koje su poznate. U Netici, to bi izgledalo kao na slici ispod.



Slika 31: Kompletiranje Bejzove mreže uslovnim verovatnoćama

Prva tabela nudi mogućnosti unošenja vrednosti koje promenljiva može da primi, dok se u drugoj tabeli za istu promenljivu unose uslovne verovatnoće. Nakon povezivanja čvorova, Netika prepoznaje ko su roditelji svake od promenljivih i na taj način formira mogućnost unosa uslovnih verovatnoća. Sada, kada su unešeni svi potrebni podaci, klikom na opciju Compile Net, dobijaju se verovatnoće za sve promenljive u mreži. U gotovoj Bejzovoj mreži Netika nudi mogućnost promene uslovnih verovatnoća, ukoliko ima potrebe za tim. Zatim klikom na Compile Net, verovatnoće računa na osnovu novih podataka. Netika je pogodna za modele koje imaju veliki broj promenljivih jer povećanjem broja promenljivih raste i broj uslovnih verovatnoća koje je potrebno izračunati. Time i račun postaje mnogo složeniji.

Ranije pomenuta propagacija unapred i propagacija unazad može se primeniti na Bejzovu mrežu i u Netici. Ukoliko postoji dokaz za neku promenljivu, odnosno poznato je koju vrednost uzima data promenljiva, potrebno je njenu verovatnoću podesiti na 100. Klikom na Compile net Netika vrši propagaciju unapred i propagaciju unazad. Za ilustraciju koristiće se isti primer kao i ranije. Neka je posmatrana osoba pušač. Potrebno je izračunati verovatnoću da je rendgenski snimak pozitivan. Ova verovatnoća prethodno je računata "peške" i dobijeno je da ona iznosi 0.02174. Netika daje isti odgovor.



Slika 32: Propagacija unapred u Netic - i

5 Autizam i Bejzove mreže

5.1 Medicinski pristup postavljanju dijagnoze autizma

Autizam je veoma složen poremećaj u razvoju mozga [16, 17]. Karakteriše ga slabija socijalna interakcija, slabija komunikacija i ograničeno ponašanje. Javlja se u ranom detinjstvu i uglavnom je nasledni faktor glavni krivac za nastanak ove bolesti. U manjem broju slučajeva autizam se povezuje sa činiocima koji uzrokuju defekte tokom rođenja. Rana dijagnoza bolesti autizma je od velikog značaja jer razne terapije mogu poboljšati razvoj autističnog deteta, kao i šanse da zivi i funkcioniše nezavisno. Nažalost, postavljanje dijagnoze autizma kod dece mlađe od 2 godine retko je moguća. Njena složenost leži u činjenici da ne postoji jedinstveni uzrok bolesti, obično je reč o kombinaciji više različitih faktora. Glavni pokazatelji prisustva autizma kod dece u ranoj dobi, a koje roditelji sami mogu da uoče, su sledeće:

- Dete ne progovara niti jednu reč u prvih 16 meseci
- Nema gestikulacije u prvih godinu dana (mahanje rukama, pokazivanje prstom u nešto i sl.)
- Dete se ne smeje i ne pokazuje niti bilo koje druge reakcije sreće
- Nikakva reakcija na zvukove koji se proizvode u njegovoj okolini.

Kada je reč o načinu postavljanja dijagnoze, sve teorije se baziraju na socijalnim simptomima kao što su: nedostatak društvene motivacije, slabije komunikacijske sposobnosti i slično. Ne postoji objedinjena teorija koja obuhvata sve simptome, na osnovu koje bi se kod svakog pacijenta mogla lako postaviti dijagnoza. Svaki slučaj je specifičan te je potrebno sprovesti obimno istraživanje pacijentovog ponašanja kao i njegovog načina sagledavanja sveta.

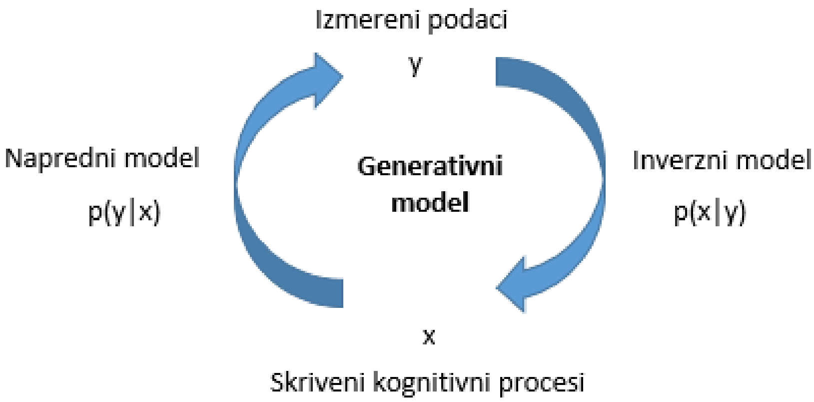
Neke od kliničkih metoda koje se koriste pri dijagnosticiranju autizma su *The Autism Diagnostic Observation Schedule (ADOS)* i *Autism Diagnostic Interview (ADI-R)*. The Autism Diagnostic Observation Schedule (ADOS) se sastoji iz niza zadataka koji uključuju interakciju između subjekta i ispitivača. Ispitivač pažljivo posmatra ponašanje subjekta nastojeći da primeti znakove koji bi vodili mogućoj dijagnozi autizma. Autism Diagnostic Interview (ADI-R) predstavlja intervju sa roditeljima posmatranog pojedinca. Ovaj dio ispitivanja je bitan jer su roditelji najbolje upoznati sa razvojem svoga deteta kao i njegovim ponašanjem u određenim situacijama. Tako roditelji mogu ukazati ispitivaču na određene postupke deteta koji bi pomogli pri postavljanju dijagnoze. ADOS i ADI-R se smatraju zlatnim standardom u dijagnostikovanju autizma i imaju široku kliničku primenu. Posebno su primenljivi kada se radi o razlikovanju dece sa autizmom od onih sa drugim psihijatrijskim poremećajima.

U određenim situacijama dijagnozu je gotovo nemoguće postaviti. Na primer, čest oblik autizma je Aspergerov sindrom. Deca sa ovim sindromom na prvi pogled nemaju upadljive smetnje u komunikaciji niti u ponašanju. Njihov osnovni problem je manjak neverbalne komunikacije, manje razvijene socijalne veštine i drugi simptomi koji nisu lako uočljivi. Visoko funkcionalni autizam u velikom broju slučajeva ostane nedijagnostifikovan. Reč je o osobama sa autizmom koje se, zahvaljujući visokom stepenu inteligencije, lako prilagođavaju okolini i sposobni su za samostalan život.

5.2 Računarski pristup postavljanju dijagnoze autizma

Psihijatrija, u odnosu na druge oblasti medicine, ima probleme pri postavljanju dijagnoze bolesti. U svim drugim oblastima medicine dijagnozu je moguće postaviti lako, na primer vađenjem krvi. U psihijatriji ovaj postupak nije moguć. Razlog za to je nemogućnost pristupa tkivu koji se tiče bolesti, mozgu. Kada je reč o autizmu, ali i o drugim psihijatrijskim poremećajima, nedostaje osnova za razvoj novih dijagnostičkih testova i novih strategija lečenja.

Jedna od alternativa koja bi doprinela rešenju ovog problema jeste računarska metoda koja se zasniva na generativnom modelu merenja aktivnosti mozga [12, 15]. To su napredni modeli koji objašnjavaju kako skriveni kognitivni ili fiziološki procesi x mogu generisati eksperimentalno izmerene podatke y.



Slika 33: Šematski prikaz generativnog modela

Koristeći Bejzovu teoremu, generativni model omogućava i rešavanje inverznog problema, donošenja zaključaka za skrivene podatke na osnovu izmerenih empirijskih podataka, računajući tako posteriornu verovatnoću p(x|y).

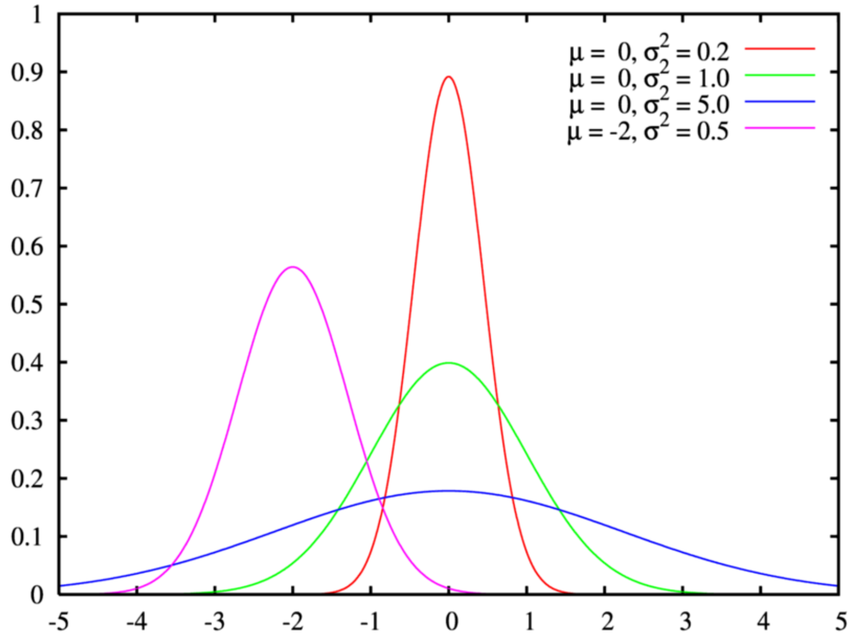
5.3 Normalna (Gausova) raspodela

Normalna (Gausova) raspodela je važna familija neprekidnih raspodela koja je našla primenu u mnogim oblastima. Njena važnost je u tome što se veliki broj nezavisnih, jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih, koje imaju konačnu varijansu, može jako dobro aproksimirati slučajnom promenljivom sa normalnom raspodelom [2, 3, 4].

Definicija 5.3.1. *Za slučajnu promenljivu X kaže se da ima normalnu (Gausovu) raspodelu sa parametrima $\mu \epsilon R$ i $\sigma^2 > 0$, X:N(μ, σ^2), ako je njega gustina raspodele*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \epsilon R$$

Grafik funkcije normalne raspodele zavisi od parametara μ i σ. μ predstavlja očekivanu vrednost posmatrane slučajne promenljive, na grafiku će to biti centar. σ je standarno odstupanje i ono određuje oblik grafika. Na slici ispod, za različite vrednosti parametara μ i σ predstavljen je grafik funkcije gustine slučajne promenljive sa normalnom raspodelom.

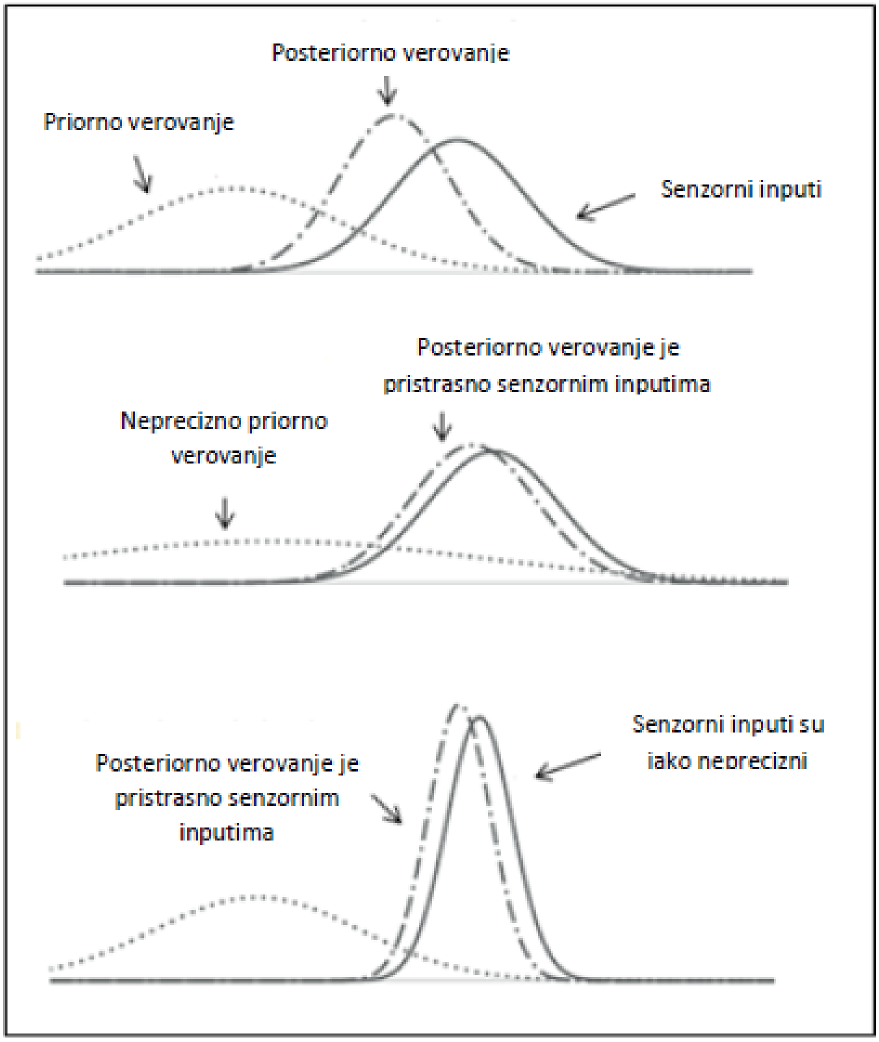


Slika 34: Grafik funkcije gustine normalne raspodele za različite vrednosti μ i σ^2

Ukoliko je manje standardno odstupanje, funkcija je više ispupčena, te su tada sve tačke bliže očekivanoj vrednosti. Dakle podaci su precizni. I obratno, što je standardna devijacija veća, grafik funkcije je više pljosnatog oblika, pa su vrednosti udaljene od očekivane vrednosti, podaci nisu dovoljno precizni.

5.4 "Bejzov mozak"

Bejzovo zaključivanje podrazumeva da uvek postoji a priorno verovanje, koje se može ažurirati tako što se posmatraju novi podaci i dolazi se do novih saznanja. Tako nastaje a posteriorno verovanje koje će postati a priori verovanje za neka buduća opažanja. Ovakav postupak se može ponavljati neograničen broj puta. Svaki put, prethodno verovanje se dopunjava novim podacima, te postaje sve tačnije. Ovaj postupak može se predstaviti pomoću funkcije gustine normalne raspodele.

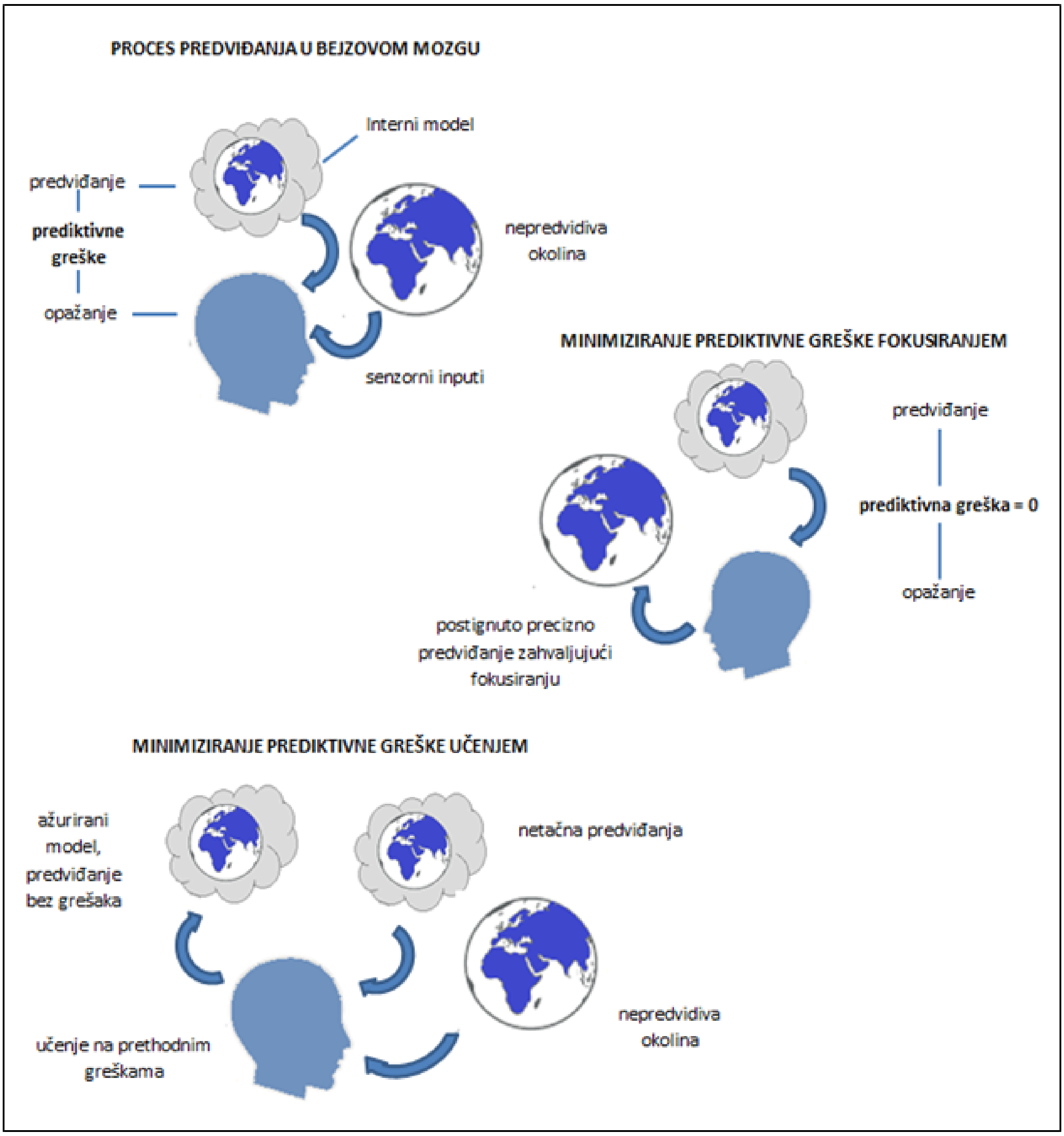


Slika 35: Princip Bejzovog zaključivanja prikazan funkcijom gustine normalne raspodele

Na slici iznad ilustrovan je princip Bejzovog zaključivanja koristeći grafik funkcije gustine normalne raspodele. Na prvom grafiku prikazano je priorno verovanje koje je, s obzirom na širinu krive odnosno varijansu, jako neprecizno. Posteriorno verovanje predstavlja "kompromis" između priornog verovanja i senzornih inputa, u kojem će dominirati onaj sa većom preciznošču. Shodno tome, jasno je da na drugom grafiku dominiraju senzorni inputi, jer je priorno verovanje neprecizno. Treći grafik prikazuje situaciju gde je priorno verovanje neprecizno, a senzorni inputi su jako precizni, te je posteriorno verovanje ponovo pristrasno senzornim inputima. Razlika u odnosu na prethodni grafik je veća preciznost senzornih inputa pa samim tim i posteriornog verovanja.

5.4.1 Unutrašnji model mozga

Mozak dobija razne informacije iz spoljašnje sredine, senzorne inpute. Na taj način se prvobitno priorno verovanje ažurira novim podacima i nastaje posteriorno verovanje koje je preciznije. Pomenuti proces se ponavlja svaki put kada su dostupni novi podaci. Način na koji će neki događaj iz okoline biti shvaćen, zavisi od toga kako je mozak prihvatio i obradio informacije. Ovaj postupak obrade podataka koji dolaze iz spoljašnje sredine naziva se **unutrašnjim modelom mozga** i predstavlja Bejzovo shvatanje načina funkcionisanja mozga. Mozak je mašina koja prima inpute iz spoljašnje sredine i daje kao rezultat obrađene podatke. Prilikom obrade podataka, u velikom broju slučajeva dolazi do greške. Ona predstavlja razliku između stvarnih senzornih inputa i načina na koji mozak prihavati iste te podatke i naziva se **greškom predviđanja**.



Slika 36: Unutrašnji model mozga

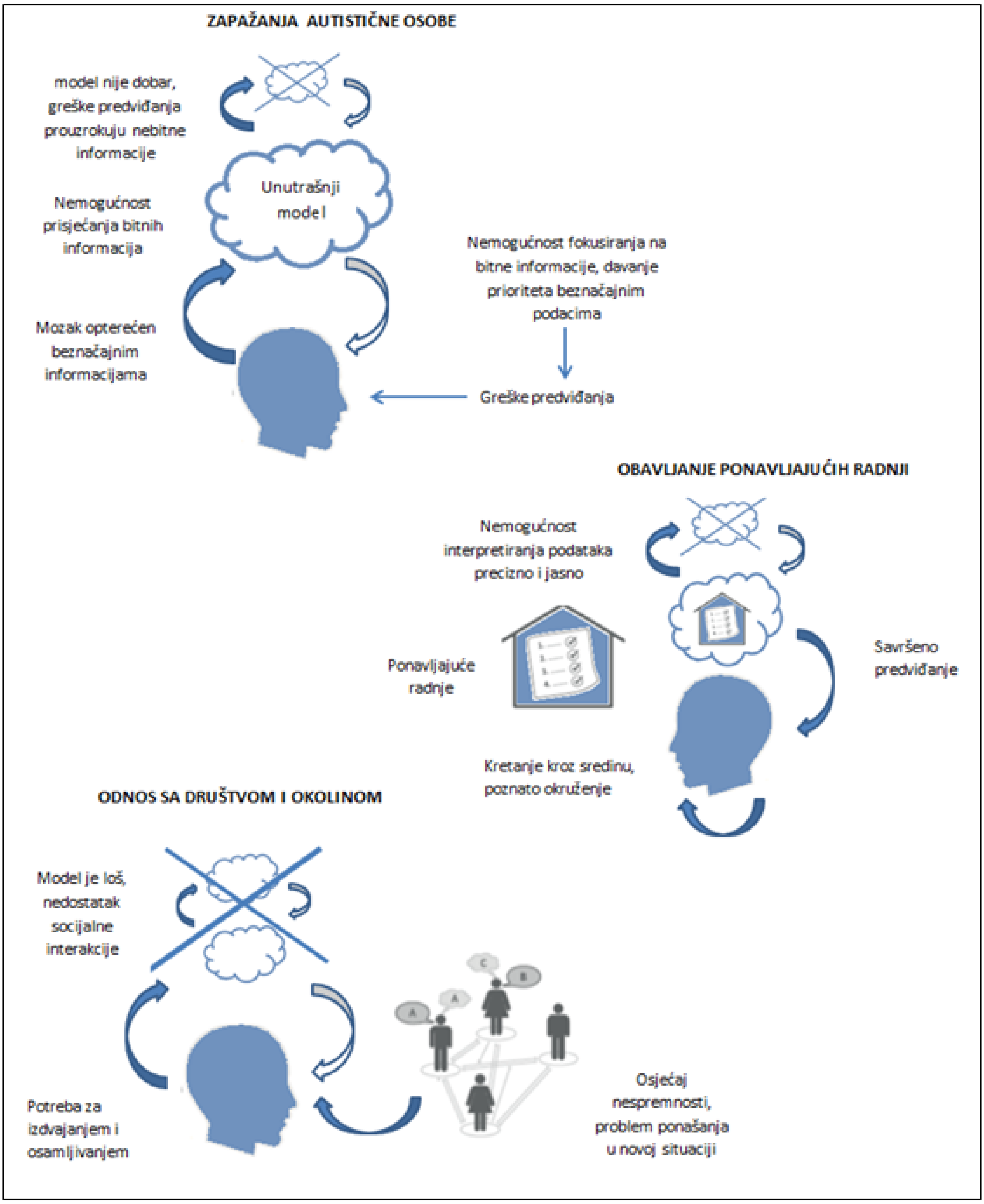
Cilj unutrašnjeg modela mozga jeste minimiziraje greške predviđanja. Kao što je prikazano na slici iznad, minimizacija greške može biti postignuta na dva načina:

- Fokusiranjem svih senzora (očiju, delova tijela) na podatke ili događaj koji se posmatra
- Učenjem na prethodnim greškama predviđanja

Zaključivanje u Bejzovom mozgu predstavlja proces gde se stvarni senzorni inputi iz spoljašnje sredine upoređuju sa istim tim podacima nakon što ih mozak registruje i obradi. Prva slika prikazuje nastanak prediktivne greške, odnosno greške koja nastaje kao posledica nedovoljne fokusiranosti prilikom opažanja. Jedan od načina da se izbegne nastanak grešaka predviđanja jeste fokusiranje na bitne informacije iz okoline. Poslednja slika pokazuje da pravljenje grešaka prilikom opažanja može pomoći prilikom budućih opažanja. To bi značilo da treba obratiti pažnju na greške koje se prave i učiti na njima.

5.4.2 Primena Bejzovog mozga na ASD

Pojedinci koji boluju od autizma imaju uočljiv problem prilikom razlikovanja bitnih informacija od nebitnih. Na primer, prilikom interakcije sa drugim ljudima, oni će više pažnje obratiti na neke nebitne detalje kao što je: boja kose, sagovornikova odeća i slično. S druge strane, oni neće ispratiti sagovornikov izraz lica prilikom konverzacije, a najčešće niti temu razgovora. Problem se javlja i prilikom prilagođavanja situacijama koje su samo na prvi pogled nove i nepoznate. Na primer, promena prostora ili vremena mogu da izazovu nesigurnost. Strah je prisutan svaki put kada nešto neočekivano može da se desi. Oni se osećaju sigurno samo u dobro poznatim situacijama, gde mogu sve držati pod kontrolom. Iz toga razloga nastaje potreba za ustaljenim dnevnim ritualima, to vodi ka njihovoj većoj sigurnosti.



Slika 37: Simptomi autizma sa Bejzove tačke gledišta

Zapažanje autistične osobe. Prioritet se daje beznačajnim informacijama koje dolaze iz okoline, mozak postaje opterećen te nema prostora za registrovanje bitnih podataka. Predviđanje, odnosno unutrašnji model mozga, je loš, jer je pažnja usmerena ka nebitnim događajima i tako je onemogućeno upijanje bitnih informacija. Ova situacija je posebno karakteristična za ponavljajuće radnje sa nekom manjom promenom. Na primer, ukoliko se promeni mesto dešavanja, pažnja će većim delom biti usmerena na novi prostor i neke detalje u njemu. Tako nastaje veliki broj prediktivnih grešaka, zbog fokusiranja na nebitne detalje tokom posmatranja. **Obavljanje ponavljajućih radnji**. U dobro poznatim situacijama, autistične osobe nemaju problem da funkcionišu. Dakle, minimizacija grešaka predviđanja mogla bi se postići ukoliko bi se osoba iz sredine u kojoj su stalno prisutne promene premestila u sredinu u kojoj neće biti iznenađena nekom promenom. Čak i ako se greška predviđanja na ovaj način minimizira, na kraju ipak ostaje problem da se podaci interpretiraju jasno i precizno. **Odnos sa društvom i okolinom**. Pored problema ponašanja u novim situacijama, autistične osobe imaju problem pri komunikaciji sa drugim ljudima. Iz toga razloga javlja se potreba za izdvajanjem i izbegavanjem svakog vida komunikacije.

5.5 AutismNET model

5.5.1 Dijagnosticianje autizma primenom modela Bejzovih mreža

Kao što je ranije napomenuto, postoji veliki broj faktora koji dovode do autizma, kao i veliki broj simptoma ove bolesti. Stoga je potrebno konstruisati model koji će na osnovu simptoma koji su prisutni kod nekog pojedinca, odrediti verovatnoću oboljenja od autizma. Veliki broj modela formiran je koristeći Bejzovu mrežu i od velike su koristi kada je u pitanju postavljanje dijagnoza raznih bolesti u medicini. Jedan od takvih je AutismNET model koji ima za cilj da otkrije prisutnost autizma kod dece, u ranoj dobi [6]. Njegov cilj jeste da pomogne roditeljima, koji sumnjaju na mogućnost prisutnosti autizma kod svoje dece, da sami delimično postave dijagnozu pre posete specijalisti. AutismNET model koristi Bejzovu mrežu koja je izgrađena na osnovu odgovarajuće medicinske literature, zatim je sam model proveren od strane stručnjaka i korigovaran po njihovim upustvima. Model podrazumeva procenu verovatnoće razvoja bolesti, u zavisnosti od određenih simptoma i faktora rizika koji se u modelu koriste.

5.6 Grafička struktura AutismNET modela

Osnova tri dela iz kojih se model sastoji prikazana su na slici ispod.

Slika 38: Osnovi delovi AutismNET modela

Model koji se posmatra bazira se na znanju koje se može dobiti iz medicinske literature. Nakon istraživanja došlo se do zaključka da postoji ukupno 85 promenljivih koje je neophodno uključiti u Bejzovu mrežu. Ideja jeste da se promenljive podele u tri grupe, na način koji je prikazan na slici iznad:

1. Faktori rizika
2. Dijagnoza
3. Simptomi

5.6.1 Postupak "razvoda" roditelja

Kako je broj promenljivih koje se posmatraju veliki, sledeća ideja jeste formiranje podskupova. Potrebno je videti koji od faktora rizika imaju sličan uticaj na prisustvo autizma, te njih spojiti tako da čine jednu promenljivu. Ovo je problem koji se često javlja, promenljive imaju veliki broj roditeja, s toga je broj uslovnih verovatnoća koji se posmatra za svaku promenljivu, koja je dete, veliki. Uvek je cilj da promenljiva ima što manji broj roditelja, kako bi račun bio jednostavniji. Ovakav postupak spajanja više promenljivih u jednu, kako bi se smanjio broj roditelja neke promenljive, poznat je kao **"razvod" roditelja**.

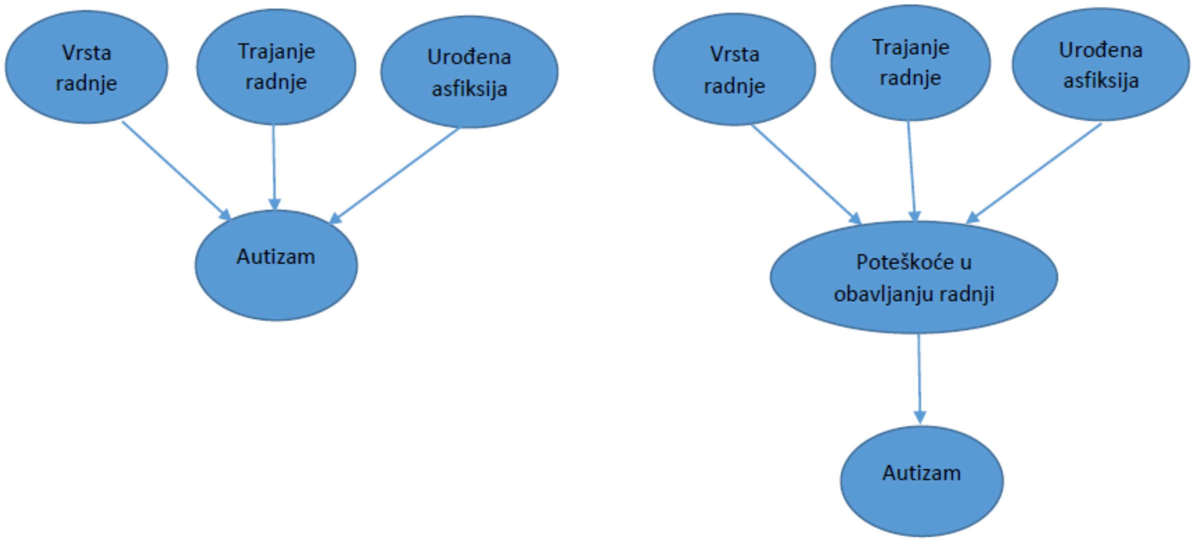
Definicija 5.6.1. *Neka su A_1,..,A_n roditelji promenljive B. Kaže se da je skup promenljivih A_1,...,A_i razveden od promenljivih A_{i+1},...,An ukoliko se uvede nova promenljiva C koja je dete promenljivih A_1,...,A_i, i roditelj promenljive B.*

Postavlja se pitanje kako se može primeniti ovaj princip, a da model ne izgubi na tačnosti. Princip je sledeći:

- Potrebno je uočiti dve ili više promenljivih, koje imaju isti ili sličan efekat na promenljivu, dete, koje se posmatra.

- Formirati novu promenljivu, koja će reprezentovati zajednički efekat promenljivih koje se razvode.

Na slici ispod prikazan je jedan podskup promenljivih u modelu koji će se posmatrati i njihovo spajanje u jednu promenljivu. Kao što je već napomenuto, to su promenljive koje na dete imaju isti ili sličan uticaj, te je to razlog što se one posmatraju kao jedna promenljiva.



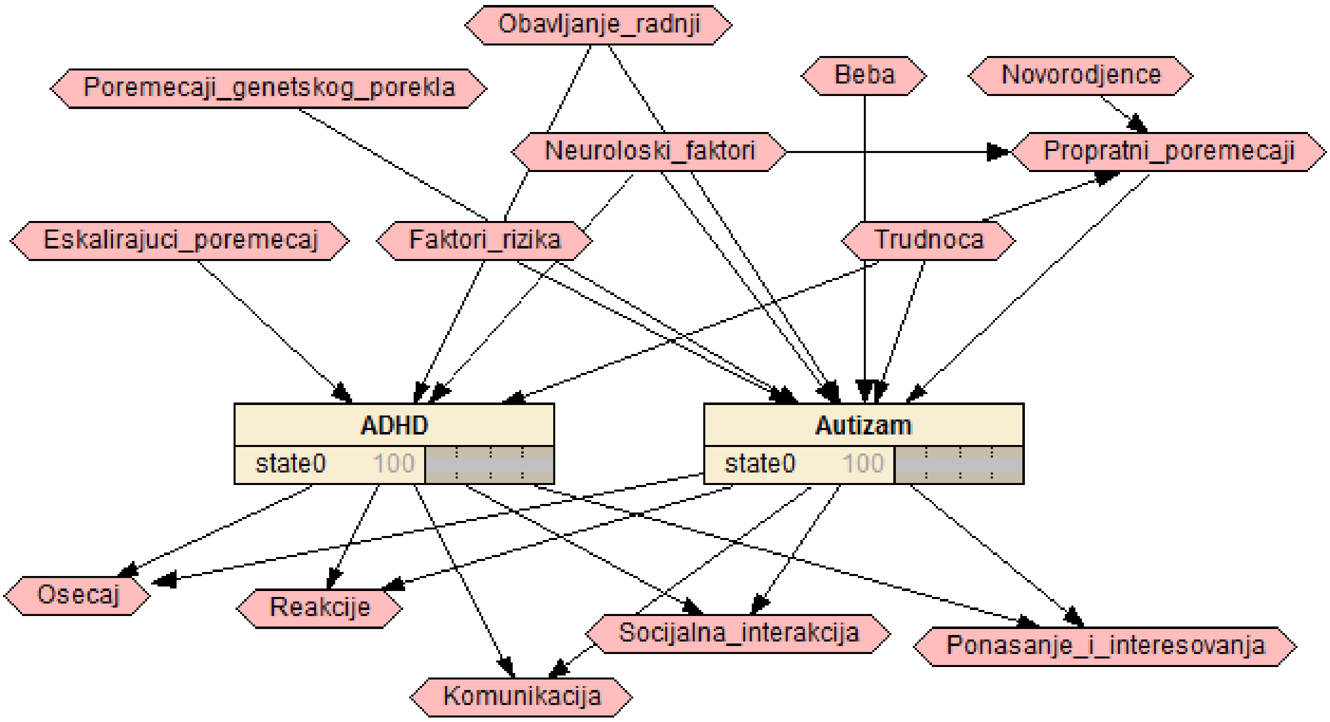
Slika 39: Primer "razvoda" roditelja u AutismNET modelu

Sve poteškoće u radu, vreme potrebno da se obavi neka radnja, vrste radnji koje su sporne za dete, kao i urođena asfiksija [4] predstavljaju slične simptome. Oni se odnose na sve prepreke pojedinca prilikom obavljanja neke radnje. S toga se mogu predstaviti pomoću jedne promenljive koja će biti nazvana "Poteškoće u obavljanju radnji".

5.6.2 Formiranje i analiza promenljivih u AutismNET modelu

Postupak koji je objašnjen u prethodnom poglavlju, primenjen je u modelu tamo gde je to bilo moguće, zbog bolje organizacije podataka. Ukupno 85 promenljivih grupisano je u 14 podskupova. Zbog složenosti modela, on je formiran u Netici, za početak bez dodeljivanja uslovnih verovatnoća. Pregled promenljivih koje se posmatraju dat je na slici ispod.

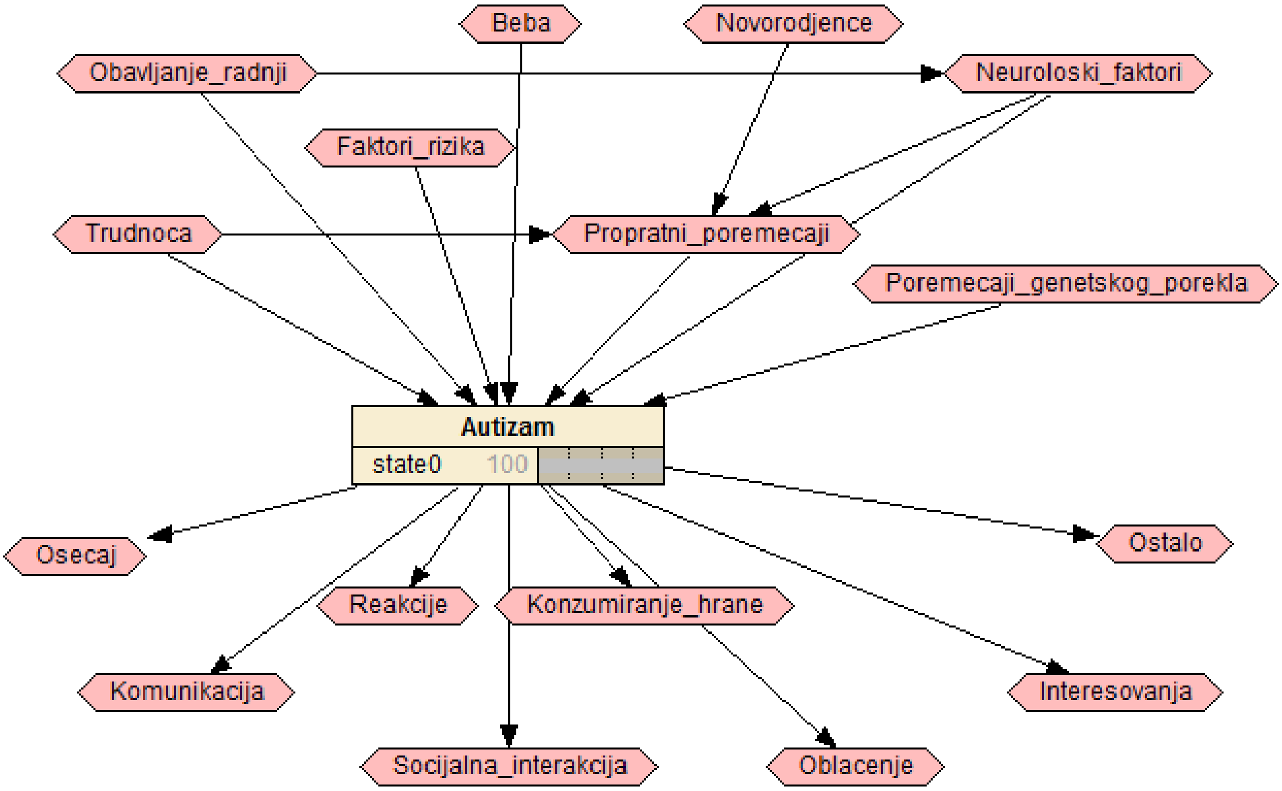
[4] (lat. *Asphyxia - odsustvo pulsa*) Stanje poremećene razmene gasova pre, za vreme, ili neposredno nakon porođaja. Dolazi do smanjenja koncentracije kiseonika u krvi, time i smanjenja snadbevanja tkiva kiseonikom.



Slika 40: AutismNET model sa svim promenljivim

Gornji dio modela, nakon grupisanja, ima 9 promenljivih koje uključuju 43 faktora rizika. Donji dio modela uključuje 5 promenljivih, koje sadrže 32 različita simptoma. Srednji dio modela čine dve dijagnoze, i to ADHD [5] i autizam. Nakon formiranja modela, sledeći korak jeste provera modela od strane stručnjaka. Konkretno, potrebno je dobiti informaciju da li zaista svaka od promenljivih treba da se nađe u modelu. Moguće je da neke od promenljivih imaju zanemariv uticaj, te ih nema smisla posmatrati, jer se time dodatno komplikuje model. Tokom analize modela, zaključeno je da faktori rizika imaju mnogo manji uticaj na postavljanje dijagnoze nego simptomi, ali da ih ipak treba zadržati u modelu. Predloženo je da se uvede jos nekoliko promenljivih, i to: dete se ne odaziva na svoje ime, ne reaguje kada mu roditelji čitaju knjige, konzumiranje hrane i slično. Kako se time broj promenljivih koje predstavljau simptome povećao, mora se izvršiti preraspodela podskupova. Novi model imaće 8 promenljivih koje se odnose na simptome, dok će faktori rizika ostati isti. Takođe, iz modela je isključena promenljiva ADHD. Razlog je taj što, i da postoji dijagnoza ADHD kod deteta, to i dalje ne vodi sigurnoj dijagnozi autizma. Konačan model, sličan je prethodnom, uz neke modifikacije i ima sledeći oblik:

[5](eng. *Attention deficit and Hyperactivity Disorder)* Poremećaj hiperaktivnosti i deficita pažnje. Karakteriše ga visok stepen motoričke aktivnosti, kao i veoma visoke aktivnosti uma.



Slika 41: AutismNET model nakon izmena

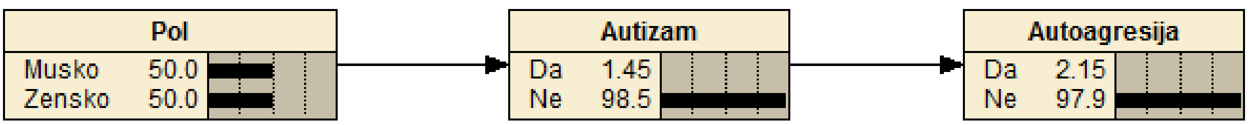
Sledeći korak jeste dodeljivanje uslovnih verovatnoća promenljivima. Ukoliko se desi da se nekoj od promenljivih dodeli ista verovatnoća u oba slučaja, ona ne može pomoći u donošenju zaključaka, te ju je potrebno isključiti iz modela. Na primer, ako su sledeće verovatnoće jednake:

- Dete je preosetljivo na dodir, pod uslovom da nema autizam
- Dete je preosetljivo na dodir, pod uslovom da ima autizam

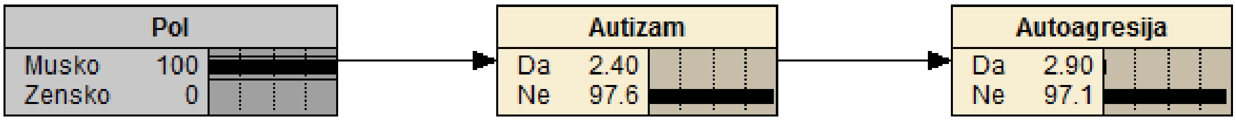
promenljiva *Osetljivost na dodir* ne daje nikakvu informaciju o prisutnosti autizma, te se uklanja iz modela.

5.6.3 Primer zaključivanja u AutismNET modelu

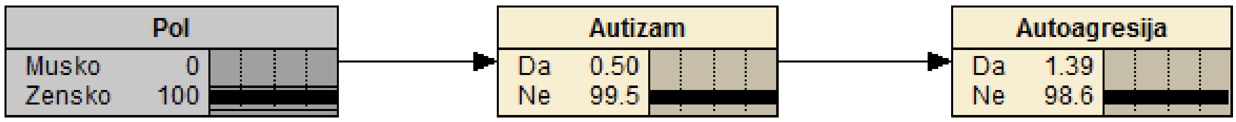
U nastavku, zbog veličine modela, izdvojen je jedan faktor rizika i jedan od simptoma zajedno sa svojim uslovnim verovatnoćama.



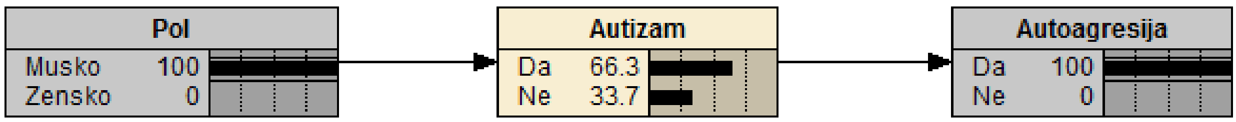
Na osnovu uslovnih verovatnoća izračunato je da je verovatnoća da dete ima autizam 1.45. Ovaj podatak odgovara istraživanjima koja su sprovedena, gdje je zaključeno da danas svako 68. dete ima autizam.



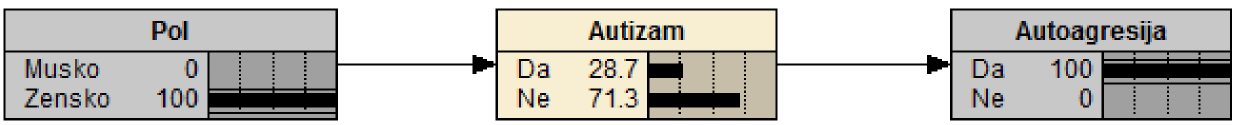
Ako se pretpostavi da je posmatrana osoba muškog pola, verovatnoća prisutnosti autizma se povećava na 2.4. Ovaj rezultat takođe ima smisla, ako se uzme u obzir činjenica da dečaci češće obolevaju od autizma nego devojčice. Može se primetiti da je i procenat autoagresije nešto uvećan kada se posmatraju samo osobe muškog pola.



Kao što je već napomenuto, kod devojčica je manji procenat oboljenja od autizma, ali i prisustva autoagresije. Poređenjem prethodne dve slike, može se videti da ta razlika nije zanemariva, dečaci imaju skoro 5 puta veću šansu za oboljenje.



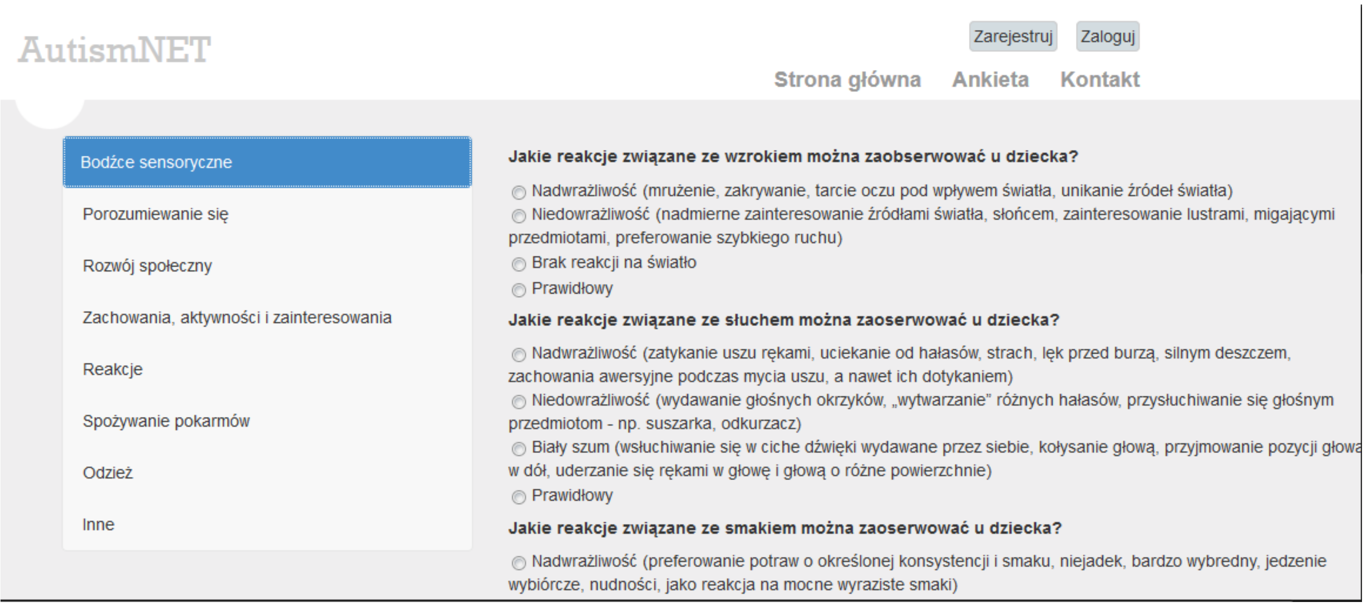
Sa slike iznad može se uočiti da prisustvo samo jednog od simptoma, može potvrditi prisutnost autizma. U ovom slučaju pretpostavljeno je da je posmatrana osoba muškog pola i da je autoagresivnost prisutna. Zaključak je da postoji verovatnoća 66.3 da je autizam prisutan. Ova informacija bila bi dovoljna da se poseti specijalista i postavi tačna dijagnoza.



Slično prethodnom slučaju, ali uz pretpostavku da je posmatrana osoba ženskog pola, prisustvo autoagresije daje dosta manju verovatnoću da osoba ima autizam. Šta više, ona iznosi 28.7, i više nego duplo je manja nego kod dečaka. Taj zaključak je opravdan, zbog mnogo manje zastupljenosti oboljevanja od autizma kod devojčica nego kod dečaka.

5.6.4 Prednosti, mane i primena AutismNET modela

Uslovne verovatnoće koje su dodeljene promenljivim u modelu predstavljaju subjektivno mišljenje stručnjaka. Dakle, podaci na kojima se baziralo dodeljivanje verovatnoća predstavljaju tipično autistično dete. To implicira da mogu postojati izuzeci. Konkretno, dete može da se ponaša na određeni način i iz nekih drugih razloga, a na osnovu modela zaključilo bi se da postoji mogućnost prisustva autizma. Takođe, neki od simptoma, kao što je autoagresivnost, imaju veliku dijagnostičku vrednost. To je dobra strana modela jer govori na koje simptome treba da se više obrati pažnja. Neke od promenljivih, kao što su: prevelika osetljivost na dodir, velika preokupacija igračkama i ponavljanje neobičnih radnji ili pokreta prema modelu ukazuju da je verovatnoća prisustva autizma oko 90%. S toga je neophodno da model bude podvrgnut dodatnoj reviziji promenljivih, kako bi zaključak bio tačniji. Ovako formiran model iskorišten je za razvijanje aplikacije. Pomoću nje, roditelji koji sumnjaju na prisutnost autizma kod svoje dece, imaju mogućnost da potvrde ili opovrgnu svoje sumnje. Aplikacija je u formi upitnika. Sastoji se od nekoliko pitanja, a koja se odnose na ponašanje deteta. Nakon popunjenog upitnika, kao rezultat dobija se verovatnoća oboljenja deteta od autizma. Upitnik se nalazi na adresi http://www.autismnet.pl. i dostupan je na poljskom jeziku.



Slika 42: Izgled AutismNET upitnika

Zaključak

"We modify our opinion with objectiove information: Initial Beliefs + Recent Objective Data = A New and Improved Belief. Each time the system is recalculated, the posterior becomes the prior of the new iteration. It was an evolving system, with each bit of new information pushed closer and closer to certitude "

Sharon Bertsch McGrayne

Poslednjih nekoliko decenija medicina je znatno napredovala, razvijene su nove metode koje omogućavaju brže i efikasnije lečenje. Naravno, pre bilo kakvog lečenja, najbitnije je postaviti tačnu dijagnozu pacijenta. To podrazumeva niz postupaka, zapažanja i tumačenja simptoma pacijenta koji bi ukazali na prisutnost bolesti na koju se sumnja. U gotovo svim oblastima medicine, dijagnozu je moguće postaviti na primer vađenjem krvi. Ovaj proces je u psihijatriji daleko složeniji, prvenstveno zbog toga što se bolest dijagnostikuje isključivo na osnovu simptoma koje osoba pokazuje, a osobe sa različitim poremećajima mogu imati slične ili iste simptome.

Cilj ovoga rada bio je pokazati povezanost medicine i računarskih nauka. Koristeći Bejzove mreže predstavljen je model koji se koristi kao dopuna, ali kao i zamena medicinskim tehnikama za dijagnostikovanje psihijatrijskih poremećaja. Konkretno, ilustrovan je model koji se odnosi na dijagnostikovanje autizma kod dece. Model se temelji na simptomima koji su prisutni kod pojedinca. Tako prateći njegovo ponašanje, određuje se verovatnoća bolesti.

Ovakav pristup problemu dugo vremena nije bio prihvaćen i nailazio je na negodovanje od strane stručnjaka. Razlog za to je što Bejzov pristup podrazumeva definisanje *a priori* verovatnoća. One predstavljaju subjektivno mišljenje stručnjaka, verovatnoću koja je dobijena na osnovu istraživanja, pa samim tim mogu se razlikovati u zavisnosti od toga ko vrši ispitivanje. S druge strane, jednom postavljenje *a priori* verovatnoće mogu se lako ažurirati svaki puta kada se dođe do novih informacija. Postupak se ne komplikuje i svaka promena se odmah može uzeti u obzir. To je velika prednost ovakvog modela.

Pokazalo se da je ovakav pristup problemu posebno pogodan kada se radi sa velikim brojem promenljivih, što je uglavnom slučaj u praksi. Formirana Bejzova mreža lako se može prilagoditi novim podacima, ma koliko promenljivih imala. Takođe, ukoliko se promeni verovatnoća jedne promenljive, automatski je moguće prilagoditi uslovne verovatnoće svih ostalih promenljivih sa kojima je ona u vezi.

Primena Bejzovih mreža mogla bi se analizirati gotovo u svakoj oblasti. Kroz ovaj rad pokazano je, pre svega, kako se formira Bejzova mreža, što predstavlja početno znanje koje je potrebno kako bi se formirao model i rešio problem iz bilo koje oblasti koristeći Bejzove mreže. Kao što se moglo videti na osnovu modela za dijagnostikovanje autizma, osnova za formiranje modela je poznavanje *a priori* verovatnoća. Konkretno, ako je reč o medicine sledeća bitna stavka je dobro poznavanje simptoma koje pacijent ima.

Literatura

[1] Neapolitan R. *Learning Bayesian Networks*, Northeastern Illinois University, Chicago, 2003

[2] Rajter - Čirič D. *Verovatnoća*, treće izdanje, Prirodno matematički fakultet, Novi Sad, 2013

[3] Lozanov Crvenkoviv́ Z. *Statistika*, Prirodno matematički fakultet, Novi Sad, 2012

[4] Benšić M. i Šuvak N. *Primijenjena matematika*, Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel ya matematiku, Osijek, 2013

[5] Margaritis D. *Learnig Bayesian Network Model Structure from Data*, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, 2003

[6] Szczygiel J., Onisko A., Swiderska J., Krysiewicz E. i Sienkiewicz J. *Porbabilictic graphical model supporting early diagnosis of autism spectrum disorder* , Bialystok University of Technology, Bialystok,2013

[7] Bondy J. i Murty U. S. R. *Graph Theory with Applications*, Department of Combinatorcs and Optimization, University of Waterloo, Ontario, 1976

[8] Petrović V. *Teorija grafova*, Novi Sad, 1998

[9] West D. *Introduction to Graph Theory*, drugo izdanje, Mathematics Department, University of Illinois, Illinois, 2005

[10] Lawrence D. i George B. *Exploring Bayesian Belief Networks Using Netica*, Imperial Collage, Department of Surgery and Cancer, London, 2011

[11] Korb K. i Nicholson A. *Bayesian Artificial Intelligence*, drugo izdanje, Faculty of Information Technology, Monash University, Chapman Hall / CRC, London, 2004

[12] Haker H., Schneebeli M. i Stephan K. *Can Bayesian Theories of Autism Spectrum Disorder Help Improve Clinical Practise*, University of Zurich and ETH Zurich, Zurich, 2016 Horny M. *Bayesian Networks*, Boston University School of Public Health, Department of Health Policy and Menagement, Boston, 2014

[13] Prcela M. *Predstavljanje znanja zasnovano na integraciji ontologija i Bayesovih mreža*, Doktorska disertacija, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb, 2010

[14] Fienberg S.E. *When did Bayesian inferience become "Bayesian"*, Departmetn of Statsistics, Cylab and Center for Automated Learning and Discovery, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, 2006

[15] Stephan K.E. i Mathys C. *Computational Approaches to psychiatry*, Welcome Trust Centre for Neuroimaging, Univesity College London, London, 2013

[16] D. Hrgovčić *Prvi znakovi autizma*, odjel za odgojne i obrazovne znanosti, Sveučilište Jurja Dobrile u Puli, Pula, 2015

[17] Fraser J. i McClintock J. *Diagnostics instruments for autism spectrum disorder*, Ministries of Health and Education, New Zealand, 2011

[18] https://www.bayesserver.com/docs/introduction/bayesian-networks

[19] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bayes.html

[20] https://gainweightjournal.com/bayesian-thinking-if-you-want-to-be-a-critical-thinker-you-need-to-understand-this-concept/

Kratka biografija

Marina Mijić rođena je 30.08.1992. godine u Doboju, Republika Srpska. Gimnaziju "Jovan Dučić" u Doboju završila je 2011. godine kao odličan učenik. Iste godine upisala je Primenjenu matematiku, modul matematika finansija, na Prirodno matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Položila je sve ispite zaključno sa septembarskim ispitnim rokom 2014. godine, sa prosekom 8.88. Iste godine upisuje master akademske studije, smer Primenjena matematika, na istom fakultetu. Od marta 2017. godine zaposlena je u Erste banci, u sektoru upravljanja kreditnim rizicima.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Marina Mijić
AU

Mentor: prof. dr Zagorka Lozanov-Crvenković
MN

Naslov rada: Bejzove mreže i njihova primena
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski / engleski
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2018.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (6, 60, 20, 2, 10, 23, 10, 0)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Statistika
ND

Predmetna odrednica / Ključne reči: statistika, Bejzova teorema, Bejzove mreže, autizam
PO

UDK

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod:
Ovaj rad se bavio Bejzovim mrežama koje za razliku od klasične statistike imaju drugačiji pristup problemu. Bejzov pristup podrazumeva postavljanje a priori verovatnoće koja predstavlja subjektivan izbor stručnjaka koji vrši zaključivanje. Ovo je bio razlog zbog čega ovakav pristup dugo vremena nije bio prihvaćen i imao je mali broj pristalica. Poslednjih godina Bejzove mreže korištene su u raznim oblastima. Jedna od njih je medicina, gde se pomoću njih formiraju modeli koji pomažu prilikom postavljanja dijagnoza raznih bolesti. Kako bi se mogao ilustrovati jedan od takvih modela, u prvom delu rada uveden je pojam Bejzovih mreža, kao i način na koji se iste formiraju. Takođe, prikazan je način zaključivanja u zavisnosti od odnosa promenljivih koje čine mrežu. Ovaj postupak ilustrovan je primerom, prilikom čega je korišten poseban softverski program, Netika. U poslednjem delu rada pokazano je na koji način se model Bejzovih mreža može primeniti na postavljanje dijagnoze autizma kod dece. Model koji je ilustrovan naziva se AutismNet model.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 26.01.2018.
DP

Datum odbrane: .
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Ljiljana Gajić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, predsednik
Član:	dr Zagorka Lozanov-Crvenković, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor
Član:	dr Ivana Štajner-Papuga, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, član

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORD DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph documentation
DT

Type of record: Textual printed material
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Marina Mijić
AU

Mentor: Zagorka Lozanov-Crvenković, Ph.D.
MN

Title: Bayesian Network with applications in Medicine
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: english / serbian
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2014.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (6, 60, 20, 2, 10, 23, 10, 0)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Statistics
SD

Subject / Key words: statistics, Bayes Theorem, Bayesian network, autism
SKW

UC:

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: The master thesis deals with the Bayesian networks which have a different approach to the problem than the classical statistics. Bayesian approach implies setting up a priori probability which is a subjective choice of experts. It is a reason why this approach wasn't accepted for a long time and didn't have many supporters. Bayesian networks were used in many areas recent years, including medicine. It is possible to make models which can help with establishing diagnosis of many diseases. In order to illustrate one of these models, firstly, it is necessary to define the term Bayesian networks, and the way to form them. Then, it is illustrated the way of concluding, depending on the relationship between variables. This method is illustrated by the example using Netica, special software program. In the last part of this thesis, it is shown how to use Bayesian networks in establishing diagnosis od autism. This model is named AustismNet model.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 26.01.2018.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Ljiljana Gajić, Ph.D., full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, president
Member:	Zagorka Lozanov-Crvenković, Ph.D., full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, supervisor
Member:	Ivana Štajner-Papuga, Ph.D., full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, member