UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Marija Delić

Dimenzija vektorskog prostora

-master rad-

Mentor: Akademik Prof. dr Stevan Pilipović

Novi Sad, 2011.

Sadržaj

Predgovor **3**

1 Uvod **4**

2 Kardinalni brojevi **5**
2.1 Definicija kardinalnog broja 5
2.2 Operacije nad kardinalnim brojevima 9
2.2.1 Zbir kardinalnih brojeva 9
2.2.2 Proizvod kardinalnih brojeva 11
2.2.3 Stepen kardinalnog broja 12
2.3 Primeri 16
2.4 Poređenje kardinalnih brojeva 21
2.5 Primeri 27
2.6 Kvadrat kardinalnog broja 30
2.7 Primeri 36

3 Vektorski prostori **38**
3.1 Definicija vektorskog prostora 39
3.2 Linearno nezavisni skupovi u vektorskom prostoru 40
3.3 Primeri 43
3.4 Dimenzija vektorskog prostora 44
3.5 Dimenzija potprostora vektorskog prostora 49
3.6 Primeri 53
3.7 Kardinalnost vektorskog prostora 55
3.8 Dimenzija dualnog prostora 57
3.8.1 Dualni prostor vektorskog prostora 57
3.8.2 Drugi dualni prostor vektorskog prostora 61
3.9 Metrički i normirani prostori-osnovne definicije 64
3.10 Dimenzija separabilnog normiranog prostora 66
3.11 Dimenzija Banahovog prostora 68

4 Zaključak **71**

Literatura **72**

Biografija **73**

Predgovor

Tekst koji je pred Vama pisan je u svrhu odbrane master rada, kao sastavni deo diplomskih akademskih-master studija. Iako je pre svega namenjen pomenutoj svrsi nadam se da će ovaj rad naći svoje čitaoce i među studentima koji se budu bavili problematikom koja je ovde razmatrana.

Pisani tekst obuhvata dva veća poglavlja: "Kardinalni brojevi" i "Vektorski prostori", koja sadrže više podpoglavlja. Pomenute celine detaljno su obrađene, uvođenjem odgovarajućih definicija, teorema, tvrđenja i posledica. Takođe, među podpoglavljima ima i onih koji se odnose samo na primere iz pomenutih oblasti. Primeri su izloženi u formi zadataka, a rešavani primenom prethodno obrađene teorije. Svi složeniji matematički pojmovi koji su korišteni u radu prethodno su formalno uvedeni.

Zahvaljujem se svim profesorima i asistentima sa kojima sam sarađivala tokom studija na znanjima koja su mi nesebično pružena. Takođe, veliko hvala mojoj porodici na bezuslovnoj podršci kako tokom studiranja, tako i tokom čitavog života. Naravno, izuzetnu zahvalnost dugujem svom mentoru, profesoru Stevanu Pilipoviću, na sugestijama, savetima, strpljenju i pomoći pruženoj prilikom izrade ovog rada. Zahvalila bih se i članovima komisije, profesoru Milošu Kuriliću i docentu Aleksandru Pavloviću, na saradnji. Još jedno hvala osobi koju ovde neću imenovati ali će se, sigurna sam, sama prepoznati na korisnim savetima i velikoj pomoći u toku izrade i kucanja teksta koji je pred Vama.

U Novom Sadu, septembar 2011.

Marija Delić

1 Uvod

Brojanje elemenata konačnog skupa je prilično jednostavno. Jasno je da ukoliko imamo dva skupa, gde jedan ima 5, a drugi 7 elemenata, tada drugi skup ima više elemenata. Naravno, ovo izgleda jako lako kada se radi o konačnim skupovima i to takvim da u konačnom vremenu možemo prebrojati sve članove posmatranog skupa. Međutim do komplikacija dolazi kada treba prebrojati beskonačne skupove.

Brojanje ili preciznije upoređivanje elemenata skupova formalno se istražuje korišćenjem preslikavanja koja poseduju određene osobine. Neka su A i B proizvoljni skupovi. Preslikavanje $f : A \to B$ je injekcija ("jedan-jedan") ako za svako $x_1, x_2 \in A$, iz $f(x_1) = f(x_2)$ sledi da je $x_1 = x_2$. Ekvivalentno ovome, preslikavanje f je injekcija ako za svaka dva elementa $x_1, x_2 \in A$, iz $x_1 \neq x_2$ sledi $f(x_1) \neq f(x_2)$. Preslikavanje f je sirjekcija ("na") ako za svako $y \in B$ postoji $x \in A$ tako da važi $f(x) = y$. Preslikavanje f je bijekcija ako je i injekcija i sirjekcija. Poznato je da ukoliko je $f : A \to B$ bijekcija, tada postoji inverzno preslikavanje $f^{-1} : B \to A$, sa osobinom $f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x$, koje je takođe bijekcija.

Upoređivanje broja elemenata skupova je u bliskoj vezi sa postojanjem injekcija, sirjekcija i bijekcija između posmatranih skupova.

U vektorskim prostorima posebno su važni skupovi vektora čije linearne kombinacije mogu generisati ceo prostor. Baza vektorskog prostora je uređen skup linearno nezavisnih vektora. Ono što je važno pomenuti je da se svaki vektor nekog vektorskog prostora može prikazati kao linearna kombinacija vektora baze tog prostora.

Ako u vektorskom prostoru postoji baza sa konačnim brojem vektora tada je prostor konačno dimenzionalan. U protivnom prostor je beskonačno dimenzionalan. Ako baza sadrži n elemenata tada je prostor n-dimenzionalan.

Dimenzija vektorskog prostora je u stvari kardinalnost skupa vektora koji čine bazu vektorskog prostora. Svaka baza jednog vektorskog prostora ima istu kardinalnost. Proizvoljni posmatrani vektorski prostor može imati više različitih baza ali sve one moraju biti iste kardinalnosti. Dakle, dimenzija vektorskog prostora odgovara kardinalnosti svakog maksimalnog skupa linearno nezavisnih vektora tog prostora, kao i kardinalnosti svakog minimalnog skupa linearno nezavisnih vektora tog prostora koji generiše ceo pomenuti vektorski prostor.

2 Kardinalni brojevi

Neka su A i B proizvoljni skupovi. Presek skupova A i B je skup koji sadrži sve one elemente koji se istovremeno nalaze u oba posmatrana skupa,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Unija skupova A i B je skup koji sadrži sve one elemente koji se nalaze bar u jednom od pomenutih skupova,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Sa $A \dot{\cup} B$ označavamo uniju skupova A i B pod pretpostavkom da su oni disjunktni, tj. $A \cap B = \emptyset$.

Sa $\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i = A_1 \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} A_n$, $n \geq 2$, označavamo uniju $\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i$ skupova $A_1, \ldots, A_n$ pod pretpostavkom da su svi oni po parovima disjunktni.

Sa $\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \dot{\cup} A_2 \dot{\cup} \cdots$ označavamo uniju niza skupova $A_1, A_2, \ldots$ pri čemu opet pretpostavljamo da su svi oni po parovima disjunktni.

2.1 Definicija kardinalnog broja

Neka su A i B proizvoljni skupovi. Ako postoji bar jedno bijektivno preslikavanje $f : A \to B$, kažemo da skupovi A i B imaju istu kardinalnost, to označavamo $A \sim B$. Još se kaže da skupovi A i B imaju istu moć, da su ekvivalentni ili ekvipotentni.

Gore pomenuta relacija $(\sim)$ je relacija ekvivalencije i pomoću nje se skup svih mogućih skupova razlaže na klase ekvivalencije. Kako je "$\sim$" relacija ekvivalencije, to znači da je refleksivna, simetrična i tranzitivna. Ovo ćemo i pokazati.

Za proizvoljan skup A možemo posmatrati identičko preslikavanje $id_A : A \to A$, $id_A(x) = x$. Ovako definisano preslikavanje je očigledno bijekcija, pa odatle sledi $A \sim A$. Dakle, "$\sim$" jeste refleksivna. Dalje, neka su A i B proizvoljni skupovi i neka postoji bijekcija $f : A \to B$. Kako je f bijekcija znamo da postoji inverzno preslikavanje $f^{-1} : B \to A$ tako da je $f \circ f^{-1} = id$. Takođe poznato je da je pomenuto preslikavanje (f^{-1}) isto bijekcija, znači da važi $B \sim A$. Dakle, "$\sim$" je i simetrična relacija. Neka su sada A, B, C proizvoljni skupovi i neka postoje bijekcije $f : A \to B$ i $g : B \to C$. Tada je i preslikavanje $h = g \circ f : A \to C$ bijekcija, što znači da je $A \sim C$, čime je pokazano da je posmatrana relacija tranzitivna.

Definicija 2.1. Klasa ekvivalencije kojoj pripada skup A naziva se kardinalni broj skupa A i označava sa $k(A)$.
Koristi se još i oznaka $|A|$.

Dakle, pod kardinalnim brojem skupa A podrazumevamo kolekciju svih skupova ekvivalentnih sa A. Iz navedenog je sasvim jasno da je $k(A) = k(B)$ ako i samo ako se radi o međusobno ekvivalentnim skupovima.

Ako A i B nisu ekvivalentni skupovi, tada se koristi oznaka $A \not\sim B$.

Ako su A i B konačni skupovi, onda su oni ekvivalentni ako i samo ako imaju isti broj elemenata. Skup A je konačan ako postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da su skupovi A i $\{1, \dots, n\}$ ekvivalentni.

Za proizvoljan prirodan broj n, pod kardinalnim brojem n podrazumeva se skup brojeva $\{1, \dots, n\}$ ili neki njemu ekvivalentan skup. Dakle, kardinalni broj konačnog skupa jednak je broju elemenata skupa $\{1, \dots, n\}$ na koji se može bijektivno preslikati.

Prazan skup se smatra konačnim skupom i njegov kardinalni broj je nula.

Skup je beskonačan ako nije konačan. Kardinalni broj beskonačnog skupa naziva se transfinitni kardinalni broj. Transfinitni kardinalni brojevi imaju specifične osobine i zahtevaju posebnu pažnju.

Definicija 2.2. Skup A je prebrojiv ako je ekvivalentan skupu prirodnih brojeva ($\mathbb{N}$).

Pod kardinalnim brojem alef-nula ($\aleph_0$) podrazumeva se skup prirodnih brojeva, kao i svaki njemu ekvivalentan skup. Takvi skupovi nazivaju se prebrojivim. Napomenimo još da je alef-nula najmanji transfinitni kardinalni broj.

Možemo zaključiti da je skup A prebrojiv ako i samo ako se svi njegovi elementi mogu poređati u beskonačan niz, tj. ako važi $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ gde su svi članovi niza različiti.

Onaj skup za koji znamo da je konačan ili prebrojiv nazivamo najviše prebrojivim.

Kardinalni broj $\mathfrak{c}$ (kontinuum) poseduje interval realne prave $[0, 1]$, kao i svaki njemu ekvivalentan skup.

Tvrđenje 2.3. *Svaki beskonačan skup A sadrži bar jedan prebrojiv podskup.*

Dokaz. Uočimo proizvoljan element skupa A, neka je to x_1. Sada skup $A \setminus x_1$ mora biti beskonačan, jer bi u suprotnom A bio konačan (zbog $A = \{x_1\} \dot\cup (A \setminus \{x_1\})$). Znači da postoji bar jedan element x_2, tako da $x_2 \in A \setminus \{x_1\}$. Istim rezonovanjem kao malopre možemo zaključiti da je skup $A \setminus \{x_1, x_2\}$ takođe beskonačan. U suprotnom bi skup $A = \{x_1, x_2\} \dot\cup (A \setminus \{x_1, x_2\})$ bio konačan. Tako redom, nastavljajući prikazan postupak možemo zaključiti da postoji bar jedan niz $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ elemenata skupa A, koji su pritom međusobno različiti. Ako stavimo $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ dobićemo da je S prebrojiv podskup skupa A, što je i trebalo pokazati. $\square$

Tvrđenje 2.4. *Skup je beskonačan ako i samo ako je ekvivalentan nekom svom pravom podskupu.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je A konačan skup koji ima n elemenata i neka je B njegov pravi podskup sa m elemenata. Tada je jasno da je $m < n$. Odavde možemo zaključiti da skupovi A i B ne mogu biti ekvivalentni jer imaju različit broj elemenata.

Sada pretpostavimo da je A beskonačan skup. Na osnovu prethodnog tvrđenja znamo da postoji bar jedan prebrojivi podskup skupa A, neka je to skup S, $S = \{x_1, x_2, \ldots\}$.

Označimo sa A_0 sledeći skup, $A_0 = A \setminus \{x_1\}$. Očigledno je da je A_0 pravi podskup skupa A. Definiimo preslikavanje $f : A \to A_0$ na sledeći način:

$$f(x_1) = x_2,\ f(x_2) = x_3,\ f(x_3) = x_4, \ldots.$$

i $f(u) = u$ za bilo koje $u \in A \backslash S$. Ovako definisano preslikavanje je bijektivno, odakle sledi da su A i A_0 međusobno ekvivalentni. $\square$

Osobina beskonačnog skupa da se može bijektivno preslikati na svoj pravi podskup je toliko bitna da se može uzeti za definiciju beskonačnog skupa.

Primer 2.5. Skup $2\mathbb{N}$ prirodnih parnih brojeva je pravi podskup skupa $\mathbb{N}$, pri tome oni su ekvivalentni, jer postoji bijekcija $f(n) = 2n$, $n \in N$ koja preslikava $\mathbb{N}$ u $2\mathbb{N}$.

Tvrđenje 2.6. *Proizvoljan podskup prebrojivog skupa je najviše prebrojiv skup.*

Dokaz. Posmatrajmo proizvoljan prebrojivi skup A. Znamo da se njegovi elementi mogu poređati u niz, dakle A možemo prikazati u sledećem obliku:

$$A = \{x_1, x_2, \ldots\}.$$

Sada uočimo bilo koji podskup B skupa A i neka su njegovi elementi $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots$ $(i_1, i_2, \ldots \in \mathbb{N})$. Tada se može pretpostaviti da važi $i_1 < i_2 < \ldots$.

Ako je niz $i_1, i_2, \ldots$ konačan, onda je i skup B konačan. Dok ukoliko je pomenuti niz beskonačan onda je $B = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots\}$, pa je B prebrojiv skup. Iz prethodnih razmatranja vidimo da je u svakom slučaju B najviše prebrojiv skup. $\square$

Tvrđenje 2.7. *(a) Unija konačnog i prebrojivog skupa je prebrojiv skup.*

(b) Unija dva prebrojiva skupa je prebrojiv skup.

Dokaz. (a) Uočimo proizvoljan konačan skup A i proizvoljan prebrojiv skup B. Kako je

$$A \cup B = (A \setminus B) \dot{\cup} B$$

i znamo da je skup $A \setminus B \subseteq A$, možemo zaključiti da je $A \setminus B$ takođe konačan skup. Neka je

$$A \setminus B = \{x_1, \ldots, x_n\} \text{ i } B = \{y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots\}.$$

Jasno je da su svi članovi niza $x_1, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots$ međusobno različiti. Sada je

$$A \cup B = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots\}$$

očigledno prebrojiv skup.

(b) Uočimo sada dva proizvoljna prebrojiva skupa A i B. Kao i malopre znamo da važi

$$A \cup B = (A \setminus B) \dot{\cup} B.$$

Kako je $A \setminus B \subseteq A$, na osnovu prethodnog tvrđenja znamo da je $A \setminus B$ najviše prebrojiv, dakle ili konačan ili prebrojiv.

Ako je $A \setminus B$ konačan, onda na osnovu (a) imamo da je $A \cup B$ prebrojiv skup.

Ako je $A \setminus B$ prebrojiv, onda $A \setminus B = \{x_1, x_2, \ldots\}$ i $B = \{y_1, y_2, \ldots\}$. Tada su članovi niza $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ međusobno različiti i pritom je

$$A \cup B = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots\}.$$

Kako se članovi skupa $A \cup B$ mogu poređati u niz, jasno je da je pomenuti skup prebrojiv. Ovo se može pokazati i formiranjem preslikavanja $f : \mathbb{N} \to A \cup B$ na sledeći način:

$$f(2n) = y_n \ , \ f(2n-1) = x_n \ \ (n \in \mathbb{N}).$$

Pošto je ovo preslikavanje bijektivno, možemo zaključiti da su skupovi $A \cup B$ i $\mathbb{N}$ ekvivalentni, pa je $A \cup B$ prebrojiv skup.

Dakle, u oba posmatrana slučaja smo dobili da je $A \cup B$ prebrojiv skup, što je i trebalo pokazati.

□

2.2 Operacije nad kardinalnim brojevima

Ako su data dva kardinalna broja, tada se može definisati njihov zbir, proizvod i stepen.

2.2.1 Zbir kardinalnih brojeva

Pod zbirom kardinalnih brojeva α i β podrazumevamo bilo koji skup oblika $A \dot{\cup} B$, gde je $k(A) = \alpha$, $k(B) = \beta$. Kod konačnih kardinala možemo lako definisati zbir. Ukoliko su skupovi A i B disjunktni onda je $k(A \dot{\cup} B) = \alpha + \beta$. Ako skupovi nisu disjunktni, onda jedan od njih možemo zameniti njemu ekvivalentnim skupom koji će biti disjunktan sa drugim posmatranim skupom. Specijalno, ako je $k(A) = \alpha$ tada je

$$\alpha + \alpha = k(A \times \{1\} \dot{\cup} A \times \{2\}).$$

Gornja definicija je korektna u smislu da ako je

$$k(A) = k(A_1) = \alpha\ ,\ k(B) = k(B_1) = \beta$$

i $A \cap B = A_1 \cap B_1 = \emptyset$ tada je $A \dot{\cup} B \sim A_1 \dot{\cup} B_1$.

Tvrđenje 2.8. *Za proizvoljne kardinale α, β, γ važe sledeće jednakosti:*

(a) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

(b) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

Dokaz. (a) Posmatrajmo proizvoljne skupove A i B takve da je $k(A) = \alpha$, $k(B) = \beta$ i $A \cap B = \emptyset$. Tada je

$$\alpha + \beta = k(A \dot{\cup} B)\ ,\ \beta + \alpha = k(B \dot{\cup} A).$$

Kako je $A \dot{\cup} B = B \dot{\cup} A$, sledi da je

$$k(A \dot{\cup} B) = k(B \dot{\cup} A).$$

(b) Posmatrajmo sada skupove A, B i C takve da je $k(A) = \alpha$, $k(B) = \beta$, $k(C) = \gamma$ i $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$. Tada važi da je

$$(\alpha + \beta) + \gamma = k((A \dot{\cup} B) \dot{\cup} C),$$

$$\alpha + (\beta + \gamma) = k(A \dot{\cup} (B \dot{\cup} C)).$$

Pošto su pomenuti skupovi disjunktni očigledno je da važi

$$(A \dot\cup B) \dot\cup C = A \dot\cup (B \dot\cup C) = A \dot\cup B \dot\cup C.$$

Sledi da su skupovi $(A \dot\cup B) \dot\cup C$ i $A \dot\cup (B \dot\cup C)$ jednaki, pa i ekvivalentni. Zbog toga je

$$k((A \dot\cup B) \dot\cup C) = k(A \dot\cup (B \dot\cup C)) = k(A \dot\cup B \dot\cup C).$$

□

Dakle, na osnovu pokazanog sledi da je sabiranje kardinalnih brojeva komutativno i asicijativno.

Tvrđenje 2.9. *Za svaki konačan kardinal n i svaki beskonačan kardinal k važi sledeća jednakost*

$$n + k = k.$$

Dokaz. Posmatrajmo proizvoljan skup A takav da je $k(A) = k$. Pošto je A beskonačan na osnovu tvrđenja 2.3 znamo da postoji bar jedan prebrojiv podskup S ($S = \{x_1, x_2, \ldots\}$) skupa A. Jasno je da važi

$$A = S \dot\cup (A \setminus S).$$

Iz prethodne jednakosti sledi

$$n + k(A) = n + k(S) + k(A \setminus S) = n + \aleph_0 + k(A \setminus S).$$

Kako je unija konačnog i prebrojivog skupa prebrojiv skup, na osnovu tvrđenja 2.7 (a) sledi da je $n + \aleph_0 = \aleph_0$, za svaki konačan kardinal n. Na osnovu ovoga prethodna jednačina dobija sledeći oblik

$$n + k(A) = \aleph_0 + k(A \setminus S) = k(S) + k(A \setminus S) = k(A).$$

Dakle $n + k = k$, što je i trebalo pokazati. □

Tvrđenje 2.10. *Za bilo koji beskonačan kardinal k važi*

$$\aleph_0 + k = k.$$

Dokaz. Dokaz ovog tvrđenja je potpuno sličan prethodnom dokazu, samo treba primetiti da je na osnovu tvrđenja 2.7 (b) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. □

2.2.2 Proizvod kardinalnih brojeva

Neka su A i B proizvoljni skupovi tako da je $k(A) = \alpha$ i $k(B) = \beta$. Pod proizvodom $\alpha\beta$ kardinalnih brojeva α i β podrazumevamo kardinalni broj skupa oblika $A \times B$.

Ova definicija je korektna u smislu da ako je

$$k(A) = k(A_1) = \alpha \text{ i } k(B) = k(B_1) = \beta$$

tada je $A \times B \sim A_1 \times B_1$.

Tvrđenje 2.11. *Za proizvoljne kardinalne brojeve α, β i γ važe sledeće jednakosti:*

(a) $\alpha\beta = \beta\alpha$

(b) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$

(c) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

Dokaz. (a) Uočimo proizvoljne skupove A i B takve da je $k(A) = \alpha$ i $k(B) = \beta$. Tada je

$$\alpha\beta = k(A \times B)\ ,\ \beta\alpha = k(B \times A).$$

Posmatrajmo sledeće preslikavanje, $f : A \times B \to B \times A$ definisano sa

$$f(a, b) = (b, a)\ (a \in A, b \in B).$$

Kako je ovo preslikavanje bijektivno, sledi da su skupovi ekvivalentni, odnosno $A \times B \sim B \times A$. Sada možemo zaključiti da je

$$k(A \times B) = k(B \times A).$$

odakle je $\alpha\beta = \beta\alpha$.

(b) Uočimo sada proizvoljne skupove A,B i C takve da je $k(A) = \alpha$, $k(B) = \beta$ i $k(C) = \gamma$. Tada je

$$(\alpha\beta)\gamma = k((A \times B) \times C),$$
$$\alpha(\beta\gamma) = k(A \times (B \times C)).$$

Posmatrajmo preslikavanje $f : (A \times B) \times C \to A \times (B \times C)$ definisano sa

$$f((a, b), c) = (a, (b, c))\ (a \in A, b \in B, c \in C).$$

Jasno je da je ovo preslikavanje bijektivno, pa odatle sledi $(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$. Sada znamo da su kardinali odgovarajućih skupova jednaki, odnosno

$$k((A \times B) \times C) = k(A \times (B \times C)),$$

tj. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

(c) Uočimo opet proizvoljne skupove A, B i C takve da je $k(A) = \alpha$, $k(B) = \beta$ i $k(C) = \gamma$ sa dodatnim uslovom $B \cap C = \emptyset$. Tada je

$$(A \times B) \cap (A \times C) = \emptyset,$$

i

$$\alpha(\beta + \gamma) = k(A \times (B \,\dot{\cup}\, C)),$$
$$\alpha\beta + \alpha\gamma = k(A \times B) + k(A \times C).$$

Poznato je da važi: $A \times (B \,\dot{\cup}\, C) = A \times B \,\dot{\cup}\, A \times C$. Odavde sledi

$$k(A \times (B \,\dot{\cup}\, C)) = k(A \times B) + k(A \times C),$$

pa je $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

□

Na osnovu pokazanog sledi da je množenje kardinalnih brojeva komutativno, asocijativno i distributivno u odnosu na sabiranje.

Uopštavanjem, za proizvoljno $n \geq 2$ pod proizvodom $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n$ kardinalnih brojeva $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ podrazumevamo proizvoljan skup oblika $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ pri čemu je

$$k(A_1) = \alpha_1, k(A_2) = \alpha_2, \ldots, k(A_n) = \alpha_n.$$

Ovako definisano množenje konačnog broja kardinala je matematički korektno i ima osobine komutativnosti i asocijativnosti.

2.2.3 Stepen kardinalnog broja

Pod stepenom α^β kardinalnih brojeva α i β, podrazumevamo kardinalni broj proizvoljnog skupa oblika $A^B = \{f \mid f : B \to A\}$, pri čemu je $k(A) = \alpha$ i $k(B) = \beta$.

Ova definicija je korektna u smislu da ako su skupovi A, B, A_1, B_1 takvi da važi

$$k(A) = k(A_1) = \alpha \text{ i } k(B) = k(B_1) = \beta$$

tada je $A^B \sim A_1^{B_1}$.

Tvrđenje 2.12. *Za proizvoljne kardinalne brojeve α, β, γ važe sledeće jednakosti:*

(a) $\alpha^\beta \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$

(b) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$

(c) $(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma\beta^\gamma$

Dokaz. Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da su skupovi A, B i C disjunktni, pri čemu je $k(A) = \alpha, k(B) = \beta$ i $k(C) = \gamma$.

(a) Tvrđenje sledi iz $A^{B \,\dot\cup\, C} = A^B \times A^C$. Dokažimo da je preslikavanje $F : A^{B \,\dot\cup\, C} \to A^B \times A^C$ dato sa

$$F(f) = (f|_B, f|_C)$$

bijekcija. Definišimo preslikavanje $G : A^B \times A^C \to A^{B \,\dot\cup\, C}$ na sledeći način. Za $(\varphi, \psi) \in A^B \times A^C$ neka je $G((\varphi, \psi)) : B \,\dot\cup\, C \to A$ dato sa:

$$(G((\varphi,\psi)))(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{ako je } x \in B \\ \psi(x), & \text{ako je } x \in C \end{cases}$$

Skupovi A i B su disjunktni, pa je preslikavanje $G((\varphi, \psi))$ dobro definisano. Pokazujemo da je G inverzna funkcija za funkciju F, odnosno da je

$$F \circ G = id_{A^B \times A^C} \ \text{ i } \ G \circ F = id_{A^{B \dot\cup C}}.$$

Za $(\varphi, \psi) \in A^B \times A^C$ imamo

$$F(G((\varphi,\psi))) = (G((\varphi,\psi))|_B, G((\varphi,\psi))|_C) = (\varphi,\psi),$$

što dokazuje prvu jednakost.
Neka je $f \in A^{B \,\dot\cup\, C}$. Tada, prema definiciji preslikavanja G, imamo da je

$$(G \circ F)(f) = G((f|_B, f|_C)) = f,$$

pa važi i druga jednakost.

(b) Ova jednakost sledi iz $(A^B)^C \sim A^{B\times C}$. Preslikavanje $F : (A^B)^C \to A^{B\times C}$ definišemo na sledeći način.
Neka $\psi \in (A^B)^C$. Tada $\psi : C \to A^B$, pa za $c \in C$, $\psi(c) : B \to A$. $F(\psi)$ definišemo kao funkciju iz $B \times C$ u A datu sa

$$(F(\psi))((b,c)) = (\psi(c))(b).$$

U nastavku pokazujemo da je F bijekcija. Definisaćemo preslikavanje $G : A^{B\times C} \to (A^B)^C$ i pokazati da je ono inverzno za F. Neka je $f : B \times C \to A$, tada $G(f) : C \to A^B$, gde je za $c \in C$ preslikavanje $G(f)(c) : B \to A$ dato sa

$$(G(f)(c))(b) = f((b,c)), \ \text{ za sve } b \in B.$$

Sada pokažimo da je $F \circ G = id_{A^{B\times C}}$ i $G \circ F = id_{(A^B)^C}$.
Za proizvoljno $f \in A^{B\times C}$ i $(b,c) \in B \times C$ imamo $(F(G(f)))((b,c)) = (G(f)(c))(b) = f((b,c))$, pa je $F(G(f)) = f$.
Za $\psi \in (A^B)^C$, proizvoljno $c \in C$ i $b \in B$ imamo $((G(F(\psi)))(c))(b) = (F(\psi))((b,c)) = (\psi(c))(b)$, pa je $G(F(\psi))(c) = \psi(c)$, za sve $c \in C$, odnosno $G(F(\psi)) = \psi$.

(c) Poslednja jednakost iz tvrđenja sledi iz $A^C \times B^C \sim (A\times B)^C$. Funkciju $F : A^C \times B^C \sim (A \times B)^C$ definišemo na sledeći način. Za $(f_1, f_2) \in A^C \times B^C$, gde $f_1 : C \to A$ i $f_2 : C \to B$ preslikavanje $F((f_1, f_2)) : C \to A \times B$ definišemo sa
$$F((f_1, f_2))(c) = (f_1(c), f_2(c)).$$
Pokažimo da je F bijektivno preslikavanje. Posmatrajmo projekcije $\pi_A : A \times B \to A$ i $\pi_B : A \times B \to B$ date sa $\pi_A((a, b)) = a$ i $\pi_B((a, b)) = b$.
Sada, definišimo $G : (A \times B)^C \to A^C \times B^C$ sa
$$G(f) = (\pi_A \circ f, \pi_B \circ f), \text{ za sve } f \in (A \times B)^C.$$
Kao u prethodnim slučajevima pokazujemo da je preslikavanje G inverzno za F.
Neka $f : C \to A \times B$. Tada za proizvoljno $c \in C$ važi da je
$$F(G(f))(c) = F((\pi_A \circ f, \pi_B \circ f))(c) = (\pi_A(f(c)), \pi_B(f(c))) = f(c),$$
pa je $(F \circ G)(f) = f$.
Neka $(f_1, f_2) \in A^C \times B^C$. Tada je
$$G(F((f_1, f_2))) = (\pi_A \circ F((f_1, f_2)), \pi_B \circ F((f_1, f_2))) = ((f_1, f_2)).$$
Dakle, za F postoji inverzno preslikavanje, pa je tako pokazano da je F bijekcija.

$\square$

Neka je A proizvoljan skup, sa $\mathcal{P}(A)$ ćemo označavati partitivni skup skupa A. Partitivni skup skupa A predstavlja skup svih podskupova $B \subseteq A$ skupa A, $\mathcal{P}(A) = \{B | B \subseteq A\}$.

Ako je posmatrani skup A konačan, npr. sa n elemenata tada je poznato da partitivni skup $\mathcal{P}(A)$ ima 2^n elemenata.

Ovo možemo pokazati formiranjem odgovarajuće bijekcije, koja bi slikala skup $\mathcal{P}(A)$ u skup kardinalnosti 2^n.

Posmatrajmo preslikavanje $f : \mathcal{P}(A) \to \{0, 1\}^n$. Svakom podskupu B skupa $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ dodeljujemo odgovarajuću n-torku sastavljenu od nula i jedinica po sledećem pravilu:

-na mestu i pisemo 0 ako $a_i \notin B$

-na mestu i pisemo 1 ako $a_i \in B$.

Jasno je da je pomenuto preslikavanje bijekcija, pa je

$$k(\mathcal{P}(A)) = k(\{0,1\}^n) = 2^n.$$

Ovaj rezultat se primenom stepena kardinalnog broja može uopštiti na proizvoljan skup A.

Tvrđenje 2.13. *Za proizvoljan skup A važi*

$$k(\mathcal{P}(A)) = 2^{k(A)}.$$

Dokaz. Jednakost sledi iz $\mathcal{P}(A) \sim \{0,1\}^A$. Za podskup $X \subseteq A$ sa χ_X označimo karakterističnu funkciju skupa X, odnosno

$$\chi_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in X \\ 0, & \text{ako je } x \in A \setminus X \end{cases}$$

Neka je funkcija $F : \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A$ data sa $F(X) = \chi_X$. Tada je funkcija $G : \{0,1\}^A \to \mathcal{P}(A)$ data sa

$$G(f) = f^{-1}(\{1\}), \quad \text{za sve } f \in \{0,1\}^A,$$

inverzna funkcija za F. Naime, za $X \subseteq A$ imamo $G(F(X)) = G(\chi_X) = {\chi_X}^{-1}(\{1\}) = X$, a za proizvoljno $f : A \to \{0,1\}$ je $F(G(f)) = F(f^{-1}(\{1\})) = \chi_{f^{-1}(\{1\})} = f$. Dakle, funkcija F jeste bijekcija. $\square$

2.3 Primeri

1) *Dokazati da su kardinali* $\aleph_0$ *i* $\mathfrak{c}$ *različiti.*

Rešenje: Posmatrajmo interval $A = [0, 1]$ i pretpostavimo da su pomenuti kardinalni brojevi jednaki, odnosno $k(A) = \mathfrak{c} = \aleph_0$. Ovo bi značilo da se elementi skupa A mogu poređati u niz. Tada je

$$A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\},$$

pri čemu su svi članovi različiti. Sada ćemo sve elemente skupa A prikazati u obliku decimalnih brojeva:

$$x_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13} \ldots a_{1n} \ldots,$$

$$x_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23} \ldots a_{2n} \ldots,$$

$$x_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33} \ldots a_{3n} \ldots,$$

$$\ldots$$

$$x_n = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3} \ldots a_{nn} \ldots,$$

pri čemu su sve cifre $a_{ij} \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ i svaki od razvoja sadrži beskonačno mnogo cifara različitih od nule. Tako umesto $1, 000 \ldots$ pišemo $0, 999 \ldots$, umesto $0, 5000 \ldots$ pišemo $0, 4999 \ldots$ itd.

Konstruišimo sada realan broj

$$y = 0, b_1b_2 \ldots$$

na sledeći način:

- izaberimo b_1 tako da je $b_1 \neq a_{11}$ i $b_1 \neq 0$

- izaberimo zatim b_2 tako da je $b_2 \neq a_{22}$ i $b_2 \neq 0$ ...

Tako redom biramo b_n tako da je $b_n \neq a_{nn}$ i $b_n \neq 0$. Ovim postupkom smo dobili da je $y \neq x_1$, zatim $y \neq x_2$, itd. Dakle, broj y konstruisan na pomenut način različit je od svih brojeva x_n $(n \in \mathbb{N})$, što je očigledna kontradikcija. Zato skup A ne može biti prebrojiv, odnosno pokazali smo da je $\mathfrak{c} \neq \aleph_0$.

2) *Dokazati sledeće jednakosti:*

(a) $n + \aleph_0 = \aleph_0 \;\; (n \in \mathbb{N}_0)$

(b) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

(c) $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

Rešenje: (a) Ako je $n = 0$, posmatrana jednakost je očigledno tačna. Pretpostavimo sada da je $n \geq 1$ i posmatrajmo sledeće skupove prirodnih brojeva:

$$A = \{1, 2, \ldots, n\} \text{ i } B = \{n+1, n+2, \ldots\}.$$

Tada je $k(A) = n$ i $k(B) = \aleph_0$, $A \cap B = \emptyset$. Na osnovu definicije zbira kardinalnih brojeva dobijamo,

$$n + \aleph_0 = k(A) + k(B) = k(A \dot\cup B) = k(\mathbb{N}) = \aleph_0.$$

(b) Sada, uočimo sledeće skupove prirodnih brojeva:

$$A = \{1, 3, 5, \ldots\} = \{2n - 1 | n \in \mathbb{N}\} \ , \ B = \{2, 4, 6, \ldots\} = \{2n | n \in \mathbb{N}\}.$$

Tada je $A \cap B = \emptyset$, $k(A) = k(B) = k(\mathbb{N}) = \aleph_0$, pa sledi

$$\aleph_0 + \aleph_0 = k(A) + k(B) = k(A \dot\cup B) = k(\mathbb{N}) = \aleph_0.$$

(c) Posmatrajmo skup prirodnih brojeva $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ i Dekartov proizvod

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m, n) | m, n \in \mathbb{N}\}.$$

Primetimo da se elementi skupa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mogu poređati na sledeći način:

$$\begin{array}{ccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & \ldots \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & \ldots \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & \ldots \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & \ldots \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & \ldots \\
 & & \ldots & &
\end{array}$$

Pravimo bijekciju između skupa $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tako što prirodnim brojevima redom dodeljujemo gore prikazane uređene parove uzimajući ih sledećim redosledom: $(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1), \ldots$. Ovakav postupak se naziva "dijagonalnim postupkom".

Sada je $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = k(\mathbb{N}) \times k(\mathbb{N}) = k(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = k(\mathbb{N}) = \aleph_0$.

3) *Dokazati da proizvoljan interval realne ose ima kardinalnost* $\mathfrak{c}$.

Rešenje: (a) Prvo posmatrajmo proizvoljan interval oblika $[a, b], -\infty < a < b < \infty$ i preslikavanje $f : [0, 1] \to [a, b]$ definisano na sledeći način:

$$f(t) = a + t(b - a) \ , \ 0 \leq t \leq 1.$$

Ovo preslikavanje je bijektivno pa možemo zaključiti da važi

$$k[a,b] = k[0,1] = \mathfrak{c}.$$

(b) Dalje uočimo bilo koji interval oblika $[a,b), -\infty < a < b < \infty$. Kako je jasno

$$[a,b) \dot{\cup} \{b\} = [a,b],$$

na osnovu prethodnog razmatranja primetimo da je

$$k[a,b] = k[a,b) + 1 = \mathfrak{c}.$$

Odavde je očigledno da je $k[a,b) = \mathfrak{c}$. Potpuno sličnim rezonovanjem može se pokazati da je

$$k(a,b] = k(a,b) = \mathfrak{c}.$$

(c) Sada posmatrajmo interval oblika $[a,+\infty)$ i bilo koji interval $[a,b), a < b$. Definišimo preslikavanje $f : [a,b) \to [a,+\infty)$ na sledeći način:

$$f(x) = a + \frac{x-a}{b-x}.$$

Ono je bijektivno pa možemo zaključiti da je

$$k[a,+\infty) = k[a,b) = \mathfrak{c}.$$

(d) Dalje, posmatrajmo interval oblika $(-\infty,b]$ i odgovarajući interval $[b,+\infty)$. Definišimo preslikavanje $f : (-\infty,b] \to [b,+\infty)$,

$$f(x) = 2b - x\ ,\ x \leq b.$$

Kako je preslikavanje bijektivno, sledi da je

$$k(-\infty,b] = k[b,+\infty) = \mathfrak{c}.$$

(e) Uočimo sada interval $(a,+\infty)$. Očigledno je da važi sledeća jednakost

$$(a,+\infty) \dot{\cup} \{a\} = [a,+\infty),$$

odakle je

$$k(a,+\infty) + 1 = k[a,+\infty) = \mathfrak{c}.$$

Iz ove jednakosti jasno se vidi da je $k(a,+\infty) = \mathfrak{c}$.

Potpuno analogno može se pokazati da je $k(-\infty,b) = \mathfrak{c}$.

(f) Pokažimo kanačno da je $k(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$.

Kako je skup $\mathbb{R}$ ekvivalentan bilo kom svom intervalu, jasno je da

$$k(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}.$$

Ekvivalencija skupa $\mathbb{R}$ sa proizvoljnim intervalnom realne prave vidi se iz postojanja bijektivnog preslikavanja, npr. $arctg\ x : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

4) *Dokazati sledeće jednakosti:*

(a) $n \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$

(b) $\aleph_0 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$

Rešenje: (a) Posmatrajmo skupove $A = [0, 1)$, $B = \{1, 2, \ldots, n\}$ i $C = [0, n)$, kao i preslikavanje $f : B \times A \to C$ definisano sa:

$$f(i, x) = x + i - 1, \ (i = 1, \ldots, n; x \in A).$$

Može se lako uočiti da je preslikavanje f bijektivno, odakle je

$$k(B \times A) = k(C),$$

odnosno $k(B) \cdot k(A) = k(C)$. Odavde je očigledno

$$n \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c},$$

jer je $k([0, 1)) = k([0, n)) = \mathfrak{c}$.

(b) Sada posmatrajmo skupove $A = [0, 1)$, $B = \mathbb{N}$ i $C = [0, +\infty)$. Tada je preslikavanje $f : B \times A \to C$ definisano sa

$$f(n, x) = x + n - 1, \ (n \in \mathbb{N}; x \in A),$$

bijektivno pa je opet, kao u prethodnom slučaju,

$$k(B \times A) = k(C),$$

odnosno $k(B) \cdot k(A) = k(C)$. Kako je poznato da je $k(B) = k(\mathbb{N}) = \aleph_0$, $k(A) = k(C) = \mathfrak{c}$, iz poslednje jednačine dobijamo

$$\aleph_0 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}.$$

5) *Dokazati da za bilo koji kardinalan broj k važe jednakosti:*

(a) $1 \cdot k = k$

(b) $0 \cdot k = 0$

Rešenje: (a) Posmatrajmo skup A, takav da je $k(A) = k$. Tada je

$$1 \cdot k = k \cdot 1 = k(A \times \{1\}).$$

Sada definišimo preslikavanje $f : A \times \{1\} \to A$ na sledeći način:

$$f(x, 1) = x, \ x \in A.$$

Kako je preslikavanje bijektivno, možemo zaključiti da je

$$k \cdot 1 = k(A \times 1) = k(A) = k.$$

(b) Neka je A proizvoljan skup, takav da je $k(A) = k$. Kako je $\emptyset \times A = \emptyset$, očigledno sledi

$$k(\emptyset \times A) = k(\emptyset) \cdot k(A) = k(\emptyset),$$

odnosno $0 \cdot k = 0$.

6) *Dokazati da za proizvoljan kardinalni broj k važi:*

(a) $k^1 = k$

(b) $1^k = 1$

Rešenje: (a) Neka je dat skup A, takav da je $k(A) = k$. Kako je

$$k^1 = k(A^1),$$

i skup oblika A^1 je skup svih funkcija koje preskikavaju $\{1\}$ u A jasno je da postoji bijekcija između A^1 i A. Zbog toga važi $A^1 \sim A$, pa i sledeća jednakost:

$$k^1 = k(A^1) = k(A) = k.$$

(b) Opet posmatrajmo pomenuti skup A, $k(A) = k$. Tada je

$$1^k = k(1^A),$$

i kako skup 1^A sadrži samo jednu funkciju, $f : A \to \{1\}$ takvu da je $f(x) = 1$, za svako $x \in A$ jasno je da $1^A \sim \{1\}$. Odavde je

$$1^k = k(1^A) = k(\{1\}) = 1.$$

2.4 Poređenje kardinalnih brojeva

U ovom delu definisaćemo relaciju $\leq$ među kardinalnim brojevima.

Neka su dati proizvoljni skupovi A i B, takvi da je $k(A) = \alpha$ i $k(B) = \beta$. Tada je $\alpha \leq \beta$ ako je skup A ekvivalentan nekom podskupu skupa B.

Takođe, ako postoji bar jedno injektivno preslikavanje $f : A \to B$ kažemo da je $\alpha \leq \beta$. Ova definicija korektna je u smislu da ako je $\alpha \leq \beta$ i ako su A_1, B_1 takvi da $A \sim A_1$ i $B \sim B_1$, tada postoji bar jedno injektivno preslikavanje $f_1 : A_1 \to B_1$.

Ako je A proizvoljan skup i skup S takav da $S \subseteq A$, tada je jasno $k(S) \leq k(A)$.

Sada ćemo pokazati da je pomenuta relacija $\leq$ u skupu svih kardinalnih brojeva relacija poretka - refleksivna, antisimetrična i tranzitivna. Uočimo proizvoljan skup A, takav da je $k(A) = k$. Jasno je da je $A \subseteq A$, pa važi $k \leq k$. Dalje, ako su A, B i C proizvoljni skupovi, takvi da je $k(A) = \alpha$, $k(B) = \beta$ i $k(C) = \gamma$. Pretpostavimo da važi $\alpha \leq \beta$ i $\beta \leq \gamma$, treba pokazati da je onda $\alpha \leq \gamma$. Ako su kardinalni brojevi u pomenutim odnosima, onda možemo zaključiti da je $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$. Odavde je neposredno $A \subseteq C$, što znači da je $\alpha \leq \gamma$. Treba još pokazati i antisimetričnost, odnosno da ako $\alpha \leq \beta$ i $\beta \leq \alpha$ onda mora da važi $\alpha = \beta$. Ovaj rezultat nam daje Kantor-Bernštajnova teorema, koju ćemo u nastavku dokazati.

Dokaz pomenute teoreme oslanja se na pomoćno tvrđenje koje ćemo prvo pokazati.

Lema 2.14. *Pretpostavimo da su skupovi A_1, A_2, A_3 u sledećem odnosu, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3$ i $A_1 \sim A_3$. Tada je $A_1 \sim A_2$.*

Dokaz. Kako je $A_1 \sim A_3$, postoji bar jedno bijektivno preslikavanje $f : A_1 \to A_3$. Neka je:

$$A_4 = f(A_2), A_5 = f(A_3), A_6 = f(A_4), \ldots$$

Tada niz skupova

$$\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$$

očigledno ispunjava uslov

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq A_4 \supseteq A_5 \supseteq A_6 \supseteq \ldots$$

Za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ uvedimo sledeću oznaku:

$$A_n \setminus A_{n+1} = A_{n,n+1},$$

tada zbog bijektivnosti preslikavanja f važi:

$$f(A_{n,n+1}) = f(A_n \setminus A_{n+1}) = f(A_n) \setminus f(A_{n+1}) = A_{n+2} \setminus A_{n+3} = A_{n+2,n+3}, n \in \mathbb{N}.$$

Odavde je očigledno za svako $n \in \mathbb{N}$:

$$A_{n,n+1} \sim A_{n+2,n+3}.$$

Ako označimo dalje:

$$D = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots,$$
$$E = D \mathbin{\dot\cup} (A_{2,3} \mathbin{\dot\cup} A_{4,5} \mathbin{\dot\cup} A_{6,7} \mathbin{\dot\cup} \ \ldots),$$

tada je

$$\begin{aligned} A_1 = D \mathbin{\dot\cup} \dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_{n,n+1} &= D \mathbin{\dot\cup} (A_{2,3} \mathbin{\dot\cup} A_{4,5} \mathbin{\dot\cup} \ \ldots) \mathbin{\dot\cup} (A_{1,2} \mathbin{\dot\cup} A_{3,4} \mathbin{\dot\cup} \ \ldots) \\ &= E \mathbin{\dot\cup} (A_{1,2} \mathbin{\dot\cup} A_{3,4} \mathbin{\dot\cup} \ \ldots), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 = D \mathbin{\dot\cup} \dot{\bigcup}_{n=2}^{\infty} A_{n,n+1} &= D \mathbin{\dot\cup} (A_{2,3} \mathbin{\dot\cup} A_{4,5} \mathbin{\dot\cup} \ \ldots) \mathbin{\dot\cup} (A_{3,4} \mathbin{\dot\cup} A_{5,6} \mathbin{\dot\cup} \ \ldots) \\ &= E \mathbin{\dot\cup} (A_{3,4} \mathbin{\dot\cup} A_{5,6} \mathbin{\dot\cup} \ \ldots). \end{aligned}$$

Kako na osnovu $A_{n,n+1} \sim A_{n+2,n+3}$ važi:

$$A_{1,2} \sim A_{3,4}\ ,\ A_{3,4} \sim A_{5,6}\ \ldots$$

uzimajući u obzir prethodne jednakosti sledi da je $A_1 \sim A_2$. Ovim je tvrđenje dokazano. □

Teorema 2.15 (Kantor-Bernštajnova teorema)**.** *Ako za proizvoljne kardinale α i β istovremeno važi $\alpha \leq \beta$ i $\alpha \geq \beta$, tada je $\alpha = \beta$.*

Dokaz. Uočimo proizvoljne skupove A i B, tako da je $k(A) = \alpha$ i $k(B) = \beta$. Na osnovu pretpostavki teoreme znamo da postoje injektivna preslikavanja $f : A \to B$ i $g : B \to A$. Ako pretpostavimo sledeće:

$$A_1 = A,\ B_1 = f(A),$$

$$A_2 = g(B),\ A_3 = g(f(A)) = g(B_1),$$

tada je očigledno $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3$ i pritom važi

$$A_1 \sim B_1 = f(A_1) \sim g(B_1) = A_3,$$

dakle $A_1 \sim A_3$. Sada je na osnovu prethodne leme $A_1 \sim A_2 = g(B) \sim B$, pa je $A = A_1 \sim B$, odnosno $\alpha = \beta$. □

Na osnovu Kantor-Bernštajnove teoreme skup svih kardinalnih brojeva je parcijalno uređen skup u odnosu na uvedenu relaciju poretka. Kasnije ćemo videti da je ovaj skup i totalno uređen u odnosu na navedenu relaciju.

Teorema 2.16 (Hauzdorfov princip maksimalnosti)**.** *Svaki neprazan parcijalno uređen skup sadrži bar jedan maksimalni lanac.*

Za proizvoljne kardinalne brojeve α i β kažemo da je $\alpha < \beta$ ako je $\alpha \leq \beta$ i pritom $\alpha \neq \beta$. Ako je $\alpha \leq \beta$ postoje samo mogućnosti da je $\alpha = \beta$ ili $\alpha < \beta$.

Sledeća teorema predstavlja jedan od najvažnijih stavova teorije skupova.

Teorema 2.17 (Princip trihotomije)**.** *Za dva proizvoljna kardinalna broja α i β važi:*

$$\alpha < \beta, \alpha = \beta \text{ ili } \alpha > \beta.$$

Dokaz. Dokazaćemo ekvivalentno tvrđenje, da za proizvoljne kardinale α i β važi $\alpha \leq \beta$ ili $\alpha \geq \beta$.

Uočimo skupove A i B, takve da je $k(A) = \alpha$ i $k(B) = \beta$. Možemo pretpostaviti da su pomenuti skupovi kardinalnosti bar jedan, jer je slučaj $\alpha = \beta = 0$ trivijalan.

Posmatrajmo skup $S \subseteq A$ koji je ekvivalentan nekom skupu $T \subseteq B$. Sa $f_S^T : S \to T$ označimo bijektivno preslikavanje skupa S u skup T. Jasno je da onda pomenuto preslikavanje injektivno preslikava S u B.

Označimo sa $\mathcal{M}$ kolekciju svih mogućih parova oblika (S, f_S^T). Kolekcija $\mathcal{M}$ je neprazna, jer sadrži sve moguće parove koji sadrže jednočlane podskupove $\{x\}$ skupa A. Odgovarajuće preslikavanje $f_{\{x\}}^{\{y\}}$ može biti bilo koje preslikavanje skupa $\{x\} \subseteq A$ u $\{y\} \subseteq B$.

U skup $\mathcal{M}$ može se uvesti relacija poretka $(\leq)$. Ako $(S_1, f_{S_1}^{T_1}), (S_2, f_{S_2}^{T_2}) \in \mathcal{M}$, tada $(S_1, f_{S_1}^{T_1}) \leq (S_2, f_{S_2}^{T_2})$ ako je $S_1 \subseteq S_2$ i funkcija $f_{S_2}^{T_2}$ produžava funkciju $f_{S_1}^{T_1}$.

Ovako skup $(\mathcal{M}, \leq)$ postaje neprazan parcijalno uređen skup. Sada, na osnovu Hauzdorfovog principa maksimalnosti sledi da postoji bar jedan maksimalni lanac $\mathcal{C}$ skupa $\mathcal{M}$. Neka je

$$\mathcal{C} = \{(S_i, f_{S_i}^{T_i}) : i \in I\}$$

i

$$C = \bigcup_{i \in I} S_i.$$

Definišimo preslikavanje $f_C : C \to B$,

$$f_C(x) = f_{S_i}^{T_i}(x),$$

ako je $x \in S_i$.

Pomenuto preslikavanje je dobro definisano i injektivno, što sledi iz činjenice da je familija $\mathcal{C}$ lanac skupova, pa je za proizvoljne skupove $S_i, S_j \in \mathcal{C}$ ispunjeno:

$$(S_i, f_{S_i}^{T_i}) \leq (S_j, f_{S_j}^{T_j}) \text{ ili } (S_j, f_{S_j}^{T_j}) \leq (S_i, f_{S_i}^{T_i}).$$

Odavde sledi da par $(C, f_C) \in \mathcal{M}$.

Sada ćemo pokazati da je $C = A$ ili $f_C(C) = B$. Pretpostavimo suprotno, $C \neq A$ i $f_C(C) \neq B$.

Uočimo sada proizvoljne elemente, $a \in A \setminus C$ i $b \in B \setminus f_C(C)$. Neka je

$$D = C \,\dot\cup\, \{a\},$$

$$f_D(x) = \begin{cases} f_C(x) & , x \in C \\ b & , x = a \end{cases}$$

Tada je $(D, f_D) \in \mathcal{M}$ i skup $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \,\dot\cup\, \{(D, f_D)\}$ predstavlja lanac skupa $\mathcal{M}$, koji obuhvata lanac $\mathcal{C}$, ali je strogo veći od njega. Ovo je u kontradikciji sa pretpostavkom o maksimalnosti lanca $\mathcal{C}$.

Na ovaj način smo pokazali da je ili $C = A$ ili $f_C(C) = B$. U prvom slučaju imamo $A \sim f_C(A) \subseteq B$, pa je $k(A) \leq k(B)$. Dok je u drugom slučaju $C \subseteq A$ i $C \sim f_C(C) = B$, pa je $k(A) \geq k(B)$.

Dakle, pokazali smo da važi:

$$\alpha \leq \beta \text{ ili } \alpha \geq \beta.$$

□

Sada se neke od osobina koje važe za konačne kardinale mogu preneti na beskonačne kardinalne brojeve.

Tvrđenje 2.18. *Za proizvoljan beskonačni kardinal k važi sledeća nejednakost:*

$$k \geq \aleph_0.$$

Dokaz. Posmatrajmo proizvoljan skup A, takav da je $k(A) = k$. Tada je A beskonačan skup, pa znamo da postoji prebrojivi podskup S skupa A, $k(S) = \aleph_0$. Kako je S podskup skupa A, sledi da je

$$\aleph_0 = k(S) \leq k(A) = k.$$

□

Tvrđenje 2.19. *Za proizvoljne kardinalne brojeve α i β važe nejednakosti:*

(a) $\alpha + \beta \geq \alpha$

(b) $\alpha \cdot \beta \geq \alpha$ *(ako je* $\beta \neq 0$)

Dokaz. (a) Uočimo proizvoljne skupove A i B takve da je $k(A) = \alpha$, $k(B) = \beta$ i $A \cap B = \emptyset$. Jasno, tada je $A \subseteq A \,\dot\cup\, B$ odakle sledi

$$\alpha = k(A) \leq k(A \,\dot\cup\, B) = k(A) + k(B) = \alpha + \beta$$

(b) Neka je b proizvoljan, fiksiran elemenat skupa B. Tada su skupovi A i $A \times \{b\}$ ekvivalentni, pa je

$$\alpha = k(A) = k(A \times \{b\}) \leq k(A \times B) = \alpha \cdot \beta.$$

$\square$

Tvrđenje 2.20. *Ako je $\alpha \leq \beta$, tada za proizvoljni kardinalni broj k važi*

$$\alpha + k \leq \beta + k.$$

Dokaz. Uočimo proizvoljne skupove A, B, C, takve da je $k(A) = \alpha, k(B) = \beta$ i $k(C) = k$. Pritom pretpostavimo $A \cap C = B \cap C = \emptyset$. Tada je

$$k(A \dot{\cup} C) = k(A) + k(C) = \alpha + k,$$

$$k(B \dot{\cup} C) = k(B) + k(C) = \beta + k.$$

Kako je po uslovu tvrđenja $\alpha \leq \beta$, sledi da postoji bar jedno injektivno preslikavanje iz skupa A u skup B, $f : A \to B$. Sada definišimo preslikavanje $F : A \dot{\cup} C \to B \dot{\cup} C$ tako da je:

$$F(x) = f(x) \ \text{ za } x \in A,$$

$$F(y) = y \ \text{ za } y \in C.$$

Kako je funkcija F injektivna, sledi da je

$$k(A \dot{\cup} C) \leq k(B \dot{\cup} C),$$

odnosno $\alpha + k \leq \beta + k$. $\square$

Tvrđenje 2.21. *Ako je $\alpha \leq \beta$, tada za proizvoljni kardinalni broj k važi*

$$k\alpha \leq k\beta.$$

Dokaz. Neka su A, B i C proizvoljni skupovi, takvi da je

$$k(A) = \alpha, \ \ k(B) = \beta, \ \ k(C) = k.$$

Kako je prema pretpostavci tvrđenja $\alpha \leq \beta$, sledi da postoji injektivno preslikavanje $f : A \to B$. Definišimo preslikavanje $F : A \times C \to B \times C$ na sledeći način:

$$F(a, x) = (f(a), x), \ \ (a \in A, x \in C).$$

Kako je ovo preslikavanje injektivno i pritom

$$k \cdot \alpha = k(A \times C) \ \ , \ \ k \cdot \beta = k(B \times C),$$

dobijamo traženu nejednakost. $\square$

Napomenimo da za kardinalne brojeve α i β u opštem slučaju nije tačno da iz nejednakosti $k\alpha \leq k\beta$ ($k \geq 1$) sledi $\alpha \leq \beta$.

Primetimo da za proizvoljni kardinalni broj k važi nejednakost

$$2^k \geq k.$$

Znamo da ako je A proizvoljan skup, takav da je $k(A) = k$ tada važi $k(\mathcal{P}(A)) = 2^k$. Kako je jasno da $A \in \mathcal{P}(A)$ sledi da je

$$k = k(A) \leq k(\mathcal{P}(A)) = 2^k.$$

Specijalno, ako je A konačan skup, takav da je $k(A) = n$ tada za svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ važi stroga nejednakost:

$$2^n > n.$$

Prethodno pomenuti rezultat može se preneti i na beskonačne kardinalne brojeve.

Tvrđenje 2.22. *Za proizvoljan kardinalni broj k važi stroga nejednakost*

$$2^k > k.$$

Dokaz. Uočimo proizvoljan skup A, takav da je $k(A) = k$. Znamo da je $2^k \geq k$. Dakle, treba pokazati $2^k \neq k$, odnosno da skupovi $\mathcal{P}(A)$ i A ne mogu biti ekvivalentni.

Pretpostavimo suprotno, tj. da je $A \sim \mathcal{P}(A)$ i neka je odgovarajuće preslikavanje f bijektivno, $f : A \to \mathcal{P}(A)$.

Definišimo skup M na sledeći način: $M = \{x \in A : x \notin f(x)\}$.

Kako je preslikavanje f sirjektivno postojaće element $b \in A$ takav da je $f(b) = M$.

Ako $b \in M$, dobijamo da $b \notin f(b) = M$, što je kontradikcija.

Ako $b \notin M = f(b)$, onda prema konstrukciji skupa M on treba da pripada pomenutom skupu ($b \in M$), što je opet kontradikcija.

Dobijene kontradikcije pokazuju da skupovi A i $\mathcal{P}(A)$ ne mogu biti ekvivalentni. Specijalno, ako je $A = \emptyset$, tada je $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$ pa je $k(A) = 0$ i $k(\mathcal{P}(A)) = 1$. $\square$

2.5 Primeri

1) *Dokazati da ako postoji bar jedno sirjektivno preslikavanje skupa A na skup B tada važi*

$$k(A) \geq k(B).$$

Rešenje: Neka je $f : A \to B$ preslikavanje skupa A na skup B. Uvodimo relaciju "$\sim$" u skup A, $x \sim y$ ako je $f(x) = f(y)$.

Pomenuta relacija je relacija ekvivalencije. Sa $A/\sim$ označavamo količnički skup u odnosu na odgovarajuću relaciju. Ako u svakom $X \in A/\sim$ izaberemo po jedan $x \in X$ i skup svih takvih elemenata označimo sa A_0 onda je $A_0 \subseteq A$ i funkcija f koja slika A_0 u B je bijektivna. Zbog toga je

$$k(A) \geq k(A_0) = k(B),$$

odakle je $k(A) \geq k(B)$.

2) *Dokazati da je* $\aleph_0 + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

Rešenje: Napomenimo prvo da je $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = 2\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ (2.3 zadatak 4). Sada, kako je $\aleph_0 \leq \mathfrak{c}$ dobijamo

$$\mathfrak{c} \leq \aleph_0 + \mathfrak{c} \leq \mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}.$$

Odavde sledi $\aleph_0 + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

3) *Dokazati da je* $k(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

Rešenje: Neka je $A = [0,1], T = \{0,1\}$ i $B = T^{\mathbb{N}}$, odnosno

$$B = \{(x_1, x_2, \ldots) : x_n = 0, 1 \text{ za svako } n \in \mathbb{N}\}.$$

Tada je $k(B) = k(T^{\mathbb{N}}) = 2^{\aleph_0}$.

Konstruisaćemo preslikavanje iz B u A. Ako je x proizvoljan broj iz skupa A, tada ga možemo prikazati u binarnom obliku

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots,$$

pri čemu sve cifre posmatranog broja uzimaju samo vrednosti 0 i 1.

Neka je preslikavanje $g : B \to A$ definisano sa

$$g(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i 2^{-i}.$$

Ovo preslikavanje je sirjektivno, jer

$$\forall x \in [0,1]\ ,\ \exists (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in B \ \text{ tako da je } \ x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i 2^{-i}.$$

Ali g nije injektivno, jer se dva različita binarna niza mogu preslikati u isti broj, npr. $0,1000\ldots$ i $0,0111\ldots$ se slikaju u 2^{-1}.

Kako je g sirjekcija, sledi da je $2^{\aleph_0} = k(B) \geq k(A) = \mathfrak{c}$.

"Problematične tačke" su one koje imaju konačan binarni zapis. Takvih tačaka ima $\aleph_0$, jer se između njih i svih konačnih podskupova skupa $\mathbb{N}$ može formirati bijektivno preslikavanje. Preslikavanje formiramo tako što svakom binarnom prikazu broja dodeljujemo jedan podskup skupa $\mathbb{N}$, indeksirajući svaku cifru iza zareza u binarnom prikazu i dodeljujući broju skup onih indeksa koji su dodeljeni svakoj jedinici u binarnom prikazu, npr. $0,01101000\ldots \to \{2,3,5\} \subseteq \mathbb{N}$. Dakle, tačaka sa konačnim binarnim prikazom ima koliko i konačnih podskupova skupa $\mathbb{N}$, $k(\mathcal{P}_K(\mathbb{N})) = k(\mathbb{N}) = \aleph_0$ (dokazano u posledici 2.30).

Kako je g sirjekcija iz B u A, možemo formirati $B_0 \subsetneq B$ tako da se B_0 bijektivno preslikava u skup A. Odavde sledi da je $k(B_0) = k(A) = \mathfrak{c}$. Sada, $k(B) = k(B_0) + \aleph_0 = \mathfrak{c} + \aleph_0 = \mathfrak{c}$.

4) *Dokazati da važi jednakost* $\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{c}$.

Rešenje: Na osnovu prethodnog zadatka, znamo da je $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. Odavde je

$$\mathfrak{c}^2 = (2^{\aleph_0})^2 = 2^{2\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

5) *Dokazati da važe sledeće jednakosti:*

(a) $\mathfrak{c}^n = \mathfrak{c} \quad (n \in \mathbb{N})$

(b) $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

(c) ${\aleph_0}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

Rešenje: (a) Dokaz ćemo izvesti indukcijom po n.

Za $n = 1$ je trivijalno, za $n = 2$ tvrđenje je tačno na osnovu prethodnog zadatka.

Pretpostavimo da jednakost važi za prirodan broj n, odnosno $\mathfrak{c}^n = \mathfrak{c}$.

Sada pokažimo da je tačno i za broj $n + 1$,

$$\mathfrak{c}^{n+1} = \mathfrak{c}^n \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}^2 = \mathfrak{c}.$$

Dakle, na osnovu principa indukcije, jednakost važi za sve prirodne brojeve.

(b) Kako je $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ i ${\aleph_0}^2 = \aleph_0$ (videti 2.3 zadatak 2), dobijamo

$$\mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{({\aleph_0}^2)} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

(c) Kako je $\aleph_0 \geq 2$, imamo

$${\aleph_0}^{\aleph_0} \geq 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Sa druge strane, pošto je $\aleph_0 \leq \mathfrak{c}$, imamo

$$ {\aleph_0}^{\aleph_0} \leq \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}. $$

Iz gornjih nejednakosti, na osnovu Kantor-Bernštajnove teoreme, dobijamo traženu jednakost, ${\aleph_0}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

2.6 Kvadrat kardinalnog broja

Teorema 2.23. *Za proizvoljan beskonačni kardinalni broj k važi sledeća jednakost:*

$$k^2 = k.$$

Od konačnih kardinalnih brojeva pomenutu jednakost očigledno zadovoljavaju samo kardinalni brojevi 0 i 1.

Dokaz navedene teoreme se oslanja na nekoliko pomoćnih tvrđenja, koja ćemo prvo dokazati.

Uvedimo prethodno neke pojmove. Beskonačan skup A nazivamo uslovno idempotentnim ako odgovarajući kardinalni broj skupa A, $k = k(A)$, zadovoljava uslov $k^2 = k$. Kolekciju svih skupova sa ovom osobinom označićemo sa $\mathcal{I}$.

Kako je za bilo koji skup A ispunjena nejednakost $k(A)^2 \geq k(A)$, dobija se da beskonačan skup A pripada kolekciji idempotentnih skupova ($\mathcal{I}$) ako i samo ako važi $k(A)^2 \leq k(A)$.

Lema 2.24. *Za poizvoljan skup $A \in \mathcal{I}$ važi jednakost*

$$k(A) + k(A) = k(A).$$

Dokaz. Imamo da je

$$k(A) \leq k(A) + k(A) = 2k(A) \leq k(A)^2 = k(A),$$

odavde sledi da je $k(A) + k(A) = k(A)$. □

Lema 2.25. *Ako neki skup C pripada kolekciji idempotentnih skupova ($C \in \mathcal{I}$), skup $A \supseteq C$ i $k(A \setminus C) \leq k(C)$ tada je i skup $A \in \mathcal{I}$.*

Dokaz. Skup A se može predstaviti u sledećem obliku, $A = (A \setminus C) \dot\cup C$. Odavde je

$$\begin{aligned} A \times A &= [(A \setminus C) \dot\cup C] \times [(A \setminus C) \dot\cup C] \\ &= C \times C \dot\cup (A \setminus C) \times C \dot\cup C \times (A \setminus C) \dot\cup (A \setminus C) \times (A \setminus C) \end{aligned}$$

Sada je $k(A)^2 = k(A \times A) = k(C)^2 + 2k(C)k(A \setminus C) + k(A \setminus C)^2$. Znamo da je $k(A \setminus C) \leq k(C)$,pa sledi

$$k(A)^2 \leq k(C)^2 + 2k(C)^2 + k(C)^2.$$

Kako $C \in \mathcal{I}$, odnosno važi $k(C)^2 = k(C)$, primenom prethodnog tvrđenja dobijamo

$$k(A)^2 \leq k(C) + 2k(C) + k(C) = k(C) \leq k(A).$$

Ovim je pokazano da skup A pripada kolekciji idempotentnih skupova ($\mathcal{I}$). □

Lema 2.26. *Pretpostavimo da važi:*
- skup $C \in \mathcal{I}$
- skup $A \supseteq C$ *i* $k(A \setminus C) \geq k(C)$
- preslikavanje $f : C \times C \to C$ *je bijektivno.*
Tada postoji bar jedan skup $\Omega \subseteq A \backslash C$ *i bijektivno preslikavanje* $g : (C \dot\cup \Omega)^2 \to C \dot\cup \Omega$ *koje produžava preslikavanje* f*.*

Dokaz. Kako je $k(A \setminus C) \geq k(C)$ sledi da postoji bar jedan skup $\Omega \subseteq A \setminus C$ koji je ekvivalentan sa C, odnosno takav da je $k(C) = k(\Omega)$. Pritom je jasno da $C \cap \Omega = \emptyset$. Sada je,

$$(C \dot\cup \Omega)^2 = C \times C \dot\cup C \times \Omega \dot\cup \Omega \times C \dot\cup \Omega \times \Omega = C \times C \dot\cup S,$$

pri čemu je $S = C \times \Omega \dot\cup \Omega \times C \dot\cup \Omega \times \Omega$.
Pošto je preslikavanje f prema uslovima bijektivno, sledi da je skup $C \times C$ ekvivalentan sa C. Sada je dovoljno pokazati da je S ekvivalentan sa skupom Ω. Iz prethodne jednakosti imamo

$$k(S) = k(C)k(\Omega) + k(C)k(\Omega) + k(\Omega)^2 = k(\Omega)^2 + k(\Omega)^2 + k(\Omega)^2 = k(\Omega).$$

Ovim je lema dokazana. $\square$

Sada se vratimo na dokaz teoreme sa početka ovog podpoglavlja.

Dokaz teoreme 2.23. Neka je k proizvoljni beskonačni kardinal. Uočimo proizvoljan skup A takav da je $k(A) = k$.

Dalje, posmatrajmo neki skup $S \subseteq A$ koji pripada kolekciji $\mathcal{I}$ i sa f_S označimo bijektivno preslikavanje, $f_S : S \times S \to S$.

Sa $\mathcal{M}$ označimo kolekciju svih parova (S, f_S), pri čemu skup S i f_S imaju navedene osobine. Znamo da je kolekcija $\mathcal{M}$ neprazna, jer je A beskonačan skup pa kao svoj podskup sadrži prebrojiv skup S, pritom $S \in \mathcal{I}$, jer je ${\aleph_0}^2 = \aleph_0$ (2.3 zadatak 2).

U skup $\mathcal{M}$ možemo uvesti relaciju $\leq$ na sledeći način:
- ako parovi $(S_1, f_{S_1}), (S_2, f_{S_2}) \in \mathcal{M}$ tada je $(S_1, f_{S_1}) \leq (S_2, f_{S_2})$ ako je $S_1 \subseteq S_2$ i preslikavanje f_{S_2} produžava f_{S_1}.

Kako je ova relacija jedna relacija poretka u skupu $\mathcal{M}$, sledi da je skup $\mathcal{M}$ pomenutom relacijom parcijalno uređen.

Označimo sa $\mathcal{C} = \{(S_i, f_{S_i}), i \in \Lambda\}$ fiksirani maksimalni lanac skupa $\mathcal{M}$. Neka je

$$C = \bigcup \{S_i, i \in \Lambda\}.$$

Tada je skup $C \subseteq A$ i beskonačan je, jer su svi skupovi $S_i, i \in \Lambda$ beskonačni.

Sada ćemo dokazati da je $C \in \mathcal{I}$.
Definišimo preslikavanje $f_C : C \times C \to C$ na sledeći način:

- ako je element $x \in C$, tada $x \in S_i$ za neko $i \in \Lambda$; neka je tada $f_C(x) = f_{S_i}(x)$. Pomenuta funkcija f_C je dobro definisana i bijektivna, odakle sledi $(C, f_C) \in \mathcal{M}$. Pritom je moguće da je $C = A$, kao i da je $C \neq A$.

Kako je prema pretpostavci $\mathcal{C}$ maksimalni lanac, sledi da ne postoji neprazan skup $\Omega \subseteq A \setminus C$ takav da je $C \,\dot\cup\, \Omega \in \mathcal{I}$ i odgovarajuće bijektivno preslikavanje $g : (C \,\dot\cup\, \Omega)^2 \to (C \,\dot\cup\, \Omega)$ koje produžava f_C. Zbog toga, na osnovu prethodne leme zaključujemo da je $k(A \setminus C) \leq k(C)$. Tada na osnovu leme 2.25 dobijamo da $A \in \mathcal{I}$. Ovim je teorema dokazana. □

U daljem tekstu sledi nekoliko posledica upravo dokazane teoreme.

Posledica 2.27. *Za svaki beskonačni kardinal k i bilo koji konačan kardinalni broj n važi sledeća jednakost*

$$k^n = k.$$

Dokaz. Dokaz ćemo izvesti indukcijom.

Jasno je da tvrđenje važi za $n = 1$, a na osnovu teoreme 2.23 i za $n = 2$.

Pretpostavimo da pomenuta jednakost važi za kardinalni broj n.

Sada pokazimo da važi za $n + 1$. Na osnovu induktivne pretpostavke imamo

$$k^{n+1} = (k^n) \cdot k = k \cdot k = k^2 = k.$$

Dakle, prema principu indukcije jednakost $k^n = k$ važi za sve konačne kardinalne brojeve n. □

Posledica 2.28. *Za proizvoljan beskonačni kardinalni broj k važi:*

(a) $n \cdot k = k,\ n \in \mathbb{N}$

(b) $\aleph_0 \cdot k = k$

Dokaz. (a) Kako je $n \geq 1$, sledi

$$n \cdot k \geq 1 \cdot k = k.$$

Sa druge strane, za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ znamo da je $n \leq k$, pa je

$$n \cdot k \leq k \cdot k = k^2 = k.$$

Odavde na osnovu Kantor-Bernštajnove teoreme možemo zaključiti da za proizvoljan konačan kardinalni broj n važi $n \cdot k = k$.

(b) Kako je $\aleph_0 \leq k$ imamo

$$\aleph_0 \cdot k \leq k \cdot k = k^2 = k.$$

Pošto je $\aleph_0$ beskonačan kardinal znamo da važi $\aleph_0 \geq 1$, pa je

$$\aleph_0 \cdot k \geq 1 \cdot k = k.$$

Kao i u prethodnom slučaju, na osnovu Kantor-Bernštajnove teoreme dobijamo

$$\aleph_0 \cdot k = k.$$

□

Neka su k i l proizvoljni kardinalni brojevi. Znamo da oni mogu biti u odnosu $k \leq l$ ili $k \geq l$. Ako je $k \leq l$, definišemo

$$max\{k, l\} = l.$$

Posledica 2.29. *Neka su $k, l \geq 1$ proizvoljni kardinalni brojevi i neka je bar jedan od njih beskonačan, tada važi:*

(a) $k + l = max\{k, l\}$

(b) $k \cdot l = max\{k, l\}$

Dokaz. (a) Ne umanjujući opštost možemo pretpostaviti da $k \leq l$, odnosno $max\{k, l\} = l$. Tada je na osnovu pretpostavke l beskonačan kardinal. Sada imamo

$$k + l \geq 1 + l = l$$

i

$$k + l \leq l + l = 2l = l.$$

Možemo zaključiti da je $k + l = l$.

(b) Slično, zbog $k \geq 1$, opet imamo

$$k \cdot l \geq 1 \cdot l = l.$$

Sa druge strane, zbog $k \leq l$ i $l^2 = l$, važi

$$k \cdot l \leq l \cdot l = l^2 = l.$$

Jasno je da sledi $k \cdot l = l$.

□

Neka su dalje $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ proizvoljni kardinali i neka su $A_1, A_2, \ldots$ skupovi kojima ćemo dodeliti pomenute kardinalne brojeve, odnosno $k(A_1) = \alpha_1, k(A_2) = \alpha_2, \ldots$ Tada pod redom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} k(A_n)$$

podrazumevamo kardinalni broj skupa

$$\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n \times \{n\}.$$

Primetimo da za svaki prirodan broj n važi $A_n \sim A_n \times \{n\}$ i da su skupovi $A_n \times \{n\},\ n \in \mathbb{N}$ po parovima disjunktni. Sada je prema definiciji

$$\sum_{n=1}^{\infty} k(A_n) = k(\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n \times \{n\}).$$

Specijalno, ako su skupovi $A_n,\ n \in \mathbb{N}$ po parovima disjunktni, tada važi

$$\sum_{n=1}^{\infty} k(A_n) = k(\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n),$$

jer važi ekvivalencija

$$\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n \times \{n\} \sim \dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Ako je A proizvoljan skup, tada je

$$\sum_{n=1}^{\infty} k(A) = \aleph_0 \cdot k(A).$$

Na osnovu gore definisanog reda imamo da $\sum_{n=1}^{\infty} k(A)$ podrazumeva kardinalni broj skupa $\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A \times \{n\}$.
Sada je

$$\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A \times \{n\} = A \times \{1\} \mathbin{\dot{\cup}} A \times \{2\} \mathbin{\dot{\cup}} \ldots = A \times \{1, 2, 3, \ldots\} = A \times \mathbb{N},$$

odakle je

$$\sum_{n=1}^{\infty} k(A) = k(A \times \mathbb{N}) = k(\mathbb{N} \times A) = k(\mathbb{N}) \cdot k(A) = \aleph_0 \cdot k(A).$$

Posledica 2.30. *Ako je A beskonačan skup i $\mathcal{P}_K(A)$ kolekcija svih konačnih podskupova skupa A, tada važi sledeća jednakost:*

$$k(\mathcal{P}_K(A)) = k(A).$$

Dokaz. Za proizvoljan prirodan broj n označimo da $\mathcal{P}_n(A)$ skup svih podskupova skupa A koji sadrži n međusobno različitih elemenata. Tada je

$$k(\mathcal{P}_n(A)) \leq k(A \times \ldots \times A) = k(A^n) = k(A)^n.$$

Kako je na osnovu posledice 2.27, za proizvoljan konačan kardinal $n \in \mathbb{N}$ ispunjeno

$$k(A)^n = k(A),$$

dobijamo

$$k(\mathcal{P}_n(A)) \leq k(A).$$

Dalje je jasno da je

$$\mathcal{P}_K(A) = \dot{\bigcup}_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n(A),$$

odakle sledi da je

$$k(\mathcal{P}_K(A)) = \sum_{n=0}^{\infty} k(\mathcal{P}_n(A)).$$

Sada iz gornjih jednačina dobijamo

$$k(\mathcal{P}_K(A)) \leq \sum_{n=0}^{\infty} k(A) = \aleph_0 \cdot k(A).$$

Kako je na osnovu posledice 2.28, $\aleph_0 \cdot k(A) = k(A)$, sledi da je

$$k(\mathcal{P}_K(A)) \leq k(A).$$

Sa druge strane, očigledno je

$$k(\mathcal{P}_K(A)) \geq k(\mathcal{P}_1(A)) = k(A).$$

Iz navedenih nejednakosti, na osnovu Kantor-Bernštajnove teoreme dobijamo da je

$$k(\mathcal{P}_K(A)) = k(A).$$

□

Napomena 2.31. Primetimo da ako je A neki konačan skup i $k(A) = n$, tada

$$k(\mathcal{P}_K(A)) = k(\mathcal{P}(A)) = 2^n > n = k(A),$$

pa je jasno da tvrđenje iz prethodne posledice nije tačno za konačne kardinale.

2.7 Primeri

1) *Neka je A proizvoljan beskonačan skup. Dokazati da postoje skupovi $A_1, A_2 \subseteq A$ takvi da je $A = A_1 \dot\cup A_2$ i $k(A_1) = k(A_2) = k(A)$.*

Rešenje: Kako je A beskonačan skup, znamo da je $2 \cdot k(A) = k(A)$.

Zbog toga postoji bijektivno preslikavanje

$$f : A \times \{1\} \dot\cup A \times \{2\} \to A.$$

Ako označimo $f(A \times \{1\}) = A_1$ i $f(A \times \{2\}) = A_2$, tada je očigledno da $A_1, A_2 \subseteq A$ i važi

$$A_1 \dot\cup A_2 = f(A \times \{1\}) \dot\cup f(A \times \{2\}) = f(A \times \{1\} \dot\cup A \times \{2\}) = A.$$

Osim toga, $A_1 \sim A$, $A_2 \sim A$, pa sledi $k(A_1) = k(A_2) = k(A)$.

2) *Neka je A proizvoljan beskonačan skup. Dokazati da za bilo koji fiksirani broj n postoje skupovi $A_1, \ldots, A_n \subseteq A$ takvi da je*

$$A = A_1 \dot\cup \ \ldots \ \dot\cup A_n,$$

i $k(A_1) = \ldots = k(A_n) = k(A)$.

Rešenje: Kako je A beskonačan skup, sledi da je $n \cdot k(A) = k(A)$. Zbog toga postoji bijektivno preslikavanje

$$f : A \times \{1\} \dot\cup \ \ldots \ \dot\cup A \times \{n\} \to A.$$

Ako označimo $f(A \times \{i\}) = A_i$, $i = 1, \ldots, n$, tada su skupovi A_i podskupovi skupa A za $i = 1, \ldots, n$ i važi $A_i \sim A$. Pritom je

$$\dot\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \dot\bigcup_{i=1}^{n} f(A \times \{i\}) = f(\dot\bigcup_{i=1}^{n} A \times \{i\}) = A,$$

pa je ovim dokazano tvrđenje.

3) *Neka je A beskonačan skup. Dokazati da postoje skupovi $A_1, A_2, \ldots \subseteq A$ takvi da važi*

$$A = \dot\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

i $k(A_i) = k(A)$ za $i = 1, 2, \ldots$.

Rešenje: Kao i u prethodnim slučajevima, kako je A beskonačan imamo $\aleph_0 \cdot k(A) = k(A)$, odnosno $k(A \times \mathbb{N}) = k(A)$. Zbog toga postoji bijektivno preslikavanje $f : A \times \mathbb{N} \to A$. Primetimo dalje da je

$$A \times \mathbb{N} = A \times \{1, 2, 3, \ldots\} = \dot\bigcup_{i=1}^{\infty} A \times \{i\},$$

i stavimo

$$A_i = f(A \times \{i\}),\ i = 1, 2, 3, \ldots.$$

Tada je očigledno da su skupovi $A_i \subseteq A,\ i \in \mathbb{N}$, važi $A_i \sim A$ i

$$\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i = \dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} f(A \times \{i\}) = f(\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A \times \{i\}) = f(A \times \mathbb{N}) = A,$$

Dakle, dobili smo $\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i = A$. Pritom je jasno da važi ekvivalencija $A_i \sim A$, za sve $i \in \mathbb{N}$, pa je $k(A_i) = k(A)$.

3 Vektorski prostori

Pre nego što uvedemo definiciju vektorskog prostora, potrebno je definisati pojmove grupe i polja.

Skup G na kome je definisana jedna binarna operacija $*$ i postoji elemenat e, čini grupu u odnosu na tu operaciju ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1. $\forall a, b \in G \;\; a * b \in G$ ($*$ je unutrašnja operacija)
2. $\forall a, b, c \in G \;\; (a * b) * c = a * (b * c)$ (operacija $*$ je asocijativna)
3. $(\forall a \in G) \;\; e * a = a * e = a$ (e je neutralni element)
4. $(\forall a \in G)(\exists a^{-1} \in G) \;\; a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (svaki element ima inverzni).

Ako je ispunjen još i sledeći uslov

$$(\forall a, b \in G) \;\; a * b = b * a \text{ (operacija je komutativna),}$$

onda se grupa naziva komutativna ili Abelova.

Primer 3.1. Skup realnih brojeva je komutativna grupa u odnosu na sabiranje realnih brojeva. Zbir dva realna broja je opet realan broj, sabiranje realnih brojeva je asocijativno, nula je neutralni element, za svaki broj a postoji $-a$ takav da je $a + (-a) = (-a) + a = 0$ i sabiranje realnih brojeva je komutativno. Dakle, grupa $(\mathbb{R}, +)$ je Abelova.

Kada se operacija grupe označava sa $+$ inverzni elemenat se često naziva suprotni, a kada se operacija grupe označava sa $\cdot$ onda se neutralni elemenat naziva jedinični.

Skup P koji sadrži bar dva elementa i na kome su definisane dve binarne operacije, $+$ i $\cdot$, je polje u odnosu na te operacije ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1. Skup P je Abelova grupa u odnosu na operaciju $+$.
2. Skup $P \setminus \{0\}$, gde je sa 0 označen neutralni element operacije $+$, je Abelova grupa u odnosu na operaciju $\cdot$.
3. $(\forall a, b, c \in P) \;\; a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Odnosno, operacija $\cdot$ je distributivna u odnosu na $+$.

Primer 3.2. Skup realnih brojeva u odnosu na sabiranje i množenje realnih brojeva čini polje. Nula je neutralni element, a broj 1 je jedinični element.

3.1 Definicija vektorskog prostora

Definicija 3.3. Skup V je vektorski prostor nad poljem P, ako je na V definisana binarna operacija $+$ tako da je u odnosu na pomenutu operaciju V Abelova grupa, a svakom paru $(\alpha, a), \alpha \in P, a \in V$ pridružen je jedan element iz V $(P \times V \to V)$ tako da važi:

1. $(\forall \alpha \in P)(\forall a, b \in V)\ \ \alpha \cdot (a+b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$
2. $(\forall \alpha, \beta \in P)(\forall a \in V)\ \ (\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$
3. $(\forall \alpha, \beta \in P)(\forall a \in V)\ \ \alpha \cdot (\beta \cdot a) = (\alpha \cdot \beta) \cdot a$
4. $(\forall a \in V)\ \ 1 \cdot a = a$, gde je sa 1 označen jedinični element polja P.

Elemente skupa V nazivamo vektori i označavamo malim latiničnim slovima $(a, b, c, \ldots)$, a elemente polja P nazivamo skalari i označavamo ih malim grčkim slovima $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$. Funkcija koja paru (α, a) vektora i skalara pridružuje vektor αa zove se množenje vektora skalarom.

Neutralni element u grupi $(V, +)$ je nula-vektor.

Vektorski prostor nad poljem realnih brojeva naziva se realni vektorski prostor, a vektorski prostor nad poljem kompleksnih brojeva naziva se kompleksni vektorski prostor.

Skup $\mathbb{R}^n$ uređenih n-torki realnih brojeva nad poljem realnih brojeva je vektorski prostor, ako se operacije sabiranja i množenja vektora definišu na sledeći način:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),$$

$$\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n).$$

Zaista, $\mathbb{R}^n$ u odnosu na sabiranje vektora jeste komutativna grupa, jer je sabiranje unutrašnja operacija, asocijativna i komutativna, neutralni element je n-torka $(0, 0, \ldots, 0)$, a za svaki $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ suprotni element je $(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$. Da važe osobine iz definicije vektorskog prostora jednostavno se vidi na osnovu odgovarajućih osobina realnih brojeva.

3.2 Linearno nezavisni skupovi u vektorskom prostoru

Neka je V proizvoljan vektorski prostor nad poljem P, pri čemu je P polje realnih ili kompleksnih brojeva.

Definicija 3.4. Neka je V vektorski prostor na poljem P. Vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ su linearno zavisni ako i samo ako postoje skalari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in P$ od kojih je bar jedan različit od nule, takvi da je

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0.$$

Vektori koji nisu linearno zavisni nazivaju se linearno nezavisni, odnosno vektori su linearno nezavisni ako i samo ako pomenuta jednakost važi samo kada je $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Neka je $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ konačan skup vekrora iz V. Kažemo da je S linearno nezavisan skup, ako su vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ linearno nezavisni. Ukoliko je skup beskonačan, on je linearno nezavisan ako je svaki njegov konačan podskup linearno nezavisan.

Lema 3.5. *Ako je A proizvoljan linearno nezavisan skup vektora u vektorskom prostoru V, tada je svaki njegov podskup takođe linearno nezavisan.*

Dokaz. Neka je B neprazan podskup skupa A i neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ proizvoljni međusobno različiti vektori skupa B. Kako je $B \subseteq A$ sledi da $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$, a kako je A skup linearno nezavisnih vektora sledi da su i $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takođe linearno nazavisni. Sada je jasno da je i ceo skup B linearno nezavisan skup vektora. $\square$

Za proizvoljan neprazan skup A u vektorskom prostoru V, skup svih mogućih konačnih linearnih kombinacija vektora iz A, odnosno

$$\{x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n | n \in \mathbb{N}; \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in P; x_1, \ldots, x_n \in A\}$$

naziva se lineal skupa A i označava sa $\mathcal{L}(A)$.

Definicija 3.6. Neka je V vektorski prostor. Podskup W vektorskog prostora V je potprostor, ako je W vektorski prostor nad poljem P u odnosu na restrikcije operacija definisanih na V.

Teorema 3.7. *U vektorskom prostoru V, W je potprostor ako i samo ako*

$$\forall \alpha, \beta \in P \;,\; \forall a, b \in W \;\; \textit{važi} \;\; \alpha a + \beta b \in W.$$

Prethodni uslov iz teoreme može se razdvojiti na dva uslova:

1. $\forall a, b \in W \;\; a+b \in W$

2. $\forall a \in W, \forall \alpha \in P \;\; \alpha a \in W$

Lineal $\mathcal{L}(A)$ je uvek potprostor vektorskog prostora V i poklapa se sa presekom svih vektorskih potprostora prostora V koji obuhvataju skup A. Zaista, zbir dve linearne kombinacije je opet linearna kombinacija vektora iz A, a ako se linearna kombinacija pomnoži skalarom dobija se opet linearna kombinacija vektora iz A. Dakle, $\mathcal{L}(A)$ je potprostor.

Lema 3.8. *Neka je A linearno nezavisan skup u vektorskom prostoru V i neka $x \in V \setminus A$. Tada je skup $A \dot{\cup} \{x\}$ linearno nezavisan ako i samo ako $x \notin \mathcal{L}(A)$.*

Dokaz. Dokazaćemo ekvivalentno: *Skup $A \dot{\cup} \{x\}$ je zavisan ako i samo ako $x \in \mathcal{L}(A)$.*

Pretpostavimo prvo da $x \in \mathcal{L}(A)$. Tada postoje vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ i skalari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in P$ takvi da je

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n.$$

Odavde je očigledno da su vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n, x$ linearno zavisni, pa je i skup vektora $A \dot{\cup} \{x\}$ linearno zavisan.

Obratno, pretpostavimo da je skup $A \dot{\cup} \{x\}$ linearno zavisan. Tada je neka linearna kombinacija vektora iz ovog skupa jednaka nuli. Kako je skup A linearno nezavisan, zaključujemo da jedan od vektora iz pomenute linearne kombinacije mora biti vektor x. Dakle, postoje vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ i skalari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in P$ takvi da je

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x = 0.$$

Kako je pritom jasno $\lambda_{n+1} \neq 0$ sledi da je

$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} x_1 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} x_n,$$

pa $x \in \mathcal{L}(A)$. □

Lema 3.9. *Za proizvoljne neprazne skupove A i B, takve da je $A \subseteq B$ važi*

$$\mathcal{L}(A) \subseteq \mathcal{L}(B).$$

Dokaz. Dokaz ove leme je trivijalan. Ako je $A \subseteq B$ tada je očigledno da je skup svih linearnih kombinacija iz A podskup skupa svih linearnih kombinacija iz B. □

Lema 3.10. *Za proizvoljne neprazne skupove* A *i* B *u vektorskom prostoru* V *važi*

$$\mathcal{L}(A \cup B) = \mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B).$$

Dokaz. Kako je $A, B \subseteq A \cup B$, sledi da je $\mathcal{L}(A), \mathcal{L}(B) \subseteq \mathcal{L}(A \cup B)$. Odavde je

$$\mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B) \subseteq \mathcal{L}(A \cup B).$$

Sa druge strane može se pokazati da je

$$\mathcal{L}(A \cup B) \subseteq \mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B).$$

Iz navedenih inkluzija sledi tvrđenje. $\square$

Lema 3.11. *Ako su* A *i* B *disjunktni linearno nezavisni skupovi u vektorskom prostoru* V*, tada je skup* $A \dot\cup B$ *linearno nezavisan ako i samo ako je*

$$\mathcal{L}(A) \cap \mathcal{L}(B) = \{0\}.$$

U tom slučaju važi $\mathcal{L}(A \dot\cup B) = \mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B)$.

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je skup $A \dot\cup B$ linearno nezavisan i neka vektor $x \in \mathcal{L}(A) \cap \mathcal{L}(B)$. Tada postoje vektori $a_1, a_2, \ldots, a_m \in A,\ b_1, b_2, \ldots, b_n \in B$ i skalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m,\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in P$ takvi da je

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_m a_m = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_n b_n.$$

Onda je

$$0 = x - x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_m a_m - \beta_1 b_1 - \beta_2 b_2 - \ldots - \beta_n b_n,$$

odakle zbog linearne nezavisnosti sledi $\alpha_i = 0$ i $-\beta_i = 0$, odnosno $x = 0$. Zbog toga je $\mathcal{L}(A) \cap \mathcal{L}(B) = \{0\}$, pa je

$$\mathcal{L}(A \dot\cup B) = \mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B).$$

Obratno, pretpostavimo da je $\mathcal{L}(A) \cap \mathcal{L}(B) = \{0\}$ i dokažimo da je skup $A \dot\cup B$ linearno nezavisan. Poznato nam je da su vektori $a_1, a_2, \ldots, a_m \in A$, kao i $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B$ linearno nezavisni. Pretpostavimo da za neke skalare

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m,\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in P$$

važi

$$(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_m a_m) + (\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_n b_n) = 0.$$

Tada je očigledno vektor

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_m a_m = -\beta_1 b_1 - \beta_2 b_2 + \ldots - \beta_n b_n \in \mathcal{L}(A) \cap \mathcal{L}(B),$$

odakle sledi da je $x = 0$. Zbog toga je $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = \beta_1 = \ldots = \beta_n = 0$, pa je skup $A \dot\cup B$ linearno nezavisan. $\square$

3.3 Primeri

U vezi sa linearnom nezavisnosti vektora navešćemo samo jedan primer koji će nam biti potreban u kasnijem izlaganju.

1) *Dokazati da je kolekcija svih nizova oblika*

$$x_\alpha = (\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots) \ \ (0 < \alpha < 1),$$

jedan linearno nezavisan skup u svakom od prostora $[l^p]$ $(p \geq 1)$.
Napomenimo, prostor $[l^p]$ *je prostor nizova koji u p-normi konvergiraju.*

Rešenje: Kako je za svako $\alpha \in (0,1)$ ispunjeno

$$\|x_\alpha\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha|^{np} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha|^p)^n \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

jer je $q = |\alpha|^p < 1$, sledi da svi nizovi x_α $(0 < \alpha < 1)$ pripadaju prostorima $[l^p]$ $(p \geq 1)$.

Uočimo sada bilo kojih n nizova $x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}$ ovog tipa $(0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n < 1)$ i pretpostavimo da za izvesne skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in P$ važi

$$\lambda_1 x_{\alpha_1} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n} = 0.$$

Tada dobijamo sistem:

$$\lambda_1 \alpha_1 + \ldots + \lambda_n \alpha_n = 0$$

$$\lambda_1 {\alpha_1}^2 + \ldots + \lambda_n {\alpha_n}^2 = 0$$

$$\ldots$$

$$\lambda_1 {\alpha_1}^n + \ldots + \lambda_n {\alpha_n}^n = 0.$$

Prethodni sistem može se shvatiti kao sistem linearnih jednačina po nepoznatim $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in P$. Determinanta ovog sistema je:

$$D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \prod_{i>j} (\alpha_i - \alpha_j),$$

i predstavlja Vandermondovu determinantu [6]. Kako je $0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n < 1$, sledi

$$D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0.$$

Sada gornji sistem ima samo trivijalno rešenje $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Odavde sledi da je familija nizova $\{x_\alpha | 0 < \alpha < 1\}$ linearno nezavisna u svakom od prostora $[l^p]$ $(p \geq 1)$.

3.4 Dimenzija vektorskog prostora

Pretpostavimo da je V proizvoljan vektorski prostor nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva P.

Definicija 3.12. Linearno nezavisan skup vektora A naziva se Hamelovim bazisom prostora V ako se lineal $\mathcal{L}(A)$ skupa A poklapa sa celim prostorom V, odnosno svaki vektor $x \in V$ može se prikazati kao linearna kombinacija vektora skupa A.

Hamelov bazis, gore definisan, naziva se jednostavnije baza vektorskog prostora V. To je uređen linearno nezavisan skup vektora iz V koji generiše V. Kako su pojmovi ekvivalentni jednako ćemo ih koristiti u daljem tekstu.

Teorema 3.13. *Ako je $a_1, a_2, \dots, a_n$ baza vektorskog prostora V onda se svaki vektor $x \in V$ na jedinstven način može prikazati kao linearna kombinacija vektora baze,*

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n.$$

Dokaz. Kako baza generiše vektorski prostor, sledi da se svaki vektor iz V može prikazati bar na jedan način kao linearna kombinacija vektora baze.

Hoćemo da pokažemo jedinstvenost prikazivanja. Pretpostavimo suprotno, tj. da se $x \in V$ može prikazati na dva načina pomoću vektora baze:

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n,$$

$$x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \ldots + \beta_n a_n.$$

Oduzimajući gornje jednakosti dobijamo:

$$0 = (\alpha_1 - \beta_1)a_1 + (\alpha_2 - \beta_2)a_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)a_n.$$

Pošto vektori $a_1, a_2, \dots, a_n$ čine bazu, oni su linearno nezavisni, pa mora biti $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$. Ovo znači da se vektor x prikazuje pomoću $a_1, a_2, \dots, a_n$ na jedinstven način. □

Tvrđenje 3.14. *Ako vektorski prostor V nad poljem P poseduje bar jedan Hamelov bazis sa n elemenata ($n \in \mathbb{N}$), tada i svaki drugi Hamelov bazis tog prostora poseduje takođe n elemenata.*

Dokaz. Dokaz ovog tvrđenja izostavljamo. Zainteresovani čitaoci mogu ga naći u [5] iz literature. □

Definicija 3.15. Broj vektora bilo koje baze konačno dimenzionalnog vektorskog prostora V naziva se dimenzija tog vektorskog prostora i označava se sa $dim(V)$.

Vektorski prostor koji ima konačnu bazu naziva se konačno dimenzionalni. Ako je $dim(V) = n$ prostor se naziva n-dimenzionalni. Dimenzija vektorskog prostora koji se sastoji samo od nula-vektora je 0.

Korišćenjem Hauzdorfovog principa maksimalnosti, dokazaćemo tvrđenje o egzistenciji bar jednog Hamelovog bazisa.

Tvrđenje 3.16. *Svaki vektorski prostor $V \neq \{0\}$ nad poljem P poseduje bar jedan Hamelov bazis.*

Dokaz. Označimo sa e bilo koji vektor prostora V, različit od nula-vektora. Sa $\mathcal{M}$ označimo skup svih linearno nezavisnih skupova $A \subseteq V$ takvih da $e \in A$. Odavde se vidi da je $\mathcal{M}$ neprazan, jer $\{e\} \in \mathcal{M}$.

Skup $\mathcal{M}$ je parcijalno uređen u odnosu na inkluziju skupova. Zbog toga na osnovu Hauzdorfovog principa maksimalnosti postoji bar jedan maksimalni lanac $\mathcal{C}$ u skupu $\mathcal{M}$. Neka je

$$S = \bigcup_{P \in \mathcal{C}} P.$$

Očigledno je da $e \in S$, jer za svako $P \in \mathcal{C}$ važi $e \in P$.

Dokažimo sada da je skup S linearno nezavisan. Uočimo proizvoljne međusobno različite vektore $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$. Pretpostavimo da vektor $x_i \in P_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, pri čemu skupovi $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathcal{C}$ i ne moraju biti međusobno različiti. Kako je skup $\mathcal{C}$ lanac, među skupovima $P_1, \ldots, P_n$ postoji bar jedan koji sadrži sve ostale P_i kao svoje podskupove, neka je to P_n. Odnosno važi

$$P_1, \ldots, P_n \subseteq P_n.$$

Tada svi vektori $x_1, \ldots, x_n \in P_n$. Kako je P_n linearno nezavisan, sledi da su i vektori $x_1, \ldots, x_n$ linearno nezavisni, pa je ceo skup S linearno nezavisan. Odavde sledi da $S \in \mathcal{M}$.

Pokažimo sada da je $\mathcal{L}(S) = V$. Pretpostavimo suprotno, da postoji bar jedan vektor $x \in X$ koji nije linearna kombinacija vektora iz skupa S. Tada je skup $S \dot\cup \{x\} \in \mathcal{M}$ i

$$S_x = S \dot\cup \{x\} \supset P,$$

za svaki skup $P \in \mathcal{C}$. Zbog toga je skup

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{C} \dot\cup \{S_x\}$$

novi lanac u skupu $\mathcal{M}$ koji obuhvata lanac $\mathcal{C}$ i strogo je veći od njega. Ovo je kontradikcija sa pretpostavkom da je skup $\mathcal{C}$ maksimalni lanac.

Na ovaj način smo pokazali da je $\mathcal{L}(S) = V$, pa je skup S jedan Hamelov bazis prostora V. $\square$

Tvrđenje 3.17. *Za proizvoljna dva Hamelova bazisa, $A = \{x_i : i \in I\}$, $B = \{y_j : j \in J\}$, važi da imaju isti kardinalni broj. Odnosno:*

$$k(I) = k(J).$$

Dokaz. Ako je baza vektorskog prostora konačna i ima n elemenata, tada je i svaka druga baza tog prostora konačna i ima isti broj elemenata. Zato pretpostavimo da su oba bazisa pomenuta u tvrđenju beskonačna, to znači da su i indeksni skupovi I i J beskonačni.

Sada primetimo da se svaki vektor $y_j \in B$ može prikazati u sledećem obliku

$$y_j = \lambda_1 x_{i_1} + \ldots + \lambda_n x_{i_n},$$

pri čemu su svi skalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \neq 0$. Primetimo da zbog linearne nezavisnosti vektora iz skupa $B = \{y_j : j \in J\}$, pri fiksiranom izboru $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$, gornja jednakost može da važi najviše za n vektora $y_j \in B$. Odavde sledi da kardinalnost indeksnog skupa J, $k(J)$, ne može biti veća od kardinalnosti skupa svih konačnih podskupova skupa I. Kako je skup I beskonačan, kardinalnost skupa svih njegovih konačnih podskupova jednaka je kardinalnom broju $k(I)$. Tako dobijamo nejednakost

$$k(J) \leq k(I).$$

Na potpuno isti način pokazuje se i obratna nejednakost

$$k(I) \leq k(J).$$

Sada, na osnovu Kantor-Bernštajnove teoreme dobijamo da je $k(I) = k(J)$. □

Kardinalni broj proizvoljnog Hamelovog bazisa (baze) $\{x_i : i \in I\}$ prostora $V \neq \{0\}$ naziva se dimenzijom prostora X i označava se sa $dim(V)$. Dakle,

$$dim(V) = k(I).$$

Kao, što smo već pomenuli, ako je $V = \{0\}$ tada je $dim(V) = 0$. Ovim je dimenzija vektorskog prostora definisana za proizvoljan vektorski prostor V nad poljem P.

Definicija 3.18. Neka su X i Y vektorski prostori nad istim poljem P. Preslikavanje $f : X \to Y$ je linearno ako za sve $\alpha, \beta \in P$ i sve $x, y \in X$ važi

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Definicija 3.19. Neka su X i Y vektorski prostori nad istim poljem P. Preslikavanje $f : X \to Y$ je izomorfizam vektorskih prostora X i Y ako je linearno i bijektivno.
Kažemo da su prostori izomorfni ako postoji bar jedan izomorfizam $f : X \to Y$ i koristimo oznaku $X \cong Y$.

Tvrđenje 3.20. *Neka su X i Y vektorski prostori nad istim poljem P. Oni su izomorfni ako i samo ako imaju jednake dimenzije, odnosno $dim(X) = dim(Y)$.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da važi $dim(X) = dim(Y)$. Tada za indeksni skup I, postoji Hamelov bazis $\{x_i : i \in I\}$ prostora X i $\{y_i : i \in I\}$ prostora Y.

Definišimo preslikavanje $V : X \to Y$ na sledeći način:

- ako je $x = \lambda_1 x_{i_1} + \ldots + \lambda_n x_{i_n}$, tada je $V(x) = \lambda_1 y_{i_1} + \ldots + \lambda_n y_{i_n}$.

Ovako definisano preslikavanje je linearno i bijektivno, pa predstavlja izomorfizam vektorskih prostora X i Y.

Obratno, pretpostavimo da su pomenuti vektorski prostori izomorfni i neka je preslikavanje $V : X \to Y$ odgovarajući izomorfizam. Osim toga, neka je $\{x_i : i \in I\}$ proizvoljni fiksirani Hamelov bazis prostora X. Tada je skup $\{V(x_i) : i \in I\}$ jedan Hamelov bazis prostora Y. On je linearno nezavisan jer iz

$$\lambda_1 V(x_{i_1}) + \ldots + \lambda_n V(x_{i_n}) = 0,$$

sledi

$$V(\lambda_1 x_{i_1} + \ldots + \lambda_n x_{i_n}) = 0.$$

Odavde zbog izomorfizma preslikavanja V sledi

$$\lambda_1 x_{i_1} + \ldots + \lambda_n x_{i_n} = 0.$$

Dalje, zbog linearne nezavisnosti vektora $\{x_i : i \in I\}$ očigledno važi

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Ako je sada y bilo koji vektor prostora Y, tada je $y = V(x)$ za neki vektor $x \in X$. Kako je $x = \lambda_1 x_{i_1} + \ldots + \lambda_n x_{i_n}$ za skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in P$, dobijamo

$$y = V(\lambda_1 x_{i_1} + \ldots + \lambda_n x_{i_n}) = \lambda_1 V(x_{i_1}) + \ldots + \lambda_n V(x_{i_n}).$$

Odavde sledi da je skup $\{V(x_i) : i \in I\}$ jedan Hamelov bazis prostora Y. Dakle, to znači da je

$$dim(Y) = k(I) = dim(X),$$

pa dobijamo traženu jednakost $dim(X) = dim(Y)$. $\square$

Tvrđenje 3.21. *Za bilo koja dva vektorska prostora X i Y nad istim poljem P važi*

$$dim(X) \leq dim(Y) \ \text{ ili } \ dim(X) \geq dim(Y).$$

Dokaz. Neka je $\{x_i : i \in I\}$ proizvoljan Hamelov bazis prostora X i $\{y_j : j \in J\}$ Hamelov bazis prostora Y. Kako je

$$dim(X) = k(I) \ , \ dim(Y) = k(J)$$

i za skupove I i J važi $k(I) \leq k(J)$ ili $k(I) \geq k(J)$, dobijamo tvrđenje. □

3.5 Dimenzija potprostora vektorskog prostora

Lema 3.22. *Svaki skup A linearno nezavisnih vektora vektorskog prostora V, može se dopuniti do nekog Hamelovog bazisa prostora V.*

Dokaz. Neka je $A = \{x_i : i \in I\}$. Ako je skup A Hamelov bazis prostora V, tvrđenje je dokazano.

Pretpostavimo da A nije Hamelov bazis, odnosno da je $\mathcal{L}(A) \neq V$.

Uočimo familiju svih linearno nezavisnih skupova $M \subseteq V$, koji kao svoj podskup obuhvataju skup A i označimo je sa $\mathcal{M}$. Familija je parcijalno uređena relacijom poretka $\subseteq$. Pritom je neprazna, jer je $A \in \mathcal{M}$.

Na osnovu Hauzdorfovog principa maksimalnosti, u $\mathcal{M}$ postoji bar jedan maksimalni lanac $\mathcal{C}$. Neka je

$$S = \bigcup_{P \in \mathcal{C}} P.$$

Ovako definisan skup S je linearno nezavisan i $S \in \mathcal{M}$. Za proizvoljan skup $P \in \mathcal{C}$ važi $S \supseteq P \supseteq A$.

Osim toga skup S je jedan Hamelov bazis prostora V, odnosno $\mathcal{L}(S) = V$. Zaista, ako S nije Hamelov bazis, tada postoji bar jedan vektor $x \in V$ koji ne pripada linealu $\mathcal{L}(S)$. Pa je na osnovu leme 3.8 skup

$$S_x = S \,\dot\cup\, \{x\}$$

linearno nezavisan, zatim očigledno $S_x \in \mathcal{M}$ i važi $S_x \supset P$ za bilo koji $P \in \mathcal{C}$. Zbog toga bi skup

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{C} \,\dot\cup\, \{S_x\}$$

bio novi lanac skupa $\mathcal{M}$, koji obuhvata $\mathcal{C}$ i veći je od njega. Ovo je kontradikcija sa pretpostavkom o maksimalnosti lanca $\mathcal{C}$.

Zbog toga je $\mathcal{L}(S) = V$, odnosno S je Hamelov bazis prostora V. Sada je

$$S = A \,\dot\cup\, (S \setminus A) = A \,\dot\cup\, B$$

pri čemu je $B = S \setminus A$. □

Tvrđenje 3.23. *Ako je E proizvoljan potprostor vektorskog prostora V, tada postoji bar jedan potprostor F prostora V takav da je*

$$E + F = V.$$

Dokaz. Trivijalno, ako je $E = \{0\}$, tada je $F = V$ i ako je $E = V$, onda $F = \{0\}$.

Sada pretpostavimo da je potprostor $E \neq \{0\}$. Tada je $dim(E) \geq 1$ pa postoji bar jedan Hamelov bazis A potprostora E. Kako je $E \neq V$ skup vektora A nije Hamelov bazis prostora V, pa na osnovu prethodne leme postoji neprazan linearno nezavisan skup vektora B prostora V takav da je skup $A \dot{\cup} B$ Hamelov bazis prostora V. Kako je $\mathcal{L}(A) \cap \mathcal{L}(B) = \{0\}$, važi

$$\mathcal{L}(A \dot{\cup} B) = \mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B) = V.$$

Stavimo sada $\mathcal{L}(B) = F$ i primetimo da je $\mathcal{L}(A) = E$, dobijamo da je $E \cap F = \{0\}$ i $E + F = V$. Dakle, dobili smo traženo, $V = E + F$. □

Primetimo da potprostor F, pomenut u prethodnom tvrđenju, u slučaju kada je $E \neq V, \{0\}$ nije jednoznačno određen i može se izabrati na mnogo načina.

Tvrđenje 3.24. *Ako je E proizvoljan potprostor vektorskog prostora V, tada važi*

$$dim(E) \leq dim(V).$$

Dokaz. Ako je $E = \{0\}$, tada je $dim(E) = 0 \leq dim(V)$. Tvrđenje je očigledno i u slučaju da je $E = V$.

Pretpostavimo da je potprostor $E \neq \{0\}, V$ i uočimo proizvoljan bazis potprostora E, $A = \{e_i : i \in I\}$. Kako je A linearno nezavisan skup vektora, može se dopuniti da Hamelovog bazisa prostora V. Dakle postoji indeksni skup $I' \neq \emptyset$ takav da je $\{e_i : i \in I \dot{\cup} I'\}$ jedan Hamelov bazis prostora V. Odavde sledi

$$dim(E) = k(I) \leq k(I) + k(I') = k(I \dot{\cup} I') = dim(V).$$

□

Napomenimo da, za razliku od konačno dimenzionalnog prostora V, kod beskonačno dimenzionalnog prostora V nije uvek ispunjeno

$$dim(E) < dim(V),$$

za proizvoljan potprostor E. Odnosno, može postojati i pravi potprostor E takav da je

$$dim(E) = dim(V).$$

Razlog tome je što je kardinalnost beskonačnog skupa slabo osetljiva na udaljavanje iz tog skupa nekog jednočlanog ili n-točlanog skupa, odnosno proizvoljnog podskupa strogo manje kardinalnosti.

Tvrđenje 3.25. *Ako su E i F potprostori vektorskog prostora V, takvi da je $V = E + F$ i $E \cap F = \{0\}$ tada važi*

$$dim(V) = dim(E) + dim(F).$$

Dokaz. Tvrđenje je tačno ako je neki od potprostora jednak $\{0\}$.

Pretpostavimo da je $E \neq \{0\}$ i $F \neq \{0\}$. Neka je $\{e_i : i \in I\}$ proizvoljan Hamelov bazis potprostora E i neka je $\{e_i : i \in J\}$ bazis potprostora F. Kako je $E + F = V$, tada su indeksni skupovi I i J disjunktni i $\{e_i : i \in I \dot{\cup} J\}$ Hamelov bazis prostora V. Odavde sledi

$$dim(V) = k(I \dot{\cup} J) = k(I) + k(J) = dim(E) + dim(F).$$

□

Na osnovu prethodnog tvrđenja i koristeći rezultate iz poglavlja o kardinalnim brojevima, dobijamo sledeće tvrđenje.

Posledica 3.26. *Neka su E i F potprostori beskonačno dimenzionalnog prostora V, takvi da je $V = E + F$. Tada je*

$$dim(V) = max\{dim(E), dim(F)\}.$$

Neka su X i Y proizvoljni vektorski prostori nad istim poljem P. Kažemo da se prostor X može "utopiti" u Y ako je X linearno izomorfan sa nekim potprostorom prostora Y.

Tvrđenje 3.27. *Ako su X i Y proizvoljni vektorski prostori nad poljem P, tada se prostor X može utopiti u Y ili se Y može utopiti u X.*

Dokaz. Ako je neki od prostora X ili Y dimenzije nula, tvrđenje je očigledno.

Sada, pretpostavimo da je dimenzija oba prostora $dim(X), dim(Y) \geq 1$. Neka je $\{x_i : i \in I\}$ Hamelov bazis prostora X i neka je $\{y_i : i \in J\}$ bazis prostora Y. Tada važi: $k(I) \leq k(J)$ ili $k(I) \geq k(J)$.

Pretpostavimo da je $k(I) \leq k(J)$. Tada se skup I bijektivno može preslikati na neki podskup skupa J, pa možemo pretpostaviti $I \subseteq J$. Zato se skup J može predstaviti na sledeći način

$$J = I \dot{\cup} \Omega,$$

pri čemu Ω može biti i prazan skup, tada $k(I) = k(J)$.

Sada, definišimo preslikavanje

$$\varphi(x_i) = y_i \ \ (i \in I).$$

Odnosno, ako je $x \in X$ i

$$x = \lambda_1 x_{i_1} + \ldots + \lambda_n x_{i_n},$$

tada je

$$\varphi(x) = \lambda_1 y_{i_1} + \ldots + \lambda_n y_{i_n}.$$

Pomenuto preslikavanje je linearno i injektivno, pa je skup $\varphi(X)$ potprostor prostora Y koji je izomorfan sa X. Eventualno, on može i da se poklopi sa prostorom Y. Dakle, pokazali smo da se X može "utopiti" u Y.

Dokaz se izvodi analogno i u slučaju kada je $k(I) \geq k(J)$. $\square$

3.6 Primeri

1) *Dokazati da su vektorski prostori* $C([0,1])$ *i* $C([a,b])$ *izomorfni za proizvoljne parametre* a *i* b $(-\infty < a < b < \infty)$.

Rešenje: Prostor $C([a,b])$ je prostor svih neprekidnih funkcija $f : [a,b] \to P$. To je vektorski prostor nad poljem P, ako uvedemo sledeće operacije:

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t),$$

$$(\alpha f)(t) = \alpha f(t), \quad (a \leq t \leq b)$$

za proizvoljne funkcije $f, g \in C([a,b])$ i skalare $\alpha \in P$.

Sada uočimo proizvoljnu funkciju $f \in C([a,b])$. Tada je funkcija $g : [0,1] \to P$ definisana sa

$$g(t) = f(a + (b-a)t), \quad (0 \leq t \leq 1)$$

neprekidna na intervalu $[a,b]$, pa $g \in C([a,b])$. Pored ovoga, preslikavanje $F : C([a,b]) \to C([0,1])$ definisano sa $F(f) = g$ je bijektivno. Zbog toga su prostori $C([a,b])$ i $C([0,1])$ izomorfni.

2) *Neka su* X *i* Y *vektorski prostori nad istim poljem* P *i neka je* $X \times Y$ *Dekartov proizvod ovih prostora, dokazati da važi*

$$dim(X \times Y) = dim(X) + dim(Y).$$

Rešenje: U vektorskom prostoru $X \times Y$ operacije su uvedene na sledeći način:

$$(x,y) + (x_1,y_1) = (x + x_1, y + y_1),$$

$$\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y).$$

Uočimo dalje u prostoru $X \times Y$ sledeće skupove:

$$X_0 = \{(x,0) : x \in X\} \quad , \quad Y_0 = \{(0,y) : y \in Y\}.$$

Tada su X_0 i Y_0 potprostori prostora $X \times Y$, pritom je $X_0 \cong X$, $Y_0 \cong Y$ i

$$X \times Y = X_0 + Y_0.$$

Odavde je $dim(X) = dim(X_0)$, $dim(Y) = dim(Y_0)$,

$$dim(X \times Y) = dim(X_0) + dim(Y_0) = dim(X) + dim(Y).$$

3) *Neka je* V *proizvoljan beskonačno dimenzionalan vektorski prostor nad poljem* P. *Dokazati da postoje potprostori* E *i* F *prostora* V *takvi da je* $V = E + F$ *i*

$$dim(E) = dim(F) = dim(V).$$

Rešenje: Uočimo proizvoljan Hamelov bazis $\{e_i : i \in I\}$ prostora V. Tada je

$$dim(V) = k(I) = k$$

beskonačan kardinalni broj. Kako na osnovu tvrđenja iz dela teksta o kardinalnim brojevima (posledica 2.28) znamo da je $2k = k$ imamo

$$I \sim I \times \{1\} \,\dot\cup\, I \times \{2\}.$$

Dakle, postoje podskupovi $I_1, I_2 \subseteq I$ takvi da je

$$I = I_1 \,\dot\cup\, I_2 \ \text{ i } \ k(I_1) = k(I_2) = k(I).$$

Označimo sada,

$$E = \mathcal{L}(e_i : i \in I_1) \ \text{ i } \ F = \mathcal{L}(e_i : i \in I_2),$$

pa neposredno dobijamo da je $V = E + F$ i

$$dim(E) = dim(F) = k(I) = dim(V).$$

4) *Dokazati da svi vektorski prostori* $[l^p]$ $(p \geq 1)$, $[c_0]$, $[c]$, $[m]$ *i* $[s]$ *imaju dimenziju* $\mathfrak{c}$.

Rešenje: Podsetimo se,
- $[l^p]$ je prostor nizova kod kojih p-norma konvergira
- $[c_0]$ je prostor nula nizova
- $[c]$ je prostor konvergentnih nizova
- $[m]$ je prostor ograničenih nizova
- $[s]$ je prostor svih mogućih nizova koji pripadaju polju P

U skupovnom smislu imamo sledeći odnos pomenutih prostora:

$$[l^p] \subseteq [c_0] \subseteq [c] \subseteq [m] \subseteq [s], \quad (p \geq 1).$$

Kako je $[s] = P^{\mathbb{N}}$, sledi da je

$$k[s] = k(P^{\mathbb{N}}) = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Pošto dimenzija vektorskog prostora ne može biti veća od kardinalnosti celog prostora, iz nevedenog je očigledno da važi

$$dim([s]) \leq \mathfrak{c}.$$

Dalje, uočimo prostor $[l^p]$ za proizvoljnu vrednost parametra p, $(p \geq 1)$ i kolekciju A nizova oblika $x_\alpha = (\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots)$ za $0 < \alpha < 1$. Kako je skup A linearno nezavisan skup vektora u prostoru $[l^p]$, dobijamo da je

$$dim([l^p]) \geq \mathfrak{c}.$$

Sada iz dobijenih nejednakosti neposredno sledi da svi posmatrani prostori imaju istu dimenciju $\mathfrak{c}$.

3.7 Kardinalnost vektorskog prostora

U ovom delu bavićemo se vezom između dimenzije vektorskog prostora V nad poljem P i kardinalnosti $k(V)$ celog prostora V. Kako je proizvoljan Hamelov bazis A prostora V podskup vektora prostora V, zaključujemo da $dim(V) = k(A) \leq k(V)$. U nastavku ćemo navesti tvrđenja koja se bave problematikom pomenutog odnosa kardinalnosti i dimenzije posmatranog prostora V.

Tvrđenje 3.28. *Za proizvoljan vektorski prostor V ($V \neq \{0\}$) nad poljem P važi*

$$k(V) = \mathfrak{c} \cdot dim(V).$$

Dokaz. Neka je A bilo koji Hamelov bazis prostora V, to znači da je $dim(V) = k(A)$.

Pretpostavimo prvo da je prostor V n-dimenzionalan i $A = \{e_1, \dots, e_n\}$. Kako je tada prostor V izomorfan sa P^n i $k(P^n) = \mathfrak{c}$ dobijamo da je

$$k(V) = \mathfrak{c}.$$

Sa druge strane imamo

$$\mathfrak{c} \cdot dim(V) = \mathfrak{c} \cdot n = \mathfrak{c}.$$

Pa je jednakost iz tvrđenja u ovom slučaju tačna.

Neka je sada prostor V beskonačno dimenzionalan, odnosno bazis je beskonačan skup. Proizvoljan vektor $x \in V \setminus \{0\}$ može se zapisati u obliku

$$x = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n,$$

pri čemu su koeficijenti $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in P$ različiti od nule, $n \in \mathbb{N}$ i vektori $a_1, \dots, a_n$ su međusobno različiti vektori skupa A. Sada ćemo za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ i proizvoljan izbor $a_1, \dots, a_n$ označiti:

$$E(a_1, \dots, a_n) = \{x = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in P \setminus \{0\}\}.$$

Očigledno je da važi

$$k(E(a_1, \dots, a_n)) = \mathfrak{c}^n = \mathfrak{c},$$

$$E(a_1, \dots, a_n) \cap E(b_1, \dots, b_n) = \emptyset,$$

ako je $\{a_1, \dots, a_n\} \neq \{b_1, \dots, b_n\}$. Osim toga,

$$V \setminus \{0\} = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}, \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A} E(a_1, \dots, a_n).$$

Kako svih konačnih podskupova $\{a_1, \ldots, a_n\}$ skupa A ima tačno $k(A)$, jer je $k(A)$ beskonačan kardinal, iz gornjih jednakosti dobijamo

$$k(V) = 1 + \mathfrak{c} \cdot k(A) = 1 + \mathfrak{c} \cdot dim(V).$$

Pošto je $dim(V)$ beskonačan kardinal, sledi da je

$$k(V) = \mathfrak{c} \cdot dim(V).$$

$\square$

Tvrđenje 3.29. *Za proizvoljan vektorski prostor V nad poljem P, važi sledeće:*

1. *Ako je $0 < dim(V) < \mathfrak{c}$, onda je $k(V) = \mathfrak{c} > dim(V)$;*
2. *Ako je $dim(V) \geq \mathfrak{c}$, onda je $k(V) = dim(V)$.*

Primer 3.30. *Neka je T proizvoljan neprazan skup. Odrediti dimenziju vektorskog prostora $V = P^T$.*

Rešenje: Pretpostavimo prvo da je skup T konačan, sa n elemenata $T = \{1, \ldots, n\}$. Tada je $P^T = P^n$ pa je

$$dim(P^T) = n.$$

Sada, pretpostavimo da je T prebrojiv skup, neka je npr. $T = \mathbb{N}$. Tada je, na osnovu zadatka 4) iz odeljka 3.6,

$$dim(P^{\mathbb{N}}) = \mathfrak{c}.$$

Neka je sada skup T beskonačan. Tada je $P^T \supseteq P^{\mathbb{N}}$, pa je

$$dim(P^T) \geq dim(P^{\mathbb{N}}) = \mathfrak{c}.$$

Na osnovu prethodnog tvrđenja sledi

$$dim(P^T) = k(P^T) = k(P)^{k(T)} = \mathfrak{c}^{k(T)}.$$

Kako je $\mathfrak{c}^{k(T)} = 2^{k(T)}$ (zbog 2.28 (b)), jer je kardinal $k(T)$ beskonačan, dobijamo

$$dim(P^T) = 2^{k(T)}.$$

3.8 Dimenzija dualnog prostora

3.8.1 Dualni prostor vektorskog prostora

Neka je V proizvoljan vektorski prostor nad realnim ili kompleksnim poljem skalara P.

Definicija 3.31. Neka je V proizvoljan vektorski prostor nad poljem P. Linearno preslikavanje $f : V \to P$ naziva se linearna funkcionela nad V.

Funkcionela $f(0) = f(0 \cdot x) = 0 \cdot f(x) = 0$ je očigledno linearna, ona se naziva trivijalnom linearnom funkcionelom.

Označićemo sa V^* skup svih linearnih funkcionela $f : V \to P$. Ovaj skup je neprazan, jer funkcionela $f = 0 \in V^*$. Skup V^* naziva se dualnim prostorom prostora V.

U pomenuti skup, V^*, uvešćemo vektorske operacije na sledeći način. Za proizvoljne funkcionele $f, g \in V^*$ i skalar $\alpha \in P$ definišemo:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$

za proizvoljan vektor $x \in V$.

Tvrđenje 3.32. *Neka su $f, g \in V^*$ proizvoljne funkcionele i $\lambda \in P$ skalar polja P. Tada funkcionele $f + g$ i λf pripadaju prostoru V^*.*

Dokaz. Za proizvoljan izbor vektora $x, y \in V$ i skalara $\alpha, \beta \in P$ važi:

$$\begin{aligned}
(f + g)(\alpha x + \beta y) &= f(\alpha x + \beta y) + g(\alpha x + \beta y) \\
&= [\alpha f(x) + \beta f(y)] + [\alpha g(x) + \beta g(y)] \\
&= \alpha[f(x) + g(x)] + \beta[f(y) + g(y)] \\
&= \alpha[(f + g)(x)] + \beta[(f + g)(y)],
\end{aligned}$$

pa je $f + g$ linearna funkcionela, odnosno $f + g \in V^*$.
Dalje,

$$\begin{aligned}
(\lambda f)(\alpha x + \beta y) &= \lambda f(\alpha x + \beta y) \\
&= \lambda[\alpha f(x) + \beta f(y)] \\
&= (\lambda \cdot \alpha) f(x) + (\lambda \cdot \beta) f(y) \\
&= \alpha[(\lambda f)(x)] + \beta[(\lambda f)(y)],
\end{aligned}$$

pa je λf linearna funkcionela, odnosno $\lambda f \in V^*$ za proizvoljnu funkcionelu $f \in V^*$ i skalar $\lambda \in P$. $\square$

Tvrđenje 3.33. *Skup V^* sa operacijama sabiranja i množenja skalarima, uvedenih u prethodnom tekstu, predstavlja vektorski prostor nad poljem P.*

Dokaz. Lako se proverava da su u V^* zadovoljene sve osobine vektorskih prostora. Specijalno, neutralni element prostora V^* je trivijalna funkcionela, a suprotan vektor funkcionele $f \in V^*$ je funkcionela $-f$ definisana sa

$$(-f)(x) = -f(x) \;\; (x \in X).$$

□

Tvrđenje 3.34. *Ako je vektorski prostor V konačno dimenzionalan, tada je i prostor V^* konačno dimenzionalan i važi jednakost*

$$dim(V^*) = dim(V).$$

Dokaz. Kako je V konačno dimenzionalan, pretpostavimo da je njegova dimenzija jednaka n i neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ proizvoljan fiksiran bazis prostora V. Neka je $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ proizvoljan vektor prostora V. Definišimo funkcionelu f_p, $(p = 1, \ldots, n)$ na sledeći način:

$$f_p(x) = f_p(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n) = \alpha_p.$$

Ovako definisane funkcionele f_p, $(p = 1, \ldots, n)$ su linearne, što znači da sve pripadaju prostoru V^*. Specijalno, za sve $p, q = 1, \ldots, n$ ispunjeno je

$$f_p(e_q) = \delta_{pq} = \begin{cases} 1, & p = q \\ 0, & p \neq q \end{cases}$$

Pokazaćemo sada da funkcionele $f_1, \ldots, f_n$ obrazuju bazu prostora V^*. Prvo, pretpostavimo da za skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in P$ važi

$$\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n = 0.$$

Tada za svako $p = 1, \ldots, n$ važi

$$(\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n)(e_p) = 0,$$

$$\lambda_1 f_1(e_p) + \ldots + \lambda_n f_n(e_p) = 0,$$

pa je zbog $f_m(e_p) = 0$ za $m \neq p$ i $f_p(e_p) = 1$ neposredno

$$\lambda_p = 0, \;\; p = 1, \ldots, n.$$

Sledi da su posmatrane funkcionele $f_1, \ldots, f_n$ linearno nezavisne u prostoru V^*.

Uočimo dalje proizvoljnu funkcionelu $f \in V^*$ i vektor $x \in V$. Tada je $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ za skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in P$, pa je

$$f(x) = f(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 f(e_1) + \ldots + \alpha_n f(e_n).$$

Ako stavimo da je $f(e_1) = \beta_1, \ldots, f(e_n) = \beta_n$ i primetimo da je prema gornjoj konstrukciji $\alpha_1 = f_1(x), \ldots, \alpha_n = f_n(x)$ tada je

$$f(x) = \beta_1 f_1(x) + \ldots + \beta_n f_n(x).$$

Odnosno, ispunjeno je

$$f(x) = (\beta_1 f_1 + \ldots + \beta_n f_n)(x), \quad x \in V,$$

pa je

$$f = \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_n f_n.$$

Ovim je pokazano da je skup funkcionela $\{f_1, \ldots, f_n\}$ jedna baza prostora V^*, odakle sledi

$$dim(V^*) = dim(V).$$

□

Tvrđenje 3.35. *Neka je vektorski prostor $V \neq \{0\}$. Tada za proizvoljan vektor $x_0 \in V \setminus \{0\}$ postoji funkcionela $f \in V^*$ takva da je $f(x_0) \neq 0$.*

Dokaz. Kako je x_0 različit od nula vektora, sledi da je skup $\{x_0\}$ linearno nezavisan. Zbog toga je na osnovu leme 3.22 postoji linearno nezavisan skup vektora $\{a_i : i \in \Lambda\}$ u prostoru V tako da je

$$\{x_0\} \cup \{a_i : i \in \Lambda\}$$

Hamelov bazis prostora V. Sada definišimo funkcionelu $f : V \to P$ na sledeći način:

$$f(x_0) = 1 \ \ , \ \ f(a_i) = 0 \ \ (i \in \Lambda).$$

Tada je funkcionela $f \in V^*$ i $f(x_0) \neq 0$, čime je dokazano tvrđenje. □

Posledica 3.36. *Ako je vektorski prostor $V \neq \{0\}$ onda je i odgovarajući dualni prostor $V^* \neq \{0\}$.*

Tvrđenje 3.37. *Neka je V proizvoljan beskonačno dimenzionalan vektorski prostor nad poljem P. Ako je $dim(V) = k$, tada je*

$$dim(V^*) = 2^k.$$

Dokaz. Uočimo bazu prostora V, neka je to skup vektora označen sa A. Tada je
$$dim(V) = k(A) = k.$$
Dalje, uočimo funkcionelu $f \in V^*$. Ona je određena svojim vrednostima $\{f(a), a \in A\}$ i ove vrednosti su proizvoljni skalari iz polja P. Zbog toga postoji bijekcija između funkcionela $f \in V^*$ i funkcija $\widetilde{f} : A \to P$, odnosno elemenata funkcionalnog prostora P^A.
Osim toga, preslikavanje $F : V^* \to P^A$ definisano sa
$$F(f) = \{f(a) : a \in A\}$$
je izomorfizam vektorskih prostora V^* i P^A.
Odavde sledi da je
$$k(V^*) = k(P^A) = \mathfrak{c}^k,$$
$$dim(V^*) = dim(P^A).$$
Kako je $\mathfrak{c}^k = 2^k$ (vidi 2.28 (b)), jer je k beskonačan kardinal, dobijamo da je
$$k(V^*) = 2^k.$$
Sa druge strane, na osnovu tvrđenja 3.28 primenjenog na prostor V^* imamo
$$k(V^*) = \mathfrak{c} \cdot dim(V^*) = \mathfrak{c} \cdot dim(P^A).$$
Na osnovu primera 3.30 znamo da važi
$$dim(P^A) = 2^{k(A)}.$$
Kako je k beskonačni kardinal, poznato je da $k = k(A) \geq \aleph_0$. Stoga je
$$dim(P^A) \geq 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$
Na osnovu navedenih jednakosti i nejednakosti u gornjim razmatranjima, možemo zaključiti
$$k(V^*) = dim(V^*) = 2^{k(A)}.$$
□

Pošto je poznato da je za beskonačni kardinal k ispunjeno $2^k > k$, iz prethodnog tvrđenja dobijamo sledeću posledicu.

Posledica 3.38. *Za proizvoljan beskonačno dimenzionalan vektorski prostor V nad poljem P važi sledeća nejednakost*
$$dim(V^*) > dim(V).$$

3.8.2 Drugi dualni prostor vektorskog prostora

Neka je V vektorski prostor nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva P. Kako smo ranije pokazali tada je i V^* takođe vektorski prostor nad pomenutim poljem P. Zbog toga možemo posmatrati i odgovarajući dual prostora V^*. Njega ćemo označiti sa V^{**} i on se naziva drugim dualom prostora V.

Prostor V može se utopiti u drugi dualni prostor V^{**}. Naime, za proizvoljan vektor $x \in V$, posmatrajmo funkcionelu F_x definisanu sa

$$F_x(g) = g(x) \quad (g \in V^*).$$

Ovako definisana funkcionela pripada prostoru V^{**}. Zaista, za proizvoljne funkcionele $g_1, g_2 \in V^*$ i skalare $\alpha, \beta \in P$ imamo

$$\begin{aligned} F_x(\alpha g_1 + \beta g_2) &= (\alpha g_1 + \beta g_2)(x) \\ &= \alpha g_1(x) + \beta g_2(x) \\ &= \alpha F_x(g_1) + \beta F_x(g_2), \end{aligned}$$

pa je F_x linearna funkcionela na prostoru V^*, odnosno $F_x \in V^{**}$.

Definišimo sada preslikavanje $f : V \to V^{**}$ sa

$$f(x) = F_x \quad (x \in V).$$

Ono je linearno, jer za proizvoljne vektore $x_1, x_2 \in V$, skalare $\alpha, \beta \in P$ i funkcionelu $g \in V^*$ važi:

$$\begin{aligned} F_{\alpha x_1 + \beta x_2}(g) &= g(\alpha x_1 + \beta x_2) \\ &= \alpha g(x_1) + \beta g(x_2) \\ &= \alpha F_{x_1}(g) + \beta F_{x_2}(g) \\ &= (\alpha F_{x_1} + \beta F_{x_2})(g). \end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= F_{\alpha x_1 + \beta x_2} \\ &= \alpha F_{x_1} + \beta F_{x_2} \\ &= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2). \end{aligned}$$

Osim toga, preslikavanje f je injektivno jer iz

$$f(x) = F_x = 0,$$

sledi da je

$$F_x(g) = g(x) = 0 \quad (g \in V^*).$$

Zbog toga je primenom posledice 3.36, neposredno $x = 0$.

Iz prethodnog izlaganja sledi da je preslikavanje f jedno utapanje prostora V u drugi dualni prostor V^{**}. Pomenuto preslikavanje, f, naziva se kanoničkim utapanjem prostora V u V^{**}. Kako je kanoničko preslikavanje f jedna bijekcija između skupova V i $f(V)$ i skup $f(V)$ potprostor prostora V^{**}, dobijamo da za svaki vektorski prostor V nad poljem P važi

$$dim(V^{**}) \geq dim(V).$$

Vektorski prostor V naziva se algebarski refleksivnim ako važi

$$f(V) = V^{**}$$

i jasno, algebarski nerefleksivnim ukoliko je

$$f(V) \neq V^{**}.$$

Ako je prostor V alegebarski refleksivan, tada je kanoničko utapanje prostora V u prostor V^{**} bijektivno preslikavanje. Odavde sledi da ukoliko je V algebarski refleksivan, onda prostori V i V^{**} imaju iste dimenzije, odnosno

$$dim(V^{**}) = dim(V).$$

Tvrđenje 3.39. *Vektorski prostor V je algebarski refleksivan ako i samo ako je konačno dimenzionalan.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je prostor V konačno dimenzionalan. Ako je njegova dimenzija jednaka n, tada je na osnovu tvrđenja 3.34 i dimenzija dualnog prostora $dim(V^*) = n$. Ako isto tvrđenje sada primenimo na V^* dobijamo da je prostor V^{**} takođe konačno dimenzionalan i $dim(V^{**}) = n$. Dakle, dobili smo

$$dim(V^{**}) = dim(V) = n.$$

Kako je pri kanoničkom utapanju $f : V \to V^{**}$, prostor V potprostor prostora V^{**}, očigledno je da se prostori $f(V)$ i V^{**} poklapaju pa je V algebarski refleksivan.

Sada pretpostavimo da je prostor V beskonačno dimenzionalan. Tada je na osnovu posledice 3.38

$$dim(V^*) > dim(V),$$

pa je i V^* beskonačno dimenzionalan. Primenimo opet istu posledicu, ali sada na V^*. Dobijamo:

$$dim(V^{**}) > dim(V^*),$$

stoga se može zaključiti da važi

$$dim(V^{**}) > dim(V).$$

Kako važi pomenuta nejednakost, sledi da prostor V ne može biti algebarski refleksivan. $\square$

Napomena 3.40. Ako je V proizvoljan beskonačno dimenzionalan vektorski prostor, tada na osnovu tvrđenja 3.37 dobijamo da važi:

$$dim(V^{**}) = 2^{2^{dim(V)}}.$$

3.9 Metrički i normirani prostori-osnovne definicije

Definicija 3.41. Neka je $V \neq \emptyset$ i $d : V \times V \to [0, \infty)$ tako da važe uslovi:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. Za sve $x, y \in V$ je $d(x, y) = d(y, x)$ (simetričnost)
3. Za sve $x, y, z \in V$ važi nejednakost trougla: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Tada je preslikavanje d metrika na skupu V, a $d(x, y)$ je rastojanje tačaka x i y. Par (V, d) naziva se metrički prostor.

Definicija 3.42. Metrički prostor (V, d) je separabilan ako postoji $A \subset V$ takav da je $k(A) \leq k(\mathbb{N}) = \aleph_0$ i $\overline{A} = V$, odnosno ako postoji prebrojiv gust skup u V.

Definicija 3.43. U metričkom prostoru (V, d) kažemo da niz $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ u V konvergira ka $a \in V$ ako je $\lim_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0$. Odnosno,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0.$$

Definicija 3.44. Niz $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ iz V je Košijev ako važi sledeći uslov:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N})(m, n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon).$$

Definicija 3.45. Ako je u metričkom prostoru (V, d) svaki Košijev niz konvergentan, onda je pomenuti prostor kompletan.

Neka je V vektorski prostor nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva P.

Definicija 3.46. Preslikavanje $\nu : V \to [0, \infty)$ je norma nad V ako važe sledeći uslovi:

1. $\nu(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\nu(\lambda x) = |\lambda|\nu(x)$ za sve $\lambda \in P$ i sve $x \in V$
3. $\nu(x + y) \leq \nu(x) + \nu(y)$ za sve $x, y \in V$

Uređeni par (V, ν) je normiran prostor.

Normu ν ćemo u daljem tekstu obeležavati sa $\|\cdot\|$ ili $\|\cdot\|_V$.
Svaki normirani prostor $(V, \|\cdot\|)$ je i metrički prostor (V, d) sa metrikom d koja je definisana na sledeći način:

$$d(x, y) = \|x - y\| \text{ za sve } x, y \in V.$$

Pokazaćemo da d ima osobine metrike:

1. Prva osobina sledi iz ekvivalencija:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

2. Kako je $\|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \|y - x\|$, sledi da je $d(x, y) = d(y, x)$ za sve $x, y \in V$.

3. $d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$, za sve $x, y, z \in V$.

Neka je skup $\{x_i | i \in I\} \subset V$ Hamelova baza u V. To znači da se vektor $x \in V$ može prikazati kao

$$x = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i$$

gde su α_i skalari polja P, pri čemu su svi sem konačno mnogo njih (α_i) jednaki nuli. Ovakva reprezentacija vektora je jedinstvena, to smo ranije pokazali. Takođe, poznato je da svaki vektorski prostor $V \neq \{0\}$ ima Hamelovu bazu.

Svaki vektorski prostor može se normirati tako što je za elemenat $x = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i$ norma, $\|x\|$ data sa

$$\|x\| = max\{|\alpha_i| : i \in I\}.$$

Ako je normirani prostor $(V, \|\cdot\|)$ kompletan metrički prostor kažemo da je Banahov prostor.

3.10 Dimenzija separabilnog normiranog prostora

Neka je T proizvoljan beskonačan skup. $M(T)$ je skup svih ograničenih funkcija $F : T \to P$ nad poljem P, sa normom proizvoljne funkcije $F \in M(T)$ definisanom na sledeći način:

$$\|F\| = sup\{|F(t)| : t \in T\}.$$

Napomenimo, pre uvođenja sledećeg tvrđenja, da su prostori kongruentni ukoliko je preslikavanje definisano između njih linearno i izometrično.

Tvrđenje 3.47. *Za svaki normirani prostor V nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva P, postoji neprazan skup T takav da je prostor V kongruentan sa nekim potprostorom V_0 Banahovog prostora $M(T)$.*
Skup T nije jednoznačno određen prostorom V.

Dokaz. Neka je $S = \{x_t : t \in T\}$ proizvoljan svuda gust skup tačaka u prostoru V. Skup S, a time i indeksni skup T, jasno je nisu jednoznačno određeni. Kao mogućnost može se uzeti i da je $S = V$, odnosno $T = P$.

Za svako $t \in T$, označimo sa f_t linearnu funkcionelu iz prostora V^* takvu da je

$$\|f_t\| = 1 \ \ , \ \ f_t(x_t) = \|x_t\| \, .$$

Ovo važi kao posledica Han-Banahove teoreme (vidi [2]).

Dalje, za proizvoljno $x \in V$ možemo definisati funkciju $F_x : T \to P$ sa

$$F_x(t) = f_t(x) \ \ (t \in T).$$

Kako je $|f_t(x)| \leq \|f_t\| \, \|x\| = \|x\|$ za svako $t \in T$, sledi da je

$$|F_x(t)| \leq \|x\| \ \ \ (t \in T),$$

pa je funkcija $F_x \in M(T)$.

Definišimo sada preslikavanje $g : V \to M(T)$ sa

$$g(x) = F_x \ \ (x \in V).$$

Ovo preslikavanje je dobro definisano i linearno, jer za proizvoljne $x, y \in V$ i skalare $\alpha, \beta \in P$ važi

$$\begin{aligned} F_{\alpha x+\beta y}(t) &= f_t(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha f_t(x) + \beta f_t(y) \\ &= \alpha F_x(t) + \beta F_y(t) \\ &= (\alpha F_x + \beta F_y)(t). \end{aligned}$$

Dakle, $F_{\alpha x+\beta y} = \alpha F_x + \beta F_y$.

Dokazaćemo da je preslikavanje g izometrično, odnosno da je

$$\|F_x\| = sup\{|f_t(x)| : t \in T\} = \|x\| \quad (x \in V).$$

Kako je $|f_t(x)| \leq \|x\| \quad (t \in T)$, sledi da je $\|F_x\| \leq \|x\|$.

Dalje je za proizvoljno $t \in T$ ispunjeno

$$|\,|f_t(x_t)| - \|x\|\,| = |\,\|x_t\| - \|x\|\,| \leq \|x_t - x\|\,,$$

$$|\,|f_t(x)| - |f_t(x_t)|\,| \leq |f_t(x) - f_t(x_t)| = |f_t(x - x_t)| \leq \|x - x_t\|\,,$$

odakle je

$$|\,|f_t(x)| - \|x\|\,| \leq 2\,\|x_t - x\|\,.$$

Kako sada za svako $\varepsilon > 0$ postoji neko $t \in T$ tako da je $\|x_t - x\| \leq \varepsilon$ sledi da je

$$\|F_x\| = sup\{|f_t(x)| : t \in T\} = \|x\|\,.$$

Odavde dobijamo da je $\|F_x\| = \|x\|$.

Iz linearnosti i izometričnosti preslikavanja g, neposredno sledi da je pomenuto preslikavanje i injektivno. Zbog toga je normirani prostor kongruentan sa potprostorom $V_0 = g(V) = \{F_x : x \in V\}$ prostora $M(T)$. $\square$

Kao posledicu prethodnog tvrđenja dobijamo sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 3.48. *Svaki separabilan normiran prostor V nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva P, izomorfan je sa nekim potprostorom Banahovog prostora $[m] = [m]_P$.*

Dokaz. Iz separabilnosti prostora V sledi da postoji svuda gust skup tačaka $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ u tom prostoru. Ako stavimo $T = \mathbb{N}$, tada je $M(T) = M(\mathbb{N}) = [m]_P$ sa normom

$$\|(\xi_1, \xi_2, \ldots)\| = sup\{|\xi_n| : n \in \mathbb{N}\},$$

i tvrđenje sledi iz prethodnog. $\square$

Tvrđenje 3.49. *Za proizvoljan separabilan normirani prostor $V \neq \{0\}$ nad poljem P važi:*

1. $dim(V) \leq \mathfrak{c}$
2. $k(V) = \mathfrak{c}$.

Dokaz. 1) Na osnovu prethodnog tvrđenja znamo da postoji izvestan potprostor E Banahovog prostora $[m]$, takav da su V i E kongruentni prostori. Odavde je

$$dim(V) = dim(E) \leq dim([m]) = \mathfrak{c}.$$

2) Kako je dalje $k(V) = \mathfrak{c} \cdot dim(V)$ i na osnovu 1) $dim(V) \leq \mathfrak{c}$, sledi da je $k(V) = \mathfrak{c}$. $\square$

3.11 Dimenzija Banahovog prostora

Tvrđenje 3.50. *Neka je V beskonačno dimenzionalan Banahov prostor nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva P. Tada je*

$$dim(V) \geq \mathfrak{c}.$$

Dokaz. Neka je $f_1 \neq 0$ proizvoljna ograničena linearna funkcionela na prostoru V i $E_1 = \mathcal{N}(f_1)$ njen nula-potprostor. Potprostor E_1 je zatvoren i kako je on hiperpotprostor prostora V sledi da je i on beskonačno dimenzionalan. Sada označimo sa x_1 proizvoljan vektor iz skupa $V \setminus E_1$ takav da je $\|x_1\| = 1$.

Neka je sa $f_2 \neq 0$ označena proizvoljna ograničena linearna funkcionela na zatvorenom potprostoru E_1 i neka je $E_2 = \mathcal{N}(f_2)$ njen nula-potprostor. Uočimo sada proizvoljan vektor $x_2 \in E_1 \setminus E_2$ takav da je $\|x_2\| = \frac{1}{2}$.

Nastavljajući ovakav postupak dobijamo niz vektora $\{x_1, x_2, \ldots\}$ u prostoru V takav da je $\|x_n\| = \frac{1}{2^{n-1}}, n \in \mathbb{N}$ i niz zatvorenih potprostora $E_1, E_2, \ldots$ takvih da je

$$V \supset E_1 \supset E_2 \supset \ldots$$

pritom vektori $x_1, \ldots, x_n \notin E_n$, a vektori $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots \in E_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

U nastavku ćemo konstruisati jedan vektorski izomorfizam između prostora $[m] = [m]_P$ i potprostora V_0 prostora V.

Uočimo proizvoljan niz $y = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in [m]$ i odgovarajući vektorski red

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k x_k$$

u prostoru V. Pod pomenutim redom se podrazumeva niz parcijalnih suma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k \ \ (n \in \mathbb{N}).$$

Kako je za proizvoljne indekse $m \geq n$ ispunjeno

$$\begin{aligned} \|S_m - S_n\| &= \left\| \sum_{k=n+1}^{m} \xi_k x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |\xi_k| \, \|x_k\| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{m} \|y\| \, \|x_k\| \\ &= \|y\| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^{k-1}} < \frac{\|y\|}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

sledi da je niz $\{S_n\}$ Košijev, dakle konvergentan u prostoru V.

Neka je sada $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k x_k$.

Uočimo dalje preslikavanje $\varphi : [m] \to V$ definisano sa:

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k x_k.$$

Ovo preslikavanje je linearno i injektivno. Pokazaćemo da je injektivno.

Pretpostavimo da je za neki vektor $y = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in [m]$ ispunjeno

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k x_k = 0.$$

Tada je

$$\xi_1 x_1 = -\sum_{k=2}^{\infty} \xi_k x_k.$$

Kako su svi vektori $x_2, x_3, \ldots \in E_1$ i potprostor E_1 zatvoren, sledi da red

$$\sum_{k=2}^{\infty} \xi_k x_k \in E_1.$$

Međutim, kako vektor $x_1 \notin E_1$, iz jednakosti $\xi_1 x_1 = -\sum_{k=2}^{\infty} \xi_k x_k$ sledi da je $\xi_1 = 0$ i $\sum_{k=2}^{\infty} \xi_k x_k = 0$. Na sličan način zaključujemo da važi $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = 0$. Zbog toga je $y = (\xi_1, \xi_2, \ldots) = 0$, pa je preslikavanje injektivno.

Na ovaj način smo pokazali da je prostor $[m]$ linearno izomorfan sa nekim potprostorom $V_0 = \varphi([m])$ prostora V. Zbog toga važi

$$dim(V) \geq dim(V_0) = dim([m]) = \mathfrak{c}.$$

Dakle, $dim(V) \geq \mathfrak{c}$. $\square$

Sledi nekoliko posledica prethodno navedenog tvrđenja.

Posledica 3.51. *Ako je V proizvoljan beskonačno dimenzionalan vektorski prostor, čija je dimenzija strogo manja od $\mathfrak{c}$. Tada je prostor V nekompletan u bilo kojoj normi.*

Posledica 3.52. *Neka je V proizvoljan beskonačno dimenzionalan Banahov prostor. Tada važi*

$$k(V) = dim(V) \geq \mathfrak{c}.$$

Dokaz. Kako smo ranije pokazali da je $k(V) = \mathfrak{c} \cdot dim(V)$, a na osnovu poslednjeg tvrđenja imamo $dim(V) \geq \mathfrak{c}$, sledi

$$k(V) = \mathfrak{c} \cdot dim(V) = dim(V).$$

$\square$

Posledica 3.53. *Svaki separabilan beskonačno dimenzionalan Banahov prostor V nad poljem P zadovoljava uslov*

$$k(V) = dim(V) = \mathfrak{c}.$$

4 Zaključak

U ovom master radu razmatrana je, kako i sam naslov kaže, dimenzija vektorskog prostora.

U skladu sa tim veliku pažnju smo posvetili i kardinalnim brojevima, koji su detaljno obrađeni u prvom delu rada. Definisana je odgovarajuća klasa ekvivalencije, prebrojivi i beskonačni skupovi, kao i mnoštvo teorema koje opisuju pomenute skupove i daju potrebne i dovoljne uslove za broj elemenata skupa u skladu sa postojanjem odgovarajućeg preslikavanja ili relacijama koje postoje između posmatranih skupova. Takođe, razmatrane su operacije nad kardinalnim brojevima, kao i poređenje kardinalnih brojeva uvođenjem odgovarajuće relacije poretka.

Zatim smo prešli na vektorske prostore. Krenuli smo od uvođenja osnovnih pojmova vezanih za ovu tematiku, same definicije i linearne nezavisnosti vektora, a onda prešli na dimenziju prostora i potprostora, kao i na kardinalnost vektorskog prostora. Bavili smo se vezom između dimenzije vektorskog prostora i kardinalnosti istog. Takođe, u ovom delu rada posvetili smo pažnju dualnim prostorima i njihovoj dimenziji. Na kraju je razmatrana dimenzija separabilnog normiranog prostora, kao i Banahovog prostora.

Literatura

1. "Dimenzija vektorskog prostora", Aleksandar Torgašev
2. "Uvod u funkcionalnu analizu", Olga Hadžić, Stevan Pilipović, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, MP "STYLOS" Novi Sad, 1996.
3. "Predavanja iz uvoda u analizu", Ljiljana Gajić, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Departman za metematiku i informatiku, 2004.
4. "Osnovi opšte topologije", Miloš Kurilić, Prirodno-metematički fakultet u Novom Sadu, Departman za matematiku i informatiku, 1998.
5. "Linearna algebra i analitička geometrija", Zoran Stojaković, Dragoslav Herceg, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad, 2005.
6. "Algebra 1", Branimir Šešelja, Andreja Tepavčević, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad, 2004.
7. http://operator.pmf.ni.ac.rs/www/pmf/publikacije/Mii/2008-2009/broj /201/20sveska/201-2/mii1-5.pdf
8. http://math.fon.rs/skladiste/vesti/Matematika 1.pdf
9. http://hr.wikipedia.org/wiki/Dimenzija vektorskog prostora
10. http://www.scribd.com/doc/37018248/15/Aritmetika-kardinalnih-brojeva
11. http://www.pmf.ni.ac.rs/pmf/predmeti/1501/pdf/DS-P13-K.pdf
12. http://baza.iugrina.com/index.php?stil=Nnixid=104
13. http://baza.iugrina.com/index.php?stil=Nnixid=117

Biografija

Marija Delić rođena je 29.09.1987. u Novom Sadu.
Osnovnu školu, "Prva vojvođanska brigada", završila je 2002. godine sa odličnim uspehom i Vukovom diplomom. Iste godine upisuje Gimnaziju "Isidora Sekulić" u Novom Sadu, prirodno-matematički smer, koju takođe završava kao nosilac Vukove diplome. Posle završetka gimnazije, 2006. godine, upisuje osnovne studije na Prirodno-metematičkom fakultetu, Departman za matematiku i informatiku, smer inženjer matematike, koje je završila 2010. godine sa prosečnom ocenom 9.66. Odmah zatim, nastavlja školovanje na istom fakultetu, upisujući se na master studije primenjene matematike, smer tehnomatematika. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija, zaključno sa junskim ispitnim rokom i tako stekla pravo na odbranu master rada. Stipendista je Fonda za mlade talente Republike Srbije, i na osnovnim i na master studijama.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Marija Delić
AU

Mentor: Akademik Prof. dr Stevan Pilipović
MN

Naslov rada: Dimenzija vektorskog prostora
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / e
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2011.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (4, 73, -, 1, -)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Funkcionalna analiza
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: skup, kardinalni broj skupa, relacija ekvivalencije, ekvivalentni skupovi, relacija poretka, vektorski prostori, linearna nezavisnost, dimenzija vektorskog prostora, kardinalni broj vektorskog prostora
PO

UDK:

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod:
IZ
U radu je razmatrana dimenzija vektorskog prostora.
U skladu sa tim posebnu pažnju smo posvetili i kardinalnim brojevima, koji su obrađeni u poglavlju dva ovog teksta. Definisana je odgovarajuća klasa ekvivalencije, prebrojivi i beskonačni skupovi. Kroz teoreme, tvrđenja i posledice dati su potrebni i dovoljni uslovi za broj elemenata skupa u skladu sa postojanjem odgovarajućeg preslikavanja ili relacijama koje postoje između skupova.
Vektorski prostori razmatrani su u trećem poglavlju. Uveli smo osnovne definicije vezane za ovu tematiku, a zatim prešli na dimenziju prostora i potprostora, kao i na kardinalnost vektorskog prostora. Takođe, razmatana je i veza između dimenzije vektorskog prostora i kardinalnosti istog. Bavili smo se jos i dualnim prostorima, njihovom dimenzijom, zatim dimenzijom separabilnog normiranog prostora, kao i Banahovog prostora.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 06.09.2011.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Miloš Kurilić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Stevan Pilipović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor
Član:	dr Aleksandar Pavlović, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Marija Delić
AU

Mentor: Stevan Pilipović, Ph.D.
MN

Title: Dimension of vector space
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2011.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (4,73,-,1,-)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Functional analysis
SD

Subject/Key words: set, cardinal number of set, equivalence relation, equivalent sets, partial order, vector spaces, linear independence, dimension of vector space, cardinal number of vector space
SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract:
AB
In this master thesis examined the dimensions of vector space.
Accordingly we have devoted special attention to cardinal numbers which are addressed in chapter two of this text. Defined by the corresponding equivalence classes, countable and infinite sets. Through the theorem, assertion and consequences give necessary and sufficient conditions for the number of elements set in accordance with the existence of appropriate mappings or relations that exist between sets.
Vector spaces are discussed in the third chapter. We introduced the basic definitions related to this problem, and then crossed the dimension of space and subspace, and the cardinality of the vector space. Also, we considered the link between the dimensions of vector space and the cardinality of same space. We dealt with dual spaces, their dimensions, then the dimension of standardized space space, and Banach's space.

Accepted by the Scientific Board on: 6 September 2011.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Miloš Kurilić Ph.D, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member:	Stevan Pilipović Ph.D, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad,
Member:	Aleksandar Pavlović Ph.D, assistant professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad