UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Marija Vidović

OSNOVE FAZI ARITMETIKE I FAZI PERT METOD

- master rad -

Novi Sad, *2011*.

Sadržaj

PREDGOVOR

Tema ovog rada pripada savremenoj matematičkoj oblasti baziranoj na fazi skupovima, tj. teoriji fazi skupova. Reč fazi je engleskog porekla i označava neodređen, neprecizan pojam. U matematičkom okruženju prvi put se javila 1965. godine u radu *Fuzzy sets: Information and control* profesora Zadeha (*Lotfi A. Zadeh*). Osnovni cilj definisanja ovog pojma je da se na matematički, formalan način predstavi i modelira neodređenost i nepreciznost prisutna u svakodnevnom životu. Zahvaljujući uvođenju pojma fazi, omogućeno je da se nekom iskazu dodeli vrednost koja varira između potpuno netačno do potpuno tačno.

Kod klasičnih skupova postoji jasna granica pripadnosti skupu, tačnije element ili pripada ili ne pripada datom skupu, dok kod fazi skupova ta granica nije jasno određena. Fazi skup predstavlja uopštenje klasičnog skupa, jer se za svaki element određuje stepen pripadnosti skupu. Pripadnost elementa se može okarakterisati brojem iz intervala [0,1] i funkcija kojom se opisuje ta pripadnost se naziva funkcija pripadnosti (eng. *membership function*). Upravo fleksibilnost pri izboru oblika funkcije pripadnosti omogućava lakše prilagođavanje fazi sistema realnim situacijama i to je jedan od osnovnih razloga zbog kojih fazi sistemi u sve većoj meri postaju zamena klasičnim inženjerskim sistemima. Kao nadogradnja teorije fazi skupova razvijena je teorija fazi brojeva, te i fazi aritmetika.

U ovom radu dat je pregled savremenih rezultata iz teorije fazi skupova sa posebnim osvrtom na primenu fazi brojeva u projektnom upravljanju. Rad se sastoji iz tri poglavlja. Prva dva poglavlja imaju za cilj da uvedu u osnove fazi razmišljanja, te i u samu fazi aritmetiku. Kasnije, ilustrovana je primena fazi aritmetike u rešavanju realnih problema.

U prvom poglavlju je dat detaljan pregled osnovnih pojmova i definicja vezanih za fazi skupove. Ilustrovane su razlike između klasičnih i fazi skupova. Literatura korišćena pri izradi ovog poglavlja je [1,11,14,21].

U drugom poglavlju je data definicija fazi broja i opisani su osnovni tipovi fazi brojeva: linearni fazi brojevi, Gausovi fazi brojevi, kvazi-Gausovi fazi brojevi, kvadratni fazi brojevi, eksponencijalni, kvazieksponencijalni. U ovom poglavlju je definisana aritmetička operacija sabiranja fazi brojeva. Pored toga, definisan je i vrlo bitan alat u teoriji fazi skupova, tzv. Zadehov princip proširenja. Predstavljena su i tri različita načina pristupa fazi aritmetici u okviru koje su obrađeni koncepti *L-R* fazi broja, diskretnih fazi brojeva i dekompozovanih fazi brojeva. Rezultati prezentovani u ovom delu su iz [1,3,7,8,9,11,12,13,19,20,21].

U trećem poglavlju ilustrovana je primena fazi aritmetike u upravljanju projektima i to pri korišćenju CPM i PERT metoda ([15,17]). Prilikom izrade nekog projekta potrebno je raščlaniti projekat na aktivnosti i događaje, zatim odrediti vremena nastupanja i trajanja svih aktivnosti od kojih se sastoji projekat. Nakon utvrđivanja potrebnih vremena izvršenja određenih aktivnosti potrebno je odrediti kritičan put, tj. put na kom se nalaze aktivnosti koje ne smeju da kasne. Cilj CPM i PERT metoda je upravo otkrivanje kritičnih puteva, s tim da je u ovom radu prikazan način otkrivanja kritičnog puta pomoću fazi aritmetike. Rezultati prezentovani u ovom poglavlju su iz [1,2,3,4,5,6,7,10,13,15,17,19,23].

* * *

Izuzetnu zahvalnost dugujem svom mentoru, dr Ivani Štajner-Papuga, na ukazanom poverenju, pruženom znanju i pomoći bez koje ne bih uspela da završim ovaj rad. Takođe, zahvaljujem se prof. dr Zagorki Lozanov-Crvenković na podršci koju mi je pružala tokom studija, kao i preostalim članovima komisije dr Tatjani Grbić i dr Tatjani Došenović.

Veliku zahvalnost dugujem i svojoj profesorici, Aleksandri Matejić, na ogromnom strpljenju, razumevanju i podršci. Zahvaljujući njoj, odlučila sam da matematika bude moj budući poziv.

Želim da se zahvalim svima koji su mi na bilo koji način pružili pomoć, a naročito roditeljima, sestri i prijateljima.

Novi Sad 31.8.2011. Marija Vidović

1

Fazi skup

U slučajevima kada je nemoguće napraviti jasnu razliku između pripadnosti ili nepripadnosti nekog elementa datom skupu, ne mogu se koristiti principi klasične teorije skupova. Takve situacije su vrlo česte u svakodnevnom životu. Primera radi, zaposlenima u preduzeću je postavljeno pitanje da li se slažu sa tvrdnjom da je visina njihovih mesečnih primanja odgovarajuća. Dobijeni su sledeći odgovori: ne slažem se, delimično se slažem, u potpunosti se slažem.
U ovom slučaju univerzalni skup je skup svih zaposlenih, a posmatra se njegov podskup sačinjen od zaposlenih koji se slažu sa gore navedenom tvrdnjom. Već na ovom jednostavnom primeru se vidi da nije u pitanju klasičan skup, jer postoje zaposleni koji se samo u određenoj meri slažu sa datom tvrdnjom. Zbog neodređenosti koja se javlja u ovakvim i sličnim situacijama nastala je potreba da se one matematički opišu, te se, kao uopštenje klasičnih skupova, javljaju fazi skupovi.

1.1 Osnovne definicije i pojmovi

U ovom poglavlju su dati osnovni pojmovi vezani za fazi skupove počevši od same definicije. Pored toga, dat je pregled uopštenja pojmova iz klasične teorije skupova kao i definicije osobina koje su karakteristične samo za fazi skupove (videti [1,11,20]).

Fazi skup dozvoljava da neki element samo u određenoj meri pripada skupu, kao što su u gore datom primeru zaposleni koji se delimično slažu. Funkcija kojom se opisuje stepen prpadnosti nekog elementa se naziva *funkcija pripadnosti* i data je narednom definicijom ([1,11,20]).

Definicija 1.1.1 Funkcija pripadnosti, u oznaci μ, je preslikavanje $\mu : X \to [0,1]$, gde je X univerzalni skup.

U prethodno navedenom primeru odgovorima: ne slažem se, delimično se slažem, u potpunosti se slažem; se mogu dodeliti vrednosti 0, 0.5 i 1, redom. Na taj način je brojevima opisan subjektivan osećaj svakog ispitanika.

Fazi skup se definiše upravo preko svoje funkcije pripadnosti ([1,11,20]).

Definicija 1.1.2 Fazi skup $\underset{\sim}{A}$ je skup uređenih parova $(x, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x))$ gde je x element univerzalnog skupa X, a $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ vrednost funkcije pripadnosti za element x tj.

$$\underset{\sim}{A} = \{ \ (x, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)) \mid x \in X \ , \ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \in [0,1] \ \} .$$

Iz date definicije se jasno vidi da je klasičan skup specijalan slučaj fazi skupa kada se uzme da je vrednost funkcije pripadnosti za svaki element jednaka jedinici.

Ukoliko fazi skup ima konačno mnogo elemenata, oni se mogu nabrojati i obično se elementi koji imaju nulti stepen pripadnosti (za koje je vrednost funkcije pripadnosti jednaka nuli) ne navode. U slučaju konačnog broja elemenata fazi skupa, oni se mogu prikazati i tabelarno, navodeći u jednom redu elemente, a u drugom odgovarajuće vrednosti funkcije pripadnosti.

Da bi se izbegla dvosmislenost u oznakama, u ovom radu klasični skupovi se označavaju velikim štampanim latiničnim slovima $A, B, C ...$, a fazi skupovi sa $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C} ...$

Još jedan klasičan pojam koji ima svoje uopštenje u fazi teoriji je i pojam relacije.

Defnicija 1.1.3 n-arna fazi relacija, u oznaci $\tilde{R}$, je uređen par n- torke $(x_1, x_2, ..., x_n) \in X_1 \times X_2 ... \times X_n$ i funkcije pripadnosti $\mu_{\tilde{R}}(x_1, x_2, ..., x_n)$ tj.

$$\tilde{R} = \{ \ (\ (x_1, x_2, ..., x_n), \mu_{\tilde{R}}(x_1, x_2, ..., x_n) \ ) \ | \\ (x_1, x_2, ..., x_n) \in X_1 \times X_2 ... \times X_n \}, \ \mu_{\tilde{R}}(x_1, x_2, ..., x_n) \in [0,1]$$

gde su $X_1, X_2 ..., X_n$ univerzalni skupovi.

Osnovna razlika između klasične i fazi relacije je u tome što klasična relacija ukazuje na to da li su elementi u relaciji ili ne, dok fazi relacija dozvoljava da elementi u određenoj meri budu u datoj relaciji. Odnosno, stepen pripadnosti $\mu_{\tilde{R}}(x_1, x_2, ..., x_n)$ ukazuje na to u kojoj su meri elementi $x_1, ..., x_n$ povezani.

Primer 1.1.1

Neka su dati skupovi $A = \{\check{s}kola\,\mathrm{a}_1, \check{s}kola\,\mathrm{a}_2, \check{s}kola\,\mathrm{a}_3\}$ i $B = \{\check{s}kola\,\mathrm{b}_1, \check{s}kola\,\mathrm{b}_2\}$ i neka je relacija $\tilde{R}$, koja opisuje veliku udaljenost između škola iz skupa A i B, data sa:

$$\tilde{R} = \{((\check{s}kola\ \mathrm{a}_1,\ \check{s}kola\ \mathrm{b}_1), 0.9), ((\check{s}kola\ \mathrm{a}_1,\ \check{s}kola\ \mathrm{b}_2), 0.6), ((\check{s}kola\ \mathrm{a}_2,\ \check{s}kola\ \mathrm{b}_1), 1), \\ ((\check{s}kola\ \mathrm{a}_2,\ \check{s}kola\ \mathrm{b}_2), 0.4), ((\check{s}kola\ \mathrm{a}_3,\ \check{s}kola\ \mathrm{b}_1), 0.5), ((\check{s}kola\ \mathrm{a}_3,\ \check{s}kola\ \mathrm{b}_2), 0.1)\}$$

Vrednosti funkcije pripadnosti ukazuju da su škole a_2 i b_1 veoma udaljene, dok škole a_3 i b_2 nisu.

Sledi pregled nekih bitnih pojmova vezanih za fazi skup.

Definicija 1.1.4 [1] Fazi partitivni skup, u oznaci $\tilde{P}(A)$, gde je A klasičan skup, je skup svih mogućih fazi podskupova od klasičnog skupa A tj.

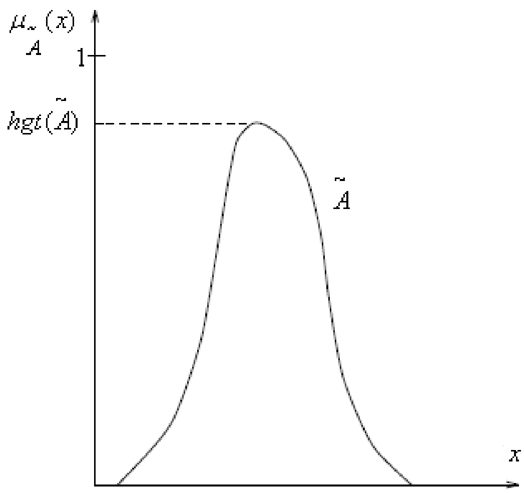
$$\tilde{P}(A) = \{\tilde{T} \mid \tilde{T} \subseteq A\}.$$

Definicija 1.1.5 [1] Visina $hgt(\tilde{A})$ fazi skupa $\tilde{A} \subseteq \tilde{P}(X)$ je supremum funkcije pripadnosti, tj.

$$hgt(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x).$$

U slučaju da fazi skup $\tilde{A}$ broji konačno mnogo elemenata visina se definiše kao maksimum funkcije pripadnosti tj.

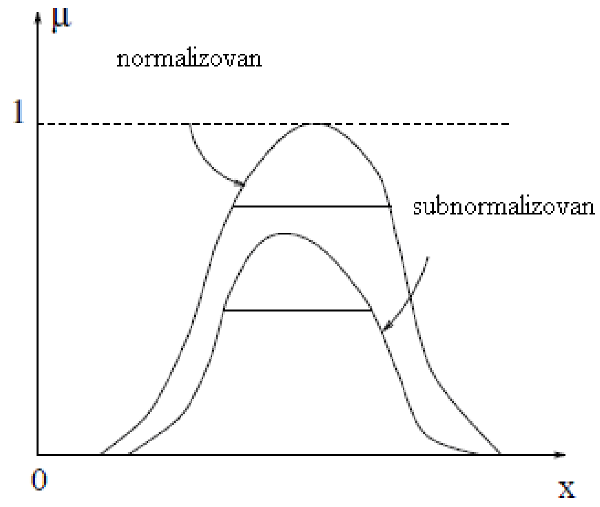
$$hgt(\tilde{A}) = \max_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x).$$



Slika 1. *Visina fazi skupa*

Na slici 1. ([1]) je prikazana funkcija pripadnosti fazi skupa na kojoj je označena visina $hgt(\tilde{A})$.

Definicija 1.1.6 [1] Fazi skup $\tilde{A}$ je normalizovan ako je $hgt(\tilde{A}) = 1$, odnosno ako postoji bar jedan element, iz univerzalnog skupa, takav da je vrednost funkcije pripadnosti jednaka jedinici. U suprotnom fazi skup se naziva subnormalizovan.



Slika 2. *Normalizovan i subnormalizovan fazi skup*

Na slici 2. ([1]) su dati primeri normalizovanog i subnormalizovanog fazi skupa.

Definicija 1.1.7 [1] Jezgro $core(\tilde{A})$ fazi skupa $\tilde{A} \subseteq P(\tilde{X})$ je klasičan skup svih elemenata $x \in X$ takvih da je vrednost funkcije pripadnosti jednaka jedinici tj.

.

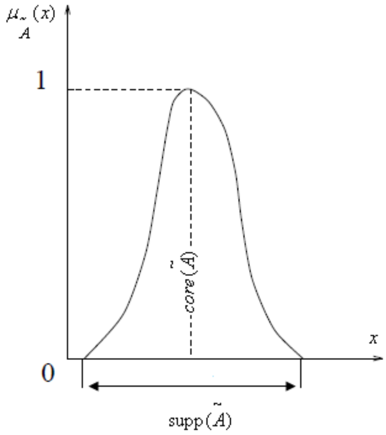
$$core\ (\tilde{A}) = \{\ x \in X \ |\ \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$$

Odnosno, to je skup svih onih elemenata koji u potpunosti pripadaju datom skupu.

Definicija 1.1.8 [1] Nosač $\mathrm{supp}(\tilde{\mathrm{A}})$ fazi skupa $\tilde{A} \subseteq P(\tilde{X})$ je klasičan skup svih elemenata $x \in X$ čija je vrednost funkcije pripadnosti veća od nule, tj

$$\mathrm{supp}(\tilde{\mathrm{A}}) = \{\ x \in X \ |\ \mu_{\tilde{A}}(\mathrm{x}) > 0\}$$

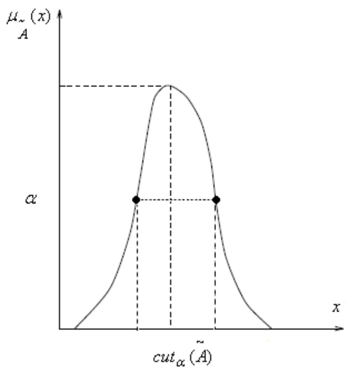
.



Slika 3. *Jezgro i nosač fazi skupa* $\tilde{A}$

Na slici 3. ([11]) su prikazani jezgro i nosač skupa $\tilde{A}$. U ovom slučaju jezgro ima samo jedan element.

Definicija 1.1.9 [1] α- presek (eng. α*-cut*) fazi skupa $\tilde{A} \subseteq \tilde{P}(X)$, u oznaci $cut_{\alpha}(\tilde{A})$, je klasičan skup elemenata $x \in X$ koji pripadaju fazi skupu $\tilde{A}$ sa stepenom pripadnosti bar α, tj. $cut_{\alpha}(\tilde{A}) = \{ x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha \}$. Ukoliko je stepen pripadnosti strogo veći od α onda se skup $cut_{\alpha+}(\tilde{A}) = \{ x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha \}$ naziva strogi α - presek.

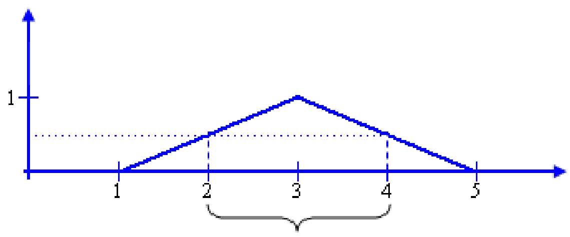


Slika 4. α - *presek fazi skupa* $\tilde{A}$

Na slici 4. ([11]) je ilustrovan jedan α - presek fazi skupa $\tilde{A}$.

Primer 1.1.2 Neka je dat sledeći diskretan fazi skup

$$\tilde{P} = \{(1,0.0),(2,0.5),(3,1.0),(4,0.5),(5,0.0)\}.$$



Slika 5. *Fazi skup* $\tilde{P}$

Za $\alpha = 0.5$ jedan α - presek fazi skupa $\tilde{P}$ je klasičan skup elemenata 2,3 i 4, odnosno, $cut_{0.5}(\tilde{P}) = \{ 2,3,4 \}$.

Definicija 1.1.10 [11] Kardinalnost diskretnog fazi skupa $\tilde{A} \subseteq \tilde{P}(X)$, u oznaci $card(\tilde{A})$, sa konačnim nosačem se definiše kao .

$$card(\tilde{A}) = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) = \sum_{x \in \operatorname{supp}(\tilde{A})} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

Definicjija 1.1.11 [1] Fazi skup $\tilde{A} \subseteq \tilde{P}(R)$ je konveksan ako za svaka dva elementa $u, v \in cut_{\alpha}(\tilde{A})$ i svako $\alpha \in [0,1]$ važi

$$\lambda u + (1-\lambda) v \in cut_{\alpha}(\tilde{A}) \;, \quad \lambda \in [0,1].$$

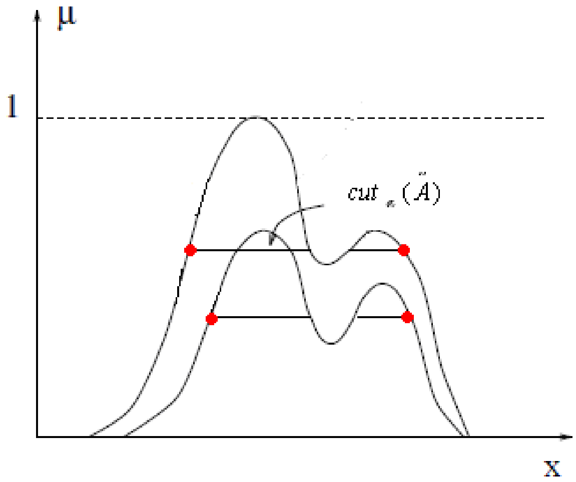
odnosno, ako i samo ako je svaki α -presek konveksan skup.

Konveksnost fazi skupa se može definisati i preko funkcije pripadnosti na sledeći način:

Definicjija 1.1.12 Fazi skup $\tilde{A} \subseteq P(\tilde{R})$ je konveksan ako i samo ako važi

za
$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$$
$x_1, x_2 \in X$, $\lambda \in [0,1]$.

Prethodna definicija se može tumačiti na sledeći način: Ako se uzmu dva elementa x_1 i x_2 iz fazi skupa $\tilde{A}$ i povuče duž koja ih spaja, vrednost funkcije pripadnosti za svaku tačku sa te duži mora biti veća ili jednaka od minimuma vrednosti funkcije pripadnosti za elemente x_1 i x_2. Fazi skupovi ilustrovani slikom 2. su primeri konveksnih fazi skupova,



Slika 6. *Nekonveksni fazi skupovi*

dok su na slici 6. ([1]) dati nekonveksni fazi skupovi, (crvene tačke pripadaju α-preseku, dok njihova konveksna kombinacija ne pripada α- preseku). Poređenjem slika 2. i 6. može se zaključiti da je fazi skup konveksan ako i samo ako se α- presek ne sastoji iz više segmenata.

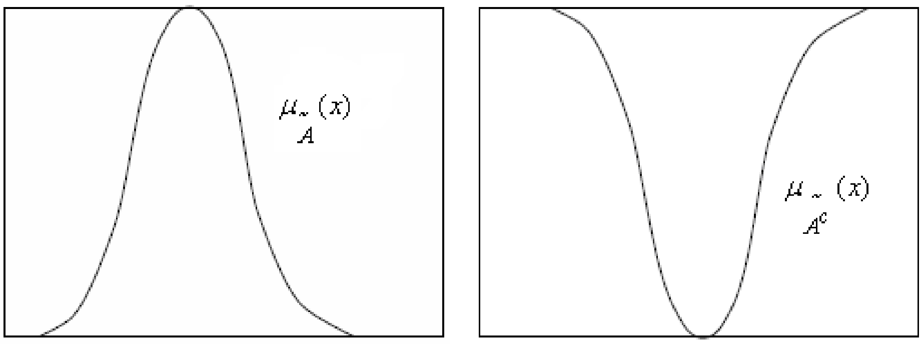
1.2 Operacije sa fazi skupovima i relacijama

U ovom poglavlju fokus je na fazi skupovima i fazi relacijama koje imaju kompatibilne domene, tj. definisani su nad istim univerzalnim skupom, odnosno nad proizvodom univerzalnih skupova. Operacije sa fazi skupovima i relacijama date su preko operacija nad funkcijama pripadnosti. Ako drugačije nije naglašeno, u daljem radu se posmatraju fazi skupovi sa kompatibilnim domenima.

Definicija 1.2.1 [1] Fazi skup $\tilde{A}$ je podskup fazi skupa $\tilde{B}$, u oznaci $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$, ako i samo ako $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$ za svako $x \in X$.

Definicija 1.2.2 [1] Fazi skupovi $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ su jednaki, u oznaci $\tilde{A} = \tilde{B}$, ako i samo ako $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$ za svako $x \in X$.

Definicija 1.2.3 [1] Za dati fazi skup $\tilde{A}$ sa funkcijom pripadnosti $\mu_{\tilde{A}}(x)$, funkcija pripadnosti $\mu_{\tilde{A}^c}(x)$ za komplement $\tilde{A}^c$ skupa $\tilde{A}$ se definiše kao $\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$ za svako $x \in X$.

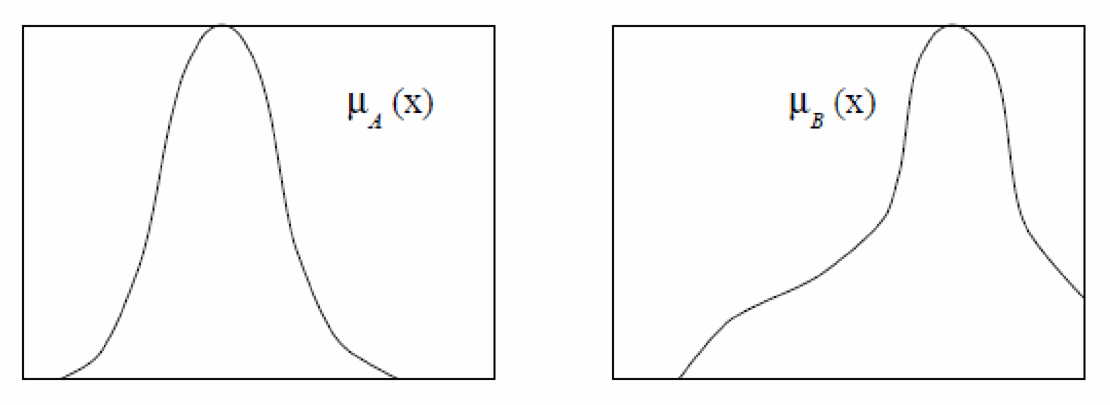


(a) (b)

Slika 7. *Funkcija pripadnosti fazi skupa* (a) *i njegovog komplementa* (b)

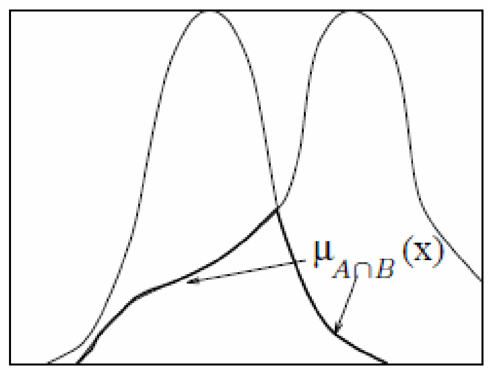
Na slici 7. (b) je prikazano kako izgleda komplement fazi skupa datog na slici 7. (a) (videti [1]).

Definicija 1.2.4 [1] Za date fazi skupove $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$, čije su funkcije pripadnosti $\mu_{\tilde{A}}(x)$ i $\mu_{\tilde{B}}(x)$, funkcija pripadnosti $\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)$ za presek $\tilde{A}\cap\tilde{B}$ se definiše kao $\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)=\min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\}$ za svako $x\in X$.



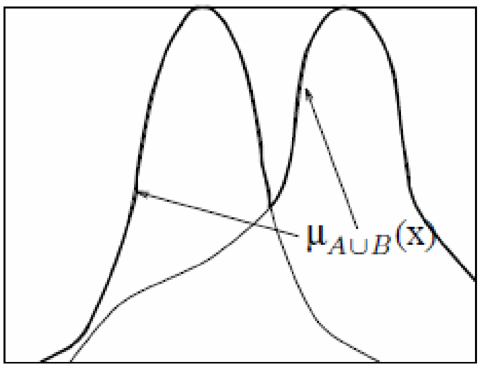
Slika 8. *Funkcije pripadnosti fazi skupova* $\tilde{A}$ *i* $\tilde{B}$

Na slici 8. ([1]) su date funkcije pripadnosti dva fazi skupa $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$, a presek ta dva fazi skupa je prikazan na sledećoj slici ([1]).



Slika 9. *Funkcija pripadnosti preseka* $\tilde{A}\cap\tilde{B}$ *fazi skupova* $\tilde{A}$ *i* $\tilde{B}$

Definicija 1.2.5 [1] Za date fazi skupove $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$, čije su funkcije pripadnosti $\mu_{\tilde{A}}(x)$ i $\mu_{\tilde{B}}(x)$, funkcija pripadnosti $\mu_{\widetilde{A\cup B}}(x)$ za uniju $\tilde{A}\cup\tilde{B}$ se definiše kao $\mu_{\widetilde{A\cup B}}(x)=\max\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\}$ za svako $x\in X$.



Slika 10. *Funkcija pripadnosti unije* $\tilde{A}\cup\tilde{B}$ *fazi skupova* $\tilde{A}$ *i* $\tilde{B}$

Na slici 10. ([1]) je data unija fazi skupova čije su funkcije pripadnosti prikazane na slici 8.

Lako se može pokazati da za gore navedene operacije nad fazi skupovima važe osobine involucije, komutativnosti, asocijativnosti, distributivnosti, idenpotentnosti, identiteta, specijalne apsorpcije, De Morganovi zakoni ([1,11]).

Napomena 1.2.1 Prethodno predstavljene operacije preseka i unije predstavljauju specijalan slučaj preseka i unije baziranih na trougaonim normama i trougaonim konormama, o kojima će biti više reči nešto kasnije ([14, 20]).

Napomena 1.2.2 Sve prethodno navedene pojmove je moguće analogno definisati i za fazi relacije:

- Inkluzija dve *n*-arne fazi relacije $\tilde{R}$ i $\tilde{S}$, $\tilde{R},\tilde{S} \subseteq X_1 \times ... \times X_n$:

  $\tilde{R} \subseteq \tilde{S}$ ako i samo ako $\mu_{\tilde{R}}(x_1,...,x_n) \le \mu_{\tilde{S}}(x_1,...,x_n)$ za svako $(x_1,...,x_n) \in X_1 \times ... \times X_n$.

- Dve *n*-arne fazi relacije $\tilde{R}$ i $\tilde{S}$, $\tilde{R},\tilde{S} \subseteq X_1 \times ... \times X_n$ su jednake ako i samo ako $\mu_{\tilde{R}}(x_1,...,x_n) = \mu_{\tilde{S}}(x_1,...,x_n)$ za svako $(x_1,...,x_n) \in X_1 \times ... \times X_n$.

- Komplement $\tilde{R}^c$ *n* - arne fazi relacije $\tilde{R}$ se definiše kao $\mu_{\tilde{R}^c}(x_1,...,x_n) = 1 - \mu_{\tilde{R}}(x_1,...,x_n)$ za svako $(x_1,...,x_n) \in X_1 \times ... \times X_n$.

- Presek $\tilde{R} \cap \tilde{S}$ dve *n*-arne fazi relacije $\tilde{R}$ i $\tilde{S}$ se definiše kao $\mu_{\tilde{R} \cap \tilde{S}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{R}}(x), \mu_{\tilde{S}}(x)\}$ za svako $(x_1,...,x_n) \in X_1 \times ... \times X_n$.

- Unija $\tilde{R} \cup \tilde{S}$ dve *n*-arne fazi relacije $\tilde{R}$ i $\tilde{S}$ se definiše kao $\mu_{\tilde{R} \cup \tilde{S}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{R}}(x), \mu_{\tilde{S}}(x)\}$ za svako $(x_1,...,x_n) \in X_1 \times ... \times X_n$.

Operacija kompozicije ne spada u kategoriju domen - kompatibilnih i ovde će, radi jednostavnosti, biti definisana samo za binarne relacije.

Definicija 1.2.6 [1] Za date dve binarne relacije $\tilde{R} \subseteq X_1 \times X_2$ i $\tilde{S} \subseteq X_2 \times X_3$ čije su funkcije pripadnosti $\mu_R(x_1,x_2)$ i $\mu_S(x_2,x_3)$, funkcija pripadnosti $\mu_{R \circ S}(x_1,x_3)$ kompozicije $\tilde{R} \circ \tilde{S}$ se definiše na sledeći način:

$$\mu_{R \circ S}(x_1,x_3) = \sup_{x \in X_2} \min(\mu_R(x_1,x_2), \mu_S(x_2,x_3)) \quad \forall (x_1,x_3) \in X_1 \times X_3 .$$

U slučaju da su $\tilde{R}$ i $\tilde{S}$ relacije sa konačnim nosačem, umesto supremuma će stajati maksimum.

Primer 1.2.1 Posmatrajmo dve binarne relacije $\tilde{R} \subseteq X_1 \times X_2$ i $\tilde{S} \subseteq X_2 \times X_3$ čije su funkcije pripadnosti $\mu_R(x_1,x_2)$ i $\mu_S(x_2,x_3)$ date u tabelama 1. i 2.

x_1 \ x_2	a_2	b_2	c_2
a_1	0.1	0.5	0.9
b_1	0.2	0.6	1
	$\mu_R(x_1,x_2)$		

Tabela 1.

x_2 \ x_3	a_3	b_3
a_2	0.1	0.3
b_2	0.1	0.6
c_2	0.8	0.9
	$\mu_S(x_2,x_3)$	

Tabela 2.

Funkcija pripadnosti za kompoziciju relacija $\tilde{R}$ i $\tilde{S}$ je dobijena primenom formule date u definiciji *1.2.6* tj.

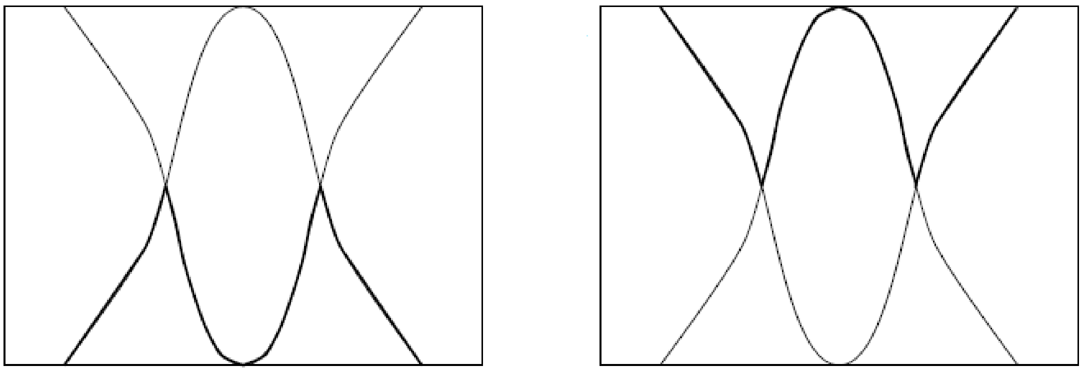
$$\begin{aligned}\mu_{R \circ S}(a_1,a_3) = \max[& \min\{\mu_R(a_1,a_2)\ ,\ \mu_S(a_2,a_3)\}\ , \\ & \min\{\mu_R(a_1,b_2)\ ,\ \mu_S(b_2,a_3)\}, \\ & \min\{\mu_R(a_1,c_2)\ ,\ \mu_S(c_2,a_3)\}\ ] \\ = \ & \max[0.1,0.1,0.8] \\ = \ & 0.8\end{aligned}$$

Na taj način se formira tabela 3.

x_1 \ x_3	a_3	b_3
a_1	0.8	0.9
b_1	0.8	0.9
	$\mu_{R \circ S}(x_1,x_3)$	

Tabela 3.

Za razliku od klasičnih skupova, gde elementi ili poseduju ili neposeduju određenu osobinu, kod fazi skupova elementi mogu delimično posedovati neku osobinu. Zbog toga treba naglasiti da kod fazi skupova ne mora da važi zakon isključenja trećeg, tj. za fazi skup $\tilde{A}$ ne mora da važi $\tilde{A}\cap\tilde{A}^{c}=\emptyset$, $\tilde{A}\cup\tilde{A}^{c}\neq X$, gde je X univerzalni skup, što je i prikazano na sledećoj slici.



$\tilde{A}\cap\tilde{A}^{c}=\emptyset$ $\tilde{A}\cup\tilde{A}^{c}\neq X$

Slika 11. *Zakon isključenja trećeg ne važi kod fazi skupova ([1])*

1.3 Trougaone norme

Trougaone norme i trougaone konorme (*eng. triangular norms and triangular conorms*) predstavljaju uopštenje operacija preseka i unije kod skupova, odnosno konjukcije i disjunkcije u logici. U matematičkoj literaturi prvi put su se javile 1942. u radu Mengera (*Karl Menger*). Kasnije su se mnogi naučnici bavili temom trougaonih normi i danas je u upotrebi definicija koju su uveli Švajcer i Skalar (*Berthold Schweizer, Abe Skalar*) ([22]).

Rezultati prezentovani u ovom poglavlju su iz [14,20], pri čemu su tvrđenja, radi jasnijeg uvida u tematiku trougaonih normi, navedena sa dokazom.

Definicija 1.3.1 [20] Funkcija $T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ je t- norma ako zadovoljava sledeće uslove:

T1: komutativnost $T(x,y)=T(y,x)$

T2 : asocijativnost $T[x,T(y,z)]=T[T(x,y),z]$

T3 : monotonost $y\le z \Rightarrow T(x,y)\le T(x,z)$

T4 : granični uslovi $T(x,1)=x$ i $T(x,0)=0$

Četiri elementarne t- norme su minimum T_M, algebarski proizvod T_P, Lukašijevičeva (*Lukasiewicz*) T_L i norma drastičnog preseka (*eng. drastic intersection*) T_D:

1. $T_M\,(x,y)=\min(x,y)$
2. $T_P\,(x,y)=x\cdot y$
3. $T_L\,(x,y)=\max(0,x+y-1)$
4. $T_D=\begin{cases} x, & y=1 \\ y, & x=1 \\ 0 & , inače \end{cases}$

Treba naglasiti da pored prethodno navedene četiri osnovne trougaone norme postoje još mnoge druge (videti [14,20]).

Definicija 1.3.2 [20] Trougaona norma T_1 je slabija od trougaone norme T_2, u oznaci $T_1 \le T_2$, ako je $T_1(x,y) \le T_2(x,y)$ za svako $(x,y) \in [0,1]^2$. Može se reći i obrnutno, tj. t-norma T_2 je jača od t- norme T_1.

Trougaone norme T_M i T_D su, redom, najjača i najslabija t - norma, što je pokazano narednim tvrđenjem.

Tvrđenje 1.3.1 [20] Za svaku t-normu T važi

$$\forall x, y \in [0,1] \quad T_D(x,y) \le T(x,y) \le T_M(x,y).$$

Dokaz. Neka $x, y \in [0,1]$ i neka je $T(x,y)$ proizvoljna t-norma. Koristeći činjenicu da je $y \le 1$ i osobine T2 i T1 dobijamo $T(x,y) \le T(x,1) = x \le x$. Ako se sada iskoristi činjenica da je i $x \le 1$ kao i osobine T3, T2 i T1, redom, dobija se $T(x,y) = T(y,x) \le T(y,1) = y \le y$.

Dakle, $T(x,y) \le x$ i $T(x,y) \le y$, a odatle sledi $T(x,y) \le \min(x,y)$.

Za $x = 1$ se dobija $T(x,y) = T(1,y) = y = T_D(x,y)$, a za $y = 1$ $T(x,y) = T(x,1) = x = T_D(x,y)$. Odatle sledi da je $T(x,y)$ baš jednako sa $T_D(x,y)$, te tada važi $T(x,y) \ge T_D(x,y)$.

S druge strane, ako je $x, y \in (0,1)$ dobija se $T(x,y) \ge 0 = T_D(x,y)$.

■

Takođe, za elementarne trougaone norme važi:

$$T_D \le T_L \le T_P \le T_M .$$

Koristeći osobinu asocijativnosti, proizvoljna trougaona norma T se može proširiti na n-arnu operaciju $T_{i=1}^{n} : [0,1]^n \to [0,1]$ na sledeći način

$$T_{i=1}^{n} x_i = T(T_{i=1}^{n-1} x_i , x_n) = T(x_1,...,x_n) .$$

Proširivanjem trougaonih normi T_M , T_P , T_L i T_D dobijaju se sledeće n- arne operacije:

1. $T_M (x_1,...,x_n) = \min (x_1,...,x_n)$
2. $T_P (x_1,...,x_n) = x_1 \cdot ... \cdot x_n$
3. $T_L (x_1,...,x_n) = \max (0, \sum_{i=1}^{n} x_i - (n-1))$
4. $T_D (x_1,...,x_n) = \begin{cases} x_i & , \text{ ako } x_j = 1 \ za \ j \neq i \\ 0 & , \ inače \end{cases}$

Trougaone konorme ili t- konorme predstavljaju uopštenje operacije unije. Kao i t- norme poseduju osobine komutativnosti, asocijativnosti i monotonosti, s tim da su granični uslovi nešto drugačiji.

Definicija 1.3.3 [20] t- konorma je preslikavanje $S:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ koje za $\forall x, y, z \in [0,1]$ zadovoljava sledeće:

S1: komutativnost $S(x, y) = S(y, x)$

S2 : asocijativnost $S[x, S(y, z)] = S[S(x, y), z]$

S3 : monotonost $y \le z \Rightarrow S(x, y) \le S(x, z)$

S4 : granični uslovi. $S(x,0) = x$ i $S(x,1) = 1$

Elementarne t- konorme su

1. $S_M (x, y) = \max(x, y)$
2. $S_P (x, y) = x + y - x \cdot y$

3. $S_L(x,y)=\min(1,x+y)$

4. $S_D=\begin{cases} x, & y=0 \\ y, & x=0 \\ 1 & , inače \end{cases}$

Postoji veoma jaka veza između trougaonih normi i trougaonih konormi koja je opisana narednim tvrđenjem.

Tvrđenje 1.3.2 [14] Funkcija $S:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ je t- konorma ako i samo ako postoji t- norma T takva da za svako $x,y\in[0,1]$ važi $S(x,y)=1-T(1-x,1-y)$.

Dokaz. $(\to)$ Neka je S t- konorma i neka je preslikavanje $T:[0,1]^2\to[0,1]$ definisano sa $T(x,y)=1-S(1-x,1-y)$. Treba pokazati da je ovako definisano preslikavanje t- norma, odnosno da zadovoljava uslove $(T1)-(T4)$. Krenimo redom:

(T1) $T(x,y)=1-S(1-x,1-y)\overset{\downarrow\text{ zbog (S1)}}{=}1-S(1-y,1-x)=T(y,x)$

(T2)
$$\begin{aligned} T(x,T(y,z)) &= 1-S(1-x,1-T(y,z))=1-S(1-x,1-1+S(1-y,1-z))= \\ &= 1-S(1-x,S(1-y,1-z)) \\ &\downarrow\text{zbog (S2)} \\ &= 1-S(S(1-x,1-y),1-z) \\ &= 1-S(1-1+S(1-x,1-y),1-z) \\ &= 1-S(1-T(x,y),1-z) \\ &= T(T(x,y),z) \end{aligned}$$

(T3) Neka je y ≤ z.

$$(*)\ 1-y\ge 1-z \overset{\downarrow\text{ zbog (S3)}}{\Rightarrow} S(1-x,1-y)\ge S(1-x,1-z)\Rightarrow 1-S(1-x,1-y)\le 1-S(1-x,1-z)$$

$$T(x,y)=1-S(1-x,1-y)\overset{\downarrow\text{ zbog (*)}}{\le}1-S(1-x,1-z)=T(x,z)$$

$(T4)$

$$T(x,1) = 1 - S(1-x, 1-1) \overset{\downarrow \text{zbog (S4)}}{=} 1 - S(1-x, 0) = 1 - (1-x) = x$$

$$T(x,0) = 1 - S(1-x, 1) \overset{\downarrow \text{zbog (S4)}}{=} 1 - 1 = 0$$

$(\leftarrow)$ Polazeći od činjenice da postoji t- norma T takva da za svako $x, y \in [0,1]$ važi $S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y)$, na sličan način se pokazuje da je ovako definisano preslikavanje S t- konorma. ■

Trougaona konorma S definisana u prethodnom tvrđenju se naziva *dualna* t-konorma za t- normu T i obrnuto. Očigledno, elementarne t- konorme su dualne odgovarajućim elementarnim t- normama. S obzirom da dualnost menja poredak, za elementarne trougaone konorme važi

$$S_M \le S_P \le S_L \le S_D .$$

Takođe, dualnost utiče i na jačinu t- konormi o čemu govori sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 1.3.3 [14] Za svaku t- konormu S važi

$$\forall x, y \in [0,1] \quad S_M(x,y) \le S(x,y) \le S_D(x,y) .$$

Dokaz. Analogno slučaju t-norme, ali zbog kompletnosti se ipak navodi.

Neka je $x, y \in [0,1]$ i $S(x,y)$ proizvoljna t- konorma. Koristeći činjenicu da je $y \ge 0$ i osobine S2 i S1 dobija se $S(x,y) \ge S(x,0) = x \ge x$.

Ako se sada iskoristi činjenica da je i $x \ge 0$ kao i osobine S3, S2 i S1, redom, dobija se $S(x,y) = S(y,x) \ge S(y,0) = y \ge y$.

Dakle, $S(x,y) \ge x$ i $S(x,y) \ge y$, a odatle sledi $S(x,y) \ge \max(x,y)$.

Za $x = 0, y \ne 0$ važi $S(x,y) = S(0,y) = y = S_D(x,y)$.

Za $x \ne 0, y = 0$ važi $S(x,y) = S(x,0) = x = S_D(x,y)$.

Za $x, y \in (0,1)$ važi $S(x,y) \le S(x,1) = S(1,x) \le S(1,1) = 1 = S_D(x,y)$

Odnosno, $S_D(x,y) \ge S(x,y)$. ■

1.3.1 Operacije sa fazi skupovima bazirane na t- normama i t- konormama

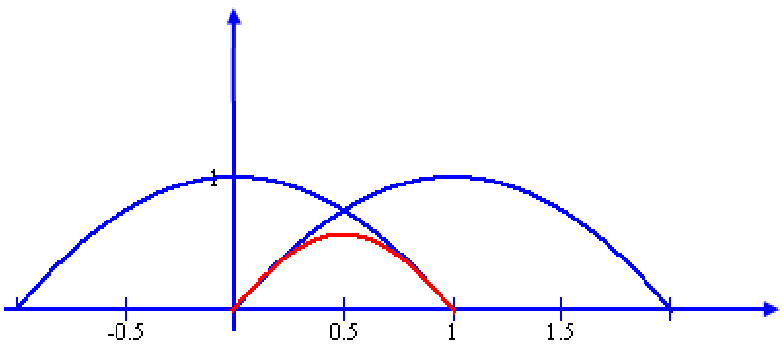
Kao što je već napomenutno t- norma predstavlja uopštenje operacije preseka, dok t- konorma predstavlja uopštenje operacije unije. Sada će biti formalno definisane operacije preseka i unije fazi skupova bazirane na trougaonim normama i trougaonim konormama.

Definicija 1.3.1.1 [14] Neka je T proizvoljna t- norma. T **- *presek*** $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ fazi skupova $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ se definiše kao $\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = T(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$, $\forall x \in X$.

Primer 1.3.1.1 Neka su dati fazi skupovi $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ čije su funkcije pripadnosti $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1 - x^2 |_{[-1,1]}$ i $\mu_{\tilde{B}}(x) = 1 - (1-x)^2 |_{[0,2]}$ redom i neka je data trougaona norma $T_P(x, y) = x \cdot y$. U tom, slučaju funkcija pripadnosti fazi preseka $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ je

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x) = (1 - x^2) \cdot (1 - (1-x)^2) .$$

Na sledećoj slici crvenom bojom je prikazan fazi presek skupova $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$.



Slika 12. *T-presek fazi skupova*

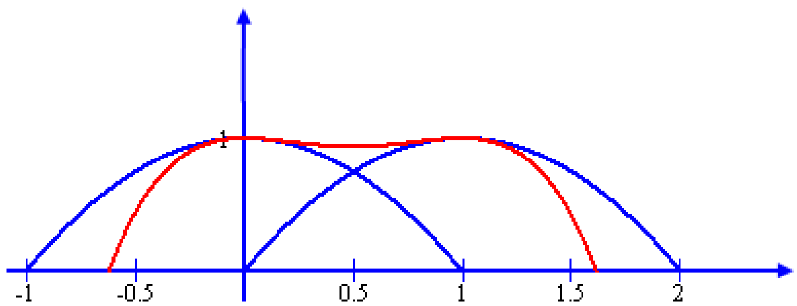
Definicija 1.3.1.2 [14] Neka je S proizvoljna t- konorma. S**- *unija*** $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ fazi skupova $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ se definiše kao $\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = S(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$, $\forall x \in X$.

Primer 1.3.1.2 Neka su dati fazi skupovi $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ kao u prethodnom primeru i neka je data trougaona konorma $S_P(x, y) = x + y - x \cdot y$. Tada je funkcija pripadnosti fazi unije data sa

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x) = 1 - x^2 + 1 - (1-x)^2 - (1-x^2) \cdot (1-(1-x)^2) =$$
$$= -x^4 + 2 \cdot x^3 - x^2 + 1$$

.

Na sledećoj slici crvenom bojom je prikazana fazi unija skupova $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$.



Slika 13. *S-unija fazi skupova*

2

Fazi brojevi

2.1 Osnovni pojmovi

S tačke gledišta primene najvažniji su oni fazi skupovi koji su definisani nad skupom realnih brojeva. U specijalnom slučaju takvi skupovi se nazivaju fazi brojevi. Postoji više načina za definisanje fazi broja, a u ovom radu se posmatraju fazi brojevi u skladu definicijom iz [11] . Više o ovoj temi se može naći u [1,3,7,8,9,11,12,13,19,20,21].

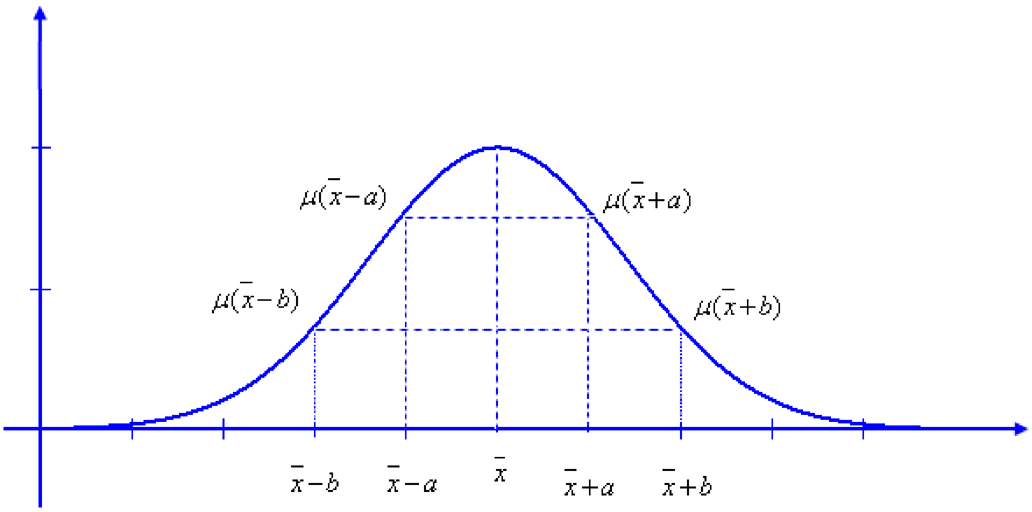
Definicija 2.1.1 [11] Fazi skup $\tilde{P} \in \tilde{P}(R)$ se naziva fazi broj $\tilde{p}$ ako zadovoljava sledeće uslove:

1. $\tilde{P}$ je normalizovan, tj. $hgt(\tilde{P}) = 1$
2. $\tilde{P}$ je konveksan
3. postoji tačno jedno $\bar{x} \in R$ takvo da $\mu_{\tilde{P}}(\bar{x}) = 1$ tj. $core(\tilde{P}) = 1$
4. funkcija pripadnosti $\mu_{\tilde{P}}(x), x \in R$ je, bar po delovima, neprekidna

Vrednosti $\bar{x} = core(\tilde{P})$, koja pokazuje maksimalni stepen pripadnosti, se naziva *modalna vrednost* fazi broja $\tilde{p}$.

Definicija 2.1.2 [11] Skup svih mogućih fazi brojeva $\tilde{p}$ se zove partitivni skup fazi brojeva, u oznaci $\tilde{P}'(R)$, ako $\tilde{P}'(R) \subset \tilde{P}(R)$.

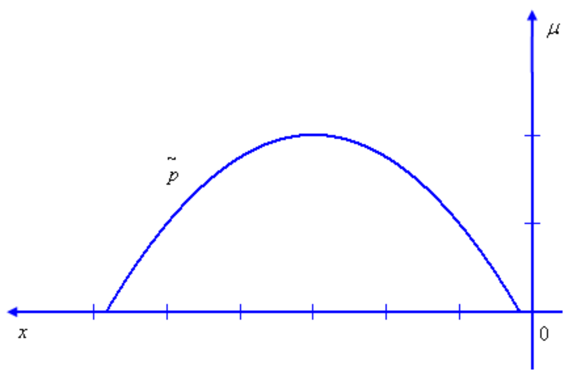
Definicija 2.1.3 [11] Fazi broj $\tilde{p} \in \tilde{P}'(R)$ je simetričan ako njegova funkcija pripadnosti $\mu_{\tilde{P}}(x)$ zadovoljava $\mu_{\tilde{P}}(\bar{x}+x) = \mu_{\tilde{P}}(\bar{x}-x)$, $\forall x \in R$.



Slika 14. *Funkcija pripadnosti simetričnog fazi broja*

Na slici 14. je dat primer funkcije pripadnosti simetričanog fazi broj.

Definicija 2.1.4 [11] Fazi broj $\tilde{p} \in \tilde{P}'(R)$ je strogo pozitivan, u oznaci $\tilde{p} > 0$, ako i samo ako $\mathrm{supp}(\tilde{\mathrm{p}}) \subseteq (0,\infty)$ ili strogo negativan , u oznaci $\tilde{p} < 0$, ako i samo ako $\mathrm{supp}(\tilde{\mathrm{p}}) \subseteq (-\infty,0)$.

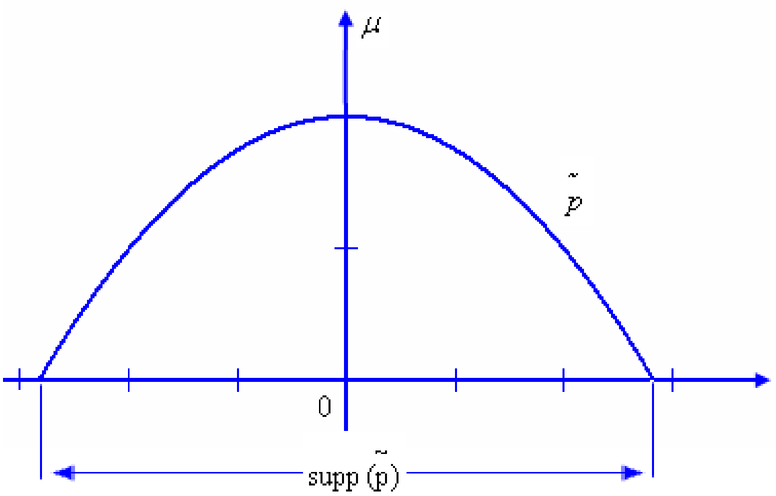


Slika 15. *Funkcija pripadnosti strogo negativnog fazi broja*

Fazi broj prikazan na slici 14. je ujedno i primer jednog strogo pozitivnog fazi broja, dok je na slici 15. prikazan jedan strogo negativan fazi broj.

Definicija 2.1.5 [11] Fazi broj $\tilde{p} \in \tilde{P}'(R)$ se zove fazi-nula broj, u oznaci $\operatorname{sgn}(\tilde{p}) = 0$, ako nije ni pozitivan ni negativan, tj. ako $0 \in \operatorname{supp}(\tilde{\mathrm{p}})$.

Na sledećoj slici je prikazan jedan fazi-nula broj.

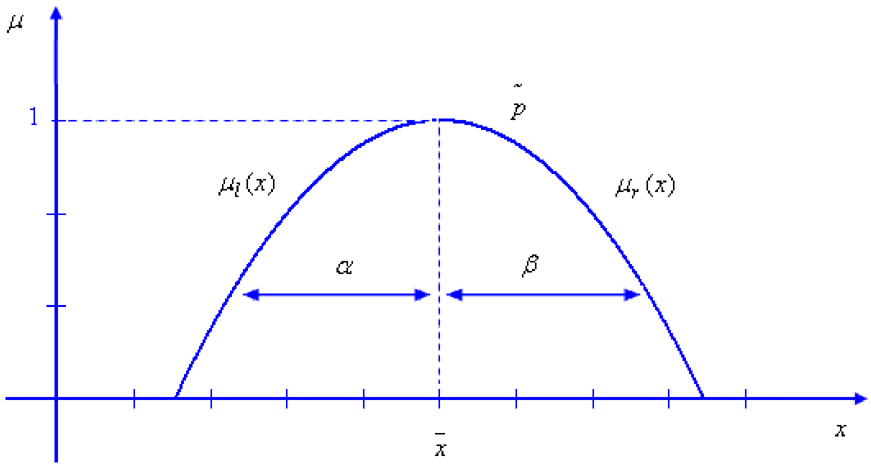


Slika 16. *Funkcija pripadnosti fazi-nula broja*

2.2 $L-R$ fazi brojevi

U ovom delu rada je data definicija $L-R$ fazi brojeva, koji predstavljaju jedan od osnovnih načina za reprezentaciju fazi brojeva. Pored toga dat je i pregled nekih specijalnih slučajeva $L-R$ fazi brojeva ([11,20]).

Funkcija pripadnosti fazi broja se može posmatrati iz dva dela, jednog koji se nalazi levo od modalne vrednosti i drugog koji se nalazi desno od modalne vrednosti.



Slika 17. *Funkcija pripadnosti* $L-R$ fazi broja

Na slici 17. je prikazan fazi broj $\tilde{p}$ čija je funkcija pripadnosti $\mu_{\underline{p}}(x)$. Podelom funkcije pripadnosti $\mu_{\underline{p}}(x)$ na deo levo i desno od modalne vrednosti $\bar{x}$ dobijamo funkcije $\mu_l(x)$ i $\mu_r(x)$, redom. Vrednosti α i β predstavljaju odstupanja u levu odnosno, desnu stranu od modalne vrednosti $\bar{x}$. Sada, funkcija pripadnosti $\mu_{\underline{p}}(x)$ fazi broja $\tilde{p}$ se može zapisati na sledeći način

$$\mu_{\underset{p}{\sim}}(x)=\begin{cases}\mu_l(x)=L(\frac{\bar{x}-x}{\alpha}) \ , \ x<\bar{x}\\ \\ \mu_r(x)=R(\frac{x-\bar{x}}{\beta}) \ , \ x\geq\bar{x}\end{cases}$$

gde su L i R takozvane referentne funkcije (eng. *reference functions*) odnosno funkcije oblika. Ove funkcije određuju oblik samog fazi broja i u zavisnosti od izbora tih funkcija razlikujemo trougaone, eksponencijalne,kvadratne... Ovakvi fazi brojevi se nazivaju $L-R$ fazi brojevi.

Treba naglasiti da funkcije oblika L i R ne mogu biti u potpunosti proizvoljne već moraju zadovoljavati određene osobine:

1. S obzirom da su pomoću njih definisane funkcije pripadnosti, čije se vrednosti nalaze u intervalu $[0,1]$ i vrednost funkcija L i R moraju pripadati tom intervalu. Kako je $\bar{x}$ modalna vrednost fazi broja $\tilde{p}$, onda $\bar{x}$ mora biti modalna vrednost levog i desnog fazi broja, tj. vrednosti funkcija pripadnosti μ_l i μ_r u tački $\bar{x}$ moraju, takođe, biti jednake jedinici

$$1=\mu_l(\bar{x})=L(\frac{\bar{x}-\bar{x}}{\alpha})=L(0)$$

$$1=\mu_r(\bar{x})=R(\frac{\bar{x}-\bar{x}}{\beta})=R(0)$$

2. Funkcija μ_l je rastuća u intervalu $[0,\infty)$, što znači da je funkcija L opadajuća na tom intervalu.

$$x_1>x_2 \ \Rightarrow \ \mu_l(x_1)>\mu_l(x_2) \ \Leftrightarrow \ L(\frac{\bar{x}-x_1}{\alpha})>L(\frac{\bar{x}-x_2}{\alpha}) \tag{2.2.1}$$

pri čemu je $x_1 < \bar{x}$ i $x_2 < \bar{x}$.

Neka je

$$u_1 = \frac{\bar{x} - x_1}{\alpha} \text{ i } u_2 = \frac{\bar{x} - x_2}{\alpha} \tag{2.2.2}$$

iz izraza (2.1) sledi $L(u_1) > L(u_2)$.

Iz (2.2) sledi

$$x_1 = \bar{x} - \alpha u_1 \text{ i } x_2 = \bar{x} - \alpha u_2 \tag{2.2.3}$$

Kako je $x_1 > x_2$ dobija se

$$\bar{x} - \alpha u_1 > \bar{x} - \alpha u_2 \Rightarrow u_1 < u_2 . \tag{2.2.4}$$

Dakle, za $u_1 < u_2$ važi $L(u_1) > L(u_2)$, što znači da je L opadajuća funkcija. Slično se može pokazati i da je funkcija R opadajuća na $[0,\infty)$, polazeći od činjenice da je funkcija μ_r opadajuća na tom intervalu.

3. Ukoliko je $\min\limits_u L(u) = 0$, tada je $L(1) = 0$, jer:

$\min\limits_u L(u) = 0 \Leftrightarrow \min\limits_u \mu_l(u) = 0$, a funkcija μ_l ima minimum u tački $u^* = \bar{x} - \alpha$,

tj. $0 = \mu_l(u^*) = \mu_l(\bar{x} - \alpha) = L(\frac{\bar{x} - (\bar{x} - \alpha)}{\alpha}) = L(1)$.

4. Ako je pak $L(u) > 0$ za $\forall u$, onda je $\lim\limits_{u \to \infty} L(u) = 0$, jer je L je opadajuća funkcija na $[0,\infty)$.

Analogno se pokazuje i za funkciju R.

Dakle, imajući u vidu prethodnu diskusiju, da bi funkcije L i R bile funkcije oblika $L-R$ fazi broja, one moraju zadovoljavati sledeće uslove:

- $L(u), R(u) \in [0,1]$, $\forall u$
- $L(0) = R(0) = 1$
- $L(u)$ i $R(u)$ su opadajuće na $[0,\infty)$
- $L(1) = 0$ ako $\min_u L(u) = 0$, $\lim_{u\to\infty} L(u) = 0$ ako $L(u) > 0$ za $\forall u$
- $R(1) = 0$ ako $\min_u R(u) = 0$, $\lim_{u\to\infty} R(u) = 0$ ako $R(u) > 0$ za $\forall u$

Za zapis $L-R$ fazi broja $\tilde{p}$ se koristi oznaka $\tilde{p} = \left\langle \bar{x}, \alpha, \beta \right\rangle_{L,R}$, gde je $\bar{x}$ modalna vrednost, α i β odstupanja od modalne vrednosti.

Definicija 2.2.1 [11] $L-R$ fazi broj je semi-simetričan ako su funkcije L i R jednake, tj. $L(u) = R(u)$ za $\forall u \in R_0^+$. Ukoliko su i vrednosti α i β jednake, $L-R$ fazi broj se naziva simetričan.

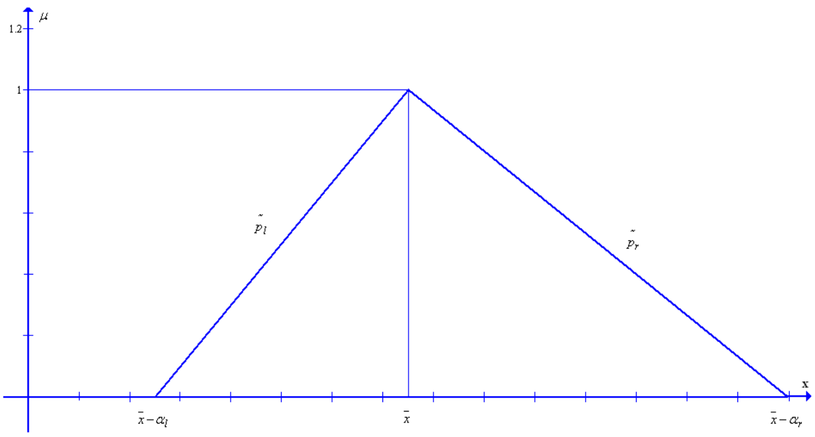
Sledi prikaz nekih osnovnih tipova $L-R$ fazi brojeva.

- **Trougaoni (linearni) fazi brojevi**

  Sa stanovišta primene trougaoni fazi brojevi su i najčešće korišćeni fazi brojevi. Koriste se u društvenim naukama, menadžmentu, finansijama... (videti [3,6,11,19]). Trougaoni fazi brojevi imaju linearnu funkciju pripadnosti, te se zato nazivaju i linearni. Njihova funkcija pripadnosti je definisana na sledeći način:

$$\mu(x)=\begin{cases}1+\dfrac{x-\bar{x}}{\alpha_l} & ,\ \bar{x}-\alpha_l<x<\bar{x}\\[2ex] 1-\dfrac{x-\bar{x}}{\alpha_r} & ,\ \bar{x}\le x<\bar{x}+\alpha_r\\ 0 & ,\ ina\check{c}e\end{cases}$$

Trougaoni fazi broj se označava $\tilde{p}=tfn(\bar{x},\alpha_l,\alpha_r)$ ili $\tilde{p}=(\bar{x}-\alpha_l,\bar{x},\bar{x}+\alpha_r)$, gde je $\bar{x}$ modalna vrednost fazi broja, a α_l i α_r predstavljaju odstupanje sa leve, odnosno desne strane od modalne vrednosti. Na slici 18. je prikazana funkcija pripadnosti trougaonog fazi broja.



Slika 18. *Trougaoni fazi broj*

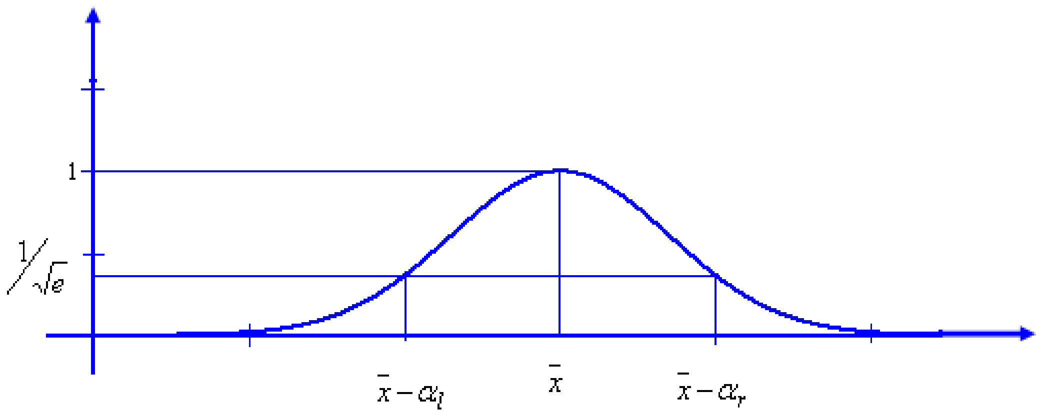
Interval $[\bar{x}-\alpha_l,\bar{x}+\alpha_r]$ se naziva nosač fazi broja. Često se, u praksi, tačka $\bar{x}$ nalazi na sredini tog intervala i tada se takav fazi broj naziva *simetričan*. Funkcija pripadnosti trougaonih fazi brojeva se sastoji iz dva linearna dela. Deo $\tilde{p}_l$ se naziva levi, a $\tilde{p}_r$ desni trougaoni fazi broj. Ovi brojevi se mogu zapisati na sledeći način $\tilde{p}_l=(\bar{x}-\alpha_l,\bar{x},\bar{x})$ i $\tilde{p}_r=(\bar{x},\bar{x},\bar{x}+\alpha_r)$. Levi trougaoni fazi broj je pogodan za reprezentovanje pojma sa značenjem veoma pozitivno, odnosno u praksi da označi pojmove poput veliki rizik, veliki profit i slično gde god je vrednost $\bar{x}$ velika.

- **Gausov fazi broj**

Funkcija pripadnosti ovog fazi broja je okarakterisana Gausovom funkcijom. Sa $\tilde{p} = gfn(\bar{x}, \alpha_l, \alpha_r)$ se označava Gausov fazi broj, a njegova funkcija pripadnosti je definisana na sledeći način:

$$\mu(x) = \begin{cases} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\alpha_l^2}} & , \quad x < \bar{x} \\ e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\alpha_r^2}} & , \quad x \geq \bar{x} \end{cases} \quad , \quad \forall x \in R$$

gde je $\bar{x}$ modalna vrednost fazi broja, a α_l, α_r odstupanja od te modalne vrednosti. Na slici 19. je prikazan Gausov fazi broj.



Slika 19. *Gausov fazi broj*

Iz praktičnih razloga se definiše i kvazi Gausov fazi broj, koji se dobija odsecanjem Gaus fazijevog broja za sve $x < \bar{x} - 3\alpha_l$ i $x > \bar{x} + 3\alpha_r$. Izvan tog intervala vrednost funkcije pripadnosti je manja od 0.01, pa se s toga i zanemaruje. Za prikaz kvazi Gausovog fazi broja se koristi oznaka $\tilde{p} = gfn^*(\bar{x}, \alpha_l, \alpha_r)$, a funkcija pripadnosti se definiše kao:

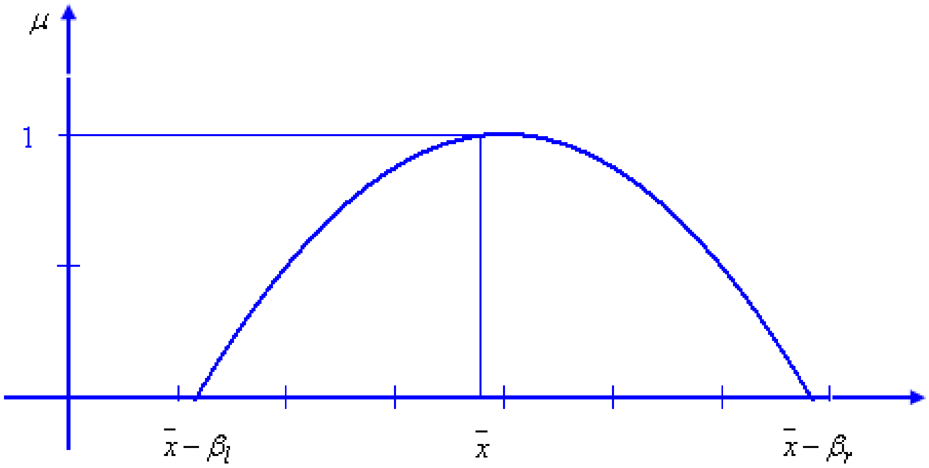
$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & , \; x \le \tilde{x} - 3\alpha_l \\ e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\alpha_l^2}} & , \; \bar{x} - 3\alpha_l < x < \bar{x} \\ e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\alpha_r^2}} & , \; \bar{x} < x < \bar{x} + 3\alpha_r \\ 0 & , \; x \ge \tilde{x} + 3\alpha_r \end{cases} \quad , \; \forall x \in R$$

- **Kvadratni fazi broj**

  Kvadratni fazi broj, u oznaci $\tilde{p} = qfn(\bar{x}, \beta_l, \beta_r)$, se definiše preko funkcije pripadnosti date sa

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & , \; x \le \bar{x} - \beta_l \\ 1 - \frac{(x - \bar{x})^2}{\beta_l^2} & , \; \bar{x} - \beta_l < x < \bar{x} \\ 1 - \frac{(x - \bar{x})^2}{\beta_r^2} & , \; \bar{x} \le x < \bar{x} + \beta_r \\ 0 & , \; x \ge \bar{x} + \beta_r \end{cases}$$

gde je $\bar{x}$ modalna vrednost fazi broja, a β_l, β_r odstupanja od modalne vrednosti. Na slici 20. je prikazan kvadratni fazi broj.



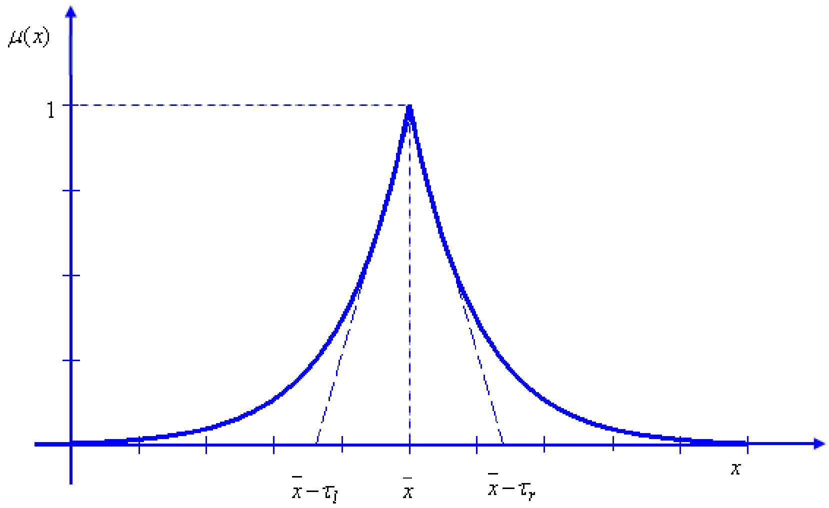
Slika 20. *Kvadratni fazi broj*

- **Eksponencijalni fazi broj**

Ovaj tip fazi broja, u oznaci $\tilde{p} = efn(\bar{x}, \tau_l, \tau_r)$, se definiše preko funkcije pripadnosti date sa

$$\mu(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x-\bar{x}}{\tau_l}} & , \ x < \bar{x} \\ e^{-\frac{x-\bar{x}}{\tau_r}} & , \ x \geq \bar{x} \end{cases} , \quad \forall x \in R$$

Kao i kod prethodno navedenih fazi brojeva sa $\bar{x}$ je označena modalna vrednost, a sa τ_l i τ_r odstupanja od modalne vrednosti u levu, odnosno desnu stranu, kao što je i dato na slici 21.



Slika 21. Eksponencijalni fazi broj

Slično, kao i kod Gausovog fazi broja ovde se definiše i eksponencijalni fazi broj sa konačnim nosačem, tzv. kvazi eksponencijalni fazi broj, koji se dobija odsecanjem eksponencijalnog fazi broja za $x > \bar{x} + 4.5\tau_r$ i $x < \bar{x} - 4.5\tau_l$. Odsecanje se radi zbog činjenice da je izvan ovog intervala vrednost funkcije pripadnosti manja od 0.01. Kvazi eksponencijalni fazi broj, u oznaci $\tilde{p} = efn^*(\bar{x}, \tau_l, \tau_r)$, je definisan funkcijom pripadnosti datom sa

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & , \; x \le \bar{x} - 4.5\tau_l \\ e^{-\frac{x-\bar{x}}{\tau_l}} & , \; \bar{x} - 4.5\tau_l < x \le \bar{x} \\ e^{-\frac{x-\bar{x}}{\tau_r}} & , \; \bar{x} \le x < \bar{x} - 4.5\tau_r \\ 0 & , \; x \ge \bar{x} - 4.5\tau_r \end{cases} \quad , \; \forall x \in R$$

2.2.1 Fazi interval

Ako neki fazi skup $\tilde{P} \in \tilde{P}(R)$ ne zadovoljava neki od četiri uslova iz definicije fazi broja, on se ne može smatrati fazi brojem. Ukoliko je pak narušen treći uslov, odnosno ako postoji više od jedne modalne vrednosti, tj. $core(\tilde{P}) = [l, r],\ l < r$, onda se takvi fazi skupovi nazivaju *fazi intervali* ([11], [20]).

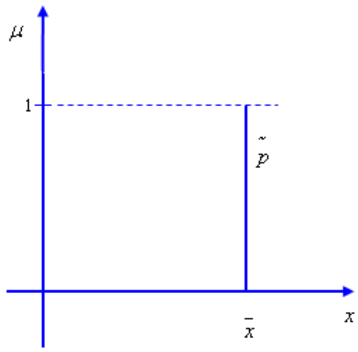
Definicija 2.2.1.1 [20] Neka su L i R referentne funkcije. Fazi $L-R$ interval, u oznaci $\tilde{A} = < l, r, \alpha, \beta >_{L,R}$, se definiše preko funkcije pripadnosti date sa

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & , x \le l - \alpha \\ L(\frac{l-x}{\alpha}) & , l - \alpha \le x \le l \\ 1 & , l \le x \le r \\ R(\frac{x-r}{\beta}) & , r \le x \le r + \beta \\ 0 & , x \ge r + \beta \end{cases}$$

S obzirom da su fazi skupovi uopštenje klasičnih skupova na isti način se i klasični brojevi mogu predstaviti kao fazi brojevi. Neka je $\bar{x}$ „običan“ broj, tada se on može zapisati kao fazi broj $\tilde{p} \in \tilde{P}'(R)$ preko funkcije pripadnosti definisane na sledeći način

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 \ , \ x < \bar{x}, \\ 1 \ , \ x = \bar{x}, \\ 0 \ , \ x > \bar{x}, \end{cases}$$

za svako realno x. Kada se broj u klasičnom smislu posmatra kao fazi broj, tada u stvari fazi broj predstavlja jednočlan fazi skup kao na slici 22.



Slika 22. *Fazi singlton*

Takođe i klasičan interval se može smatrati specijalnim slučajem fazi intervala sa funkcijom pripadnosti oblika

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 \ , & x < l, \\ 1 \ , & x \in [l, r], \\ 0 \ , & x > r, \end{cases}$$

pri čemu x prolazi kroz ceo skup realnih brojeva.

2.2.2 Zadehov princip proširenja

Zadehov princip proširenja predstavlja osnovni koncept u teoriji fazi skupova, jer omogućava da se klasična matematička relacija proširi tako da postane primenljiva na fazi skupove ([11,20]). Formulacija principa proširenja je data na sledeći način:

Neka su $X_1, X_2, ..., X_n, Y$ skupovi u klasičnom smislu i neka je preslikavanje $f : X_1 \times ... \times X_n \to Y$ takvo da za svaku $n-$torku $(x_1, ..., x_n) \in X_1 \times ... \times X_n$ važi $f(x_1, ..., x_n) = y \in Y$. Neka su dalje $\tilde{A}1, \tilde{A}2, ..., \tilde{A}n$ fazi podskupovi od $X_1, X_2, ..., X_n$ redom.

Tada je $\tilde{B} = f(\tilde{A}1, ..., \tilde{A}n)$ fazi podskup od Y i njegova funkcija pripadnosti je definisana na sledeći način

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{y=f(x_1,...,x_n)} \min\{\mu_{\tilde{A}1}(x_1), ..., \mu_{\tilde{A}n}(x_n)\}, & \text{ako } \exists\, y = f(x_1, ..., x_n) \\ 0 & , \text{inače} \end{cases}$$

U suštini, princip proširenja tvrdi da je slika nekog fazi skupa opet fazi skup čija je funkcija pripadnosti definisana gore datom jednakošću.

Na sledećem primeru je prikazano kako izgleda princip proširenja u dvodimenzionalnom slučaju.

Primer 2.2.2.1

Neka su data dva fazi skupa $\tilde{A}1 = \{(-1, 0.5), (0, 0.1), (1, 0.9)\}$, $\tilde{A}2 = \{(-2, 0.4), (2, 1.0)\}$ i preslikavanje $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2$. Koristeći princip proširenja potrebno je pronaći skup $\tilde{B} = f(\tilde{A}1, \tilde{A}2)$.

Radi preglednijeg zapisa koristi se tabelarni prikaz. U prvoj koloni tabele se navode elementi prvog fazi skupa $x_{1i}^{<\mu_{A1}(x_1)>}$, a u prvom redu elementi drugog fazi skupa $x_{2j}^{<\mu_{A2}(x_2)>}$. U preseku $i-$te vrste i $j-$te kolone se nalazi elemenat $y_{i,j}$ koji se dobija primenom funkcije f na elemente $x_{1i}^{<\mu_{A1}(x_1)>}$ i $x_{2j}^{<\mu_{A2}(x_2)>}$, tj. $y_{i,j} = f(x_{1i}, x_{2j})$. Stepen pripadnosti za elemenat $y_{i,j}$ se dobija kao $\min\{\mu_{A1}(x_1), \mu_{A2}(x_2)\}$.

Nakon formiranja takve tabele, pravi se nova tabela gde se navode svi elementi $y_{i,j}$, sa svojim stepenima pripadnosti. S obzirom da za neke vrednosti $y_{i,j}$ postoji više različitih stepena pripadnosti, za konačan stepen pripadnosti se uzima supremum svih stepena pripadnosti. Na taj način se dobija traženi skup $\tilde{B} = f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$.

$x_{2j}^{<\mu_{A2}(x_2)>}$ $x_{1i}^{<\mu_{A1}(x_1)>}$	$-2^{<0.4>}$	$2^{<1.0>}$
$-1^{<0.5>}$	$-1^{<0.4>}$	$3^{<0.5>}$
$0^{<0.1>}$	$-2^{<0.1>}$	$2^{<0.1>}$
$1^{<0.9>}$	$-1^{<0.4>}$	$3^{<0.9>}$
	$y_{i,j}^{<\min\{\mu_{A1}(x_1),\mu_{A2}(x_2)\}>}$, $y_{i,j} = f(x_{1i}, x_{2j})$	

Tabela 4.

$y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2$	$\min\{\mu_{A1}(x_1), \mu_{A2}(x_2)\}$	sup $\min\{\mu_{A1}(x_1), \mu_{A2}(x_2)\}$
-2	0.1	0.1
-1	0.4,0.4	0.4
2	0.1	0.1
3	0.5,0.9	0.9

Tabela 5.

Dakle, skup $\tilde{B} = \{(-2, 0.1), (-1, 0.4), (2, 0.1), (3, 0.9)\}$.

Koristeći princip proširenja mogu se definisati osnovne aritmetičke operacije nad fazi skupovima. Primera radi, ako se želi dobiti zbir dva fazi broja potrebno je definisati preslikavanje $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, a zatim primeniti princip proširenja. Na taj način se dobija fazi broj koji predstavlja zbir dva data fazi broja.

Primer 2.2.2.2 Neka su dati fazi brojevi $\tilde{A}1 = \{(-1, 0.0), (0, 1.0), (1, 0.0)\}$ i $\tilde{A}2 = \{(-2, 0.0), (-1, 1.0), (1, 0.0)\}$ i preslikavanje $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

Primenom principa proširenja dobija se

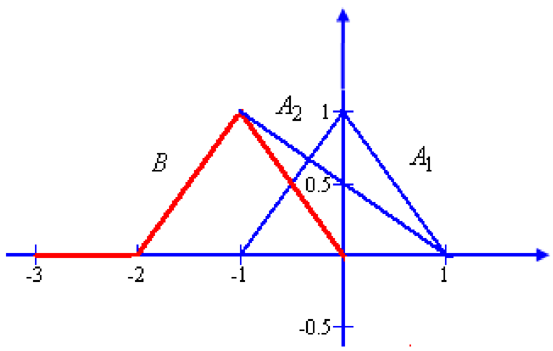
	$-2^{<0.0>}$	$-1^{<1.0>}$	$1^{<0.0>}$
$-1^{<0.0>}$	$-3^{<0.0>}$	$-2^{<0.0>}$	$0^{<0.0>}$
$0^{<1.0>}$	$-2^{<0.0>}$	$-1^{<1.0>}$	$0^{<0.0>}$
$1^{<0.0>}$	$-1^{<0.0>}$	$0^{<0.0>}$	$1^{<0.0>}$

Tabela 6.

$y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$	$\min\{\mu_{A1}(x_1), \mu_{A2}(x_2)\}$	sup $\min\{\mu_{A1}(x_1), \mu_{A2}(x_2)\}$
-3	0.0	0.0
-2	0.0,0.0	0.0
-1	0.0,1.0	1.0
0	0.0,0.0,0.0	0.0
1	0.0	0.0

Tabela 7.

zbir brojeva $\tilde{A}_1$ i $\tilde{A}_2$ i to je $\tilde{B} = \{(-3, 0.0), (-2, 0.0), (-1, 1.0), (0, 0.0), (1, 0.0)\}$.



Slika 23. *Zbir fazi brojeva*

Na sličan način se mogu definisati i ostale osnovne aritmetičke operacije . Ono što predstavlja problem prilikom ovakve, direktne, primene principa proširenja je to što postoji beskonačno mnogo različitih vrednosti x_1 i x_2, za koje se dobija ista vrednost $y = f(x_1, x_2)$. Svaka od tih kombinacija $x-$eva daje istu vrednost za y, ali sa različitim stepenima pripadnosti. Da bi se pronašao konačni stepen pripadnosti za elemenat y, potrebno je pronaći supremum svih prethodno dobijenih stepeni pripadnosti za y. S obzirom da takvih vrednosti ima beskonačno mnogo, razvijeno je nekoliko različitih pristupa ovom problemu (videti [11,20]).

Zadehov princip proširenja se može uopštiti korišćenjem t- normi na sledeći način ([8,9]):

Neka su $X_1, X_2, ..., X_n, Y$ skupovi u klasičnom smislu i neka je preslikavanje $f : X_1 \times ... \times X_n \to Y$ takvo da za svaku $n-$torku $(x_1,...,x_n) \in X_1 \times ... \times X_n$ važi $f(x_1,...,x_n) = y \in Y$. Neka su dalje $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, ..., \tilde{A}_n$ fazi podskupovi od $X_1, X_2, ..., X_n$ redom i T proizvoljna t- norma.

Tada je $\tilde{B} = f(\tilde{A}_1,...,\tilde{A}_n)$ fazi podskup od Y i njegova funkcija pripadnosti je definisana na sledeći način

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{y=f(x_1,...,x_n)} \{T(\mu_{\tilde{A}1}(x_1),...,\mu_{\tilde{A}n}(x_n))\}, & \text{ako } \exists\, y = f(x_1,...,x_n) \\ 0 & , \text{inače} \end{cases}$$

Ovaj prinicip se naziva $\sup - T$ princip proširenja.

Primetimo da, ukoliko za t- normu uzmemo normu T_M dobićemo baš Zadehov princip proširenja. Umesto ove trougaone norme može se uzeti bilo koja druga t- norma.

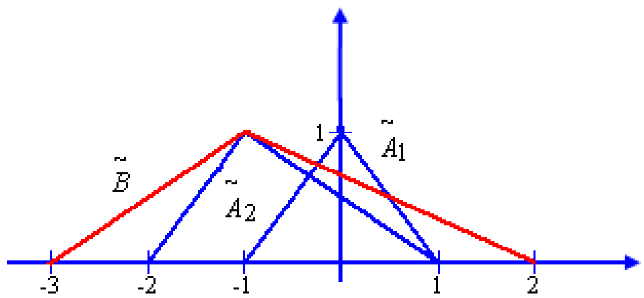
Uz pomoć t- normi će biti definisane operacije sabiranja $L-R$ fazi brojeva. Zbir fazi brojeva $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, ..., \tilde{A}_n$ se označava sa $\oplus_{\Diamond\, i=1}^{n} \tilde{A}_i$, gde je $\Diamond \in \{T_M, T_P, T_L, T_D, ...\}$. U slučaju da se koristi norma T_M nije potrebno posebno naglašavati o kojoj normi je reč. U ovom radu se nećemo upuštati u dublju analizu datih formula, ali više o tome se može pronaći u [9,12,16].

Ukoliko se posmatra najjača trougaona norma, tj. T_M, onda se fazi brojevi sabiraju prema pravilu koje daje sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 2.2.2.1 [8] Neka su dati $L-R$ fazi brojevi $\tilde{A}_i = <\bar{x}_i, \alpha_i, \beta_i>_{L,R}$, $i = 1,...,n$. Suma tih brojeva, u oznaci $\oplus_{i=1}^{n} \tilde{A}_i$, je novi fazi broj dat sa

$$\oplus_{i=1}^{n} \tilde{A}_i = <\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \sum_{i=1}^{n} \beta_i>_{L,R}.$$

Primer 2.2.2.3 Neka su dati fazi brojevi $\tilde{A}_1 = <0,1,1>_{L,R}$ i $\tilde{A}_2 = <-1,1,2>_{L,R}$. Njihov zbir, $\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2$, je fazi broj $\tilde{B} = <-1,2,3>_{L,R}$ i prikazan je crvenom bojom na sledećoj slici.



Slika 24. *Zbir fazi brojeva preko T_M norme*

Ako se sada uzme norma T_D, sabiranje se vrši u skladu sa sledećim tvrđenjem.

Tvrđenje 2.2.2.2 [8] Neka su dati $L-R$ fazi brojevi $\tilde{A}_i = <\bar{x}_i, \alpha_i, \beta_i>_{L,R}$, $i = 1,...,n$. T_D - suma tih brojeva, u oznaci $\underset{T_D}{\oplus}{}_{i=1}^{n} \tilde{A}_i$, je novi fazi broj dat sa

$$\underset{T_D}{\oplus}{}_{i=1}^{n} \tilde{A}_i = <\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i, \max_{i=1}^{n} \alpha_i, \max_{i=1}^{n} \beta_i>_{L,R}.$$

Primer 2.2.2.4 Neka su dati fazi brojevi kao u prethodnom primeru. Koristeći formulu iz prethodne definicije dobija se fazi broj $\tilde{B} = < -1, 1, 2 >_{L,R}$ i u ovom slučaju se poklapa sa brojem $\tilde{A}_2$.

Množenje $L-R$ fazi broja skalarom je dato sledećom definicijom.

Definicija 2.2.2.1 [1] Neka je dat $L-R$ fazi broj $\tilde{A} = < \bar{x}, \alpha, \beta >_{L,R}$ i broj $r \in R$. Fazi broj $\tilde{A}$ pomnožen skalarom r je novi fazi broj oblika

$$\tilde{A} \cdot r = r \cdot \tilde{A} = < r \cdot \bar{x}, r \cdot \alpha, r \cdot \beta >_{L,R}.$$

Treba primetiti da rezultujući fazi brojevi dobijeni primenom prethodna dva tvrđenja i definicije zadržavaju oblik polaznih fazi brojeva, tj. funkcije oblika L i R ostaju nepromenjene.

2.3 Diskretan fazi broj

Diskretizacija fazi broja predstavlja još jedan način da se prevaziđe problem traženja supremuma beskonačno mnogo vrednosti. Osnovna ideja ovog koncepta je upravo primena principa proširenja, ali na konačnom, odnosno, diskretizovanom fazi skupu. Takav skup ima konačan broj vrednosti, te je samim tim potrebno pronaći supremum konačnog broja elemenata. Sledi opis postupka diskretizacije (videti [11]).

Diskretizacija se vrši tako što se izvrši ekvidistantna podela $\mu-$ose ne tačke μ_j. Neka je izvršena podela na m intervala dužine $\Delta\mu = \frac{1}{m}$, gde se m naziva diskretizacioni broj. Diskretizacione tačke $\mu_j = \frac{j}{m}$, $j = 0,1,...,m-1$ imaju sledeće osobine:

$$\mu_0 = 0 \ , \ \mu_m = 1$$

$$\mu_{j+1} = \mu_j + \Delta\mu \ , \ j = 0,1,....,m-1$$

Tada se fazi broj $\tilde{p}$ može predstaviti kao diskretizovan fazi skup dat sa

$$\tilde{P}^* = \{(a^{(0)}, \mu_0),...,(a^{(m)}, \mu_m),(b^{(m-1)}, \mu_{m-1}),...(b^{(0)}, \mu_0)\}$$

gde $a^{(j)}, b^{(j)}$, $j = 0,1,...,m$ zadovoljavaju sledeće jednakosti:

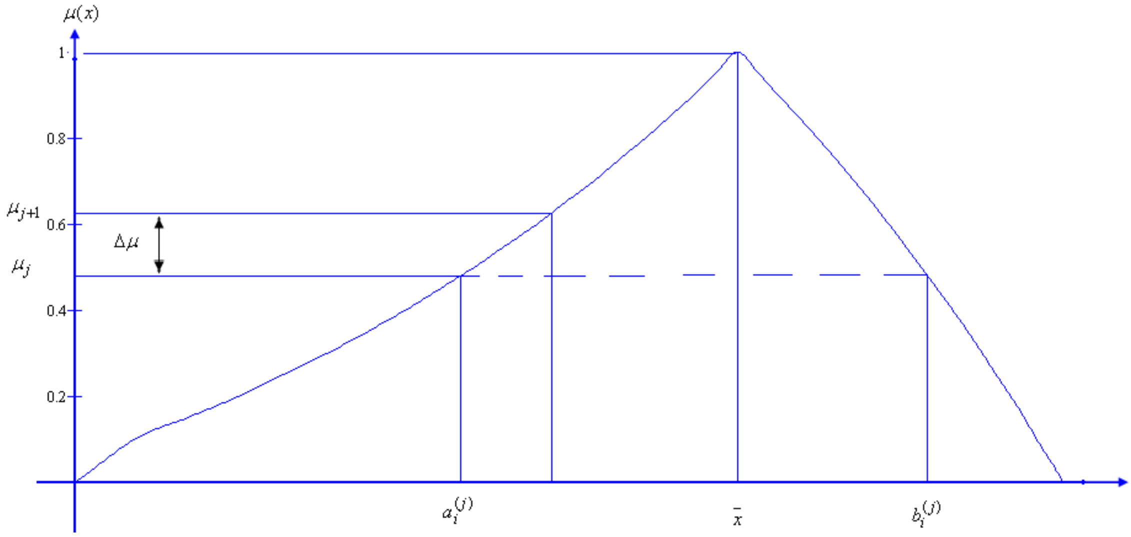
$$\mu_{\tilde{p}}(a^{(j)}) = \mu_j \text{ i } \frac{d\mu_{\tilde{p}}(x)}{dx}|_{x=a^{(j)}} > 0 \ , \ j = 1,2,...,m-1$$

$$\mu_{\tilde{p}}(b^{(j)}) = \mu_j \text{ i } \frac{d\mu_{\tilde{p}}(x)}{dx}|_{x=b^{(j)}} < 0, \ j = 1,2,...,m-1$$

$a^{(0)} = \omega_l$, $b^{(0)} = \omega_r$ gde $(\omega_l, \omega_r) = \mathrm{supp}(\tilde{\mathrm{p}})$

$a^{(m)} = b^{(m)} = \bar{x} = \mathrm{core}(\tilde{p})$.

Na slici 25. je prikazan jedan diskretizovan fazi broj.



Slika 25. *Diskretan fazi broj*

Iako je moguće izvršiti i diskretizaciju $x-$ose, diskretizacija $\mu-$ose se preporučuje, jer se njome postiže da modalna vrednost, kao i granične vrednosti uvek budu uključene u diskretizovanu podelu. Takođe, uvek je moguće izvršiti ekvidistantnu podelu , jer je opseg vrednosti funkcije $\mu(x)$ uvek jednak intervalu $[0,1]$. Dodatan razlog je i to što je diskretizacioni interval $\Delta\mu$ invarijantan u odnosu na aritmetičke operacije.

2.3.1 Operacije nad diskretizovanim fazi brojevima

Neka su data dva fazi broja $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$. Potrebno je odrediti fazi broj $\tilde{q}$ koji se dobija primenom neke od osnovnih aritmetičkih operacija na brojeve $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$. Prvo je potrebno diskretizovati brojeve $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$ - na taj način se dobijaju dva diskretna fazi skupa $\tilde{P}_1^*$ i $\tilde{P}_2^*$. Kao što je već rečeno, osnovna ideja ovog koncepta je korišćenje principa proširenja. Nakon njegove primene dobija se diskretan fazi skup $\tilde{Q}'$. Dobijeni skup $\tilde{Q}'$ često ne odgovara strukturi diskretizovanog fazi skupa, jer može sadržati više od $2m+1$ elemenata, gde je m diskretizacioni broj. Takođe, često skup $\tilde{Q}'$ ne poseduje sve potrebne osobine kojima bi se mogao okarakterisati i kao fazi broj. Upravo zbog toga je potrebno izbaciti pojedine elemente iz skupa $\tilde{Q}'$. Nakon uklanjanja tih elemenata dobija se fazi skup $\tilde{Q}^*$ koji ima tačno $2m+1$ elemenata, koji je ujedno i fazi broj. Uklanjanje elemenata nije proizvoljno, taj proces je definisan sledećim algoritmom iz [11].

Algoritam 2.3.1.1 [11] Neka su dati fazi brojevi $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$. Traži se broj $\tilde{q} = \tilde{p}_1 * \tilde{p}_2$ gde $* \in \{+, -, \cdot, /\}$.

Korak 1 Izračunati diskretizovane fazi brojeve

$$\tilde{P}_i^* = \{(a_i^{(0)}, \mu_0), \ldots, (a_i^{(m)}, \mu_m), (b_i^{(m-1)}, \mu_{m-1}), \ldots (b_i^{(0)}, \mu_0)\}\ ,\ i = 1,2$$

Korak 2 Primenom principa proširenja konstruisati skup

$$\tilde{Q}' = \{(y, \mu_{\tilde{Q}'}(y)) \mid y = \tilde{p}_1 * \tilde{p}_2\}$$

gde je

$$\mu_{\tilde{Q}'}(y) = \sup_{y = \tilde{p}_1 * \tilde{p}_2} \min\{\mu_{\tilde{p}_1}(x_1), \mu_{\tilde{p}_2}(x_2)\},\ x_1 \in \operatorname{supp}(\tilde{P}_1^*)\ ,\ x_2 \in \operatorname{supp}(\tilde{P}_2^*)$$

Korak 3 Određivanje skupa $\tilde{Q}^*$ koji reprezentuje fazi broj $\tilde{q}$, tako što se iz skupa $\tilde{Q}'$ bira $2m+1$ stabilnih elemenata $(y, \mu(y))$.

Definicija 2.3.1.1 [11] Vrednost $y = \tilde{p}_1 * \tilde{p}_2$, $x_1 \in \operatorname{supp}(\tilde{P}_1^*)$, $x_2 \in \operatorname{supp}(\tilde{P}_2^*)$ je stabilna ako je dobijena kombinacijom elemenata $(x_1, \mu_{\tilde{P}_1^*}(x_1)), (x_2, \mu_{\tilde{P}_2^*}(x_2))$ koji zadovoljavaju sledeće uslove:

1. Elementi $(x_1, \mu_{\tilde{P}_1^*}(x_1))$ i $(x_2, \mu_{\tilde{P}_2^*}(x_2))$ imaju isti stepen pripadnosti tj. $\mu = \mu_{\tilde{P}_1^*}(x_1) = \mu_{\tilde{P}_2^*}(x_2)$.

Ovaj uslov je ispunjen ako

$$x_1 = x_1^{(j)} \in \{a_1^{(j)}, b_1^{(j)}\}\ ,\ x_2 = \{a_2^{(j)}, b_2^{(j)}\}\ ,\ j = 0,1,...m$$

2. Elementi $(x_1^{(j)}, \mu_j), (x_2^{(j)}, \mu_j)$ se nalaze na kompatibilnim krivama, tj. oba se nalaze ili na krivi koja se nalazi levo ili na krivi koja se nalazi desno od modalne vrednosti.

U tabeli 8. je dat pregled uslova kompatibilnosti za osnovne aritmetičke operacije nad pozitivnim diskretizovanim fazi brojevima.

Operacija	Znak $x_1^{(j)}$, $x_2^{(j)}$	Uslov kompatibilnosti
+	bilo koji	zadovoljava
-	bilo koji	ne zadovoljava
•	isti	zadovoljava
	različiti	ne zadovoljava
/	isti	ne zadovoljava
	različiti	zadovoljava

Tabela 8.

Ukoliko je neki od brojeva fazi-nula broj, a vrši se operacija množenja ilI deljenja, uslovi kompatibilnosti se menjaju.

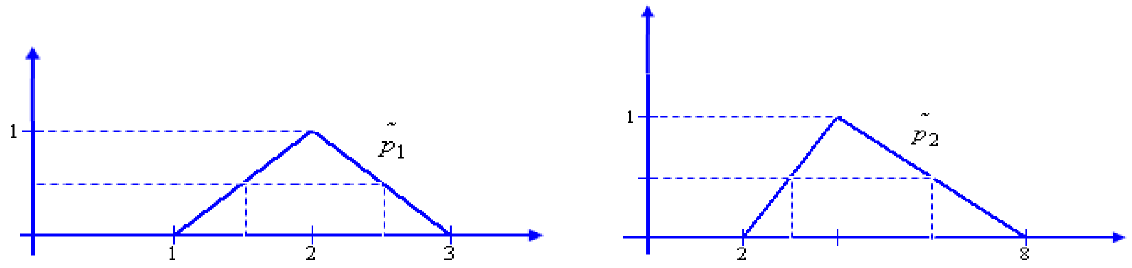
Sledeći primer ilustruje primenu operacije množenja na diskretizovanim fazi brojevima.

Primer 2.3.1.1 Dati su fazi brojevi $\tilde{p}_1 = tfn(2,1,1)$ i $\tilde{p}_2 = tfn(4,2,4)$. Sa korakom diskretizacije $\Delta\mu = 0.5$ dobijaju se diskretizovani fazi brojevi

$$\tilde{P}_1^* = \{(1, 0.0), (1.5, 0.5), (2, 1.0), (2.5, 0.5), (3, 0.0)\}$$

$$\tilde{P}_2^* = \{(2, 0.0), (3, 0.5), (4, 1.0), (6, 0.5), (8, 0.0)\}$$

i prikazani su na slici 26.



Slika 26. *Diskretni fazi brojevi* $\tilde{P}_1^*$ i $\tilde{P}_2^*$

Primenom principa proširenja se dobijaju sledeće tabele:

$x_2^{<\mu_{\tilde{P}_2^*}(x_2)>}$ / $x_1^{<\mu_{\tilde{P}_1^*}(x_1)>}$	$2^{<0>}$	$3^{<0.5>}$	$4^{<1.0>}$	$6^{<0.5>}$	$8^{<0>}$
$1^{<0>}$	$2^{<0>}$	$3^{<0>}$	$4^{<0>}$	$6^{<0>}$	$8^{<0>}$
$1.5^{<0.5>}$	$3^{<0>}$	$4.5^{<0.5>}$	$6^{<0.5>}$	$9^{<0.5>}$	$12^{<0>}$
$2^{<1.0>}$	$4^{<0>}$	$6^{<0.5>}$	$8^{<1.0>}$	$12^{<0.5>}$	$16^{<0>}$
$2.5^{<0.5>}$	$5^{<0>}$	$7.5^{<0.5>}$	$10^{<0.5>}$	$15^{<0.5>}$	$20^{<0>}$
$3^{<0>}$	$6^{<0>}$	$9^{<0>}$	$12^{<0>}$	$18^{<0>}$	$24^{<0>}$
	$y^{<\min\{\mu_{\tilde{P}_1^*}(x_1),\mu_{\tilde{P}_1^*}(x_1)\}>}$, $y = x_1 x_2$				

Tabela 9.

$y = x_1 x_2$	$< \min\{\mu_{\tilde{P}_1^*}(x_1), \mu_{\tilde{P}_1^*}(x_1)\} >$	max
2	0	0
3	0 0	0
4	0 0	0
4.5	0.5	0.5
5	0	0

6	0 0 0.5 0.5	0.5
7.5	0.5	0.5
8	1.0 0	1.0
9	0 0.5	0.5
10	0.5	0.5
12	0 0 0.5	0.5
15	0.5	0.5
16	0	0
18	0	0
20	0	0
24	0	0

Tabela 10.

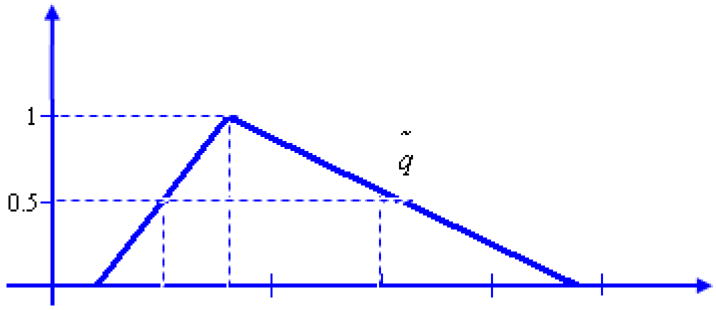
$$\tilde{Q}' = \{(2,0.0),(3,0.0),(4,0.0),(4.5,0.5),(5,0.0),(6,0.5),(7.5,0.5),(8,1.0),(9,0.5),(10,0.5),\\ (12,0.5),(15,0.5),(16,0.0),(18,0.0),(20,0.0),(24,0.0)\}$$

Sada je potrebno iz skupa $\tilde{Q}'$ izbaciti elemente koji nisu stabilni:

Elementi $(1,0.0)\in\tilde{P}_1^*$ i $(2,0.0)\in\tilde{P}_2^*$ zadovoljavaju oba uslova iz algoritma 2.3.1.1, pa čine validnu kombinaciju. Element $(2,0.0)\in\tilde{Q}'$ je dobijen preko ova dva i on pripada skupu $\tilde{Q}^*$.

Sledi provera da li element $(3,0.0)\in\tilde{Q}'$ pripada skupu $\tilde{Q}^*$. On je nastao kombinacijom elemenata $(1,0.0)\in\tilde{P}_1^*$ i $(3,0.5)\in\tilde{P}_2^*$. Ova dva elementa ne zadovoljavaju prvi uslov stabilnosti, pa ne čine validnu kombinaciju i element $(3,0.0)\in\tilde{Q}'$ ne pripada skupu $\tilde{Q}^*$.

Daljom proverom svakog elementa iz skupa $\tilde{Q}'$ se dobija skup $\tilde{Q}^* = \{(2,0.0),(4.5,0.5),(8,1.0),(15,0.5),(24,0.0)\}$ koji je prikazan na slici 27.



Slika 27. *Diskretan fazi broj* $\tilde{Q}^*$

2.4 Dekompozicija fazi brojeva

Osnovna ideja ovog koncepta je primena teoreme o razlaganju fazi skupova koja dozvoljava da se pređe na rad sa klasičnim skupovima. U osnovi ovog postupka je razlaganje fazi skupa na $\alpha -$preseke koji jesu klasični skupovi, te rekonstrukcija rezultujućeg fazi skupa. Sledi teorema o razlaganju iz [20] koja je, radi boljeg uvida u ceo postupak dekompozicije, data sa dokazom.

Teorema 2.4.1 [20] Neka je $\tilde{A}$ fazi skup definisan na univerzalnom skupu X. Tada se funkcija pripadnosti ovog fazi skupa može predstaviti pomoću $\alpha -$preseka u sledećem obliku

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \sup_{\alpha \in (0,1]} \alpha \cdot \mu_{cut_\alpha(\tilde{A})}(x),$$

gde je $\mu_{cut_\alpha(\tilde{A})}(x)$ karakteristčna funkcija skupa $cut_\alpha(\tilde{A}) = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$.

Dokaz Neka je $cut_\alpha(\tilde{A}) = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ $\alpha -$presek fazi skupa $\tilde{A}$, tada

$$\sup_{\alpha \in (0,1]} \alpha \cdot \mu_{cut_\alpha(\tilde{A})}(x) = \sup_{\alpha \in (0,1]} \alpha \cdot \begin{cases} 0 \ , \ x \notin cut_\alpha(\tilde{A}) \\ 1 \ , \ x \in cut_\alpha(\tilde{A}) \end{cases}$$

Ako $x \in cut_\alpha(\tilde{A})$, onda je $\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha > 0$, a ako $x \notin cut_\alpha(\tilde{A})$ onda je $\mu_{\tilde{A}}(x) < \alpha \leq 1$.

Uzimajući ovo u obzir dobija se

$$\sup_{\alpha\in(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),1]} \alpha\cdot 0 \vee \sup_{\alpha\in(0,\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)]} \alpha\cdot 1 = \sup_{\alpha\in(0,\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)]} \alpha = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x). \qquad \blacksquare$$

S obzirom da je fazi broj specijalan slučaj fazi skupa, teorema o razlaganju se može primeniti i na fazi brojeve, tj. $\mu_{\underset{\sim}{p_i}}(x) = \sup_{\alpha\in(0,1]} \alpha\cdot\mu_{cut_\varepsilon(\underset{\sim}{p_i})}(x)$.

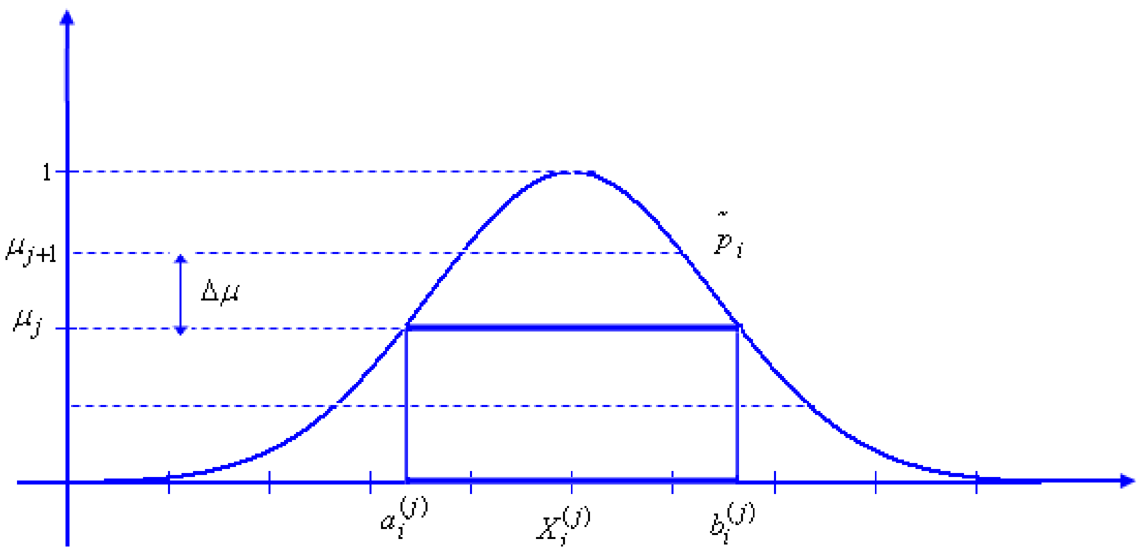
Da bi primena ove formule bila moguća, potrebno je svesti je na konačan broj $\alpha-$preseka koji su u ovom slučaju klasični intervali. To se postiže podelom intervala $[0,1]$ na m intervala dužine $\Delta\mu = \frac{1}{m}$. Broj m se naziva *dekompozicioni broj*. Tačke $\mu_j = \frac{j}{m}, j = 0,1,...,m$ koje se dobijaju ovom podelom imaju sledeće osobine:

$$\mu_0 = 0\ ,\ \mu_m = 1\ ,\ \mu_{j+1} = \mu_j + \Delta\mu\ ,\ j = 0,1,...,m-1.$$

Primenom teoreme o razlaganju, na sada konačnom broju $\alpha-$preseka, broj $\tilde{p}_i$ se može prikazati kao $P_i = \{X_i^{(0)},...,X_i^{(m)}\}$, gde je

$X_i^{(j)} = [a_i^{(j)}, b_i^{(j)}] = cut_{\mu_j}(\tilde{p}_i)$, $\qquad a_i^{(j)} \le b_i^{(j)}\ ,\ j = 1,2,...,m$ $\qquad$ i

$X_i^{(0)} = [a_i^{(0)}, b_i^{(0)}] = [\omega_{l_i}, \omega_{r_i}]$, $(\omega_{l_i}, \omega_{r_i}) \in \mathrm{supp}(\tilde{p}_i)$.



Slika 28. *Dekompozovan fazi broj*

Prvom intervalu $X_i^{(0)}$ odgovara najmanji stepen pripadnosti $\mu_0 = 0$, a poslednjem intervalu $X_i^{(m)}$ odgovara najveći stepen pripadnosti $\mu_m = 1$.

2.4.1 Operacije sa dekompozovanim fazi brojevima

Osnovne aritmetičke operacije $\{+, -, \bullet, /\}$ nad dekompozovanim fazi brojevima se vrše tako što se primenjuju na parovima intervala za svaki nivo pripadnosti. S obzirom da se operacije vrše nad intervalima, često se ovakav vid računanja naziva *intervalna aritmetika* ([11]).

Neka su dati fazi brojevi $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$ i neka su redom P_1 i P_2 njihove dekompozicije. Potrebno je izračunati broj $\tilde{q} = \tilde{p}_1 * \tilde{p}_2$ gde $* \in \{+, -, \cdot, /\}$. Odnosno traži se dekompozicija $Q = P_1 * P_2 = \{Z^{(0)}, ..., Z^{(m)}\}$ gde je $Z^{(j)} = [a^{(j)}, b^{(j)}] = [a_1^{(j)}, b_1^{(j)}] * [a_2^{(j)}, b_2^{(j)}] = X_1^{(j)} * X_2^{(j)}$, $j = 0,1,...,m$ broja $\tilde{q}$.

Za $* := +$ važi

$$[a_1^{(j)}, b_1^{(j)}] + [a_2^{(j)}, b_2^{(j)}] = [a_1^{(j)} + a_2^{(j)}, b_1^{(j)} + b_2^{(j)}].$$

Za $* := -$ važi

$$[a_1^{(j)}, b_1^{(j)}] - [a_2^{(j)}, b_2^{(j)}] = [a_1^{(j)} - a_2^{(j)}, b_1^{(j)} - b_2^{(j)}].$$

Za $* := \bullet$ važi

$$[a_1^{(j)}, b_1^{(j)}] \bullet [a_2^{(j)}, b_2^{(j)}] = [\min M^{(j)}, \max M^{(j)}],$$

pri čemi je $M^{(j)} = \{a_1^{(j)} a_2^{(j)}, a_1^{(j)} b_2^{(j)}, b_1^{(j)} a_2^{(j)}, b_1^{(j)} b_2^{(j)}\}$.

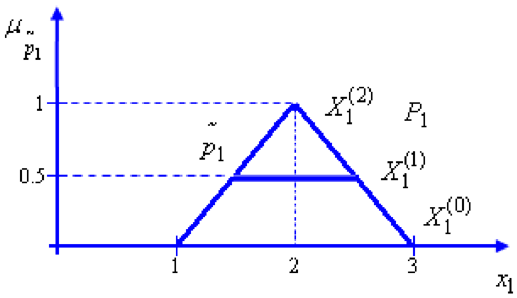
Za $* := /$ važi

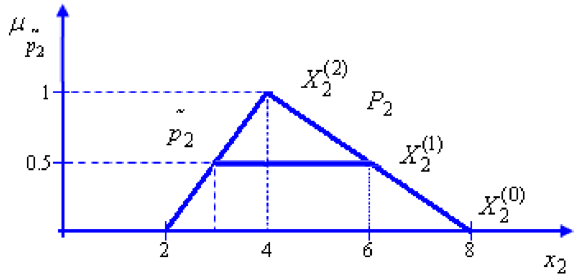
$$[a_1^{(j)}, b_1^{(j)}] / [a_2^{(j)}, b_2^{(j)}] = [\min D^{(j)}, \max D^{(j)}],$$

pri čemu je $D^{(j)} = \{a_1^{(j)} / a_2^{(j)}, a_1^{(j)} / b_2^{(j)}, b_1^{(j)} / a_2^{(j)}, b_1^{(j)} / b_2^{(j)}\}$, $0 \notin [a_2^{(j)}, b_2^{(j)}]$.

Sledeći primer ilustruje primenu množenja dva fazi broja primenom teoreme o razlaganju.

Primer 2.4.1.1 Data su dva fazi broja $\tilde{p}_1 = tfn(2,1,1)$ i $\tilde{p}_2 = tfn(4,2,4)$ prikazana na slici 29.





Slika 29. *Fazi brojevi* $\tilde{p}_1$ i $\tilde{p}_2$

Ukoliko se uzme da je korak dekompozicije $\Delta\mu = 0.5$ dobijaju se dekompozovani brojevi $P_1 = \{[1,3],[1.5,2.5],[2,2]\}$ i $P_2 = \{[2,8],[3,6],[4,4]\}$.

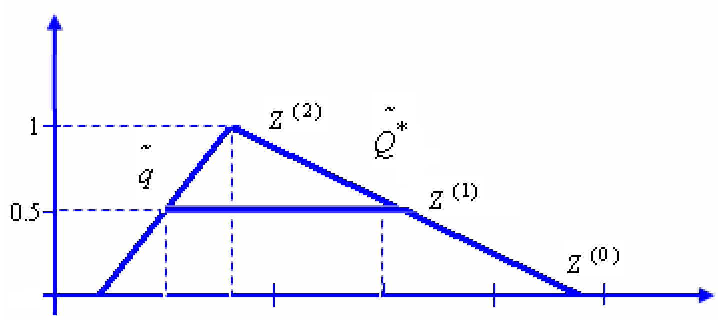
$Q = P_1 P_2 = \{Z^{(0)}, Z^{(1)}, Z^{(2)}\}$.

$$Z^{(0)} = X_1^{(0)} X_2^{(0)} = [1,3]\cdot[2,8] = [\min\{1\cdot 2, 1\cdot 8, 3\cdot 2, 3\cdot 8\}, \max\{1\cdot 2, 1\cdot 8, 3\cdot 2, 3\cdot 8\}] = [2,24]$$

$$Z^{(1)} = X_1^{(1)} X_2^{(1)} = [1.5, 2.5]\cdot[3,6] = [4.5,15]$$

$$Z^{(2)} = X_1^{(2)} X_2^{(2)} = [2,2]\cdot[4,4] = [8,8]$$

Dakle, dekompozicija traženog broja $\tilde{q} = \tilde{p}_1 \tilde{p}_2$ je $Q = \{[2,24],[4.5,15],[8,8]\}$ i prikazana je na slici 30.



Slika 30. *Dekompozovan broj* $\tilde{q} = \tilde{p}_1 \tilde{p}_2$

Prednost diskretnih i dekompozovanih fazi brojeva u odnosu na $L-R$ fazi brojeve pre svega se ogleda u mogućnosti njihove primene. Oba koncepta su podjednako dobra, ali se u praksi ipak češće koristi intervalna aritmetika, zbog lakše implementacije.

3

Fazi PERT

3.1 Osnove planiranja

U današnje vreme postalo je nezamislivo pokretati proces proizvodnje novog proizvoda, uvođenje nove tehnologije, izgradnju stambenih i drugih objekata, bez posedovanja unapred napravljenog plana. Planiranje je sastavni deo projektnog menadžmenta. To je disciplina bazirana na izradi projekta, radi postizanja određenih ciljeva. Ti ciljevi najčešće podrazumevaju vremensku i/ili novčanu uštedu ili uštedu resursa.

Projekat je jedinstveni proces koji se sastoji od skupa koordinisanih i kontrolisanih aktivnosti, sa određenim datumom početka i završetka, koje se preduzimaju da bi se ispunili postavljeni zahtevi, pri čemu postoje ograničenja na vreme, troškove i resurse ([15]). Razlaganjem projekta na pojedine parcijalne zadatke, operacije i zahvate dobijamo aktivnosti. Nakon razlaganja projekta na aktivnosti potrebno je odrediti logički redosled izvršavanja aktivnosti. Za realizaciju svake aktivnosti potrebno je utvrditi koliko je potrebno vremena i sredstava da bi se ona izvršila. No, ima aktivnosti koje ne traže ni sredstva ni vreme.i takve aktivnosti se nazivaju *fiktivne*.

Događaj predstavlja trenutak početka ili završetka jedne ili više aktivnosti. Događaj je stanje u kome nema aktivnosti, ali je istovremeno i cilj pojedinih aktivnosti i uslov da druge aktivnosti mogu da počnu. Događaj ne traži trošenje sredstava i vremena. Početni događaj projekta nema prethodnu aktivnost, a završni nema narednu aktivnost ([15]).

Kao što je rečeno, cilj planiranja je ušteda. Da bi se ta ušteda i postigla potrebno je odrediti vreme trajanja projekta, koje zavisi od vremena trajanja aktivnosti od kojih je sačinjen. Stoga, može se reći da je cilj planiranja procena vremena trajanja projekta. U tu svrhu razvijeno je nekoliko različitih metoda, a u ovom radu će biti obrađene fazi verzije metoda kritičnog puta (*eng. Critical Path Method - CPM*) i metoda ocene i revizije programa (*eng. Project Evaluation and Review Technique - PERT*).

Klasični CPM metod je stariji i potiče iz 1957. godine, kada je primenjen u području hemijske industrije. Ova metoda se primenjuje u slučajevima kada se vreme trajanja aktivnosti može precizno odrediti. Ovde se, za razliku od PERT metoda, operiše samo jednim vremenom.

PERT metod ima poseban značaj za planiranje istraživačkih radova ili radova gde se vreme trajanja aktivnosti ne može precizno odrediti, već ima karakter slučajnog - stohastičkog. Za svaku aktivnost stručnjacima se daje da izvrše procenu tri vremena za izvođenje iste – najverovatnijeg (vreme za izvođenje aktivnosti pod normalnim uslovima), pesimističnog (maksimalno potrebno vreme za izvršenje aktivnosti u krajnje nepovoljnim uslovima) i optimističnog (najkraći vremenski period za koji se aktivnost može ostvariti). Stručnjaci vrše procenu na osnovu svog znanja, iskustva i dostupnih informacija i ona je vrlo subjektivna. Klasični PERT metod se pre svega zasniva na pretpostavci da svaka aktivnost ima β - raspodelu i to je ujedno jedna od velikih mana ovog metoda. Takođe, jezičke termine poput "otprilike 15 dana" je nemoguće opisati koristeći klasičan metod.

Sa razvitkom fazi teorije, razvio se i fazi PERT metod, koji omogućava bolju procenu vremena trajanja projekta. U ovom poglavlju dat je pregled rezultata vezanih za fazi PERT metod iz [15,23].

3.2 Planiranje projekta

Planiranje projekta se izvodi u nekoliko faza. Prva je *analiza strukture* u kojoj je potrebno dati projekat razložiti na aktivnosti, koje zatim treba logički poređati po redosledu izvršavanja. Sledeća faza obuhvata *analizu vremena*. Tačnije, za svaku aktivnost se utvrđuje vreme potrebno za njeno izvršenje. Na taj način se dobija uvid u vreme trajanja celokupnog projekta. Vreme trajanja projekta zavisi od vremena trajanja takozvanih kritičnih aktivnosti i jednako je njihovom zbiru. *Kritična aktivnost* se definiše kao aktivnost koja mora otpočeti i završiti se u tačno predviđenom roku, jer bi u suprotnom njeno kašnjenje izazvalo kašnjenje celog projekta (videti [15]).

3.2.1 Analiza strukture

Kao što je rečeno, analiza strukture obuhvata sastavljanje liste neophodnih aktivnosti za realizaciju postavljenog cilja i istovremeno utvrđivanje njihovog logičnog redosleda. Da bi se sačinila lista aktivnosti mora se dobro poznavati problematika projekta, a često na tom poslu rade i konsultuju se grupe stručnjaka kako bi redosled aktivnosti bio što bliži optimalnom. Nakon sastavljanja liste aktivnosti sledi utvrđivanje međusobne zavisnosti pojedinih aktivnosti. Za utvrđivanje međusobne zavisnosti pojedinih aktivnosti koristi se tabela međusobnih odnosa. Na sledećem primeru je objašnjeno kako izgleda i kako se tumači tabela aktivnosti.

Primer 3.2.1.1

		POSMATRANA AKTIVNOST								
		A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*
PRETHODNA AKTIVNOST	*A*			+						
	B				+	+				
	C					+				
	D						+			
	E								+	
	F							+		
	G								+	
	H									+
	I									

Tabela 11. *Tabela međusobnih odnosa aktivnosti*

Iz date tabele se vidi da su aktivnosti A i B nezavisne i da im ne prethodi nikakva aktivnost. Aktivnost C može otpočeti tek nakon završetka aktivnosti A, odnosno da aktivnost A prethodi aktivnosti C. Aktivnost D zavisi od završtka aktivnosti B. Aktivnost E zavisi od završetka aktivnosti B i C itd.

Nakon utvrđivanja međusobnih zavisnosti aktivnosti sledi crtanje mrežnog dijagrama, radi bolje preglednosti događaja i aktivnosti od kojih je sačinjen projekat.

Skup događaja i aktivnosti projekta čini mrežu. Graf ili mreža se definiše pomoću skupa čvorova $V = \{1,2,..n\}$ i skupa grana $A = \{(i, j) \mid i, j \in V\}$.

Sledi pregled neophodnih definicija iz [24].

Definicija 3.2.1.1 Graf G se predstavlja uređenim parom (V, Γ),gde je V skup čvorova, a Γ preslikavanje skupa V na $P(V)$, gde je $P(V)$ partitivni skup skupa V.

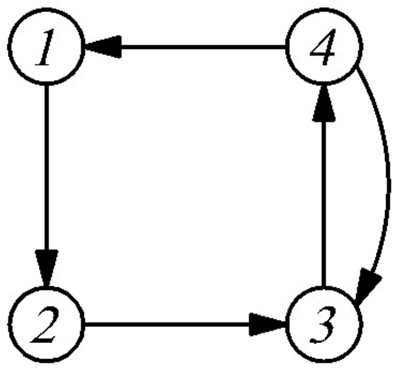
Definicija 3.2.1.2 Grana povezuje čvorove grafa i predstavlja moguć smer kretanja između čvorova. Ako mreža sadrži granu (j, k) kretanje je moguće od čvora j ka čvoru k. Za granu (j, k) čvor j se naziva početni, a čvor k se naziva krajnji.

Definicija 3.2.1.3 Skup grana takvih da svaka grana ima tačno jedan zajednički čvor sa prethodnom granom se naziva lanac.

Definicija 3.2.1.4 Put je lanac u kojem se krajnji čvor svake grane poklapa sa početnim čvorom naredne grane.

Primer 3.2.1.2 Na slici 33. $(1,2)$ - $(2,3)$ - $(4,3)$ predstavlja lanac, ali to nije put. $(1,2)$ - $(2,3)$ - $(3,4)$ je i lanac i put.

Put $(1,2)$ - $(2,3)$ - $(3,4)$ predstavlja način da se stigne od čvora 1 do čvora 4.



Slika 31. *Primer mreže*

Definicija 3.2.1.5 Skup čvorova koji prethode čvoru i, u oznaci $\Gamma^{-1} i$, je definisan na sledeći način

$$\Gamma^{-1} i = \{k \mid \exists (k,i) \in A\}.$$

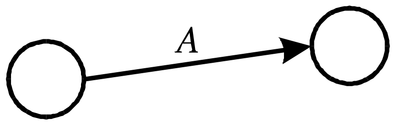
Definicija 3.2.1.6 Skup čvorova koji su sledbenici čvora i, u oznaci Γi, je definisan na sledeći način

$$\Gamma i = \{k \mid \exists (i,k) \in A\}.$$

Postoje dva osnovna načina prikazivanja plana projekta pomoću grafa. Kod prvog se aktivnosti predstavljaju čvorovima, a događaji usmerenim granama. Kod drugog načina aktivnosti se predstavljaju usmerenim granama, a događaji čvorovima ([15]). U ovom radu se koristi drugi način predstavljanja mrežnog dijagrama projekta. Uobičajeno je da se događaji numerišu celim arapskim brojevima, a aktivnosti brojevima događaja između kojih se protežu. Ovde će se aktivnosti obeležavati velikim slovima latinice, jer se uglavnom koriste mrežni dijagrami sa malim brojem aktivnosti.

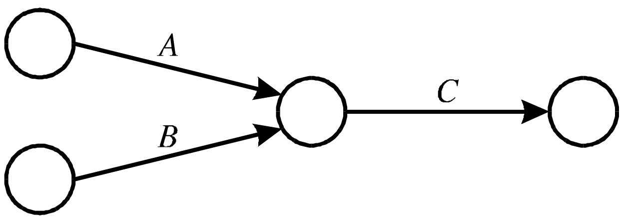
Prilikom konstruisanja mrežnog dijagrama moraju se poštovati određena pravila i uputstva. Nepridržavanje ovih pravila može da izazove greške koje dovode do netačnih rezultata. Pravila su sledeća:

1. Aktivnosti se prikazuju strelicama čiji je smer sleva na desno. Događaji se prikazuju krugovima. Svaka aktivnost otpočinje i završava se događajem.



Slika 32. *Pravilo 1.*

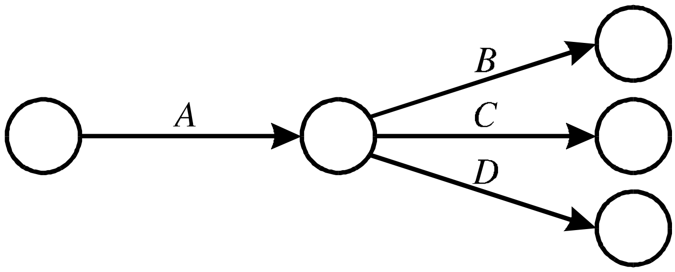
2. U jedan događaj može se steći više aktivnosti .



Slika 33. *Pravilo 2.*

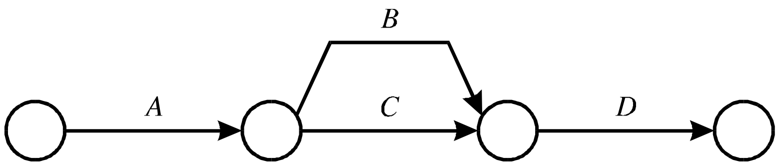
Ako završetak više aktivnosti uslovljava početak naredne aktivnosti, onda se sve te aktivnosti moraju završiti u početnom događaju naredne aktivnosti.

3. Više aktivnosti može otpočeti po završetku prethodne aktivnosti.



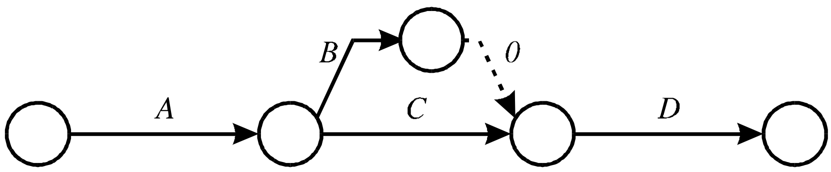
Slika 34. *Pravilo 3.*

4. Između dva događaja može se nalaziti samo jedna aktivnost.

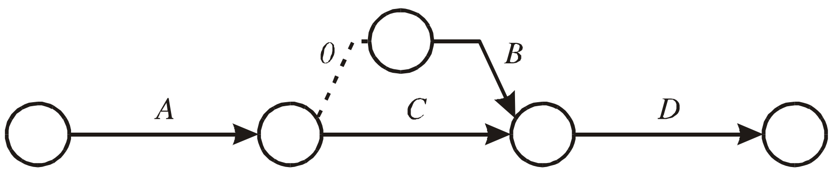


Slika 35. *Primer nepravinog prikaza*

Da bi primer dat slikom 35 prikazali u skladu sa napred navedenim pravilom, uvodimo fiktivnu aktivnost. Fiktivna aktivnost, u oznaci *0*, pokazuje samo zavisnost naredne aktivnosti od prethodne, a ne troši ni sredstva ni vreme. Fiktivna aktivnost se uvodi ako početak jedne ili više aktivnosti zavisi od završetka više prethodnih aktivnosti, pri čemu se njihov završetak nikakvim postupkom ne može svesti u jedan događaj bez fiktivne aktivnosti.

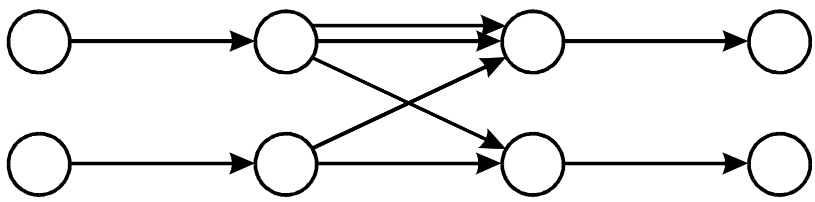


Slika 36. *Uvođenje fiktivne aktivnosti*



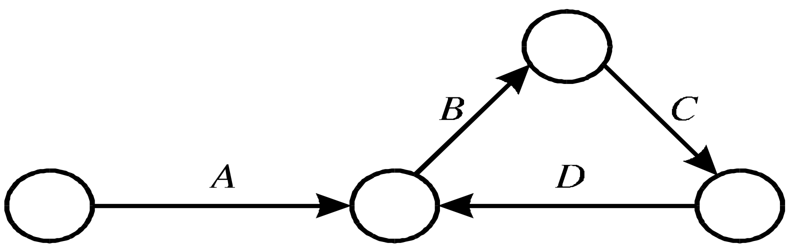
Slika 37. *Uvođenje fiktivne aktivnosti*

5. Bilo koja aktivnost može se samo jedanput odigrati i u mreži se ne mogu pojavljivati petlje. Kroz jedan događaj aktivnost ne može proći dva puta.



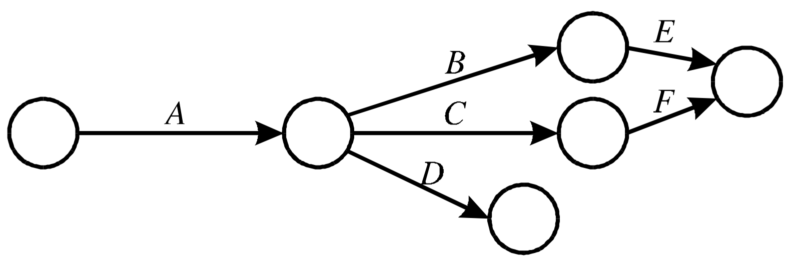
Slika 38. *Nepravilan prikaz pravila 5*

6. Ne sme da se pojavi zatvorena kontura jer dolazi do nelogičnosti.



Slika 39. *Zatvorena kontura*

7. Svaki događaj sem početnog i završnog u mrežnom dijagramu mora imati bar jednu početnu i jednu završnu aktivnost.



Slika 40. *Nepotrebna aktivnost*

Konačno, kada je mrežni dijagram nacrtan vrši se kontrola, da bi se uverili da li je zadovoljena zavisnost iz tabele, da li su ispoštovana pravila konstruisanja i da li je estetska strana zadovoljavajuća. Događaji se u mrežnom dijagramu numerišu arapskim brojevima i to s leva na desno i odozgo prema dole, s tim što prvi (početni) događaj numerišemo sa 0 ili 1.

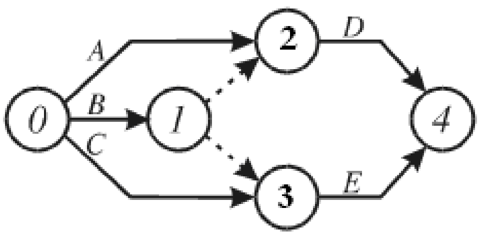
Na sledećem primeru je prikazano kako se na osnovu date tabele konstruiše mrežni dijagram.

Primer 3.2.1.3 [15] U tabeli 12. je prikazana međusobna veza aktivnosti od kojih je sačinjen projekat.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A				+	
B				+	+
C					+
D					
E					

Tabela 12. *Tabela međusobnih zavisnosti*

Na slici 34. je prikazan mrežni dijagram za projekat koji se sastoji od aktivnosti A, B, C, D i E, čija je zavisnost opisana u tabeli 12.



Slika 41. *Mrežni dijagram*

3.2.2. Analiza vremena

Analiza vremena obuhvata određivanje vremena trajanja aktivnosti koje su predstavljene u mrežnom dijagramu. Određivanjem vremenskih parametara može se kontrolisati vremensko odvijanje projekta, utiče se na održavanje rokova, upravlja se i rukovodi projektom. Analiza vremena se izvodi nezavisno od analize strukture.

Kod analize vremena primenjuju se uglavnom dva postupka (metode) i to:

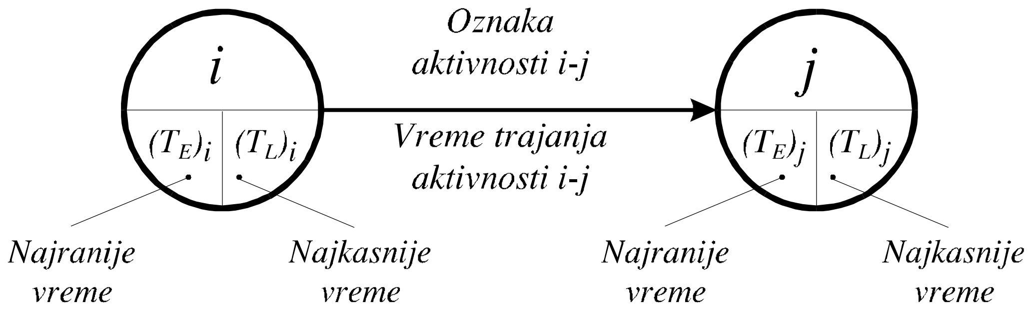
- *metoda kritičnog puta (CPM)* kod koje je vreme trajanja aktivnosti normirano i može se sa velikom tačnošću utvrditi
- *metoda ocene i revizije programa (PERT***)** gde vreme trajanja aktivnosti ima stohastički karakter i ne može se normirati.

Sledi prikaz odgovarajućih metoda iz [17,19].

3.2.2.1. Određivanje vremena kod metode kritičnog puta

Metoda kritičnog puta (CPM) je tehnika kojom se određuje trajanje projekta, nalaze aktivnosti čija bi kašnjenja neposredno uticala na kašnjenje projekta i analiziraju mogućnosti pomeranja početka i završetka aktivnosti tako da se ne promeni vreme trajanja projekta (videti [15]).

Trajanje projekta je određeno najranijim trenutkom dešavanja događaja koji označava kraj projekta. Da bi se taj trenutak odredio treba znati najranije trenutke dešavanja događaja koje prethode poslednjem.Ovi trenuci se određuju iterativno idući od početnog ka završnom čvoru. Za aktivnost između događaja $i-j$ se utvrđuje se njeno vreme trajanja t_{ij}. Vreme t_{ij} izražava se u terminskim jedinicama i upisuje se ispod svake aktivnosti u mrežnom dijagramu.



Slika 42. *Vremena događaja*

Aktivnosti (i, j) može početi samo posle odigravanja događaja i. Ako događaju i prethodi više aktivnosti, on se može odigrati samo posle isteka vremena najduže aktivnosti. Prema tome, najraniji početak aktivnosti (i, j) biće određen vremenom trajanja najdužeg puta koji ulazi u događaj i. *Najraniji početak događaja* i se označava sa E_i. *Najraniji završetak aktivnosti* koje ulaze u j se dobija sabiranjem vremena trajanja aktivnosti t_{ij} sa vremenom E_i. Ovo vreme se označava sa E_j, i izračunava se po formuli :

$$E_j = \max_{i \in \Gamma^{-1} j} (E_i + t_{ij}) \ , \ j = 2,3,...,n$$

Ako do događaja j vodi više puteva, tada se za E_j usvaja maksimalni rezultat, jer naredni događaj može nastupiti tek pošto se sve aktivnosti, koje mu prethode, završe. Ovo je prva faza u primeni CPM i tu su određena vremena kada se najranije mogu desiti događaji koji označavaju završetak svih aktivnosti koji se stiču u jedan čvor.

Druga faza daje odgovore na pitanja da li sme da zakasni završetak svake pojedinačne aktivnosti i za koliko, a da to ne prouzrokuje kašnjenje projekta. Aktivnosti čije kašnjenje nije dozvoljeno nazivaju se *kritične aktivnosti*. Kako do kašnjenja aktivnosti može doći samo ako ona počne kasnije nego što bi trebalo, znači da za svaku aktivnost treba odrediti trenutak kada najkasnije može započeti.

Najkasniji početak događaja i se obeležava sa L_i, a *najkasniji završetak* L_j:

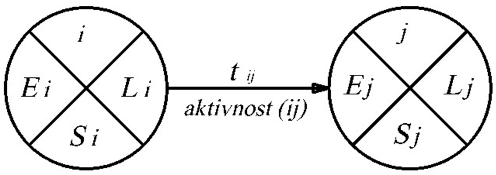
$$L_i = \min_{j \in \Gamma i} (L_j - t_{ij})$$

Ovde se ide po postupku koji je suprotan određivanju vrednosti E_i i E_j. Naime, polazi se od završnog događaja projekta i ide se ka početnom događaju, pa se putem datog izraza može odrediti najkasniji završetak bilo kog događaja.

Nakon određivanja najranijih i najkasnijih vremena za svaki čvor, prelazi se na računanje vremenskih rezervi za događaje po formuli

$$S_i = L_i - E_i$$

Vremenska rezerva za događaj je razlika između najkasnijeg i najranijeg trenutka nastupanja događaja ([15]).



Slika 43. *Vremenska rezerva*

Primer koji sledi ilustruje računanje najranijih i najkasnijih trenutaka nastupanja događaja, kao i računanje vremenskih rezervi kod klasične metode kritičnog puta.

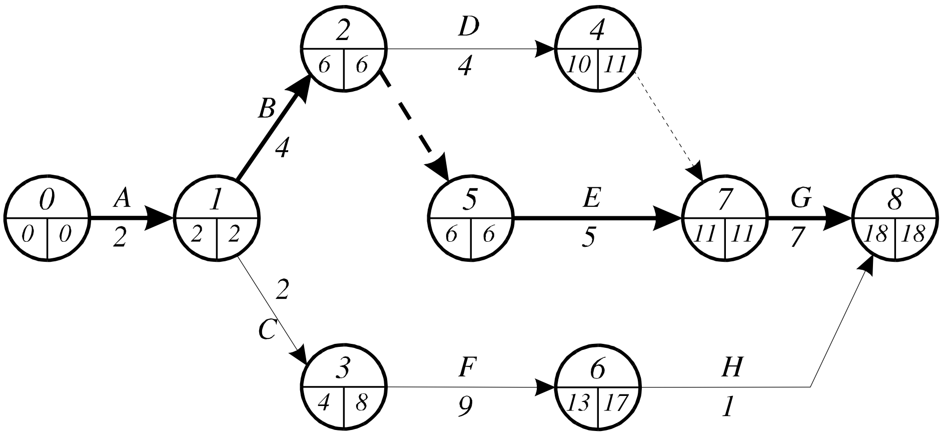
Primer 3.2.2.1.1 [15] Date su aktivnosti A, B, C, D, E, F, G i H čija su vremena trajanja 2, 4, 2, 4, 5, 9, 7 i 1 respektivno. Međusobne zavisnosti aktivnosti su:

B, C $\rightarrow$ A	G $\rightarrow$ D, E
D, E $\rightarrow$ B	H $\rightarrow$ F
F $\rightarrow$ C	

Za izračunavanje najranijih i najkasnijih trenutaka nastupanja događaja koriste se sledeće relacije

$$E_j = \max(E_i + t_{ij}) \qquad L_i = \min(L_j - t_{ij}),$$

nakon čije primene se dobija sledeći dijagram:



Slika 44. *Mreža projekta*

Slično, za svaku aktivnost treba odrediti trenutke najranijeg i najkasnijeg početka i najranijeg i najkasnijeg završetka tako da trajanje projekta ostane nepromenjeno. Koristimo sledeće oznake:

1. $E_S(i,j)=E_i$ - najraniji početak aktivnosti
2. $E_f(i,j)$ - najraniji završetak aktivnosti
3. $L_S(i,j)$ - najkasniji početak aktivnosti
4. $L_f(i,j)=L_i$ - najkasniji završetak aktivnosti

Najranije početke i završetke aktivnosti dobijamo analizom unapred, tj. razmatranjem od početka ka završetku projetka.

1. Najraniji početak aktivnosti (i,j) je naraniji trenutak događaja koji označava njen početak. To je:
   a) Za početnu aktivnost

$$E_S(1,j)=0\ ,\ j\in\Gamma 1$$

   b) Za aktivnost (i,j) je

$$E_S(i,j)=E_i$$

Odnosno $E_S(i,j)$ je maksimum najranijih završetaka aktivnosti koje prethode aktivnosti (i,j)

$$E_S(i,j) = \max_{l \in \Gamma^{-1} i} E_f(l,i)$$

2. Najraniji završetak aktivnosti (i,j) je najraniji početak aktivnosti (i,j) većan za dužinu njenog trajanja. To je
   a) Za početnu aktivnost $(1,j)$

   $$E_f(1,j) = t_{1j} \ , \ j \in \Gamma 1$$

   b) Za ostale aktivnosti

   $$E_f(i,j) = E_S(i,j) + t_{ij}$$

3. Najkasniji završetak aktivnosti (i,j) je:
   a) Za završnu aktivnost (i,n) , $i \in \Gamma^{-1} n$

   $$L_f(i,n) = E_f(i,n)$$

   b) Za ostale aktivnosti

   $$L_f(i,j) = \min_{j \in \Gamma i} \{L_f(i,j) - t_{ij}\}$$

4. Najkasniji početak aktivnosti (i,j) je:
   a) Za završnu aktivnost

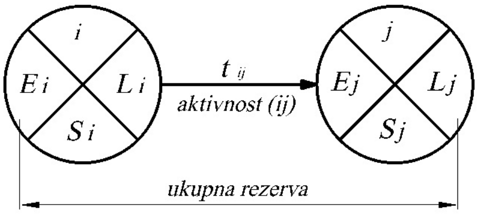
   $$L_S(i,n) = L_f(i,n) - t_{in}$$

   b) Za ostale aktivnosti

   $$L_S(i,j) = L_f(i,j) - t_{ij}$$

Ukupna vremenska rezerva F_t aktivnosti (i,j) je razlika između ukupnog vremena koje može biti dodeljeno aktivnosti i vremena sa kojim je aktivnost ušla u plan. ([15]) Ona daje odgovor na pitanje za koliko se može najviše promeniti trajanje aktivnosti, a da se trajanje projekta ne promeni pod uslovom da se trajanja drugih aktivnosti ne menjaju. Izračunava se po formuli:

$$F_t(i,j) = L_f(i,j) - E_f(i,j) = L_i - E_i - t_{ij}\,.$$



Slika 45. *Ukupna vremenska rezerva*

3.2.2.2. Određivanje vremena kod fazi PERT metode

Za određivanje trajanja projekta u slučajevima kada vremena trajanja aktivnosti imaju stohastički karakter koristi se PERT metoda. Ova metoda dopušta da se daju vremenske procene trajanja aktivnosti ([15]).

Fazi PERT metoda se, takođe, koristi u slučajevima kada vremena trajanja aktivnosti nisu unapred data, s tim da su kod fazi verzije ovog metoda vremena trajanja predstavljena fazi brojevima.

Analiza vremena po fazi PERT metodi se odvija u sledećim etapama:

- Procena vremena (a , m , b).
- Određivanje najranijeg i najkasnijeg vremena nastupanja događaja.
- Određivanje kritičnih puteva.

Pošto su aktivnosti kod projekata stohastičkog karaktera, te se njihova vremena trajanja ne mogu normirati, procenjuju se (za svaku aktivnost) tri različite vrednosti vremena za izvođenje svake aktivnosti.

Optimističko vreme - a_{ij}

- predstavlja najkraći (minimalni) vremenski period za koji se aktivnost može ostvariti. Ustvari, to je ono vreme, za koje će biti realizovana neka aktivnost, ako se u toku izvođenja te aktivnosti steknu najpovoljniji uslovi.

Najverovatnije vreme - m_{ij}

- predstavlja potrebno vreme za izvođenje aktivnosti pod normalnim uslovima.

Pesimističko vreme - b_{ij}

- je maksimalno potrebno vreme za izvršenje aktivnosti u krajnje nepovoljnim uslovima, koji mogu nastati u izvođenju aktivnosti (izuzev, razume se, pojave katastrofa).

Iz datih definicija sledi da za svaku aktivnost mora biti zadovoljen uslov:

$$a_{ij} \leq m_{ij} \leq b_{ij}$$

Procenu vremena (optimističkog, pesimističkog i najverovatnijeg), vrše stručnjaci i to na osnovu svog dosadašnjeg iskustva, znanja i trenutno dostupnih informacija. Često su dostupne informacije, kao i same procene vrlo neprecizne. Recimo, procena da će se neka aktivnost završiti između deset i dvanaest sati ili da je vreme potrebno za izvršenje neke druge aktivnosti oko tri dana. Takve procene je potrebno na neki način formalizovati, odnosno opisati ih nekim od dostupnih matematičkih objekata. U tu svrhu se koriste fazi brojevi.

Procena vremena koje daju stručnjaci je ništa drugo do trougaoni fazi broj, gde m_{ij} predstavlja modalnu vrednost, a_{ij} najmanju, a b_{ij} najveću vrednost fazi broja, tj. $< m_{ij}, m_{ij} - a_{ij}, b_{ij} - m_{ij} >$.

Za procenu vremena trajanja aktivnosti se koriste i fazi intervali (primera radi, ako se proceni da je za odvijanje neke aktivnosti potrebno između pet i šest sati).

Stoga, dalje u radu se i trougaoni brojevi zapisuju kao fazi intervali. Odnosno, trougaoni fazi broj $<\bar{x},\alpha,\beta>$ se zapisuje kao $<l,r,\alpha,\beta>$ gde je $l=r=\bar{x}$.

Nakon izvršene procene trajanja aktivnosti, prelazi se na traženje fazi kritičnog puta - put u mreži koji ima minimalnu ukupnu vremensku rezervu. U toj analizi od suštinskog značaja je i rangiranje (poređenje) fazi brojeva, s obzirom da se u formulama za računanje vremena odvijanja aktivnosti javljaju operacije $\min$ i $\max$. Dakle, postavlja se pitanje na koji način odrediti maksimum, odnosno minimum dva ili više fazi brojeva. Da bi se došlo do tog odgovora, razvijeno je mnogo metoda koje opisuju poređenje fazi brojeva [2,4,5,7,10,13]. U ovom radu će biti obrađen metod koji su dali Liang i Han u radu *Fuzzy Critical Path for Project Network* ([17]), koji je nastao kao kombinacija metoda [6] i [16].

Da bi se fazi brojevi mogli porediti uveden je pojam poredbene vrednosti fazi broja *(eng. ranking value*). Izračunavanje ove vrednosti omogućava određivanje odnosa fazi brojeva koji se porede.

Definicija 3.2.2.2.1 [17] Neka su dati fazi brojevi $\tilde{A}_i=<l_i,r_i,\alpha_i,\beta_i>$. Poredbena vrednost fazi broja $\tilde{A}_i$ (*eng. Ranking value*) se definiše kao

$$R(\tilde{A}_i)=\gamma\cdot\frac{r_i+\beta_i-x_1}{x_2-x_1+\beta_i}+(1-\gamma)\cdot(1-\frac{x_2-l_i+\alpha_i}{x_2-x_1+\alpha_i})$$

gde je $x_1=\min\{l_1-\alpha_1,...,l_n-\alpha_n\}$, $x_2=\max\{r_1+\beta_1,...,r_n+\beta_n\}$, $A=\{(i,j)|i,j\in V\}$ i

$$\gamma=\left[\sum_i\sum_{\substack{j\\(i,j)\in A}}\frac{\alpha_i}{\alpha_i+\beta_i}\right]/\,card(A).$$

Definicija 3.2.2.2.2 [17] Neka su data dva fazi broja $\tilde{A}_i$ i $\tilde{A}_j$ čije su funkcija pripadnosti $\mu_{\tilde{A}_i}(x)$ i $\mu_{\tilde{A}_j}(x)$. Sa m_i i m_j označen je zbir minimalne i maksimalne vrednosti za koju funkcija pripadnosti dostiže maksimalnu vrednost, tj. $m_i = l_i + r_i$. Sada

- $\tilde{A}_i > \tilde{A}_j \Leftrightarrow R(\tilde{A}_i) > R(\tilde{A}_j)$ ili $R(\tilde{A}_i) = R(\tilde{A}_j)$ i $m_i > m_j$
- $\tilde{A}_i = \tilde{A}_j \Leftrightarrow R(\tilde{A}_i) = R(\tilde{A}_j)$ i $m_i = m_j$

Treća, ujedno i poslednja etapa fazi PERT metoda je određivanje fazi kritičnog puta.

Definicija 3.2.2.2.3 [17] Dužina puta P_i, u oznaci $\mathrm{T}_\Pi(P_i)$, jednaka je

$$\mathrm{T}_\Pi(P_i) = \sum_{\substack{1 \le i < j \le n \\ i,j \in P_i}} F_t(i,j).$$

Fazi kritičan put se definiše na sledeći način.

Definicija 3.2.2.2.4 [17] Ako u mreži postoji put P_K takav da je

$$\mathrm{T}_\Pi(P_k) = \min\{\mathrm{T}_\Pi(P_i) \mid P_i \in P\},$$

onda se takav put naziva fazi kritičan.

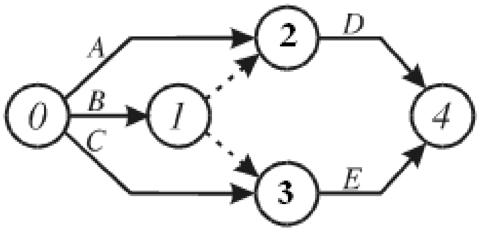
Algoritam za pronalaženje fazi kritičnog puta, odnosno za izračunavanje dužine trajanja projekta se sastoji iz sledećih koraka ([17]).

1. Odrediti sve aktivnosti u projektu
2. Utvrditi međusobnu zavisnost svih aktivnosti
3. Izvršiti procenu vremena trajanja svake od aktivnosti
4. Konstruisati mrežu projekta

5. Izračunati najranije početke aktivnosti
6. Izračunati najkasnije završetke aktivnosti
7. Izračunati ukupne vremenske rezerve za sve aktivnosti
8. Pronaći sve moguće puteve koji vode od početnog do krajnjeg čvora i izračunati njihovu dužinu
9. Pronaći fazi kritičan put

Primer koji sledi ilustruje primenu fazi PERT metoda.

Primer 3.2.2.2.1 [15] Neka je dat mrežni dijagram projekta na slici 41. i neka su u tabeli 13. date procene vremena trajanja svih aktivnosti.



Slika 46. *Mrežni dijagram projekta*

Aktivnost	Oznaka	Vreme trajanja
fiktivna	(P,0)	$< 0,0,0,0 >$
A	(0,2)	$< 5,5,2,2 >$
B	(0,1	$< 10,10,5,5 >$
C	(0,3)	$< 3,4,2,1 >$
D	(2,4)	$< 4,5,2,1 >$
E	(3,4)	$< 8,10,2,1 >$
fiktivna	(4,K)	$< 0,0,0,0 >$

Tabela 13. *Vreme trajanja aktivnosti*

U prvom koraku se računaju najraniji trenuci realizacije aktivnosti. Aktivnosti (P,0) i (4,K) su fiktivne i uvode se samo da bi se mogao izračunati najkasniji početak prvog događaja , odnosno najranji završetak poslednjeg.

Sada imamo

$$E_S(A) = E_S(B) = E_S(C) = < 0,0,0,0 >$$

$$E_S(D) = \max\{E_f(A), E_f(B)\} = \max\{E_S(A) + t_A, E_S(B) + t_B\}$$

$$= \max\{< 5,5,2,2 >, < 10,10,5,5 >\}$$

i

$$\gamma = \frac{[\frac{2}{2+2} + \frac{5}{5+5} + \frac{2}{2+1} + \frac{2}{2+1} + \frac{2}{2+1}]}{5} = 3/5 = 0.6$$

pri čemu je

$$x_1 = \min\{5-2, 10-5\} = 3$$

$$x_2 = \max\{5+2, 10+5\} = 15$$

Iz predhodnog sledi

$$R(< 5,5,2,2 >) = 0.6 \cdot \frac{5+2-3}{15-3+2} + 0.4 \cdot (1 - \frac{15-5+2}{15-3+2}) = 0.2286$$

$$R(< 10,10,5,5 >) = 0.588$$

$$R(< 5,5,2,2 >) < R(< 10,10,5,5 >) \Rightarrow < 5,5,2,2 > \ < \ < 10,10,5,5 >$$

$$E_S(D) = < 10,10,5,5 >$$

$$E_S(E) = \max\{E_f(B), E_f(C)\} = \max\{E_S(B) + t_B, E_S(C) + t_C\} = < 10,10,5,5 >$$

$$E_S(F) = \max\{E_f(D), E_f(E)\} = \max\{E_S(D) + t_D, E_S(E) + t_E\} = < 18,20,7,6 > .$$

U drugom koraku se računaju najkasniji trenuci završetaka aktivnosti. Oni se računaju idući od poslednje ka prvoj aktivnosti.

$$L_f(F) = E_S(F) = < 18,20,7,6 >$$

$$L_f(D) = L_f(F) - t_D = < 14,15,5,5 >$$

$$L_f(E) = L_f(F) - t_E = < 10,10,5,5 >$$

$$L_f(B) = \min\{L_f(D) - t_{(1,2)}, L_f(E) - t_{(1,3)}\} = \min\{L_f(D), L_f(E)\} = <10,10,5,5>$$

$$L_f(A) = L_f(D) - t_A = <9,10,3,3>$$

$$L_f(C) = L_f(E) - t_C = <7,6,3,4>$$

$$L_f(p,0) = \min\{L_f(A) - t_A, L_f(B) - t_B, L_f(C) - t_C\} = <4,2,1,3>$$

U trećem koraku se računaju ukupne vremenske rezerve.

$$F_t(A) = L_f(A) - E_S(A) - t_A = <4,5,1,1>$$

$$F_t(B) = <0,0,0,0>$$

$$F_t(C) = <4,2,1,3>$$

$$F_t(D) = <0,0,-2,-1>$$

$$F_t(E) = <-8,-10,-2,-1>$$

U četvrtom koraku se traže svi mogući putevi od početnog do krajnjeg čvora i računaju se njihove dužine. Putevi su

$$P_1 = p - 0 - 2 - 4 - k$$
$$P_2 = p - 0 - 1 - 2 - 4 - k$$
$$P_3 = p - 0 - 1 - 3 - 4 - k$$
$$P_4 = p - 0 - 3 - 4 - k$$

a njihove dužine

$$T_\Pi(P_1) = F_t(A) + F_t(D) = <4,5,-1,0>$$
$$T_\Pi(P_2) = F_t(B) + F_t(D) = <0,0,-2,-1>$$
$$T_\Pi(P_3) = F_t(B) + F_t(E) = <-8,-10,-2,-1>$$
$$T_\Pi(P_4) = F_t(C) + F_t(E) = <-4,-8,-1,2>$$

Na osnovu definicije *3.2.2.2.4* fazi kritičan put je put $P_3 = p - 0 - 1 - 3 - 4 - k$ jer je

$$T_\Pi(P_K) = \min\{T_\Pi(P_1), T_\Pi(P_2), T_\Pi(P_3), T_\Pi(P_4)\} = T_\Pi(P_3).$$

Vreme završetka projekta je $<18,20,7,6>$, odnosno između 18 i 20 vremenskih jedinica.

4

Zaključak

U ovom radu su izloženi osnovni pojmovi vezani za fazi skupove i jednu njihovu specijalnu klasu – fazi brojeve. Takođe, u osnovnim crtama je objašnjen pojam Zadehovog principa proširenja kao i njegovo uopštenje bazirano na trugaonim normama. Pokazano je i na koji način se operacije preseka i unije fazi skupova definišu pomoću trougaonih normi i trougaonih konormi.

Fazi brojeve je moguće predstaviti na više načina, a ovde su obrađeni koncepti $L-R$, diskretnih i dekompozovanih fazi brojeva. $L-R$ način reprezentacije se zasniva na činjenici da je funkciju pripadnosti fazi broja moguće posmatrati iz dva dela, jednog koji se nalazi levo i drugog koji se nalazi desno od modalne vrednosti fazi broja. Funkcije kojima se opisuju $L-R$ fazi brojevi se nazivaju funkcije oblika i u radu su navedene osobine koje one moraju posedovati. Za specijalno izabrane funkcije oblika, dobijaju se Gausov, trougaoni, eksponencijalni i kvadratni fazi brojevi. Koncepti diskretnog i dekompozovanog fazi broja se više koriste u praksi, s obzirom na lakšu implementaciju datih algoritama.

Primena fazi aritmetike je opisana kroz fazi PERT metod, koji se koristi u procesu upravljanja projektima. Prednosti fazi PERT metoda u odnosu na klasičan PERT metod su mnogobrojne. Pre svega, jer omogućava donošenje odluka čak iako su na samom početku dati neprecizni i nejasni podaci nastali kao posledica subjektivnosti stručnjaka koji vrše procenu vremena trajanja aktivnosti. Izložen je algoritam za traženje fazi kritičnog puta uz pomoć rangiranja fazi brojeva. Radi boljeg razumevanja datih pojmova, svaki od njih je ilustrovan kraćim primerom.

Navedena teorija je dovoljna za razumevanje nekih osnovnih pojmova vezanih za oblast fazi skupova i fazi brojeva.

Literatura

[1] Bojadziev G., Bojadziev M.; *Fuzzy logic for business,finance and management*, World Scientific 1999.

[2] Bortolan, G.,Degani R.; *A review of some methods for ranking fuzzy subsets*, Fuzzy sets and systems, Vol. 15, pp. 1-19, 1985.

[3] Buckley J. J., Eslami E., Feuring T.; *Fuzzy mathematics in economics and engineering*,Springer, 2002.

[4] Buckley J.J.; *The multiple judge, multiple criteria ranking problem: A fuzzy set approach*, Fuzzy sets and systems, Vol. 13, pp. 25-37, 1984.

[5] Campos L.M.,Gonzales A.; *A subjective approach for ranking fuzzy numbers*, Fuzzy sets and systems, Vol. 29, pp. 145-153, 1989.

[6] Chang P.L., Chen Y.C.A*.; A fuzzy multi-criteria decision making method for tecnology transfer strategy selection in biotechnology*, Fuzzy sets and systems, Vol.63,pp. 131-139, 1994.

[7] Chen S.H.; *Ranking fuzzy numbers with maximazing and minimazing set*, Fuzzy sets and systems, Vol. 17, pp. 113-129, 1985.

[8] De Baets Bernard, Marková - Stupňanová Andrea, *Analytical expressions for the addition of fuzzy intervals*, Fuzzy sets and systems, Vol. 91, pp 203-213, 1997.

[9] Fullér R.; *Fuzzy reasoning and fuzzy optimization,* Turku Centre for Computer Science, Abo, 1998.

[10] Gonzales A.; *A study of ranking function approach through mean values*, Fuzzy sets and systems, Vol. 35, pp. 29-41, 1990.

[11] Haans M.; *Applied fuzzyArithmetic – an introduction with engineering applications,* Springer*, 2005.*

[12] Keresztfalvi T.; *t – norm based product of LR fuzzy numbers*, Depatment of Mathematics and statistics, J.W. Goethe University, Frankfurt

[13] Kim K., Park K.S., *Ranking fuzzy numbers with index of optimism*, Fuzzy sets and systems, Vol. 35, pp. 143-150, 1990.

[14] Klement E. P., Mesiar R., Pap E.; *Triangular norms*, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[15] Krčevinac S ., Čangalović M., Kovačević-Vujčić V., Matrić M., Vujošević M.; *Operaciona istraživanja 2*, FON, Beograd 2006.

[16] Liang G.S, Wang M.J.J; *Benefit cost analysis using fuzzy concept*, The Engineering economist, Vol.40, pp. 359-376, 1995.

[17] Liang G.S., Chen H. T.; *Fuzzy Critical Path for Project Network*, Information and Management Sciences, Vol.15, num.4, pp. 29-40, 2004

[18] Lin C.T., George Lee C. S.; *A Neuro-Fuzzy Synergism to Intelligent Systems,* Prentice Hall, 1996.

[19] Lootsma F. A.; *Fuzzy logic for planning and decision making*, Springer, 1997.

[20] Pap E.; *Fazi mere i njihova primena*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno matematički fakultet Novi Sad,1999.

[21] Stefanini L., Sorini L.; *Fuzzy arithmetic with parametric LR fuzzy Numbers*, Departmen of Economics and quantitative methods, University of Urbino “Carlo Bo”, Italy

[22] Schweizer B., Sklar A., *Associative functions and abstract semigroups*, *Publ. Math. Debrecen*, pp. 69-81, 1983.

[23] Uthra G., Sattanathan R.; Risk *analysis of decision maker's attitude in fuzzy PERT,* International journal of algorithms, computing and mathematics, Vol. 2, num. 3, 2009.

[24] Vujošević M., Stanojević M., Mladenović N.; *METODE OPTIMIZACIJE - mrežni, lokacijski i višekriterijumski modeli*, DOPIS, Beograd, 1996

Biografija

Marija Vidović je rođena 5. septembra 1987. godine u Inđiji. Pohađala je osnovnu školu „Dušan Jerković“ u Inđiji u periodu od 1994. do 2002. godine i završila je skroz odličnim uspehom, kao dobitnik Vukove diplome.

Elektrotehničku školu „Mihajlo Pupin”, smer elektrotehničar računara pohađala je u Inđiji u periodu od 2002. do 2006. godine.

Te godine upisuje Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu. Na departmanu za matematiku i informatiku, opredelila se za smer primenjena matematika - inženjer matematike, gde je 2010. godine odbranila diplomski rad - “Mrežno programiranje”.

Iste godine upisuje master studije primenjene matematike, modul tehnomatematika, na istom fakultetu.

Zaključno sa junskim ispitnim rokom 2011. godine, polaže sve predviđene ispite sa prosečnom ocenom 9.60.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: **RBR**	
Identifikacioni broj: **IBR**	
Tip dokumentacije: **TD**	Monografska dokumentacija
Tip zapisa: **TZ**	Tekstualni štampani materijal
Vrsta rada: **VR**	Master rad
Autor: **AU**	Marija Vidović
Mentor: **ME**	dr Ivana Štajner-Papuga
Naslov rada: **NR**	Osnove fazi aritmetike i fazi PERT metod
Jezik publikacije: **JP**	srpski (latinica)
Jezik izvoda: **JI**	s/en
Zamlja publikovanja: **ZP**	Republika Srbija
Uže geografsko područje: **UGP**	Vojvodina
Godina: **GO**	2011.
Izdavač: **IZ**	autorski reprint

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (4/80/24/13/46/0/0)
FOR (broj poglavlja/strana/lit.citata/tabela/slika/grafika/priloga)

Naučna oblast: matematika
NO

Naučna disciplina: primenjena matematika
ND

Predmetne odrednica, ključne reči:(**PO**, **UDK**) Fazi skup, fazi broj, fazi PERT

Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku
ČS

Važna napomena: nema
VN

Izvod (**IZ**): U ovom radu su izloženi osnovni pojmovi vezani za fazi skupove i jednu njihovu specijalnu klasu – fazi brojeve. U osnovnim crtama je objašnjen pojam Zadehovog principa proširenja kao i njegovo uopštenje bazirano na trougaonim normama. Primena fazi aritmetike je opisana kroz fazi PERT metod, koji se koristi u procesu upravljanja projektima.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: avgust 2011.
DP

Datum odbrane: oktobar 2011.
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik: dr Zagorka Lozanov-Crvenković, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Tatjana Došenović, vanredni profesor Tehnološkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Tatjana Grbić, docent Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu

Mentor: dr Ivana Štajner-Papuga, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number: **ANO**	
Identification number: **INO**	
Document type: **DT**	Monograph type
Type of record: **TR**	Textual printed material
Contents code: **CC**	Master's thesis
Author: **AU**	Marija Vidović
Mentor: **ME**	Dr Ivana Štajner-Papuga
Title: **TI**	The basics of fuzzy arithmetic and fuzzy PERT method
Language of text: **LT**	Serbian (Latin)
Language of abstract: **LT**	s /en
Country of publication: **CP**	Republic of Serbia
Locality of publication: **LP**	Vojvodina
Publication year: **PY**	2011.
Publisher: **PU**	author's reprint

Publl. place: Novi Sad, Trd D. Obradovića 4
PP

Physical description: (4/80/24/13/46/0/0)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Applied mathematics
SD

Subject Key words: Fuzzy sets, fuzzy numbers, fuzzy PERT
SKW

Holding data: In the library of Department of Mathematics and Indormatics
HD

Note:
N

Abstract (**AB**): This paper presents the basic concepts related to fuzzy sets and fuzzy numbers. Concept of Zadeh's extension principle and its generalization are explained in general terms. It is shown how the operations of union and intersection of fuzzy sets can be defined according to triangular norms. Application of fuzzy arithmetic is described through fuzzy PERT method, which is used in the project management process.

Accepted on Scientific board on: August 2011
AS

Defended: October 2011
DE

Thesis Defend board:
DB

President: Dr Zagorka Lozanov-Crvenković, full profesor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Dr Tatjana Došenović, associate professor, Faculty of Technology, University of Novi Sad

Member: Dr Tatjana Grbić, assistant professor, Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad

Mentor: Dr Ivana Štajner-Papuga, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad