Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Manojlo Vuković

Fokker-Planckova jednačina i njene primene

Master rad

Mentor:

Prof. dr Marko Nedeljkov

2017, Novi Sad

Predgovor

Od početka studija, posebno interesovanje sam imao za matematičku analizu, a potom i za teoriju verovatnoće. Kurseve koje sam slušao za vreme studija iz tih oblasti su doprineli da se to moje interesovanje produbi. Poslednji kurs koji sam slušao iz ovih oblasti bio je iz teorije mere i integrala, koji mi je između ostalog dao i najviše znanja za razumevanja tematike ovog rada.

Predmet ovog master rada je Fokker-Planckova jednačina i njeno dobijanje. Fokker-Planckova jednačina je parcijalna diferencijalna jednačina koja opisuje kako se funkcija gustine određenog stohastičkog procesa ponaša u odnosu na vreme. Takođe, naziva se još i Kolmogorova jednačina unapred. Nazvana je po Adrijanu Fokeru (Adriaan Fokker) i Maksu Planku (Max Planck), odnosno po Andreju Kolmogorovu (Andrey Kolmogorov). Primena ove jednačine je široka, posebno u fizici, a u poslednje vreme se koristi i u ekonomskim tj. finansijskim modelima.

U prvom poglavlju rada predstavljene su matematičke osnove koje su neophodne za razumevanje same Fokker-Planckove jednačine, kao i za razumevanje njene primene, i to iz teorije mere, teorije verovatnoće, kao i deo vezan za linearne operatore. U drugom poglavlju bavimo se samom Fokker-Planckovom jednačinom, odnosno njenim dobijanjem, njenim rešenjem i šta nam njeno rešenje opisuje. Treće poglavlje je posvećeno primeni Fokker-Planckove jednačine, na Wienerovom i Ornstein-Uhlenbeckovom procesu. Odnosno posmatraćemo kako se ponaša gustina stohastičkog procesa u vremenu i preko toga iizvodimo određene zaključke.

***

Veliku zahvalnost dugujem svom mentoru dr Marku Nedeljkovu na konstruktivnim savetima, sugestijama i na pomoći tokom izrade master rada. Takođe, želim da se zahvalim i ostalim članovima komisije dr Danijeli Rajter-Ćirić i dr Nataši Krklec-Jerinkić. Iskoristio bih ovu priliku da se zahvalim i svim ostalim profesorima i asistentima koji su mi nesebično pomogli u sticanju znanja tokom studija, kao i svim kolegama koji su moje studiranje učinili lepšim, a posebno koleginicama Tijani i Jeleni.

Kažu da je na svetu najteže objasniti prijateljstvo, jer to nije nešto što se uči u školi. Ako niste naučili smisao prijateljstva, stvarno niste naučili ništa. Srećom po mene, zajedno sa Anđelkom, Radošem, Aleksandrom i Stefanom sam naučio šta je to prijateljstvo te se i njima ovom prilikom zahvaljujem.

Na kraju, najveću zahvalnost dugujem svojoj porodici, majci Slobodanki, ocu Jovanu, i sestrama Neveni, Tijani i Isidori koji su mi najveća podrška i oslonac u svemu što radim i koji su svojim ponašanjem, delima i vaspitanjem odredili moj karakter.

Manojlo Vuković

Sadržaj

Glava 1

Teorijska osnova

U ovom poglavlju ćemo dati teorijsku osnovu potrebnu za razumevanje dobijanja Fokker-Planckove jednačine, kao i za njeno rešavanje i to kroz pet posebnih celina. Literatura koju smo koristili za ovo poglavlje je [1], [4], [5], [6], [8].

1.1 Mera i integral

Još u osnovnoj i srednjoj školi se susrećemo sa računanjem dužine, površine i zapremine određenih tela. Skup tela za koje smo znali da izračunamo te veličine je bio mali. Medjutim, uvođenjem Riemannovog integrala, skup postaje veći, ali ne i dovoljno. Mera nam omogućava da se Riemannov integral proširi do Lebesgueovog integrala, koji je definisan za puno širu klasu celina.

Teorija mere je matematička disciplina koja se bavi izučavanjem prethodno pomenutih veličina i to pod zajedničkim imenom mera. Matematički model merenja zahteva postojanje nepraznog skupa X, kao i postojanje neke familije podskupova $\mathcal{F}$ od X koje je moguće meriti. Svakom elementu iz te familije $A \in \mathcal{F}$ merenjem se pridružuje vrednost $\mu(A)$ koju zovemo mera skupa A. Merom $\mu(A)$ možemo predstaviti cenu proizvoda, težinu, visinu, temperaturu itd. Merenje u matematici, kao i u svakodnevnim situacijama, mora ispunjavati neka pravila. Ta pravila i njihove posledice ćemo izložiti u ovom poglavlju.

Definicija 1.1.1. *σ-algebra na X je familija skupova $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sa osobinama:*

1. $X \in \mathcal{M}$;
2. $A \in \mathcal{M} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{M}$;

3. $A_n \in \mathcal{M}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

Skup X sa σ-algebrom $\mathcal{M}$ nazivamo prostor sa σ-algebrom i označavamo ga sa $(X,\mathcal{M})$. Elemente σ-algebre $\mathcal{M}$ nazivamo merljivim skupovima.

Teorema 1.1.1. *Neka je $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Postoji najmanja σ-algebra $\mathcal{M}$ za koju važi $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{E}$.*

Definicija 1.1.2. *Neka je $X \neq \emptyset$ i $\mathcal{P}$ partitivni skup. Topologija τ na skupu X je familija skupova $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ sa osobinama:*

1. $\emptyset, X \in \tau$,

2. $O_1, O_2 \in \tau \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \tau$,

3. $O_\alpha \in \tau, \alpha \in \Lambda \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in\Lambda} O_\alpha \in \tau$.

Skup X sa topologijom τ je topološki prostor i označavamo ga sa (X,τ).

Definicija 1.1.3. *Borelova σ-algebra u topološkom prostoru (X,τ) je najmanja σ-algebra koja sadrži τ. Označava se sa $\mathcal{B}_X$, $\mathcal{B}_\tau$ ili samo $\mathcal{B}$ ako je jasno koji se topološki prostor posmatra.*

Definicija 1.1.4. *Neka je $(X,\mathcal{M})$ prostor sa σ-algebrom, a (Y,τ) topološki prostor ($(Y,\mathcal{N})$ prostor sa σ-algebrom). Funkcija $f : X \to Y$ je merljiva ako $\forall O \in \tau$ važi $f^{-1}(O) \in \mathcal{M}$ ($\forall \omega \in \mathcal{N}$ važi $f^{-1}(w) \in \mathcal{M}$).*

Propozicija 1. *Neka je $A \in \mathcal{P}(X)$ i $k_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$. karakteristična funkcija skupa A. Funkcija k_A je merljiva ako i samo ako $A \in \mathcal{M}$.*

Definicija 1.1.5. *Funkcija $f : X \to [-\infty,\infty]$ je jednostavna, ako je kodomen konačan skup, odnosno ako postoje $a_1,..,a_r \in [-\infty,\infty]$ tako da za svako $x \in X$ važi $f(x) \in \{a_1,..,a_r\}$.*

Za $A_i = \{x \in X, f(x) = a_i\}, i = 1,..,r$. Važi $\bigcup\limits_{i=1}^{r} A_i = X$ i skupovi A_i, $i = 1,..,r$ čine particiju skupa X. Ako $a_1,..,a_r \in \mathbb{R}$, tada je $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{r} a_i k_{A_i}(x), x \in X$.

Teorema 1.1.2. *Neka je $f : X \to [0,\infty]$ merljiva funkcija na $(X,\mathcal{M})$. Tada postoji niz nenegativnih jednostavnih merljivih funkcija $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ na X tako da važi*

$$s_n(x) \leq s_{n+1}(x), x \in X, n \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x), x \in X \tag{1.1}$$

Definicija 1.1.6. *Neka je* $(X, \mathcal{M})$ *prostor sa* σ*-algebrom. Mera* μ *na* $\mathcal{M}$ *je funkcija* $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ *takva da za* $A_i \in \mathcal{M}, i \in \mathbb{N}$, $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ *važi*

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ se naziva merljiv prostor ili prostor sa merom. Elementi σ-algebre $\mathcal{M}$ se nazivaju merljivi skupovi.
Mera μ je netrivijalna ako je bar za jedno $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) < \infty$.
Mera μ je konačna ako za svako $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) < \infty$.
Mera μ je σ-konačna ako je X prebrojiva unija merljivih skupova tako da svaki od njih ima konačnu meru.

Definicija 1.1.7. *Kažemo da je mera* μ *na* $(X, \mathcal{M})$ *kompletna, odnosno da je* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *prostor sa kompletnom merom, ako je svaki podskup merljivog skupa sa merom nula takođe merljiv.*

Propozicija 2. *Neka je* F *neopadajuća zdesna neprekidna funkcija na* R.

1. *Postoji jedinstvena mera* μ *na* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *tako da je*

$$\mu((a, b]) = \mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$$

za svaki ograničeni interval $(a, b]$.

2. *Neka je* μ *mera na* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *koja je konačna na svim ograničeni Borelovim skupovima. Neka je* $C \geq 0$ *proivoljna konstanta i*

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0, x]) + F(0), & x > 0 \\ C, & x = 0 \\ -\mu((x, 0]) + F(0), & x < 0 \end{cases}.$$

Tada je F *neopadajuća zdesna neprekidna funkcija i* $\mu = \mu_F$.

3. *Ako je* G *monotona neopadajuća zdesna neprekidna funkcija, tada važi* $\mu_F = \mu_G$ *ako i samo ako* $F - G = const$.

Definicija 1.1.8. *Mera* μ_F *se naziva Lebesgue–Stieltjesova mera na* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *asocirana funkcijom* F.

Ako je $F \equiv I_d$ (I_d je indentičko preslikavanje) tada se $\mu_{I_d} = m$ naziva Lebesgueova mera na $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor sa merom μ na σ-algebri $\mathcal{M}$. Neka je $s : X \to [0, \infty]$ merljiva jednostavna funkcija tj. oblika

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_{A_i} \quad (\alpha_i \neq \alpha_j, A_i \in \mathcal{M}).$$

Lebesgueov integral funkcije s na $E \in \mathcal{M}$ se definiše sa

$$\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E \cap A_i). \tag{1.2}$$

Definicija 1.1.9. *Neka je $f : X \to [0, \infty]$ merljiva, i $E \in \mathcal{M}$. Lebesgueov integral funkcije f na E je*

$$\int_E f d\mu = \sup_{0 \leq s \leq f} \int_E s d\mu,$$

gde se supremum uzima po svim jednostavnim merljivim funkcijama $s : X \to [0, \infty]$ sa osobinom $0 \leq s \leq f$.

Definicija 1.1.10. *Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor sa merom μ na σ-algeri $\mathcal{M}$. $L^1(\mu)$ je skup svih kompleksnih merljivh funkcija $f = u + iv, u, v : X \to \mathbb{R}$, za koje važi $\int_X |f| d\mu < \infty$. Takve funkcije se nazivaju Lebesgue integrabilne funkcije ili sumabilne funkcije.*

Definicija 1.1.11. *Neka je $f = u + iv \in L^1(\mu)$, gde su u i v realne i merljive funkcije. Integral funkcije f na $E \in \mathcal{M}$ je*

$$\int_E f d\mu = \int_E u_+ d\mu - \int_E u_- d\mu + i(\int_E v_+ d\mu - \int_E v_- d\mu).$$

Gde se za funckiju $h : X \to \mathbb{R}$ definiše njen pozitivan i negativan deo na sledeći način

$$h_+(x) = \sup\{h(x), 0\}, \quad x \in X,$$
$$h_-(x) = -\inf\{h(x), 0\}, \quad x \in X.$$

Definicija 1.1.12. *Kompleksne merljive funkcije f i g na $X, \mathcal{M}, \mu$ su jednake skoro svuda na X, pišemo s.s. na X,*

$$f = g \text{ s.s. na } X, \text{ako je } \mu(\{x \in X, f(x) \neq g(x)\}).$$

Slično, za proizvoljan merljiv podskup $E \in \mathcal{M}$, kažemo $f = g$ s.s. na E, ako je $\mu(\{x \in E, f(x) \neq g(x)\})$.

Teorema 1.1.3. *(Lebesgueova teorema o monotonoj konvergenciji)*
Neka je $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *niz merljvih nenegativnih funkcija skoro svuda tako da važi* $f_n \leq f_{n+1}$ *s.s. na* X*. Postoji merljiva nenegativna funkcija* f *tako da važi* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ *s.s na* X *i pri tome je*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu.$$

Teorema 1.1.4. *(Lema Fatoua)*
Neka su f_n *merljive nenegativne s.s. funkcije na* X*,* $n\in\mathbb{N}$*, tada važi*

$$\int\limits_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu.$$

Teorema 1.1.5. *(Lebesgueova teorema o dominantnoj konvergenciji)*
Neka je f_n *niz kompleksnih merljivh funkcija i*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) s.s. x \in X.$$

Ako postoji $g \in L^1(\mu)$ *tako da važi*

$$|f_n(x)| \leq g(x) s.s. x \in X, n \in \mathbb{N},$$

tada $f \in L^1(\mu)$*,*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X |f_n - f| d\mu = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu.$$

Propozicija 3. *Ako je* f *nenegativna merljiva funkcija na* $(X, \mathcal{M}, \mu)$*, tada je preslikavanje*

$$\phi_f(E) = \int\limits_E f d\mu, \quad E \in \mathcal{M}$$

mera na $(X, \mathcal{M})$*.*

Postavlja se pitanje pod kojim uslvima važi obrat, odnosno kada se neka mera λ može izraziti preko integrala neke nenegativne merljive funkcije u odnosu na neku drugu meru μ.

Definicija 1.1.13. *Neka je* $(X, \mathcal{M})$ *prostor sa* σ*-algebrom i neka su* λ *i* μ *mere na* $\mathcal{M}$*. Mera* λ *je apsolutno neprekidna u odnosu na meru* μ *ako* $E \in \mathcal{M}$ *i* $\mu(E) = 0$ *implicira* $\lambda(E) = 0$*. To zapisujemo* $\lambda \ll \mu$*.*

Teorema 1.1.6. *(Teorema Radon–Nikodyma)*
Neka su λ i μ σ-konačne mere na $(X, \mathcal{M})$ i neka je $\lambda \ll \mu$. Tada postoji nenegativna merljiva funckija f takva da važi

$$\lambda(E) = \int\limits_E f d\mu, \quad E \in \mathcal{M}.$$

Funkcija f je jedinstveno određena do na skup mere nula u odnosu na μ. Funkcija f se naziva Radon–Nikodymov izvod mere λ u odnosu na meru μ i označava se sa $\frac{d\lambda}{d\mu}$.

Definicija 1.1.14. *Neka je $(X, \mathcal{M})$ prostor sa σ-algebrm i $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ sa osobinama:*

1. *$\nu(\emptyset) = 0$,*

2. *Ako su $A_i \in \mathcal{M}, i \in \mathbb{N}$ disjunktni, tada važi*

$$\nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i),$$

Što uključuje bezuslovnu konvergenciju reda na desnoj strani.

Tada se ν naziva naboj ili mera sa predznakom.

Definicija 1.1.15. *Neka je λ naboj na $(X, \mathcal{M})$. Skup $P \in \mathcal{M}$ je pozitivan, resp. negativan u odnosu na λ, ako važi*

$$\lambda(E \cap P) \geq 0, \text{ resp. } \lambda(E \cap P) \leq 0, \text{ za svako } E \in \mathcal{M}.$$

Skup P je nula skup, ako je istovremeno i pozitivan i negativan u odnosu na λ.

Teorema 1.1.7. *Ako je λ naboj na $(X, \mathcal{M})$, tada postoje skup $P \in \mathcal{M}$ pozitivan u odnosu na λ i skup $N \in \mathcal{M}$ negativan u odnosu na λ, takvi da važi $X = P \cup N, P \cap N = \emptyset$.*

Definicija 1.1.16. *Neka su P i N skupovi iz prethodne teoreme. Pozitivna i negativna varijacaija od λ su konačne mere λ^+ i λ^- definisane na $\mathcal{M}$ sa*

$$\lambda^+ = \lambda(E \cap P), \quad \lambda^- = \lambda(E \cap N).$$

Totalna varijacija $|\lambda|$ je mera na $(X, \mathcal{M})$ definisana sa

$$|\lambda|(E) = \lambda^+(E) + \lambda^-(E).$$

Definicija 1.1.17. *Naboj λ je apsolutno neprekidan u odnosu na meru μ ako je mera $|\lambda|$ apsolutno neprekidna u odnosu na μ.*

Teorema 1.1.8. *(Uopštene Radon–Nikodymove teoreme)*
Neka je λ naboj i μ σ-konačna mera na na $(X, \mathcal{M})$ i neka je $\lambda \ll \mu$. Tada postoji funkcija $f \in L^1(X, \mu)$ takva da važi

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu, \quad E \in \mathcal{M}.$$

1.2 Verovatnoća

Kao što smo u prethodnom poglavlju, svakom elementu iz familije $A \in \mathcal{M}$ podskupova od X merenjem pridružujemo vrednost, mera μ na $(X, \mathcal{M})$ koja ima osobinu da je $\mu(X) = 1$ se naziva verovatnosna mera ili mera verovatnoće. Uobičajeno je da se u teoriji verovatnoće ona označava sa P, a da se merljivi skupovi tj. skupovi date σ-algebre nazivaju događajima i obično predstavljaju skup ishoda nekog eksperimenta. Takođe, uobičajeno je da se osnovni neprazni skup X obeležava sa Ω a σ-algebra sa $\mathcal{F}$.

Merljive funkcije $f : \Omega \to \mathbb{R}$, pri čemu se na $\mathbb{R}$ podrazumeva Borelova σ-algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ generisana uobičajenom topologijom, se nazivaju slučajnim promenljivama i obično se obeležavaju slovima $X, Y, Z, \ldots$. Dakle, slučajna promenljiva $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ima osobinu da je merljiva tj. $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ za svako $B \in \mathcal{B}$. Odnosno, uvek ćemo moći da izračunamo verovatnoću da slučajna promenljiva X bude unutar nekih granica, jer nas merljivo preslikavanje nikad neće dovesti do nemerljivog skupa.

Definicija 1.2.1. *Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna promenljiva na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Mera P_X definisana nad $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ data sa*

$$P_X(B) = P\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B\} = P\{X^{-1}(B)\}, \quad B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},$$

se naziva raspodela verovatnoća slučane promenljive X.

Odnosno, uvođenjem pojma slučajne promenljive, strukturu prostora $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ smo preneli na novi prostor verovatnoće $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P_X)$.

σ-algebru $\mathcal{F}$ čine sve informacije koje možemo dobiti na osnovu nekog eksperimenta. Kao što smo videli, vrednosti slučajnih promenljivih nas neće dovesti do nemerljivh skupova, a često je i sama polazna σ-algebra prevelika, pa se posmatraju razne σ-podalgebre sadržane u $\mathcal{F}$.

Propozicija 4. *Neka je X slučajna promenljiva nad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tada je familija skupova*

$$\mathcal{F}_X = \{F \in \mathcal{F} : F = X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}$$

σ-algebra koja se naziva σ-algebra generisana slučajnom promenljivom X i pri tome je $\mathcal{F}_X \subseteq \mathcal{F}$. Takođe važi da je to najmanja σ-algebra koja sadrži inverzne slike $X^{-1}(B)$ od svih Borelovih skupova $B \in \mathcal{B}$.

$\mathcal{F}_X$ možemo tumačiti kao skup svih informacija koje nam pruža X na osnovu njenih realizacija.

Primetimo, da ako je F monotono neopadajuća funkcija, neprekidna sa desne strane, takva da je

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 \tag{1.3}$$

Tada je Lebesgue–Stieltjesova mera indukovana ovakvom funkcijom mera verovatnoće. Zaista, $\mu_F(\mathbb{R}) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) - \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 1 - 0 = 1$

Definicija 1.2.2. *Neka je X slučajna promenljiva na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Funkcija raspodele slučajne promenljive X je data sa $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$,*

$$F(x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = P_x((-\infty, x]).$$

Sada je jasno da je mera raspodele verovatnoće P_X u stvari Lebesgue-Stieltjesova mera μ_F asocirana sa funkcijom raspodele F. Važi da je

$$P\{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \leq b\} = F(b) - F(a).$$

Neka je X slučajna promenljiva na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sa vrednostima u $\mathbb{R}_+$. Tada je njen prostor raspodele verovatnoća $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}_\mathbb{R}, P_X)$.

Definicija 1.2.3. *Matematičko očekivanje slučajne promenljive X je njen integral po meri P tj.*

$$E(X) = \int_\Omega X dP.$$

Propozicija 5. *Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$ slučajna promenljiva i $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ merljiva funkcija. Tada važi*

$$\int_\Omega g(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}_+} g(x) dP_X(x).$$

Specijalno, za $g(x) = x$, tada na osnovu prethodne propozicije dobijamo da je

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}_+} x dP_X(x)$$

Ako je $X : \Omega \to \mathbb{C}$ kompleksna slučajna promenljiva definisana na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, tada se ona kao i svaka merljiva funkcija može razložiti na realan i imaginaran deo, kao i na pozivitav i negativan deo. Matematičko očekivanje je tada dato sa $E(X) = E(X_+) - E(X_-)$.

Kako je je u pitanju integral po meri P, važe sve osobine date u prethodnim definicijama, kao npr. Lebesgueova teorema o dominantnonj konvergenciji ili činjenica da ako je $X = Y$ s.s. (u teoriji verovatnoće se skoro svuda često zamenjuje sa frazom skoro sigurno), tada je $E(X) = E(Y)$.

Definicija 1.2.4. *Slučajna promenljiva X je apsolutno neprekidnog tipa ako je njena mera raspodele P_X apsolutno neprekidna u odnosu na Lebesgueovu meru m tj. $P_X \ll m$. Radon-Nikodymov izvod $\varphi_X = \frac{dP_X}{dm}$ se naziva funkcija gustine i ima osobinu da je*

$$F_X = P_X((-\infty, x]) = \int_{(-\infty, x]} \varphi_X dm.$$

Propozicija 6. *Neka je P_X verovatnoća raspodele koja je apsolutno neprekidna i neka je φ_X njena odgovarajuća gustina. Za proizvoljnu integrabilnu funkciju $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ važi*

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \varphi_X(x) dx.$$

Specijalno, matematičko očekivanje je dato sa $E(X) = \int_{\mathbb{R}} x \varphi_X(x) dx$.

Definicija 1.2.5. *Momenat reda n, M_n je očekivanje slučajne promenljive X^n tj.*

$$M_n = E(X^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n \varphi_X(x) dx \tag{1.4}$$

Definicija 1.2.6. *Kakakteristična funkcija $C_X(u)$ je očekivanje slučajne promenljive e^{iux} tj.*

$$C_X(u) = E(e^{iuX}) = \int e^{iux} \varphi_X(x) dx. \tag{1.5}$$

Primetimo, da iz karakteristične funckije možemo izračunati momenat n-tog reda jer važi

$$M_n = E(X^n) = \frac{1}{i^n}\frac{d^n C_X(u)}{du^n}|_{u=0}. \tag{1.6}$$

Sada, Taylorov razvoj karakteristične funkcije možemo sapisati preko momenata,

$$C_X(u) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(iu)^n \frac{M_n}{n!}. \tag{1.7}$$

Dakle, ako znamo sve momente, znamo i karakterističnu funkciju. Ako u integralu u jednakosti 1.5 $x \in (-\infty, \infty)$ tada je karakteristična funkcija Fourierova transformacija od gustine slučajne promenljive $\varphi_X(x)$. Važi i obrnuto, gustina slučajne promenljive φ_X je inverzna Fourierova transformacija karakteristične funckije $C_X(u)$,

$$\varphi_X = \frac{1}{2\pi}\int C_X(u)e^{-iux}du. \tag{1.8}$$

Pošto gusina φ_X mora biti pozitivna, $C_X(u)$ mora biti pozitivno-definintna funckija, tj. $C_X(u)$ za svako $n \geq 1$ mora zadovoljavati nejednakost

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_X(u_k - u_j)a_k^* a_j \geq du, \tag{1.9}$$

gde su $u_1, ..., u_n$ proizvoljni realni brojevi, a $a_1, ..., a_n$ proizvoljni kompleksni brojevi. Može se pokazati da je svaka pozitivno definintna funkcija takva da je $C_x(0) = 1$, ustvari karakteristična funckija i da je njena Furijeova transformacija pozitivna.

Definicija 1.2.7. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoće i $B \in \mathcal{F}$ takav da je $P(B) > 0$. Tada je prostor uslovne verovatnoće dat sa $(\Omega_B, \mathcal{F}_B, P(\cdot|B))$, gde je $\Omega_B = \Omega \cap B = B$, $\mathcal{F}_B = \{A \cap B : A \in \mathcal{F}\}$ i $P(\cdot|B) : \mathcal{F}_B \to [0,1]$ skupovna funkcija, tzv. uslovna verovatnoća data sa*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Definicija 1.2.8. *Stohastički proces je familija slučajnih promeljivih $\{X(t), t \in T\}$ definisanih na istom prostoru verovatnoće. Skup T se naziva parametarski ili indeksni skup, koji može da bude konačan, prebrojiv ali i neprebrojiv.*

Na osnovu onog što smo dali u definiciji 4, možemo definisati σ-algebru generisanu sa stohastičkim procesom. Neka je $\mathcal{F}_t$ σ-algebra generisana sa familijom slučajnih promenljivih $\{X_s : s \leq t\}$. Kako $\mathcal{F}_t$ možemo razumeti kao informaciju o realziaciji slučajnih promenljivih $X_s, s \leq t$, prirodno je da važi

$$\mathcal{F}_{t_1} \subseteq \mathcal{F}_{t_2}, \quad t_1 \leq t_2.$$

Familiju $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ nazivamo prirodnom filtracijom procesa.

1.3 Uslovno matematičko očekivanje

U definiciji (1.2.7) smo definisali novu meru verovatnoće $P(\cdot|B)$ na prostoru verovatnoće $(\Omega_B, \mathcal{F}_B)$. Posmatrana verovatnosna mera nam govori kolika je verovatnoća događaja A ako znamo da se desio događaj B. U ovom delu rada razmatramo šta ćemo dobiti ako umesto skupa B uzmemo σ-algebru $\mathcal{G}$.

Neka je $\mathcal{G}$ σ-podalgebra od $\mathcal{F}$. Označimo sa $P_{\mathcal{G}}$ restrikciju mere P na $\mathcal{G}$. Posmatrajmo funkciju $\nu : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ datu sa

$$\nu(A) = \int_A X dP, \quad A \in \mathcal{G}.$$

Primećujemo da je ν naboj koji je apsolutno neprekidan u odnosu na $P_{\mathcal{G}}$, pa na osnovu teoreme Radon-Nikodyma postoji jednistvena (do na $P_{\mathcal{G}}$ mere nula) $\mathcal{G}$-merljiva slučajna promenljiva Y takva da je

$$\nu(A) = \int_A Y dP_{\mathcal{G}}, \quad A \in \mathcal{G},$$

koju nazivamo uslovnim matematičkim očekivanjem slučajne promenljive X u odnosu na σ-algebru $\mathcal{G}$ i označavamo sa $E(X|\mathcal{G})$. Pa na osnovu prethodno izloženog $E(X|\mathcal{G})$ ima sledeće osobine:

- $E(X|\mathcal{G})$ je $\mathcal{G}$-merljivo (podsetimo se, tada je $\{\omega \in \Omega : E(X|\mathcal{G})(\omega) \in B\} \in \mathcal{G}$, za svako $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$),
- važi
$$\int_A X dP = \int_A E(X|\mathcal{G}) dP_{\mathcal{G}}, \quad A \in \mathcal{G}, \tag{1.10}$$

$E(X|\mathcal{G})$ nam daje očekivanu vrednost slučajne promenljive X, u odnosu na to koji se od skupova A iz σ-podalgebre $\mathcal{G}$ desio, odnosno, u odnosu na informacije sadržane u $\mathcal{G}$. Jasno, dok X ne mora biti $\mathcal{G}$-merljvia, slučajna promenljiva $E(X|\mathcal{G})$, to uvek jeste.

Propozicija 7. *Uslovno matematičko očekivanje ima sledeće osobine:*

1. $E(E(X|\mathcal{G})) = E(X)$,
   Znači da bez obzira u odnosu na koju σ-podalgebru posmatrali X, očekivanje slučajne promenljive $E(X|\mathcal{G})$ će biti isto kao i očekivanje slučajne promenljive X;

2. *Ako je X merljiva u odnosu na $\mathcal{G}$, tada je $E(X|\mathcal{G}) = X$ s.s.,*
   Ako već poznajemo X u odnosu na σ-podalgebru $\mathcal{G}$, tada je najbolja ocena sama promenljiva X;

3. *Ako je $X \geq 0$, tada je i $E(X|\mathcal{G}) \geq 0$ s.s.,*

4. *Ako je $X = const$ s.s., tada je $X|\mathcal{G}) = const$ s.s.,*

5. *Ako je $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ trivijalna σ-algebra, tada je $E(X|\mathcal{G}) = E(X)$ s.s.,*
   Ako nemamo nikakve infomracije o slučajnoj promenljivoj X nad $\mathcal{G}$, tada je najbolja ocena baš $E(X)$;

6. *Ako je X nezavnisno od σ-algebre $\mathcal{G}$, tada je $E(X|\mathcal{G}) = E(X)$ s.s.,*
   Isto kao i prethodna osobina, ako nemamo nikakvih informacija o X, tada je najbolja ocena $E(X)$.

Sada navodimo teoreme koje nam govore o osoboinama slučajnih promenljivih.

Teorema 1.3.1. *Neka su X, Y slučajne promenljive na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ takve da su X i XY integrabilne. Ako je Y merljiva u odnosu na σ-algebru $\mathcal{G}$, tada je*

$$E(XY|\mathcal{G}) = YE(X|\mathcal{G}) \quad s.s. \tag{1.11}$$

Teorema 1.3.2. *Neka su $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{F}$ dve σ-podalgebre i X integrabilna slučajna promenljiva. Tada*

$$E(E(X|\mathcal{G}_2)\mathcal{G}_1) = E(E(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2) = E(X|\mathcal{G}_1) \quad s.s. \tag{1.12}$$

tj. operatori $E(\cdot|\mathcal{G}_1)$ i $E(\cdot|\mathcal{G}_2)$ komutiraju na $L^1(\Omega)$.

Teorema 1.3.3. *Neka su X i Y integrabilne slučajne promenljive takve da je i XY integrabilna, i neka su date σ-podalgebre $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{F}$. Ako je Y merljiva u odnosu na $\mathcal{G}_2$, tada je*

$$E(XY|\mathcal{G}_1) = E(YE(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) \quad s.s. \tag{1.13}$$

Posmatrajmo sada slučaj, kada je σ-podalgebra generisana sa slučajnom promenljivom, odnosno informacijama koje nam daje ta slučajna promenljiva na osnovu njenih realizacija.

Posmatrajmo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoće i $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Neka je $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna promenljiva. Na osnovu ranijeg $P_Y = P \circ Y^{-1}$ je raspodela verovatnoće slučajne promenljive Y i ona je verovatnosna mera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

Označimo sa $\sigma[Y]$ σ-algebru generisanu slučajnom promenljivom Y tj. $\sigma[Y] = Y^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Jasno, $\sigma[Y]$ je σ-podalgebra od σ-algebre $\mathcal{F}$. Stavimo da je $P_{\sigma[Y]}$ restrikcija mere P na σ-algebru $\sigma[Y]$. Tada je, takođe, $P_{\sigma[Y]} \circ Y^{-1} = P_Y$.

Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna promenljiva ($\mathcal{F}$-merljiva funkcija) koja je P-integrabilna. Tada je skupovna funkcija $\mu_X : \mathcal{G}_h \to \mathbb{R}$ data sa

$$\mu_X(A) = \int_A X dP_{\sigma[Y]}, \quad \text{za } A \in \sigma[Y]$$

konačna σ-aditivna funkcija. Neka je $\nu_X = \mu_X \circ Y^{-1}$, odnosno

$$\nu_X(B) = \int_{Y^{-1}(B)} X dP_{\sigma[Y]}, \quad \text{za } B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

Tada je funkcija $\nu_X : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ σ-aditivna na $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ i pri tome je apsolutno neprekidna u odnosu na P_Y. Pa prema teoremi Radon-Nikodyma sledi da postoji $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-merljiva P_Y-jedinstvena integrabilna funkcija $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je $\nu_X(B) = \int_B m dP_Y$ tj.

$$\int_B m dP_Y = \int_{Y^{-1}(B)} X dP_{\sigma[Y]}, \quad B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}. \tag{1.14}$$

Funkcija m se naziva uslovno očekivanje slučajne promenljive X u odnosu na σ-algebru $\sigma[Y]$ i označava se

$$m(y) = E(X|\sigma[Y])(y) = E(X|Y = y), \quad y \in \mathbb{R}. \tag{1.15}$$

Primetimo da važi

$$\int_B m dP_Y = \int_{Y^{-1}(B)} (m \circ Y) dP. \tag{1.16}$$

Pa na osnovu (1.14) i (1.16) imamo da je

$$\int_{Y^{-1}(B)} (m \circ Y) = \int_{Y^{-1}(B)} X dP_{\sigma[Y]} = \int_{Y^{-1}(B)} E(X|Y) dP, \tag{1.17}$$

pa konačno imamo da je $m \circ Y = E(X|Y) s.s.$.

Primetimo da za proizvoljan skup $B \in \mathcal{F}$, važi da je $P(B) = E(k_B)$, pa na osnovu toga definišemo uslovnu verovatnoću nad σ-algebrom.

Definicija 1.3.1. *Neka je $A \in \mathcal{F}$ i $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ i*

$$P(A|\mathcal{G}) = E(k_A|\mathcal{G}).$$

Tada se $P(\cdot|\mathcal{G})$ naziva uslovna verovatnoća na σ-algebri $\mathcal{F}$ u odnosu na σ-algebru $\mathcal{G}$.

Kako je uslovna verovatnoća data preko uslovnog očekivanja u odnosu na $\mathcal{G}$, imamo da je to slučajna promenljiva nad Ω koja je $\mathcal{G}$-merljiva.

Teorema 1.3.4. *Neka je $B \in \mathcal{F}$. Slučajna promenljiva $P(B|\mathcal{G})$ je uslovna verovatnoća ako i samo ako je $\mathcal{G}$-merljiva i za svako $A \in \mathcal{F}$ važi*

$$P(A \cap B) = \int\limits_A P(B|\mathcal{G}) dP_{\mathcal{G}}. \tag{1.18}$$

Definicija 1.3.2. *Preslikavanje $P(\cdot,\cdot) : \Omega \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ je regularna uslovna verovatnoća, ako zadovoljava sledeće uslove:*

1. *$P(\omega,\cdot) : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ je verovatnoća za s.s. $\omega \in \Omega$.*
2. *$P(\cdot, A) : \Omega \to \mathbb{R}$ je $\mathcal{G}$-merljiva funkcija takva da je $P(\cdot, A) = P(A|\mathcal{G})$ s.s. za sve $A \in \mathcal{F}$. ($P(\cdot, A)$ je jedna od verzija uslovne verovantoće).*

Teorema 1.3.5. *Neka je $P(\omega, A)$ regularna uslovna verovatnoća po σ-algebri $\mathcal{G}$ i neka je X integrabilna slučajna promenljiva. Tada važi*

$$E(X|\mathcal{G})(\omega) = \int\limits_\Omega X(\tilde{\omega}) P(\omega, d\tilde{\omega}). \tag{1.19}$$

Definicija 1.3.3. *Za proizvoljan događaj $A \in \mathcal{F}$ definišemo*

$$P(A|Y = y) = E(k_A|Y = y).$$

Prema teoremi Radon-Nikodyma prethodna definicija je ekvivalentna sa

$$P(A \cap Y^{-1}(B)) = \int\limits_B P(A|Y = y) dP_Y \tag{1.20}$$

1.4 Stohastički procesi

Kao što smo rekli u definiciji 1.2.8, stohastički proces je familija slučajnih promenljivh $\{X_t, t \in T\}$ definisanih na istom prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Vidimo da je je stohastički proces funkcija koja zavisi od dve promenljive, od ω i od t. Kada fiksiramo $t = t_0$ dobijamo slučajnu promenljivu $X_{t_0} = X_{t_0}(\omega)$, dok kada fiksiramo $\omega = \omega_0$ dobijamo realnu funkciju jedne realne promenljive $X_t(\omega_0)$ i nju nazivamo trajektorijom stohastičkog procesa. Jasno, kada fiksiramo obe promenljive, $t = t_0$ i $\omega = \omega_0$, dobijamo $X_{t_0}(\omega_0)$, realan broj.

Skup T može biti diskretan, na primer skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, ali i neprekidan skup, recimo $T = \mathbb{R}$. U slučaju kada je T diskretan beskonačan skup, $T = \{t_1, t_2, .., t_n, ..\}$, tada proces $X_{t_k}, k = 1, 2, ..$ nazivamo stohastičkim lancem. Ukoliko je T interval ili $T = \mathbb{R}$, tada X_t nazivamo stohastičkim procesom, a parametar t nam obično prestavlja vreme.

Definicija 1.4.1. *(Konačno-dimenzionalne raspodele)*
Konačno-dimensionalne raspodele stohastičkog procesa su raspodele n-dimenzionalne slučajne promenljive $(X(t_1), X(t_2), .., X(t_n))$ za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ i proizvoljna vremena $t_i \in T, i \in \{1, 2, .., k\}$

$$F_{X_{t_1}, X_{t_2}, .., X_{t_n}}(x_1, x_2, .., x_n) = P\{X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, .., X_{t_n} \leq x_n\}.$$

Osobine relanog slučajnog procesa u potpunosti su određene njegovim konačno-dimenzionalnim raspodelama.

Definicija 1.4.2. *Dva procesa $\{X_t, t \in T_1\}$ i $\{Y_t, t \in T_2\}$ su ista ako imaju iste konačno-dimenzionalne raspodele*

Brojne karakteristike slučajnih promenljivih imaju svoj analog za stohastičke procese, koji će nam takođe pružiti veoma korisne informacije i veze o njima.

Definicija 1.4.3. *(Numeričke karakteristike)*

1. *Funkciju $m_X : T \to \mathbb{R}$ definisanu sa*

$$m_X(t) = E(X_t),$$

nazivamo matematičkim očekivanjem stohastičkog procesa $\{X_t, t \in T_1\}$.

2. *Disperzija procesa je funkcija $D_X : T \to \mathbb{R}$ data sa*

$$D_X(t) = E((X_t - m_X(t))^2) = E(X_t^2) - m_X^2(T).$$

3. *Funkcija $R_X : T \times T \to \mathbb{R}$ definisanu sa*

$$R_X(t,s) = E(X_t X_s), s, t \in T,$$

nazivamo korelacionom funkcijom procesa $\{X_t, t \in T_1\}$.

4. *Kovarijansna funckija je funkcija $K_X : T \times T \to \mathbb{R}$ data sa*

$$\begin{aligned} K_X(t,s) &= E((X_T - m_X(T))(X_S - m_X(s))) \\ &= R_X(t,s) - m_X(t) m_X(s). \end{aligned}$$

5. *Koeficijent korelacije c_X procesa $\{X_t, t \in T_1\}$ je funkcija $c_X : T \times T \to \mathbb{R}$ data sa*

$$c_X(t,s) = \frac{K_X(t,s)}{\sqrt{D_X(t)}\sqrt{D_X(s)}}.$$

Definicija 1.4.4. *Neka je $\{X_t, t \in T_1\}$ stohastički proces. Ako su slučajne promenljive $X_{t_1}, X_{t_2}, .., X_{t_n}$ nezavisne za svako $n \in \mathbb{N}$ i svako $t_1, t_2, .., t_n \in T$, tada kažemo da je proces nezavisan, tada je još*

$$F_{X_{t_1}, X_{t_2}, .., X_{t_n}}(x_1, x_2, .., x_n) = F_{X_{t_1}}(x_1) F_{X_{t_2}}(x_2) \cdots F_{X_{t_n}}(x_n).$$

Što žnači da je ovakav stohastički proces u potpunosti određen sa konačno-dimenzionalnim raspodelama za $n = 1$.

Definicija 1.4.5. *Stohastički proces $\{X_t, t \in T_1\}$ je proces sa nezavisnim priraštajima ako za svaki izbor $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$ iz T važi da su*

$$X_0, X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}},$$

nezavisne slučajne promenljive.

Mnogi stohastički procesi koji pronalaze primenu u realnim sistemima imaju osobine koje su invarijantne u odnosu na translaciju vremena. Takvi procesi se nazivaju stacionarni i postoji posebna teorija koja se bavi ovakvim procesima. Posmatramo dva tipa procesa, oni čije su sve konačno-dimenzionalne raspodele invarijantne u odnosu na translaciju vremena i oni stohastički procesi gde su samo prva dva momenta invarijantna u odnosu na vremensku translaciju.

Definicija 1.4.6. *Stohastički proces je strogo stacionaran ako su sve njegove konačno-dimenzionalne raspodele invarijantne u odnosu na translaciju vremena. Odnosno, za svaki izbor $t_1, t_2, ..., t_n \in T$ i za svako $n \in \mathbb{N}$ slučajne promenljive $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ i $(X_{s+t_1}, X_{s+t_2}, ..., X_{s+t_n})$ imaju iste funkcije raspodele za svako s takvo da važi da je $s + t_i \in T$ za svako $i \in 1, 2, .., n$. Drugačije rečeno, imamo*

$$F_{X_{t_1},X_{t_2},..,X_{t_n}}(x_1, x_2, .., x_n) = F_{X_{s+t_1},X_{s+t_2},..,X_{s+tn}}(x_1, x_2, .., x_n).$$

Neka je $X_t \in L^1(\Omega, P)$. Na osnovu toga, i prethodne definicije imamo sledeću analizu.
Konačno-dimenzionalne raspodele kada je $n = 1$ su iste za svako $t \in T$, pa važi da je

$$F_1(x) := F_{X_t}(x) = F_{X_{s+t}}(x).$$

Pa samim tim važi i $E(X_t) = E(X_{s+t})$, odnosno, $m_X(t) = m$ je konstantna funkcija. Takođe, i za $n = 2$ imamo da je

$$F_{X_t,X_s}(x_1, x_2) = F_{X_{t-s},X_0}(x_1, x_2).$$

odnosno imamo da je

$$E((X_{t_1+s} - m)(X_{t_2+s} - m)) = E((X_{t_1} - m)(X_{t_2} - m))$$

što implicira da i kovarijansna funkcija zavisi od razlike dva argumenta s i t tj.

$$K_X(t, s) = K(t - s).$$

Pa nas ovo motiviše za sledeću definiciju.

Definicija 1.4.7. *Stohastički proces $X_t \in L^2(\Omega, P)$ je slabo stacionaran ako je $E(X_t)$ konstanta, a kovarijansna funkcija zavisi samo od razlike $(t - s)$, tj.*

$$M_X(t) = E(X_t) = \mu, \quad K_X(t, s) = E((X_t - \mu)(X_s - \mu)) = K(t - s).$$

Bez umanjena opštosti, možemo uzeti da je $\mu = 0$, jer ako je $E(X_t) = \mu$ tada je za proces $Y_t = X_t - \mu$, $E(Y_t) = 0$. Proces čije je očekivanje $E(X_t) =$ nazivamo centriranim procesom. Funkciju $K(t)$, kao što smo rekli nazivamo kovarijansnom (autokovarijansnom) funkcijom od X_t. Primetimo da je $K(t) = E(X_t X_0)$, gde je $K(0) = E(X_t^2)$, što je konačno zbog pretpostavke. Pošto posmatramo realni slučajni proces imamo da važi da je $K(t) = K(-t), t \in \mathbb{R}$.

Napomenimo da je strogo stacionaran proces sa konačnim drugim momentom takođe i slabo stacionaran proces, a da obrnuto ne važi.

Neprekidnost kovarijansne funkcije $K(t)$ je u direktnoj vezi sa neprekidnosti od X_t u L^2 smislu, odnosno

$$\lim_{h \to 0} E(|X_{t+h} - X_t|^2) = 0.$$

Teorema 1.4.1. *Pretpostavimo da je kovarijansna funkcija $K(t)$ od slabo stacionarnog stohastičkog procesa neprekidna u $t = 0$. Tada je ona neprekidna za svako $t \in \mathbb{R}$. Šta više, neprekidnost od $K(t)$ je ekvivalentna sa neprekidnosti procesa X_t u L^2 smislu.*

Dokaz. Neka je $t \in \mathbb{R}$, i bez umanjena opštosti $E(X_t) = 0$.

$$\begin{aligned}
|K(t+h) - K(t)|^2 &= |E(X_{t+h}X_0) - E(X_tX_0)|^2 = |E((X_{t+h} - X_t)X_0)|^2 \\
&\leq E(X_0^2)E((X_{t+h} - X_t)^2) \quad \text{(na osnovu Koši-Švarcove jednakosti)} \\
&= K(0)(E(X_{t+h}^2) + E(X_t^2) - 2E(X_tX_{t+h})) \\
&= 2K(0)(K(0) - K(h)) \to 0,
\end{aligned}$$

kada $h \to 0$. Dakle, neprekidnost u $t = 0$ implicira neprekidnost za svako t.

Pretpostavimo sada da je $K(t)$ neprekidna funkcija. Iz prethodne analize imamo da je

$$E(|X_{t+h} - X_t|^2) = 2(K(0) - K(h)),$$

što konvergira u nulu kada $h \to 0$. Obratno, ako je X_t L^2-neprekidna. Tada na osnovu gornje jednakosti imamo da je i $\lim_{h \to 0} K(h) = K(0)$. □

Fourierova transformacija kovarijansne funkcije slabo stacionarnog procesa uvek postoji. Ovo nam omogućava da posmatramo ove procese pomoću alata koje nam daje Fourierova transformacija. Da bismo napravili vezu između kovarijansne funkcije i Fourierove transformacije, koristićemo Bohnerovu teoremu, koja važi za sve nenegativne funkcije.

Definicija 1.4.8. *Funkcija $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je nenegativno definintna ako je*

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(t_i - t_j)c_i\bar{c_j} \geq 0,$$

Za sve $n \in \mathbb{N}, t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbb{R}, c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{C}$.

Lema 1.4.1. *Kovarijansna funkcija slabo stacionarnog procesa je nenegativno definintna funkcija.*

Teorema 1.4.2. *(Bohnerova teorema)*
Neka je $K(t)$ neprekidna pozivitivno definintna funkcija. Tada postoji jedinstvena mera ρ na $\mathbb{R}$ tavka da je $\rho(\mathbb{R}) = K(0)$ i

$$K(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t}\rho(d\omega), \quad \textit{za svako } t \in \mathbb{R}.$$

Neka je X_t slabo stacionaran stohastički proces sa autokovarijansnom funkcijom $K(t)$ čija je Fourierova transformacija mera $\rho(d\omega)$. Mera $\rho(d\omega)$ se naziva spektralna mera procesa X_t. Pretpostavićemo da je spektralna mera apsolutno neprekinda u odnosu na Lebesgueovu meru na $\mathbb{R}$ pa postoji funkcija $S(\omega)$ takva da je $\rho(d\omega) = S(\omega)d\omega$. Fourierova transfomacija $S(\omega)$ kovarijansne funckije se naziva spektralna gustina procesa i imamo

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\omega}K(t)dt.$$

Dakle, autokovarijansna funkcija od slabog stacionarnog procesa sa očekivanjem 0 je data sa inverznom Furijeovom trnasmoracijom od spektralne gustine

$$K(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega}S(\omega)d\omega.$$

Autokovarijansna funkcija od slabog stacionarnog procesa nam omogućava da pridružimo vremensku skalu procesu X_t, kolacijsko vreme τ_{cor} izracunavamo sa:

$$\tau_{cor} = \frac{1}{K(0)}\int_0^{\infty} K(\tau)d\tau = \frac{1}{E(X_0^2)}\int_0^{\infty} E(X_\tau X_0)d\tau.$$

Što je slabije opadanje kovarijansne funkcije, to je veće korelacijsko vreme. Primetimo, da ako korelacijska funckija ne opada dovoljno brzo, tako da $K(t)$ nije integrabilno, tada je korelacijsko vreme beskonačno.

Slabo stacionarni procesi imaju lepe ergodične osobine, posebno to da korelacija izmedju vrednosi procesa u različitim vremenima opada veoma brzo. U ovom slučaju, moguće je da pokažemo da očekivanje možemo izračunati na osnovu vremenskog proseka.

Lema 1.4.2. *Neka je $K(t)$ integrabilna simetrična funkcija. Tada,*

$$\int_0^T\int_0^T K(t-s)dtds = 2\int_0^T (T-s)K(s)ds.$$

Dokaz. Uvodimo smenu $u = t-s, v = t+s$, pa umesto $[0,T]\times[0,T]$ posta je $[-T,T]\times[|u|, 2T-|u|]$. Jakobijan ove smene je

$$J = \frac{1}{2}.$$

Pa integral postaje

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_0^T K(t-s)dtds &= \int_{-T}^{T}\int_{|u|} 2T-|u|K(u)\frac{1}{2}dvdu \\
&= \int_{-T}^{T}(T-|u|)K(u)du \\
&= 2\int_0^T (T-u)K(u)du.
\end{aligned}$$

Što je i trebalo pokazati. $\square$

Propozicija 8. *Neka je $\{X_t, t \in T\}$ slabo stacionarni stohastički proces sa očekivanjem μ i kovarijansom $K(t)$. Ako pretpostavimo da je $K(t) \in L^1(0,\infty)$ tada je*

$$\lim_{T\to\infty} E(|\frac{1}{T}\int_0^T X_s ds - \mu|^2) = 0.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
E(|\frac{1}{T}\int_0^T X_s ds - \mu|^2) =& \frac{1}{T^2}E(|\int_0^T (X_s-\mu)ds|^2) \\
=& \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T (X_t-\mu)(X_s-\mu)dtds \\
=& \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T K(t-s)dtds \\
=& \frac{2}{T^2}\int_0^T (T-u)K(u)du \\
\leq& \frac{2}{T}\int_0^T |(1-\frac{u}{T})K(u)|du \\
\leq& \frac{2}{T}\int_0^\infty K(u)du \to 0,
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Koristeći teoremu dominantne konvergenicje i pretpostavke da je $K(t) \in L^1(0,\infty)$. $\square$

Pretpostavimo da je $\mu = 0$, i neka je

$$D = \int_0^\infty K(t)dt,$$

što je po našoj pretpostavci konačna vrednost. A na osnovu prethodne analize za $t \gg 1$, imamo

$$E((\int_0^t X_t dt)^2) \approx 2Dt.$$

Ovo implicira da za dovoljno veliko vreme, $E((\int_0^t X_t dt)^2)$ se ponaša linearno u odnosu na vreme t sa koeficijentom proporcionalnosti $2D$.

1.5 Linearni operatori

Posmatrajmo, za početak, funkcije $f(x)$ definisane na $x \in [0, 1]$, za koje je $f(0) = f(1) = 0$ i takve da $f(x) \in \mathbb{R}$, označimo ovaj skup sa $\mathcal{I}$. Očito, prostor $\mathcal{I}$ je vektorski jer važi da za $f, g \in \mathcal{I}$ je $f + g \in \mathcal{I}$, kao i za $f \in \mathcal{I}$ i $a \in \mathbb{R}$ imamo da je $af \in \mathcal{I}$. Definišemo unutrašnji proizvod na ovom skupu sa

$$< f, g >= \int_0^1 \overline{f(x)} g(x)dx. \tag{1.22}$$

Pošto radimo sa funkcijama iz $\mathbb{R}$ možemo posmatrati i $< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Lako se pokazuje da 1.22 zadovoljava osobine unutrasnjeg proizvoda: $< f, g >= \overline{< g, f >}$, $< f, \alpha g + \beta h >= \alpha < f, g > +\beta < f, h >$, $< f, f >= \|f\|^2 > 0$ za $f \neq 0$.

Kvadratna matrica A u linearnoj operaciji $y = Ax$, daje vektoru x novi vektor y u istom prostoru $\mathbb{C}$. Analogon ovoga, kod funckija, je neka operacija $Af(x)$, takva da funckiji $f(x)$ daje novu funkciju $g(x)$, gde ćemo zahtevati da operacija bude linearna tj. da važi $A[\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)] = \alpha A f_1(x) + \beta A f_2(x)$ za sve funckije f i g i sve konstante α i β.

Najjednostavniji primer linearne operacije na funkcijama je $Af(x) = af(x)$, gde je a konstanta. Dakle, ovo je očito linearna operacija i pri tome funkciji f dodeljuje novu funkciju $af(x)$.

Još jedan primer, koji je svakako zanimljiviji, jeste ako A uključuje diferenciranje. Na primer, $Af(x) = \frac{df}{dx} = f'(x)$ jeste linearna operacija, i funkciji f dodeljuje novu funkciju f'. Bilo kakva linearna kombinacija diferencijala će takođe dati linearni operator, i upravo ovakvi operatori će nas zanimati u daljoj diskusiji.

Pridružena matrica A^H nije ništa drugo nego konjugovana i transponovana matrica A. Međutim, ovakva definicija nema misla za operatore na funkcijama, jer kako bismo mogli da transponujemo $\frac{d}{dx}$. Pridruženi operator A^H je linearni operator takav da za sve $f(x)$ i $g(x)$ iz $\mathcal{I}$ važi

$$< f, Ag >=< A^H f, g > \tag{1.23}$$

Dakle, pridruženi operator dobijamo iz A tako što uradimo sve što može da se uradi tako da ga prebacimo na drugu stranu u unutrašnjem proizvodu. Nađimo pridruženi operator od $\frac{d}{dx}$.

$$\begin{aligned} < f, \frac{d}{dx} g > &= \int_0^1 f(x) g'(x) dx = f(x)g(x)|_0^1 - \int_0^1 f'(x)g(x)dx \\ &= -\int_0^1 f'(x)g(x)dx =< -\frac{d}{dx} f, g > \end{aligned} \tag{1.24}$$

Dakle imamo da je

$$(\frac{d}{dx})^H = -\frac{d}{dx} \tag{1.25}$$

Pre nego što nastavimo dalje, moramo naglasiti da 1.25 važi samo za ovaj unutrašnji proizvod i za ovaj skup funkcija. Odnosno, pridruženi operator zavisi od unutrašnjeg proizvoda i od skupa funkcija koji posmatramo.

Sada kada smo definisali pridruženi operator, možemo definisati i Hermitski operator na skupu funkcija.

Definicija 1.5.1. *A je Hermitski operator ako je $A = A^H$.*

Primećujemo da prvi izvod nije Hermitski operator, za njega kažemo da je antihermitski. Posmatrajmo sada drugi izvod.

$$\begin{aligned} < f, \frac{d^2}{dx^2} g > &= \int_0^1 f(x) g''(x) dx = f(x)g'(x)|_0^1 - \int_0^1 f'(x)g'(x)dx \\ &= -\int_0^1 f'(x)g'(x)dx = -f'(x)g(x)|_0^1 + \int_0^1 f''(x)g(x)dx \\ &= \int_0^1 f''(x)g(x)dx =< \frac{d^2}{dx^2} f, g > \end{aligned} \tag{1.26}$$

Dakle, drugi izvod zaista jeste Hermitski operator.

Hoćemo da nađemo sve funckije i konstante takve da zadovoljavaju

$$Af(x) = \lambda f(x), \tag{1.27}$$

takve da i dalje važi granični uslov $f(0) = f(1) = 0$. Funkcije $f(x)$ nazivamo karakterističnim funckijama, a konstante λ karakterističnim korenima. Primetimo, da su karakteristične vrednosti $\lambda \in \mathbb{R}$ jer važi

$$\begin{aligned} < f_n, Af_n > &=< fn, \lambda_n f_n >= \lambda < f_n, f_n >= \lambda_n \|f_n\|^2 \\ &=< A^H f_n, f_n >=< Af_n, f_n >=< \lambda_n f_n, f_n >= \overline{\lambda_n}\|f_n\|^2, \end{aligned} \tag{1.28}$$

odnosno, $\lambda_n = \overline{\lambda_n}$ odakle imamo da je $\lambda \in \mathbb{R}$.

Posmatrajmo sada, diferencijalnu jednačinu oblika $\frac{dx}{dt} = Ax$ sa početnim uslovom $x(0)$. Tada smo rešenje tražili u obliku $x(t) = e^{At}x(0)$. Isti princip možemo koristiti i za funckiju dve promenljive tj. za

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = Af(x,t), \tag{1.29}$$

gde imamo početni uslov $f(x, 0)$. Tada je rešenje,kao i gore, tražimo u obliku

$$f(x,t) = e^{At} f(x,0) \tag{1.30}$$

Sada se postavlja pitanje, šta je e na diferencijalni operator? Međutim, za karakteristične funckije to će upravo biti karakteristična vrednost, tj. imaćemo

$$e^{At} f_n(x) = e^{-\lambda_n t} f_n(x). \tag{1.31}$$

Više o rešavanju diferencijalnih jednačina preko linearnih operatora će biti upravo u poglavlju gde ćemo se baviti rešavanjem Fokker-Planckove jednačine.

Glava 2

Fokker-Planckova jednačina

U ovom poglavlju posmatraćemo procese za koje se može dobiti Fokker-Planckova jednačina. Prvo ćemo izvesti Kramers-Moyalov razvoj, iz kog dobijamo našu jednačinu kao specijalni slučaj. Na kraju ovog poglavlja posmatraćemo rešenje jednačine. Literatura koju smo koristili za ovo poglavlje je [2], [3], [4], [7].

2.1 Lanci Markova

Proces Markova je stohastički proces koji „ne pamti" gde je bio u prošlosti, tj. samo trenutni položaj može uticati na budućnost. Najjednostavniji primer procesa Markova je slučajni hod u jednoj dimenziji.

Neka su $\xi_i, i = 1, 2, ..,$ nezavisne podjednako raspodeljene slučajne promenljive sa očekivanjem $E(\xi_i) = 0$ i disperzijom $\sigma^2(\xi_i) = 1$ za $i = 1, 2, ..,$ tada jednodimenzioni slučajni hod definišemo sa

$$X_N = \sum_{n=1}^{N} \xi_n, \quad X_0 = 0. \tag{2.1}$$

Primetimo, da ako je $i_1, i_2, ..,$ niz nenegativnih celih brojeva tada $\forall n, m \in \mathbb{Z}$ važi

$$P\{X_{n+m} = i_{n+m} | X_1 = i_1, X_2 = i_2, .., X_n = i_n\} = P\{X_{n+m} = i_{n+m} | X_n = i_n\}. \tag{2.2}$$

Odnosno, verovatnoća da X_N u trenutku $n + m$ bude u i_{n+m} zavisi samo od položaja u trenutnom vremenu n, a ne od toga gde je X_N bio pre vremena n.

Definicija 2.1.1. *Stohastički proces $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ sa skupom stanja $\mathbb{Z}$ nazivamo lanac Markova ako važi 2.2*

Posebno interesantni procesi Markova su oni za koje su verovatnoće prelaska iz jednog stanja u drugo ne zavise od početnog vremena n, nego zavise samo od razlike argumenata $(n+m)-n = m$, o čemu govori sledeća definicija.

Definicija 2.1.2. *Lanac Markova je homogen ako važi*

$$P\{X_{n+1} = j|X_n = i\} = P\{X_1 = j|X_0 = i\} =: p_{ij}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Napomenimo, da iako su uslov slabe stacionarnosi i uslov homogenosti slični, može se pokazati da je uslov slabe stacionarnosti slabiji, što znači da stacionaran proces Markova jeste homogen, a da obrnuto ne mora da važi.

Matricu $P = \{p_{ij}\}$ nazivamo matricom tranzicije, čiji su svi elementi nenegativni i pri tom je $\sum_j p_{ij} = 1$.

Takođe, ako definišemo matricu tranzicije za n koraka sa $P_n = \{p_{ij}(n)\}$, gde je $p_{ij}(n) = P\{X_{n+m} = j|X_m = i\}$, možemo primetiti da važi

$$p_{ij}(n+m) = \sum_k p_{ik}(m)p_{kj}(n). \tag{2.4}$$

Odnosno, važi da je $P^n = P_n$. Jednačina 2.12 se naziva jednačina Chapman-Kolmogorova.

Neka je $\mu_i^n := P\{X_n = i\}$ verovatnoća da će X_n uzeti vrednost i, tada vrednosti vektora μ^n možemo izračunati iz jednakosti

$$\mu^n = \mu^0 P^n \tag{2.5}$$

Što znači da ako želimo da izračunamo verovatnoće stanja u vremenu n dovoljno je da znamo početni zakon raspodele μ^0 i matricu tranzicije P.

Možemo posmatrati procese za koje je $t \in \mathbb{R}_+$, a da pri tome zadovoljavaju osobinu analognu osobini 2.2, o čemu govori sledeća definicija.

Definicija 2.1.3. *Stohastički proces $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ sa skupom stanja $\mathbb{Z}$ nazivamo proces Markova sa diskretnim skupom stanja ako važi*

$$P\{X_{t+h} = i_{t+h}|\{X_s, x \leq t\}\} = P\{X_{t+h} = i_{t+h}|X_t\} \tag{2.6}$$

$\forall h \geq 0$, gde je $\{X_s, x \leq t\}$ skup svih prethodnih stanja procesa sve do trenutka t.

Nije teško pokazati da i ovakvi procesi imaju lepe osobine kao i u slučaju lanca Markova. Međutim, te osobine nećemo navoditi nego ćemo se posvetiti slučaju kada ni indeksni skup, ni skup stanja nisu diskretni skupovi, o čemu govorimo u nastavku.

2.2 Procesi Markova

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor verovatnoće. Posmatramo stohastički proces $X_t = X_t(\omega)$ takav da je $t \in \mathbb{R}_+$, a prostor stanja dat sa $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$. Neka je $\sigma(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ sigma algebra generisana sa $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$, tj. najmanja sigma algebra takva da je X_t merljivo preslikavanje u odnosu na tu σ-algebru.

Definisaćemo i filtracije na $(\Omega, \mathcal{F})$ kao neopadajuću familiju σ-podalgebri od $\mathcal{F}$ tako da je

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, \quad s \leq t$$

Uzimamo da je $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{t \in T} \mathcal{F}_t)$. Filtraciju generisanu sa stohastičkim procesom X_t definišemo sa

$$\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_t, s \leq t). \tag{2.7}$$

Definicija 2.2.1. *Neka je X_t stohastički proces definisan na $(\Omega, (F), \mu)$ i sa prostorom stanja u $\mathbb{R}$. Neka je $\mathcal{F}_t^X$ filtracija definisana generisana sa $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$. Tada je $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ proces Markova ako je*

$$P\{X_t \in \Gamma | \mathcal{F}_s^X\} = P\{X_t \in \Gamma | X_s\} \tag{2.8}$$

$\forall t, s \in T$ tako da je $s \leq t$ i $\Gamma \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$.

Primetimo da je filtracija $\mathcal{F}_t^X$ generisana sa događajima oblika $\{\omega | X_{t_1} \in \Gamma_1, X_{t_2} \in \Gamma_2, .., X_{t_n} \in \Gamma_n\}$ gde je $0 \leq t_1 < t_2 < .. < t_n \leq t$ i $\Gamma_i \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$, pa je samim tim definicija procesa Markova ekivalentna sa

$$P\{X_t \in \Gamma | X_{t_1}, X_{t_2}, .., X_{t_n}\} = P\{X_t \in \Gamma | X_{t_n}\}, \tag{2.9}$$

za $n \geq 1$, $0 \leq t_1 < t_2 < .. < t_n \leq t$ i $\Gamma \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$.

Za proces Markova možemo definisati funkciju tranzicije (slučajna promenljiva)

$$P(\Gamma, t | X_s, s) := P\{X_t \in \Gamma | \mathcal{F}_s^X\}, \tag{2.10}$$

$\forall t, s \in \mathbb{R}_+$ takvi da je $t \geq s$ i $\Gamma \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$. To je funkcija četiri argumenta: početnog vremena s i početne pozicije X_s, kao i finalnog vremena t i finalne "pozicije", skupa Γ. Funkcija $P(\Gamma, t | X_s, s)$ jeste regularna uslovna verovatnoća koja zadovoljava jednačinu Chapman-Kolmogorova.

Ako pretpostavimo da je $X_s = x$, kako je $P\{X_t \in \Gamma | \mathcal{F}_s^X\} = P\{X_t \in \Gamma | X_s\}$, možemo pisati

$$P(\Gamma, t | x, s) = P\{X_t \in \Gamma | X_s = x\} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
P(\Gamma, t|x, s) &= P\{X_t \in \Gamma | X_s = x\} = P\{X_t \in \Gamma | \mathcal{F}_s^X\}(x) \\
&= E(I_\Gamma(X_t)|\mathcal{F}_s^X)(x) = E(E(I_\Gamma(X_t)|\mathcal{F}_s^X)|\mathcal{F}_u^X)(x) \\
&= E(E(I_\Gamma(X_t)|\mathcal{F}_u^X)|\mathcal{F}_s^X)(x) = E(P(X_t \in \Gamma | X_u)|\mathcal{F}_s^X)(x) \\
&= E(P(X_t \in \Gamma | X_u = y)|X_s = x) \qquad (2.12) \\
&= \int_{\mathbb{R}} P(\Gamma, t | X_u = y) P(dy, u | X_s = x) \\
&=: \int_{\mathbb{R}} P(\Gamma, t|y, u) P(dy, u|x, s),
\end{aligned}$$

gde I_Γ označava karakterističnu funkciju skupa Γ. Drugim rečima Chapman-Kolmogorova jednačina kaže da, tranzicija od x u vremenu s do Γ u vremenu t se može izvršiti kroz dva koraka: prvi, sistem se pomeri od x do y u nekom medjuvremenu u. Onda se pomeri od y do Γ do vremena t. Da bismo odredili verovatnoću za tranziciju od x u s do Γ u t, moramo sabrati sve tranzicije za sva medjustanja y.

Kao i kod diskretnog procesa Markova, raspodela verovatnoća od X_0 i funkcija tranzicije su dovoljni da se proces Markova opiše jedinstveno, tj. konačno-dimenzionalne raspodele su jednistveno određene iz početne raspodele verovatnoća i funkcijama tranzicije, odnosno,

$$P\{X_0 \in dx_0, X_{t_1} \in dx_1, .., X_{t_n} \in dx_n) = \nu(dx_0) \prod_{j=1}^{n} P(dx_j, t_j | x_{j-1}, t_{j-1}). \qquad (2.13)$$

Zapravo, proces X_t je proces Markova u odnosu na filtraciju $\mathcal{F}_t^X$ definisanu sa 2.7 sa funckijom tranzicije $P(\cdot, t|\cdot, s)$ i sa početnom raspodelom verovatnoća ν ($X_0 \sim \nu$) ako i samo ako za sve $0 = t_0 < t_1 < .. < t_n$ i za sve ograničene merljive funkcije $f_j, j = 1, 2, .., n$ imamo da važi

$$E(\prod_{j=0}^{n} f_j(X_{t_j})) = \int_{\mathbb{R}} f_0(x_0)\nu(dx_0) \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} f_j(x_j) P(dx_j, t_j | x_{j-1}, t_{j-1}). \qquad (2.14)$$

Posmatraćemo procese za koje gustina uslovne verovatnoće postoji, odnosno da je $P(\cdot, t|x, s) \ll dm$, što će značiti da postoji Radon-Nikodymov izvod.

$$P(\Gamma, t|x, s) = \int_\Gamma p(y, t|x, s) dy. \qquad (2.15)$$

$p(y, t|x, s)$ je takođe funkcija četiri argumenta: početne pozicije i vremena x, s, i finalnog vremena i pozicije y, t. Primetimo, da za $t = s$ imamo da je

$P(\Gamma, s|x, s) = I_\Gamma(x)$, pa Chapman-Kolmogorova jednačina postaje

$$\int_\Gamma p(y,t|x,s)dy = \int_{\mathbb{R}}\int_\Gamma p(y,t|z,u)p(z,u|x,s)dzdy. \tag{2.16}$$

Kako je $\Gamma \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ proizvoljan skup imamo da je Chapman-Kolmogorova jednačina za tranzicionu gustinu verovatnoće

$$p(y,t|x,s) = \int_{\mathbb{R}} p(y,t|z,u)p(z,u|x,s)dz. \tag{2.17}$$

Ako početna raspodela ν ima gustinu ρ možemo zapisati

$$p(x_0,t_0,...,x_n,t_n) = \rho(x_0)\prod_{j=1}^{n} p(x_j,t_j|x_{j-1},t_{j-1}).$$

Kao i u slučaju kada imamo diskretni skup stanja procesa Markova tako i sada kada je skup stanja neprekidan, posebno zanimljivi procesi su kada je proces vremenski homogen, odnosno kada $P(\cdot,t|\cdot,s)$ zavisi samo od razlike $t-s$ izmedju početnog i krajnjeg stanja.

$$P(\Gamma,t|x,s) = P(\Gamma,t-s|x,0) =: P(t-s,x,\Gamma), \tag{2.18}$$

$\forall\Gamma \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ i $x \in \mathbb{R}$. Za homogene procese Markova, možemo fiksirati početno vreme $s = 0$. Chapman-Kolmogorova jednačina tada postaje

$$P(t+s,x,\Gamma) = \int_{\mathbb{R}} P(t,z,\Gamma)P(s,x,dz) \tag{2.19}$$

Ako imamo početnu raspodelu ν i funkciju tranzicije $P(x,t,\Gamma)$ procesa Markova X_t, možemo izračunati verovatnoću da X_t bude u skupu Γ u vremenu t.

$$P\{X_t \in \Gamma\} = \int_{\mathbb{R}} P(x,t,\Gamma)\nu(dx). \tag{2.20}$$

Jer je $P(X_0,t,\Gamma)$ $\sigma[X_0]$- merljiva funkcija, i njeno očekivanje nam daje $P\{X_t \in \Gamma\}$. Odnosno, samim tim možemo izdračunati očekivanu vrednost koristeći formulu

$$E(f(X_t)) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x)P(x_0,t,dx)\nu(dx_0). \tag{2.21}$$

Pretpostavimo opet da za X_t gustina verovatnoće postoji, tj. $P(t,x,\Gamma) = \int_\Gamma p(t,x,y)dy$. Chapman-Kolmogorova jednačina za tranziciju gustine je

$$p(t+s,x,y) = \int_{\mathbb{R}} p(s,x,z)p(t,z,y)dz. \tag{2.22}$$

2.3 Kramers-Moyalov razvoj unapred

Na osnovu prethodno napisanog i jednačine Chapman-Kolmogorova možemo zaključiti da gustinu $p(x, t+\tau)$ u trenutku $t+\tau$ možemo zapisati preko gustine $p(x, t)$ u trenutku t i preko tranzicione gustine verovatnoće.

$$p(x, t+\tau) = \int P(x, t+\tau | x', t) p(x', t) dx'. \tag{2.23}$$

Da bimo mogli da izračunamo $\partial p(x,t)/\partial t$, moramo znati tranzicionu gustinu verovatnoće $p(x, t+\tau|x', t)$ za malo τ. Pretpostavićemo da znamo sve momente M_n za $n \geq 1$,

$$M_n(x', t, \tau) = E((X_{t+\tau} - X_t)^n | X_t = x') = \int (x-x')^n p(x, t+\tau|x', t) dx. \tag{2.24}$$

Kada znamo sve momente, možemo konstruisati karakterističnu funckiju

$$\begin{aligned} C(u, x', t, \tau) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iu(x-x')} p(x, t+\tau|x', t) dx \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (iu)^n \frac{M_n(x', t, \tau)}{n!}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Kako je karakteristična funkcija Fourierova transformacija gustine i obrnuto, možemo izraziti i gustinu tranzicije preko momenata M_n.

$$\begin{aligned} p(x, t+\tau|x', t) &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u(x-x')} C(u, x', t, \tau) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u(x-x')} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (iu)^n \frac{M_n(x', t, \tau)}{n!} \right) du. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Kako je

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (iu)^n e^{-u(x-x')} = (-\frac{\partial}{\partial_x})^n \delta(x-x'), \tag{2.27}$$

i

$$\delta(x-x') f(x') = \delta(x-x') f(x), \tag{2.28}$$

imamo da je

$$p(x, t+\tau|x', t) = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\frac{\partial}{\partial_x})^n M_n(x, t, \tau) \right) \delta(x-x'). \tag{2.29}$$

Jednačina 2.29 se može izvesti i bez korišćenja karakteristične funckije. Primetimo da važi

$$p(x,t+\tau|x',t) = \int \delta(y-x)p(y,t+\tau|x',t)dy. \tag{2.30}$$

Iz Taylorovog razvoja δ funckije imamo

$$\begin{aligned}\delta(y-x) &= \delta(x'-x+y-x') \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y-x')^n}{n!}(\frac{\partial}{\partial_{x'}})^n \delta(x'-x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y-x')^n}{n!}(\frac{\partial}{\partial_{x'}})^n \delta(x-x'),\end{aligned} \tag{2.31}$$

iz čega dobijamo

$$\begin{aligned}p(x,t+\tau|x',t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-\frac{\partial}{\partial_x})^n \int (y-x')^n p(y,t+\tau|x',t)dy\delta(x-x') \\ &= \left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(-\frac{\partial}{\partial_x})^n M_n(x',t,\tau)\right)\delta(x'-x) \\ &= \left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(-\frac{\partial}{\partial_x})^n M_n(x,t,\tau)\right)\delta(x-x')\end{aligned} \tag{2.32}$$

Ako ubacimo 2.29 ili 2.32 u 2.23 dobijamo

$$\begin{aligned}p(x,t+\tau)-p(x,t) &= \frac{\partial p(x,t)}{\partial_t}\tau + O(\tau^2) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{\partial}{\partial_x})^n \int \delta(x-x')M_n(x,t,\tau)\frac{p(x',t)}{n!}dx' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{\partial}{\partial_x})^n \frac{M_n(x,t,\tau)}{n!}p(x,t).\end{aligned} \tag{2.33}$$

Pretpostavićemo da se momenti M_n mogu razviti u Taylorov red u odnosu na τ, tada je

$$\frac{M_n(x,t,\tau)}{n!} = \frac{M_n(x,t,0)}{n!} + \frac{M_n'(x,t,0)}{n!}\tau + o(\tau^2). \tag{2.34}$$

Izraz $\frac{M_n(x,t,0)}{n!}$ mora biti jednak nuli, jer za $\tau = 0$ gustina tranzicije p ima početnu vrednost $p(x,t|x',t) = \delta(x-x')$. Ubacivanjem jednačine 2.34 u 2.32 vidimo da je stvarno tako. Uvođenjem oznake

$$D^{(n)}(x,t) := \frac{M_n'(x,t,0)}{n!}, \tag{2.35}$$

jednačina 2.34 postaje

$$\frac{M_n(x,t,\tau)}{n!} = D^{(n)}(x,t)\tau + o(\tau^2). \tag{2.36}$$

Ubacivanjem jednačine 2.36 u 2.33 dobijamo Kramers-Moyalov razvoj,

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{\partial}{\partial x})^n D^{(n)}(x,t)p(x,t) = L_{KM}p, \tag{2.37}$$

gde izvod deluje i na $D^{(n)}(x,t)$ i na $p(x,t)$. Kramers-Moyalov operator L_{KM} je definisan sa

$$L_{KM}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{\partial}{\partial x})^n D^{(n)}(x,t) \tag{2.38}$$

Ako stavimo da je početni uslov $p(x,t') = \delta(x-x')$, rešenje date jednačine će biti tranziciona gustina verovatnoće $p(x,t|x',t')$ tj. imamo

$$\frac{\partial p(x,t|x',t')}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{\partial}{\partial x})^n D^{(n)}(x,t)p(x,t|x',t'). \tag{2.39}$$

Formalno rešenje prethodne jednačine za $L_{KM}(x,t) = L_{KM}(x)$, tj. za vremenski nezavisan Kramers-Moyalov operator, dato je sa

$$p(x,t|x',t') = e^{L_{KM}(x)(t-t')}\delta(x-x'). \tag{2.40}$$

2.4 Kramers-Moyalov razvoj unazad

U prethodnom poglavlju posmatrali smo gustinu tranzicije $p(x,t|x',t')$, koju smo diferencirali u odnosu na x i t, tj. u odnosu na poziciju i vreme u budućnosti. U ovom poglavlju diferenciraćemo u odnosu na x' i t' i pokazaćemo da se rešenja koja se dobijaju ista.

Ponovo, krećemo od Chapman-Kolmogorove jednačine,

$$p(x,t|x',t') = \int p(x,t|x'',t'+\tau)p(x'',t'+\tau|x',t')dx''. \tag{2.41}$$

Znamo,

$$p(x'',t'+\tau|x',t') = \int \delta(y-x'')p(y,t'+\tau|x',t')dy, \tag{2.42}$$

takođe, Tejlorov razvor δ funkije je dat sa

$$\delta(y-x'') = \delta(x'-x''+y-x') = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(y-x')^n}{n!}(\frac{\partial}{\partial x'})^n\delta(x'-x''), \tag{2.43}$$

što nas dovodi do

$$
\begin{aligned}
p(x'', t' + \tau | x', t') &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int (y - x)^n P(y, t' + \tau | x', t') dy (\frac{\partial}{\partial x'})^n \delta(x' - x'') \\
&= (1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M_n(x', t', \tau) \frac{\partial}{\partial x'})^n) \delta(x' - x'').
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

Ubacivanjem 2.44 u 2.41 dobijamo

$$
\begin{aligned}
p(x, t | x', t') - p(x, t | x', t' + \tau) &= -\frac{\partial p(x, t | x', t')}{\partial t'} \tau + o(\tau^2) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M_n(x', t', \tau) \frac{\partial}{\partial x'})^n p(x, t | x', t' + \tau) \\
&= \tau \sum_{n=0}^{\infty} D^{(n)}(x', t') (\frac{\partial}{\partial x'})^n p(x, t | x' t') + o(\tau^2),
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

što nas dovodi do

$$
\frac{\partial p(x, t | x', t')}{\partial t'} = -\sum_{n=0}^{\infty} D^{(n)}(x', t') (\frac{\partial}{\partial x'})^n p(x, t | x' t') = -L^+_{KM}(x', t') p(x, t | x', t'),
\tag{2.46}
$$

gde je $L^+_{KM}(x', t') = \sum\limits_{n=0}^{\infty} D^{(n)}(x', t') (\frac{\partial}{\partial x'})^n$. Lako se proverava da je L^+_{KM} pridruženi operator operaturu L_{KM}.

Formalno rešenje i za jednačinu 2.46 sa istim početnim uslovom je dato sa

$$
P(x, t | x', t') = e^{L^+_{KM}(x')(t - t')} \delta(x - x'),
\tag{2.47}
$$

gde opet L^+_{KM} ne zavisi od vremena.

Hoćemo da pokažemo jednakost između 2.40 i 2.47, da bismo to pokazali moramo pokazati jednakost.

$$
A(x) \delta(x - x') = A^+(x') \delta(x - x'),
\tag{2.48}
$$

gde $A(x)$ označava neki realni operator koji sadrži samo diferencijalne operatore u odnosu na x i funkcije koje zavise od x. Primetimo da se $A(x)\varphi(x)$ može zapisati na dva različina načina

$$
\begin{aligned}
A(x) \varphi(x) &= A(x) \int \delta(x - x') \varphi(x') dx' \\
&= \int \varphi(x') A(x) \delta(x - x') dx',
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

$$\begin{aligned}A(x)\varphi(x) &= \int \delta(x-x')A(x')\varphi(x')dx' \\ &= \int \varphi(x')A^{+}(x')\delta(x-x')dx'.\end{aligned} \tag{2.50}$$

Oduzimanjem jednakosti dobijamo

$$0 = \int \varphi(x')(A(x)\delta(x-x') - A^{+}(x')\delta(x-x'))dx', \tag{2.51}$$

a kako je $\varphi(x)$ prizvoljna funkcija, vrednost u zagradi mora biti jednaka nuli.

Uzimajući da je

$$A(x) = e^{L_{KM}(x)(t-t')} \quad \text{i} \quad A^{+}(x) = e^{L^{+}_{KM}(x)(t-t')}, \tag{2.52}$$

pokazali smo jednakosti između rešenja.

2.5 Pawulaova teorema

U ovom poglavlju ćemo diskutovati Kramers-Moyalov razvoj, u smislu da li uvek postoje svi članovi $D^{(n)}$, i o tome nam govori sledeća teorema.

Teorema 2.5.1. *Za Kramers-Moyalov razvoj (jednačina 2.39) važi:*

1. $D^{(n)} = 0$ *za* $n \geq 2$ *- deterministički proces;*
2. $D^{(n)} = 0$ *za* $n \geq 3$ *- difuzni proces;*
3. *za svako* $n \in \mathbb{N}$ *postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tako da je* $D^{(n_0)} \neq 0$*, tj. razvoj ne prestaje.*

Dokaz. Koristeći Schwarzovu nejednakost imamo

$$(\int f(x)g(x)P(x)dx)^2 \leq \int f^2(x)P(x)dx \int g^2(x)P(x)dx, \tag{2.53}$$

gde su $f(x)$ i $g(x)$ proizvoljne funkcije, a $P(x)$ nenegativna funckija. Uzimajući da je $f(x) = (x-x')^n$, $g(x) = (x-x')^{n+m}$ i $P(x) = p(x,t+\tau|x',t')$ dobijamo

$$\begin{aligned}\left(\int (x-x')^{2n+m}p(x,t+\tau|x',t')dx\right)^2 = &\int (x-x')^{2n}p(x,t+\tau|x',t')dx \\ &\int (x-x')^{2n+2m}p(x,t+\tau|x',t')dx,\end{aligned} \tag{2.54}$$

tj.

$$M_{2n+m}^2 \leq M_{2n} M_{2n+2m}. \tag{2.55}$$

Za $n = 0$ imamo da je $M_m^2 \leq M_{2m}$, što je očito za $m = 0$ jer je $M_0 = 1$. Za $m \geq 1$ u datoj nejednakosti nećemo imati problema ako izrazimo momenat M_n preko $D^{(n)}$. Za $m = 0$, imamo $M_{2n}^2 \leq M_{2n}^2$, što važi za svako n. Dakle, posmatramo samo slučaj za $n \geq 1$ i $m \geq 1$. Ubacivanjem jednačine 2.36 u 2.55 i deljenjem cele jednakosti sa τ^2 i puštanjem da $\tau \to 0$ dobijamo

$$\Big((2n+m)! D^{2n+m}\Big)^2 \leq (2n)!(2n+2m)! D^{2n} D^{2n+2m}. \tag{2.56}$$

Jasno, ako je $D^{2n} = 0$ mora važiti i da je $D^{2n+m} = 0$, tj. važi

$$D^{2n} = 0 \Rightarrow D^{2n+1} = D^{2n+2} = ... = 0. \quad n \geq 1. \tag{2.57}$$

Takođe, ako je $D^{2n+2m} = 0$, mora biti i $D^{2n+m} = 0$, tj. imamo

$$\begin{aligned} &D^{2r} = 0 \Rightarrow D^{r+n} = 0 \quad (n = 1, 2, .., r-1), \text{tj.} \\ &D^{2r-1} = ... = D^{r+1} = 0 \quad (r \geq 2). \end{aligned}$$

Što nas dovodi do toga da ako je $D^{2r} = 0$ za $r \geq 1$ imamo da je

$$D^{2r} = 0 \Rightarrow D^3 = D^4 = ... = 0 \quad r \geq 1, \tag{2.58}$$

što je i trebalo pokazati. $\square$

Primetimo, ako bi neki neparan koeficijent bio jednak nuli, to nas ne bi dovelo do zaustavljanja razvoja. (slučaj 3.). Za $n \geq 3$ se može desiti da rešenje bude nepozitivna funckija.

Nadalje posmatramo samo drugi slučaj iz pethodne teoreme, odnosno kada imamo difuzni proces. U tom slučaju data jednačina se naziva **Fokker-Planckova** i data je sa

$$\begin{aligned} &\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = L_{FP} p(x,t), \\ &L_{FP} = -\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x,t). \end{aligned}$$

Prethodnu jednačinu možemo napisati i na sledeći način

$$\begin{aligned} &\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \\ &S(x,t) = (D^{(1)}(x,t) - \frac{\partial}{\partial x} D^{(2)}(x,t)) p(x,t). \end{aligned} \tag{2.59}$$

Kako je prethodna jednačina jednačina kontinuiteta, S se može interpretirati kao verovatnosni protok.

2.6 Rešavanje Fokker-Planckove jednačine

U prethodnim poglavljima smo se bavili dobijanjem Fokker-Planckove jednačine, kao i teorijskom podlogom koja nam je bila potrebna. Kao što smo videli, Fokker-Planckova jednačina nam daje mogućnost da dobijemo gustinu tranzicije koja nam omogućava da izaračunamo očekivanu vrednost procesa. Kao i do sad, posmatraćemo samo procese koji su homogeni, za koje su koeficijenti drifta i difuzije nezavisni u odnosu na vreme, pretpostavljajući da je $D^{(2)}(x) > 0$.

Dakle, Fokker-Planckova jednačina je data sa

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = L_{FP}p(x,t) = -\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}, \tag{2.60}$$

gde je,

$$L_{FP}(x) = -\frac{\partial}{\partial x}D^{(1)}(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}D^{(2)}(x). \tag{2.61}$$

2.6.1 Stacionarno rešenje

Za stacionarna rešenja verovatnosni protok mora biti konstantan. Zbog toga, ako je protok jednak nuli za neko x on mora biti jednak nuli i za svako x. Pretpostavimo prvo da je je $S = 0$, tada je

$$D^{(1)}p_{st}(x) = \frac{D^{(1)}}{D^{(2)}}D^{(2)}p_{st}(x) = \frac{\partial}{\partial x}D^{(2)}p_{st}(x). \tag{2.62}$$

Integracijom dobijamo

$$p_{st}(x) = \frac{N_0}{D^{(2)}}e^{\int \frac{D^{(1)}}{D^{(2)}}dx} = Ne^{-\Phi(x)}, \tag{2.63}$$

Gde je N_0 integraciona konstanta takva da je p_{st} normalizovan, a funckiju $\Phi(x)$ datu sa

$$\Phi(x) = \ln D^{(2)}(x) - \int \frac{D^{(1)}(x)}{D^{(2)}(x)}dx. \tag{2.64}$$

nazivamo potencijalom.

Primetimo da verovatnosni protok možemo napisati preko potencijala na sledeći način

$$S(x,t) = -D^{(2)}(x)e^{-\Phi(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\Phi(x)}p(x,t)\right), \tag{2.65}$$

Kada $\Phi'(x) = \frac{D'^{(2)}(x)}{D^{(2)}(x)} - \frac{D^{(1)}(x)}{D^{(2)}(x)}$ ubacimo u prethodnu jednačinu dobijamo jednačinu verovatnosnog fluksa.

Pretpostavimo da je S proizvoljna konstanta, u tom slučaju stacionarno rešenje je oblika

$$p_{st}(x) = Ne^{-\Phi(x)} - Se^{-\Phi(x)} \int \frac{e^{\Phi(x)}}{D^{(2)}(x)} dx, \tag{2.66}$$

Gde je jedna od konstanti određena tako da je p_{st} normalizovan, odnosno da važi da je

$$\int p_{st}(x)dx = 1. \tag{2.67}$$

a druga se određuje iz graničnih uslova, pa se postavlja pitanje koje granične uslove da koristimo, o čemu ćemo govoriti u sledećem potpoglavlju.

Veoma bitno pitanje je da li svaki početni uslov teži u stacionarnu gustinu. Ako pretpostavimo neke uslove za drift, difuzijski koeficijent i granične uslove može se pokazati da će svako rešenje Fokker-Planckove jednačine težiti ka stacionarnom rešenju, ukoliko ono postoji.

2.6.2 Granični uslovi

Kao što smo rekli, druga integraciona konstanta se nalazi uz pomoć graničnih uslova. Zbog toga što posmatramo difuzne stohastičke procese, možemo zahtevati da $\int\limits_{x_{min}}^{x_{max}} p_{st}(x)dx = 1$, tj. da sva gustina bude skoncentrisana na nekom intervalu $[x_{min}, x_{max}]$. U zavisnosti šta se dešava sa potencijalom $\Phi(x)$ na tim granicama imaćemo različite granične uslove.

Pre svega, van tog intervala verovatnosni protok $S(x,t)$ mora biti jednak nuli, jer čestica van tog intervala neće ni biti, pa samim tim neće biti ni jednačine. Dakle, za $\Phi(x) \to \infty$ za $x \to x_{max}$ iz 2.65 imamo da će S biti nula u toj tački, a samim tim i posle nje. Beskonačno veliki protok Φ nam u tački x_{max} daje reflektujući zid, jer $p(x,t)$ može uzimati vrednosti samo za $x < x_{max}$.

Sa druge strane, ako potencijal $\Phi(x) \to -\infty$ za $x \to x_{max}$, u tom slučaju iz 2.65 imamo da $e^{\Phi}p$ mora biti jednako nuli da bi protok S bio jednak nuli u tački x_{max} i posle nje. U ovom slučaju govorimo o absorbujućem zidu, jer $p \to 0$ kada $x \to x_{max}$, a da pritom važi uslov normalizacije $\int p_{st}(x)dx = 1$. Ista razmatranja važe i za levu granicu intervala.

Slučaj koji će nas zanimati u nastavku rada jeste kada $x_{max} \to \infty$, a $x_{min} \to -\infty$ i kada $\Phi(x) \to \infty$ kada $x \to \pm\infty$. U tačkama $x_{max} \to \infty$, $x_{min} \to -\infty$ imamo reflektujući zid, i kao i u prethodnom razmatranju verovatnosni protok S mora biti jednak nuli kada se približava granicama intervala. Takođe, zbog normalizacije i $p(x,t) \to 0$ kada $x \to \pm\infty$. Ovakav tip graničnih uslova se naziva prirodni granični uslov.

2.6.3 Razvoj sa karakterističnim funkcijama

U ovom poglavlju ćemo tražiti nestacionarna rešenja. Pretpostavimo da rešenje možemo da nađemo u obliku

$$p(x,t) = \varphi(x)T(t) \tag{2.68}$$

uvrštavanjem u Fokker-Planckovu jednačinu imamo da je

$$\frac{T'(t)}{T} = \frac{L_{FP}\varphi(x)}{\varphi(x)} = -\lambda \tag{2.69}$$

što će nas dovesti do toga da je

$$L_{FP}\varphi = -\lambda\varphi. \tag{2.70}$$

Dakle, tražimo $\varphi(x)$ i λ, takve da zadovoljavaju prethodnu jednakost, nazivamo ih redom karakterističnim funkcijama i karakterističnim vrednostima Fokker-Planckove jednačine.

Takođe, primetimo da Fokker-Placnkov operator, kojeg možemo predstaviti i sa

$$L_{FP} = \frac{\partial}{\partial x} D^{(2)}(x) e^{\Phi(x)} \frac{\partial}{\partial x} e^{\Phi(x)}, \tag{2.71}$$

nije Hermitski operator. Međutim, ako su p_1 i p_2 dve funkcije koje obe zadovoljavaju granične uslove imamo da je

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} p_1 e^{\Phi} L_{FP} p_2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} p_1 e^{\Phi} \frac{\partial}{\partial x} D^{(2)}(x) e^{\Phi} \frac{\partial}{\partial x} e^{\Phi} p_2 dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} [\frac{\partial}{\partial x} p_1 e^{\Phi}] D^{(2)} e^{-\Phi} [\frac{\partial}{\partial x} e^{\Phi} p_2 e^{\Phi}] dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} p_2 e^{\Phi} \frac{\partial}{\partial x} D^{(2)}(x) e^{\Phi} \frac{\partial}{\partial x} e^{\Phi} p_1 dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} p_2 e^{\Phi} L_{FP} p_1 dx.
\end{aligned} \tag{2.72}$$

U trećoj i četvrtoj jednakosti smo koristili parcijalnu integraciju i imali da je

$$p_{1,2} e^{\Phi} D^{(2)} e^{-\Phi} \frac{\partial}{\partial x} e^{\Phi} p_{2,1}|_{-\infty}^{\infty} = -p_{1,2} e^{\Phi} S_{2,1}|_{-\infty}^{\infty} = 0. \tag{2.73}$$

Dakle, dobili smo da je $e^{\Phi} L_{FP}$ Hermitski operator, tj.

$$(e^{\Phi} L_{FP})^{H} = e^{\Phi} L_{FP}, \tag{2.74}$$

pa je samim tim i

$$L = e^{-\Phi/2} e^{\Phi} L_{FP} e^{-\Phi/2} = e^{\Phi/2} L_{FP} e^{-\Phi/2} \tag{2.75}$$

Hermitski operator.

Ako su $\varphi_n(x)$ karakteristične funkcije od Fokker-Planckovog operatora L_{FP} sa karakterističnim korenima λ_n tada su funkcije

$$\psi_n(x) = e^{\Phi(x)/2} \varphi_n(x) \tag{2.76}$$

karakteristične funkcije operatora L sa istim karakterističnim vrednostima λ_n,

$$L\psi_n = -\lambda_n \psi_n. \tag{2.77}$$

Zbog toga što je L Hermitski operator, karakteristične vrednosti su realne, a dve karakteristične funkcije ψ_1 i ψ_2 sa različitim karakterističnim vrednostima $\lambda_1 \neq \lambda_2$ moraju biti ortogonalne. Kada normalizujemo karakteristične funckije imamo da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n \psi_m dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\Phi} \varphi_n \varphi_m dx = \delta_{nm}. \tag{2.78}$$

Uzimajući prvu i treću jednakost iz 2.72 za $p_1 = p_2 = \varphi_n(x)$ imamo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n e^{\Phi} L_{FP} \varphi_n dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n L \psi_n dx = -\lambda_n \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} (\frac{\partial}{\partial x} \psi_n e^{\Phi/2})^2 D^{(2)} e^{-\Phi} dx \leq 0. \end{aligned} \tag{2.79}$$

Jednakost dobijamo samo za stacionarno rešenje

$$\psi_0(x) = \sqrt{N} e^{\Psi(2)/2}, \quad \lambda_0 = 0. \tag{2.80}$$

Sve ostale karakteristične vrednosti λ_n moraju biti veće od nule.

Karaktristične funkcije Hermitskih operatora čine bazu, pa dobijamo da je

$$\begin{aligned} \delta(x - x') &= \sum_n \psi_n(x) \psi_n(x') \\ &= e^{\Psi(x/2 + \Psi(x')/2)} \sum_n \varphi_n(x) \varphi_n(x') dx \\ &= e^{\Phi(x)} \sum_n \varphi_n(x) \varphi_n(x') \\ &= e^{\Phi(x')} \sum_n \varphi_n(x) \varphi_n(x'). \end{aligned} \tag{2.81}$$

Kada prethodni rezultat ubacimo u formalno rešenje Fokker-Planckovog operatora, dobijamo razvoj gustine tranzicije preko karakterističnih funckija.

$$\begin{aligned} p(x,t|x',t') &= e^{L_{FP}(x)(t-t')}\delta(x-x') \\ &= e^{\Phi(x')}\sum_n e^{L_{FP}(x)(t-t')}\varphi_n(x)\varphi_n(x') \\ &= e^{\Phi(x')}\sum_n \varphi_n(x)\varphi_n(x')e^{-\lambda_n(t-t')} \\ &= e^{\Phi(x')/2-\Phi(x)/2}\sum_n \psi_n(x)\psi_n(x')e^{-\lambda_n(t-t')}. \end{aligned} \tag{2.82}$$

U stacionarnom stanju konačno dimenzionalne raspodele možemo izračunati, pod uslovom da stacionarno rešenje postoji

$$p_2(x,t;x',t') = \psi_0(x)\psi_0(x')\sum_n \psi_n(x)\psi_n(x')e^{\lambda_n|t-t'|}. \tag{2.83}$$

Jasno se vidi da važi $p_2(x,t;x',t') = p_2(x',t',x,t)$.

Glava 3

Zaključak i primeri

Na osnovu Fokker-Planckove jednačine dobijamo gustinu tranzicije, kao i gustinu stohastičkog procesa X_t u trenutku t. U prethodnom poglavlju smo dali rešavanje date jednačine i pokazali da će uz dobre granične uslove imati rešenje.

Za kraj ovog rada bavićemo se rešavanjem Fokker-Planckove jednačine za poznate difuzne procese, Wienerov proces i Ornstein-Uhlenbeckov proces, koje dobijamo uz pogodno biranje koeficijenata drifta i difuzije. Literatura koju smo koristili za ovo poglavlje je [3], [4], [7].

3.1 Wienerov proces

Wienerov proces je način kretanja malog tela zaronjenog u fluid, gde telo ima manju spečificnu težinu od sredine u kojoj se nalazi. Pod takvim uslovima, dolazi do haotičnog kretanja tela, uzorkovanim sudarima sa molekulima sredine. Posmatramo jednčinu gde je koeficijent difuzije jednak jedinci, a koeficijent drifta jednak nuli, odnosno, imamo

$$\frac{\partial}{\partial t}p(x,t|x',s) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(x,t|x',s), \tag{3.1}$$

uz početni uslov $p(x,s|x',s) = \delta(x-x')$.

Odakle imamo da je karakteristična funckija data sa

$$C_X(u,t) = \int e^{iux}p(x,t|x',t')dx \tag{3.2}$$

zadovoljava

$$\frac{\partial C_X}{\partial t} = -\frac{1}{2}u^2 C_X, \tag{3.3}$$

odakle imamo

$$C_X(u,t) = e^{-\frac{1}{2}u^2(t-t_0)} C_X(u,t_0). \tag{3.4}$$

Iz početnog uslova dobijamo početni uslov za karakterističnu funkciju

$$C_X(u,t_0) = e^{iux_0}, \tag{3.5}$$

pa je konačno rešenje,

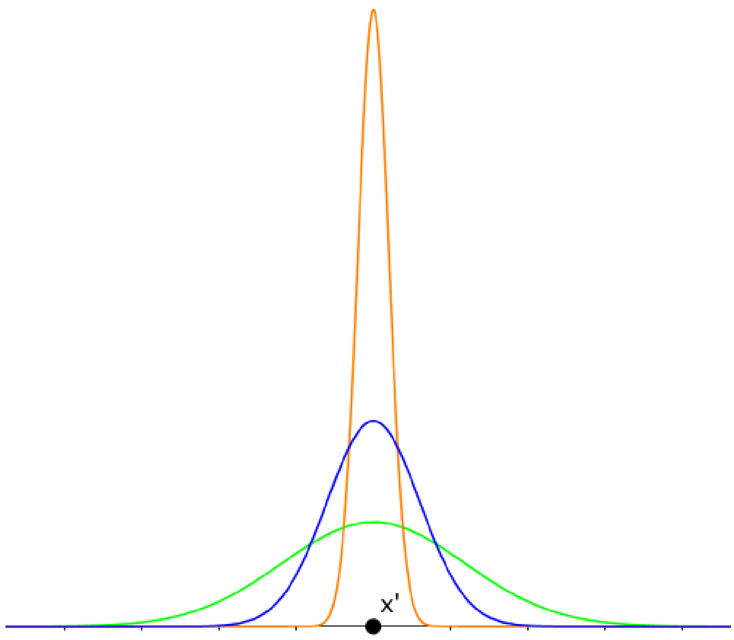
$$C_X(u,t) = e^{iux_0 - \frac{1}{2}(t-t)} \tag{3.6}$$

Delovanjem inverzne Furieove transformacije imamo da je

$$p(x,t|x_0,t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} e^{\frac{-(x-x_0)^2}{2(t-t_0)}}, \tag{3.7}$$

što predstavlja Gaussovu raspodelu sa $E(X) = x_0$ i $D(X) = t - t_0$, čime se početna oštra distribucija širi kroz vreme, kao što vidimo na slici 3.1.

Slika 3.1: Širenje gustine $p(x,t|x',t')$ u vremenu.



3.2 Ornstein-Uhlenbeckov proces

Primetimo da Fokker-Planckova jednačina za Wienerov proces nije imala stacionarno rešenje, dodavanjem linearnog koeficijenta drifta u Fokker-Planckovoj jednačini za Wienerov proces, dobijamo jednačinu oblika

$$\frac{\partial}{\partial t}p = \frac{\partial}{\partial x}(kxp) + \frac{1}{2}D\frac{\partial^2}{\partial x^2}p, \tag{3.8}$$

gde za p posmatramo $p(x,t|x_0,0)$. Ovakav proces nazivamo Ornstein-Uhlenbeckov proces i data jednačina će imati stacionarno rešenje, kao što ćemo videti. Karakteristična funkcija

$$C_X(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iux}p(x,t|x_0,0)dx, \tag{3.9}$$

zadovoljava

$$\frac{\partial}{\partial t}C_X + ku\frac{\partial}{\partial u}C_X = \frac{1}{2}Du^2C_X. \tag{3.10}$$

Metod karakteristika se može iskoristiti da se reši ova jednačina, tj.

$$r(u,t,C_X) = a \quad \text{i} \quad s(u,t,C_X) = b, \tag{3.11}$$

gde su a i b proizvoljne konstante, imamo

$$\frac{dt}{1} = \frac{du}{ku} = -\frac{dC_X}{\frac{1}{2}Du^2C_X}, \tag{3.12}$$

a rešenje je dato sa $f(r,s) = 0$.

Konstante dobijamo integraljenjem tj.

$$r(u,t,C_X) = ue^{-kt} \quad \text{i} \tag{3.13}$$

$$s(u,t,C_X) = C_Xe^{Du^2/4k}. \tag{3.14}$$

Možemo pretpostaviti da je $s = g(r)$, što nas dovodi do rešenja, datog u obliku

$$C_X(u,t) = e^{-Du^2/4k}g(ue^{-kt}), \tag{3.15}$$

uz granični uslov $C_X(u,0) = e^{ix_0u}$, a to nas dovodi do toga je

$$g(u) = e^{Du^2/4k+ix_0u}, \tag{3.16}$$

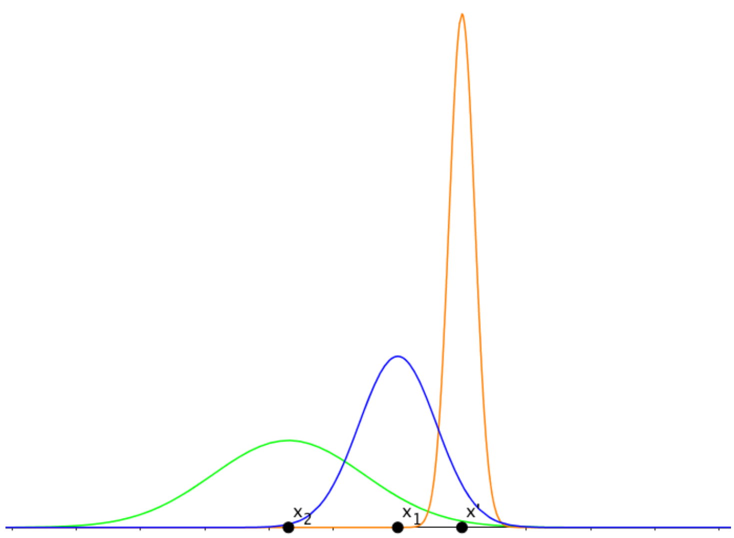
a rešenje,

$$C_X(u,t) = e^{\frac{-Du^2}{4k}\left(1-e^{-2kt}\right)+iux_0e^{-kt}}, \tag{3.17}$$

odgovara Gaussovoj raspodeli sa očekivanjem $E(X) = x_0e^{-kt}$ i disperzijom $D(X) = \frac{D}{2k}(1 - e^{-2kt})$.

Primećujemo da za $t \to \infty$, očekivanje i disperzija idu redom ka 0 i $D/2k$, što nas dovodi do stacionarnog rešenja. Ovo rešenje bismo dobili i kada bismo stavili da je protok $S = 0$, kao što smo analizirali u prethodnom poglavlju.

Slika 3.2: Ponašanje gustine $p(x, t|x', t')$ kroz vreme



Ornstein-Uhlenbeckov proces je jedini netrivijalni stohastički proces koji je u isto vreme stacionaran, Gaussov i proces Markova.

Za razliku od Wienerovog procesa koji predstavlja proces kretanja malog tela u fluidu pod uticajem velikog broja sudara sa molekulima supstance što izaziva slučajno kretanje tela Markovljevog tipa, Ornstein-Uhlenbeckov proces uračunava i dodatan efekat trenja koje je približno proporcionalno brzini kretanja tela.

Ornstein–Uhlenbeckov proces ima široku primenu, može se koristi u finansijama, za modeliranje kamatnih stopa, deviznog kursa i cena određenih roba, uz određene modifikacije koeficijenata. Može se koristiti u biologiji za modeliranje neuronskih impulsa.

Fokker-Planckova jednačina se dobija za difuzne procese, a kako se dosta sistema u prirodi može predstaviti njima, dobijamo da Fokker-Planckovu jednačinu možemo iskoristiti za dobijanje gustina datih stohastičkih procesa.

Kao što smo rekli, Fokker-Planckovu jednačinu možemo iskoristiti za dobijanje gustine kamatnih stopa i deviznog kursa, ali i u dobijanju gustine za fluktuacije u otkucaju srca, za rekonstrukciju grubih površi itd. U ovom radu smo dali osnove za dobijanje date jednačine, kao i za njeno rešavanje, ali su njene mogućnosti primene daleko šire nego što je dato u ovom radu.

Bibliografija

[1] Boyse W.E., DiPrima R.C., *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems,* John Wiley & Sons

[2] Evans L. C., *Partial Differential Equations,* American Mathematical Society, 1998

[3] Gardiner C. W., *Handbook of stochastic methods,* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1985.

[4] Pavliotis G., *Stochastic Processes and Applications Diffusion Processes, the Fokker-Planck and Langevin Equations,* Springer, London, 2014.

[5] Pilipović S., Seleši D., *Mera i Integral,* Zavod za udžbenike, Beograd, 2012.

[6] Rajter-Ćirić D., *Verovatnoća,* PMF Novi Sad, 2009.

[7] Risken H., *The Fokker –Planck Equation Methods of Solution and Applications,* Springer-Verlag, Beriln, 1984.

[8] Stojaković M., *Verovatnoća i slučajni procesi,* FTN Novi Sad, 2013.

Kratka biografija

Manojlo Vuković je rođen 3.2.1993. godine u Prištini. Zbog bombardovanja 1999. godine se preselio u Kraljevo i tamo završio prvo polugodište prvog razreda OŠ „Dimitrije Tucović”. Početkom 2000. godine dolazi u Novi Sad, gde i danas živi. Završio je osnovnu školu „Svetozar Marković Toza” sa odličnim uspehom 2007. godine. Iste godine upisuje gimnaziju „Jovan Jovanović Zmaj” koju završava sa vrlo dobrim uspehom 2011. godine.

Studije Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, smer Primenjena matematika, modul matematika finansija, upisuje iste godine, i uspešno ih završava septembra 2014. sa prosekom 9,12. Master akademske studije smer Primenjena matematika upisuje na istom fakultetu. Jula 2016. godine polaže poslednji ispit i master studije završava sa prosekom 9,28.

Za vreme studija je učestvovao u radu Studentskog parlamenta PMF-a, kao i u radu Studentskog parlamenta UNS-a, a između ostalog obavljao je i funkciju studenta prodekana u školskoj 2014/2015. godini. U toku 2015. godine bio je i na letnjoj praksi u Narodnoj banci Srbije u Odeljenju za aktuarkse poslove i statistiku. Takođe, bio je stipendista Vlade Republike Srbije.

Od septembra 2016. godine je zaposlen na Fakultetu tehničkih nauka pri katedri za matematiku, kao saradnik u nastavi, a od septembra 2017. godine angažovan je kao stručni saradnik u gimnaziji „Jovan Jovanović Zmaj”.

Novi Sad, oktobar 2017.

Manojlo Vuković

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: *monografska dokumentacija*
TD
Tip zapisa: *tekstualni štampani materijal*
TZ
Vrsta rada: *master rad*
VR
Autor: *Manojlo Vuković*
AU
Mentor: *prof. dr Marko Nedeljkov*
MN
Naslov rada: *Fokker-Planckova jednačina i njene primene*
NR
Jezik publikacije: *srpski (latinica)*
JP
Jezik izvoda: *s/e*
JI
Zemlja publikovanja: *Republika Srbija*
ZP
Uže geografsko područje: *Vojvodina*
UGP
Godina: *2017.*
GO
Izdavač: *autorski reprint*
IZ
Mesto i adresa: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*
MA
Fizički opis rada: *3 poglavlja, 48 strana, 8 lit. citata, 2 slike*
FO
Naučna oblast: *matematika*
NO
Naučna disciplina: *primenjena matematika*
ND

Ključne reči: *Fokker-Planck, gustina verovatnoće, procesi Markova, uslovna verovatnoća, gustina tranzicije*
PO
UDK
Čuva se: *u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta, u Novom Sadu*
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: *Glavni cilj ovog rada je izvođenje Fokker-Planckove jednačine za difuzne stohastičke procese, kao i disuktovanje njenog rešenja, kao i primena kroz dva procesa - Wienerov i Ornstein-Uhlenbeckov proces. U prvom delu rada je data teorijska osnova koja je potrebna za razumevanje izvođenja i rešavanja, a zatim smo dali samo izvođenje, diskutovanje graničnih uslova kao i za samo rešavanje. Na kraju rada, dato je rešenje Fokker-Planckove jednačine za pomenute procese i prikazano je kretanje gustine u vremenu.*
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: *8. septembar 2017.*
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: *dr Danijela Rajter-Ćirić, redovni profesor*
Član: *dr Marko Nedeljkov, vanredni profesor*
Član: *dr Nataša Krklec-Jerinkić, docent*

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: *monograph type*
DT
Type of record: *printed text*
TR
Contents code: *Master thesis*
CC
Author: *Manojlo Vuković*
AU
Mentor: *Prof. Marko Nedeljkov, PhD*
MN
Title: *Fokker-Planck equation and its applications*
XI
Language of text: *Serbian (latin)*
LT
Language of abstract: *s/e*
LA
Country of publication: *Republic of Serbia*
CP
Locality of publication: *Vojvodina*
LP
Publication year: *2017.*
PY
Publisher: *author's reprint*
PU
Publ. place: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*
PP
Physical description: *3 chapters, 48 pages, 8 lit. references, 2 images*
PD
Scientific field: *mathematics*
SF
Scientific discipline: *applied mathematics*
SD

Key words: *Fokker-Planck, probability density, Markov Process, conditional probability, transition density*
UC
Holding data: *Department of Mathematics and Informatics' Library, Faculty of Sciences, Novi Sad*
HD
Note:
N
Abstract: *The main goal of this paper is derivation of Fokker-Planck equation for diffusion stochastic processes, discussion for solution, as well as application in two processes Wiener and Ornstein-Uhlenbeck. In first chapter we gave theoretical basis which is necessary for understanding derivation and solving, which we gave in second chapter of this paper. At the end of this paper we solved Fokker-Planck equation for mentioned processes, and we observe how the density is changing in time.*
AB
Accepted by the Scientific Board on: *8th September 2017*
ASB
Defended:
DE
Thesis defend board:
DB
President: *Dr Danijela Rajter-Ćirić, Full Professor*
Member: *Dr Marko Nedeljko, Full Professor*
Member: *Dr Nataša Krklec-Jerinkić, Assistant Professor*