UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Marijana Petričević Jović

Dekartov proizvod grafova

Master rad

Mentor:
Prof. dr Ivica Bošnjak

Novi Sad, 2017

Sadržaj

Predgovor

Teorija grafova je jedna od matematičkih disciplina koja se dosta razvijala poslednjih godina. Jednostavna struktura grafova i njihovog mogućnost grafičkog, odnosno geometrijskog prikaza dovodi do njihove primene i u nematematičkim disciplinama. Rad Leonarda Ojlera pod nazivom " Sedam mostova Kenigsberga " koji je objavljen 1736. godine smatra se za preteču teorije grafova. U potrazi za odgovorom da li je moguće obojiti zemlje na geografskoj karti sa samo četiri boje a da se ne pojave dve susedne zemlje sa istom bojom, nastao je tzv. Problem četiri boje, koji je 1852. uočio londonski student Frensis Gatri, ali tek 1976. to su uspeli da dokažu Kenet Apel i Bonfrang Hejken. Ovaj problem se smatra jednim od glavnih uzroka za nastanak i podsticaja za razvoj teorije grafova. Grafovi spadaju u bazične kombinatorne strukture, dok su proizvodi struktura fundamentalna konstrukcija u matematici, naročito u teoriji skupova, teoriji kategorija i univerzalnoj algebri. Izučavanje grafovskih proizvoda dovelo je do iznenađujućih rezultata i novih ideja, kako u kombinatorici tako i u algebri.

Količina rezultata koja se odnosi na proizvode grafova je velika, zbog toga nećemo se baviti kompletnim pregledom date oblasti sa njenim primenama, već ćemo izložiti osnovne pojmove i rezultate o standardnim grafovskim proizvodima i predstaviti nekoliko važnih teorijskih rezultata o Dekartovom proizvodu grafova.

Rene Dekart(Rene Descartes) bio je poznati francuski filozof, matematičar i fizičar i živeo je 1596-1650 godine. Poznat je i po pronalasku dekartovog koordinatnog sistema, koji je korišćen kao osnova za analitičku geometriju. Poznat je njegov veliki doprinos u matematici kao što je upotreba pravouglog koordinatnog sistema, prvi uvodi promenljive veličine. Već 1620. znao je za Ojlerovu formulu, (koju je dokazao Ojler 1748.) i smatra se da je na osnovu te teoreme započeta teorija grafova.

Sledi prikaz organizacije rada, koji je podeljen u četiri dela.

U uvodnom delu rada, navedene su osnovne defnicije i pojmovi koji su neophodni za razumevanje rada. Uvodimo osnovne pojmove iz Teorije grafova.

Drugi deo rada posvećen je osnovnim grafovskim proizvodima, Dekartovom, jakom, direktnom i leksikografskom proizvodu. Govorićemo o asocijativnosti i komutativnosti istih, videćemo da su svi asocijativni, a da samo leksikografski proizvod grafova nije komutativan. Takođe, videćemo da su svi ovi proizvodi distributivni u odnosu na disjunktnu uniju, osim leksikografskog, za koga važi samo desna distributivnost.

Treći deo rada je posvećen Dekartovom proizvodu i njegovim osobinama. Pričamo o dekompoziciji na proste faktore i rastojanju u Dekartovom proizvodu. Dokazujemo teoremu Sabidussi-Vizing o jedinstvenoj faktorizaciji grafa. Uvodimo pojam podproizvoda Dekartovog proizvoda. Govorimo o strukturi izomorfizama između povezanih Dekartovih proizvoda, kao i izomorfizmu grafa G na sebe. Opisujemo automorfizme Dekartovog proizvoda povezanih prostih faktora. Takođe govorimo o kara-kterističnom broju Dekartovog proizvoda i kancelaciji.

U četvrtom delu govorimo o hiperkocki i njenoj povezanosti sa Dekartovim proizvodom. Prikazuje se nekoliko primera hiperkocki. Takođe pričamo o medijalnim grafovima i njihovoj povezanosti sa hiperkockom.

***

Iskrenu zahvalnost za izradu master rada dugujem svom mentoru dr Ivici Bošnjaku. Hvala mu na izdvojenom vremenu, razumevanju, kao i na korisnim primedbama i sugestijama bez kojih rad ne bi imao sadašnji oblik.

Takođe, želela bih da se zahvalim profesorima dr Rozaliji Madarasz i dr Petru Đapiću, članovima komisije za odbranu ovog master rada, svim ostalim profesorima sa kojima sam sarađivala tokom osnovnih i master akademskih studija, kao i svim kolegama i koleginicama sa kojima je studiranje bilo lepo iskusvo.

Zahvalnost dugujem i svojoj porodici na ukazanom poverenju, razumevanju i podršci koju su mi pružali tokom mog školovanja.

Marijana Petričević Jović

1

Uvod

Teorija grafova je jedna od matematičkih disciplina koja se dosta razvijala poslednjih godina. Pojam grafa dobija svoju punu vrednost kada se skupovi i relacije na njima predstavljaju geometrijskim figurama. Graf se definiše kao apstraktni matematički objekat, a figura sastavljena od tačaka i linija je geometrijska predstava ili crtež grafa. Uobičajeno je da se ta reprezentacija takođe naziva grafom. Grafove možemo uočiti u raznim granama nauke: u hemiji ih možemo uočiti kao strukturne formule molekula, kao dijagrame kompljuterskih programa u informatici, takođe pomoću njih predstavljaju se mreže puteva.

1.1 Osnovni pojmovi teorije grafova

Definicija 1.1.1. *Graf G je uređen par (V(G),E(G)), gde sa V(G) označavamo neprazan skup elemenata koji se zovu čvorovi, a sa E(G) skup parova elemenata iz V(G) koje zovemo granama.*

Broj čvorova ćemo označavati sa $n(G)$, a broj grana sa $m(G)$.
Ako je $e = (u, v)$ grana grafa, onda kažemo da su u i v *susedni čvorovi,* a da je grana e *incidentna* sa čvorovima u i v. Granu(u, v) ćemo ubuduće označavati sa uv.

Definicija 1.1.2. *Dva čvora povezana granom zovemo susednim čvorovima. Skup svih suseda čvora $v \in V(G)$ označavamo sa $N_G(v)$,*

$$N_G(v) = \{u \in V(G) | uv \in E(G)\}.$$

Stepen čvora v u oznaci $\delta(v)$, je broj grana koje su incidentne sa njim, to ćemo zapisivati sa $\delta_G(v) = |N_G(v)|$. Minimalni stepen svih čvorova grafa označavaćemo sa $\delta(G)$, a maksimalan sa $\Delta(G)$.

Definicija 1.1.3. *Izolovani čvor je čvor koji nema suseda i njegov stepen je 0, a čvor sa tačno jednim susedom je viseći čvor.*

Niz stepena čvorova grafa G je niz brojeva $(d_1, \ldots, d_n)$ koji se dobijaju tako što se stepeni svih čvorova u grafu poređaju u nerastući ili neopadajući poredak. Ako su čvorovi grafa G označeni sa $v_1, \ldots, v_n$ tako da $\delta(v_1) \leq \cdots \leq \delta(v_n)$ ili $\delta(v_1) \geq \cdots \geq \delta(v_n)$, onda je $(\delta(v_1), \ldots, \delta(v_n))$ niz stepena čvorova tog grafa.

Definicija 1.1.4. *Graf $H = (V'(H), E'(H))$ je podgraf grafa $G = (V(G), E(G))$, u oznaci $H \leq G$, ako je $V' \subseteq V$ i $E' \subseteq E$. Ako su svi parovi čvorova podgrafa H grafa G koji su susedni u G, takođe susedni i u H, tada za H kažemo da je indukovani podgraf.*

Neka je H podgraf grafa G i neka se čvor v javlja i u jednom i u drugom grafu. Onda ćemo sa $\delta_G(v)$ označavati stepen čvorova v u grafu G, a sa $\delta_H(v)$ njegov stepen u grafu H. Jasno je da je $\delta_H(v) \leq \delta_G(v)$. Slično, sa $N_G(v)$ ćemo označavati skup suseda čvora v i jasno je da je $N_H(v) \subseteq N_G(v)$.

Definicija 1.1.5. *Unija grafova G_1 i G_2, tj. $G_1 \cup G_2$ je graf čiji je skup čvorova $V(G_1) \cup V(G_2)$, a skup grana $E(G_1) \cup E(G_2)$. Ukoliko su G_1 i G_2 po čvorovima disjunktni grafovi njihova unija se obeležava sa $G_1 + G_2$.*

Teorema 1.1.1. *Suma svih stepena čvorova grafa je jednaka dvostrukom broju grana, to jeste,*

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2m$$

.

Formula sume govori da u grafu $G = (V(G), E(G))$ važi $\sum \delta(v) = 2|E|$, jer je svaka grana susedna sa dva čvora.

Posledica 1.1.1. *U svakom grafu broj čvorova neparnog stepana je paran.*

Definicija 1.1.6. *Srednji stepen čvora u grafu $G = (V(G), E(G))$ sa n čvorova i m grana, u oznaci $\bar{\delta}(G)$, je aritmetička sredina stepena čvorova grafa:*

$$\bar{\delta}(G) = \frac{1}{n} \sum_{v \in V} \delta(v) = \frac{2m}{n}.$$

Definicija 1.1.7. *Graf koji ima konačan broj čvorova zove se konačan graf. Sa Γ označavaćemo klasu konačnih grafova bez petlji, a sa Γ_0 klasu konačnih grafova sa mogućim petljama. Graf sa beskonačnim brojem čvorova zove se beskonačni graf.*

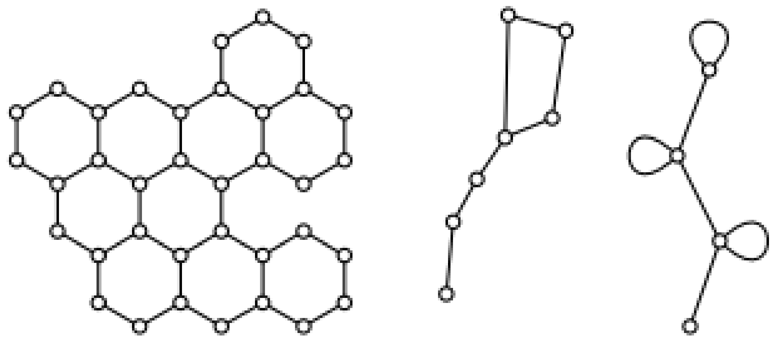
Definicija 1.1.8. *Komplement grafa G je graf $\bar{G}$ čiji je skup čvorova $V(\bar{G}) = V(G)$ i čiji je skup grana $E(\bar{G}) = \{uv | u, v \in V(G), uv \notin E(G)\}$.*

Definicija 1.1.9. *Graf u kom između svaka dva čvora postoji grana naziva se kompletan graf. Kompletan graf sa n čvorova označavamo sa K_n.*

Definicija 1.1.10. *Graf u kojem nikoja dva čvora nisu povezana naziva se prazan graf. Prazan graf sa n čvorova označavamo sa D_n.*

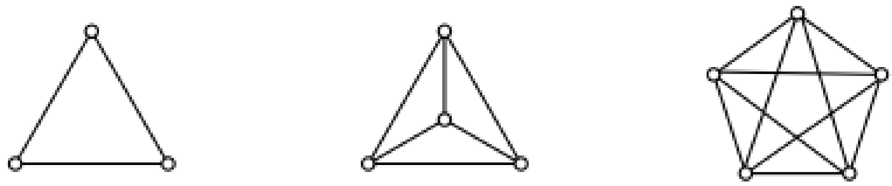
Uvek ćemo smatrati da graf pripada Γ, osim ako nije drugačije naglašeno.

Na slici 1.1 dati su primeri grafa, levo i u sredini bez petlji, a desno je graf sa petljama.



Slika 1.1

Definicija 1.1.11. *Graf G je regularan ako je stepen svakog čvora isti, to jest ako i samo ako $\delta(G) = \Delta(G)$. Kompletan graf K_n je $(n-1)-$ regularan i ima tačno $\binom{n}{2}$ grana. Ako kompletan graf ima beskonačno mnogo čvorova označavamo ga sa K_∞. Sa K_1 označavamo trivijalni graf, sa K_2 granu i sa K_3 trougao.*



Slika 1.2, Primeri kompletnih grafova K_3, K_4 i K_5

Definicija 1.1.12. *Graf G je bipartitan ako se skup njegovih čvorova može podeliti na dva dela X i Y, tako da svaka grana tog grafa spaja jedan čvor skupa X sa jednim čvorom skupa Y.*

Par (X,Y) se zove *biparticija skupa čvorova grafa G.* Indukovani podgraf bipartitnog grafa je bipartitan graf.

Teorema 1.1.2. *Graf je bipartitan ako i samo ako ne sadrži neparnu konturu.*

Šetnja u grafu G je niz $v_0e_1v_1e_2v_2\ldots v_{k-1}e_kv_k$ čvorova i grana grafa G takav da je $e_i = v_{i-1}, v_i$ za sve $i \in 1, \ldots, k$. Čvorovi v_0 i v_k se zovu *krajevi* šetnje. Takođe kažemo da ova šetnja povezuje čvorove v_0 i v_k. Šetnja $v_0e_1v_1e_2v_2\ldots v_{k-1}e_kv_k$ kod koje su svi čvorovi različiti zove se *put* u grafu.

Teorema 1.1.3. *Ako postoji šetnja koja povezuje čvorove u i v grafa G, onda postoji i put koji ih povezuje.*

Graf je povezan ako za svaka dva čvora tog grafa postoji put koji ih povezuje. Maksimalan povezan podgraf grafa G zove se *komponenta povezanosti* tog grafa. Broj komponenti povezanosti grafa G označavamo sa $\omega(G)$. Graf G je povezan ako i samo ako je $\omega(G) = 1$.

Kontura ili ciklus dužine n je put koji završava u istom čvoru u kojem i počinje i označava se sa C_n.

Definicija 1.1.13. *Rastojanje između čvorova u i v grafa G je dužina najkraćeg $(u-v)$ puta u grafu G. Rastojanje između čvorova u i v označavaćemo sa $d_G(u, v)$.*

Ukoliko ne postoji put između u i v pisaćemo $d(u, v) = \infty$.

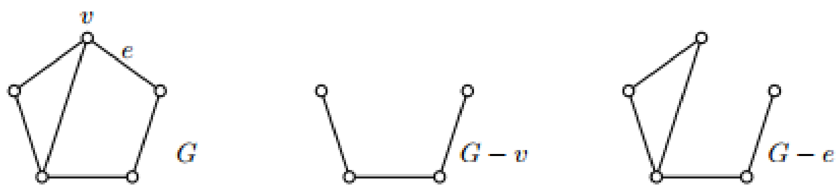
Definicija 1.1.14. *Dijametar ili prečnik povezanog grafa G, u oznaci diam(G), definiše se kao maksimalno rastojanje između dva čvora grafa G.*

Definicija 1.1.15. *Čvor $v \in V(G)$ grafa G je artikulacioni čvor ako se njegovim uklanjanjem povećava broj komponenti povezanog grafa G.*

Definicija 1.1.16. *Grana $e \in V(G)$ grafa G je most ako se njenim uklanjanjem povećava broj komponenti povezanosti grafa G.*

Uklanjanje čvora $v \in V(G)$ iz grafa G se vrši tako što se iz G ukloni čvor v i sve grane koje su incidentne sa v. Dobijeni graf se označava sa $G - v$. Uklanjanje grane iz grafa G se vrši tako što se iz G ukloni grana e dok njeni krajevi ostaju. Dobijeni graf se označava sa $G - e$.

Slika 1.3 je primer grafa sa uklonjenim čvorom i sa uklonjenom granom.



Slika 1.3

Teorema 1.1.4. *Grana e grafa $G = (V(G), E(G))$ je most u G ako i samo ako postoji particija (A,B) skupa čvorova grafa G takva da je $E(A, B) = \{e\}$ (drugim rečima e je jedina grana čiji jedan kraj je u A, a drugi u B).*

Teorema 1.1.5. *Čvor v grafa $G = (V(G), E(G))$ je artikulacioni čvor u G ako i samo ako postoji particija (A,B) skupa $V \setminus \{v\}$ takva da je $E(A, B) = \emptyset$, $E(\{v\}, A) \neq \emptyset$ i $E(\{v\}, B) \neq \emptyset$ (drugim rečima nijedan čvor iz A nije susedan ni sa jednim čvorom iz B, dok je v susedan sa nekim čvorom iz A i sa nekim čvorom iz B).*

Teorema 1.1.6. *Grana e je most u grafu G ako i samo ako ne pripada nijednoj konturi grafa G.*

Definicija 1.1.17. *Graf je stablo ako i samo ako svaka dva čvora su povezana tačno jednim putem.*

Definicija 1.1.18. *Izomorfizam grafova $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ je bijekcija $\varphi : V_1 \to V_2$ takva da za svaka dva čvora $u \neq v$ grafa G_1 važi u* je susedan sa v u G_1 ako i samo ako je $\varphi(u)$ susedan sa $\varphi(v)$ u G_2.

Definicija 1.1.19. *Grafovi G_1 i G_2 su izomorfni, u oznaci $G_1 \cong G_2$, ako postoji izomorfizam $\varphi : V_1 \to V_2$.*

Grafovi su izomorfni ako se zapravo radi "o jednom istom grafu" čiji čvorovi su označeni na dva različita načina. Izomorfni grafovi imaju isti broj čvorova, isti broj grana, iste nizove stepena čvorova, što znači izomorfni grafovi imaju iste grafovske osobine. Da bi se pokazalo da dva grafa nisu izomorfna dovoljno je naći jednu razliku.

Definicija 1.1.20. *φ je homomorfizam iz grafa G u graf H ako očuvava susednost preslikavanja iz V(G) u V(H), to jest preslikavanje za koje $(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(H)$ uvek kada $(u, v) \in E(G)$.*

Definicija 1.1.21. *Slabi homomorfizam grafa G u graf H je preslikavanje $\varphi : V(G) \to V(H)$ za koje $uv \in E(G)$ implicira $(\varphi(u)\varphi(v)) \in E(H)$ ili $\varphi(u) = \varphi(v)$.*

2

Osnovni grafovski proizvodi

Proizvod grafova je binarna operacija na Γ ili Γ_0. Iako se mnogi proizvodi mogu definisati na Γ_0, zbog jednostavnosti, ukoliko nije drugačije naglašeno, svi grafovi su u Γ, što znači da nemaju petlju. Grafovske proizvode prvi definišu 1912. godine Whitehead i Russell, a 1960. grafovskim proizvodima ponovo se bavi i istražuje Sabidussi. Izučavanje grafovskih proizvoda dovelo je do važnih rezultata i novih ideja, kako u kombinatorici tako i u algebri. Oni imaju raznovrsne primene u matematici, hemiji, informatici, genetici, elektritehnici, kao i u mnogim drugim naukama. Predstavićemo osnovne grafovske proizvode, ali ćemo veću pažnju posvetiti Dekartovom proizvodu grafova.

2.1 Grafovski proizvodi

Razlikujemo četiri osnovna proizvoda:

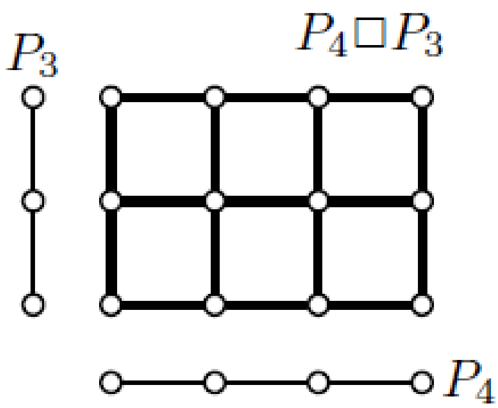
1. Dekartov proizvod
2. Direktan proizvod
3. Jaki proizvod
4. Leksikografski proizvod

Definicija 2.1.1. *Dekartov proizvod* od G i H je graf u oznaci $G \square H$, gde je skup čvorova $V(G) \times V(H)$. Dva čvora (g, h) i (g', h') su susedna ako $g = g'$ i $hh' \in E(H)$ ili $gg' \in E(G)$ i $h = h'$. Dakle,

$$V(G \square H) = \{(g, h) | g \in V(G) \text{ i } h \in V(H)\}$$

$$E(G \square H) = \{(g, h), (g', h') | g = g', hh' \in E(H) \text{ ili } gg' \in E(G), h = h'\}.$$

Grafovi G i H zovu se faktori proizvoda $G\Box H$.

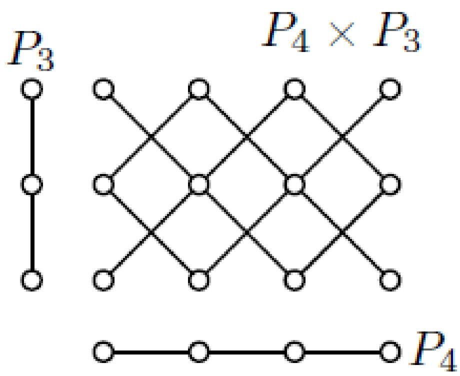


Slika 2.1: Primer Dekartovog proizvoda

Definicija 2.1.2. *Direktan proizvod* G i H je graf u oznaci $G \times H$, gde je skup čvorova $V(G) \times V(H)$, za koji su čvorovi (g, h) i (g', h') susedni ako je $gg' \in E(G)$ i $hh' \in E(H)$. Dakle,

$$V(G \times H) = \{(g, h) | g \in V(G) \text{ i } h \in V(H)\}$$

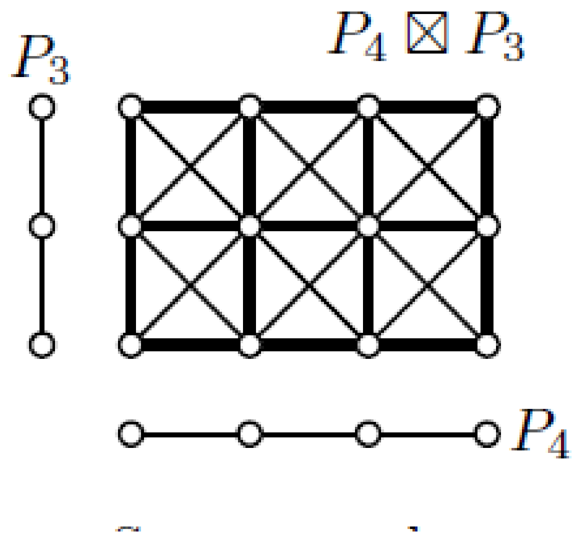
$$E(G \times H) = \{(g, h), (g', h') | hh' \in E(H) \text{ i } gg' \in E(G)\}.$$



Slika 2.2: Primer Direktnog proizvoda

Definicija 2.1.3. *Jaki proizvod G i H* je graf označen sa $H \boxtimes G$,

$$V(G \boxtimes H) = \{(g,h) | g \in V(G) \text{ i } h \in V(H)\}$$
$$E(G \boxtimes H) = E(G \Box H) \cup E(G \times H).$$

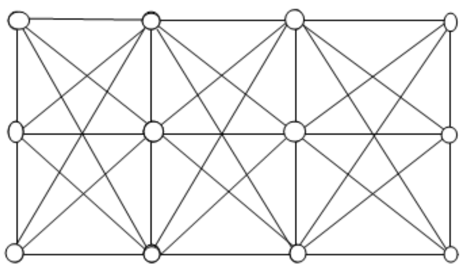


Slika 2.3: Primer jakog proizvoda

Možemo primetiti da su $G \Box H$ i $G \times H$ podgrafovi od $G \boxtimes H$.

Definicija 2.1.4. *Leksikografski proizvod grafova G i H je graf $G \circ H$ sa*

$$V(G \circ H) = \{(g,h) | g \in V(G), h \in V(H)\}$$
$$E(G \circ H) = \{(g,h),(g',h') | gg' \in E(G) \text{ ili } g = g' \text{ i } hh' \in E(H)\}.$$



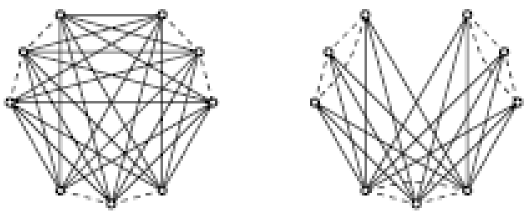
Slika 2.4: Primer Leksikografskog grafa proizvoda za $P_4 \circ P_3$

Napomenuli smo da su Dekartov i direktan proizvod grafa podgrafovi jakog proizvoda grafa. Sada ćemo videti kakav je njihov odnos sa leksikografskim proizvodom grafa.

U direktnom proizvodu grafa, ako su čvorovi $(g,h),(g',h')$ susedni, po definiciji važi $hh' \in E(H)$ i $gg' \in E(G)$. Sa druge strane primećujemo takođe po definiciji leksikografskog proizvoda grafova da ako je $gg' \in E(G)$ i ta grana pripada leksikografskom proizvodu grafova. Na osnovu toga imamo $(g,h)(g',h') \in E(G \circ H)$.

Svaka grana Dekartovog proizvoda grafa je i u leksikografskom bez obzira da li je zbog $g = g'$ ili $gg' \in E(G)$.

Kako je jaki proizvod grafa unija direktnog i Dekartovog proizvoda grafa, onda je i on podskup leksikografskog proizvoda grafova.



Slika 2.5: Primeri Leksikografskog grafa proizvoda za $K_3 \circ P_3$ i $P_3 \circ K_3$

2.2 Asocijativnost i komutativnost grafovskih proizvoda

Na osnovu definicija za Dekartov, direktan i jaki proizvod, primetimo da preslikavanje $(g, h) \to (h, g)$ je izomorfizam od $G * H$ do $H * G$, gde sa $*$ označavamo jedan od ova tri fundamentalna proizvoda. Ova tri proizvoda su komutativna u smislu da $G * H \cong H * G$ za sve grafove G i H.

Teorema 2.2.1. *Dekartov, direktan i jaki proizvod su asocijativni. Za date grafove G_1, G_2 i G_3, preslikavanje $((x_1, x_2), x_3) \to (x_1, (x_2, x_3))$ je izomorfizam $(G_1 * G_2) * G_3 \to G_1 * (G_2 * G_3)$, gde $*$ stoji umesto Dekartovog, direktnog ili jakog proizvoda.*

Dokaz:
Dokažimo prvo asocijativnost Dekartovog proizvoda.
Na osnovu definicije Dekartovog proizvoda imamo da je

$$((x_1, x_2), x_3)((y_1, y_2), y_3) \in E((G_1 \Box G_2) \Box G_3)$$

ako i samo ako važi $x_i y_i \in E(G_i)$ za tačno jedan indeks $i \in 1, 2, 3$ i $x_i = y_i$ za druga dva indeksa. Isto pravilo važi i za

$$(x_1, (x_2, x_3))(y_1, (y_2, y_3)) \in E(G_1 \Box (G_2 \Box G_3)).$$

Preslikavanje $((x_1, x_2), x_3) \to (x_1, (x_2, x_3))$ je izomorfizam, tako da Dekartov proizvod je asocijativan.
Prema definiciji direktog proizvoda imamo da je

$$((x_1, x_2), x_3)((y_1, y_2), y_3) \in E((G_1 \times G_2) \times G_3)$$

ako i samo ako važi da je $x_i y_i \in E(G_i)$ za svaki indeks $i \in 1, 2, 3$. Isto pravilo važi i za

$$(x_1, (x_2, x_3))(y_1, (y_2, y_3)) \in E(G_1 \times (G_2 \times G_3)).$$

Iz ovoga sledi da je preslikavanje $((x_1, x_2), x_3) \to (x_1, (x_2, x_3))$ izomorfizam iz $(G_1 \times G_2) \times G_3$ u $G_1 \times (G_2 \times G_3)$, tako da je direktan proizvod asocijativan.
Na osnovu definicija jakog proizvoda imamo da je

$$((x_1, x_2), x_3)((y_1, y_2), y_3) \in E((G_1 \boxtimes G_2) \boxtimes G_3)$$

ako i samo ako važi da je $x_iy_i \in E(G_i)$ ili $x_i = y_i$ za svaki indeks $i \in 1, 2, 3$ i $x_i \neq y_i$ za bar jedan indeks i. Isto pravilo važi za

$$(x_1, (x_2, x_3))(y_1, (y_2, y_3)) \in E(G_1 \boxtimes (G_2 \boxtimes G_3)).$$

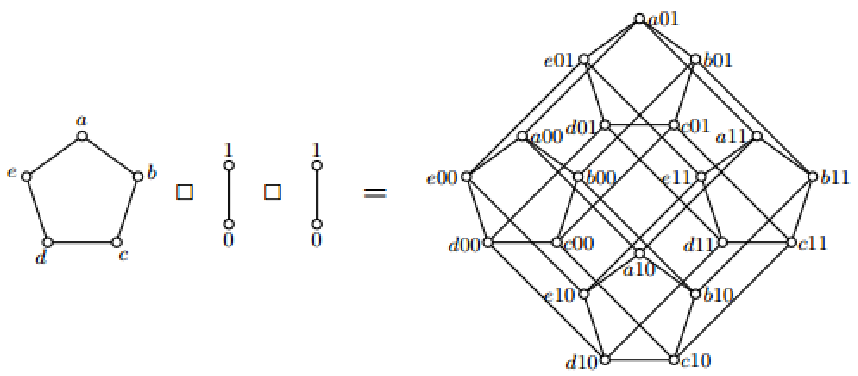
Tako da je jaki proizvod asocijativan.

$\square$

Asocijativnost nam dozvoljava da izostavimo zagrade kada se radi o proizvodima koji imaju više od dva faktora. Teorema 2.2.1 i njen dokaz omogućavaju nam da se jasno definiše $G_1 \square G_2 \square G_3$ kao graf sa skupom čvorova

$$V(G_1) \times V(G_2) \times V(G_3),$$

gde su dva čvora (x_1, x_2, x_3) i (y_1, y_2, y_3) susedna ako i samo ako je $x_iy_i \in E(G_i)$ za neki indeks i, i $x_j = y_j$ za $j \neq i$. Sledeća slika predstavlja primer Dekartovog proizvoda od tri grafa, gde se zbog praktičnosti (x_1, x_2, x_3) piše kao $x_1x_2x_3$.



Slika 2.4: Primer Dekartovog proizvoda tri grafa $C_5 \square K_2 \square K_2$

Leksikografski proizvod grafova nije komutativan, ali jeste asocijativan i to ćemo sada pokazati.

Teorema 2.2.2. *Leksikografski proizvod je asocijativan. Preslikavanje $((x_1, x_2), x_3) \rightarrow (x_1, (x_2, x_3))$ je izomorfizam od $(G_1 \circ G_2) \circ G_3$ na $G_1 \circ (G_2 \circ G_3)$.*

Dokaz:
Na osnovu definicije, $((x_1, x_2), x_3)((y_1, y_2), y_3)$ je grana od $(G_1 \circ G_2) \circ G_3$, ako važi jedan od tri uslova: $x_1y_1 \in E(G_1)$, ili $x_1 = y_1$ i $x_2y_2 \in E(G_2)$, ili $x_1 = y_1$ i $x_2 = y_2$ i $x_3y_3 \in E(G_3)$. Sa druge strane lako možemo potvrditi da su ovo isti uslovi koji karakterišu $(x_1, (x_2, x_3))(y_1, (y_2, y_3)) \in E(G_1 \circ (G_2 \circ G_3))$.

$\square$

Asocijativnost proizvoda nam omogućava da uvedemo definiciju k-tog stepena proizvoda grafova.

Definicija 2.2.1. *Ako je $k \geq 1$, k-ti stepen grafa G u odnosu na Dekartov proizvod označavaćemo sa $G^{\square,k}$, gde je*

$$G^{\square,k} = \square_{i=1}^{k} G.$$

Definicija 2.2.2. *Ako je $k \geq 1$, k-ti stepen grafa G u odnosu na direktan proizvod označavaćemo sa $G^{\times,k}$, gde je*

$$G^{\times,k} = \times_{i=1}^{k} G.$$

Definicija 2.2.3. *Ako je $k \geq 1$, k-ti stepen grafa G u odnosu na jaki proizvod označavaćemo sa $G^{\boxtimes,k}$, gde je*

$$G^{\boxtimes,k} = \boxtimes_{i=1}^{k} G.$$

Definicija 2.2.4. *Neka su dati grafovi $G_1, G_2, \ldots, G_k$, tada $G_1 \square G_2 \square \ldots \square G_k$ je graf sa skupom čvorova $V(G_1) \times V(G_2) \times \cdots \times V(G_k)$, gde su dva čvora $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ i $(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ susedi ako i samo ako je $x_iy_i \in E(G_i)$ za neki indeks i, i $x_j = y_j$ za $i \neq j$. Često koristimo zapis*

$$G_1 \square G_2 \square \ldots \square G_k = \square_{i=1}^{k} G_i.$$

Definicija 2.2.5. *Direktan proizvod višestrukih faktora*

$$G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k = \times_{i=1}^{k} G_i$$

je graf čiji je skup čvorova $V(G_1) \times V(G_2) \times \cdots \times V(G_k)$ i za koji su čvorovi $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ i $(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ susedni ako $x_iy_i \in E(G_i)$ za svaki indeks i.

Definicija 2.2.6. *$G_1 \boxtimes G_2 \boxtimes \cdots \boxtimes G_k = \boxtimes_{i=1}^{k} G_i$ ima skup čvorova $V(G_1) \times V(G_2) \times \cdots \times V(G_k)$ i za koji su dva različita čvora $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ i $(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ susedni ako i samo ako važi $x_iy_i \in E(G_i)$ ili $x_i = y_i$ za svako $1 \leq i \leq k$.*

Kao što je već spomenuto, Dekartov proizvod je komutativan i asocijativan u smislu da su preslikavanja $(x_1, x_2) \to (x_2, x_1)$ i $((x_1, x_2), x_3) \to (x_1, (x_2, x_3))$ izomorfizmi:

$$G_1 \square G_2 \cong G_2 \square G_1$$

$$(G_1 \square G_2) \square G_3 \cong G_1 \square (G_2 \square G_3)$$

Dekartov proizvod je distributivan u odnosu na disjunktnu uniju:

$$G_1 \square (G_2 + G_3) = (G_1 \square G_2) + (G_1 \square G_3)$$

Trivijalni graf K_1 je jedinica u odnosu na Dekartov proizvod, to jest,

$$K_1 \square G \cong G$$

za bilo koji graf G. Pošto je Γ komutativan monoid u odnosu na disjunktnu uniju, sa praznim grafom O kao neutralnim elementom, i kako je $O \square G = G \square O = O$ možemo zaključiti da je Γ komutativan poluprsten sa jedinicom K_1 kada se koriste operacije $\square$ i $+$.

Kao što je već spomenuto, jaki proizvod je komutativan i asocijativan u smislu da su preslikavanja $(x_1, x_2) \to (x_2, x_1)$ i $((x_1, x_2), x_3) \to (x_1, (x_2, x_3))$ izomorfizmi:

$$G_1 \boxtimes G_2 \cong G_2 \boxtimes G_1$$

$$(G_1 \boxtimes G_2) \boxtimes G_3 \cong G_1 \boxtimes (G_2 \boxtimes G_3)$$

Jaki proizvod je distributivan u odnosu na disjunktnu uniju:

$$G_1 \boxtimes (G_2 + G_3) = (G_1 \boxtimes G_2) + (G_1 \boxtimes G_3)$$

Trivijalni graf K_1 je jedinica u odnosu na jaki proizvod, to jest,

$$K_1 \boxtimes G \cong G.$$

Kao u slučaju Dekartovog proizvoda i za jaki proizvod , Γ je komutativan poluprsten sa jedinicom K_1 kada se koriste operacije $\boxtimes$ i $+$.

Već smo spomenili da je direktan proizvod komutativan i asocijativan.
Istraživanja su bila ograničena sa grafovima u Γ, ponovni pregled dokaza

otkriva da to važi i u klasi Γ_0. Stoga, preslikavanja $(x_1, x_2) \to (x_2, x_1)$ i $((x_1, x_2), x_3) \to (x_1, (x_2, x_3))$ su izomorfizmi:

$$G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$$

$$(G_1 \times G_2) \times G_3 \cong G_1 \times (G_2 \times G_3)$$

Direktan proizvod je distributivan u odnosu na disjunktnu uniju:

$$G_1 \times (G_2 + G_3) = (G_1 \times G_2) + (G_1 \times G_3)$$

Trivijalni graf K_1 je jedinica u odnosu na Dekartov i jaki proizvod, ali to nije slučaj i sa direktnim proizvodom. $K_1 \times G$ je totalno nepovezan graf sa $|V(G)|$ čvorova, tako da generalno $K_1 \times G \ncong G$. Neka je $K_1^s \in \Gamma_0$ graf sa samo jednim čvorom u kojem postoji petlja. Imamo da je

$$K_1^s \times G \cong G$$

za bilo koji $G \in \Gamma_0$. Tako da, Γ_0 je komutativan poluprsten sa jedinicom K_1^s kada se koriste operacije $\times$ i $+$.

Leksikografski proizvod nije komutativan, ali jeste asocijativan. Možemo lako videti da je K_1 jedinica i sa leve i sa desne strane:

$$(G_1 \circ G_2) \circ G_3 \cong G_1 \circ (G_2 \circ G_3)$$

$$K_1 \circ G \cong G$$

$$G \circ K_1 \cong G.$$

Takođe važi desno distributivno pravilo, koje važi za sve grafove G, K i H:

$$(G + H) \circ K = G \circ K + H \circ K.$$

Ne važi odgovarajuće distributivno pravilo sa leve strane. Dobar primer za to je:

$$K_2 \circ (K_1 + K_1) = C_4,$$

dok

$$K_2 \circ K_1 + K_2 \circ K_1 = K_2 + K_2.$$

2.3 Slojevi i projekcija grafa

Nastavićemo da sa $*$ obeležavamo Dekartov, direktan ili jaki proizvod, u obliku $G = G_1 * G_2 * \cdots * G_k$. Za bilo koji indeks $1 \leq i \leq k$ i-ta projekcija je preslikavanje $p_i : G \to G_i$ definisana kao $p_i(x_1, x_2, \ldots, x_k) = x_i$. (Dakle, x_i je i-ta koordinata čvora $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$). Za proizvod $G * H$ možemo napisati projekcije kao p_G i p_H.

Teorema 2.3.1. *Bez obzira koji proizvod $*$ predstavlja, svaka projekcija p_i je slabi homomorfizam.*

Dokaz:
Po definiciji slabog homomorfizma, ako je $(x_1, x_2, \ldots, x_k)(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ grana od grafovskog proizvoda $G_1 * G_2 * \cdots * G_k$, tada ili je $x_i = y_i$ ili $x_i y_i \in E(G_i)$ za svako $1 \leq i \leq k$, tako da svako p_i je slabi homomorfizam.

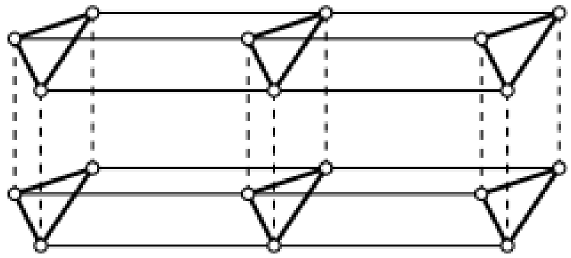
$\square$

Uvešćemo sada definiciju za sloj grafa. Za Dekartov i jaki proizvod, slojevi su podgrafovi proizvoda koji imaju osobinu, da je restrikcija projekcija na te podgrafove izomorfizam.

Definicija 2.3.1. *Za dati čvor $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ proizvoda $G = G_1 * G_2 * \cdots * G_k$, G_i-sloj preko a, je podgraf*

$$\begin{aligned} G_i^a &=< \{x \in V(G) | p_j(x) = a_j \ za \ j \neq i\} > \\ &=< \{(a_1, a_2, \ldots, x_i, \ldots, a_k) | x_i \in V(G_i)\} > . \end{aligned}$$

$G_i^a = G_j^b$ ako i samo ako je $p_j(a) = p_j(b)$ za svaki indeks $j \neq i$. Ako sada $*$ predstavlja Dekartov ili jaki proizvod, tada restrikcija $p_i : G_i^a \to G_i$ je izomorfizam za svako a i i.



Slika 2.5: Primer Dekartovog proizvoda $P_3 \square K_2 \square K_3$ i njegovi P_3, K_2 i K_3 slojevi

Slika predstavlja Dekartov proizvod $P_3 \square K_2 \square K_3$ i njegove P_3, K_2 i K_3-slojeve. Ovi slojevi su izomorfni sa njihovim odgovarajućim faktorima.
$G_i - slojevi$ Dekartovog i jakog proizvoda su izomorfni sa G_i, a slojevi direktnog proizvoda grafova iz Γ su potpuno nepovezani.

3

Dekartov proizvod

3.1 Dekartov proizvod i njegove osobine

Kao što smo već naveli, definicija Dekartov proizvod grafova je prirodna i jednostavna. U velikoj je meri istražen, ima dosta zanimljivih algebarskih osobina. Naziv dobija po francuskom filozofu, matematičaru i naučniku Rene Descartes (Renatus Cartesius) koji je živeo od 1596 do 1650 i koji je u matematici poznat po koordinatnom sistemu i po tome što je "postavio" temelje analitičkoj geometriji.

Ako su $G_1, G_2, \ldots, G_k$ grafovi u Γ, tada njihov Dekartov proizvod

$$G_1 \square G_2 \square \ldots \square G_k = \square_{i=1}^{k} G_i$$

je graf sa skupom čvorova $\{(x_1, x_2, \ldots, x_k) | x_i \in V(G_i)\}$ gde su dva čvora $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ i $(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ susedni kada god $x_i y_i \in E(G_i)$ za tačno jedan indeks $1 \leq i \leq k$ i $x_j = y_j$ za svaki indeks $j \neq i$.

Teorema 3.1.1. *Ako su (g, h) i (g', h') čvorovi Dekartovog proizvoda $G \square H$ tada je*

$$d_{G \square H}((g, h), (g', h')) = d_G(g, g') + d_H(h, h').$$

Dokaz:
Prvo pretpostavimo da $d_G(g, g') = \infty$. Tada postoje grafovi G_1 i G_2 tako da $G = G_1 + G_2$, pri čemu je $g \in V(G_1)$ i $g' \in V(G_2)$. Zbog toga

$$G \square H = (G_1 + G_2) \square H = (G_1 \square H) + (G_2 \square H)$$

pri čemu je $(g, h) \in V(G_1 \Box H)$ i $(g', h') \in V(G_2 \Box H)$. Zbog toga je

$$d_{G\Box H}((g,h),(g',h')) = \infty$$

odatle tvrđenje sledi. Identičnim obrazloženjem, sledi tvrđenje ako je $d_H(h, h') = \infty$. Zbog toga pretpostavljamo da su $d_G(g, g')$ i $d_H(h, h')$ konačni. Ako je

$$P = a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{d_{G(g,g')}}$$

put u G od $g = a_0$ do $g' = a_{d_{G(g,g')}}$ i

$$Q = b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{d_{H(h,h')}}$$

put u H od $h = b_0$ do $h' = b_{d_{H(h,h')}}$, onda možemo zapaziti dva puta

$$P \times \{h\} = (g,h)(a_1,h)(a_2,h)\ldots(g',h)$$

$$\{g'\} \times Q = (g',h)(g',b_1)(g',b_2)\ldots(g',h')$$

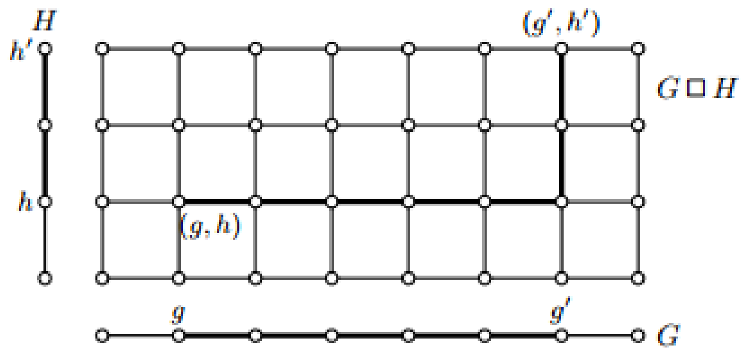
u $G\Box H$ čijim spajanjem se dobija put dužine $d_G(g, g') + d_H(h, h')$ od (g, h) do (g', h'). Zbog toga je

$$d_{G\Box H}((g,h),(g',h')) \leq d_G(g,g') + d_H(h,h').$$

Obrnuto, neka je R najkraći put između (g, h) i (g', h').
Svaka grana od R preslikava se u jedan čvor projekcije p_G ili p_H i u granu druge. Ovo implicira

$$\begin{aligned} d_G(g,g') + d_H(h,h') &\leq |E(p_G(R))| + |E(p_H(R))| \\ &= |E(R)| = d_{G\Box H}((g,h),(g',h')) \end{aligned}$$

$\Box$



Slika 3.1: Ilustracija formule $d_{G\Box H}((g,h),(g',h')) = d_G(g,g') + d_H(h,h')$

Posledica 3.1.1. *Ako* $G = G_1 \Box G_2 \Box \ldots \Box G_k$ *i* $x, y \in V(G)$ *tada*

$$d_G(x, y) = \sum_{i=1}^{k} d_{G_i}(p_i(x), p_i(y)).$$

Posledica 3.1.2. *Dekartov proizvod je povezan ako i samo ako svaki faktor je povezan.*

Dokaz:
Posledicu dokazujemo u dva smera:
($\leftarrow$) Ako su svi faktori povezani, onda su svaka dva čvora proizvoda na konačnom rastojanju, na osnovu Posledice 3.1.1..
($\rightarrow$) Objašnjeno na početku Teoreme 3.1.1..

$\square$

3.2 Dekompozicija na proste faktore

Jedinstvenost dekompozicije na proste faktore povezanih grafova u odnosu na Dekartov proizvod prvi je pokazao Sabidussi (1960), a posle njega Vizing (1963) nezavisno od njega.

Definicija 3.2.1. *Graf je prost u odnosu na dati grafovski proizvod ako je netrivijalan i ne može biti predstavljen kao proizvod dva netrivijalna grafa.*

Za Dekartov proizvod to znači da netrivijalan graf G je prost ako iz $G = G_1 \Box G_2$, sledi da G_1 ili G_2 su K_1. Prvo ćemo pokazati da svaki graf ima dekompoziciju na proste faktore u odnosu na Dekartov proizvod.

Teorema 3.2.1. *Svaki netrivijalan graf G ima dekompoziciju na proste faktore u odnosu na Dekartov proizvod. Broj prostih faktora je najviše* $\log_2 |V(G)|$.

Dokaz:
Kako proizvod k netrivijalnih grafova ima najmanje 2^k čvorova, graf G može imati najviše $\log_2 |V(G)|$ faktora. Stoga postoji prezentacija G kao proizvoda $G_1 \Box G_2 \Box \ldots \Box G_k$ sa maksimalnim brojem faktora. Jasno svaki faktor je prost.

$\Box$

Što se tiče Dekartovog proizvoda, faktorizacija povezanog grafa na proste faktore je jedinstvena. To nije slučaj za nepovezane grafove.

Teorema 3.2.2. *Prosta faktorizacija nije jedinstvena za Dekartov proizvod u klasi moguće nepovezanih prostih grafova.*

Dokaz:
Možemo primetiti da

$$(K_1 + K_2 + K_2^{\Box,2}) \Box (K_1 + K_2^{\Box,3}) = (K_1 + K_2^{\Box,2} + K_2^{\Box,4}) \Box (K_1 + K_2)$$

jer:

$$(K_1 + K_2 + K_2^{\Box,2}) \Box (K_1 + K_2^{\Box,3}) =$$

$$K_1 \Box K_1 + K_1 \Box K_2^{\Box,3} + K_2 \Box K_1 + K_2 \Box K_2^{\Box,3} + K_2^{\Box,2} \Box K_1 + K_2^{\Box,2} \Box K_2^{\Box,3} =$$

$$K_1 + K_2^{\Box,3} + K_2 + K_2^{\Box,4} + K_2^{\Box,2} + K_2^{\Box,5} =$$

$$K_1 + K_2 + K_2^{\square,2} + K_2^{\square,3} + K_2^{\square,4} + K_2^{\square,5} =$$

$$K_1 + K_2 + K_2^{\square,2}\square(K_1 + K_2) + K_2^{\square,4}\square(K_1 + K_2) =$$

$$(K_1 + K_2)\square(K_1 + K_2^{\square,2} + K_2^{\square,4})$$

Treba da pokažemo da su faktori sa leve i sa desne strane prosti. Da bismo to pokazali posmatramo broj komponenti Dekartovog proizvoda. Broj komponenti Dekartovog proizvoda jednak je proizvodu brojeva komponenti faktora. Stoga ako se graf koji se sastoji od dve ili tri komponente prikaže kao proizvod dva grafa, tada jedan od navedenih grafova mora da sadrži jednu komponentu a drugi dve ili tri. Grafove koje treba ispitati su oblika $K_1 + A_1 + A_2$, gde A_1 sadrži bar dva čvora, kao i A_2 ako postoji. To se može predstaviti kao proizvod dva faktora koji treba da bude oblika $B\square(C_1 + C_2 + C_3)$. Kako je

$$K_1 + A_1 + A_2 \cong B\square C_1 + B\square C_2 + B\square C_3,$$

tada je $K_1 \cong B\square C_i$ za neko i . B je trivijalan tako da je $K_1 + A_1 + A_2$ prost.

$\square$

3.3 Podproizvod Dekartovog proizvoda

Definicija 3.3.1. *Podproizvod u proizvodu* $G = G_1 \Box G_2 \Box \ldots \Box G_k$ *je podgraf oblika* $U_1 \Box U_2 \Box \ldots \Box U_k$ *gde je* $U_i \subseteq G_i$ *za svaki indeks* i.

Lema 3.3.1 (Lema o jedinstvenom kvadratu)**.** *Neka su* e *i* f *dve incidentne grane Dekartovog proizvoda* $G_1 \Box G_2$ *koje su u različitim slojevima, jedna je u* G_1 *sloju a druga je u* G_2 *sloju. Tada postoji tačno jedan kvadrat(kontura sa četiri čvora) u* $G_1 \Box G_2$ *koji sadrži* e *i* f*. Ovaj kvadrat nema dijagonalu.*

Dokaz:
Možemo pretpostaviti da $e = uw = (u_1, u_2)(v_1, u_2)$ i $f = wv = (v_1, u_2)(v_1, v_2)$. Ovo znači da je $u_1 \neq v_1$ i $u_2 \neq v_2$. Pretpostavimo da je $z = (z_1, z_2)$ susedan sa čvorovima u i v. Ako je z susedan $u = (u_1, u_2)$ imamo $z_1 = u_1$ ili $z_2 = u_2$. Ako je z susedan $v = (v_1, v_2)$ imamo $z_1 = v_1$ ili $z_2 = v_2$. Ova ograničenja daju ili $z = (v_1, u_2) = w$ ili $z = (u_1, v_2)$. Sada imamo jedinstven i bez dijagonale kvadrat $(u_1, u_2)(v_1, u_2)(v_1, v_2)(u_1, v_2)$ koji sadrži e i f.

$\Box$

Prethodna Lema važi za proizvoljan broj faktora.

Definicija 3.3.2. *Podgraf* W *Dekartovog proizvoda* G *ima kvadratnu osobinu ako za bilo koje dve susedne grane* e *i* f *koje su u različitim slojevima, jedinstven kvadrat od* G *koji sadrži* e *i* f *je takođe u* W.

Lema 3.3.2. *Povezan podgraf* W *Dekartovog proizvoda je podproizvod ako i samo ako ima kvadratnu osobinu.*

Podgraf $W \subseteq G$ je konveksan u G ako se svaki najkraći G-put između čvorova podgrafa W nalazi u potpunosti u W. Konveksan podgraf Dekartovih proizvoda ima kvadratnu osobinu.

Lema 3.3.3. *Podgraf* W *od* $G = G_1 \Box G_2 \Box \ldots \Box G_k$ *je konveksan ako i samo ako je* $W = U_1 \Box U_2 \Box \ldots \Box U_k$*, gde je svako* U_i *konveksno u* G_i.

Teorema 3.3.1 (Sabidussi-Vizing)**.** *Svaki povezan graf se može prikazati na jedinstven način kao proizvod prostih faktora, do na izomorfizam i redosled faktora.*

Dokaz:
Već znamo da konačan graf ima prostu faktorizaciju. Treba još da pokažemo jedinstvenost. Da bismo ovo dokazali iskoristićemo sledeću lemu i završiti dokaz.

Lema 3.3.4. *Neka je φ izomorfizam između povezanih grafova G i H koji su predstavljeni kao proizvod $G = G_1 \Box G_2 \Box \ldots \Box G_k$ i $H = H_1 \Box H_2 \Box \ldots \Box H_l$ prostih faktora. Tada je $k = l$ i bilo koje $a \in V(G)$ postoji permutacija π od $\{1, 2, \ldots, k\}$ takva da $\varphi(G_i^a) = H_{\pi(i)}^{\varphi(a)}$ za $1 \leq i \leq k$.*

Dokaz:
Fiksirajmo $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ i neka je $\varphi(a) = b = (b_1, b_2, \ldots, b_l)$. Kao što je spomenuto, svaki G_i^a je konveksan u G tako da njegova slika $\varphi(G_i^a)$ je konveksna u H. Lema 3.3.3 implicira

$$(b_1, b_2, \ldots, b_l) \in \varphi(G_i^a) = U_1 \Box U_2 \Box \ldots \Box U_l.$$

Kako je, $G_i \cong G_i^a \cong \varphi(G_i^a)$ prost, $U_i = \{b_i\}$ za sve, osim za jedan indeks, zvaćemo ga $\pi(i)$, drugim rečima $\varphi(G_i^a) \subseteq H_{\pi(i)}^{\varphi(a)}$. Tada $G_i^a \subseteq \varphi^{-1}(H_{\pi(i)}^{\varphi(a)})$. Pošto je $\varphi^{-1}(H_{\pi(i)}^{\varphi(a)})$ konveksan on je podproizvod, i pošto je prost mora biti sadržan u G_i^a. Zbog toga $\varphi(G_i^a) = H_{\pi(i)}^{\varphi(a)}$. Tvrdimo da je preslikavanje

$$\pi : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, l\}$$

injektivno. Ako je $\pi(i) = \pi(j)$, tada

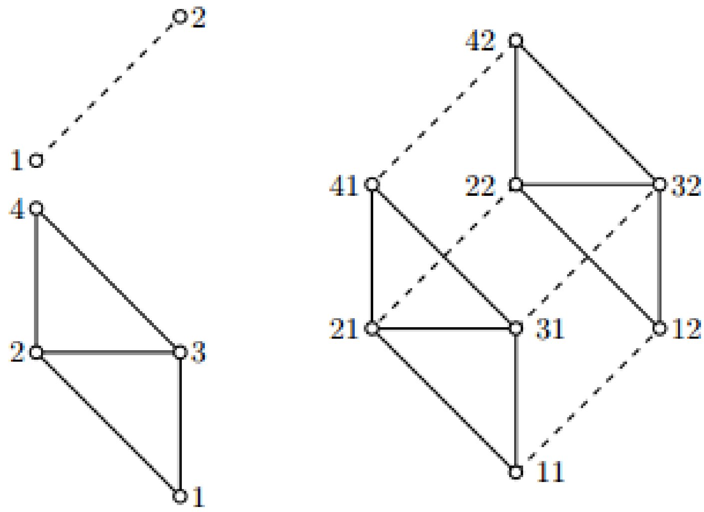
$$\varphi(G_i^a) = H_{\pi(i)}^{\varphi(a)} = \varphi(G_j^a).$$

Pošto je $H_{\pi(i)}^{\varphi(a)}$ netrivijalan, on je prost, iz toga sledi da G_i^a i G_j^a imaju netrivijalne preseke. To znači da $i = j$, pa π je injektivno. Ovde je $k \leq l$. Ponavljanjem za argument φ^{-1} daje $l \leq k$, tako da $k = l$ i π je permutacija.

□

Na osnovu Leme 3.3.4 i činjenice da svaki konačan graf ima prostu faktorizaciju, dokazali smo teoremu.

□



Slika 3.2: Graf i njegovi prosti faktori

3.4 Struktura izomorfizama između povezanih Dekartovih proizvoda

Teorema 3.4.1. *Neka su G i H izomorfni i povezani grafovi sa prostom faktorizacijom $G = G_1 \Box G_2 \Box \ldots \Box G_k$ i $H = H_1 \Box H_2 \Box \ldots \Box H_k$. Tada za bilo koji izomorfizam $\varphi : G \to H$ postoji permutacija π od $\{1, \ldots, k\}$ i izomorfizmi*

$$\varphi_i : G_{\pi(i)} \to H_i$$

tako da za sve $x = (x_1, \ldots, x_k) \in G$ važi:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (\varphi_1(x_{\pi(1)}), \varphi_2(x_{\pi(2)}), \ldots, \varphi_k(x_{\pi(k)})) \tag{1.1}$$

Dokaz:
Za graf G fiksiramo čvor $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Na osnovu Leme 3.3.4 postoji permutacija π od $\{1, \ldots, k\}$ za koju je restrikcija preslikavanja φ izomorfizam $G_i^a \to H_{\pi(i)}^{\varphi(a)}$ za svaki indeks i. Zamenom π sa π^{-1} za svako i, restrikcija φ je izomorfizam $G_{\pi(i)}^a \to H_i^{\varphi(a)}$.
Hoćemo da pokažemo da $p_i\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ zavisi samo od $x_\pi(i)$.
Možemo staviti $\varphi_i(x_{\pi(i)}) = p_i\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ koje dobijamo iz jednačine (1.1) i to je odmah znači da φ_i izomorfizam.
Za bilo koji $x_{\pi(i)} \in V(G_{\pi(i)})$, posmatrajmo podproizvod

$$B\big[x_{\pi(i)}\big] = G_1 \Box G_2 \Box \ldots \Box \{x_{\pi(i)}\} \Box \ldots \Box G_k,$$

gde je $\pi(i)$-ti faktor čvor $x_\pi(i)$. Ovaj podproizvod je konveksan, tako da na osnovu Leme 3.3.3 njegova slika $\varphi(B\big[x_{\pi(i)}\big])$ je podproizvod u H. Sada je:

$$B\big[x_{\pi(i)}\big] \cap G_{\pi(i)}^a = \{(a_1, a_2, \ldots, x_{\pi(i)}, \ldots, a_k\}.$$

Zbog toga podproizvod $\varphi(B\big[x_{\pi(i)}\big])$ sa podproizvodom $\varphi(G_{\pi(i)}^a) = H_i^{\varphi(a)}$ ima jedan zajednički čvor $\varphi(a_1, a_2, \ldots, x_{\pi(i)}, \ldots, a_k)$. Ovo znači da svi čvorovi $\varphi(B\big[x_{\pi(i)}\big])$ imaju istu i-tu koordinatu

$$p_i\varphi(a_1, a_2, \ldots, x_{\pi(i)}, \ldots, a_k)$$

tako da

$$p_i(\varphi(B\big[x_{\pi(i)}\big])) = p_i\varphi(a_1, a_2, \ldots, x_{\pi(i)}, \ldots, a_k).$$

Sada, bilo koje $(x_1, x_2, \ldots, x_{\pi(i)}, \ldots, x_k) \in V(G)$ pripada $B\big[x_{\pi(i)}\big]$. Odavde

$$p_i\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{\pi(i)}, \ldots, x_k) = p_i\varphi(a_1, a_2, \ldots, x_{\pi(i)}, \ldots, a_k)$$

koji zavisi samo od $x_{\pi(i)}$.

$\square$

Pošto možemo zameniti svaki faktor sa izomorfnom kopijom bez menjanja strukture proizvoda, često preimenujemo čvorove H_i tako da su φ_i identična preslikavanja.

Posledica 3.4.1. *Pretpostavljamo da postoji izomorfizam*

$$\varphi : G_1 \square G_2 \square \ldots \square G_k \to H_1 \square H_2 \square \ldots \square H_k,$$

gde su svi G_i i H_i prosti. Tada čvorovi od H_i mogu biti preimenovani tako da

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(k)})$$

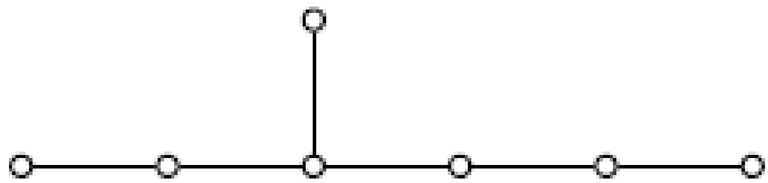
za permutaciju π od $\{1, \ldots, k\}$.

3.5 Grupa automorfizama Dekartovog proizvoda

Definicija 3.5.1. *Automorfizmi grafa G su izomorfizmi grafa G u sebe samog.*

Drugim rečima automorfizam grafa G je permutacija φ na $V(G)$ sa osobinom da je (u, v) grana ako i samo ako je $(\varphi(u), \varphi(v))$ grana. Na primer, zamena čvorova grafa K_2 je automorfizam u K_2. Svaka permutacija skupa čvorova kompletnog grafa ili praznog grafa je automorfizam.

Graf koji za automorfizam ima jedino identičko preslikavanje $id : V(G) \to V(G)$ definisano sa $id : u \to u$ za sve $u \in V(G)$, naziva se asimetrični graf. Na slici 3.3 je primer takvog grafa.



Slika 3.3: Primer asimetričnog stabla

Ovo je tipična situacija, jer većina konačnih grafova su asimetrični. Mnogi grafovi su visoko simetrični kao kompletan graf i ciklus, ali takođe i kompletni bipartitni grafovi, hiperkocka, Hamming graf, i mnogi drugi. Spomenućemo neke osnovne osobine automorfizama grafova.

Teorema 3.5.1. *Automorfizmi grafa formiraju grupu.*

Navedena grupa je grupa automorfizama grafa G i zapisivaćemo je sa $Aut(G)$. Nekada se to jednostavno zove grupa od G. Grupa automorfizma $Aut(G)$ grafa G je podgrupa grupe svih permutacije $V(G)$, koja se naziva simetrična grupa $Sym(V(G))$. Kao sto smo naveli, $Aut(K_n) = Sym(V(K_n))$. Navedeno takođe važi i za $Aut(Dn)$, koje predstavlja specijalan slučaj kada graf i njegov komplement imaju istu grupu automorfizama. Komplement $\bar{G}$ grafa G je definisan sa $V(G)$ kao

$$E(\bar{G}) = \{xy | x, y \in V(G), x \neq y, xy \notin E(G)\}.$$

Drugim rečima, $\bar{G}$ dobijamo od G, tako što pravimo susedne parove čvorova koji nisu susedni u G. Odatle sledi da je $Aut(G) = Aut(\bar{G})$ i $Aut(D_n) = Aut(K_n)$. Vidimo da ne može svaka permutaciona grupa iz skupa V u isto vreme da bude grupa automorfizama grafa G sa čvorovima iz skupa V. Na primer, jednostavno se može proveriti da grupe automorfizama od 4 prosta grafa sa tri čvora, recimo čvorovi v_1, v_2, v_3 su ili identična sa $Sym(\{v_1, v_2, v_3\})$ ili sadrže samo jedan netrivijalan element koji fiksira jedan čvor i menja mesta preostala dva. Stoga nijedna grupa automorfizama ovih grafova nije grupa reda 3 koja se dobija kružnom putanjom sa korakom 3, na primer (v_1, v_2, v_3) ili (v_1, v_3, v_2). Ovo je specijalan slučaj sledeće teoreme vezane za grafove čije su grupe automorfizama dvostruko tranzitivne grupe.

Definicija 3.5.2. *Permutaciona grupa A na V je dvostruko tranzitivna, ako postoji permutacija $\varphi \in A$ za svaka dva para različitih elemenata (u, v) i (x, y) iz V tako da je $x = \varphi(u)$ i $y = \varphi(v)$.*

Ako grupa automorfizama sadrži dvostruko tranzitivnu podgrupu tada je G kompletan graf, to jest, ako je grupa automorfizama grupa svih permutacija onda ona svakako sadrži dvostruko tranzitivnu podgrupu pošto ona obuhvata sve permutacije, pa onda taj graf mora biti kompletan, zbog toga važi sledeća teorema.

Teorema 3.5.2. *Ako grupa automorfizama grafa G sa najmanje jednom granom sadrži dvostruko tranzitivnu podgrupu, tada je G kompletan graf.*

Dokaz:
Neka je G graf sa dvostruko tranzitivnom podgrupom A iz $Aut(G)$ i (uv) grana od G. Po pretpostavci postoji automorfizam $\varphi \in A$ za svaki par (x, y) različitih elemenata koji preslikava (u, v) na (x, y). Tada je xy takođe grana. Kako je par (x, y) izabran na slučajan način, tada je G kompletan.

□

Jasno, grupa automorfizama kompletnog ili totalno nepovezanog grafa G je $Sym(V(G))$. Kombinovanjem toga i prethodne teoreme dobijamo sledeću posledicu.

Posledica 3.5.1. $Aut(G) = Sym(V(G))$ *ako i samo ako je G kompletan ili totalno nepovezan.*

Sledeća teorema koju je dokazao Frucht (1938) za apstraktne grupe naizgled je u suprotnosti sa činjenicom da ne može svaka permutaciona grupa na skupu V da bude grupa automorfizama grafa G sa skupom čvorova V.

Teorema 3.5.3. *Za svaku konačnu grupu A postoji graf G za koji važi*

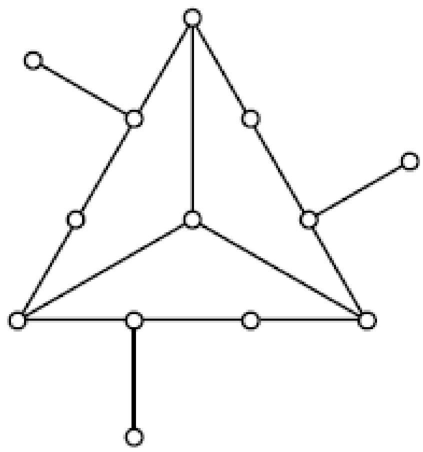
$$Aut(G) \cong A$$

.

Teoremu navodimo bez dokaza.

Na osnovu prethodne teoreme, svaka konačna grupa je grupa automorfizama nekog grafa. To je tačno jer, ako graf ima n elemenata ne može svaka grupa permutacija na skupu od n elemenata da bude grupa automorfizama tog grafa sa n elemenata, ali može da bude nekog grafa sa više elemenata, nekog "većeg" grafa.

Ciklična grupa od tri elementa, ne može biti grupa automorfizama nekog grafa koji ima tri čvora, ali može biti grupa automorfizama nekog grafa koji ima više od tri čvora i to nam važi na osnovu Frucht-ove teoreme. Na sledećoj slici je primer takvog grafa.



Slika 3.4: Graf sa cikličnom grupom automorfizama

Primer grafa sa cikličnom grupom automorfizama pokazuje da graf može da sadrži čvorove koji su fiksirani svakim automorfizmom. Ako skup automorfizama preslikava skup čvorova ili grana na sebe, kažemo da je taj skup stabilan od strane ovih automorfizama ili invarijantan u odnosu na te automorfizme. Jasno, svaki maksimalan skup čvorova istog stepena u grafu je invarijantan u odnosu na sve automorfizme. Ovo važi i za čvorove stepena 1, koje se nazivaju viseći čvorovi.

Teorema 3.5.4. *Svako stablo T sadrži granu ili čvor koji je invarijantan u odnosu na sve automorfizme iz T.*

Dokaz:
Dokažimo teoremu indukcijom. Tvrdnja je tačna za stabla sa jednim ili dva čvora. Pretpostavimo da tvrdnja važi za svako stablo sa najviše $(n-1)$ čvorova. Neka je T stablo sa n čvorova. Svaki automorfizam stabla T stabilizuje skup visećih čvorova. Obrišimo ih i nazovimo novo stablo S. Kako svako netrivijalno stablo ima bar dva čvora stepena 1, skup visećih čvorova je neprazan, te stoga S sadrži manje od n čvorova, a zbog toga sadrži granu e ili čvor v koji su invarijantni u odnosu na svaki automorfizam od S. Zbog toga što je restrikcija svakog automorfizma od T na S takođe automorfizam u S, tvrđenje važi i u T.

□

Teorema 3.5.5. *Ako pretpostavimo da je φ automorfizam povezanog grafa G sa dekompozicijom na proste faktore $G = G_1 \Box G_2 \Box \ldots \Box G_k$, tada postoji permutacija π od $1, 2, \ldots, k$ i izomorfizmi*

$$\varphi_i : G_{\pi(i)} \to G_i$$

tako da za sve $x = (x_1, \ldots, x_k) \in G$ važi:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (\varphi_1(x_{\pi(1)}), \varphi_2(x_{\pi(2)}), \ldots, \varphi_k(x_{\pi(k)})).$$

Dokaz:
Posledica Teoreme 3.4.1..

□

Možemo posmatrati dva specijalna slučaja:

1. Permutacija π je identičko preslikavanje. Tada svaki φ_i je automorfizam od G_i. Kažemo da je φ generisano sa automorfizmima faktora G_i. Ako su po parovima faktori neizomorfni, ovi automorfizmi generišu grupu automorfizama grafa G.

2. Bar dva prosta faktora G_r i G_s su izomorfni. Neka je π transpozicija (rs), φ_r izomorfizam od G_r u G_s, i φ_s izomorfizam od G_s u G_r. Za indekse i različite od r i s, neka je φ_i identičko preslikavanje na $V(G)$. Tada preslikavanje φ koje odgovara tim izomorfizmima je automorfizam. To zovemo transpozicija dva izomorfna prosta faktora grafa G.

Definicija 3.5.3. *Dva grafa zovemo relativno prosta, ako ne postoji netrivijalan graf koji je faktor od oba grafa.*

Posledica 3.5.2. *Grupa automorfizama povezanog grafa sa dekompozicijom na proste faktore* $G_1 \Box G_2 \Box \ldots \Box G_k$ *je generisana automorfizmima i transpozicijama prostih faktora.*

Kako samo izomorfni prosti faktori mogu menjati mesta, dobijamo sledeću posledicu za relativno proste faktore.

Posledica 3.5.3. *Neka je* G *Dekartov proizvod* $G_1 \Box G_2 \Box \ldots \Box G_k$ *povezanih, relativno prostih grafova. Tada svaki automorfizam* φ *od* G *čuva strukturu slojeva od* G *u odnosu na datu dekompoziciju proizvoda i ona moze biti zapisana u obliku*

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \ldots, \varphi_2(x_k)),$$

gde su φ_i *automorfizmi od* G_i*. U ovom slučaju Aut(G)* je direktan proizvod grupe automorfizama ovih faktora.

Teorema 3.5.6. *Grupa automorfizama Dekartovog proizvoda povezanih prostih grafova je izomorfna sa grupom automorfizama disjunktne unije faktora.*

Teoremu navodimo bez dokaza.

Teorema 3.5.7. *Dekartov proizvod povezanih grafova ima tranzitivnu grupu automorfizama ako i samo ako svaki faktor ima tranzitivnu grupu automorfizama.*

Teoremu navodimo bez dokaza.

Teorema 3.5.8. *Dekartov proizvod konačnih grafova ima tranzitivnu grupu automorfizama ako i samo ako svaki faktor ima tranzitivnu grupu automorfizama.*

Teoremu navodimo bez dokaza.

Teorema 3.5.9. *Svaki graf koji ima tranzitivnu grupu automorfizama ima jedinstvenu dekompoziciju na proste faktore, u odnosu na Dekartov proizvod.*

Dokaz:
Dovoljno je dokazati teoremu za nepovezan graf G. Pretpostavimo da su $X_1, \ldots, X_r$ komponente grafa G i neka $P_1 \Box P_2 \Box \ldots \Box P_k$ je dekompozicija na proste faktore od X_1. Prvo dokažimo da svaki nepovezani prost faktor mora biti totalno nepovezan. Ako je $\sum_{i=1}^{r} Y_i$ faktor, tada, na osnovu Teoreme 3.5.7, svaki par Y_i, Y_j moraju biti izomorfni. Odatle sledi $\sum_{i=1}^{r} Y_i = rY_1 = D_r \Box Y_1$. Kako je $r \neq 1$, ono može jedino biti prost faktor ako $Y_1 = K_1$. Stoga je proizvod nepovezanih prostih faktora totalno nepovezan graf D_s, za neko s, i zbog jedinstvene dekompozicije prostih faktora s, prosti faktori su jedinstveno određeni. Kako iz $D_s \Box Y \cong G$ dobijamo da je $Y \cong X_1$, na taj način dokazujemo teoremu za povezane proste faktore.

$\square$

3.6 Karakterističan broj Dekartovog proizvoda

Albertson i Collins (1996) uveli su karakterističan broj D(G) za graf G kao najmanji broj oznaka koji može uništiti sve netrivijalne automorfizme od G. Preciznije D(G) je najmanji ceo broj d, takav da G ima označavanje sa d oznaka koje čuva samo trivijalni automorfizam. Pod označavanjem podrazumevamo preslikavanje koje preslikava $V(G)$ u $\{1, 2, \ldots, k\}$. Uništiti znači da ako imamo neki graf i njegove automorfizme, ti automorfizmi preslikavaju neke čvorove u neke druge, a da im se pri tome očuva susednost čvorova. Ako uvedemo oznake dobijamo dodatni uslov da taj automorfizam mora da čuva i oznake. Samo ako su dva čvora označena istim brojem oni mogu da se preslikaju jedan u drugi. Desiće se da postoji neki netrivijalan automorfizam koji zadovoljava taj uslov i onda treba da uvedemo još jedan broj kao oznaku kako bi to preslikavanje prestalo da bude automorfizam.

Teorema 3.6.1. *Ako $k \geq 2$ tada $D(G^{\square,k}) = 2$ za sve netrivijalne, povezane grafove $G \neq K_1, K_2$. Šta više, $D(K_n^{\square,k}) = 2$ ako $n = 2, 3$ i $n + k \geq 6$.*

Teoremu navodimo bez dokaza.

Teorema 3.6.2. *Neka su n, k, d celi brojevi tako da $2 \leq d, k < n$ i $(d-1)^k < n \leq d^k$. Tada:*

$$D(K_k \square K_n) = \begin{cases} d, \mathit{ako} & n \leq d^k - \lceil \log_d k \rceil - 1, \\ d+1, \mathit{ako} & n \geq d^k - \lceil \log_d k \rceil + 1 \end{cases}$$

Ako $n = d^k - \lceil \log_d k \rceil$, tada je $D(K_k \square K_n)$ ili d ili $d+1$. Može da se izračuna rekuzivno $O(\log^* n)$ puta, gde $\log^*$ označava ponavljanje logaritma.

Teoremu navodimo bez dokaza.

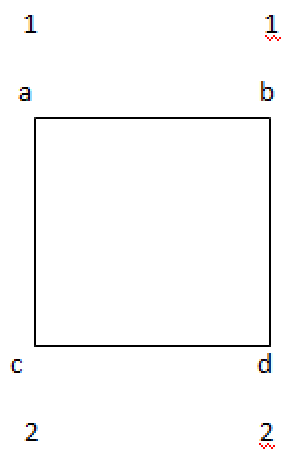
Na sledećem primeru videćemo kako funkcioniše prethodna teorema. Primer za $D(K_2 \square K_6)$: tj. $n = 6$ i $k = 2$ i ako uzmemo da je $d = 3$ i ubacimo u sledeću formulu, $(d-1)^k < n \leq d^k$ dobićemo da je $4 < 6 \leq 9$. Tada je:

$$D(K_2 \square K_6) = \begin{cases} 3, \text{ako} & 6 \leq 3^2 - \lceil \log_3 2 \rceil - 1, \\ 4, \text{ako} & 6 \geq 3^2 - \lceil \log_3 2 \rceil + 1 \end{cases}$$

$$D(K_2 \square K_6) = \begin{cases} 3, \text{ako} & 6 \leq 7,64, \\ 4, \text{ako} & 6 \geq 8,64 \end{cases}$$

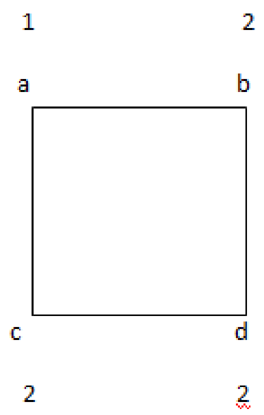
Vidimo da za vrednost $d = 3$ formula je tačna.
Navešćemo dva primera da vidimo koliko nam je potrebno oznaka za $K_2 \square K_2$ i K_n.

1. Primer za $K_2 \square K_2$:
   Posmatraćemo dva rasporeda za primer sa dve oznake. Na Slici 1, možemo primetiti da nismo uništili sve netrivijalne automorfizme, naime $f(a) = b$, $f(b) = a$, $f(c) = d$ i $f(d) = c$.



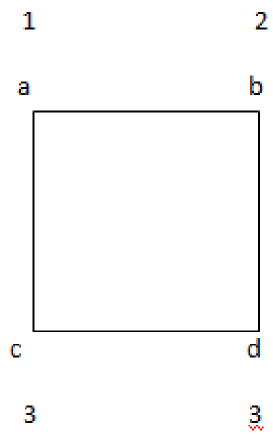
Slika 1: Primer $K_2 \square K_2$ sa dve oznake

Kada posmatramo sledeći raspored kao na Slici 2, vidimo da ni ovde nismo uništili sve netrivijalne automorfizme. Ovde nam je a susedno sa b i c, i ako imamo $f(b) = c$ i $f(c) = b$, a i dalje ostaje susedno sa b i c (podrazumeva se da $f(a) = a$ i $f(d) = d$).



Slika 2: Primer $K_2 \square K_2$ sa dve oznake

Sada probamo sa 3 oznake. Ako su dva čvora označena istom oznakom jedina bijekcija koja nije trivijalna jeste da njih zamenimo a da svi ostali budu isti. Međutim to nam ne očuvava susednost čvorova. Ovde nam je a susedno sa c, $f(a) = a$ i $f(c) = d$, a a i d nisu susedni, što znači da ovo ne očuvava susednost. Prema tome to više nije automorfizam, jer susednost nije očuvana. Na osnovu definicije dovoljno je da nađemo jedno takvo označavanje koje ima samo trivijalni automorfizam i to je ovaj primer sa 3 oznake. Sa dva nema jer će uvek postojati neki automorfizam koji nije trivijalan.



Slika 3: Primer $K_2 \square K_2$ sa tri oznake

2. Primer za K_n:
   Za kompletan graf K_n treba da uvedemo oznake tako da na osnovu

toga budu samo trivijalni automorfizmi. Već smo rekli da su automorfizmi preslikavanja koja pre svega očuvavaju susednost čvora. Da bi bio automorfizam mora da postoji bijekcija. Kada uvedemo oznake pored bijekcije dobijamo i dodatni uslov a to je da mora da se očuva i oznaka čvora, tako da čvor može da se preslika samo u čvor sa istom oznakom. Ako su nam svaka dva čvora susedna onda su i njihove slike susedne, što znači da svaka bijekcija je automorfizam, a susednost ostaje očuvana jer su svaka dva čvora susedna. Ako imamo manje od n oznaka, onda postoje dva čvora koja su označena istom oznakom. Tada uzmemo preslikavanje koje preslikava ta dva čvora jedan u drugi, a sve ostale čvorove fiksiramo na mestu kojem su. To preslikavanje je automorfizam, jer očuvava susednost čvorova, jer su svaka dva čvora međusobno susedna, a šta god da su njihove slike i one su međusobno susedne. Znači čim imam dva čvora označena istom oznakom ili brojem mogu da nađem automorfizam koji njima menja mesta, a sve ostale čvorove fiksira i to će biti netrivijalan automorfizam. Na osnovu svega toga kompletan graf K_n ima n oznaka.

3.7 Kancelacija

Ako su G, H i K povezani grafovi i $G\Box K \cong H\Box K$ tada na osnovu teoreme Sabidussi-Vizing, zajednički faktor može biti poništen iz proizvoda. Pokazujemo da ovo važi i za nepovezane grafove. Sa O ćemo obeležavati prazan graf.

Teorema 3.7.1. *Pretpostavimo da $G, H, K \in \Gamma$, $K \neq O$. Ako važi*

$$G\Box K \cong H\Box K,$$

tada $G \cong H$.

Dokaz:
Neka su $G_1, G_2, G_3, \dots$ povezani grafovi u Γ. Sa $R = Z[x_1, x_2, x_3, \dots]$ označimo prsten polinoma sa prebrojivo mnogo promenljivih. Definišemo preslikavanje $\varphi : \Gamma \to R$.
Bilo koji povezan netrivijalan graf G ima jedinstvenu faktorizaciju kao $G = G_{i_1}^{\Box, j_1} \Box G_{i_2}^{\Box, j_2} \Box \dots \Box G_{i_k}^{\Box, j_k}$, gde G_{i_s} su prosti, po parovima neizomorfni, i možemo staviti da $\varphi(G) = x_{i_1}^{j_1}, x_{i_2}^{j_2}, \dots, x_{i_k}^{j_k}$.
Konkretno $\varphi(G_i) = x_i$ za $i \geq 1$, i možemo definisati da je $\varphi(K_1) = 1$ i $\varphi(O) = 0$. Ovakvo φ je dobro definisano u skupu povezanih grafova. Svaki graf G može biti prikazan kao disjunktna unija $G = H_1 + H_2 + \dots + H_k$ povezanih komponenti, odakle možemo da stavim $\varphi(G) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(H_i)$.
Preslikavanje φ je dobro definisano i to je bijekcija na $Z[x_1, x_2, x_3 \dots]$ sa nenegativnim koeficijentima. Osobine distribucije i komutativnosti Dekartovog proizvoda daju nam $\varphi(G\Box H) = \varphi(G)\varphi(H)$ za sve $G, H \in \Gamma$.
Sada ako $G\Box K \cong H\Box K$, imamo $\varphi(G\Box K) = \varphi(H\Box K)$, tako da $\varphi(G)\varphi(K) = \varphi(H)\varphi(K)$.
Ako je $K \neq O$ tada $\varphi(K) \neq 0$ i $\varphi(G) = \varphi(H)$ na osnovu kancelacije u domenu integriteta R. Odatle je G izomorfno sa H zbog injektivnosti preslikavanja φ.

□

4

Hiperkocka

4.1 Hiperkocka i Dekartov proizvod

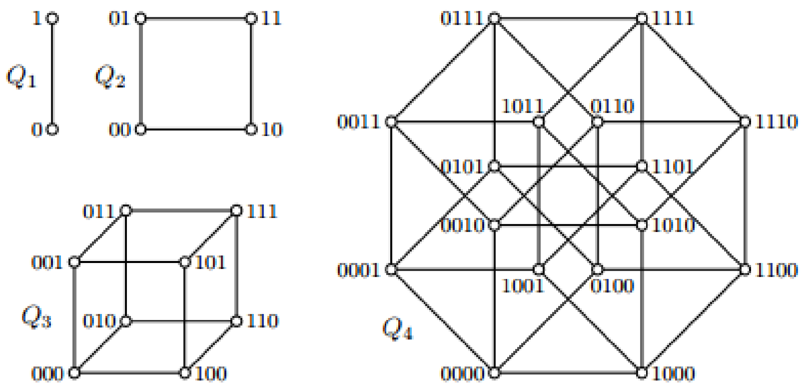
Hiperkocke se u poslednje vreme koriste kao sredstvo za opisivanje finansijskih tržišta. Kada se tržište ne može opisati sa samo tri promenljive, već nam je potrebno više od tri promenljive, to postižemo sa hiperkockama pomoću kojih približno objašnjavamo dinamiku finansijskog sistema. Takođe, uobičajeni postupak u hemiji je da se molekuli predstavljaju kao grafovi, a neki od tih grafova mogu se potopiti u hiperkocku. Navešćemo definiciju hiperkocki i neke njene osnovne osobine.

Definicija 4.1.1. *Hiperkocka Q_r dimenzije r je graf sa skupom čvorova $(v_1, v_2, \ldots, v_r)$ gde $v_i \in \{0, 1\}$. Dva čvora su susedna ako se odgovarajući čvorovi razlikuju u tačno jednoj koordinati.*

Drugim rečima dva vektora $u = (u_1, u_2, \ldots, u_r)$ i $v = (v_1, v_2, \ldots, v_r)$ su susedna ako postoji indeks j takav da je $u_j \neq v_j$ i $u_i = v_i$ za sve $i \neq j$, $1 \leq i \leq r$. Sledeća slika pokazuje nekoliko hiperkocki, gde smo zbog jednostavnosti skratili r-zapise $(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ kao $u_1, u_2, \ldots, u_r$.

Teorema 4.1.1. *Q_r je Dekartov proizvod od r kopija K_2.*

Kao što smo već rekli K_2 je graf sa dva čvora i jednom granom. Dekartov proizvod, $K_2 \Box K_2$, je kvadrat, dok je $K_2 \Box K_2 \Box K_2$ kocka. Posmatrajmo graf $K_2^{\Box,r}$. Označimo čvorove grafa K_2 sa 0 i 1. Čvorovi grafa $K_2^{\Box,r}$ su r-torke nula i jedinica. Po definiciji Dekartovog proizvoda, dva čvora su susedna ako i samo ako su im sve koordinate osim jedne međusobno jednake, a na toj koordinati stoji nula u jednom, a jedinica u drugom čvoru. Prema tome, lako je primetiti da je susednost definisana isto kao u Q_r. Dekartov proizvod od dve hiperkocke je takođe hiperkocka.



Slika 4.1: Primeri hiperkocki

Čvorovi od Q_r, takođe mogu biti shvaćeni kao karakteristični vektori podskupa ili r-skup. Svaki dati čvorovi $v_1, v_2, \ldots, v_r$ je odgovarajući podskupu $\{i \mid v_i = 1\}$ od $\{1, 2, \ldots, r\}$. Čvorovi Q_r mogu biti obeleženi sa podskupom $\{1, 2, \ldots, r\}$ gde su dva podskupa susedna ako je jedan dobijen od drugog brisanjem ili dodavanjem jednog elementa.

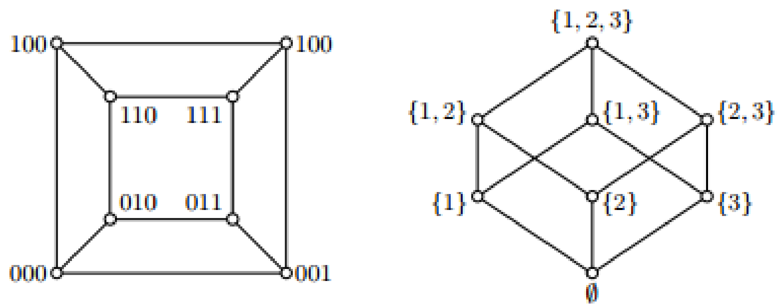
Teorema 4.1.2. *Neka je Q_r hiperkocka. Tada:*

1. *Q_r je povezan, bipartitan, r - regularan i ima prečnik ili dijametar r.*

2. *$|V(Q_r)| = 2^r$, a $|E(Q_r)| = r2^{r-1}$*

3. *Za svaki par čvorova $u, v \in V(Q_r)$, podgraf indukovan intervalom $I(u, v)$ je hiperkocka dimenzije $d(u, v)$.*

Sledeća slika je primer jedne Q_3 hiperkocke, gde sa leve strane, čvorovi su prikazani kao trojke, a sa desne strane, kao podskupovi od $\{1, 2, 3\}$. Karakteristični vektori ovih podskupova su trojke, predstavljene odgovarajućim čvorovima. Na primer, podskupu $\{2, 3\}$ odgovara 011, zato što se u podskupu ne nalazi jedinica pa je na njenom mestu 0. Takođe praznom skupu odgovara 000.



Slika 4.2: Primer Q_3

Lema 4.1.1. *Neka je G podgraf hiperkocke. Tada*

$$|E(G)| \leq \frac{1}{2}|V(G)|log_2|V(G)|$$

jednakost važi ako i samo ako je G hiperkocka.

Dokaz:
Dokaz radimo indukcijom po broju n čvorova grafa G. Tvrđenje je jasno za $n \leq 2$.

Neka je $|V(G)| \geq 3$. Pošto je G podgraf hiperkocke Q_r, svaki čvor od G je r-torka $\{0, 1\}$. Možemo pretpostaviti bez gubitka opštosti da prve koordinate čvorova od G nisu sve jednake.

Neka je G_1 podgraf od G indukovan čvorovima za koja su prva mesta r-torki jednaka 0, i G_2 indukovan ostalim čvorovima iz G.

Definišemo cele brojeve x i y tako da je $x = |V(G_1)|$ i $y = |V(G_2)|$ gde su indeksi izabrani tako da bude $x \geq y \geq 1$.

Na osnovu hipoteze imamo da je $|E(G_1)| \leq \frac{x}{2}\log_2 x$ i $|E(G_2)| \leq \frac{y}{2}\log_2 y$. Kako svaki čvor iz G_1 ima suseda iz G_2, to je dovoljno da se pokaže da je

$$\frac{x}{2}\log_2 x + y + \frac{y}{2}\log_2 y \leq \frac{x+y}{2}\log_2 (x+y).$$

Dokazujemo da ova jednakost važi za sve realne brojeve $x \geq y \geq 1$.
Za $x = y$, obe strane su jednake.
Za $x > y$, pokazujemo samo nejednakost.

Dovoljno je pokazati da izvod po x sa leve strane strogo manji od izvoda po x sa desne strane, to jest:

$$\frac{1}{2}\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 e < \frac{1}{2}\log_2 (x+y) + \frac{1}{2}\log_2 e.$$

Pošto je $y \geq 1$ ovo je tačno. Kada je $y = x$ tada svaki čvor iz G_2 je sused sa čvorom iz G_1 i,

$$|E(G_1)| = |E(G_1)| = \frac{x}{2}\log_2 x.$$

Tada su G_1, G_2 hiperkocke na osnovu hipoteze, a i G je hiperkocka takođe.

$\square$

Neka je $i < j$, gde su i i j dva cela broja između 1 i r. Tada je preslikavanje

$$\varphi_{i,j} : (v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, u_r) \to (v_1, v_2, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_r)$$

automorfizam od Q_r. Osim toga, za bilo koje i, $1 \leq i \leq r$

$$\psi_i : (v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_r) \to (v_1, v_2, \ldots, v_i + 1, \ldots, v_r),$$

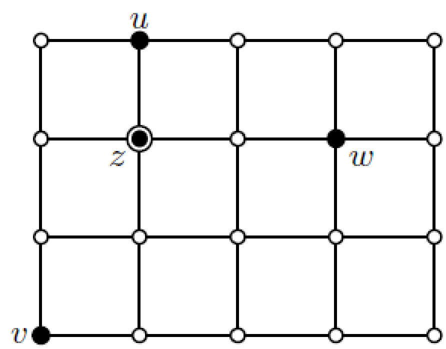
gde je sabiranje po modulu 2, je takođe automorfizam. Jasno $id = \psi_i^2$ za svako i, a i $\psi_i\psi_j = \psi_j\psi_i$ za sve $1 \leq i, j \leq r$. Podgrupa od $Aut(Q_r)$ generisana sa ψ_i je Abelova, i svaki netrivijalni elemenat je reda 2. Takve grupe su poznate kao elemenatarne Abelove 2-grupe i takođe se zovu Bulove. Može se pokazati da $\varphi_{i,j}$ i ψ_i generišu $Aut(Q_r)$. Osim toga za svaka dva čvora $u, v \in Q_r$ koji se razlikuju na koordinati $i_1, i_2, \ldots i_j$ važi i $\psi_{i1}, \psi_{i2} \ldots \psi_{ij}(u) = v$. To nas dovodi do čvorne tranzitivnosti grafa.

Definicija 4.1.2. *Grupa automorfizama grafa G je tranzitivna ako postoji automorfizam φ za bilo koji par čvorova $u, v \in G$, takvih da $\varphi(u) = v$. U tom slučaju, G se zove čvorno tranzitivni graf.*

Na osnovu svega navedenog sledi da su hiperkocke čvorno tranzitivni grafovi.

4.2 Medijalni grafovi

Sada ćemo početi priču o medijalnim grafovima i njihovoj povezanosti sa hiperkockom. Stabla su nam interesantna, jer predstavljaju primere medijalnih grafova. Za svaka tri čvora u, v, w u proizvoljnom stablu postoji jedinstveno određen čvor z koji leži na najkraćem putu između bilo koja dva od tri data čvora. Ova činjenica vodi do koncepta medijane i medijalnih grafova.



Slika 4.3 Medijana z trojke u, v i w

Definicija 4.2.1. *Medijana za trojku čvorova u, v, w grafa G je čvor z, koji za svaka dva para čvorova iz $\{u, v, w\}$ leži na nekom najkraćem putu između njih.*

Na slici 4.3 čvor z je medijana čvorova u, v i w. Alternativno, medijane čvorova u, v i w mogu biti definisani kao čvorovi u $I(u, v) \cap I(u, w) \cap I(v, w)$.

Definicija 4.2.2. *Graf je medijalni graf ako svaka trojka čvorova ima jedinstvenu medijanu, to jeste,*

$$|I(u, v) \cap I(u, w) \cap I(v, w)| = 1$$

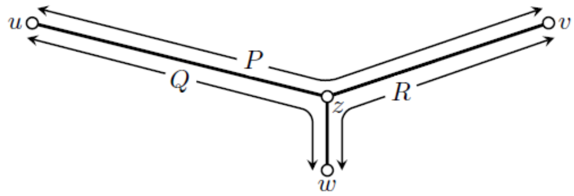
za svaku trojku u, v, w iz $V(G)$.

Ovi grafove su prvi predstavili Avann (1961), Nebesky (1971) i nezavisno od njih, Mulder (1978, 1980, 1980). Ni $K_{2,3}$ i Q_3^- nisu medijalni grafovi. Graf $K_{2,3}$ nije medijalni graf, jer njegova dva čvora stepena 3, su medijane za druga tri čvora. Isto tako, Q_3^- nije medijalni graf, jer trojke 110, 101, 011 ne sadrže medijanu. Stoga, $K_{2,3}$ ne može da bude medijalni graf jer sadrži previše medijana, a Q_3^- ne može da bude medijalni graf jer ne sadrži dovoljan broj medijana.

Teorema 4.2.1. *Stablo je medijalan graf.*

Dokaz:
Neka su u, v, w čvorovi stabla T i P,Q, R jedinstvene putanje u T od u do v, od u do w i od v do w, kao što je predstavljeno na slici 4.4. Kako su ove putanje jedinstvene, one su i najkraće putanje. Putanje P i Q sadrže čvor u. Neka je z (jedinstveno definisano) čvor u P i Q koje je najudaljenije od u. Tada podputanje P_{zv} od z do v i Q_{zw} od z do w sadrže zajednički samo čvor z. Stoga njihova unija je putanja između v i w, što je zapravo putanja R. Primetimo da su svi čvorovi od R koja su različita od z ili nisu u P ili nisu u Q. Dalje zaključujemo da je z jedinstveni čvor koje se nalazi u preseku sve tri putanje i stoga je medijana trojke u, v i w. Kako su P, Q i R jedine putanje od u, v i w, sledi da je čvor z jedinstveno.

□



Slika 4.4: Medijana od u, v i w u stablu

Lema 4.2.1. *Neka su u_1, u_2, u_3 čvorovi grafa G. Ako postoji medijana z, tada je*

$$d(u_i, z) = \frac{1}{2}(d(u_i, u_j) + d(u_i, u_k) - d(u_j, u_k)),$$

gde je $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

Dokaz:
Kako $d(u_i, u_j) = d(u_i, z) + d(z, u_j)$,za $1 \leq i, j \leq 3$ i $i \neq j$ lema se može dokazati zamenom odgovarajućih identiteta na desnoj strani jednačine.

□

Za svaki podgraf H grafa G, važi nejednakost $d_G(u, v) \leq d_H(u, v)$.

Definicija 4.2.3. *Neka je H podgraf grafa G. Ako je $d_H(u, v) = d_G(u, v)$ za sve čvorove $u, v \in V(H)$, tada podgraf H nazivamo izometrični podgraf.*

Teorema 4.2.2. *Neka je C najkraća kontura ili najkraća neparna kontura grafa G. Tada je C izometričan u G.*

Teoremu navodimo bez dokaza.

Teorema 4.2.3. *Grafovi kod kojih svaka trojka čvorova ima medijanu su bipartitni.*

Dokaz:
Neka je C najkraća neparna kontura $v_1, v_2, \ldots, v_{2k+1}$ grafa koji zadovoljava pretpostavke teoreme. Na osnovu Teorema 4.2.2. ona je izometrična. Posmatrajmo čvorove v_1, v_{k+1}, v_{k+2}. Kako je C izometrična,

$$d_G(v_1, v_{k+1}) = d_G(v_1, v_{k+2}) = k.$$

Stoga, na osnovu prethodne Leme 4.2.1, distanca između medijana v_1, v_{k+1}, v_{k+2} od v_1 iznosi $d_G(v_1, z) = \frac{1}{2}(d_G(v_1, v_{k+1}) + d_G(v_1, v_{k+2}) - d_G(v_{k+1}, v_{k+2})) = \frac{1}{2}(k + k - 1) = \frac{1}{2}(2k - 1)$, što je nemoguće jer ovo nije ceo broj.

□

Teorema 4.2.4. *Svaka hiperkocka je medijalni graf.*

Dokaz:
Posmatrajmo trojku $u = u_1u_2 \ldots u_r, v = v_1v_2 \ldots v_r$ i $w = w_1w_2 \ldots w_r$ čvorova od Q_r. Formirajmo $z = z_1z_2 \ldots z_r$ tako da svaki z_i je definisan tako da $z_i = 1$ ako su bar dva čvora u_i, v_i, w_i jednaka 1, dok je z_i inače 0. Tada za svaki par čvorova iz trojke koji su udaljeni k pozicija, imamo da je $d(u, v) = k = d(u, z) + d(z, v)$, odakle vidimo da se z nalazi na najkraćem putu između u i v. Dakle, z je medijana za čvorove u, v i w. S druge strane, ako je x na najkraćem putu između u i v, i ako je $u_i = v_i$, onda je $x_i = v_i$. Slični komentar važi i ako je x na najkraćem uw-puta ili vw-puta. To važi za svaku medijanu čvorova u, v i w, pa vidimo da je medijana i jedinstvena.

□

Medijalni grafovi mogu biti definisani kao retrakti hiperkocke. Retrakcija φ grafa G je homomorfizam grafa G u samog sebe sa osobinom $\varphi^2(u) = \varphi(u)$, za sve $u \in V(G)$.

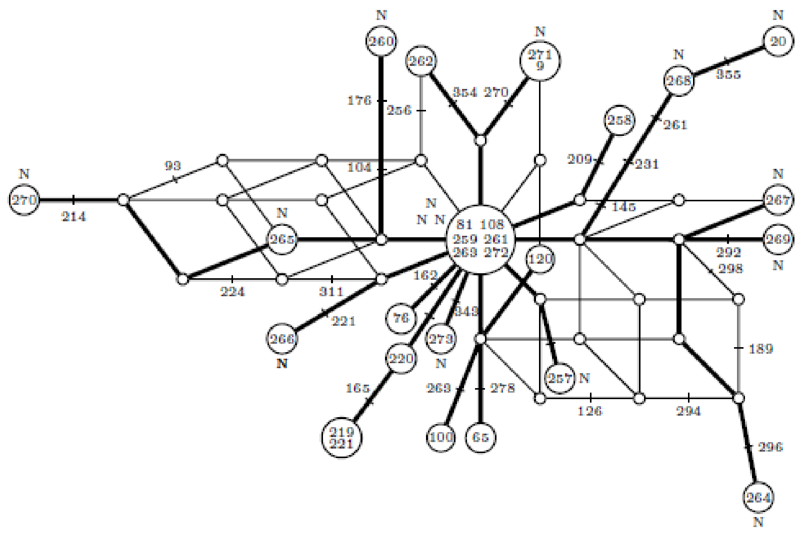
Definicija 4.2.4. *Homomorfna slika grafa G, u odnosu na retrakciju φ zove se retrakt grafa G.*

Teorema 4.2.5. *Graf G je medijalni graf ako i samo ako G je retrakt hiperkocke.*

Teoremu navodimo bez dokaza.

4.3 Medijalne mreže u ljudskoj genetici

Medijalni grafovi se primenjuju pri rešavaju problema u ljudskoj genetici. Medijalne mreže u ljudskoj genetici prvi put se javljaju 1995., i predstavljaju ih Bandelt, Forster, Sykes i Ričard. Glavna tema njihovog istraživanja bile su mitohondrije DNK-a ili skraćeno mtDNK-a. Shvatili su da pri analizi ljudskih mtDNK-a, tradiciona metoda "građenja" stabla je nezadovoljavajuća, zbog toga razvili su metod koji pravi razliku između rešivih i nerešivih različitih karaktera. U tu svrhu razvili su sledeći model. Određeni broj mtDNK-a nekog pojedinca iz populacije se ispituje i pretvara u binarne podatke. U ovom procesu prenosi se skup binarnih vektora fiksne dužine, recimo d, koji se smatraju čvorovima od Q_d. Odgovarajuća medijalna mreža je najmanji medijalni podgraf Q_d koji sadrži vektore podataka. Ova mreža dobijena je dodavanjem medijana za trojke originalnih vektora i ovaj proces se nastavlja sve dok se dodaju novi čvorovi. Bandelt i drugi su 1995. pokazali da sva takozvana "parsimonious" stabla za dati vektor se realizuju u odgovarajuću medijalnu mrežu. Dali su takođe efikasnu proceduru za konstrukciju medijalne mreže, kao i postupak redukcije koji bi se koristio kada medijalne mreže postanu prevelike. Ovakav pristup medijalnih mreža se kasnije primenjuje na konkretne skupove podataka. Sledeća slika je medijalna mreža za skup od 28 Frizijaca[1].



Medijalna mreža

[1]Frizijci su germanska etnička grupa

Napomenućemo da prikazana mreža kodira više informacija od same strukture grafa. Veličine krugova koji predstavljaju haplotipove[2] su proporcionalne broju osoba sa tim haplotipom, dok su mali krugovi potencijalni haplotipovi. Slovo N označava pojedince iz Severnih Frizijskih ostrva, a podebljane linije najviše jedinstvena "parsimonious " stabla.
Upotreba medijalnih mreža inicirala je razne pravce razvoja od kojih ćemo navesti najvažnija:

1. Ričard i ostali (1996.) prave prve aplikacije medijalnih mreža za ljudsku genetiku na osnovu filogenskih analiza. U ovaj rad uključene su mtDNK-a od 821-nog pojedinca iz Evrope i Bliskog istoka. Zaključeno je da su preci od velike većine došli u Evropu u toku Gornjeg Paleolita.

2. Značajan problem sa podacima mtDNK-a u javnosti i u bankama podataka je u tome što one mogu da sadrže ozbiljne greške. Banadelt, Quintana-Murci, Salas i Macaulay su 2002. uzeli u obzir jednu vrstu tih grešaka, poznate kao fantomske mutacije. Njihova analiza je upotreba sekvenci $(f_d)_{d \geq 0}$, gde sa f_d označavamo broj d-kocki medijalnih mreža.

3. Bandelt, Salas i Lutz-Bonengel su 2004. opisali 4 glavne greške koje se javljaju sekvencama mtDNK-a za forenzičke svrhe i daju specifične podatke koji nisu odgovarajući za tu upotrebu. Oni za rešavanje ovog problema daju male i odabrane baze podataka koji mogu biti predstavljeni sa kompletnom medijalnom mrežom.

4. Kong i drugi su 2008. predložili tehniku rekombinacije dijagrama kako bi se bavili greškama u podacima gotovo svakih mtDNK-a.

5. Upotebom medijalnih mreža Bandelta i ostalih 2009. suprostavljaju novije rezultate starijim rezultatima koji se tiču kompletnih mtDNK-a. Njihovi dijagrami ukazuju na nepotpuno čitanje sekvenci.

[2] Haplotipovi su geni koji se ne rekombinuju i nemaju svoj par na drugom hromozomu

Zaključak

U ovom master radu dat je pregled osnovnih pojmova i osobina grafovskih proizvoda, pri čemu je posebna pažnja posvećena Dekartovom proizvodu grafova.

Definicija Dekartov proizvod grafova je prirodna i jednostavna. U velikoj je meri istražen, ima dosta zanimljivih algebarskih osobina. U radu smo predstavili nekoliko važnih teorijskih rezultata o Dekartovom proizvodu grafova, kao što su rezultati Sabidussi-a i Vizinga o jedinstvenosti dekompozicije na proste faktore. Izloženi su rezultati o grupi automorfizama Dekartovog proizvoda.

Što se tiče primene, Dekartov proizvod grafova ima značajnu ulogu u rešavanju problema dinamičkog lociranja. Medijalni grafovi, koji su retrakti hiperkocki, koriste se i u ljudskoj genetici. Hiperkocke se u poslednje vreme koriste kao sredstvo za opisivanje finansijskih tržista.

Pošto je tema savremena, za mene je bila dosta inspirativna i interesantna. Kako nema puno literature na srpskom jeziku o njoj, prezentovani materijal predstavlja osnovu čitaocu za upoznavanje sa osnovnim pojmovima Dekartovog proizvoda grafova.

Literatura

1. Albertson, M. O. and Collins, K. L. Symmetry breaking in graphs. Electron. J.Combin., 3, Research Paper 18, 17 pp. (1996).

2. Avann, S. P., Metric ternary distributive semi-lattices, Proceedings of the American Mathematical Society, American Mathematical Society, 12 (3): 407-414, (1961).

3. R. Hammack, W. Imrich, S. Klavžar, Handbook of product graphs, CRC Press, (2011).

4. W. Imrich, S. Klavžar, Distringuishing Cartesian powers of graphs, J. Graphs Theory, 53, 250-260, (2006).

5. H. M. Mulder, The structure of median graphs, Discrete Math., (1978).

6. Nebesky L.: Graphic algebras, Comment. Math. Univ. Carolinae 11, 533-544, (1970).

7. G. Sabidussi, Graph Multiplication. Math. Zeitschr., 72, 446-457, (1960).

8. V. G. Vizing, Cartesian product of graphs, Vychisl. Sistemy (in Russian) 9 , 30-43, (1963). English translation: Comp. El. Syst. 2 352-365, (1966).

Biografija

Marijana Petričević Jović je rođena 04.08.1990. godine u Bijeljini. Nakon završene Osnovne škole "Knez Ivo od Semberije" u Bijeljini, upisala je Gimnaziju "Filip Višnjić", opšti smer, u Bijeljini. Nakon završene srednje skole 2009. godine, upisala je osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer matematika finansija, koje završava 2013. godine. Iste godine upisuje master studije na istom fakultetu i usmerenju. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom, čime je stekla uslov za odbranu master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Marijana Petričević Jović
AU

Mentor: dr Ivica Bošnjak
ME

Naslov rada: Dekartov proizvod grafova
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezk izvoda: s / en
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2017
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (4/60/0/0/22/0/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)

FO:

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Diskretna matematika, teorija grafova
ND

Ključne reči: Teorija grafova, proizvod grafova, Dekartov proizvod grafa, Sabidussi-Vizing, podproizvod, podgraf, grupa automorfizama, hiperkocka
PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Tema master rada su osnovni grafovski proizvodi, pri čemu se posebna pažnja posvećuje razmatranju i primenama Dekartovog proizvoga grafova. Objašnjavamo i dajemo pregled najvažnijih pojmova i teorema iz teorije grafova. Prikazujemo rezultate Sabidussi-a i Vizinga o jedinstvenosti dekompozicije na proste faktore kao i osnovne rezultate o hiperkockama. Objašnjavamo povezanost medijalnih grafova sa hiperkockama.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 08.12.2016.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
ČK

Predsednik: dr Rozalia Madarasz, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Petar Đapić, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor: dr Ivica Bošnjak, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Marijana Petričević Jović
AU

Mentor: dr Ivica Bošnjak
MN

Title: Cartesian product of graphs
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: s / en
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2017
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
PP

Physical description: (4/60/0/0/22/0/0)(chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Discrete mathematics, graph theory
SD

Subject/Key words: Graph theory, product of graphs, Cartesian product of graphs, Sabidussi-Vizing, subproducts, subgraph, the automorphism group, hypercubes
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: The subject of this thesis is fundamental graph products, where particular attention is given to reviewing and applications of Cartesian product of the graphs. We are explaining and giving an overview of the most important concepts and theorems in graph theory. We present the results of Sabidussi and Vizing about the uniqueness of the prime factorization, also the main results of the hypercubes. We are explaining the connection of median graphs with hypercubes.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 08.12.2016.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: dr Rozalia Madarasz, full professor at Faculty of Science in Novi Sad
Member: dr Petar Đapić, assistant professor, Faculty of Science in Novi Sad
Mentor: dr Ivica Bošnjak, associate professor at Faculty of Science in Novi Sad