UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Marija Jovanović

# UNIT-LINKED MODELI U ŽIVOTNOM OSIGURANJU

- završni rad -

Novi Sad, 2009.

# PREDGOVOR

Tema ovog rada su unit-linked modeli u životnom osiguranju. Životno osiguranje je osiguranje lica od osiguranog slučaja, koji može biti doživljenje, smrt usled bolesti, smrt usled nezgode, invaliditet, itd. ili kombinacija navedenih rizika.

Ugovor o životnom osiguranju je sklopljen između osiguranika i osiguravajuće kompanije. Ugovorom o osiguranju se osiguravajuća kompanija obavezuje da će snositi rizik finansijskog gubitka koji nastaje kao posledica osiguranog slučaja, dok se osiguranik obavezuje da će plaćati unapred dogovorene premije osiguranja. Dakle, ugovorom o osiguranju osiguravajuća kompanija prihvata izvestan rizik od nastanka osiguranog slučaja. Međutim, kako ona svoja sredstva i rezerve dalje ulaže na finansijsko tržište, onda ona na taj način snosi i određeni rizik od investiranja pomenutih sredstava.

Unit-linked ugovori životnog osiguranja su specifični ugovori životnog osiguranja u kojima osiguravajuća kompanija snosi samo rizik od nastanka osiguranog slučaja, dok se rizik od investiranja sredstava prebacuje na samog osiguranika. Koliki će taj rizik biti zavisi od samog osiguranika i od njegove spremnosti da rizikuje, tačnije od njegove funkcije korisnosti.

U uvodnom delu je ukratko opisan princip unit-linked ugovora životnog osiguranja, a zatim je predstavljena nihova razlika od klasičnih ugovora, kao i motivacija za njihov nastanak. Dalje je naveden stohastički aparat koji će se koristiti u pretpostavkama modela kao i u samom modelu. Model se zasniva na čuvenoj Black-Scholes formuli za određivanje cene opcije, a pristupa mu se na dva načina, aktuarski i finansijski. Poređenje navedena dva pristupa se vrši uz pomoć Monte Carlo simulacija i izvodi se konačan zaključak o tome koji je pristup bolji teorijski, a koji praktično.

Ovom prilikom bih želela da se zahvalim svim profesorima i asistentima na saradnji i ukazanom znanju tokom studiranja. Posebno se zahvaljujem svom mentoru, Dr Dori Seleši, za stručno i profesionalno usmeravanje i izvanrednu saradnju pri izradi ovog rada i za znanje koje sam stekla radivši sa njom.

Novi Sad, 12.10.2009. Marija Jovanović

# SADRŽAJ

# 1. UVOD

Unit-linked životno osiguranje je veoma popularan vid investiranja u Evropi. To su specifični ugovori životnog osiguranja u kojima rizik investiranja premija snosi sam osiguranik, a ne Osiguravajuća kompanija kao što je slučaj u klasičnim ugovorima na život osiguranika. To znači da se prikupljena sredstva od premija osiguranja ulažu u rizičnije investicije u tzv. fondove, u zavisnosti od želje osiguranika, tj. od njegove spremnosti da rizikuje.

U ovom radu su razmatrani unit-linked ugovori životnog osiguranja sa minimalnom zagarantovanom osiguranom sumom. To znači da u slučaju smrti osiguranka korisnicima osiguranja sleduje minimalna zagarantovana osigurana suma $K$, ako uložena sredstva nisu premašila tu minimalnu zagarantovanu sumu, a u suprotnom im sleduju uložena sredstva. Matematički zapisano, osigurana suma za slučaj smrti osiguranika koja je nastala u trenutku $t$ je $\max\{K, S_t\}$, gde $K$ predstavlja minimalnu zagarantovanu sumu, a $S_t$ sredstva u fondovima.

Kako se osigurana suma unit-linked ugovora u trenutku $t$ ponaša kao novčani tok evropske prodajne opcije sa strajk cenom $K$, $\max\{K, S_t\} = S_t + \max\{0, K - S_t\} = S_t + (K - S_t)^+$, za određivanje premije ovakvih ugovora će se koristiti čuvena Black-Scholes formula za određivanje cene opcije.

Za određivanje premije unit-linked ugovora se može koristiti aktuarski ili finansijski pristup. U oba pristupa se koristi Black-Scholes formula. Razlika je u tome što se u aktuarskom pristupu koristi mera verovatnoće $P$, a u finansijskom pristupu rizik-neutralna mera $Q$.

U finansijskom pristupu unit-linked ugovor predstavlja mogući gubitak i zato taj pristup predlaže hedžing strategiju na finansijskom tržištu. U ovom slučaju je obaveza osiguravača slična novčanom toku evropske prodajne opcije pa se formula za premiju svodi na Black-Scholes formulu sa rizik-neutralnom merom $Q$.

Aktuarski pristup unit-linked ugovor posmatra kao ugovor o osiguranju i koristi princip ekvivalencije, tj. jednokratna neto premija osiguranja je jednaka očekivanoj sadašnjoj vrednosti budućih obaveza osiguravača. Ovaj pristup će nas dovesti do iste formule iako je analiza problema drugačija.

U cilju dobijanja odgovora na pitanje: Koji je pristup bolji? u radu se vrše Monte Carlo simulacije. Simulacijama se dobija raspodela budućih troškova.

U radu je najpre opisan princip klasičnih i unit-linked ugovora u osiguranju. Zatim je opisan matematički aparat koji će se koristiti u upoređivanju navedena dva modela. Nakon toga sledi opis modela i konačno njihovo uporedjivanje i simulacije.

Ali pre svega, podsetimo se šta je to prodajna opcija i kako izgleda profit njenog vlasnika.

## 1.1. OPCIJE

Opcija je ugovor između dve strane, koji jednoj strani (svom vlasniku) daje pravo, ali ne i obavezu, da kupi odnosno proda neku podlogu po unapred određenoj ceni – strajk ceni**,** u unapred određenoj količini i unapred dogovorenom datumu – datumu dospeća. Emitent (writer) opcije ima obavezu da proda, odnosno kupi tu podlogu, ako vlasnik opcije želi da je kupi, tj. proda. Vlasnik opcije plaća cenu opcije, tj. pravo ali ne i obavezu. Cena opcije se naziva premija**.** Opcija može biti:

- call - kupovna i
- put - prodajna,

odnosno, u zavisnosti od mogućnosti izvršenja:

- evropska – možemo je izvršiti na datum dospeća
- američka – možemo je izvršiti do datuma dospeća i na sam datum dospeća.

U daljem radu ćemo se baviti evropskim prodajnim opcijama, pošto one odgovaraju našem unit-linked modelu.

Na vrednost opcije utiču cena izvršenja opcije, tzv. strajk cena, koju ćemo obeležiti sa $K$, cena podloge u trenutku $t = T$, tzv. spot cena, kao i datum dospeća $T$, dok se kamatna stopa smatra konstantnom. U trenutku $T$ se mogu realizovati dve mogućnosti, u zavisnosti od toga da li je cena akcije u trenutku $t = T$, koju ćemo obeležavati sa $S_t$, veća ili manja od strajk cene $K$.

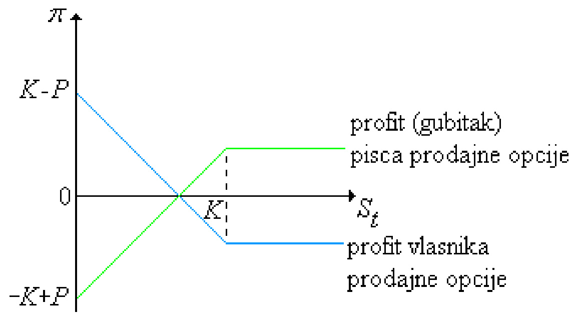
Ako je $S_t < K$, vlasnik prodajne opcije će izvršiti opciju. On će najpre kupiti podlogu po tržišnoj ceni $S_t$, a zatim izvršiti opciju i prodati podlogu po ceni $K$. Na taj način ostvariće profit $K - S_t - P$, gde je $P$ premija, tj. cena opcije. Emitent opcije u ovom slučaju ostvaruje gubitak $P - K + S_t$.

Ako je $S_t \geq K$, vlasnik opcije neće izvršiti opciju i njegov prihod će biti $0$, odnosno on je platio samo premiju $P$, a neće ništa zaraditi. Međutim, ni emitent opcije neće nista zaraditi osim premije.

Profit vlasnika prodajne opcije možemo predstaviti na sledeći način

$$\boxed{\pi(K, S_t) = \max\{0, K - S_t\} - P}$$

Analiziraćemo profit vlasnika prodajne opcije na *Grafiku 1.1*.




*Grafik 1.1*

Primetimo da su kod prodajne opcije ograničeni i profit i gubitak kako vlasnika tako i emitenta opcije.

## 1.2. KLASIČNO ŽIVOTNO OSIGURANJE

Da bi se shvatio pojam unit-linked životnog osiguranja, najpre se treba upoznati sa osnovnim pojmovima klasičnog životnog osiguranja. Premija u klasičnom osiguranju na život osiguranika se obračunava na osnovu tablica mortaliteta tj. verovatnoća smrtnosti i unapred određene diskontne kamatne stope $i$. *Tabela 1.1* predstavlja Izravnatu tablicu mortaliteta Republike Srbije za 2000/2002 godinu koju je izradio Republički zavod za statistiku, a mi ćemo je koristiti u daljem radu. *Tabela 1.1* je priložena u dodatku na kraju rada.

Prva kolona *Tabele 1.1* predstavlja starost osiguranika koju ćemo obeležavati sa $x$. Druga kolona predstavlja verovatnoću da osoba starosti $x$ bilo kog pola umre u $x$- toj godini života. Te verovatnoće smrtnosti ćemo koristiti u daljem radu, tj. u dalje radu nam neće biti bitno da li je osiguranik muškog ili ženskog pola. Treća kolona *Tabele 1.1* je verovatnoća da muškarac starosti $x$ umre u toj godini, a četvrta da žena starosti $x$ umre u toj godini života. Navedene verovatnoće ćemo obeležavati sa $q_x$. Jasno je da je $p_x = 1 - q_x$ verovatnoća da osoba starosti $x$ preživi narednu godinu, tj. doživi $x+1$- u godinu života.

Dalje ćemo sa ${}_k p_x = \prod_{i=0}^{k-1} p_{x+i}$ obeležavati verovatnoću da osoba starosti $x$ doživi narednih $k$ godina. Konvencionalna oznaka za ${}_1 p_x$ je $p_x$. Jasno je da je onda ${}_k p_x \cdot q_{x+k}$ verovatnoća da osoba starosti $x$ dočeka $x+k$ -tu godinu života i zatim umre u toj godini.

Još ćemo koristiti krajnju starost tablice mortaliteta, koju obeležavamo sa $\omega$. To je starost u kojoj je verovatnoća smrti jednaka 1, $q_\omega = 1$. Iz *Tabele 1.1* zaključujemo da je krajnja starost $\omega = 100$.

Posmatrajmo sada jedan klasičan ugovor o životnom osiguranju za osiguranika starosti $x$ koji traje $T$ godina. Prema tom ugovoru osiguraniku se isplaćuje unapred određena osigurana suma u iznosu $K$, ako dođe do smrti osiguranika u toku trajanja ugovora o osiguranju. Da bismo pojednostavili računicu pretpostavićemo da se osigurana suma za smrt nastalu između $k$- te i $k+1$- e godine isplaćuje na kraju godine $k$, tj. na početku $k+1$- e godine.

Odredićemo raspodelu diskontovanih budućih troškova i jednokratnu neto premiju za ovaj ugovor, jer će nam te iste veličine trebati kasnije za unit-linked ugovore životnog osiguranja. Diskontna kamatna stopa $i$ je konstanta za čitavo vreme trajanja ugovora.

Prema principu ekvivalencije[1] koji se primenjuje u aktuarstvu, jednokratna neto premija koju je osiguranik dužan da plati biće jednaka sadašnjoj vrednosti tj. diskontovanoj vrednosti očekivanih budućih gubitaka.

Diskontovana vrednost budućeg gubitka kompanije za smrtni slučaj nastao u vremenskom periodu $t=k$ do $t=k+1$ je $K(1+i)^{-(k+1)}$. Verovatnoću ovog gubitka smo označili sa ${}_k p_x \cdot q_{x+k}$, jer je to verovatnoća da osiguranik starosti $x$ umre u vremenskom periodu $t=k$ do $t=k+1$. Dakle, diskontovani budući gubitak kompanije (Discounted Future Cost) je jedna diskretna slučajna promenljiva sa sledećom raspodelom

$$DFC:\begin{pmatrix} K(1+i) & K(1+i)^{-2} & \cdots & K(1+i)^{-T} \\ q_x & {}_1p_x \cdot q_{x+1} & \cdots & {}_{T-1}p_x \cdot q_{T-1} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1.1)}$$

Jednokratna neto premija (Single Pure Premium) je očekivanje diskontovanih budućih gubitaka

$$SPP = E(DFC) = \sum_{k=1}^{T} K(1+i)^{-k} \cdot {}_{k-1}\, p_x \cdot q_{x+k-1} \qquad \textbf{(1.2)}$$

Verovatnoća ${}_0 p_x = 1 - {}_0 q_x$ koja se javlja u gornjoj sumi predstavlja verovatnoću da osiguranik starosti $x$ ne umre istog trenutka, a ta verovatnoća je naravno jednaka 1, za sve $x<\omega$.

## 1.3. UNIT - LINKED ŽIVOTNO OSIGURANJE

U ovom poglavlju ćemo opisati osnovnu razliku između klasičnih i unit-linked ugovora životnog osiguranja.

Iz *Tabele 1.1* možemo primetiti da verovatnoće smrtnosti rastu sa godinama starosti. Tako bi i prirodna premija osiguranja života trebala da raste sa godinama starosti.

Prirodna premija nije ništa drugo nego osiguranje na jednu godinu, kada bi osiguranik svake godine kupovao osiguranje života i sa različitom premijom. Kada u formulu ***(1.2)*** ubacimo trajanje osiguranja od $T=1$, dobijemo da je prirodna premija za osiguranika

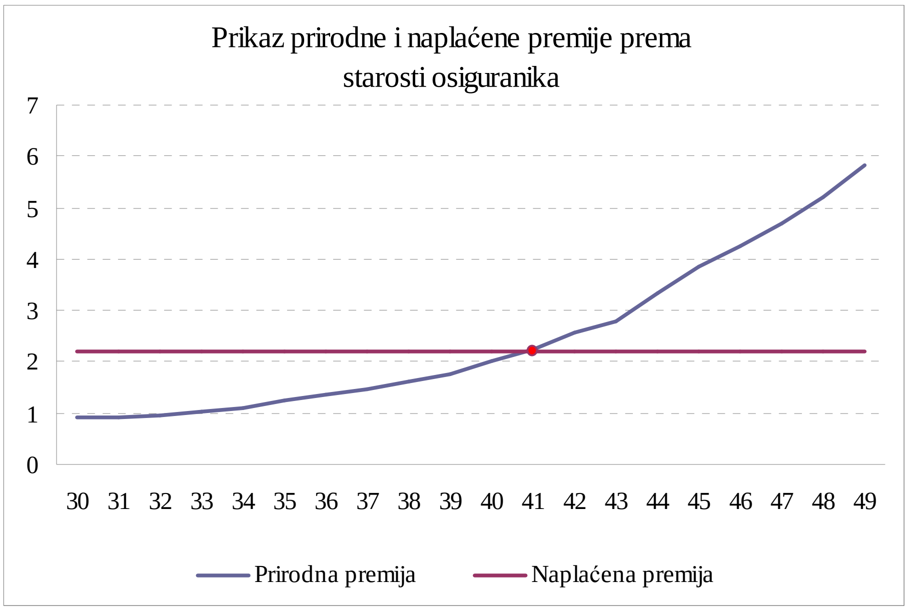
---

[1] **Princip ekvivalencije** u aktuarstvu kaže da sadašnja vrednost budućih obaveza (gubitaka) osiguravača mora biti jednaka sadašnjoj vrednosti budućih obaveza (premija) osiguranika.

starosti $x$ jednaka $K(1+i)^{-1} q_x$. Sledeće godine bi ta premija za osiguranika koji bi tada imao $x+1$-u godinu iznosila $K(1+i)^{-1} q_{x+1}$, itd. Odavde se jasno vidi da prirodna premija raste sa godinama starosti osiguranika, jer i verovatnoće smrti rastu.

Ovakav vid naplate premije ipak nije uobičajen u praksi. U praksi se ugovor sklapa unapred za duži niz godina, sa istom godišnjom premijom koja predstavlja neku vrstu prosečne premije i takođe se dobija primenom principa ekvivalencije.

Razlika između prirodne premije i naplaćene godišnje premije osiguranika starosti npr. 30 godina za osiguranje na period od npr. 20 godina data je na *Grafiku 1.2*.




*Grafik 1.2*

Sa *Grafika 1.2* možemo videti da osiguranik na početku osiguravajućeg perioda plaća veću premiju od njegove prirodne, ali zato pred kraj osiguravajućeg perioda plaća manje. Upravo zbog ove razlike između realne i naplaćene premije u životnom osiguranju veoma je bitno uspostaviti tzv. matematičku rezervu.

Matematička rezerva je razlika sadašnje vrednosti budućih obaveza osiguravača i sadašnje vrednosti budućih obaveza osiguranika. Ona predstavlja određenu svotu novca koju osiguravajuća kompanija mora imati kako bi odgovorila budućim obavezama iz ugovora o osiguranju. Kamatna stopa koja se koristi u obračunima premije osiguranja i matematičke rezerve je, kao što smo videli, fiksirana kamatna stopa $i$ i jednaka je kamati za koju osiguravajuća kompanija veruje da će ostvariti investiranjem svojih rezervi. To znači da je buduća matematička rezerva poznata u svakom trenutku trajanja ugovora.

U ovom slučaju ugovora o osiguranju rizik investiranja nosi osiguravajuća kompanija jer je unapred pripisala kamatu plasiranim sredstvima i na neki način „obećala“ osiguraniku da će njegova sredstva ostvariti takav prinos. Međutim, deponovanja sredstava matematičke rezerve (i svih drugih rezervi) su zakonski ograničena na mali broj nisko rizičnih investicija kao što su obveznice ili depoziti kod banaka. Zbog toga se javila potreba za novom vrstom životnog osiguranja u kojoj bi kamata na uložena sredstva bila veća. Veća kamata po pravilu znači i veći rizik, pa u tim ugovorima za osiguranje rizik od investiranja nosi sam osiguranik.

Kod ovakvih ugovora o osiguranju, osiguranik najpre bira fond u koji želi da osiguravajuća kompanija ulaže njegova sredstva. U zavisnosti od udela akcija (obveznica) u fondovima, oni se mogu okarakterisati kao manje ili više rizični. Npr. fond koji se sastoji 100% ili 80% od akcija predstavlja visoko rizičan fond, dok je fond koji se sastoji 100% ili 80% od obveznica manje rizičan fond.

Matematička rezerva unit-linked osiguranja nije poznata unapred i zavisi od uspeha odgovarajućih fondova.

Kako bi ovakav ugovor bio i ugovor o osiguranju a ne samo investicioni, različiti oblici beneficija se mogu garantovati: doživljenje, beneficije za slučaj smrti, povrat premije, itd. Ovi dodaci nose rizik sličan opcijama i takav rizik mora biti tačno ocenjen i naplaćen.

Kao što je već rečeno, u ovom radu ćemo se baviti ugovorima sa najmanje zagarantovanom beneficijom u slučaju smrti, $K$, i jednokratnom neto premijom osiguranja. Osigurana suma za slučaj smrti koja je nastala u trenutku $t$ je $\max\{K, S_t\} = S_t + \max\{K - S_t, 0\}$, gde je $\max\{K - S_t, 0\}$ riziko suma[1] osiguranja.

U daljem radu ćemo zanemariti prvi sabirak, $S_t$, jer je to vrednost osiguranikovih sredstava uloženih u neki fond i ne predstavlja nikakav rizik za osiguravača. Pravi rizik za osiguravajuću kompaniju je riziko suma, $\max\{K - S_t, 0\}$, jer je to ono što kompanija mora izdvojiti iz svojih sredstava kako bi isplatila beneficiju za slučaj smrti. Ako bi osiguravajuća kompanija želela da reosigura svoj rizik on bi iznosio upravo $\max\{K - S_t, 0\}$. Dakle, mi ustvari ocenjujemo premiju za rizik osiguravajuće kompanije koji bi ona htela da reosigura, tj. ocenjujemo premiju reosiguranja.

Možemo primetiti da riziko suma ima oblik sličan krajnjem novčanom toku evropske prodajne opcije sa strajk cenom $K$, pa ćemo i cenu za takav ugovor tražiti pomoću Black-Scholes formule za cenu opcije.

Razlika koja će se javiti u formulama ***(1.1)*** i ***(1.2)*** kod unit-linked životnog osiguranja je ta što će buduća osigurana suma (riziko suma) u bilo kom trenutku trajanja ugovora $t \in [0, T]$ biti nepoznata kako za osiguravača, tako i za osiguranika. Ta riziko suma će biti vrednost evropske prodajne opcije sa strajk cenom $K$ i dospećem $t$, gde je $t$ vreme smrti našeg osiguranika.

[1] **Riziko suma** je razlika osigurane sume koja treba biti isplaćena za slučaj smrti i matematičke rezerve koju kompanija ima na računu; naziv sledi iz toga što ona predstavlja iznos koji kompanija rizikuje.

# 2. BINOMNI MODEL

Razlika između diskretnih i neprekidnih finansijskih modela nije uvek tako očigledna. Neprekidni modeli se mogu smatrati graničnim slučajevima diskretnih modela, dok se sa druge strane diskretni modeli mogu izvesti iz neprekidnih. Pošto se novčane transakcije dešavaju u diskretnim vremenskim trenucima, diskretni modeli se čine veoma relevantnim. Čak štaviše, finansijski problemi su lakše objašnjeni u ovim modelima. Ovo je razlog zašto priču počinjemo sa diskretnim modelom za određivanje cene opcije.

Ipak, treba imati na umu da je upotreba kompjutera danas omogućila korišćenje neprekidnih modela, koji se sve više primenjuju i u praksi. Neprekidni modeli iziskuju dobro poznavanje stohastike, kao što ćemo videti u daljem radu.

Dakle, najpre ćemo uvesti diskretni model za određivanje cene opcije koji se naziva binomni model.

U binomnom modelu za određivanje cene opcije, pretpostavićemo da se cena akcije kreće po binomnom stablu, tj. da za svaki naredni period postoje dva scenarija kretanja cena akcija. Posmatraćemo vremenski period $\Delta t$.

Kako naš model podrazumeva i hedžing strategiju, napravićemo replikantni portfelj za našu prodajnu opciju. Replikantni portfelj će se sastojati od dve aktive, jedna je akcija koja predstavlja rizičnu aktivu $S$, a druga je obveznica koja predstavlja nerizičnu aktivu. Ako sa $\eta$ označimo iznos investiran u obveznicu, a sa $\xi$ iznos investiran u akciju, onda par $(\eta, \xi)$ čini jedan portfelj. Brojevi $\eta$ i $\xi$ su realni brojevi, što znači da mogu biti i pozitivni i negativni. Negativan broj znači da je kratka prodaja dozvoljena. Neka je $(\eta, \xi)$ naš replikantni portfelj. Pretpostavićemo da ne postoji ograničenje za kupovinu ili prodaju ovih aktiva i da nema troškova transakcije.

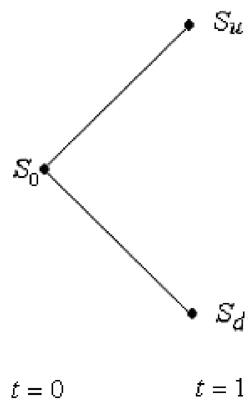
Kako od cene akcije zavisi i vrednost opcije na kraju perioda i vrednost replikantnog portfelja, razmotrićemo ponašanje oba u slučaju pada i u slučaju rasta cene akcije na tržištu.

Krenućemo najpre od modela za jedan period.

## 2.1. BINOMNI MODEL ZA 1 PERIOD

Kako je ovo model za jedan period imaćemo dva vremenska trenutka, početni $t=0$ i krajnji $t=1$.

Neka je na početku perioda cena akcije $S_0$. Tada ona na kraju prvog perioda može biti ili $S_u$ ili $S_d$ u zavisnost od toga da li je došlo do rasta ili pada na tržištu, $S_d \le S_u$.




*Slika 2.1*

Sa $p$ ćemo označiti verovatnoću da cena akcije poraste, a $1-p$ će biti verovatnoća da cena akcije padne ($0<p<1$).

Što se tiče ulaganja u obveznicu, ako investiramo 1 RSD u obveznicu u početnom trenutku $t=0$, onda ćemo na kraju, u trenutku $t=1$, sigurno dobiti $(1+r)$RSD, gde je $r$ nerizična konstantna kamatna stopa.

Neka je $(\eta,\xi)$ naš replikantni portfelj u trenutku $t=0$ za prodajnu opciju. Njegova vrednost u početnom i krajnjem trenutku je data u *Tabeli 2.1*.

| $t=0$ | $t=1$ |
|---|---|
| $\eta+\xi S_0$ | $\eta(1+r)+\xi S_u$ rast na tržištu<br>$\eta(1+r)+\xi S_d$ pad na tržištu |

*Tabela 2.1*

Sada ćemo odrediti vrednost prodajne opcije na akciju čija se cena kreće po binomnom modelu. Sa $P_u=\max\{K-S_u,0\}=(K-S_u)^+$ ćemo označiti vrednost prodajne opcije na kraju perioda ako je došlo do rasta na tržištu, a sa $P_d=\max\{K-S_d,0\}=(K-S_d)^+$ ćemo označiti vrednost prodajne opcije na kraju perioda ako je došlo do pada na tržištu.

Kako želimo da portfelj $(\eta,\xi)$ replikuje prodajnu opciju, to znači da njegova vrednost mora biti jednaka vrednosti prodajne opcije na kraju perioda.

| $t=0$ | $t=1$ |
|---|---|
| $\eta+\xi S_0$ | $\eta(1+r)+\xi S_u=P_u$ rast na tržištu<br>$\eta(1+r)+\xi S_d=P_d$ pad na tržištu |

*Tabela 2.2*

Rešavanjem sistema jednačina iz *Tabele 2.2* dobićemo koeficijente $\eta$ i $\xi$, tj. dobićemo replikantni portfelj za

$$\eta = \frac{1}{1+r}\frac{S_u P_d - P_u S_d}{S_u - S_d} \text{ i } \xi = \frac{P_u - P_d}{S_u - S_d}$$

Premija prodajne opcije na akciju čija se cena kreću po binomnom stablu je jednaka vrednosti portfelja u početnom trenutku, tj.

$$P_0 = \eta + \xi S_0$$

Kada u gornju jednakost ubacimo sračunate vrednosti za $\eta$ i $\xi$ dobijamo

$$P_0 = \frac{1}{1+r}\frac{S_u P_d - P_u S_d}{S_u - S_d} + \frac{P_u - P_d}{S_u - S_d} S_0 =$$

$$= \frac{1}{1+r}\frac{S_u P_d - P_u S_d}{S_u - S_d} + \frac{1}{1+r}\frac{P_u S_0 - P_d S_0 + rP_u S_0 - rP_d S_0}{S_u - S_d} =$$

$$= \frac{1}{1+r}\left( P_d \frac{S_u - (1+r) S_0}{S_u - S_d} + P_u \frac{(1+r) S_0 - S_d}{S_u - S_d} \right) =$$

$$= \frac{1}{1+r}\left( P_d \left( 1 - \frac{(1+r) S_0 - S_d}{S_u - S_d} \right) + P_u \frac{(1+r) S_0 - S_d}{S_u - S_d} \right) =$$

$$= \frac{1}{1+r}\left( P_d (1-q) + P_u q \right)$$

za $q = \frac{(1+r) S_0 - S_d}{S_u - S_d}$. Lako se može pokazati da su sledeće dve jednakosti ekvivalentne

$$0 \le q \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad S_d \le (1+r) S_0 \le S_u \qquad \textbf{\textit{(2.1)}}$$

i da u tom slučaju važi da je $(1+r) S_0 = qS_u + (1-q) S_d$. Ako je zadovoljena nejednakost $S_d \le (1+r) S_0 \le S_u$, tada se dobijena verovatnoća $q$ naziva rizik-neutralna verovatnoća. Pojam rizik-neutralne verovatnoće će biti objašnjen u Glavi 4. Prethodna jednakost i dve nejednakosti imaju objašnjenje u teoriji verovatnoće.

Investitor ima dve mogućnosti:

1. iznos $S_0$ investira u potpunosti u nerizičnu investiciju ili
2. iznos $S_0$ investira u potpunosti u akciju.

Ako sav iznos investira u obveznicu, jasno je da će na kraju prvog perioda imati $(1+r) S_0$, a ako pak sav novac investira u akciju, sa verovatnoćom $q$ će dobiti iznos $S_u$, a sa verovatnoćom $(1-q)$ će dobiti iznos $S_d$, pa mu je očekivani iznos na kraju perioda jednak $qS_u + (1-q) S_d$. Jednakost ***(2.1)*** kaže da su ove dve mogućnosti (strategije investiranja) jednake. To dalje znači da ako rizik merimo verovatnoćom $q$, investitoru je sasvim svejedno koju će strategiju odabrati. Ovo je razlog zašto se verovatnoća $q$ naziva rizik-neutralna verovatnoća.

Ako sada cene akcija $S_u$ i $S_d$ označimo kao proizvod početne cene $S_0$ i konstanti $u$ i $d$ respektivno, $d \le u$ ,dobijamo malu promenu u formulama

$$S_u = uS_0 \,,\; S_d = dS_0 \,,\; d \le u$$

$$P_0 = \frac{1}{1+r}\left(P_d\left(1-q\right)+P_u q\right), \tag{2.2}$$

$$q = \frac{\left(1+r\right)-d}{u-d}$$

Uslov da $q$ bude verovatnoća sada izgleda $0 \le q \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad d \le \left(1+r\right) \le u$ .

**TEOREMA 2.1**:

Neka je $d \le \left(1+r\right) \le u$, tada je cena prodajne opcije $P_0$ jednaka rizik-neutralnom očekivanju njene diskontovane vrednosti

$$P_0 = E_q\left(\frac{1}{1+r}P_1\right)$$

Dokaz ove teoreme sledi direktno iz ***(2.2).***

Primetimo da uopšte nismo razmatrali “prave” verovatnoće, tj. verovatnoće $p = P\left\{S_1 = S_u\right\}$ i $1-p = P\left\{S_1 = S_d\right\}$. Ovo će se pokazati važnom činjenicom u neprekidnom modelu.

## 2.2. ARBITRAŽA

Neka je $\left(\eta,\xi\right)$ portfelj, $V_0^{(\eta,\xi)}$ vrednost tog portfelja u početnom trenutku $t=0$, a $V_1^{(\eta,\xi)}\left(u\right)$ i $V_1^{(\eta,\xi)}\left(d\right)$ njegove moguće vrednosti u trenutku $t=1$.

**Definicija 2.1:**

Mogućnost arbitraže postoji ako postoji portfelj $\left(\eta,\xi\right)$ takav da važe sledeće tri osobine:

1. $V_0^{(\eta,\xi)} = 0$ ;

2. $V_1^{(\eta,\xi)}(u) \geq 0$ i $V_1^{(\eta,\xi)}(d) \geq 0$

3. $V_1^{(\eta,\xi)}(u) > 0$ ili $V_1^{(\eta,\xi)}(d) > 0$

Drugim rečima, ako tržište dozvoljava arbitražu, to znači da se može ostvariti profit bez početnog bogatstva. Ako tržište ne dozvoljava arbitražu, onda dva portfelja koja imaju istu krajnju vrednost moraju imati i istu početnu vrednost.

Odsustvo arbitraže je veoma bitna pretpostavka u teoriji određivanja cena. Naravno, sama pretpostavka nije realna, već predstavlja pojednostavljenje modela. Međutim, ako se na tržištu i pojavi mogućnost arbitraže, tržište toliko brzo reaguje da ona nestaje u veoma kratkom vremenskom periodu.

**TEOREMA 2.2*:***

Ako na tržištu ne postoji mogućnost arbitraže, onda je zadovoljena nejednakost

$$d \leq (1+r) \leq u\,,$$

tj. postoji rizik-neutralna verovatnoća $q = \dfrac{(1+r)-d}{u-d}$.

***Dokaz:***

Pretpostavimo suprotno, da je $1+r < d$. Posmatraćemo portfelj $(\eta,\xi) = (-S_0,1)$. U početnom trenutku investitor pozajmljuje $S_0$ po nerizičnoj kamatnoj stopi $r$ i kupuje jednu akciju po ceni od $S_0$. To znači da je $V_0^{(\eta,\xi)} = 0$. Na kraju prvog perioda on vraća svoju pozajmicu i prodaje akciju, tako da je vrednost portfelja:

- $V_1^{(\eta,\xi)}(u) = uS_0 - S_0(1+r) = S_0(u-(1+r))$ ako je došlo do rasta na tržištu
- $V_1^{(\eta,\xi)}(u) = dS_0 - S_0(1+r) = S_0(d-(1+r))$ ako je došlo do pada tržišta

Iz pretpostavljene nejednakosti $1+r < d \leq u$ sledi $V_1^{(\eta,\xi)}(u) > 0$ i $V_1^{(\eta,\xi)}(d) > 0$, tj. sledi da postoji mogućnost arbitraže, što je kontradikcija. ■

Iz prethodne teoreme sledi da je cena prodajne opcije u jednakosti ***(2.2)*** dobijena pod pretpostavkom da nema arbitraže.

## 2.3. KOMPLETNOST TRŽIŠTA

Nekada je moguće da tržište koje ne dozvoljava arbitražu ima više ekvivalentnih mera verovatnoće. Kako bismo uklonili ovu mogućnost uvešćemo dodatne uslove.

Tržište je kompletno ako za svaki derivat na tržištu postoji replikantni portfelj $(\eta, \xi)$ jedne nerizične i jedne rizične aktive.

**TEOREMA 2.3**:

Neka tržište ne dozvoljava arbitražu. Ako za svaki derivat na tržištu postoji replikantni portfelj $(\eta, \xi)$, tj. ako je tržište kompletno, onda postoji jedinstvena rizik-neutralna mera verovatnoće $Q$. I obrnuto, ako postoji jedinstvena rizik-neutralna mera verovatnoće $Q$, onda je tržište kompletno.

Kako bi u binomnom modelu za jedan period postojala jedinstvena mera verovatnoće $Q$, neophodno je da sistem jednačina iz kog smo dobili koeficijent $\eta$ i $\xi$ ima jedinstveno rešenje

$$\eta(1+r)+\xi u S_0 = P_u$$

$$\eta(1+r)+\xi d S_0 = P_d$$

Ako pretpostavimo da su vrednosti $u$ i $d$ jednake, onda se gornji sistem svodi samo na jednu jednačinu koja ima dve nepoznate.

$$\eta(1+r)+\xi u S_0 = P_u$$

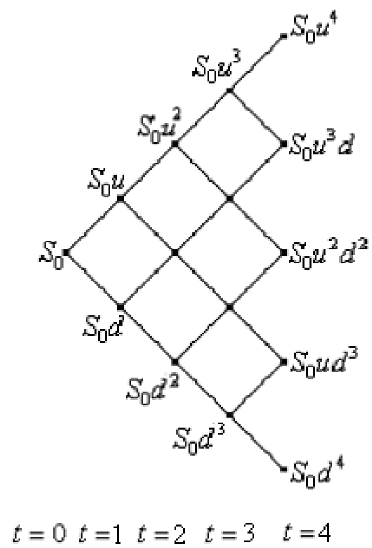
To znači da za koeficijente $\eta$ i $\xi$ postoji beskonačno mnogo rešenja u skupu realnih brojeva.

Dakle, ako želimo da uslov kompletnosti tržišta u binomnom modelu bude zadovoljen, moramo pretpostaviti da je $d < u$. Ovo možemo još zaključiti i iz činjenice da kada je $d = u$, onda $q \to \infty$.

Ako želimo da budu zadovoljeni i uslov kompletnosti i nemogućnost arbitraže, znači da u nejednakosti $d \leq (1+r) \leq u$ bar jedan znak mora biti znak stroge nejednakosti.

## 2.4. BINOMNI MODEL ZA VIŠE PERIODA

Model za jedan period se može proširiti na model sa više perioda. Ponovićemo ovaj postupak za svaki naredni interval iste dužine $\Delta t$. To znači da će iz svakog čvora polaziti dve cene akcije u budućem trenutku. Pretpostavićemo da kad god cena akcije raste ona raste za fiksnu stopu $u$, a da kad god cena pada, ona pada za fiksnu stopu $d$, tako da je $d \leq (1+r) \leq u$. Na kraju $n$-tog perioda cena može imati $k$ skokova i $n-k$ padova pa će imati vrednosti oblika $S_0 u^k d^{n-k}$, gde $k = 0, 1, \ldots, n$. Cena prima ove vrednosti sa verovatnoćama $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0,1,\ldots,n$. Na *Slici 2.2* prikazano je binomno drvo kretanja cene akcije za 4 perioda.




*Slika 2.2*

Analogno prethodnom slučaju, dobijamo da je premija prodajne opcije na akciju, čija se cena kreće po binomnom stablu, jednaka diskontovanoj očekivanoj vrednosti opcije nakon $n$ perioda, tj.

$$P_0 = \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} (K - S_0 u^k d^{n-k})^+ \qquad \textbf{(2.3)}$$

gde je $q = \dfrac{(1+r)-d}{u-d}$ rizik-neutralna verovatnoća.

I u slučaju binomnog modela sa više perioda važe isti uslovi za koeficijent $u$ i $d$ kako bi tržište bilo kompletno i bez mogućnosti arbitraže, tj. kako bi postojala jedinstvena rizik-neutralna mera $Q$ sa svojim verovatnoćama $q$ i $1-q$.

## 2.5. GEOMETRIJSKO – BROWNOVO[1] KRETANJE

Za cenu akcije (podloge) kažemo da prati **geometrijsko Brownovo kretanje**, sa drift parametrom $\mu$ i volatilnošću $\sigma$, ako je za sve nenegativne vrednosti $y$ i $t$ količnik $\frac{S_{t+y}}{S_y}$ slučajna promenljiva koja je nezavisna od cena do momenta $y$ i ako je još slučajna promenljiva

$$\ln\frac{S_{t+y}}{S_y} : \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$$

Parametar $\mu$ je očekivani prinos akcije i zavisi od rizika koji akcija nosi i visine kamatne stope, a parametar $\sigma$ je mera investitorove nesigurnosti u prinosima koje akcija donosi i obično je između 20% i 50%.

Do modela geometrijskog Brownovog kretanja dolazi se kada se u binomnom modelu za više perioda pusti da dužina perioda $\Delta \to 0$ ili da broj koraka $n$ u intervalu $[0,t]$ teži beskonačnosti, $n \to \infty$. Cena opcije je data jednačinom ***(2.3)***. Neka je $[0,t]$ period podeljen na $n$ jednakih intervala, tako da je dužina perioda $\Delta = \frac{t}{n}$, ($\Delta \to 0$, kada $n \to \infty$). Za parametre $u$ i $d$ uzećemo specijalno $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta}}$ i $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta}}$. Tada je rizik-neutralna verovatnoća $q = \frac{1+r-d}{u-d} \Rightarrow q = \frac{1+r\Delta-d}{u-d}$, jer posmatramo male vremenske intervale. Kako je

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta}} \approx 1+\sigma\sqrt{\Delta}+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta \quad \text{i} \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta}} \approx 1-\sigma\sqrt{\Delta}+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta \ ,$$

sledi da je

$$q = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sigma}(r-\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{\Delta}) = \frac{1}{2}(1+\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta})$$

za $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$.

Pokažimo sada da slučajna promenljiva $\ln\frac{S_t}{S_0} : \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$. Ako sa $X_i$ označimo diskretnu slučajnu promenljivu sa raspodelom

---

[1]**Robert Brown** (1773–1858) je bio poznati škotski botaničar, koji je radio u Australiji tokom prve polovine 19. veka; godine 1827. je otkrio posebno kretanje čestica polena i prašine, koje je kasnije objasnio Jan Ingenhousz, danski botaničar i fiziačar, i nazvao ga Brownovim kretanjem.

$$X_i : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1-q \end{pmatrix},$$

tada je po binomnom modelu $S_t = S_0 u^{\sum_{i=1}^{n} X_i} d^{n-\sum_{i=1}^{n} X_i}$. Dalje je:

$$\ln\frac{S_t}{S_0} = n\ln d + \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\ln\left(\frac{u}{d}\right) = -\frac{\sigma t}{\sqrt{\Delta}} + 2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\sigma\sqrt{\Delta}$$

$$E\left(\ln\frac{S_t}{S_0}\right) = -\frac{\sigma t}{\sqrt{\Delta}} + 2\sigma\sqrt{\Delta} nq = \mu t$$

$$D\left(\ln\frac{S_t}{S_0}\right) = 4\sigma^2 \Delta nq(1-q) \approx \sigma^2 t,\ n \to \infty$$

Dakle, važi $\ln\frac{S_{t+y}}{S_y} : \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$, tj. cena akcije prati geometrijsko Brownovo kretanje.

# 3. POJMOVI STOHASTIČKE ANALIZE

Pre nego što predstavimo neprekidan model za određivanje cene opcije i model za unit-linked ugovore, podsetićemo se određenih definicija i teorema iz stohastičke analize koje ćemo koristiti u daljem radu.

**Definicija 3.1:**

***Realan stohastički proces***, u oznaci $\{S_t\}_{t\in\Theta}$, je familija realnih slučajnih promenljivih definisanih na istom prostoru verovatnoća $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$, gde je $\Theta=[0,T]$ ili $\Theta=\mathbb{R}^+$ parametarski skup.

$S_t(\cdot)$ je za svako fiksirano $t\in\Theta$ jedna realna slučajna promenljiva.

$S_\cdot(\omega)$ je za svako fiksirano $\omega\in\Omega$ jedna realna funkcija definisana na $\Theta$, koja se naziva i ***trajektorija*** ili ***realizacija*** stohastičkog procesa $\{S_t\}_{t\in\Theta}$. Ako je trajektorija stohastičkog procesa neprekidna funkcija, onda je to jedan ***neprekidan stohastički proces***.

Razne vrste pojava u finansijskoj matematici su stohastički procesi, npr. proces cena akcija ili razne vrste rizika, pa i rizik od nastanka smrtnog slučaja.

Mi ćemo na dalje za parametarski skup $\Theta$ uzeti interval $[0,T]$ jer je to vreme koje ćemo posmatrati, vreme od kupovine jedne opcije do njenog dospeća ili vreme od početka ugovora o osiguranju do njegovog isteka.

**Definicija 3.2:**

Stohastički proces $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$ je ***proces sa nezavisnim priraštajima*** ako su slučajne promenljive $S_{t_0}, S_{t_1}-S_{t_0}, S_{t_2}-S_{t_1},\ldots,S_{t_n}-S_{t_{n-1}},\ldots$, koje zovemo pr iraštajima, nezavisne za svaki izbor tačaka $0=t_0\le t_1\le\cdots\le t_n\le\cdots$ iz intervala $[0,T]$.

**Definicija 3.3:**

Neka je $\Omega$ skup svih elementarnih događaja i $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}(\Omega)$ jedna $\sigma$ - algebra nad $\Omega$.
***Filtracija*** stohastičkog procesa je familija $\sigma$ - algebri nad $\Omega$, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$, takva da za sve $t\le s$ važi $\mathcal{F}_t\subseteq\mathcal{F}_s$ .

Kažemo da $\sigma$ - algebra $\mathcal{F}_t$ iz filtracije $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ predstavlja istoriju stohastičkog procesa do trenutka $t$, uključujući i taj trenutak. Za proces $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$ kažemo da je ***adaptiran*** filtraciji $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ ako je za svako $t\in[0,T]$ slučajna promenljiva $X_t$ $\mathcal{F}_t$ - merljiva, odnosno $\sigma(X_t)\subseteq\mathcal{F}_t$.

**Definicija 3.4:**

Neka su dati:

- prostor verovatnoća $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$;
- filtracija $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ na $\mathcal{F}$;
- stohastički proces $\{M_t\}_{t\in[0,T]}$.

Proces $\{M_t\}_{t\in[0,T]}$ je ***martingal*** ako važi:

i. Slučajna promenljiva $M_t$ je $\mathcal{F}_t$ - merljiva ili adaptirana filtraciji $\mathcal{F}_t$, ili drugim rečima, ako imamo informaciju o $\mathcal{F}_t$, onda nam je i vrednost za $M_t$ poznata;

ii. Za svako $s>t$, $E(M_s|\mathcal{F}_t)=M_t$, tj. prognoza za buduću vrednost procesa, ako nam je data istorija do trenutka $t$, jednaka je vrednosti u tom trenutku $t$.

Ako je $E(M_s|\mathcal{F}_t)\geq M_t$ za svako $s>t$, onda se proces $\{M_t\}_{t\in[0,T]}$ zove ***submartingal***, a ako je $E(M_s|\mathcal{F}_t)\leq M_t$ za svako $s>t$, proces se zove ***supermartingal***.

Kao i u diskretnom modelu, ove definicije se mogu iskazati finansijskim rečnikom. Na primer, ako je $\{M_t\}_{t\in[0,T]}$ proces bogatstva jednog investitora, onda druga osobina martingala $E(M_s|\mathcal{F}_t)=M_t$ znači da je očekivanje njegovog budućeg bogatstva jednako trenutnom bogatstvu.

**Definicija 3.5:**

Stohastički proces $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ je ***Brownovo kretanje (Wienerov proces)*** ako važi:

1) $W_t$ je skoro sigurno neprekidan proces;

2) $W_0=0$ skoro sigurno;

3) Za $s\leq t$, $W_t-W_s$ ima normalnu raspodelu sa očekivanjem 0 i varijansom $(t-s)$;

4) Za sve $n\geq 2$ i $0\leq t_0\leq t_1\leq\cdots\leq t_n$, slučajne promenljive $W_{t_n}-W_{t_{n-1}},\ldots,W_{t_1}-W_{t_0},W_{t_0}$ su nezavisne, tj. proces ima nezavisne priraštaje.

**TEOREMA 3.1:**

Neka je stohastički proces $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ $\mathcal{F}_t$- Brownovo kretanje. Tada su sledeći stohastički procesi $\mathcal{F}_t$- martingali:

1) $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$

2) $\{W_t^2 - t\}_{t\in[0,T]}$

3) $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\{M_t^\lambda\}_{t\in[0,T]}$, gde je $M_t^\lambda = e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}t}$

***Dokaz:***

1) $$\forall s>t,\, E\left(W_s \middle| \mathcal{F}_t\right) = E\left(W_s - W_t + W_t \middle| \mathcal{F}\right) = \underbrace{E\left(W_s - W_t \middle| \mathcal{F}_t\right)}_{\substack{\text{budućnost Braunovog}\\ \text{procesa ne zavisi}\\ \text{od istorije do } t}} + E\left(W_t \middle| \mathcal{F}_t\right)$$

$$= E\left(W_s - W_t\right) + W_t = \underbrace{E\left(W_s\right)}_{=0} - \underbrace{E\left(W_t\right)}_{=0} + W_t = W_t$$

2) $$\forall s>t,\, E\left(W_s^2 - s \middle| \mathcal{F}_t\right) = E\left(W_s^2 \middle| \mathcal{F}_t\right) - s = E\left(\left(W_s - W_t + W_t\right)^2 \middle| \mathcal{F}\right) - s$$

$$= E\left(\left(W_s - W_t\right)^2 \middle| \mathcal{F}_t\right) + E\left(2W_t\left(W_s - W_t\right) \middle| \mathcal{F}_t\right) + E\left(W_t^2 \middle| \mathcal{F}_t\right) - s$$

$$= E\left(\left(W_s - W_t\right)^2\right) + 2W_t E\left(W_s - W_t\right) + W_t^2 - s$$

$$= D\left(W_s - W_t\right) + \left(E\left(W_s - W_t\right)\right)^2 + 0 + W_t^2 - s = s - t + W_t^2 - s$$

$$= W_t^2 - t$$

3) $$\forall s>t,\, E\left(M_s^\lambda \middle| \mathcal{F}_t\right) = E\left(e^{\lambda W_s - \frac{\lambda^2}{2}s} \middle| \mathcal{F}_t\right) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}s} E\left(e^{\lambda W_s} \middle| \mathcal{F}_t\right) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}s} E\left(e^{\lambda\left(W_s - W_t + W_t\right)} \middle| \mathcal{F}_t\right)$$

$$= e^{-\frac{\lambda^2}{2}s} e^{\lambda W_t} E\left(e^{\lambda\left(W_s - W_t\right)} \middle| \mathcal{F}_t\right) = e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}s} E\left(e^{\lambda\left(W_s - W_t + W_t\right)}\right)$$

$$= e^{-\frac{\lambda^2}{2}s} e^{\lambda W_t} \underbrace{E\left(e^{\lambda\left(W_s - W_t\right)} \middle| \mathcal{F}_t\right)}_{\substack{\text{očekivanje lognormalne}\\ \text{raspodele}}} = e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}s} e^{\frac{\lambda^2}{2}(s-t)} = e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}t} = M_t^\lambda$$ ■

**TEOREMA 3.2:**

Neka je $W_t$ neprekidan stohastički proces na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tada su sledeća dva tvrđenja ekvivalentna:

a) $W_t$ je Brownovo kretanje u meri verovatnoće $P$.

b) $W_t$ i $W_t^2 - t$ su martingali u meri verovatnoće $P$.

Primetimo da smo jedan smer ove teoreme (a)$\Rightarrow$b)) već dokazali u okviru teoreme 3.1.

**Definicija 3.6:**

Stohastički proces $\{\tilde{W}_t\}_{t\in[0,T]}$ je ***Brownovo kretanje sa driftom*** $\boldsymbol{\mu}$ ***i volatilnošću*** $\boldsymbol{\sigma}$ ako važi:

1) $\tilde{W}_t$ je skoro sigurno neprekidan proces;

2) $\tilde{W}_0 = 0$ skoro sigurno;

3) Za $s \le t$, $\tilde{W}_t - \tilde{W}_s$ ima normalnu raspodelu sa očekivanjem $\mu(t-s)$ i varijansom $\sigma^2(t-s)$;

4) Za sve $n \ge 2$ i $0 \le t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_n$, slučajne promenljive $\tilde{W}_{t_n} - \tilde{W}_{t_{n-1}}, \ldots, \tilde{W}_{t_1} - \tilde{W}_{t_0}, \tilde{W}_{t_0}$ su nezavisne, tj. proces ima nezavisne priraštaje.

Lako se može pokazati (iz osobina normalne raspodele) da važi

$$\tilde{W}_t = \mu t + \sigma W_t$$

U prethodnoj glavi smo na diskretnom modelu videli ideju za definisanje cene akcije kao geometrijskog Brownovog kretanja. Sada sledi njegova matematička definicija.

**Definicija 3.8:**

Za stohastički proces $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$ se kaže da prati ***geometrijsko Brownovo kretanje*** sa drift parametrom $\mu$ i volatilnošću $\sigma$ ako zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednačinu

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \qquad \textbf{\textit{(3.1)}}$$

gde je $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ Wienerov proces.

**TEOREMA: (Itôva)**

Neka je $u = u\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ neprekidna funkcija definisana na $\left[0, T\right] \times \mathbb{R}^n$ i neka su svi njeni parcijalni izvodi $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $u_{x_i} = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $u_{x_i x_j} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, za $i, j = 1, 2, ..., n$, neprekidni na $\left[0, T\right] \times \mathbb{R}^n$. Neka je $n$ stohastičkih procesa $\left\{S_i\left(t\right)\right\}_{t \in [0,T]}$ zadato svojim diferencijalima

$$dS_i\left(t\right) = F_i dt + G_i dW_t, \; i = 1, 2, ..., n$$

u odnosu na isto Brownovo kretanje $W_t$. Tada stohastički proces $Y_t = u\left(t, S_1\left(t\right), S_2\left(t\right), \ldots, S_n\left(t\right)\right)$ ima sledeći stohastički diferencijal

$$dY_t = \left( u_t + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} F_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_{x_i x_j} G_i G_j \right) dt + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} G_i dW_t \qquad \textbf{\textit{(3.2)}}$$

Specijalno, za $n = 1$

$$du\left(t, S_t\right) = \left( u_t + u_x F + \frac{1}{2} u_{xx} G^2 \right) dt + u_x G dW_t \qquad \textbf{\textit{(3.3)}}$$

Definišimo sada stohastički proces $\left\{S_t\right\}_{t \in [0,T]}$ na sledeći način

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t} \qquad \textbf{\textit{(3.4)}}$$

gde je $S_0$ neka poznata početna vrednost. Pokažimo da $\left\{S_t\right\}_{t \in [0,T]}$ prati geometrijsko Brownovo kretanje sa driftom $\mu$ i volatilnošću $\sigma$, tj. da zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednačinu ***(3.1)***.

Neka je proces $Y_t = \left(\mu - \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t$, $t \in \left[0, T\right]$. Pošto su $\mu$ i $\sigma$ konstantni, tada je

$$dY_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t$$

Iskoristićemo Itôvu formulu ***(3.3)*** za funkciju $u\left(t, x\right) = S_0 e^x$.

$$u_t = 0, \; u_x = u_{xx} = S_0 e^x, \; F = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2, \; G = \sigma$$

$$du(t,Y_t)=d\left(S_0e^{Y_t}\right)=\left(0+S_0e^{Y_t}\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)+\frac{1}{2}S_0e^{Y_t}\sigma^2\right)dt+S_0e^{Y_t}\sigma dW_t$$

$$=S_0e^{Y_t}\mu dt+S_0e^{Y_t}\sigma dW_t$$

Jasno je da je $S_t=S_0e^{Y_t}$ , pa iz gornje jednakosti sledi

$$dS_t=d\left(S_0e^{Y_t}\right)=S_0e^{Y_t}\mu dt+S_0e^{Y_t}\sigma dW_t=\mu S_t dt+\sigma S_t dW_t$$

Dakle, prema definiciji 3.8, proces ***(3.4)*** zaista prati geometrijsko Brownovo kretanje sa driftom $\mu$ i volatilnošću $\sigma$. To znači da proces cena akcija možemo pisati u obliku stohastičke diferencijalne jednačine ***(3.1)*** ili procesa ***(3.4).***

U finansijskoj matematici se često javlja potreba za promenom mere verovatnoće. To se može pokazati veoma korisnim, kao što ćemo videti u daljem radu.

# 4. GIRSANOVA TEOREMA I RIZIK - NEUTRALNA MERA

U finansijskoj matematici, rizik-neutralna mera, ekvivalentna martingalna mera ili $Q$- mera, kako je još zovu, je mera verovatnoće koja proizilazi iz pretpostavke da je trenutna vrednost svih aktiva jednaka očekivanoj budućoj vrednosti tih aktiva diskontovanoj nerizičnom kamatnom stopom. Ovaj koncept se koristi u određivanju cena derivata.

Ideja nastanka rizik-neutralne mere je sledeća. Cene aktiva značajno zavise od njihovog rizika. Današnja cena neke aktive se razlikuje od njene očekivane vrednosti. Čak štaviše, pošto investitori imaju određenu averziju prema riziku današnja cena je često niža od očekivanja. Zbog toga, da bi se odredila cena aktiva, neophodno je izračunatu očekivanu vrednost tih aktiva prilagoditi uključenom riziku.

Ispostavilo se, međutim, da pod određenim slabim uslovima (odsustvo arbitraže) postoji alternativno jednostavnije rešenje određivanja cene aktive. Umesto da se prvo izračuna očekivanje a zatim prilagodi riziku, mogu se prvo prilagoditi verovatnoće budućih ishoda tako da one uključuju efekat rizika, a zatim se primeni očekivanje pod tim prilagođenim verovatnoćama. Ove prilagođene verovatnoće se nazivaju ***rizik-neutralne verovatnoće*** i one čine rizik-neutralnu meru.

Možemo još primetiti da pod rizik-neutralnom merom sve aktive imaju istu očekivanu stopu prinosa, a to je rizik-neutralna ili još nerizična kamatna stopa.

Matematički, prilagođavanje verovatnoća je ustvari transformacija mere u ekvivalentnu martingalnu meru. Ovo je moguće uz pretpostavku da nema arbitraže. Ako je tržište kompletno, onda je rizik-neutralna mera jedinstvena, kao što smo videli u diskretnom modelu.

**Definicija 4.1:**

Dve mere verovatnoće $P$ i $Q$ nad istim prostorom verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F})$ su ***ekvivalentne***, u oznaci $P \sim Q$, ako važi $P(A)=0 \Leftrightarrow Q(A)=0$, za sve $A \in \mathcal{F}$.

**TEOREMA: (Radon-Nikodym)**

Ako je su $P$ i $Q$ dve ekvivalentne mere verovatnoće na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$, onda postoji nenegativna slučajna promenljiva $Z$ takva da važi

$$Q(A)=\int_A Z dP, \forall A \in \mathcal{F}, \qquad \textbf{\textit{(4.1)}}$$

gde se $Z$ zove Radon-Nikodymov izvod od $Q$ u odnosu na $P$.

**Definicija 4.2:**

Ako je su $P$ i $Q$ dva ekvivalentne mere verovatnoće na prostoru $(\Omega,\mathcal{F})$, onda možemo definisati ***Radon-Nikodymov izvod*** od $P$ u odnosu na $Q$

$$\frac{dP}{dQ}(A), A\in \mathcal{F}$$

Jednakost ***(4.1)*** implicira jedan jači uslov koji kaže da je

$$E_Q(X)=E_P(ZX)=E_P\left(\frac{dQ}{dP}X\right)$$

Pretpostavimo da u trenutku dospeća $T$ finansijski derivat isplaćuje $V_T$ novčanih jedinica, gde je $V_T$ slučajna promenljiva na nekom prostoru verovatnoća sa merom $P$. Dalje pretpostavimo da je nerizični diskontni faktor od sadašnjeg trenutka $t=0$ do datuma dospeća $T$ jednak $e^{-rT}$. Sadašnja vrednost buduće isplate derivata je jednaka

$$V_0=e^{-rT}E_Q(V_T),$$

gde je sa $Q$ označena rizik-neutralna mera. Prethodni izraz se može izraziti i u meri verovatnoća $P$ uz pomoć Radon-Nikodymovog izvoda od $Q$ u odnosu na $P$

$$V_0=e^{-rT}E_P\left(\frac{dQ}{dP}V_T\right)$$

## 4.1. GIRSANOVA TEOREMA

Navešćemo najpre teoremu koja će nam koristiti u dokazu Girsanove teoreme.

**TEOREMA 4.1:**

Neka su $P$ i $Q$ dve ekvivalentne mere verovatnoća na prostoru $(\Omega,\mathcal{F})$ i neka je sa $Z$ označen Radon-Nikodymov izvod $Q$ u odnosu na $P$. Neka je dalje $X$ slučajna promenljiva iz prostora $(\Omega,\mathcal{F})$ takva da je

$$E_Q(|X|)=\int_\Omega |X|ZdP<\infty$$

Neka je dalje $\mathcal{H}$ $\sigma$- algebra takva da je $\mathcal{H}\subset\mathcal{F}$. Tada važi

$$E_Q(X|\mathcal{H})E_P(Z|\mathcal{H})=E_P(ZX|\mathcal{H})$$

**TEOREMA: (Girsanova)**

Neka je $W_t$, $0 \le t \le T$, Brownovo kretanje na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Neka je dalje $\mathcal{F}_t$, $0 \le t \le T$, odgovarajuća filtracija, a $\theta(t)$, $0 \le t \le T$, proces adaptiran ovoj filtraciji, takav da je

$$E_P\left(e^{\frac{1}{2}\int_0^T \theta^2(u)du}\right) < \infty$$

Za $0 \le t \le T$, definišemo

$$\tilde{W}_t = \int_0^t \theta(u)du + W_t,$$

$$Z_t = \exp\left\{-\int_0^t \theta(u)\,dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(u)\,du\right\},$$

i definišemo novu meru na sledeći način

$$Q(A) = \int_A Z_T dP, \ \forall A \in \mathcal{F}.$$

Tada je proces $\tilde{W}_t$, $0 \le t \le T$, Brownovo kretanje u meri $Q$.

Pre nego što dokažemo teoremu, pogledajmo šta sledi iz njenih uslova.

- Iz same definicije procesa $Z_t$, zaključujemo da $Z_T$ predstavlja Radon-Nikodymov izvod $Q$ u odnosu na $P$
- $Z_t$ je martingal

$$\begin{aligned} dZ_t &= -\theta(t) Z_t dW_t + \frac{1}{2}\theta^2(t) Z_t dW_t - \frac{1}{2}\theta^2(t) Z_t dt = \\ &= -\theta(t) Z_t dW_t \end{aligned}$$

- $Q$ je mera verovatnoće

  Kako je $Z_0 = e^0 = 1$ i $Z_t$ martingal, važi da je $E(Z_t) = 1$ za svako $t \ge 0$. Dalje sledi

$$Q(\Omega) = \int_\Omega Z_T dP = E(Z_T) = 1,$$

  pa je $Q$ zaista mera verovatnoće na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$

- $E_Q(X) = E_P(Z_T X)$, za slučajnu promenljivu $X$

Pokažimo ovo za slučaj kada je $X = I_A$, indikator slučajna promenljiva

$$E_Q(X) = Q(A) = \int_A Z_T dP = \int_\Omega Z_T I_A dP = E(Z_T X)$$

- Mere verovatnoća $P$ i $Q$ su ekvivalentne

$$P(A) = 0 \overset{Z_T > 0}{\Rightarrow} Q(A) = \int_A Z_T dP = 0$$

$$Q(A) = 0 \Rightarrow \int_A Z_T dP = 0 \overset{Z_T > 0}{\Rightarrow} P(A) = 0$$

***Dokaz:***

Zbog jednostavnosti ćemo pretpostaviti da je $\theta(t)$ ograničeno na $0 \le t \le T$. Prema Teoremi 3.2 treba da pokažemo da važi sledeće

i) $\tilde{W}_t$ je martingal u meri verovatnoća $Q$

ii) $\tilde{W}_t^2 - t$ je martingal u meri verovatnoća $Q$

Da bismo dokazali i) definisaćemo $M_t = Z_t \tilde{W}_t$ i iskoristićemo Itôvu formulu ***(3.2)*** da bismo dobili

$$\begin{aligned} dM_t &= Z_t d\tilde{W}_t + \tilde{W}_t dZ_t + d\tilde{W}_t dZ_t \\ &= Z_t \left(\theta(t) dt + dW_t\right) + \tilde{W}_t Z_t \left(-\theta(t) dW_t\right) + dW_t \left(-Z_t \theta(t) dW_t\right) \\ &= Z_t \left(dW_t - \tilde{W}_t \theta(t) dW_t\right) = Z_t \gamma(t) dW_t, \end{aligned}$$

gde je $\gamma(t) = 1 - \tilde{W}_t \theta(t)$. Sledi da je $M_t = Z_t \tilde{W}_t$ martingal u meri verovatnoća $P$. Prema Teoremi 4.1, za $t < s$ dobijamo

$$E_Q\left(\tilde{W}_s \middle| \mathcal{F}_t\right) = \frac{E_P\left(Z_s \tilde{W}_s \middle| \mathcal{F}_t\right)}{E_P\left(Z_s \middle| \mathcal{F}_t\right)} = \frac{E_P\left(M_s \middle| \mathcal{F}_t\right)}{Z_t} = \frac{M_t}{Z_t} = \tilde{W}_t,$$

što dokazuje da je $\tilde{W}_t$ martingal u meri verovatnoće $Q$.

Da bismo dokazali ii) definisaćemo $N_t = Z_t\left(\tilde{W}_t^2 - t\right)$ i iskoristićemo Itôve formule ***(3.3)*** i ***(3.2)*** da bismo dobili

$$d\left(\tilde{W}_t^2 - t\right) = \left(-1 + 2\tilde{W}_t \theta(t) + \frac{1}{2} 2\right) dt + 2\tilde{W}_t dW_t = 2\tilde{W}_t \theta(t) dt + 2\tilde{W}_t dW_t$$

$$dN_t = Z_t d\left(\tilde{W}_t^2 - t\right) + dZ_t\left(\tilde{W}_t^2 - t\right) + dZ_t d\left(\tilde{W}_t^2 - t\right)$$

$$= Z_t\left(2\tilde{W}_t\theta(t)\,dt + 2\tilde{W}_t dW_t\right) + \left(-Z_t\theta(t)\,dW_t\right)\left(\tilde{W}_t^2 - t\right)$$

$$+\left(-Z_t\theta(t)\,dW_t\right)\left(2\tilde{W}_t\theta(t)\,dt + 2\tilde{W}_t dW_t\right)$$

$$= 2\theta(t)\,Z_t\tilde{W}_t dt + 2Z_t\tilde{W}_t dW_t - \theta(t)\,Z_t dW_t\left(\tilde{W}_t^2 - t\right) - 2\theta(t)\,Z_t\tilde{W}_t dt$$

$$= Z_t\left(2\tilde{W}_t - \theta(t)\left(\tilde{W}_t^2 - t\right)\right)dW_t$$

$$= Z_t\delta(t)\,dW_t\,,$$

gde je $\delta(t) = 2\tilde{W}_t - \theta(t)\left(\tilde{W}_t^2 - t\right)$. Sledi da je $N_t = Z_t\left(\tilde{W}_t^2 - t\right)$ martingal u meri verovatnoća $P$. Prema Teoremi 4.1, za $t < s$ dobijamo

$$E_Q\left(\left(\tilde{W}_s^2 - s\right)\middle|\mathcal{F}_t\right) = \frac{E_P\left(Z_s\left(\tilde{W}_s^2 - s\right)\middle|\mathcal{F}_t\right)}{E_P\left(Z_s\middle|\mathcal{F}_t\right)} = \frac{E_P\left(N_s\middle|\mathcal{F}_t\right)}{Z_t} = \frac{N_t}{Z_t} = \tilde{W}_s^2 - s\,,$$

što dokazuje da je $\tilde{W}_s^2 - s\ \tilde{W}_t$ martingal u meri verovatnoće $Q$.

Dakle, na osnovu Teoreme 3.2 sledi da je $\tilde{W}_t$ Brownovo kretanje u meri $Q$. ■

## 4.2. RIZIK - NEUTRALNA MERA

Rizik-neutralna mera se za potrebe našeg modela može definisati na sledeći način.

**Definicija 4.3:**

***Rizik-neutralna mera*** je bilo koja mera $Q$ ekvivalentna meri $P$ u kojoj su sve diskontovane cene aktive martingali.

Dalje posmatramo cenu akcije koja prati geometrijsko Brownovo kretanje sa driftom $\mu$ i volatilnošću $\sigma$

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

i neka je sa $\tilde{S}_t$ označen proces diskontovane cene akcije $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$.

Cilj nam je da dobijemo verovatnoću $Q$, takvu da je

i. $Q$ ekvivalento $P$ i

ii. $\tilde{S}_t$ je $Q$- martingal.

$Q$ će u tom slučaju biti jedna rizik-neutralna mera za naš model kretanja cena akcija.

Kada raspišemo diferencijalnu jednačinu za cenu akcije, dobijamo

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t = rdt + (\mu - r)dt + \sigma dW_t$$

$$= rdt + \sigma\left(\frac{\mu - r}{\sigma}dt + dW\right)$$

Da bismo prvo prešli sa mere verovatnoće $P$ na ekvivalentnu meru $Q$, primenićemo Girsanovu teoremu za proces $\theta(t)$ jednak $\frac{\mu - r}{\sigma}$, koji se još naziva i tržišna cena rizika. Proces $\theta(t)$ jeste $\mathcal{F}_t$ - merljiv, jer su i $\mu$, $r$ i $\sigma$ $\mathcal{F}_t$ - merljivi (konstantni su u odnosu na vremensku promenljivu). Tada Brownovo kretanje u prostoru $Q$ ima sledeći oblik

$$\tilde{W}_t = \frac{\mu - r}{\sigma}t + W_t$$

Diferenciranjem dobijamo da je $d\tilde{W}_t = dW_t + \frac{\mu - r}{\sigma}dt$.

Diskontovani proces cene akcije za konstantnu nerizičnu kamatnu stopu, $e^{-rt}S_t$, ima diferencijalnu jednačinu koja izgleda

$$d\left(e^{-rt}S_t\right) = -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t = e^{-rt}\left(-rS_t dt + dS_t\right)$$

$$= e^{-rt}\left(-rS_t dt + \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t\right)$$

$$= e^{-rt}\left((\mu - r)S_t dt + \sigma S_t dW_t\right)$$

$$= e^{-rt}\sigma S_t\left(\frac{\mu - r}{\sigma}dt + dW_t\right)$$

$$= e^{-rt}\sigma S_t\left(\theta(t)dt + dW_t\right)$$

Definisali smo Brownovo kretanje u $Q$- meri $\tilde{W}_t = \frac{\mu - r}{\sigma}t + W_t$, koje ima diferencijal $d\tilde{W}_t = dW_t + \frac{\mu - r}{\sigma}dt$, pa sledi da je

$$d\left(e^{-rt}S_t\right)=\sigma e^{-rt}S_t d\tilde{W}_t$$

tj. proces diskontovane cene akcije $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ je martingal u meri $Q$.

Dakle, Girsanova teorema nam daje postojanje rizik-neutralne mere $Q$.

Iz svega gore navedenog zaključujemo da za datu meru verovatnoće $P$ i proces cene akcije koji prati geometrijsko Brownovo kretanje, možemo definisati rizik-neutralnu meru $Q$ u kojoj će cena akcije zadovoljavati sledeću diferencijalnu jednačinu

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t ,$$

gde je $\tilde{W}_t$ Brownovo kretanje u meri $Q$.

Prisetimo se na kraju da je u diskretnom modelu očekivanje diskontovane vrednosti portfelja jednako njegovoj sadašnjoj vrednosti, što je na neki način definicija martingala u diskretnom slučaju.

# 5. BLACK - SCHOLES MODEL

Posmatramo problem određivanja vrednosti opcije u proizvoljnom trenutku $t$ pre dospeća $T$, specijalno problem određivanja cene opcije koju treba platiti za pravo kupovine ili prodaje za unapred određenu cenu $K$ koju garantuje data opcija.

Pogledajmo najpre neprekidan model tržišta u Black-Scholes modelu.

## 5.1. MODEL TRŽIŠTA

U Black-Scholes modelu, finansijsko tržište se sastoji od sledećeg

- prostora verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
- konačnog vremenskog trenutka $T$, koji se naziva dospeće
- Brownovog kretanja $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
- filtracije $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
- rizične aktive, tj. akcije, $S_t$
- nerizične aktive, tj. obveznice, $B_t$

Pretpostavke Black-Scholes modela su sledeće:

1. nema troškova transakcije,
2. aktiva na koju se odnosi opcija ne plaća dividende,
3. nema arbitraže,
4. tržište je kompletno,
5. moguće je neprekidno vršiti trgovanje aktivama,
6. aktiva je deljiva,
7. dozvoljena je kratka prodaja,
8. nerizična kamatna stopa je konstantna,
9. cena akcije $S_t$ prati geometrijsko Brownovo kretanje.

Kao što smo već rekli, pretpostavićemo da se tržište sastoji od dve aktive, jedna će biti akcija $S_t$, a druga obveznica $B_t$.

Proces obveznice $B_t$ zadovoljava sledeću diferencijalnu jednačinu

$$\begin{cases} dB_t = rB_t dt \\ B_0 = 1 \end{cases},$$

gde je $r$ konstantna nerizična kamatna stopa. Rešenje prethodne jednačine je $B_t = e^{rt}, t \in [0,T]$.

Proces akcije $S_t$ koja prati geometrijsko Brownovo kretanje zadovoljava jednakost ***(3.4)***

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t}$$

Neka je, kao i u diskretnom modelu $(\eta, \xi)$ portfelj koji se sastoji od $\eta_t$ obveznica $B_t$ i $\xi_t$ akcija $S_t$ u trenutku $t \in [0,T]$.

**Definicija 5.1:**

***Tržišna strategija*** je par $(\eta, \xi)$ adaptiranih procesa takvih da važi

- $\int_0^T |\eta_t| dt < \infty$ skoro sigurno
- $E\left(\int_0^T \xi_t^2 dt\right) < \infty$
- $\int_0^T \xi_t^2 S_t^2 dt < \infty$ skoro sigurno

Dakle, ako je $(\eta, \xi)$ jedna strategija, tj. portfelj, vrednost tog portfelja u trenutku $t$ je stohastički proces

$$V_t^{(\eta,\xi)} = \eta_t B_t + \xi_t S_t$$

**Definicija 5.2:**

Za tržišnu strategiju $(\eta, \xi)$ se kaže da je ***samofinansirajuća*** (self-financing) ako važi

$$dV_t^{(\eta,\xi)} = \eta_t dB_t + \xi_t dS_t$$

Prethodna jednakost nije dobijena nekim Itôvim kalkulusom, već jednostavno znači da do promene vrednosti portfelja može doći jedino promenom cena aktiva koje on sadrži.

**Definicija 5.3:**

Na tržištu ***postoji mogućnost arbitraže*** ako postoji samofinansirajuća strategija $(\eta,\xi)$ takva da je:

1) $V_0^{(\eta,\xi)}=0$

2) $V_T^{(\eta,\xi)}\geq 0$ skoro sigurno i $E\left(V_T^{(\eta,\xi)}\right)>0$

Neka je sa $\tilde{S}_t$ označen proces diskontovane rizične aktive $\tilde{S}_t=\frac{S_t}{B_t}=e^{-rt}S_t$. U prethodnoj glavi smo pokazali uz pomoć Girsanove teoreme da postoji rizik-neutralna mera $Q$ definisana na prostoru $(\Omega,\mathcal{F})$.

Iz tehničkih razloga ćemo se ograničiti na određenu klasu strategija, koja se nazivaju dopustive strategije. Želimo da pokažemo da je u Black-Scholes modelu uvek moguće hedžirati buduće rizike.

**Definicija 5.4:**

Za tržišnu strategiju $(\eta,\xi)$ se kaže da je ***dopustiva*** ako je samofinansirajuće i ako njena diskontovana vrednost

$$\tilde{V}_t^{(\eta,\xi)}\overset{\text{def}}{=}\frac{V_t^{(\eta,\xi)}}{B_t}=\eta_t+\xi_t\frac{S_t}{B_t}$$

zadovoljava sledeće uslove

1. $\tilde{V}_t^{(\eta,\xi)}\geq 0$, za sve $t\in[0,T]$
2. $E\left(\left(\tilde{V}_t^{(\eta,\xi)}\right)^2\right)<\infty$, za sve $t\in[0,T]$

**Definicija 5.4:**

Finansijski derivat $H$ je ***moguće hedžirati***, ako postoji dopustiva strategija $(\eta,\xi)$, takva da je

$$H=V_T^{(\eta,\xi)}$$

Dakle, prema prethodnoj definiciji hedžing nekog derivata predstavlja investiranje u portfelj koji replicira krajnji novčani tok tog derivata.

**TEOREMA 5.5:**

U Black-Scholes modelu, svaki derivat $H$ koji je oblika $H = h(S_T)$ je moguće hedžirati i njegova vrednost u trenutku $t$ je data sa

$$V_t = V_t^{(\eta,\xi)} = E_Q\left(e^{-r(T-t)}h(S_T)\middle|\mathcal{F}_t\right)$$

Primetimo da je za evropsku prodajnu opciju mogući gubitak opisan funkcijom

$$h(S_T) = (K - S_T)^+$$

pa je vrednost opcije u trenutku $t$ definisana kao $P_t = E_Q\left(e^{-r(T-t)}(K - S_T)^+ \middle| S_t\right)$ ***(5.1)***

## 5.2. BLACK – SCHOLES FORMULA ZA CENU OPCIJE

Pogledajmo sada kako možemo doći do cene evropske prodajne opcije u početnom trenutku $t = 0$.

Označimo sa $V(S_t, t)$ vrednost opcije u trenutku $t$. Specijalno, sa $C(S_t, t)$ ćemo označiti vrednost kupovne opcije u trenutku $t$, a sa $P(S_t, t)$ ćemo označiti vrednost prodajne opcije u trenutku $t$. Pretpostavimo da cena akcije (ili neke druge aktive na koju se odnosi opcija) prati model geometrijskog Brownovog kretanja. Ako se realizuje trajektorija $S_t$ takva da je u momentu dospeća cena $S_T > K$ onda će se kupovna opcija izvršiti, a prodajna opcija neće.

Za kupovnu opciju funkcija prihoda u momentu dospeća $T$ je

$$C(S_t, t) = \max\{S_T - K, 0\},$$

a za prodajnu opciju funkcija prihoda u momenentu dospeća $T$ je

$$P(S_t, t) = \max\{K - S_T, 0\}.$$

Neka je $\sigma$ volatilnost cene akcije, a $r$ nerizična kamatna stopa koja je poznata i konstantna funkcija vremena u periodu dok važi ugovor na opciju.

Kako je $V(S_t, t)$ funkcija od cene akcije $S_t$, a $S_t$ prati model geometrijskog Brownovog kretanja

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

možemo primeniti Itôvu formulu na osnovu koje dobijamo

$$dV\left(S_{t,}t\right)=\frac{\partial V\left(S_{t,}t\right)}{\partial S_t}dS_t+\frac{\partial V\left(S_{t,}t\right)}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V\left(S_{t,}t\right)}{\partial S_t^{\ 2}}dS_t dS_t$$

$$=\frac{\partial V\left(S_{t,}t\right)}{\partial S_t}\left(\mu S_t dt+\sigma S_t dW_t\right)+\frac{\partial V\left(S_{t,}t\right)}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V\left(S_{t,}t\right)}{\partial S_t^{\ 2}}\sigma^2 S_t^2\underbrace{dt}_{dW_t dW_t}$$

Odatle dobijamo stohastičku diferencijalnu jednačinu za proces $V\left(S_t,t\right)$

$$dV=\sigma S_t\frac{\partial V}{\partial S_t}dW_t+\left(\mu S_t\frac{\partial V}{\partial S_t}+\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^{\ 2}}\sigma^2 S_t^2\right)dt \qquad \textbf{\textit{(5.2)}}$$

Sada ćemo konstruisati portfelj koji se sastoji od jedne opcije i $-\Delta$ akcija. Ovaj broj akcija je trenutno nepoznat, ali pretpostavićemo da se održava konstantnim u vremenskim periodima $dt$. Vrednost ovakvog portfelja u trenutku $t$ je

$$\Pi_t=V\left(S_t,t\right)-\Delta S_t \qquad \textbf{\textit{(5.3)}}$$

Skok u vrednosti ovog portfelja u jednom vremenskom trenutku $dt$ je

$$d\Pi_t=dV\left(S_t,t\right)-\Delta dS_t$$

jer smo pretpostavili da se $-\Delta$ održava konstantnim u čitavom vremenskom koraku $dt$. Koristeći činjenice da $S_t$ prati model geometrijskog Brownovog kretanja i da vrednost opcije $V_t$ prati stohastičku diferencijalnu jednačinu ***(5.2)***, dobijamo da vrednost portfelja $\Pi_t$ prati sledeću stohastičku diferencijalnu jednačinu

$$d\Pi_t=\sigma S_t\left(\frac{\partial V}{\partial S_t}-\Delta\right)dW_t+\left(\mu S_t\frac{\partial V}{\partial S_t}+\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^{\ 2}}\sigma^2 S_t^2-\mu\Delta S_t\right)dt$$

Dalje biramo da je broj akcija $\dfrac{\partial V}{\partial S_t}$ i dobijamo da je

$$d\Pi_t=\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^{\ 2}}\sigma^2 S_t^2\right)dt \qquad \textbf{\textit{(5.4)}}$$

Svota novca jednaka vrednosti $\Pi_t$, ako bi bila investirana u banku po nerizičnoj kamatnoj stopi $r$, dovela bi do prinosa

$$d\Pi_t=r\Pi_t dt$$

u vremenskom roku $dt$. Pošto smo pretpostavili da nema arbitraže, onda desna strana jednačine ***(5.4)*** mora biti jednaka desnoj strani prethodne jednačine.

$$r\Pi_t dt = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial {S_t}^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt$$

Kombinujući prethodnu jednačinu sa jednačinom ***(5.3)*** i zamenom $S_t$ sa $x$ dobijamo Black-Scholes parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$\boxed{\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} + r\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} x - rV(x,t) = 0}$$

Black-Scholes jednačina je jedna linearna parcijalna diferencijalna jednačina paraboličnog tipa. Da bi njeno rešenje bilo jedinstveno određeno potrebni su granični uslovi i upravo su oni ti koji karakterišu tip evropskih opcija. Potražićemo uslove za prodajne opcije, pošto njihov model odgovara modelu unit-linked ugovora. Cenu prodajne opcije smo označili sa $P(S_t,t) = P(x,t)$.

U momentu dospeća $t = T$, vrednost opcije mora biti jednak prihodu koji ona donosi, tj. granični uslov po vremenskoj promenljivoj je

$$P(x,T) = \max\{K - x, 0\}.$$

Prvi granični uslov po prostornoj promenljivoj $x$ dobijamo za $x = 0$. Ako je cena akcije nula u bilo kom vremenskom trenutku $(S_t = 0)$, tada je $S_t = 0$ u svakom vremenskom trenutku $t$ (cena akcije ne može da se menja). Ovo je jedini deterministički slučaj diferencijalne jednačine $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$. U momentu dospeća $t = T$ prihod koji donosi prodajna opcija na bezvrednu akciju je jednak $K$. Da bismo dobili vrednost opcije u bilo kom trenutku $t$, potrebno je izračunati trenutnu vrednost novca $K$, koji ćemo dobiti u trenutku $T$, tj. izvršićemo diskontovanje po nerizičnoj kamatnoj stopi $r$.

$$P(0,t) = Ke^{-r(T-t)}$$

Drugi granični uslov po prostornoj promenljivoj dobijamo kada $x \to \infty$. Ako cena akcije neograničeno raste, prodajna opcija se sigurno neće izvršiti, pa je njena vrednost jednaka nuli, tj.

$$\lim_{x\to\infty} P(x,t) = 0$$

Dakle, granični uslovi za evropsku prodajnu opciju su

$$\boxed{\begin{gathered} P(x,T) = \max\{K - x, 0\} \\ P(0,t) = Ke^{-r(T-t)} \\ \lim_{x\to\infty} P(x,t) = 0 \end{gathered}}$$

Black-Scholes jednačina se pomoću dve smene može transformisati u klasičnu jednačinu provođenja toplote za koju je poznato fundamentalno rešenje. Rešenje za evropsku prodajnu opciju je dato sledećim izrazom

$$P\left(S_t,t\right)=Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(-d_2\right)-S_t\Phi\left(-d_1\right), \tag{5.5}$$

gde su

$$d_1=\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{5.6}$$

$$d_2=\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{5.7}$$

a $\Phi$ funkcija raspodele normalne $(0,1)$ raspodele.

Posmatrajmo sada jedna drugi pristup kojim možemo doći do cene prodajne opcije u Black-Scholes modelu. Taj pristup se naziva martingalski pristup i u njemu ćemo koristiti jednakost ***(5.1)***.

$$P_t=E_Q\left(e^{-r(T-t)}\left(K-S_T\right)^+\middle|S_t\right)=e^{-r(T-t)}E_Q\left(\left(K-S_T\right)\cdot I_{\{K>S_T\}}\middle|S_t\right)=$$

$$=e^{-r(T-t)}KE_Q\left(I_{\{K>S_T\}}\middle|S_t\right)-e^{-r(T-t)}E_Q\left(S_T\cdot I_{\{K>S_T\}}\middle|S_t\right)$$

Dalje, iz ***(3.4)*** sledi

$$\left.\begin{aligned}e^{-rt}S_t&=e^{-rt}S_0e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W_t}=S_0e^{-\frac{1}{2}\sigma^2t+\sigma\tilde{W}_t}\\ e^{-rT}S_T&=e^{-rT}S_0e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\sigma W_T}=S_0e^{-\frac{1}{2}\sigma^2T+\sigma\tilde{W}_T}\end{aligned}\right\}\Rightarrow S_T=e^{r(T-t)}S_te^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\sigma\left(\tilde{W}_T-\tilde{W}_t\right)}$$

$$P\left\{K>S_T\right\}=P\left\{K>e^{r(T-t)}S_te^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\sigma\left(\tilde{W}_T-\tilde{W}_t\right)}\right\}$$

$$=P\left\{\ln\frac{K}{S_T}>r\left(T-t\right)-\frac{1}{2}\sigma^2\left(T-t\right)+\sigma\left(\tilde{W}_T-\tilde{W}_t\right)\right\}$$

$$=P\left\{\frac{\tilde{W}_T-\tilde{W}_t}{\sqrt{T-t}}<\frac{\ln\frac{K}{S_T}-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}=\Phi\left(-d_2\right),$$

gde je $d_2$ dato izrazom ***(5.7)*.** Dalje važi

$$e^{-r(T-t)}KE_Q\left(I_{\{K>S_T\}}\middle|S_t\right)=Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(d_2\right)$$

Neka je sada $\tilde{Q}$ ekvivalentna mera verovatnoće za $Q$ definisana kao $\frac{d\hat{Q}}{dQ} = e^{-rT} S_T$ i neka je $\hat{W}_t = \tilde{W}_t - \sigma t$. Tada je $\hat{W}_t$ Brownovo kretanje u meri $\hat{Q}$ i važi

$$\left.\begin{aligned} e^{-rt} S_t &= S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma \tilde{W}_t} = S_0 e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma \hat{W}_t} \\ e^{-rT} S_T &= S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma \tilde{W}_T} = S_0 e^{\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma \hat{W}_T} \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_T = e^{r(T-t)} S_t e^{\frac{1}{2}\sigma^2 (T-t) + \sigma\left(\hat{W}_T - \hat{W}_t\right)}$$

$$P\left\{K > S_T\right\} = P\left\{K > e^{r(T-t)} S_t e^{\frac{1}{2}\sigma^2 (T-t) + \sigma\left(\hat{W}_T - \hat{W}_t\right)}\right\}$$

$$= P\left\{\ln\frac{K}{S_T} > r\left(T-t\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\left(T-t\right) + \sigma\left(\hat{W}_T - \hat{W}_t\right)\right\}$$

$$= P\left\{\frac{\hat{W}_T - \hat{W}_t}{\sqrt{T-t}} < \frac{\ln\frac{K}{S_T} - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(T-t\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\} = \Phi\left(-d_1\right),$$

gde je $d_1$ dato izrazom ***(5.6).*** Dalje je

$$e^{-r(T-t)} E_Q\left(S_T \cdot I_{\{K > S_T\}} \middle| S_t\right) = E_{\hat{Q}}\left(I_{\{K > S_T\}} \middle| S_t\right) = S_t \Phi\left(-d_1\right),$$

Dakle, i u martingalskom pristupu se dobija ista formula za cenu prodajne opcije definisana izrazima ***(5.5)***, ***(5.6)*** i ***(5.7).***

# 6. UNIT – LINKED MODEL U ŽIVOTNOM OSIGURANJU

## 6.1. PRETPOSTAVKE MODELA

Sada ćemo na jednom mestu skupiti sve pretpostavke i zaključke koje smo postepeno uvodili, kako bismo na kraju definisali i objasnili model unit-linked životnog osiguranja.

Najpre, posmatramo ugovore sa najmanje zagarantovanom beneficijom u slučaju smrti, $K$, trajanjem od $T$ godina i jednokratnom neto premijom osiguranja. Osigurana suma za slučaj smrti koja je nastala u trenutku $t$, $t \in [0,T]$, je $\max\{K, S_t\} = S_t + \max\{K - S_t, 0\}$, gde je $\max\{K - S_t, 0\}$ riziko suma osiguranja. Zanemarićemo prvi sabirak, $S_t$, i posmatraćemo samo riziko sumu osiguranja, $\max\{K - S_t, 0\} = (K - S_t)^+$. Riziko suma osiguranja ima oblik krajnjeg novčanog toka evropske prodajne opcije sa strajk cenom $K$ i dospećem $t$. Dospeće ovog ugovora je nepoznato, jer je nepoznato i vreme smrti osiguranika.

Cenu ovog ugovora ćemo potražiti uz pomoć Black-Scholes formule za određivanje cene opcije. Pretpostavke Black-Scholes modela su sledeće:

1. nema troškova transakcije,
2. aktiva na koju se odnosi opcija ne plaća dividende,
3. nema arbitraže,
4. tržište je kompletno,
5. moguće je neprekidno vršiti trgovanje aktivama,
6. aktiva je deljiva,
7. dozvoljena je kratka prodaja,
8. cena akcije $S_t$ prati geometrijsko Brownovo kretanje sa drift parametrom $\mu$ i volatilnošću $\sigma$,
9. nerizična kamatna stopa $r$ je konstantna i poznata,
10. drift parametar $\mu$ i volatilnost cene akcije $\sigma$ su konstantni tokom vremena.

Pod pretpostavkama modela da je tržište kompletno i da nema arbitraže i primenom Girsanove teoreme, zaključili smo da postoji jedinstvena rizik-neutralna mera $Q$ za prvobitnu meru $P$, tako da se prvobitan model kretanja cene akcije

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

može predstaviti modelom u rizik-neutralnoj meri $Q$

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t ,$$

gde je $W_t$ Brownovo kretanje u meri verovatnoća $P$, a $\tilde{W}_t$ je Brownovo kretanje u rizik-neutralnoj meri $Q$.

## 6.2. AKTUARSKI I FINANSIJSKI PRISTUP MODELA

Definisaćemo već pomenuta dva pristupa rešavanju modela, aktuarski i finansijski pristup.

U aktuarskom pristupu ćemo pretpostaviti da cena akcije osiguranikovog fonda prati geometrijsko Brownovo kretanje, opisano sledećom stohastičkom diferencijalnom jednačinom u meri verovatnoće *P*

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Jedinstveno rešenje ove diferencijalne jednačine je $S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$.

Cena akcije će u finansijskom pristupu pratiti geometrijsko Brownovo kretanje opisano stohastičkom diferencijalnom jednačinom u rizik-neutralnoj meri *Q*

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t$$

Jedinstveno rešenje ove diferencijalne jednačine je $S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma \tilde{W}_t\right)$.

## 6.3. OČEKIVANI GUBITAK U TRENUTKU $t$ ZA SMRTNI SLUČAJ U TRENUTKU *T*

Za rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina finansijskog i aktuarskog pristupa znamo da važi sledeće

$$\ln \frac{S_T}{S_t}\bigg|_P : \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma^2 (T-t)\right)$$

$$\ln \frac{S_T}{S_t}\bigg|_Q : \mathcal{N}\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma^2 (T-t)\right)$$

Ovo znači da u aktuarskom pristupu prinos po akciji prati lognormalnu raspodelu sa parametrima $\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$ i $\sigma^2(T-t)$, a da u finansijskom pristupu prinos prati lognormalnu raspodelu sa parametrima $\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$ i $\sigma^2(T-t)$.

Sada možemo oceniti očekivani gubitak u trenutku $t$ za smrtni slučaj nastao u trenutku $T$, kako za aktuarski tako i za finansijski pristup. Iz ***(5.1)*** sledi

$$P^{Act}(t,T)=E_P\left[e^{-\mu(T-t)}\max\{K-S_T,0\}\middle|\mathcal{F}_t\right],$$

$$P^{Fin}(t,T)=E_Q\left[e^{-r(T-t)}\max\{K-S_T,0\}\middle|\mathcal{F}_t\right],$$

gde je $\mathcal{F}_t$ filtracija koja predstavlja skup svih informacija o ceni akcije i smrtnosti do trenutka *t*. Razlika ove dve formule je u očekivanoj stopi prinosa aktive pod svakom merom verovatnoće:

- $\mu$ pod *P*-merom za aktuarski pristup,
- *r* pod *Q*-merom za finansijski pristup.

Važno je napomenuti da se finansijski pristup zasniva na pretpostavci da se na finansijskom tržištu primenjuje strategija hedžinga. U suprotnom ovako dobijena cena nema smisla. Ova napomena je bitna, jer predstavlja manu finansijskog pristupa. Međutim, ovo vodi i do nekih prednosti nad aktuarskim pristupom:

- premija je nezavisna od očekivane stope prinosa akcije, dok se u aktuarskom pristupu mogu javiti neke greške u kalkulaciji,
- većina finansijskog rizika je eliminisana hedžiranjem portfelja, a ostali finansijski rizik proizilazi iz činjenice da rizik od smrti nije potpuno diversifikovan.

Očekivani gubitak u početnom trenutku $t=0$ za smrtni slučaj nastao u trenutku $t=k$ za aktuarski pristup možemo napisati i kao cenu prodajne opcije sa dospećem u trenutku $t=k$ u meri verovatnoće $P$

$$P^{Act}(0,k)=Ke^{-rk}\Phi\left(-d_2^{Act}(0,k)\right)-S_0\Phi\left(-d_1^{Act}(0,k)\right), \qquad \textbf{\textit{(6.1)}}$$

gde su

$$d_2^{Act}(t,T)=\frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \text{ i } d_1^{Act}(t,T)=d_2^{Act}(t,T)+\sigma\sqrt{T-t}$$

Očekivani gubitak u početnom trenutku $t=0$ za smrtni slučaj nastao u trenutku $t=k$ za finansijski pristup možemo napisati i kao cenu prodajne opcije sa dospećem u trenutku $t=k$ u meri verovatnoće $Q$

$$P^{Fin}\left(0,k\right)=Ke^{-rk}\Phi\left(-d_2^{Fin}\left(0,k\right)\right)-S_k\Phi\left(-d_1^{Fin}\left(0,k\right)\right), \qquad \textbf{\textit{(6.2)}}$$

gde su

$$d_2^{Fin}\left(t,T\right)=\frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\left(T-t\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} \text{ i } d_1^{Fin}\left(t,T\right)=d_2^{Fin}\left(t,T\right)+\sigma\sqrt{T-t}$$

## 6.4. NETO JEDNOKRATNA PREMIJA

Pretpostavićemo da naš osiguranik, koji kupuje polisu unit-linked životnog osiguranja na $T$ godina, ima $x$ godina. Kako je krajnje životno doba u tablici smrtnosti $\omega$, preostalo vreme do smrti našeg osiguranika, prema tablici mortaliteta, iznosi najviše $\omega-x$ godina. Jasno je da mora biti $T<\omega-x$, jer ne možemo osigurati osiguranika na duži period nego što očekujemo da će on živeti.

Odredićemo jednokratnu neto premiju (Single Pure Premium - *SPP*) za svaki pristup modela. Jednokratna neto premija je ustvari matematičko očekivanje diskretne slučajne promenljive koja prima vrednosti $P^{Act}\left(0,k\right)$ ili $P^{Fin}\left(0,k\right)$ sa verovatnoćama ${}_k p_x q_{x+k}$ , gde $k$ uzima vrednosti od 0 do $T$ i predstavlja preostalo vreme života našeg osiguranika (verovatnoća da osiguranik umre u $x+k$ – toj godini života)

$$SPP^{Act}=\sum_{k=1}^{\omega-x}P^{Act}\left(0,k\right)\,{}_{k-1}p_x\,q_{x+k-1}$$

$$SPP^{Fin}=\sum_{k=1}^{\omega-x}P^{Fin}\left(0,k\right)\,{}_{k-1}p_x\,q_{x+k-1}$$

Kada u prethodne formule za aktuarski i finansijski pristup ubacimo rezultate iz jednakosti ***(6.1)*** i ***(6.2)*** respektivno, dobijamo konačne formule za jednokratnu neto premiju.

$$SPP^{Act}=\sum_{k=1}^{T}Ke^{-rk}\Phi\left(-d_2^{Act}\left(0,k\right)\right)\,{}_{k-1}p_x\,q_{x+k-1}-S_0\sum_{k=1}^{T}\Phi\left(-d_1^{Act}\left(0,k\right)\right)\,{}_{k-1}p_x\,q_{x+k-1}$$

$$SPP^{Fin}=\sum_{k=1}^{T}Ke^{-rk}\Phi\left(-d_2^{Fin}\left(0,k\right)\right)\,{}_{k-1}p_x\,q_{x+k-1}-S_0\sum_{k=1}^{T}\Phi\left(-d_1^{Fin}\left(0,k\right)\right)\,{}_{k-1}p_x\,q_{x+k-1}$$

gde su funkcije $d_1^{Act}\left(t,T\right), d_2^{Act}\left(t,T\right), d_1^{Fin}\left(t,T\right)$ i $d_2^{Fin}\left(t,T\right)$ date relacijama ***(5.6)*** i ***(5.7)***.

Navedene formule izgledaju prilično slično. Finansijska premija je ništa drugo nego suma Black-Scholes cena za prodajnu opciju, a i aktuarska premija ima isti oblik. Jedina razlika je u tome što je u aktuarskom pristupu nerizična kamatna stopa $r$ zamenjena očekivanom stopom prinosa akcije, $\mu$. Ovo će dovesti do veće premije za finansijski pristup, bar sve dok je zadovoljena nejednakost $\mu > r$. Pretpostavka da je $\mu > r$ je realna, jer se i očekuje da rizična investicija ima veću stopu prinosa od nerizične investicije. U suprotnom, niko ne bi investirao u rizičnu investiciju.

Kako hoćemo da uporedimo opisana dva pristupa, nas ne interesuje samo jednokratna neto premija, koja ustvari predstavlja očekivane diskontovane buduće troškove $DFC$ (Discounted Future Costs). Nas još zanima i raspodela tih diskontovanih budućih troškova. Kako bismo odredili raspodele i za aktuarski i za finansijski pristup, koristićemo Monte Carlo simulacije.

# 7. STOHASTIČKE SIMULACIJE

Sa ciljem da dobijemo raspodelu diskontovanih budućih troškova (Discounted Future Costs – *DFC*), moramo da simuliramo cenu akcije i proces smrti u posmatranom periodu $\left[0,T\right]$.

Simulacija je proces u kome se generišu slučajni brojevi prema funkciji raspodele za koju se pretpostavlja da odgovara slučajnoj promenljivoj ili procesu, kao što je na primer prodaja novog proizvoda ili cena akcije u našem primeru. Simulirani brojevi se zatim analiziraju kako bi se dobili najverovatniji rezultati i prateći rizik. Često se ovakva tehnika naziva Monte Carlo simulacija, nazvana po gradu Monte Carlu - prestonici kazina.

## 7.1. SIMULACIJA CENE AKCIJE

Monte Carlo simulacija je ispravna i široko rasprostanjena tehnika. Za našu svrhu, pokazana je kao tačan metod određivanja cene opcije. Videćemo kako se Monte Carlo simulacija primenjuje na određivanje cene evropske opcije.

Pretpostavka Black-Scholes modela implicira da je za datu cenu akcije u trenutku $t$, $S_t$, simulirana promena cene te akcije u vremenu $\Delta t$ data formulom

$$\Delta S_t = S_t \mu \Delta t + S_t \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t},$$

gde je $\Delta S_t = S_{t+\Delta t} - S_t$ promena cene akcije, a $\varepsilon$ slučanjan broj koji ima standardizovanu normalnu raspodelu, $\varepsilon : \mathcal{N}\left(0,1\right)$. Data formula je aproksimacija stohastičke diferencijalne jednačine.

Fiksiraćemo vremenski period $\Delta t = 1$ i aproksimiraćemo stohastičku diferencijalu jednačinu u trenutku $n$ na sledeći način

$$\begin{cases} X_0 = S_0 \\ X_{n+1} - X_n = X_n\left(\mu\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}\right) \end{cases} = \begin{cases} X_0 = S_0 \\ X_{n+1} = X_n\left(1 + \mu\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}\right) \end{cases} \qquad \textbf{\textit{(7.1)}}$$

Primetimo da je sada dovoljno znati cenu akcije u početnom trenutku, $S_0$, a zatim generisati $T$ slučajnih brojeva iz standardizovane normalne raspodele, kako bismo dobili jednu diskretnu realizaciju procesa cena akcija $S_0, S_1, \ldots, S_T$.

## 7.2. SIMULACIJA PROCESA SMRTI

Sa $L_t$ ćemo označiti broj osiguranika koji imaju $x+t$ godina u trenutku *t*. To znači da je $L_0$ broj osiguranika starosti *x* koji kupuju istu polisu unit-linked osiguranja sa trajanjem od $T$ godina. Dalje ćemo sa $D_t$ označiti broj smrtnih slučajeva između trenutka *t* i *t+1*, ili drugim rečima broj osiguranika iz naše grupe koji imaju $x+t$ godina u trenutku *t* i koji će umreti u narednoj godini trajanja ugovora. Verovatnoća da osoba starosti $x+t$ umre u toj godini života je data tablicom mortaliteta (*Tabela 1.1*).

Ako je $L_t$ broj osoba starosti $x+t$, a $q_{x+t}$ verovatnoća smrti, onda možemo očekivati da će $L_t q_{x+t}$ osoba umreti u toku godine, od $L_t$ živih na početku. Dakle, $E(D_t) = L_t q_{x+t}$, pa možemo reći da broj smrtnih slučajeva u godini $t$ ima binomnu raspodelu sa parametrima $L_t$ i $q_{x+t}$, $D_t : \mathcal{B}(L_t, q_{x+t})$. Broj osiguranika koji imaju $x+t+1$ godinu u trenutku *t+1* će se smanjiti na $L_{t+1} = L_t - D_t$. Broj živih osiguranika ćemo aproksimirati sledećom formulom

$$\begin{cases} B_0 = L_0 \\ B_t = B_{t-1} - D_{t-1}, \, t = 1, \ldots, T-1 \end{cases}, \tag{7.2}$$

gde $D_t : \mathcal{B}(L_t, q_{x+t})$, kao što je već pokazano. Razlog zašto brojač ide to trenutka $T-1$ je taj što nas ni ne interesuje broj živih osiguranika u trenutku $T$, jer mi riziko sumu isplaćujemo samo u slučaju smrti osiguranika.

Iz svega gore navedenog možemo zaključiti da je za simulaciju smrtnog procesa $D_0, D_1, \ldots, D_{T-1}$ dovoljno znati broj osiguranika na početku ugovora, $L_0$, i verovatnoće smrtnosti.

Da bismo pojednostavili izraze pretpostavićemo da je riziko suma ista za sve osiguranike. Ovo u stvari sledi i iz same pretpostavke da svih $L_0$ osiguranika kupuje istu polisu osiguranja sa istom minimalno zagarantovanom beneficijom i istim fondom za ulaganje sredstava.

Izvršićemo $N$ simulacija.

## 7.3. PRILAGOĐAVANJE AKTUARSKOG PRISTUPA SIMULACIJI

Za simulaciju $i$, $i=1,\dots,N$, i osiguranika $j$, $j=1,\dots,L_0$, iznos koji treba platiti u trenutku $t$ je

$$M_t^{(i,j)}=\left(K-S_t^{(i)}\right)I_{\left\{\left\{S_t^{(i)}<K\right\}\cap\left\{T_x^i=t\right\}\right\}}(t),$$

gde je $T_x^{(i)}$ vreme koje protekne od početka ugovora do smrti $j$- tog osiguranika (koji ima $x$ godina u početnom trenutku) u *i*-toj simulaciji, a $I_{\left\{S_t^{(i)}<K\cap T_x^i=t\right\}}(t)$ indikator slučajna promenljiva

$$I_{\left\{S_t^{(i)}<K\cap T_x^i=t\right\}}(t)=\begin{cases}1, & \left\{S_t^{(i)}<K\right\}\cap\left\{T_x^i=t\right\}\\ 0, & \text{u suprotnom}\end{cases}$$

Da bismo realizovali slučajnu promenljivu $DFC^{Act}$, treba da sumiramo diskontovane realizacije $M_t^{(i,j)}$ po vremenu *t* i $L_0$ osiguranika.

$$DFC^{Act(i)}=\sum_{k=1}^{T}\sum_{j=1}^{L_0}e^{-rk}M_k^{(i,j)}$$

Ocena neto jednokratne premije $SPP$ se dobija kao srednja vrednost $N$ simulacija i $L_0$ osiguranika

$$SPP^{Act}=\frac{1}{NL_0}\sum_{i=1}^{N}DFC^{Act(i)}=\frac{1}{NL_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{T}\sum_{j=1}^{L_0}e^{-rk}M_k^{(i,j)}$$

Međutim, prethodna dva izraza možemo malo pojednostaviti ako posmatramo $\sum_{j=1}^{L_0}e^{-rk}M_k^{(i,j)}$ u određenom trenutku $k$. U vremenskom intervalu od $k$ do $k+1$ će prema simulaciji smrtnog procesa biti $D_k^{(i)}$ smrtnih slučajeva. Kako smo pretpostavili da svi osiguranici imaju istu riziko sumu $\left(K-S_k^{(i)}\right)$, sledi da će osiguravajuća kompanija za smrtne slučajeve nastale u godini $k$ isplatiti ukupno $D_k^{(i)}\left(K-S_{k+1}^{(i)}\right)$, tj. $\sum_{j=1}^{L_0}e^{-rk}M_k^{(i,j)}=e^{-rk}D_{k-1}^{(i)}\left(K-S_k^{(i)}\right)$. I ovde smo kao i u klasičnom životnom osiguranju pretpostavili da se riziko suma isplaćuje na kraju perioda $k$. Ovo dalje implicira

$$DFC^{Act(i)}=\sum_{k=1}^{T}e^{-rk}D_{k-1}^{(i)}\left(K-S_k^{(i)}\right) \tag{7.3}$$

$$SPP^{Act} = \frac{1}{NL_0} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{T} e^{-rk} D_{k-1}^{(i)} \left( K - S_k^{(i)} \right)$$

### 7.4. PRILAGOĐAVANJE FINANSIJSKOG PRISTUPA SIMULACIJI

Finansijki pristup je nešto teže prilagoditi simulaciji nego aktuarski pristup. Razlog ovome je što moramo da prikažemo uticaj hedžing strategije na cenu ugovora.

Hedžing smo definisali u Glavi 5 kao investiranje u portfelj $(\eta, \xi)$ koji se sastoji od dve aktive, jedne nerizične a druge rizične, takav da replicira krajnji tok derivata, tj. tako da mu je vrednost jednaka vrednosti derivata koji replicira.

Najpre ćemo definisati sadašnju vrednost budućih troškova hedžinga koji se sastoji od rizične i nerizične investicije u trenutku $t$ (ovaj iznos može biti pozitivan ili negativan):

$$G_{\xi}\left(r, t, S_t, \tilde{\xi}_t\right) = e^{-rt} S_t \left(\tilde{\xi}_t - \tilde{\xi}_{t-1}\right)$$

$$G_{\eta}\left(r, t, \tilde{\eta}_t\right) = e^{-rt} \left(\tilde{\eta}_t - \tilde{\eta}_{t-1} e^{r}\right)$$

gde je $\tilde{\xi}_t(T)$ kvantitet rizične aktive, a $\tilde{\eta}_t(T)$ novčani iznos nerizične aktive u trenutku $t$. Tada je $\tilde{\xi}_t - \tilde{\xi}_{t-1}$ količina rizičnih akcija koju trebamo kupiti (ili prodati ako je negativan) kako bismo hedžirali rizik. Može se pokazati da važi

$$\tilde{\eta}_t(T) = \sum_{j=1}^{L_0} \sum_{k=t+1}^{T} \eta_t(k)\,{}_{k-1}p_x\, q_{x+k-1}$$

$$\tilde{\xi}_t(T) = \sum_{j=1}^{L_0} \sum_{k=t+1}^{T} \xi_t(k)\,{}_{k-1}p_x\, q_{x+k-1}$$

Proces $\left(\tilde{\eta}_t(T), \tilde{\xi}_t(T)\right)_{0 \le t \le T}$ odgovara broju aktiva neophodnih u trenutku $t$ kako bi se replikovao novčani tok generisan našim ugovorom koji se završava u trenutku $T$. Ovo je ustvari suma koeficijenata za replikovanje toka evropske prodajne opcije ponderisana verovatnoćama smrtnosti u $x+t$ godina.

Koeficijenti $\xi_t(k)$ i $\eta_t(k)$ predstavljaju kvantitet rizične i novčani iznos nerizične aktive koji je neophodan u trenutku $t$ kako bi se replicirao krajnji tok evropske prodajne opcije sa strajk cenom $K$ i dospećem u trenutku $k$. Jasno je onda da vrednost tog portfelja u trenutku $t$ mora biti jednaka vrednosti opcije u istom tom trenutku, tj.

$$\eta_t(k) + S_t \xi_t(k) = P_t$$

$$\eta_t(k)+S_t\xi_t(k)=Ke^{-r(k-t)}\Phi\left(-d_2^{Fin}(t,k)\right)-S_t\Phi\left(-d_1^{Fin}(t,k)\right)$$

Iz gornjih formula dobijamo da je

$$\tilde{\eta}_t(T)=K\sum_{j=1}^{L_0}\sum_{k=t+1}^{T}e^{-r(k-t)}\Phi\left(-d_2^{Fin}(t,k)\right)\,{}_{k-1}p_x\,q_{x+k-1}$$

$$\tilde{\xi}_t(T)=-\sum_{j=1}^{L_0}\sum_{k=t+1}^{T}\Phi\left(-d_1^{Fin}(t,k)\right)\,{}_{k-1}p_x\,q_{x+k-1}$$

Kako ništa u gornjim sumama ne zavisi od indeksa $j$, prethodne formule se mogu malo pojednostaviti na sledeći način

$$\tilde{\eta}_t(T)=KL_0\sum_{k=t+1}^{T}e^{-r(k-t)}\Phi\left(-d_2^{Fin}(t,k)\right)\,{}_{k-1}p_x\,q_{x+k-1}$$

$$\tilde{\xi}_t(T)=-L_0\sum_{k=t+1}^{T}\Phi\left(-d_1^{Fin}(t,k)\right)\,{}_{k-1}p_x\,q_{x+k-1} \tag{7.4}$$

Hedžing strategija, isto kao i odgovarajuća formula za cenu, se zasniva na pretpostavci da je osiguravač rizik-neutralan što se tiče smrtnosti, tj. da ima dovoljno veliki portfelj osiguranika.

Realizacija slučajne promenljive $DCF^{Fin}$ se dobija sumiranjem diskontovanih troškova od smrtnosti i hedžinga.

$$\begin{aligned}
DFC^{Fin(i)} &= \sum_{k=1}^{T}\left[\sum_{j=1}^{L_0}e^{-rk}M_k^{(i,j)}+G_{\xi}^{(i)}\left(r,k,S_k^{(i)},\tilde{\xi}_k^{(i)}\right)+G_{\eta}^{(i)}\left(r,k,\tilde{\eta}_k^{(i)}\right)\right]+\tilde{\eta}_0^{(i)}+\tilde{\xi}_0^{(i)}S_0^{(i)}\\
&= \sum_{k=1}^{T}\sum_{j=1}^{L_0}e^{-rt}M_k^{(i,j)}+\sum_{k=1}^{T}\left[G_{\xi}^{(i)}\left(r,k,S_k^{(i)},\tilde{\xi}_k^{(i)}\right)+G_{\eta}^{(i)}\left(r,k,\tilde{\eta}_k^{(i)}\right)\right]+\tilde{\eta}_0^{(i)}+\tilde{\xi}_0^{(i)}S_0^{(i)}\\
&= DFC^{Act(i)}+\sum_{k=1}^{T}\left[e^{-rk}S_k^{(i)}\left(\tilde{\xi}_k^{(i)}-\tilde{\xi}_{k-1}^{(i)}\right)+e^{-rk}\left(\tilde{\eta}_k^{(i)}-\tilde{\eta}_{k-1}^{(i)}e^{r}\right)\right]+\tilde{\eta}_0^{(i)}+\tilde{\xi}_0^{(i)}S_0^{(i)}\\
&= DFC^{Act(i)}+\sum_{k=1}^{T}-\tilde{\xi}_k^{(i)}\left(e^{-rk}S_k^{(i)}-e^{-r(k-1)}S_{k-1}^{(i)}\right)
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Konačno, dobijamo ocenu za $SPP^{Fin}$ kao srednju vrednost $N$ simulacija i $L_0$ osiguranika

$$\begin{aligned}
SPP^{Fin} &= \frac{1}{NL_0}\sum_{i=1}^{N}DFC^{Fin(i)}=\\
&= \frac{1}{NL_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{T}-\tilde{\xi}_k^{(i)}\left(e^{-rk}S_k^{(i)}-e^{-r(k-1)}S_{k-1}^{(i)}\right)+SPP^{Act}
\end{aligned}$$

### 7.5. REZULTATI SIMULACIJE

Simulacija je rađena u programskom paketu Mathematica.

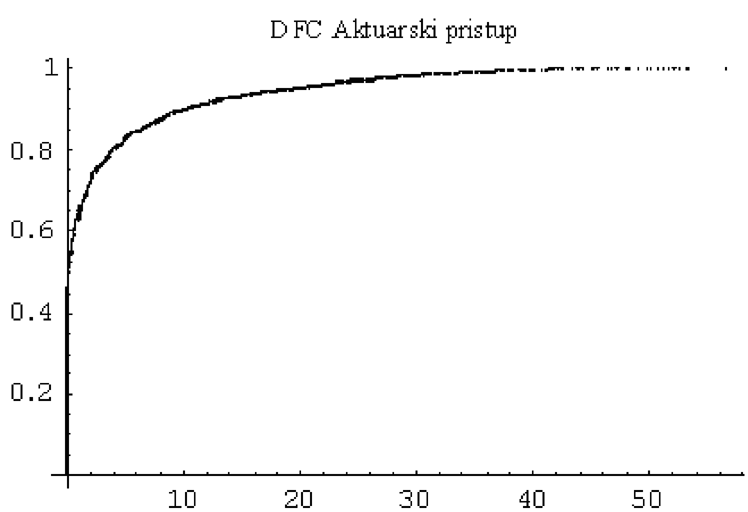
- Za simulaciju procesa cena akcija je korišćena formula ***(7.1)***;
- Za simulaciju procesa smrti je korišćena formula ***(7.2)***;
- Za simulaciju diskontovanih budućih troškova aktuarskog pristupa je korišćena formula ***(7.3)***;
- Za simulaciju diskontovanih budućih troškova finansijskog pristupa su korišćene formule ***(7.4)*** i ***(7.5)***;

Pretpostavljaju se sledeće vrednosti:

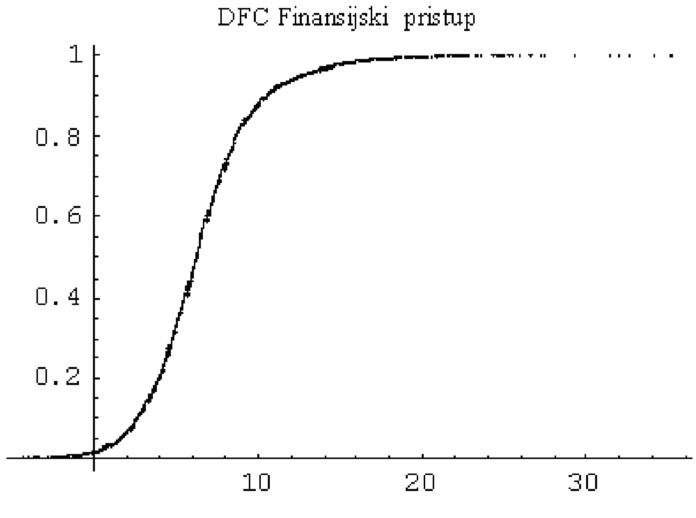
- Cena akcije u početnom trenutku $S_0 = 1$;
- Drift parametar $\mu = 8.5\%$, a volatilnost $\sigma = 25\%$;
- Minimalna zagarantovana beneficija $K = 1$;
- Nerizična kamatna stopa $r = 5\%$;
- 1000 osiguranika starosti 45, $L_0 = 1000$, $x = 45$;
- $N = 10000$ simulacija.

Kod programa je priložen u dodatku na kraju rada.

Sledeći grafici prikazuju raspodele za diskontovane buduće troškove , $DFC$, dobijene korišćenjem aktuarskog i finansijskog pristupa, respektivno.




*Grafik 7.1*




*Grafik 7.2*

Odmah možemo uočiti da je raspodela dobijena aktuarskim pristupom veoma disperzivna u poređenju sa raspodelom dobijenom finansijskim pristupom. Ovo proizilazi iz činjenice da je $DFC^{Act}$ veoma osetljiv na male promene aktive, dok je u finansijskom pristupu skoro ceo finansijski rizik uklonjen hedžiranjem (primetimo da nije uklonjen sav finansijski rizik zato što je smrtnost slučajna i mi nismo potpuno rizik-neutralni na smrt, pa hedžing ne može biti savršen).

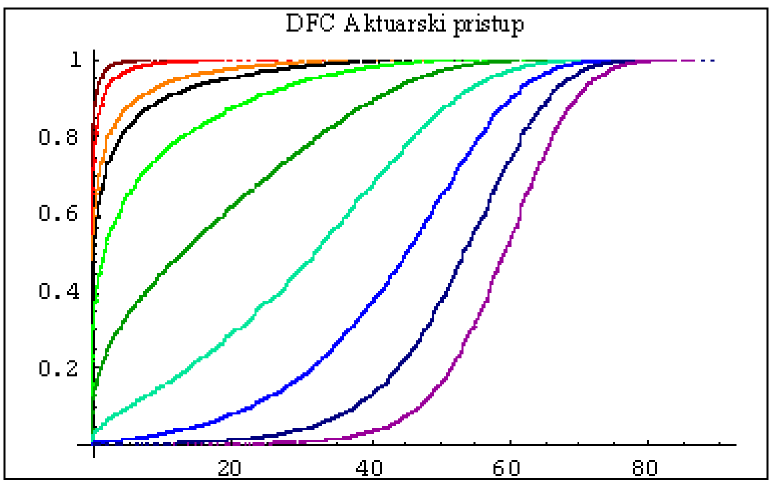
## 7.6. ANALIZA SENZITIVNOSTI

Kada smo vršili simulacije kako bismo odredili raspodelu diskontovanih budućih troškova $DFC$ fiksirali smo određene parametre kao što su nerizična kamatna stopa $r$, očekivana stopa prinosa $\mu$, volatilnost $\sigma$. Raspodela za $DFC$ je funkcija svih ovih parametara. Međutim, nama nisu poznate tačne vrednosti ovih parametara, već njihove ocene, pa su samim tim te date ocenjene vrednosti podložne greškama. Cilj ovog poglavlja je testirati osetljivost (sensitivity) raspodele diskontovanih budućih troškova na pomenute parametre ($\mu$ i $\sigma$) i to u oba pristupa, aktuarski i finansijski.

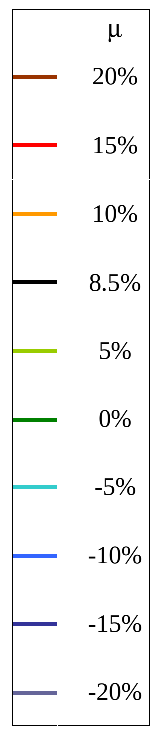
Sledi grafički prikaz promene raspodele za $DFC$ u zavisnosti od promene stope prinosa $\mu$, gde će $\mu$ uzimati vrednosti iz skupa $\{-20\%, -15\%, -10\%, -5\%, 0\%, 5\%, 8.5\%, 10\%, 15\%, 20\%\}$

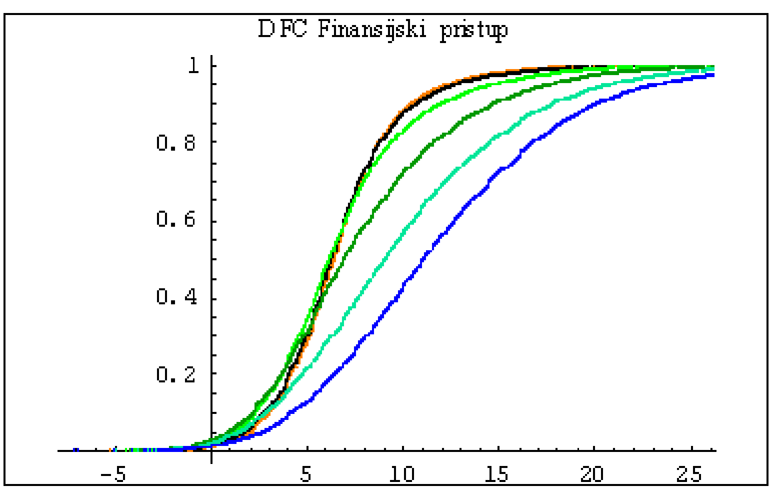
| Osetljivost na promene parametra μ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Aktuarski pristup | | Finansijski pristup | |
| | Srednja vrednost | Standardno odstupanje | Srednja vrednost | Standardno odstupanje |
| -10% | 43.22 | 14.66 | 11.74 | 6.30 |
| -5% | 30.57 | 17.22 | 9.73 | 5.84 |
| 0% | 17.21 | 16.11 | 7.97 | 5.15 |
| 5% | 6.98 | 10.90 | 6.76 | 4.20 |
| 8.5% | 3.12 | 6.82 | 6.69 | 3.47 |
| 10% | 2.07 | 5.23 | 6.70 | 3.15 |
| 15% | 0.62 | 2.26 | 7.20 | 2.61 |
| 20% | 0.20 | 0.83 | 7.79 | 2.22 |

*Tabela 7.1*




*Grafik 7.3*

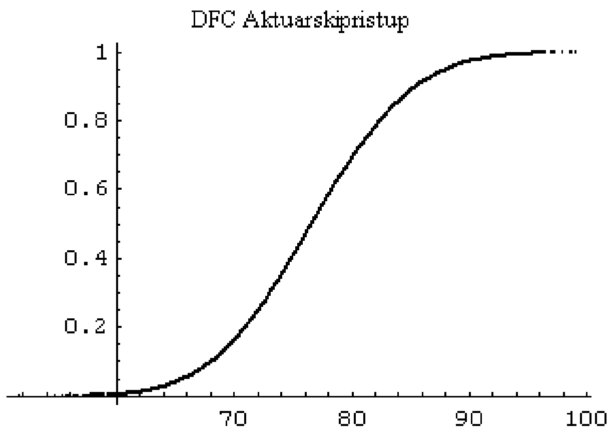



*Grafik 7.4*

Kao što smo i očekivali, finansijska premija (srednja vrednost od $DFC^{Fin}$) je skoro nezavisna od promena stope prinosa $\mu$, dok je aktuarska premija veoma osetljiva na promene stope prinosa i raste sa njenim opadanjem. Kada $\mu$ postane negativno, oblik raspodele aktuarskog pristupa teži obliku raspodele klasičnog životnog osiguranja (bez finansijske komponente).

Funkcija raspodele klasičnog životnog osiguranja kojU dobijamo ako izbacimo finansijski rizik i ako za osiguranu sumu uzmemeo konstantno $K = 1$ data je na *Grafiku 7.5*




*Grafik 7.5*

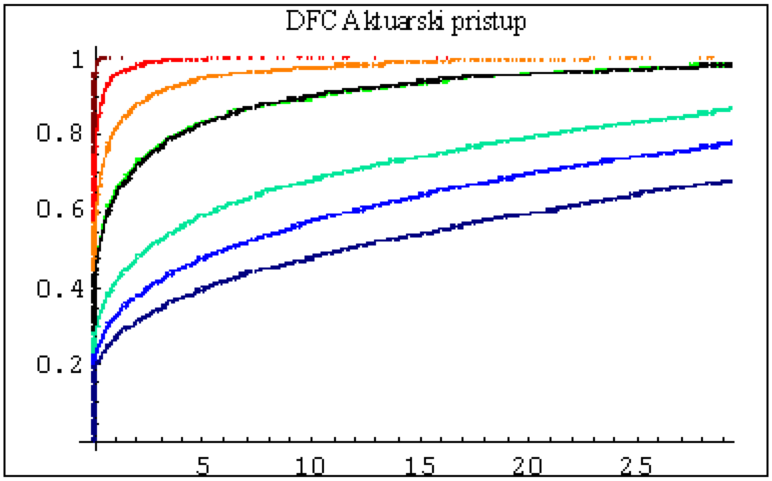
Sa ovog grafika možemo videti da oblik raspodele aktuarskog pristupa zaista teži obliku raspodele klasičnog životnog osiguranja kada $\mu$ postane negativno.

Čak je i oblik raspodele finansijskog pristupa podložan promenama drift parametra. Primećujemo da je više centriran oko srednje vrednosti kako parametar $\mu$ raste.

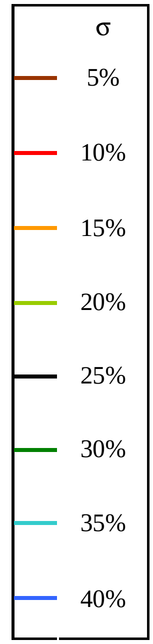
Sledi grafički prikaz i tabela promene raspodele za $DFC$ u zavisnosti od promene volatilnosti $\sigma$, gde će $\sigma$ uzimati vrednosti iz skupa $\{5\%, 10\%, 15\%, 20\%, 25\%, 30\%, 35\%, 40\%\}$.

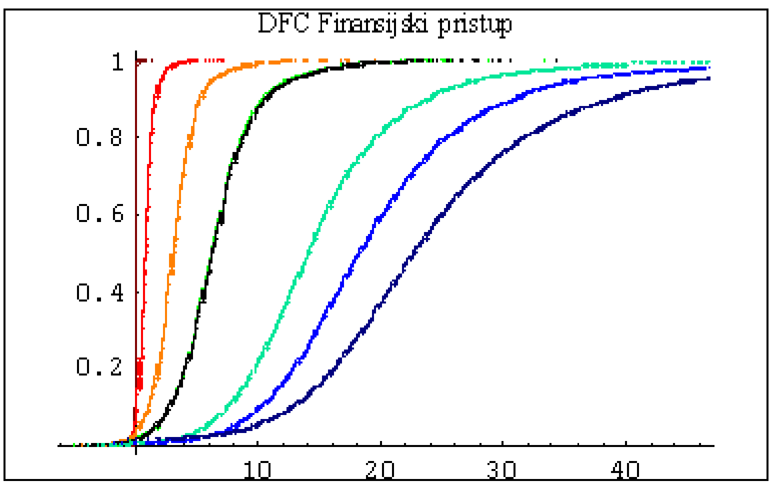
| Osetljivost na promene parametra σ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Aktuarski pristup | | Finansijski pristup | |
| | Srednja vrednost | Standardno odstupanje | Srednja vrednost | Standardno odstupanje |
| 5% | 0.004 | 0.03 | 0.06 | 0.06 |
| 10% | 0.16 | 0.68 | 0.94 | 0.71 |
| 15% | 1.07 | 3.14 | 3.31 | 2.00 |
| 20% | 3.05 | 6.72 | 6.58 | 3.40 |
| 25% | 3.12 | 6.82 | 6.69 | 3.47 |
| 30% | 10.58 | 15.24 | 10.44 | 4.69 |
| 35% | 15.27 | 19.23 | 15.62 | 5.25 |
| 40% | 20.96 | 24.04 | 20.75 | 5.94 |

*Tabela 7.2*




*Grafik 7.5*




*Grafik 7.6*

U ovom slučaju možemo primetiti da je raspodela diskontovanih budućih troškova osetljiva na promene volatilnosti u oba pristupa. I srednja vrednost i standardno odstupanje rastu sa porastom volatilnosti. Međutim, standardno odstupanje je mnogo manje osetljivo na promene u finansijskom pristupu nego u aktuarskom.

Svi ovi rezultati govore u korist finansijkog pristupa, tj. kažu da je on bolji. Međutim, finansijski pristup zahteva hedžiranje, a to nije uvek moguće niti poželjno u praksi. Pasivno hedžiranje nije moguće pošto je vrlo teško naći odgovarajuću prodajnu opciju (najverovatnije zbog toga što je datum dospeća unit-linked ugovora daleko u budućnosti). Aktivno hedžiranje traži konstantno rebalansiranje portfelja i može proizvesti velike troškove za kompaniju. Čak štaviše, aktive nisu uvek precizno definisane, što dobar hedžing čini gotovo nemogućim.

Kao posledica svega rečenog je da osiguravajućim kompanijama na kraju ostaje aktuarski pristup. Iako lošiji od finansijkog, on je izvodljiv u praksi.

# 8. ZAKLJUČAK

Cilj ovog rada je bio da se odredi model za premiju i raspodelu diskontovanih budućih troškova unit-linked ugovora u životnom osiguranju. Tačnije, cilj je bio da se odrede dva pristupa jednom modelu i da se zatim ta dva pristupa uporede.

Ustanovili smo da se model ponaša slično kao i krajnji tok evropske prodajne opcije, pa smo iz tog razloga objasnili modele za određivanje cene opcije.

Najpre smo krenuli od binomnog modela koji je diskretni model za određivanje cene opcije. Na ovom diskretnom modelu je bilo jednostavnije objasniti pojmove i kretanja na finansijskom tržištu.

Pre izlaganja neprekidnog Black-Scholes modela i istoimene formule za ocenjivanje opcije, podsetili smo se nekih pojmova iz stohastičke analize koji čine njegovu pozadinu.

Najbitniji pojam u radu je rizik-neutralna mera, a najbitnija teorema je Girsanova teorema koja pod određenim uslovima garantuje postojanje te rizik-neutralne mere. Girsanova teorema ustvari omogućuje prelaz sa jedne mere verovatnoće na drugu, njoj ekvivalentnu, meru $Q$. Upravo je ovo i razlika između navedena dva pristupa. Aktuarski pristup se definiše u prvobitnoj meri verovatnoće, dok se finansijski pristup definiše u rizik-neutralnoj meri $Q$.

Uporedjivanje ova dva pristupa smo izvršili uz pomoć raspodele diskontovanih budućih troškova, a nju smo odredili uz pomoć Monte-Carlo simulacija. Posmatrajući oblik navedenih raspodela ustanovili smo da je finansijski pristup manje disperzivan i zbog toga bolji od aktuarskog.

Nakon izvršene analize osetljivosti navedenih pristupa na promenu drift parametra $\mu$ i volatilnosti $\sigma$, opet zaključujemo da je finansijski pristup bolji jer je manje osetljiv na ove promene. Međutim, na kraju se ipak odlučujemo za aktuarski pristup, zato što finansijski pristup ima jednu manu koja je prevagnula nad svim njegovim prednostima. Ta mana finansijskog pristupa je pretpostavka o hedžing strategiji, koja, na žalost, nije uvek moguća.

# 9. DODATAK

Izravnata tablica mortaliteta Republike Srbije za 2000/2002 godinu

Izvor: Republički zavod za statistiku

| | $q_x$ | | |
|---|---|---|---|
| x | svega | muško | žensko |
| 0 | 0,00992 | 0,01162 | 0,00811 |
| 1 | 0,00096 | 0,00097 | 0,00095 |
| 2 | 0,00043 | 0,00045 | 0,00040 |
| 3 | 0,00030 | 0,00036 | 0,00024 |
| 4 | 0,00025 | 0,00030 | 0,00019 |
| 5 | 0,00021 | 0,00025 | 0,00016 |
| 6 | 0,00020 | 0,00024 | 0,00016 |
| 7 | 0,00018 | 0,00015 | 0,00016 |
| 8 | 0,00018 | 0,00021 | 0,00015 |
| 9 | 0,00020 | 0,00023 | 0,00016 |
| 10 | 0,00019 | 0,00024 | 0,00015 |
| 11 | 0,00021 | 0,00022 | 0,00016 |
| 12 | 0,00022 | 0,00030 | 0,00015 |
| 13 | 0,00025 | 0,00036 | 0,00014 |
| 14 | 0,00029 | 0,00037 | 0,00020 |
| 15 | 0,00028 | 0,00033 | 0,00023 |
| 16 | 0,00037 | 0,00041 | 0,00029 |
| 17 | 0,00045 | 0,00061 | 0,00030 |
| 18 | 0,00058 | 0,00083 | 0,00033 |
| 19 | 0,00057 | 0,00087 | 0,00031 |
| 20 | 0,00062 | 0,00090 | 0,00033 |
| 21 | 0,00062 | 0,00090 | 0,00032 |
| 22 | 0,00068 | 0,00101 | 0,00036 |
| 23 | 0,00072 | 0,00104 | 0,00037 |
| 24 | 0,00073 | 0,00112 | 0,00036 |
| 25 | 0,00078 | 0,00116 | 0,00040 |
| 26 | 0,00079 | 0,00115 | 0,00042 |
| 27 | 0,00081 | 0,00114 | 0,00044 |
| 28 | 0,00080 | 0,00117 | 0,00042 |
| 29 | 0,00088 | 0,00128 | 0,00052 |
| 30 | 0,00095 | 0,00127 | 0,00063 |
| 31 | 0,00095 | 0,00126 | 0,00061 |
| 32 | 0,00099 | 0,00130 | 0,00067 |
| 33 | 0,00105 | 0,00141 | 0,00070 |
| 34 | 0,00115 | 0,00150 | 0,00081 |

| x | svega | muško | žensko |
|---|---|---|---|
| 35 | 0,00127 | 0,00163 | 0,00090 |
| 36 | 0,00140 | 0,00181 | 0,00100 |
| 37 | 0,00150 | 0,00199 | 0,00105 |
| 38 | 0,00167 | 0,00217 | 0,00118 |
| 39 | 0,00183 | 0,00237 | 0,00132 |
| 40 | 0,00209 | 0,00274 | 0,00146 |
| 41 | 0,00232 | 0,00303 | 0,00165 |
| 42 | 0,00264 | 0,00333 | 0,00189 |
| 43 | 0,00288 | 0,00373 | 0,00205 |
| 44 | 0,00342 | 0,00447 | 0,00239 |
| 45 | 0,00398 | 0,00522 | 0,00276 |
| 46 | 0,00436 | 0,00580 | 0,00301 |
| 47 | 0,00483 | 0,00629 | 0,00338 |
| 48 | 0,00536 | 0,00696 | 0,00377 |
| 49 | 0,00600 | 0,00790 | 0,00407 |
| 50 | 0,00660 | 0,00883 | 0,00442 |
| 51 | 0,00719 | 0,00968 | 0,00474 |
| 52 | 0,00797 | 0,01085 | 0,00518 |
| 53 | 0,00874 | 0,01189 | 0,00571 |
| 54 | 0,00960 | 0,01318 | 0,00621 |
| 55 | 0,01039 | 0,01432 | 0,00669 |
| 56 | 0,01135 | 0,01581 | 0,00721 |
| 57 | 0,01239 | 0,01732 | 0,00802 |
| 58 | 0,01330 | 0,01867 | 0,00865 |
| 59 | 0,01453 | 0,01969 | 0,00984 |
| 60 | 0,01566 | 0,02076 | 0,01105 |
| 61 | 0,01681 | 0,02228 | 0,01186 |
| 62 | 0,01829 | 0,02438 | 0,01286 |
| 63 | 0,01970 | 0,02602 | 0,01429 |
| 64 | 0,02162 | 0,02859 | 0,01563 |
| 65 | 0,02395 | 0,03142 | 0,01759 |
| 66 | 0,02617 | 0,03381 | 0,01964 |
| 67 | 0,02903 | 0,03705 | 0,02226 |
| 68 | 0,03186 | 0,04025 | 0,02478 |
| 69 | 0,03491 | 0,04405 | 0,02765 |
| 70 | 0,03874 | 0,04786 | 0,03142 |
| 71 | 0,04278 | 0,05211 | 0,03544 |
| 72 | 0,04748 | 0,05726 | 0,03992 |
| 73 | 0,05296 | 0,06336 | 0,04523 |
| 74 | 0,05872 | 0,06954 | 0,05077 |
| 75 | 0,06478 | 0,07660 | 0,05672 |
| 76 | 0,07120 | 0,08296 | 0,06358 |
| 77 | 0,07802 | 0,08951 | 0,07140 |
| 78 | 0,08620 | 0,09771 | 0,07909 |
| 79 | 0,09454 | 0,10608 | 0,08805 |

| x | svega | muško | žensko |
|---|---|---|---|
| 80 | 0,10470 | 0,11485 | 0,09872 |
| 81 | 0,11512 | 0,12558 | 0,10896 |
| 82 | 0,12658 | 0,13731 | 0,12026 |
| 83 | 0,13919 | 0,15015 | 0,13273 |
| 84 | 0,15304 | 0,16418 | 0,14649 |
| 85 | 0,16827 | 0,17952 | 0,16169 |
| 86 | 0,18503 | 0,19630 | 0,17846 |
| 87 | 0,20344 | 0,21464 | 0,19696 |
| 88 | 0,22370 | 0,23470 | 0,21739 |
| 89 | 0,24596 | 0,25663 | 0,23994 |
| 90 | 0,27045 | 0,28061 | 0,26482 |
| 91 | 0,29737 | 0,30683 | 0,29228 |
| 92 | 0,32697 | 0,33551 | 0,32260 |
| 93 | 0,35952 | 0,36686 | 0,35605 |
| 94 | 0,39531 | 0,40114 | 0,39298 |
| 95 | 0,43466 | 0,43863 | 0,43373 |
| 96 | 0,47793 | 0,47962 | 0,47872 |
| 97 | 0,52551 | 0,52444 | 0,52836 |
| 98 | 0,57782 | 0,57345 | 0,58316 |
| 99 | 0,63534 | 0,62704 | 0,64364 |
| 100 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 |

*Tabela 1.1*

Kod programa u programskom paketu Mathematica, korišćen za simulacije opisane u Glavi 7

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`

<< Statistics`DiscreteDistributions`

DFC[drift_, volatilnost_] :=

 Module[

  {DFC = {}, S0 = 1, K = 1, r = 0.05, T = 15, L0 = 1000, n = 10000,
   q45 = {0.00398, 0.00436, 0.00483, 0.00536, 0.006, 0.0066, 0.00719, 0.00797,
     0.00874, 0.00960, 0.01039, 0.01135, 0.01239, 0.0133, 0.01453, 0.01566}},

  For[{DFCAct = {}, DFCFin = {}}; i = 1, i ≤ n,
   i ++, {epsilon = RandomArray[NormalDistribution[0, 1], T],

    For[X = {S0}; j = 2, j ≤ T + 1, j ++,
     X = Append[X, X[[j - 1]] (1 + drift + volatilnost epsilon[[j - 1]])]],

    X = Delete[X, 1],
```

$$\zeta 0 = -L0 \sum_{k=1}^{T} \left( \text{CDF}\left[\text{NormalDistribution}[0,1], -\frac{\text{Log}\left[\frac{S0}{K}\right] + \left(r + \frac{\text{volatilnost}^2}{2}\right)(k)}{\text{volatilnost}\sqrt{k}}\right] \left(\prod_{l=0}^{k-2} (1 - q45_{[[l+1]]})\right) q45_{[[k]]} \right),$$

$$\text{For}\left[\zeta = \{\}; j = 1, j \le T - 1, j{+}{+}, \zeta = \text{Append}\left[\zeta, -L0 \sum_{k=j+1}^{T} \left( \text{CDF}\left[\text{NormalDistribution}[0,1], -\frac{\text{Log}\left[\frac{X_{[[j]]}}{K}\right] + \left(r + \frac{\text{volatilnost}^2}{2}\right)(k-j)}{\text{volatilnost}\sqrt{k-j}}\right] \left(\prod_{l=0}^{k-2} (1 - q45_{[[l+1]]})\right) q45_{[[k]]} \right)\right]\right],$$

```
    For[{L = L0, BrojUmrlih = {}}; j = 1,
     j ≤ T, j ++, {Dd = Random[BinomialDistribution[L, q45[[j]]]],
      BrojUmrlih = Append[BrojUmrlih, Dd], L = L - Dd}],
```

$$\text{Pom} = \sum_{j=1}^{T} e^{-r\,j}\, \text{Max}[K - X_{[[j]]}, 0]\, \text{BrojUmrlih}_{[[j]]},\ \text{DFCAct} = \text{Append}[\text{DFCAct}, \text{Pom}],$$

$$\text{DFCFin} = \text{Append}\left[\text{DFCFin}, -\zeta 0\, (e^{-r} X_{[[1]]} - S0) - \sum_{j=1}^{T-1} \zeta_{[[j]]}\, (e^{-r\,(j+1)} X_{[[j+1]]} - e^{-r\,j} X_{[[j]]}) + \text{Pom}\right]\}];$$

```
  {DFCAct, DFCFin}]

DFCList = DFC[0.085, 0.2];

DFCAct = QuantileForm[DFC[[1]]];

FCFin = QuantileForm[DFC[[2]]];

For[i = 1, i ≤ Length[DFCAct], i++,
  {a = DFCAct[[i, 1]], DFCAct[[i, 1]] = DFCAct[[i, 2]], DFCAct[[i, 2]] = a}];

For[i = 1, i ≤ Length[DFCFin], i++,
  {a = DFCFin[[i, 1]], DFCFin[[i, 1]] = DFCFin[[i, 2]], DFCFin[[i, 2]] = a}];

raspodelaAct = ListPlot[DFCAct, PlotRange → All];

raspodelaFin = ListPlot[DFCFin, PlotRange → All];
```

# LITERATURA


1. Bernt Oksendal, Stochastic Differential Equations: an introduction with applications, Fifth edition, Springer, 2000.

2. D. F. Schrager, A.A.J. Pelsser, Pricing Rate of Return Guarantees in Regular Premium Unit Linked Insurance, Insurance: Mathematics and Economics 35, 369–398, (2004).

3. Frantz Christophe, Chenut Xavier, Walhin Jean-François, Pricing and capital allocation for unit-linked life insurance contracts with minimum death guarantee, Proceedings of the AFIR Colloquium Maastricht, 2003.

4. Hans U. Gerber, S.H. Cox: Life Insurance Mathematics, Springer, 1997.

5. Newton L. Bowers, Jr. Hansc U. Gerber, James C. Hickman, Donald A. Jones, Cecil J. Nesbitt, Actuarial mathematics, The Society of actuaries, 1997.

6. S.D. Promislow: Fundamentals of Actuarial Mathematics, Wiley, 2006.

7. Steven Shreve, Stochastic Calculus for Finance, Springer, 2004.

8. Wilmott P., Howison S., Dewynne J.: The Mathematics of Financial Derivatives – A Student Introduction, Cambridge University Press, 1995.

# BIOGRAFIJA

Marija Jovanović je rođena 16. 12. 1985. godine u Leskovcu. Osnovnu školu je završila u Leskovcu 2000. godine, a zatim upisala Gimnaziju u Leskovcu, smer učenika talentovanih za matematiku. Godine 2004. je upisala, a septembra 2008. godine diplomirala na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu sa prosečnom ocenom 9.89 i stekla zvanje diplomiranog inženjera matematike. Od 01. januara 2009. godine radi kao aktuar u kompaniji UNIQA životno osiguranje a.d.o.

Novi Sad, 12.10.2009. Marija Jovanović

UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: *Monografska dokumentacija*

TD

Tip zapisa: *Tekstualni štampani materijal*

TZ

Vrsta rada: *Završni rad*

VR

Autor: *Marija Jovanović*

AU

Mentor: *Dr Dora Seleši*

MN

Naslov rada: *Unit-linked modeli u životnom osiguranju*

MR

Jezik publikacije: *Srpski (latinica)*

JP

Jezik izvoda: *s / e*

JI

Zemlja publikovanja: *R. Srbija*

ZP

Uže geografsko područje: *Vojvodina*

UGP

Godina: *2009.*

GO

Izdavač: *Autorski reprint*

IZ

Mesto i adresa: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*

MA

Fizički opis rada: *9 poglavlja / 65 strana / 8 lit. citata / 11 slika / 5 tabela*

FO

Naučna oblast: *Matematika*

NO

Naučna disciplina: *Aktuarska i finansijska matematika*

ND

Ključne reči: *unit-linked životno osiguranje, rizik-neutralna mera, Girsanova teorema, Black-Scholes model, replikantni portfelj*

PO

UDK:

Čuva se: *u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku*

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: *Tema završnog rada su unit-linked modeli u životnom osiguranju. U uvodnom delu je ukratko opisan princip unit-linked ugovora životnog osiguranja, a zatim je predstavljena nihova razlika od klasičnih ugovora. Dalje je naveden stohastički aparat koji će se koristiti u pretpostavkama modela kao i u samom modelu. Model se zasniva na čuvenoj Black-Scholes formuli za određivanje cene opcije, a pristupa mu se na dva načina, aktuarski i finansijski. Poređenje navedena dva pristupa se vrši uz pomoć Monte Carlo simulacija i izvodi se konačan zaključak o tome koji je pristup bolji teorijski, a koji praktično.*

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: *02.10.2009.*

DP

Datum odbrane: *19.10.2009.*

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: *Dr Nataša Krejić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu*

Član: *Dr Dora Seleši, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, mentor*

Član: *Dr Danijela Rajter-Ćirić, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu*

UNIVERSITY OF NOVI SAD

FACULTY OF SCIENCE

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification umber:

INO

Document type: *Monograph type*

DT

Type of record*: Printed text*

TR

Contents Code: *Master's thesis*

CC

Author: *Marija Jovanović*

AU

Mentor: *Dora Seleši, PhD*

MN

Title: *Unit-linked models in life insurance*

XI

Language of text: *Serbian*

LT

Language of abstract:

LA

Country of publication: *Serbia*

CP

Locality of publication: *Vojvodina*

LP

Publication year: *2009.*

PY

Publisher: *Author's reprint*

PU

Publ. place: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*

PP

Physical description: *9 chapters / 65 pages / 8 references / 11 pictures / 5 tables*

PD

Scientific field: *Mathematics*

SF

Scientific discipline: *Actuarial and financial mathematics*

SD

Key words: *unit-linked life insurance, risk-neutral measure, Girsanov theorem, Black-Scholes model, replicating portfolio*

UC:

Holding data: *Library of the Department of Mathematics and Informatics*

HD Note:

Abstract: *The subject of this final exam is unit-linked model in life insurance. The principles of unit-linked life insurance are briefly described and then their difference from the regular life insurance contracts. Stochastic calculus that is used in model is presented in Chapter 3 . Models are based on famous Black-Scholes formula for pricing options. There are two approaches to the model, one actuarial and the other is financial. Comperison of these two approaches is done by Monte Carlo simulations and then the final conclusion about these approaches is brought.*

AB

Accepted by the Scientific Board on: *02.10.2009.*

Defended: *19.10.2009.*

Thesis defend board:
President: *Nataša Krejić, PhD, Full Professor, Faculty of Sciences, Novi Sad*
Member: *Dora Seleši, PhD, Assistant Professor, Faculty of Sciences, Novi Sad, advisor*
Member: *Danijela Rajter-Ćirić, PhD, Associate Professor, Faculty of Sciences, Novi Sad*