



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU



Maja Ljubišić

TEORIJA MALIH TALASA
SA NEKIM PRIMENAMA
U
EKONOMIJI

- master rad -

Novi Sad, 2018.

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Vejvlet (malotalasna) transformacija	2
2.1	Kratak istorijat	2
2.2	Prelazak sa Furijeove na vejvlet transformaciju	5
2.3	Kontinualna vejvlet transformacija	9
2.4	Diskretna vejvlet transformacija i multirezolucionana analiza	15
3	Linearni filteri	20
3.1	Metod filtracije	20
3.2	Filteri u vremenskom domenu	21
3.2.1	Beskonačan impulsni odziv filtera	22
3.2.2	Neuzročni konačni impulsni odziv (<i>FIR</i>) filteri .	24
3.2.3	Uzročni <i>FIR</i> filteri	28
3.3	Filteri frekvetnog domena	34
3.3.1	Frekvetni odziv	43
3.3.2	Niskopropusni i visokopropusni filteri	45
4	Primena filtera i malih talasa u praksi	54
4.1	Uvod	54
4.1.1	EWMA i ocenjivanje volatilnosti	54
4.1.2	Hodrick-Prescott filter	60
4.1.3	Baxter-King (BK) filter	62
4.1.4	Filteri u tehničkoj analizi finansijskih tržišta . .	64
5	Implementacija Hodrick-Prescott filtera	69
	Literatura	75

Glava 1

Uvod

Najčešće korišćen pristup u analizi biznis ciklusa je Furijeova spektralna analiza. Furijeova analiza se zasniva na transformaciji inicijalnog signala na skup sinusoida različitih frekvencija i amplituda. Ova transformacija omogućava analizu skupa dobijenih sinusoida i zatim ponovnu rekonstrukciju inicijalnog signala. Ipak, na ovaj način informacija o tome kada se određeni događaj desio u vremenu se gubi, što je jedan od najvećih nedostataka Furijeove transformacije. Ovaj nedostatak otklanja se uvođenjem vejvlet transformacije. Ovaj prelazak biće opisan na početku druge glave. Potom će biti pojašnjen pojam vejvlet transformacije, kako kontinualne, tako i diskretne.

U trećem delu rada biće pojašnjeni linearni filteri u frekventnom, a potom i u vremenskom domenu. Njihova primena u ekonomiji i finansijama je od velikog značaja zato što se koriste u svrhu izvlačenja komponenti vremenskih serija u određenom opsegu frekvencija i analizom tih komponenata.

U četvrtom delu rada biće pojašnjena tri filtera, odnosno primena filtera i malih talasa u praksi, kao i upotreba filtera u analizi finansijskih tržišta.

Na kraju, u petom delu rada preko programskog paketa MATLAB prikazaćemo implementaciju jednog od prethodno opisanih filtera. Cilj ovog rada jeste prikazivanje primene teorije malih talasa i linearnih filtera u ekonomiji i finasijama. U tehničkoj analizi tržišta filteri su značajan alat, a njihov značaj opisan je kroz primere primene. Vejvlet analiza, kao poboljšanje Furijeove analize, iako ima veliki značaj u objašnjavanju ekonomskih pojava, predstavlja još uvek relativno neistražen alat u ovoj oblasti.

Glava 2

Vejvlet (malotalasna) transformacija

Teorija malih talasa razvila se kao nadogradnja Furijeove transformacije. Svoju primenu našla je u mnogim oblastima. U prvom delu ove glave biće opisano kada i kako se sa Furijeove transformacije polako prelazilo na vejvlet transformaciju, sa pominjanjem najznačajnijih naučnika zasluznih za ovu promenu. U trećem delu ove glave biće reči o kontinualnoj vejvlet transformaciji i multirezoluciji, dok se u četvrtoj glavi upoznajemo sa diskretnom vejvlet transformacijom koja predstavlja vrlo koristan alat za rad sa vremenskim serijama. U ovom poglavlju korišćena je literatura [1], [2] i [3].

2.1 Kratak istorijat

Furijeova transformacija je verovatno najrasprostanjeniji alat za obradu signala u nauci i inženjerstvu. Za postavljanje njenih osnova zaslužan je francuski matematičar Džozef Furije. Furije je postavio problem rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina za širenje topote. Teoriju o širenju topote razvio je u periodu između 1804. i 1807. godine. Naime, on je tvrdio da je moguće svaku periodičnu funkciju aproksimirati sumom određenih trigonometrijskih funkcija. Furijeova analiza bavi se problemom aproksimacije proizvoljne funkcije skupom elementarnih funkcija. Rezultate teorije o širenju topote i Furijeovom redu saopštio je 1807. i 1811. godine. Međutim, zbog beskompromisnih prigovora nekih od njegovih savremenika među kojima je i Lagranž,

naučni rad o njegovom otkriću nikad nije objavljen sve dok Furije nije napisao i objavio knjigu „Analitička teorija toplove” 1922. godine. U toj knjizi, prvi je izneo teoriju da matematička funkcija proizvoljnog oblika može da se predstavi u obliku zbiru sinusoidnih funkcija rastuće frekvencije i opadajuće amplitude.

Teorija je nastavila da se razvija uvođenjem familije Haar vejleta (1909. godine), nazvanih po naučniku Alfredu Haru. Haar vejljeti čine po delovima neprekidne funkcije što ograničava njihovu primenu.

Nekoliko naučnika kao sto su Littlewood, Stein i Norman H. Ricker su između 1930. i 1970. godine dali doprinos istraživanju vejlveta kakvim ih poznajemo danas. Doprinos teoriji malih talasa dali su i naučnici Paul Levy i Denis Gabor.

Fizičar Levy je tridesetih godina prošlog veka istraživao Braunovo kretanje i tada je doneo malo poboljšanje Haarovog rada. Otkrio je da funkcije promenljive skale, odnosno bazne Haarove funkcije postižu bolje rezultate od Furijeovih baznih funkcija kada se istražuju određeni detalji Braunovog kretanja. Haarove bazne funkcije mogu biti skalirane u različitim intervalima, kao što su intervali $[0,1]$, $[0,1/2]$ ili $[1/2,1]$.

Gabor je predložio kratkotrajnu Furijeovu transformaciju. Ona, za razliku od Furijeove transformacije koja omogućava globalnu spektralnu analizu talasa, lokalizuje signal u vremensko-frekvencijskoj ravni. Ova teorija ima jedan nedostatak. Naime, kratkotrajna Furijeova transformacija omogućava da se frekvencija signala posmatra kroz delove (tzv prozore, engl. windows). Širina tih prozora je fiksna i tu nastaje problem koji rešava naučnik Morlet.

Morlet je razvio i implementirao tehniku skaliranja i pomeranja funkcije prozora analize u analizi signala dok je radio u jednoj naftnoj kompaniji sredinom 70ih. On je analizirao seizmičke talase slanjem akustičnih impulsa u zemlju. Analiziranjem eha koji se vraća može se utvrditi prisustvo nafte u Zemljinoj kori, kao i debljina sloja nafte koja je pronađena. Kada je Morlet prvi put upotrebio kratkotrajnu Furijeovu transformaciju da analizira ove ehoe, zaključio je da od pomoći neće biti ako širinu prozora održava konstantnom. Kako bi rešio ovaj problem, radio je sledeće: eksperimentisao je tako što je frekvenciju funkcije prozora držao konstantnom, dok je širinu prozora menjao tako što je širio ili skupljao funkciju prozora. Morlet je došao na ideju da menja širinu prozora. Rezultat koji se dobija menjanjem širine prozora je sam Morlet nazvao „talasi” – tu počinje era istraživanja o vejlvetica.

4 GLAVA 2. VEJVLET (MALOTALASNA) TRANSFORMACIJA

Zapravo, pristup koji je Morlet imao bio je sličan onom koji je pre njega imao Haar. Međutim, teoretsko definisanje vejvlet transformacije prvi put je predloženo tek kada se Morlet udružio sa naučnikom po imenu Alex Grossmann. Njih dvojica su zajedno oblikovali teoriju malih talasa. Realizovali su ideju da se signal u izvesnom smislu transformiše primenom vejvleta, a da se zatim vrati ponovo u početni oblik. Pri tome je cilj bio očuvanje informacija koje su potrebne za rekonstrukciju signala.

Nakon velikog traga koji su ostavili Morlet i Grossman (objavljanjem zajedničkog rada 1984. godine), mnogi naučnici su uložili dosta truda u razvijanje teorije malih talasa. Jedan od najvećih koraka u ovom periodu napravljen je kada su naučnici Stephane Mallat i Yves Meyer izumeli multirezoluciju. Nakon toga, Ingrid Daubechies je 1988. godine stvorila sopstvenu familiju vejvleta, baziranu na konceptima multirezolucije. Ti vejvleti su danas poznati pod nazivom Daubechies vejvleti. Ona je došla do nove familije ortonormiranih vejvleta.

2.2. PRELAZAK SA FURIJEOVE NA VEJVLET TRANSFORMACIJU5

2.2 Prelazak sa Furijeove na vejvlet transformaciju

Dobro poznata Furijeova transformacija je uobičajena metoda za proučavanje i analizu signala kroz frekvencijski domen. Ona obuhvata projekciju signala na ortonormalni set trigonometrijskih komponenti. Furijeova transformacija koristi bazu sinusa i kosinusa različitih frekvencija da li određena frekvenicija postoji u signalu i u kojoj meri.

Furijeova transformacija vremenske serije $x(t)$ data je sa

$$F_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt, \omega \in R.$$

Iako vrlo korisna, Furijeova transformacija ne govori o tome kako se menja frekvencijska komponenta signala tokom vremena (omogućava analizu frekvencijskog sadržaja signala). Ona zapravo govori koliko svake frekvencije postoji u signalu, ali ne i kada u vremenu se frekvencija javlja. Frekvencija je u stvari mera brzine promene neke pojave. Visoke frekvencije karakteristične su za brze promene, dok se niske frekvencije vezuju za spore promene. Kako bi se našlo rešenje za ovako ograničen pristup, uvedena je takozvana kratkotrajna Furijeova transformacija, poznata i kao Gabor ili *windowed* transformacija (od engleske reči *window* koja označava prozor, deo). Posmatranjem polazne funkcije kroz „prozore” i računanjem Furijeove transformacije pojedinih delova, lokalizujemo pojavu frekvencije u vremenu. Ideja je da se Furijeova transformacija koristi za kraće vremenske periode.

Postavlja se pitanje-zašto bi se istraživale i koristile vejvlet metode umesto spektralnih alata kao sto je Furijeova analiza? Furijeove bazne funkcije (sinusi i kosinusi) vrlo su korisne kada se radi sa stacionarnim vremenskim serijama. Međutim, ograničavanje na stacionarne vremenske serije nije dobar izbor kada se radi o ekonomskim/finansijskim vremenskim serijama pošto se one prilično menjaju tokom vremena (npr. trendovi, ima naglih i strmih promena). Gabor transformacija osmišljena je kako bi se postigao balans između vremena i frekvencije pomerajući prozore duž vremenske serije. Gabor transformacija je jednostavno primenjivanje Furijeove transformacije na delove vremenske serije. Ideja je da se signal posmatra kroz prozore fiksne širine i da se

6 GLAVA 2. VEJVLET (MALOTALASNA) TRANSFORMACIJA

odredi spektar dela signala koji se „vidi” kroz taj prozor. Uvodi se pojam lokalne frekvencije, odnosno posmatraju se spektralne komponente u određenom vremenskom intervalu.

Vremensko-frekvencijska analiza ograničena je Hajzenbergovim principom neodređenosti. U kvantnoj fizici, Hajzenbergov princip neodređenosti govori, u obliku preciznih nejednakosti, da određeni parovi fizičkih svojstava, kao što su pozicija i momenat, ne mogu da budu izmereni sa proizvoljnom preciznošću. Drugim rečima, što je preciznije jedno svojstvo izmereno, to se manje precizno drugo svojstvo može izmeriti. U našem konkretnom slučaju, ovaj princip govori kako ne možemo znati koja frekvencija postoji u kom vremenskom intervalu. Najbolje što može da se uradi je istražiti koje spektralne komponente postoje u datom vremenskom intervalu. Pošto rezolucija u vremenu i frekvenciji ne može biti proizvoljno mala, jer je njihov proizvod ograničen sa donje strane, to rezultira kompromisom između vremena i frekvencijske rezolucije (engl. *time-frequency resolution tradeoffs*). Za male širine prozora ostvaruje se dobra vremenska lokalizacija, ali gubimo na frekvencijskoj rezoluciji. Za analiziranje malih detalja signala, povećava se frekvencija analizirajuće funkcije. Nasuprot tome, pri velikoj širini prozora, gubimo na lokalizaciji vremena, a dobijamo dobru frekvencijsku rezoluciju. Problem sa *windowed* Furijeovom transformacijom jeste što koristi prozore konstantne dužine. Ovi prozori fiksirane dužine daju uniformnu podelu vremensko-frekvencijske ravni. Kada se u obzir uzima širok opseg frekvencija, prozor sa fiksiranim vremenom sadrži veliki broj ciklusa visoke frekvencije, a mali broj ciklusa niske frekvencije. Rezultat toga jeste da postoji suviše veliki broj komponenti visoke frekvencije i suviše mali broj komponenti niske frekvencije. Za analiziranje malih detalja signala, povećava se frekvencija analizirajuće funkcije. Na ovaj način teško se postiže potpuna informacija i o vremenu i o frekvenciji. Dakle, kada se signal ispituje u fiksiranom vremensko-frekvencijskom prozoru sa konstantnim intervalima kako u vremenskom, tako i u frekvencijskom domenu, Furijeova *windowed* transformacija ne dozvoljava adekvatnu rezoluciju za sve frekvencije.

Dolazimo do ključnog problema, a to je izbor širine prozora. Transformacija koja otklanja ovaj nedostatak je upravo vejllet transformacija. Ona omogućava usklađenost veličine prozora, odnosno vremenske rezolucije sa skalom svake od frekvencijskih komponenti funkcije. Vejllet transformacija, sa druge strane, koristi lokalne bazne funkcije koje

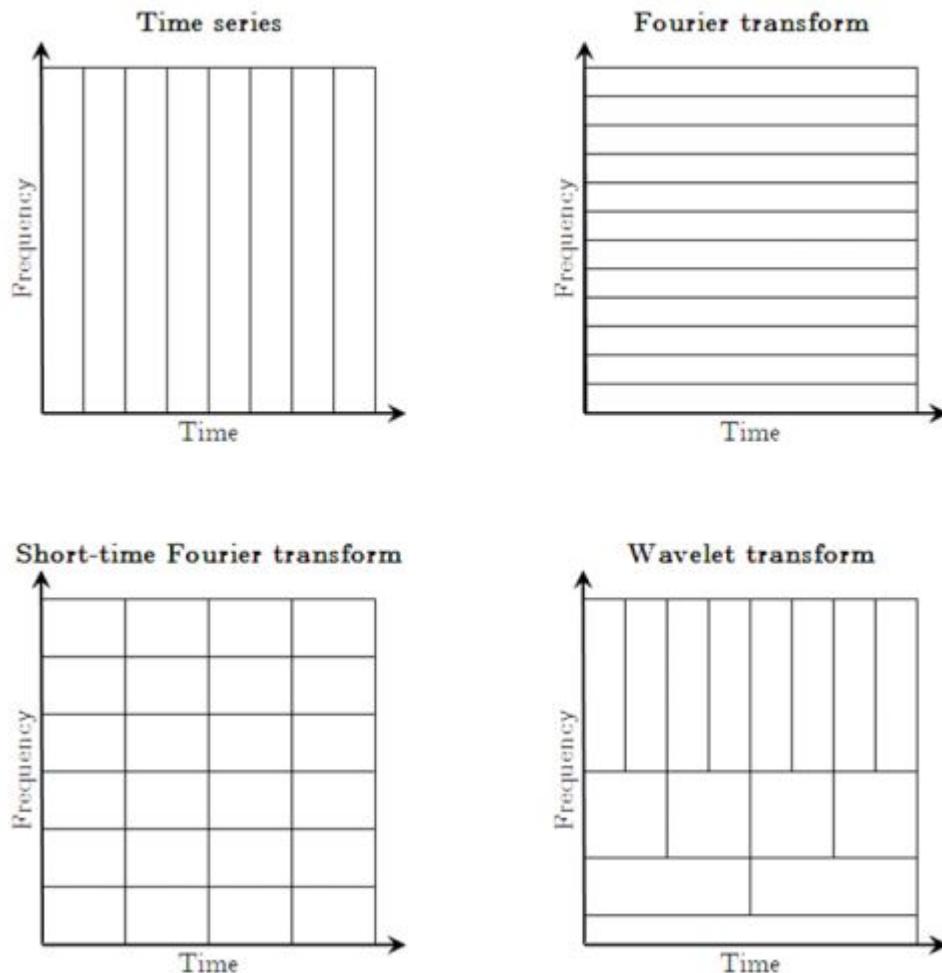
2.2. PRELAZAK SA FURIJEOVE NA VEJVLET TRANSFORMACIJU7

mogu biti raširene i translirane sa fleksibilnom rezolucijom i po frekvenčkoj i po vremenskoj osi. Korišćenjem prozora postiže se poboljšanje frekvencijske rezolucije pri niskim frekvencijama i vremenske rezolucije pri visokim frekvencijama. Određena komponenta visoke frekvencije može biti bolje lokalizovana u vremenu u poređenju sa komponentom niske frekvencije. Suprotno tome, komponenta niske frekvencije može bolje biti lokalizovana frekvencijski u odnosu na komponentu visoke frekvencije. Dopuštanjem da prozor bude različitih veličina, postiže se poboljšanje frekvencijske rezolucije pri niskim frekvencijama i poboljšanje vremenske rezolucije pri visokim frekvencijama. Praveći kombinaciju proširivanja i pomeranja *mother* (od engleske reči *mother* što znači majka) vejvleta, vejvlet transformacija uspeva da pokupi sve informacije iz vremenske serije. Međutim, i ovde važi Hajzenbergov princip neodređenosti. Ne može se očekivati da se za određenu tačku u vremensko-frekvencijskoj ravni poboljšaju i vremenska i frekvencijska rezolucija. Vejvlet analizu posmatramo kao poboljšanje Furijeove analize pošto omogućava fleksibilniji pristup analizi vremenskih serija.

Preko slike 2.1. ilustrovaćemo prethodnu diskusiju. U vremenskom domenu, svaka tačka vremenske serije sadrži informacije o svim frekvencijama. Sa druge strane, u slučaju Furijeove transformacije, svaka tačka u frekvencijskom domenu sadrži informacije o svim tačkama u vremenskom domenu. U slučaju kratkotrajne Furijeove transformacije, vremensko-frekvencijska ravan podeljena je pomoću prozora konstantne dužine. Vremensko-frekvencijska ravan je izdeljena prozorom konstantne dužine kada se koristi kratkotrajna Furijeova transformacija, dok je kod vejvlet transformacije širina prozora podešena u odnosu na frekvenciju.

Na slici 2.1 prikazano je, redom, poređenje vremensko-frekvencijskih svojstava za vremensku seriju, zatim njena Furijeova transformacija, kratkotrajna Furijeova i na kraju vejvlet transformacija.

8 GLAVA 2. VEJVLET (MALOTALASNA) TRANSFORMACIJA



Slika 2.1: Poređenje vremensko-frekvencijskih svojstava za vremensku seriju, zatim njena Furijeova transformacija, kratkotrajna Furijeova i na kraju vejvlet transformacija.

2.3 Kontinualna vejvlet transformacija

Kontinualna vejvlet transformacija vremenske serije $x(t)$ može biti zapisana kao

$$W_x(\tau, s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\psi_{\tau,s}^*(t)dt,$$

gde $*$ označava kompleksnu konjugaciju. Vejvlet transformacija razlaže vremensku seriju $x(t)$ na bazične funkcije (vejvlete), $\psi_{\tau,s}(t)$, baš kao što se u Furijeovoj analizi koriste sinusi i kosinusi. Termin vejvlet označava mali talas (talasić, od engleske reci wavelet), gde se reč „mali” odnosi na to što je *window* funkcija konačne dužine (ima kompaktni nosač), dok se reč „talas” odnosi na stanje u kom funkcija osciluje. Ove bazne funkcije, koje su određene dužine i oscilacija, dobijene su translacijom i dilatacijom *mother* vejvleta $\psi(t)$ koji je definisan sa

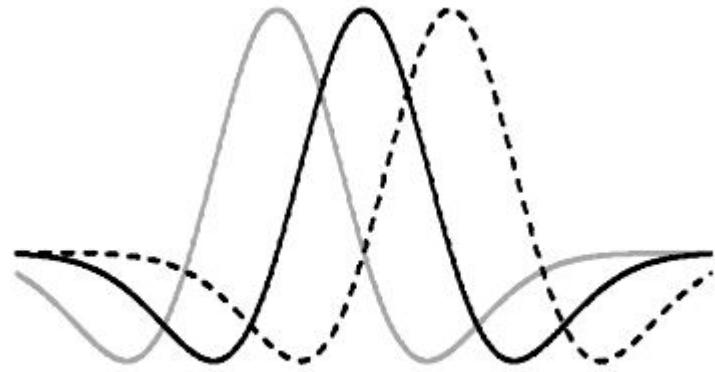
$$\psi_{\tau,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}}\psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right),$$

gde τ označava parametar translacije (određuje poziciju u vremenu), s je skala (parametar dilatacije), dok $\frac{1}{\sqrt{|s|}}$ predstavlja normalizaciju energije duž različitih skala (ovaj izraz zapravo izjednačava varijansu skaliranog *mother* vejvleta i varijansu originalnog *mother* vejvleta). Transformisani signal je funkcija pomeranja (τ) i skale s .

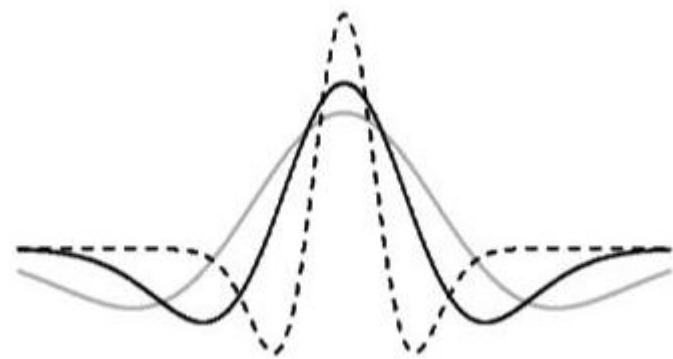
Termin „translacija” se odnosi na to što se prozor pomera duž signala (menja lokaciju). (pogledati sliku 2.2)

Skala se odnosi na širinu vejvleta. Kada se menja parametar skale, dobija se *mother* vejvlet koji je kompresovan ili raširen. Ako je $s < 1$, tada će dobijeni vejvlet biti kompresovan. S druge strane, ukoliko je $s > 1$, dobijeni vejvlet će biti raširen. Na kraju, ukoliko je za određeni vejvlet $s = 1$, tada je dati vejvlet baš *mother* vejvlet. (videti sliku 2.3) Kada je u pitanju frekvencija, niže skale kompresovane vejvlet funkcije hvataju detalje koji se brzo menjaju, odnosno visoke frekvencije. Više skale kod raširene vejvlet funkcije hvataju detalje koji se sporije menjaju, odnosno, niže frekvencije.

10 GLAVA 2. VEJVLET (MALOTALASNA) TRANSFORMACIJA



Slika 2.2: Vejvlet translacija: $\tau = 0$ (crna puna linija), $\tau < 0$ (siva puna linija), $\tau > 0$ (crna isprekidana linija).



Slika 2.3: wavelet dilatation

Da bi $\psi(t)$ bio mother vejvlet, potrebno je da zadovolji naredne uslove:

1. Integral od $\psi(\cdot)$ je 0, odnosno,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0.$$

Drugim rečima, prosečna vrednost vejvleta u vremenskom domenu mora biti 0.

- 2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2(t) dt = 1,$$

što znači da je $\psi(t)$ ograničeno na intervalu vremena.

3. $\psi(t)$ treba da zadovoljava takozvani uslov prihvatljivosti,

$$0 < C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty,$$

gde je $\hat{\psi}(\omega)$ Furijeova transformacija od $\psi(t)$, odnosno, $\hat{\psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) e^{-i\omega t} dt$, kako bi se obezbedila rekonstrukcija signala bez gubitka informacija.

Sa druge strane, definišemo inverznu vejvlet transformaciju sa

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\tau,s}(t) W_x(\tau, s) \frac{d\tau ds}{s^2},$$

koja omogućava da se originalne serije, $x(t)$, razviju ponovo iz svoje kontinualne vejvlet transformacije. U vejvlet domenu možemo definisati nekoliko interesantnih veličina, baš kao i u Furijeovoj transformaciji. Na početku, možemo definisati vejvlet stepeni spektrum kao $|W_x(\tau, s)|^2$. Ova veličina meri koliki je relativan doprinos varijansi vremenske serije u svakom vremenskom trenutku i na svakoj skali. Zapravo, vejvlet stepeni spektrum može da se integrali po τ i s kako bi se povratila ukupna varijansa serije na sledeći način:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |W_x(\tau, s)|^2 \frac{d\tau ds}{s^2}.$$

12 GLAVA 2. VEJVLET (MALOTALASNA) TRANSFORMACIJA

Sledeća interesantna veličina u vejvlet domenu je cross-wavelet spektrum. Ova veličina meri kovarijansu između dve serije u vremensko-frekvencijskom prostoru. Neka su date dve vremenske serije $x(t)$ i $y(t)$ sa vejvlet transformacijama $W_x(\tau, s)$ i $W_y(\tau, s)$. Tada cross-vejvlet spektrum možemo definisati preko $W_{xy}(\tau, s) = W_x(\tau, s)W_y^*(\tau, s)$. Cross-vejvlet spektrum može da se razloži na realne i imaginarne delove.

Vejvlet transformacija u određenom momentu u vremenu koristi informacije od susednih tačaka pa je samim tim manje tačna kako vejvlet dopire do uglova vremenske serije (ovaj deo zove se konus uticaja). Regija pod uticajem se povećava sa povećanjem širine ili privremenog nosača vejvleta, a kako bi se umanjio efekat takvih uticaja, predloženo je nekoliko metoda kao što su dodavanje nula (engl.zero padding), value padding (engl. povećanje vrednosti), periodizacija i druge. Sve u svemu, rezultate koji su blizu početka i kraja vremenske serije treba čitati pažljivo.

Kako je pomenuto ranije, svi vejveti koji se koriste u vejvlet analizi dobijeni su dilatacijom i translacijom mother vejvleta. Brojne funkcije se koriste u ovu svrhu. Mother vejvlet koji se najčešće koristi za kontinualnu vejvlet transformaciju naziva se Morlet vejvlet. (videti sliku) Pored njega, često su korišćeni i Paul i Meksički šešir vejvet (videti sliku).

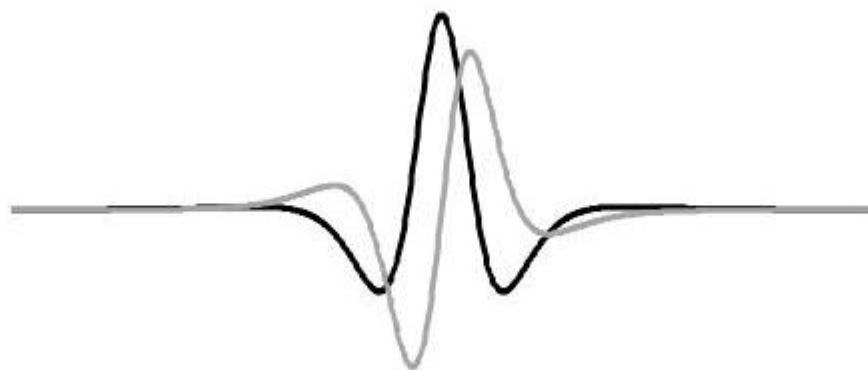
Ono što Morlet vejvlet čini pogodnim za ovaku svrhu jeste njegova kompleksna priroda koja omogućava vremenski zavisnu amplitudu, kao i fazu za različite frekvencije. Morlet vejvlet definisan je sa

$$\psi(t) = \pi^{-\frac{1}{4}} \left(e^{i\omega_0 t} - e^{-\frac{\omega_0^2}{2}} \right) e^{-\frac{t^2}{2}}$$

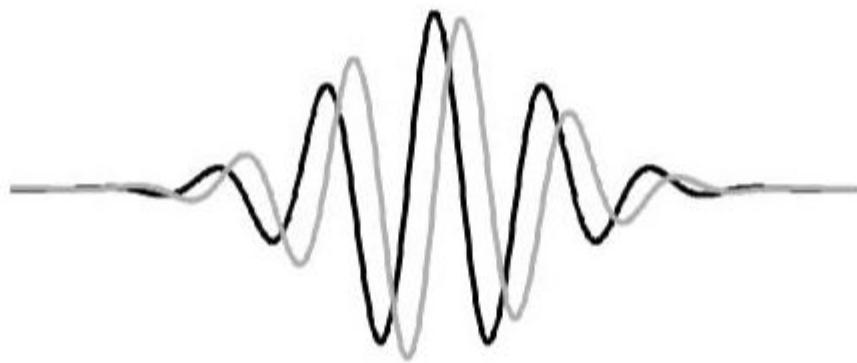
Kako izraz $e^{-\frac{\omega_0^2}{2}}$ postaje zanemarljiv za specijalno izabrano ω_0 , Morlet vejvlet može jednostavnije biti definisan sa

$$\psi(t) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{i\omega_0 t} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

gde je $i = \sqrt{-1}$ imaginarni broj, dok je ω_0 centralna frekvencija vejvleta.

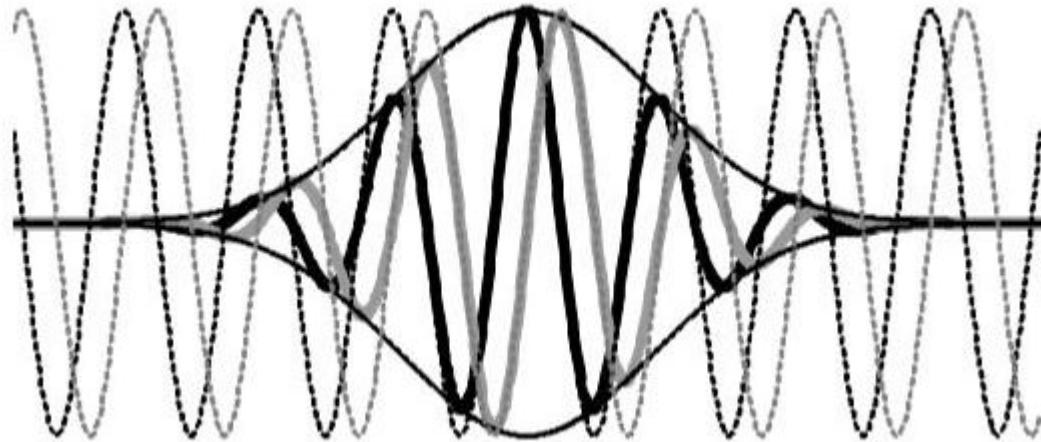


Slika 2.4: **Paul vejvlet**: realni deo je prikazan crnom, a imaginarni sivom linijom.



Slika 2.5: **MorletWave**: realni deo je prikazan crnom, a imaginarni sivom linijom.

14 GLAVA 2. VEJVLET (MALOTALASNA) TRANSFORMACIJA



Slika 2.6: Realni i Imaginarni deo Morlet vejvleta za $\omega_0 = 6$.

Vidimo da se Morlet vejvlet sastoji od kompleksnog sinusnog talasa unutar Gausovog envelopa (videti sliku 2.6). Faktor normalizacije $\pi^{-\frac{1}{4}}$, omogućava da vejvlet funkcija ima jediničnu energiju. Parametar ω_0 je broj talasa koji kontroliše broj oscilacija unutar Gausovog envelopa. Kada povećavamo (smanjujemo) ω_0 , dobijamo bolju (slabiju) lokalizaciju frekvencije, ali istovremeno i lošiju (bolju) lokalizaciju vremena. Ukoliko uzmemo da je $\omega_0 = 6$, dobićemo pogodnu ravnotežu između vremenske i frekvencijske lokalizacije. Kako je dužina Morletovog talasa data sa $\frac{4\pi s}{\omega_0 + \sqrt{2 + \omega_0^2}}$, za $\omega_0 = 6$, vejvlet skale s je gotovo jednak Furijeovom periodu što nam olakšava interpretaciju vejvet analize.

2.4 Diskretna vejvlet transformacija i multirezolucionna analiza

Računanje vejvlet koeficijenata na svakoj mogućoj skali je obiman posao. Stoga, lakše je izabrati set skala i pozicija na kojima će se praviti izračunavanja. Ukoliko se skale i pozicije bazirane na stepenu dva, takozvane dyadic scales and positions, naša analiza biće mnogo efikasnija, a neće se gubiti na tačnosti. Takvu analizu ćemo dobiti na osnovu diskretne vejvlet transformacije.

U prethodno opisanoj kontinualnoj vejvlet transformaciji, korišćeni vejvleti nisu bili ortogonalni i podaci dobijani ovakvom transformacijom bili su visoko korelisani. U neortogonalnoj vejvlet analizi koristi se proizvoljan broj skala kako bi se dobila kompletan slika. Sa druge strane, diskretna vejvlet transformacija razlaže signal na uzajamno ortogonalni set vejvleta. Stoga, diskretna vejvlet transformacija koristi ograničen broj transliranih i dilatiranih (skaliranih) vejvleta. Osnovna ideja je da se izaberu τ i s kako bi informacija sadržana u signalu mogla biti sumirana u minimumu vejvlet koeficijenata. Iako diskretna vejvlet transformacija može biti izvedena bez eksplicitnog povezivanja sa kontinualnom vejvlet transformacijom, o diskretnoj vejvlet transformaciji možemo razmišljati kao o „diskretizaciji” prethodne, kontinualne, vejvlet transformacije. „Diskretizacija” vejvleta zapisanog preko

$$\psi_{\tau,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right),$$

može biti predstavljena preko izraza:

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{s_0^j}}\psi\left(\frac{t-k\tau_0 s_0^j}{s_0^j}\right), \quad (2.1)$$

gde j i k predstavljaju cele brojeve koji kontrolišu dilataciju i translaciju vejvleta, retrospektivno. Skala diskretizacije data je sa $s = s_0^j$, a diskretizacija translacije odgovara izrazu $\tau = k\tau_0 s_0^j$, gde je $s_0 > 1$ i $\tau_0 > 0$. Primetimo da je veličina koraka translacije, $\Delta\tau = \tau_0 s_0^j$, proporcionalna skali vejvleta s_0^j . Zarad jednostavnosti, uzmimo da je $s_0 = 2$ i $\tau_0 = 1$. Dobijamo dijadičnu mrežu (engl. dyadic grid), odnosno mrežu

16 GLAVA 2. VEJVLET (MALOTALASNA) TRANSFORMACIJA

diskretnih vrednosti. Diskretna vejvlet transformacija se računa samo pri dijadičnim skalama, odnosno pri skalama 2^j . Unutar date dijadične skale bira se t vremena koji su razdvojeni mnogostrukostima skale 2^j . U ovom slučaju, maksimalan broj skala koji može biti uzet u obzir je ograničen ukupnim brojem opservacije T (T je takvo da je J maksimalan ceo broj takav da važi $J < \frac{\log t}{\log 2}$). Broj translacija unutar date dijadične skale ograničen je sa gornje strane trajanjem signala.

Kada zamenimo $s_0 = 2$ i $\tau_0 = 1$ u jednačinu (2.1) dobijamo sledeći diskretni vejvet:

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - 2^j k}{2^j}\right).$$

Diskretni vejvleti se obično biraju da budu ortonormalni preko odgovarajućeg izbora mother vejvleta, odnosno,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(t) \psi_{m,n}^*(t) dt = \begin{cases} 1, & j = m \quad i \quad k = n \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

To znači da su diskretni vejvleti ortogonalni na svoje dilatacije i translacije i normalizovani tako da imaju jediničnu energiju. Oslanjajući se na osobine spektra, vejvlet funkcija može da se posmatra kao pojasno propusni filter (*band-pass filter*). Posmatrajmo širenje vejvleta u vremenskom domenu sa faktorom 2. Pri svakom širenju vejvleta odgovarajući *bandwidth spektar* (bandwidth-rang frekvencije, razlika izmedju komponente signala sa najvećom frekvencijom i komponente signala sa najmanjom frekvencijom) će se prepоловити. Ovim postupkom trebao bi nam beskonačan broj vejvleta kako si se pokrio čitav spektar. Da bi se prevazišao ovaj problem, uvode se takozvane skalirajuće funkcije, poznate i pod nazivom *father* vejvleti. Skalirajuća funkcija se ponaša kao niskopropusni filter (*low-pass filter*) i povezana je sa uglađavanjem signala. Glatki deo serije i komponente sa niskom frekvencijom obuhvaćeni su sa *father* vejvletom $\phi(t)$, dok su komponente visoke frekvencije i komponente sa detaljima opisane sa *mother* vejvletom. Diskretna vejvlet transformacija omogućava razlaganje vremenske serije na sastavne komponente multirezolucije. Aproksimacija vremenske serije $y(t)$ ortogonalnom vejvlet serijom definisana je sa

$$y(t) = \sum_k s_{J,k} \phi_{J,k}(t) + \sum_k d_{J,k} \psi_{J,k}(t) + \sum_k d_{J-1,k} \psi_{J-1,k}(t) + \dots + \sum_k d_{1,k} \psi_{1,k}(t),$$

gde je J broj multirezolucionih nivoa (skala), dok se k kreće od 1 do broja koeficijenata u odgovarajućoj komponenti. Koeficijenti $s_{J,k}, d_{J,k}, d_{J-1,k}, \dots, d_{1,k}$ su koeficijenti vejvet transformacije i dati su sa

$$s_{J,k} = \int y(t)\phi_{J,k}(t)dt,$$

$$d_{J,k} = \int y(t)\psi_{J,k}(t)dt, \quad j = 1, 2, \dots, J.$$

Ovu koeficijenti su mera toga koliki je doprinos odgovarajuće vejvet funkcije posmatranom signalu. Funkcije $\phi_{J,k}(t)$ i $\psi_{J,k}(t)$ dobijene su preko preko skaliranja i translacije na sledeći način:

$$\phi_{J,k}(t) = 2^{-J/2}\phi\left(\frac{t - 2^J k}{2^J}\right)$$

$$\psi_{J,k}(t) = 2^{-j/2}\psi\left(\frac{t - 2^j k}{2^j}\right), \quad j = 1, 2, \dots, J.$$

Jednačina

$$y(t) = \sum_k s_{J,k}\phi_{J,k}(t) + \sum_k d_{J,k}\psi_{J,k}(t) + \sum_k d_{J-1,k}\psi_{J-1,k}(t) + \dots + \sum_k d_{1,k}\psi_{1,k}(t)$$

može biti zapisana i kao

$$y(t) = S_j(t) + D_J(t) + D_{J-1}(t) + \dots + D_1(t),$$

gde $S_j(t) = \sum_k s_{J,k}\phi_{J,k}(t)$ i $D_j(t) = \sum_k d_{J,k}\psi_{J,k}(t)$, $j = 1, 2, \dots, J$ predstavljaju komponentu sa detaljima i komponentu uglačavanja, retrospektivno.

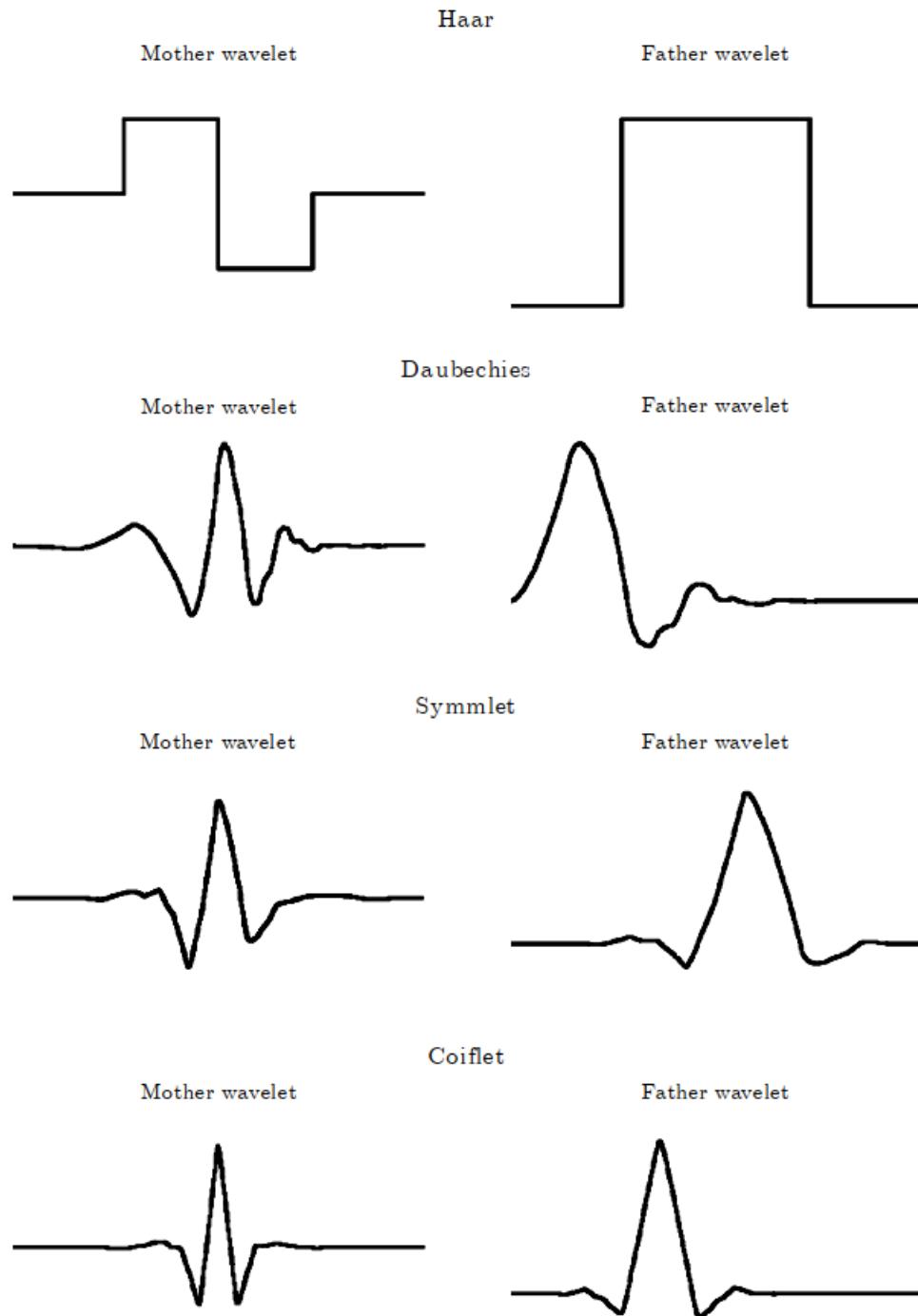
Izraz $y(t) = S_J(t) + D_J(t) + D_{J-1}(t) + \dots + D_1(t)$, predstavlja razlaganje serije $y(t)$ na ortogonalne komponente $S_J(t), D_J(t), D_{J-1}(t), \dots, D_1(t)$, pri različitim rezolucijama i konstruiše takozvanu multirezolucionu vejvet dekompoziciju. Za multirezolucionu analizu nivoa J , vejvet dekompozicija promenljive y sastoji se od J vejvet detalja $D_J(t), D_{J-1}(t), \dots, D_1(t)$ i jednog glatkog vejvleta $S_J(t)$ (wavelet smooth-funkcija ugradjivanja). Funkcija ugradjivanja obuhvata dinamiku niske frekvencije, dok vejvet

18 GLAVA 2. VEJVLET (MALOTALASNA) TRANSFORMACIJA

detalji obuhvataju karakteristike više frekvencije u y .

Postoji nekoliko vejvlet familija kao što su Haar, Daubechies, Symmlets, Coiflets (prikazane su na slici 2.7)

2.4. DISKRETNÁ VEJVLET TRANSFORMACIJA I MULTIREZOLUCIONA ANALIZA 19



Slika 2.7: Nekoliko vejvlet familija.

Glava 3

Linearni filteri

U ovom delu rada biće objašnjen pojam linearnih filtera. Filteri su značajni sa aspekta izdvajanja komponenti vremenskih serija koje su interesantne za određenu vrstu analize. Navešćemo nekoliko primera filtera koji imaju široku primenu u svetu ekonomije i finansija i objasniti njihov značaj. U ovom delu rada korišćena je literatura [1], [2] i [3].

3.1 Metod filtracije

Metod filtracije se bavi identifikacijom i izdvajanjem određenih osobina (trendova, sezona) iz vremenskih serija koje su važan pojam u modeliranju i donošenju zaključaka. Filtriranje je univerzalno istraživačko polje koje se može susresti u naukama kao što su biologija, astronomija, inženjerstvo, fizika, kao i u ekonomiji i finansijama. Filteri se u ekonomiji i finansijama koriste za izvlačenje određenih komponenti vremenskih serija poput trendova, sezona, poslovnih ciklusa, šumova i slično. Naš cilj je da damo jedinstveni okvir o filterima koji će prikazati njihovu primenu u ekonomiji i finansijama. U ovom delu ćemo početi sa linearnim filterima u vremenskom domenu, što će biti predstavljeno u delu 3.2. Tu će biti pojašnjeni pojmovi konačnog i beskonačnog impulsnog odziva filtera, a potom neuzročni i uzročni FIR filteri. Potom će se u glavi 3.3. nastaviti sa filterima frekventnog domena. U toj glavi biće objašnjeni pojmovi funkcije frekventnog odziva, kao i niskopropusnih i visokopropusnih filtera.

3.2 Filteri u vremenskom domenu

Diskretne vremenske serije predstavljaju niz posmatranja po indeksu vremena t , gde je raspon vremena od minus beskonačno do plus beskonačno,

$$\{x_t\}_{t=-\infty}^{\infty} = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots).$$

Vektor posmatranih vremenskih serija konačne dužine može izgledati kao realizacija nekog slučajnog procesa ili kao segment beskonačnog niza,

$$(\dots, x_{-2}, x_{-1}, \underbrace{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}}_{\text{posmatranja}}, x_N, x_{N+1}, \dots),$$

gde je x_0 prvo posmatranje (ili realizacija), a x_{N-1} poslednje posmatranje.

Linearni filter jednostavno kovertuje vremensku seriju x_t u drugu vremensku seriju y_t pomoću linearne transformacije,

$$x_t \rightarrow \boxed{\text{Filter}} \rightarrow y_t.$$

Izlaz y_t linearног filtera je rezultat dobijen operacijom nad ulazom x_t , pomoću vektora koeficijenata ω_t . Elementi vektora koeficijenata $\omega_t = (\dots, \omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots)$ se nazivaju *filter koeficijenti*. Operacija nad ulaznim vektorom x_t sa vektorom koeficijenata ω_t može se prikazati kao

$$y_t = \omega * x_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \omega_i x_{t-i}, \quad (3.1)$$

gde je buduća vrednost x_t potrebna za dobijanje izlaza filtera u vremenu t . U realnoj primeni ovo je možda neizvodljivo. Kao rezultat

toga, nameću se određena ograničenja na filter tako da izlaz filtera ne može da postoji pre nego što se realizuje sam ulaz, tj.

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i x_{t-i},$$

gde su iskorišćene samo prošle i sadašnje vrednosti ulaza. Filter sa ovim osobinama se naziva *uzročni filter* ili *fizički ostvarljiv filter*. Ako su filter koficijenti konstantni tokom vremena onda takav filter nazi-vamo *invarijantni filter*.¹ Linearni filteri u vremenskom domenu se klasificuju prema njihovom odgovoru na posebne signale. Razmotrimo ulaz

$$x_t = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \quad (3.2)$$

koji predstavlja poznati jedinični impulsni signal. Za dati jedinični impulsni signal, izlaz filtera zovemo *impulsni odziv* tog filtera. Ako je impulsni odziv filtera konačan, zovemo ga konačni impulsni odziv filtera ili *FIR* (*Finite Impulse Response*) filter. S druge strane, impulsni odziv filtera koji nije konačan naziva se beskonačni impulsni odziv filtera ili *IIR* (*Infinite Impulse Response*) filter.

3.2.1 Beskonačni impulsni odziv filtera

Linearni filteri se takođe mogu posmatrati kao specijalan slučaj linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima,

$$y_t = \sum_{i=1}^L a_i y_{t-i} + \sum_{i=0}^M \omega_i x_{t-i}, \quad (3.3)$$

gde je L *lag* vrednost izlaza y_t , a M *lag* vrednost ulaza x_t , gde se

¹Ako je y_t izlaz filtera F primenjen na x_t , filter je vremenski invarijantan ako važi

$$F(x_{t+h}) = y_{t+h}$$

za svaki ceo broj h .

trenutna vrednost ulaza koristi za određivanje trenutne vrednosti izlaza. Drugim rečima, postoji povratna veza između izlaza iz prošlih filtera i izlaza iz sadašnjih filtera. Diferencijalna jednačina u ovoj formi može se rešiti primenom standardnih tehnika. Predstavićemo jedan jednostavan primer linearnih diferencnih jednačina kako bismo prikazali njihovu vezu sa linearnim filterima.

Razmotrimo u nastavku sledeću diferencnu jednačinu prvog reda,

$$y_t = ay_{t-1} + x_t, \quad (3.4)$$

gde se izlaz y_t ne može odrediti čak i ako su x_t i koeficijenti a dostupni, osim ako ne postoje pomoćne informacije o y_t u nekom datom vremenskom trenutku t_0 , za $t_0 \leq t$. Neka proces počinje u vremenskom trenutku $t = 0$ tako da je $x_t = 0$ za $t \leq 0$ i neka je y_0 poznato. Rešenje jednačine (3.4) može se pronaći pomoću rekurzivne smene, tj.

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 y_0 + x_1 \\ y_2 &= a_1 y_1 + x_2 \\ &= a(ay_0 + x_1) + x_2 \\ &= a^2 y_0 + ax_1 + x_2 \\ y_3 &= a y_2 + x_3 \\ &= a^3 y_0 + a^2 x_1 + ax_2 + x_3 \\ &= a^3 y_0 + \sum_{i=0}^{3-1} a^i x_{3-i}. \end{aligned}$$

Rešenje možemo uopštiti za svako t , tj.

$$y_t = a^t y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} a^i x_{t-i}.$$

Neka je početno stanje u jednačini (3.4) $y_{-1} = 0$. Za dati impulsni

ulaz u jednačini (3.2), impulsni odziv filtera je dat sa

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0 = 1 \\ y_1 &= ay_0 + 0 = a \\ y_2 &= ay_1 + 0 = a^2 \\ &\vdots \\ y_t &= y^t. \end{aligned}$$

Ovakav filter ima impulsni odziv sa beskonačnim trajanjem. Stoga je ovo filter beskonačnog impulsnog odziva (*IIR*). Zapravo, bilo koji filteri u formi diferencne jednačine mogu imati impulsni odziv sa beskonačnim vremenom trajanja. Ako je sistem diferencnih jednačina stabilan, impulsni odziv će asimptotski težiti nuli. S druge strane, ako sistem nije stabilan, impulsni odziv će divergirati. Stabilnost sistema diferencnih jednačina zavisi od skupa parametara a_i u jednačini (3.3). Na primer, filter u jednačini (3.4) je nestabilan ako je $|a| > 1$ jer u tom slučaju impulsni odziv divergira bez granice. S druge strane, ako je $|a| < 1$, impulsni odziv će asimptotski težiti nuli.

3.2.2 Neuzročni konačni impulsni odziv (*FIR*) filteri

Uopšteni zapis *FIR* filtera je

$$y_t = \sum_{i=-N}^{M} \omega_i x_{t-i},$$

gde se filtrira N budućih i M prošlih vrednosti, kao i trenutna vrednost ulaza. To je neuzročni filter. Uopšteno, neuzročni *FIR* filter u ekonomiji i finansijama predstavlja jednostavan centrirani pokretni prosek,

$$y_t = \frac{1}{M+N+1} (x_{t-M} + \dots + x_{t-1} + x_t + x_{t+1} + \dots + x_{t+N}),$$

gde su svi filter koeficijenti jednaki. Impulsni odziv ovog filtera je konačan:

$$\omega_i = \begin{cases} \frac{1}{M+N+1}, & i = -N, \dots, -1, 0, 1, \dots, M \\ 0, & \text{inac̚e.} \end{cases}$$

Na slici 3.1 ilustrovana su tri različita centrirana pokretna proseka petominutnog deviznog kursa DEM-USD, za različite vrednosti M i N . Od M prošlih vrednosti i N budućih vrednosti ulaza potrebnih za dobijanje filter izlaza u vremenu t , M podataka na početku i N podataka na kraju izlaza nedostaje. Ova karakteristika čini centrirani pokretni prosek manje zanimljivim u praksi, posebno kada je cilj prognoza buduće vrednosti signala.

Centralni pokretni prosek je simetričan za $M = N$, samo ako je $\omega_i = \omega_{-i}$. Međutim, filter koeficijenti ne moraju biti međusobno jednaki. Razmotrimo centrirani pokretni prosek gde se ω_i određuju iz izraza $(0.5 + 0.5)^{2N}$. Na primer, za $N = 1$, filter će biti

$$y_t = 0.25x_{t-1} + 0.5x_t + 0.25x_{t+1}.$$

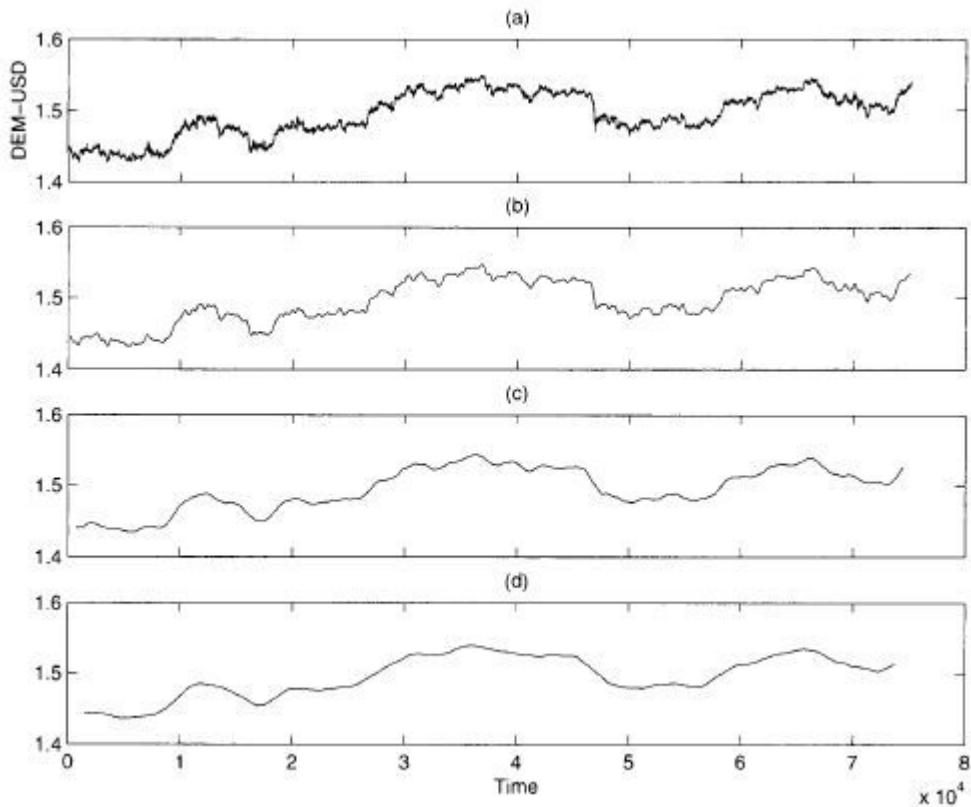
Ovaj filter je poznat kao *Hanning filter* koji je ime dobio po austrijskom meteorologu iz XIX veka, Julias von Hann-u (Blackman and Tukey, 1958, str. 171). Ako je $M = N = 2$ onda je filter

$$y_t = 0.0625x_{t-2} + 0.25x_{t-1} + 0.375x_t + 0.25x_{t+1} + 0.0625x_{t+2}.$$

Kada se N povećava, oblik impulsnog odziva ovog filtera približava se normalnoj krivoj. Slična tehnika koja ponekad dovodi do konfuzije u literaturi, naziva se *Hamming filter*, koji je dobio ime po naučniku R.W.Hamming-u (Blackman and Tukey, 1958, str. 171). U ovom slučaju, Hamming filter je

$$y_t = 0.23x_{t-1} + 0.54x_t + 0.23x_{t+1}.$$

Spencer-ov 15-tačkasti pokretni prosek koji se koristi u statistici smrtnosti je još jedan primer nejednakih filter koeficijenata u neuzročnom



Slika 3.1: Petominutni devizni kurs DEM-USD i centrirani pokretni prosek izlazi. (a) Originalni podaci. (b) Jednodnevni centrirani pokretni prosek sa $M = N = 144$ (postoji 288 5-minutnih perioda u jednom danu). (c) Jednonedeljni centrirani pokretni prosek, $M = N = 720$ (postoji 1440 5-minutnih perioda u jednoj radnoj nedelji). (d) Dvonedeljni centrirani pokretni prosek, $M = N = 1440$. Treba primetiti da M podataka na početku i N podataka na kraju svakog izlaza nedostaje, što je posledica centriranja. Uzorak pripada periodu od 2. januara 1996. do 31. decembra 1996.(vikendi su isključeni). Izvor podataka: Olsen & Associates.

FIR filteru (Chatfield, 1984, str. 17). Koeficijenti Spencer-ovog filtera su

$$\omega = \frac{1}{320}(-3, -6, -5, 3, 21, 46, 67, 74, 67, 46, 21, 3, -5, -6, -3).$$

Ako je operacija filtriranja obavljena u više faza, naziva se *višefazno filtriranje* ili *filter kaskada*. U višefaznom filtriranju, izlaz filtera se refiltrira pomoću istog ili drugačijeg filtera:

$$x_t \rightarrow \boxed{\text{Filter I}} \rightarrow z_t \rightarrow \boxed{\text{Filter II}} \rightarrow y_t.$$

Specijalno, za dati originalni ulaz x_t , prvi korak sastoji se od filtriranja ulaza pomoću skupa filter koeficijenata ω_1 :

$$z_t = \sum_{i=-N}^M \omega_{1,i} x_{t-i}.$$

U drugom koraku, prvi filter izlaz z_t filtrira se ponovo pomoću skupa filter koeficijenata ω_2 . Konačni izlaz je

$$y_t = \sum_{j=-N'}^{M'} \omega_{2,j} z_{t-j}.$$

Na primer, neka je $N = N' = 0$ i $M = M' = 1$ i neka su filter koeficijenti $\omega_{1,0} = 0.5, \omega_{1,1} = 0.5, \omega_{2,0} = 0.7$, i $\omega_{2,1} = 0.3$. Tada je prvi filter

$$z_t = 0.5x_t + 0.5x_{t-1}.$$

Izlaz prethodnog filtera će biti ulaz sledećeg

$$y_t = 0.7z_t + 0.3z_{t-1}$$

ili

$$\begin{aligned} y_t &= 0.7(0.5x_t + 0.5x_{t-1}) + 0.3(0.5x_{t-1} + 0.5x_{t-2}) \\ &= 0.35x_t + 0.5x_{t-1} + 0.15x_{t-2}. \end{aligned}$$

Koeficijenti konačnog filtera mogu biti određeni pomoću operacije nad individualnim vektorima filter koeficijenata, $\omega_1 = [0.5, 0.5]$ i $\omega_2 = [0.7, 0.3]$, što je prikazano:

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_1 * \omega_2 \\ &= (0.5, 0.5) * (0.7, 0.3) \\ &= (0.35, 0.5, 0.15).\end{aligned}$$

Može se pokazati da je Spencer-ov 15-tačkasti pokretni prosek upravo operacija nad četiri filtera (Chatfield, 1984, str. 43):

$$\begin{aligned}\omega &= (0.25, 0.25, 0.25, 0.25) * (0.25, 0.25, 0.25, 0.25) \\ &\quad * (0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2) * (-0.75, 0.75, 1, 0.75, -0.75).\end{aligned}$$

3.2.3 Uzročni **FIR** filteri

Generalno, FIR filter se može svesti na uzročni filter nametanjem ograničenja $N = 0$. Kao rezultat toga, buduće vrednosti ulaza će biti ignorisane u procesu filtriranja:

$$y_t = \sum_{i=0}^M \omega_i x_{t-i}.$$

Ovaj oblik FIR filtera je mnogo zastupljeniji u praksi, a posebno u analizi cena na finansijskom tržištu. Na primer, neka imamo $M + 1$ period jednostavnog pokretnog proseka

$$y_t = \frac{1}{M+1}(x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-M}).$$

Jedna prednost uzročnog FIR filtera je da na kraju uzoračkih podataka

ne dolazi do nestajanja izlaznih podataka. Nedostaje samo prvi M izlaz od M prošlih vrednosti ulaza, a pored sadašnje vrednosti, moguće je odrediti filter izlaza u vremenu t . Slika 3.2 prikazuje ilustraciju 5-minutnog DEM-USD deviznog kursa za različite vrednosti M .

U jednostavnom pokretnom proseku, poželjno je dati više značaja novijim ulazima, a manje onima iz dalje prošlosti. Na primer, Fischer (1937) je predložio sledeće linearno opadanje težinskih koeficijenata u jednostavnom pokretnom proseku:

$$\begin{aligned}\omega'_0 &= M + 1 \\ \omega'_1 &= M \\ \omega'_2 &= M - 1 \\ &\vdots \\ \omega'_M &= 1,\end{aligned}$$

koji ima odgovarajući prikaz pokretnog proseka

$$y_t = \frac{2}{(M+1)(M+2)} \sum_{i=0}^M \omega'_i x_{t-i}, \quad \omega'_i = \omega_{M+1-i}$$

ili

$$y_t = \sum_{i=0}^M \omega_i x_{t-i}, \quad \omega_i = \frac{2\omega'_i}{(M+1)(M+2)}.$$

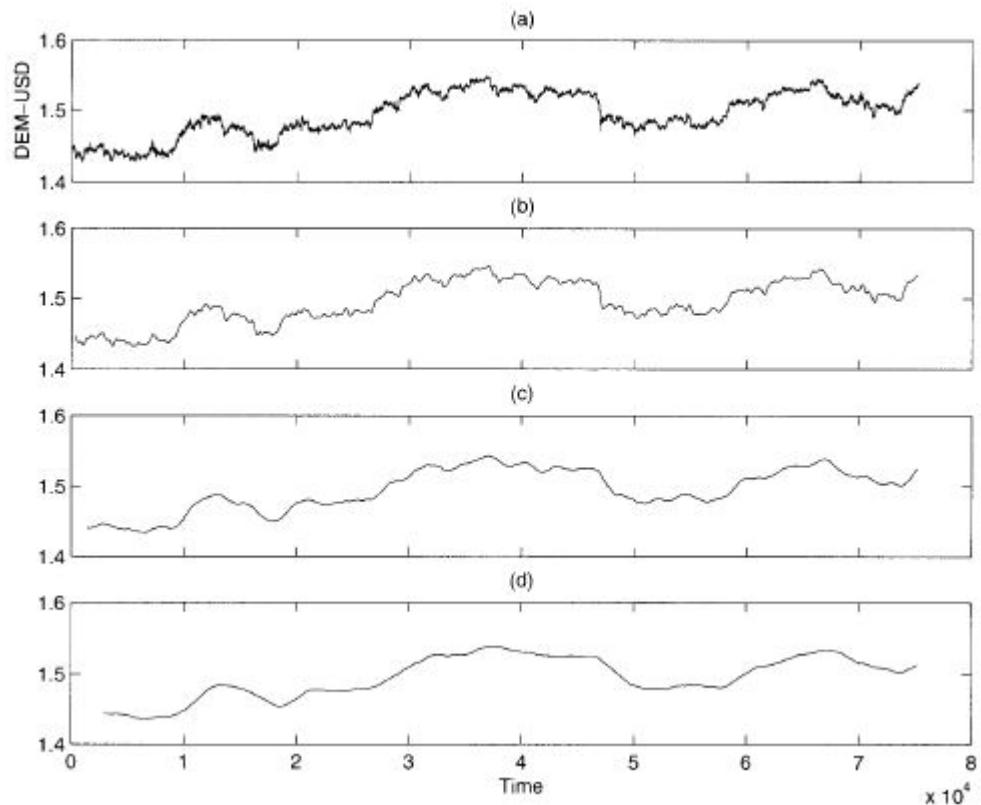
Na primer, neka je $M = 5$ tako da

$$y_t = \frac{2}{(6)(7)} (6x_t + 5x_{t-1} + 4x_{t-2} + 3x_{t-3} + 2x_{t-4} + x_{t-5}),$$

što je

$$y_t = 0.29x_t + 0.24x_{t-1} + 0.19x_{t-2} + 0.14x_{t-3} + 0.09x_{t-4} + 0.05x_{t-5}$$

Ako težinski koeficijenti u jednostavnom pokretnom proseku opadaju eksponencijalno, dobijamo filter poznat pod imenom *eksponencijalni težinski pokretni prosek* (*Exponentially Weight Moving Average-EWMA*).



Slika 3.2: Petominutni DEM-USD devizni kurs i jednostavan pokretni prosek filter izlaz. (a) Originalni podaci. (b) Jednostavni dnevni pokretni prosek (postoji 288 5-minutnih perioda u toku jednog dana, tako da je $M = 288$). (c) Jednostavni nedeljni pokretni prosek, $M = 1440$. (d) Jednostavan dvonedeljni pokretni prosek, $M = 2880$. Treba napomenuti da izlazi ovog puta nedostaju samo na početku uzorka. Uzorak pripada periodu od 2. januara 1996. do 31. decembra 1996. (vikendi isključeni). Izvor podataka: Olsen & Associates.

Na primer, ako je $\omega_i = \phi^i$, gde je ϕ proizvoljna konstanta između 0 i 1 i za $i = 0, 1, \dots, M$ težinski koeficijenti zadovoljavaju

$$\begin{aligned}\omega'_0 &= \phi^0 \\ \omega'_1 &= \phi^1 \\ \omega'_2 &= \phi^2 \\ &\vdots \\ \omega'_M &= \phi^M,\end{aligned}$$

pa je

$$y_t = \frac{1}{\sum \omega'_i} \sum_{i=0}^M \omega'_i x_{t-i} = \sum_{i=0}^M \omega_i x_{t-i},$$

gde je $\omega_i = \omega'_i / \sum \omega'_i$. Za $\phi = 0.4$ i $M = 5$, pokretni prosek je

$$\begin{aligned}y_t &= \frac{1}{1.66}(x_t + 0.4x_{t-1} + 0.4^2x_{t-2} + 0.4^3x_{t-3} \\ &+ 0.4^4x_{t-4} + 0.4^5x_{t-5}) \\ &= 0.6x_t + 0.24x_{t-1} + 0.1x_{t-2} + 0.04x_{t-3} \\ &+ 0.01x_{t-4} + 0.01x_{t-5}.\end{aligned}$$

Koeficijenti jednostavnog pokretnog proseka mogu rasti i opadati sa rastućim razmacima (**lag**). Specijalan slučaj u ekonomiji je poznat kao *Almon lag* (Almon, 1965). U Almon lag specifikaciji, filter koeficijenti mogu biti određeni na osnovu sledećeg polinoma drugog reda:

$$\omega'_i = \phi_0 + \phi_1 i + \phi_2 i^2, \quad i = 0, 1, \dots, M,$$

gde su ϕ_0, ϕ_1 i ϕ_2 pozitivne konstante između 0 i 1. U tom slučaju filter koeficijenti su

$$\begin{aligned}
\omega'_0 &= \phi_0 \\
\omega'_1 &= \phi_0 + (1)\phi_1 - (1^2)\phi_2 \\
\omega'_2 &= \phi_0 + (2)\phi_1 - (2^2)\phi_2 \\
&\vdots \\
\omega'_M &= \phi_0 + (M)\phi_1 - (M^2)\phi_2.
\end{aligned}$$

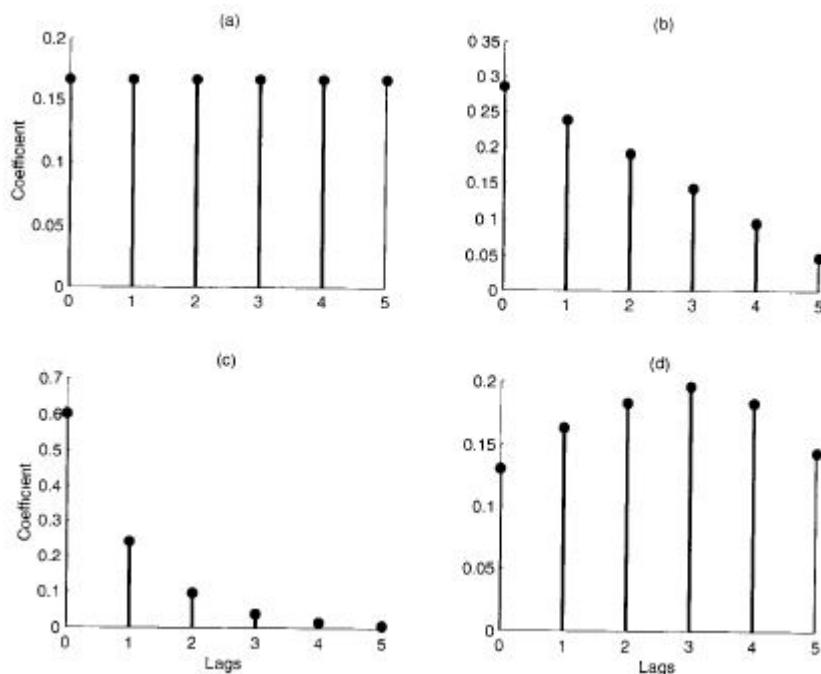
Uzmimo da je $M = 5, \phi_0 = 0.1, \phi_1 = 0.03$ i $\phi_2 = 0.005$, a filter koeficijenti su

$$\begin{aligned}
\omega'_0 &= 0.1 \\
\omega'_1 &= 0.1 + (1)0.03 - (1^2)0.005 = 0.11 \\
\omega'_2 &= 0.1 + (2)0.03 - (2^2)0.005 = 0.14 \\
\omega'_3 &= 0.1 + (2)0.03 - (2^2)0.005 = 0.14 \\
\omega'_4 &= 0.1 + (2)0.03 - (2^2)0.005 = 0.14 \\
\omega'_5 &= 0.1 + (2)0.03 - (2^2)0.005 = 0.12.
\end{aligned}$$

Stoga, odgovarajući pokretni prosek je

$$\begin{aligned}
y_t &= \frac{1}{0.76} (0.1x_t + 0.11x_{t-1} + 0.14x_{t-2} + 0.14x_{t-3} \\
&+ 0.14x_{t-4} + 0.12x_{t-5}) \\
&= 0.13x_t + 0.15x_{t-1} + 0.18x_{t-2} + 0.19x_{t-3} + 0.18x_{t-4} + 0.16x_{t-5}.
\end{aligned}$$

Različiti tipovi težinskih koeficijenata u jednostavnom pokretnom prosjeku su prikazani na slici 3.3.



Slika 3.3: Filter koeficijenti u jednostavnom pokretnom proseku kao funkcija *lag-a*. (a) Konstantni koeficijenti: koeficijenti su jednaki za sve lag-ove. (b) Linearno opadanje: vrednosti koeficijenata opadaju linearne sa porastom lag-a. (c) Geometrijsko opadanje: vrednosti koeficijenata opadaju eksponencijalno sa porastom lag-a. (d) Vrednost koeficijenata prvo raste, a zatim opada sa porastom lag-a.

3.3 Filteri frekvetnog domena

Posmatramo kružnicu sa radijusom dužine R i centrom u tački O , kao što je prikazano na slici 3.4. Neka radijus rotira u smeru suprotnom od kazaljke na satu, sa početkom u OA i pomera se ka OB . Kada se vrati u OA , krug je zatvoren. U specijalnoj poziciji kao što je OP , sa OA se obrazuje ugao θ . Sinus, kosinus i tangens funkcije su pomoću ugla θ definisane sa

$$\sin\theta = \frac{V}{R}, \quad \cos\theta = \frac{h}{R}, \quad \tan\theta = \frac{V}{h}.$$

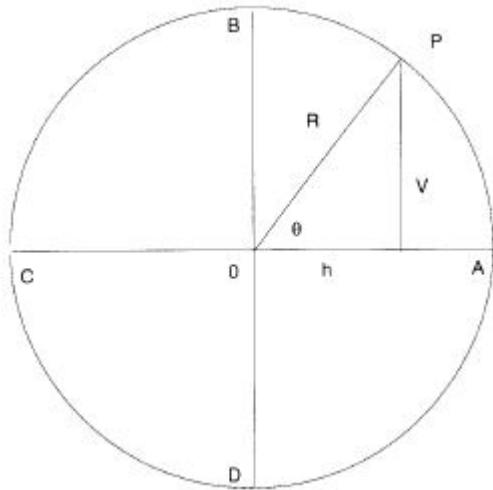
Razmotrimo veličinu ugla θ tokom opisivanja celog kruga. Na početku je njegova vrednost jednaka nuli u OA ($V = 0$), zatim jedinici u OB ($V = R$), pa nuli u OC ($V = 0$) i minus jedinici u OD ($V = -R$). Dakle, sinusna funkcija ima konstantan opseg fluktuacije u svakom krugu: ± 1 . Drugim rečima, amplituda fluktuacije iznosi 1. Kosinusna funkcija je takođe ograničena sa ± 1 . Njena vrednost u OA je jedan, nula u OB , minus jedan u OC i nula u OD . Međutim, ove dve funkcije imaju različite početne vrednosti u OA , gde kosinusna funkcija uzima vrednost jedan, dok s druge strane sinusna funkcija uzima vrednost 0.

Ugao θ može biti izražen u stepenima i radijanima. Posmatrajmo rastojanje između tačaka A i P po luku na slici 3.4 i neka je ta dužina jednaka radijusu R . Radjan je veličina ugla θ . Obim kruga iznosi $2\pi R$, a kompletan krug iznosi 360° , a u nastavku je prikazana veza između stepena i radijana.

Sinusna i kosinusna funkcija su obe periodične, sa osnovnim periodom od 2π . To implicira da dodavanje celobrojnog umnoška od 2π ugлу θ neće promeniti vrednosti $\sin\theta$ i $\cos\theta$. Dakle, važi:

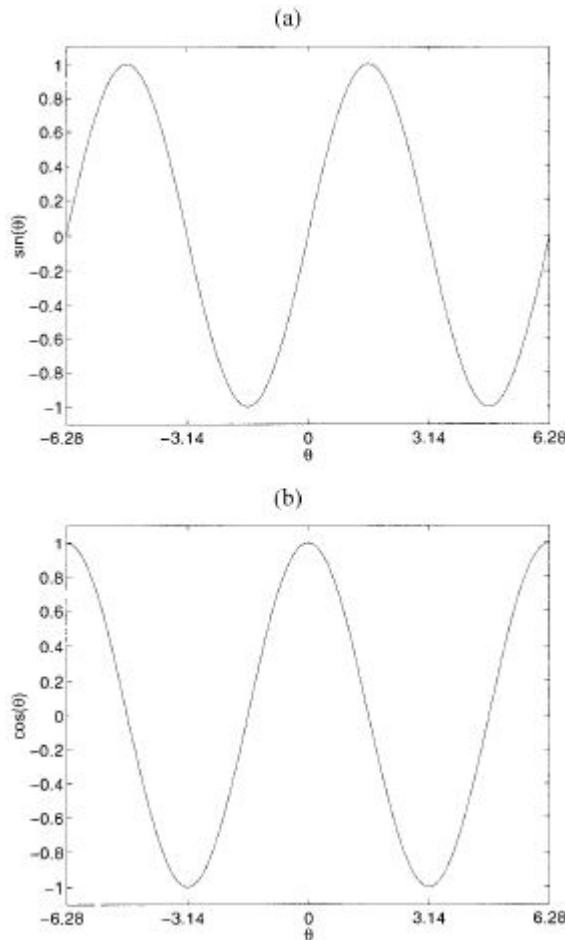
$$\sin\theta = \sin(\theta + 2\pi n), \quad \cos\theta = \cos(\theta + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Slika 3.5 prikazuje vrednosti dve funkcije u periodu od dva cela ciklusa: jedan u smeru suprotnom od smera kretanja kazaljke na satu (od 0 do 2π), a drugi u smeru kretanja kazaljke (od 0 do -2π). Na slici 3.5 možemo primetiti da obe funkcije, sinusna i kosinusna, imaju iste



Slika 3.4: Kružnica sa radijusom R . Sinus, kosinus i tangens funkcije ugla θ su definisane sa $\sin\theta = \frac{V}{R}$, $\cos\theta = \frac{h}{R}$, $\tan\theta = \frac{V}{h}$. Ugao θ je odnos i mera izražena u stepenima ili radijanima. Neka je rastojanje između A i P po luku jednak radijusu R . Radijan je veličina ugla θ .

Stepeni	Radijani
0	0
90	$\frac{1}{2}\pi$
18	π
360	2π .



Slika 3.5: Ciklične funkcije. (a) $\sin\theta$. (b) $\cos\theta$ funkcije tokom dva cela ciklusa: jedan u smeru suprotnom od smera kretanja kazaljke na satu (od 0 do 2π), a drugi u smeru kretanja kazaljke (od 0 do -2π). Napomenimo da sinusna i kosinusna funkcija imaju različite početne vrednosti za $\theta = 0$. Ako kosinusnu krivu pomerimo blago udesno, dobićemo krivu koja je identična krivoj koja se dobija sa sinusnom funkcijom, uz pomeraj $\pi/2$. Kaže se da se ove dve krive razlikuju u fazi (tj. lokacija maksimalne i minimalne vrednosti za ove funkcije su različite za svaki period).

amplitude i iste dužine ciklusa. Međutim, one imaju različite početne vrednosti u OA gde je $\theta = 0$. Na slici možemo primetiti da ako kosinusnu krivu pomerimo blago udesno, dobijamo krivu koja je identična krivoj koja se dobija sinusnom funkcijom, uz pomeraj za $\pi/2$. Kažemo da se ove dve krive razlikuju u fazi. Veza između ove dve funkcije je data sa

$$\cos\theta = \sin(\theta + \frac{\pi}{2}).$$

Prelaskom sa frekvetnog domena na vremenski domen mogu se ilustrovati neke druge osobine sinusoidnog signala. Razmotrimo sledeće vremenske serije:

$$x_t = \sin(a + \frac{2\pi t}{p}), \quad t = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.5)$$

gde se svaka oscilacija završava u p vremenskih perioda, te postoji N/p oscilacija. Kada je $p = N$, postoji samo jedna kompletна oscilacija za vreme perioda posmatranja, jedan lokalni maksimum i minimum i broj ciklusa po jedinici vremena iznosi $1/N$. Međutim, ako je p različito od N , broj ciklusa po jedinici vremena iznosi $1/p$.²

Kako bismo ovo ilustrovali, pretpostavimo da je $N = 12$, $a = 1.57$ i $p = 2$ u jednačini 3.5. Uzastopne vrednosti za x su

$$(-1, 1, -1, 1, \dots, -1, 1),$$

tako da postoji šest oscilacija ($N/p = 12/2$) i svaka oscilacija (± 1) se završava u dva vremenska perioda. Broj ciklusa po jedinici vremena iznosi $1/2$. Pretpostavimo sada da je $p = 4$. Tada su uzastopne vrednosti x date sa

$$(1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0).$$

U ovom slučaju postoje tri oscilacije i svaka oscilacija se završava u četiri vremenska perioda. Broj ciklusa po jedinici vremena iznosi $1/4$. U tom smislu, frekvencija se može definisati kao recipročna vrednost

²Primetimo da, ako je dužina perioda ciklusa veća od veličine uzorka, $p > N$, posmatra se samo deo ciklusa.

dužine ciklusa (perioda) $f = 1/p$, gde je f broj ciklusa po jedinici vremena. Prema tome, jednačina (3.5) se može zapisati u obliku

$$x_t = \sin(a + 2\pi ft), \quad t = 0, 1, 2, \dots N - 1.$$

Na primer, mesečne makroekonomski vremenske serije mogu biti sezonske - recimo, ciklus se završava za 12 meseci, pa je $p = 12$, što ukazuje da svaki mesec ima $f = 1/12$ cikličnih oscilacija. Definicija frekvencije u smislu broja ciklusa po vremenskom periodu je laka za razumevanje i tumačenje. Međutim, ugaona frekvencija, $\omega = 2\pi f$, može se takođe koristiti u određenim okolnostima. U smislu ugaone frekvencije, jednačina 3.5 se može zapisati u obliku

$$x_t = \sin(a + \omega t), \quad t = 0, 1, 2, \dots N - 1.$$

U slučaju diskretnog vremena, frekvencija $f = 1/2$ ili ugaona frekvencija $\omega = \pi$, je poznata kao *Nyquist frekvencija*, što je najveća moguća frekvencija, pošto bi najkraća dužina ciklusa mogla biti dva vremenska perioda.³ Kako bismo ilustrovali Nyquist frekvenciju, razmotrimo uzorak neprekidnih signala sa cikličnom komponentom frekvencije $f = 1/p$, pri čemu se ciklus završava u p vremenskih perioda. Ako je interval uzorkovanja p , nećemo imati informacije o cikličnoj komponenti. Da bismo posmatrali cikličnu komponentu ovog neprekidnog signala, uzorak mora biti bar dvaput veći od p . Pretpostavimo da se za vrednost indeksa berze uzima uzorak jednom dnevno na zatvaranju, pa je period uzorkovanja jedan dan. U tom slučaju nemamo informacije o dnevnom ciklusu indeksa. Da bismo posmatrali dnevni ciklus na berzi, potrebno je uzeti najmanje dva merenja (jedno na sredini, a drugo na zatvaranju) u toku dana. Signal može imati nekoliko sinusoidnih komponenti, verovatno sa različitim amplitudama (veličinom), različitim fazama i različitim frekvencijama. Slika 3.6 prikazuje mešoviti signal. Svaka beskonačna sekvenca x_t može se takođe posmatrati kao

³Ovo se može videti u jednačini (3.5). U toj jednačini, ako je $p = 1$,

$$x_t = \sin(a + 2\pi t)$$

i važi da je x_t konstanta, jer dodavanjem celobrojnog umnoška od 2π na a neće se menjati vrednost od $\sin(a)$.

kombinacija beskonačnog broja sinusoida sa različitim amplitudama i fazama, čak i ako originalna sekvenca nije periodična:⁴

$$x_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(f) e^{i2\pi ft} df, \quad (3.6)$$

gde je $i = \sqrt{-1}$ imaginarni broj i f frekvencija definisana ranije.⁵

U jednačini 3.6 $X(f)$ dato je sa

$$X(f) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} x_t e^{-i2\pi ft}. \quad (3.7)$$

Jednačina (3.6) odnosi se na inverznu Furijeovu transformaciju, a jednačina (3.7) je Furijeova transformacija od x_t . Ove dve jednačine čine Furijeov prikaz sekvence x_t , te se nazivaju *Furijeov transformacioni par*. Jednačina (3.6) poznata je kao *sintetička jednačina* jer prikazuje originalnu sekvencu x_t kao linearu kombinaciju kompleksnih sinusoida blizu (engl. infinitesimally close) po frekvenciji sa $X(f)$, određivanjem relativne težine svakog kompleksnog sinusoida (relativna težina se koristi za opisivanje sinusoida). Jednačina (3.7) predstavlja *analitičku jednačinu*. Za dato x_t i $X(f)$ kao Furijeov transformacioni par, izraz

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} |x_t|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(f)|^2 df, \quad (3.8)$$

⁴Ovde se prepostavlja da je sekvenca stacionarna. Ako sekvenca nije stacionarna, stacionarnost se može postići pomoću različitih metoda o kojima govori Hamilton(1994b, poglavje 3).

⁵Kompleksan broj z se može prikazati u različitim oblicima. Kartezijski ili pravougaoni oblik broja z je

$$z = x + iy$$

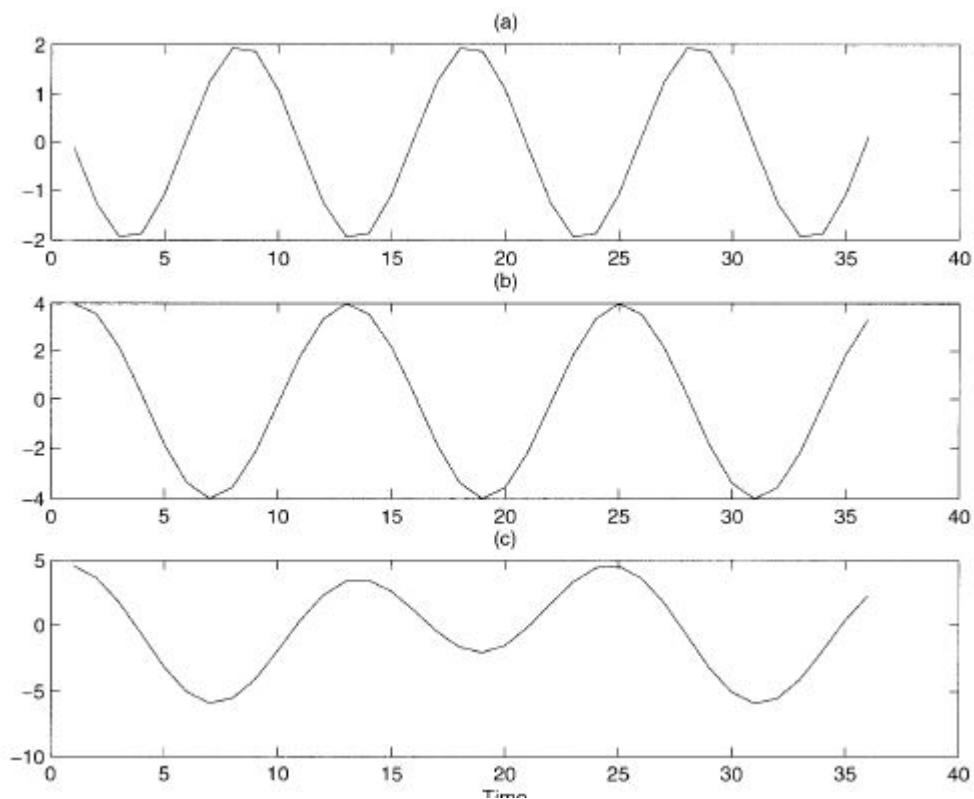
, gde je $i = \sqrt{-1}$ imaginarni broj, a x i y realni brojevi koji se odnose na realni i imaginarni deo, respektivno. Eksponencijalni oblik kompleksnog broja z je

$$z = Ae^{i\theta},$$

gde je A moduo broja z i θ ugao ili faza od z . Veza između ova dva prikaza može se odrediti pomoću Euler-ove relacije,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Za detalje o kompleksnim brojevima videti Chiang (1984, deo 15.2).



Slika 3.6: Prikaz vremenske serije (a) Kosinusne funkcije, $2\cos(2\pi t/10 + 1)$. (b) Sinusne funkcije, $4\sin(2\pi t/12 + 1)$. (c) Sume sinusne i kosinusne funkcije iz (a) i (b).

je poznat kao *Parseval-ova teorema*. Leva strana jednačine (3.8) je ukupna energija u signalu, koja se može dobiti integracijom energije po jedinici frekvencije $|X(f)|^2/2\pi$ tokom 2π intervala diskretnih vremenskih frekvencija. Kvadratna vrednost Furijeove transformacije $|X(f)|^2$ je poznata kao *spektar gustine energije* ili *spektar snage signala* x_t (Oppenheim i Schafer, 1989, poglavljje 2).

Furijeov prikaz konačne sekvene je dat sa

$$x_t = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi f_k t}, \quad t = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.9)$$

i

$$X_k = \sum_{t=0}^{N-1} x_t e^{-i2\pi f_k t}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.10)$$

gde je $f_k = k/N$. Parseval-ova relacija u ovom slučaju je (Oppenheim i Schafer, 1989, str. 574)

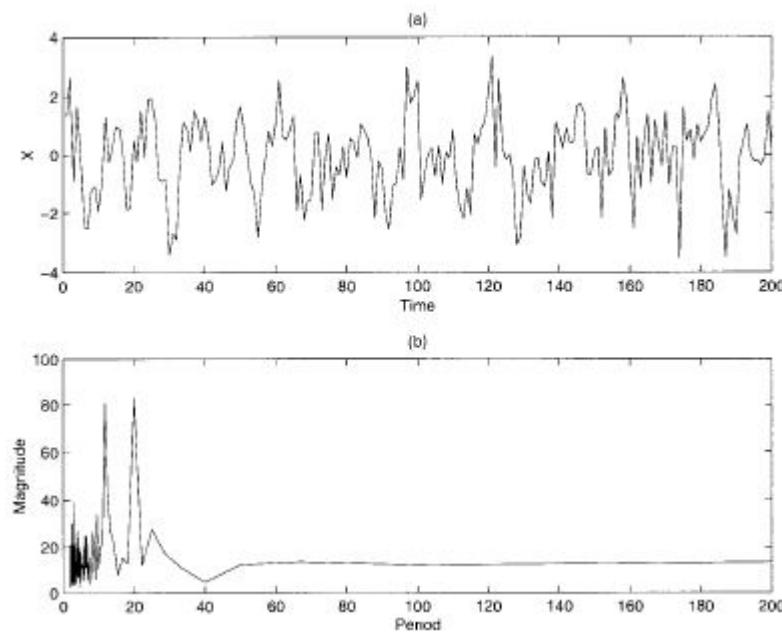
$$\sum_{t=0}^{N-1} |x_t|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2. \quad (3.11)$$

Kako bismo ilustrovali Furijeovu transformaciju u slučaju diskretnog vremena, razmotrimo sledeće vremenske serije:

$$x_t = \cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right) + \cos\left(\frac{2\pi t}{20}\right) + \varepsilon_t \quad (3.12)$$

$$= \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) + \varepsilon_t, \quad (3.13)$$

gde je ε_t slučajna promenljiva koja ima normalnu raspodelu sa srednjim nulom i varijansom jedan. Ove vremenske serije imaju dve fazne komponente sa periodima dužine 12 i 20, pa je $f_1 = 1/12$ i $f_2 = 1/20$. Na slici 3.7(a) prikazan je uzorak vremenskih serija za $N = 200$. Iako postoje dva perioda u signalu, slučajna promenljiva ε_t otežava njihovu identifikaciju u slučaju prikaza signala u vremenskom domenu. Slika 3.7(b) prikazuje Furijeovu transformaciju kao funkciju perioda p .⁶ To pokazuje da postoje dve maksimalne vrednosti Furijeove transformacije originalnog niza u 12. i 20. periodu, što ukazuje da su relativne težine (*relative weights*) ovih periodičnih komponenti mnogo više od



Slika 3.7: Signal Furijeove transformacije. (a) Originalni signal definisan u jednačini 3.13 sa dve periodične komponente i dodatom slučajnjom promenljivom. (b) Vrednost Furijeove transformacije kao funkcije perioda $p = 1/f$. Iako to otežava identifikaciju periodičnih komponenti u (a), Furijeova transformacija u (b) jasno ukazuje da su relativne težine komponenti sa 12 i 20 perioda oscilacija veće od bilo kojih drugih komponenti signala.

relativnih težina bilo kojih drugih komponenti signala.

3.3.1 Frekvetni odziv

Funkcija impulsnog odziva u vremenskom domenu je značajan alat za opisivanje i klasifikaciju linearnih filtera. Drugi način za klasifikaciju filtera je *funkcija frekventnog odziva* ili *transfer funkcija*. Funkcija frekventnog odziva u slučaju diskretnog vremena definiše se na sledeći način

$$H(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_k e^{-i2\pi fk}, \quad (3.14)$$

gde je $i = \sqrt{-1}$, f je frekvencija i ω_k funkcija impulsnog odziva filtera. Napomenimo da je funkcija frekventnog odziva Furijeova transformacija funkcije impulsnog odziva. Kako bismo analizirali filtere u frekvetnom domenu, razmotrimo signal x_t sa poznatom frekvencijom f ,⁷

⁶Takođe, možemo prikazati kvadratnu vrednost Furijeove transformacije (spektra) serija, kao funkciju frekvencije kako bi ispitali energetska svojstva signala u frekvetnom domenu.

⁷Eksponencijalni signal $x_t = Ae^{at}$ može imati realne i kompleksne vrednosti u zavisnosti od A i a . Posmatramo realan eksponencijalni signal,

$$x_t = Ae^{rt}$$

gde je A početna vrednost i r stopa rasta x_t ,

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}} + 1\right) &= \ln(x_t/x_{t-1}) \\ &= (\ln A + rt) - [\ln A + r(t-1)] \\ &= r. \end{aligned}$$

Stoga, za datu početnu vrednost A , ako je r pozitivno (negativno), x_t raste (opada) eksponencijalno.

Kompleksni eksponent je definisan kao čisto imaginaran:

$$x_t = Ae^{i2\pi ft}$$

gde je $i = \sqrt{-1}$ imaginaran broj. U tom slučaju je x_t periodično, sa periodom $p = 1/f$ (Oppenheim i Schafer, 1989, poglavlje 2).

$$x_t = e^{i2\pi ft}. \quad (3.15)$$

Primer ovakvog signala dat je na slici 3.6. Ako su filter koeficijenti poznati, frekvetni odziv se jednostavno može izračunati. Na primer, ako je ulaz kompleksni eksponent u jednačini (3.15), 3-periodični jednostavni pokretni prosek

$$y_t = \omega_0 x_t + \omega_1 x_{t-1} + \omega_2 x_{t-2}$$

ima kao izlaz

$$y_t = \omega_0 e^{i2\pi ft} + \omega_1 e^{i2\pi f(t-1)} + \omega_2 e^{i2\pi f(t-2)}. \quad (3.16)$$

Jednačina (3.16) otkriva da je izlaz filtera jednostavan umnožak ulaza frekventnog odziva,

$$\begin{aligned} y_t &= \left(\omega_0 + \omega_1 e^{-i2\pi f} + \omega_2 e^{-2i2\pi f} \right) e^{i2\pi ft} \\ &= \left(\sum_{k=0}^2 \omega_k e^{-i2\pi fk} \right)^{i2\pi ft}, \end{aligned}$$

gde je izraz u zagradi frekvetni odziv $H(f)$ definisan u jednačini (3.15). Generalno, ako je izlaz kompleksni eksponent u jednačini (3.15), uopštena forma linearnog filtera u jednačini (3.1)

$$y_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_k x_{t-k},$$

postaje

$$y_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_k e^{i2\pi f(t-k)} \quad (3.17)$$

$$= e^{i2\pi ft} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_k e^{-i2\pi fk} \right), \quad (3.18)$$

gde je izraz u zagradi frekvetni odziv definisan u jednačini (3.14). Stoga, možemo zapisati

$$y_t = H(f) e^{i2\pi ft}. \quad (3.19)$$

Funkcija frekventnog odziva može se prikazati pomoću sledećeg izraza

$$H(f) = G(f)e^{i\theta(f)}.$$

Frekventni odziv u prethodnom izrazu sastoji se od dva dela. Prvi deo, $G(f)$, naziva se funkcija dobiti (*gain*) i predstavlja vrednost funkcije frekventnog odziva, $|H(f)|$. Drugi deo predstavlja faznu funkciju. Ovo razlaganje omogućava da odredimo funkciju dobiti i fazni ugao θ filtera (Oppenheim i Schafer, 1989, str.39).

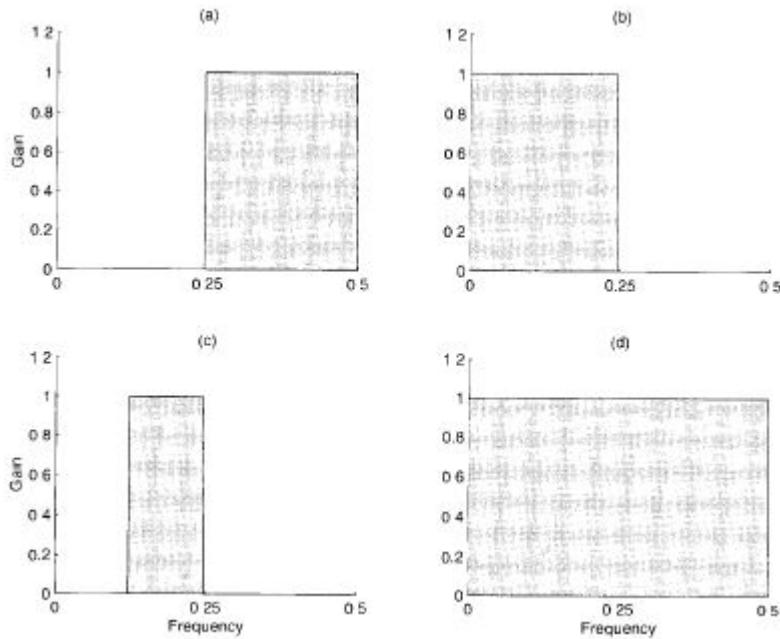
3.3.2 Niskopropusni i visokopropusni filteri

Grafički prikaz vrednosti dobiti kao funkcije frekvencije je poznat kao *dijagram dobiti*.⁸ Ako imamo veliki dobitak na niskoj frekvenciji i mali na visokoj frekvenciji, takav filter nazivamo niskopropusni filter. U tom slučaju je nisko-frekventna dinamika izlaza očuvana za vreme filtriranja, dok se komponente visoke frekvencije odbacuju. S druge strane, ako je mala dobit na niskoj frekvenciji, a velika na visokoj frekvenciji, filter se naziva visokopropusni filter. U tom slučaju jedino visoko frekventne komponente izlaza ostaju očuvane tokom filtriraja. Idealan filter bi imao dobro definisanu prekidnu frekvenciju sa frekventnim odzivom

$$H(f) = \begin{cases} 1 & f_l \leq f \leq f_u \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

gde je f_l donja prekidna frekvencija, a f_u gornja prekidna frekvencija filtera. Za idealan niskopropusni filter, imali bismo $f_l = 0$ i $f_u < 1/2$, dok bismo za idealan visokopropusni filter imali $f_l > 0$ i $f_u = 1/2$. Slika 3.8 prikazuje vrednosti funkcije dobiti za idealan visokopropusni

⁸Možemo takođe posmatrati kvadratnu funkciju dobiti $\mathcal{H} = |H(f)|^2$ kako bismo vizualizovali osobine filtera frekventnog domena. Kvadrat funkcije dobiti filtera je sličan spektralnoj funkciji gustine stacionarnih vremenskih serija; samo je filter deterministička funkcija, dok su vremenske serije stohastička.



Slika 3.8: Vrednost funkcije dobiti idealnog filtera. (a) Visokopropusni filter sa dinamikom frekvencije između $f = 1/4$ i $f = 1/2$. (b) Niskopropusni filter sa dinamikom frekvencije između 0 i $f = 1/4$. (c) Pojasni filter sa dinamikom frekvencije između $f = 1/8$ i $f = 1/4$. (d) Fazni filter bez propuštanja ikakve dinamike frekvencije.

filter sa dinamikom frekvencije između $f = 1/4$ i $f = 1/2$; idealan niskopropusni filter sa dinamikom frekvencije između 0 i $f = 1/4$; idealan pojasni filter sa dinamikom frekvencije između $f = 1/8$ i $f = 1/4$ i fazni filter koji obuhvata sve dinamike frekvencije.

Idealan filter nije kompjuterski izvodljiv jer zahteva beskonačno mnogo koeficijenata (Oppenheim i Schafer, 1989, str.204). Stoga se u praktičnoj primeni upotrebljavaju filteri približni idealnom filteru jer su oni konačni. Radi ilustracije, razmotrimo 2-periodični jednostavan pokretni prosek:

$$y_t = 0.5x_t + 0.5x_{t-1}. \quad (3.20)$$

Zamenom kompleksnog eksponenta iz jednačine (3.15) u jednačinu

(3.20) kao rezultat dobijamo

$$\begin{aligned} y_t &= 0.5e^{i2\pi ft} + 0.5e^{i2\pi f(t-1)} \\ &= \left(0.5 + 0.5e^{-i2\pi f}\right)e^{i2\pi ft}, \end{aligned}$$

i frekventni odziv ovog pokretnog proseka je

$$H(f) = \left(0.5 + 0.5e^{-i2\pi f}\right).$$

Napomenimo da je frekventni odziv jednak jedinici kada je $f = 0$. Za male vrednosti f , frekventni odziv je u blizini nule, pa se radi o niskopropusnom filteru. Slika 3.9 prikazuje funkciju dobiti za različite pokretne proseke, gde filter (niskopropusni filter) postaje zaoštreniji sa porastom dužine perioda (tj. hvata specifični dinamički opseg frekven-cije).

Podsetimo se da je frekventni odziv u eksponencijalnom zapisu

$$H(f) = G(f)e^{i\theta}$$

i za primer 2-periodičnog jednostavnog pokretnog proseka jednak je

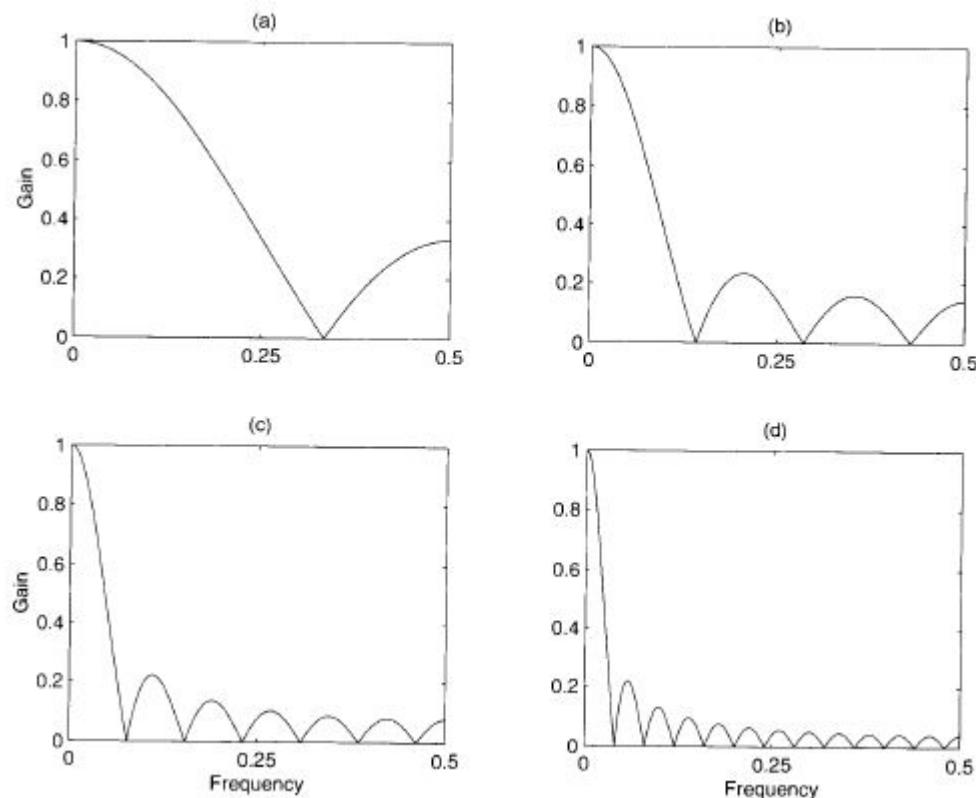
$$H(f) = 0.5\left(e^{-i\pi f} + e^{i\pi f}\right) \quad (3.21)$$

$$= [\cos(\pi f)]e^{-i\pi f} \quad (3.22)$$

što pokazuje da je funkcija dobiti $\cos(\pi f)$ i faza πf . Kako je faza filtera različita od nule, dolaziće do promena u fazi originalnih vremenskih serija. Ovo je poznato kao *fazni pomeraj*.

Fazni pomeraj ima veliki značaj u ekonomiji i finansijama. Pošto filter sa fazom različitom od nule pomera fazu ulaza, analiza zasnovana na ovakvim filterima bi za rezultat mogla imati nedostatak specifikacija o originalnim vremenskim serijama. Originalne vremenske serije su U.S. Industrial Production Index (IPI).⁹ The Business Cycle Dating Committee of the National Bureau of Economic Research (NBER) održava

⁹Total production index, 1992 = 100, mesečno, 1990:01-1993:12. Izvor: Datas-tream



Slika 3.9: Funkcija dobiti. (a) Jednostavan pokretni prosek sa periodom dužine 3. (b) Jednostavan pokretni prosek sa periodom dužine 7. (c) Jednostavan pokretni prosek sa periodom dužine 13. (d) Jednostavan pokretni prosek sa periodom dužine 25.

hronologiju poslovnog ciklusa SAD-a, koji se široko koristi u analizi poslovnih uslova. Komitet je oktobra 1991. objavio da je privreda SAD-a u recesiji i da je dostigla svoj minimum marta 1991., a da u tom trenutku počinje ekspanzija. Komitet je ranije objavio da je ekonomija dostigla maksimum aktivnosti u julu 1990. Stoga, prema NBER-u period od 8 meseci, od jula 1990. i marta 1991., predstavlja period recesije.

IPI je jedan od nekoliko mesečnih indikatora koje koristi komitet za analizu i određivanje faza u poslovnom ciklusu. Podaci IPI indeksa pokazuju da je indeks uzimao najmanje vrednosti u martu 1991. u periodu između januara 1990. i decembra 1993. (videti sliku 3.10(a)). Ovo se poklapa sa informacijama objavljenim od strane NBER-a. Međutim, 8-mesečni period jednostavnog pokretnog proseka IPI indeksa na slici 3.10(c) ukazuje na minimum u julu 1991. Izgleda da postoji 4-periodični fazni pomjeraj.

Poželjno je imati nula-fazni filter kako bi se sačuvale fazne osobine ulaznih serija. Centrirani pokretni prosek je jedan primer nula-faznog filtera. Razmotrimo sada sledeći 3-periodični centrirani pokretni prosek sa ulaznom sekvencom $x_t = e^{i2\pi ft}$.

$$y_t = \frac{1}{3} [e^{i2\pi f(t+1)} + e^{i2\pi ft} + e^{i2\pi f(t-1)}] \quad (3.23)$$

$$= \frac{1}{3} (1 + e^{-i2\pi f} + e^{i2\pi f}) e^{i2\pi ft}. \quad (3.24)$$

Prema tome, frekventni odziv je

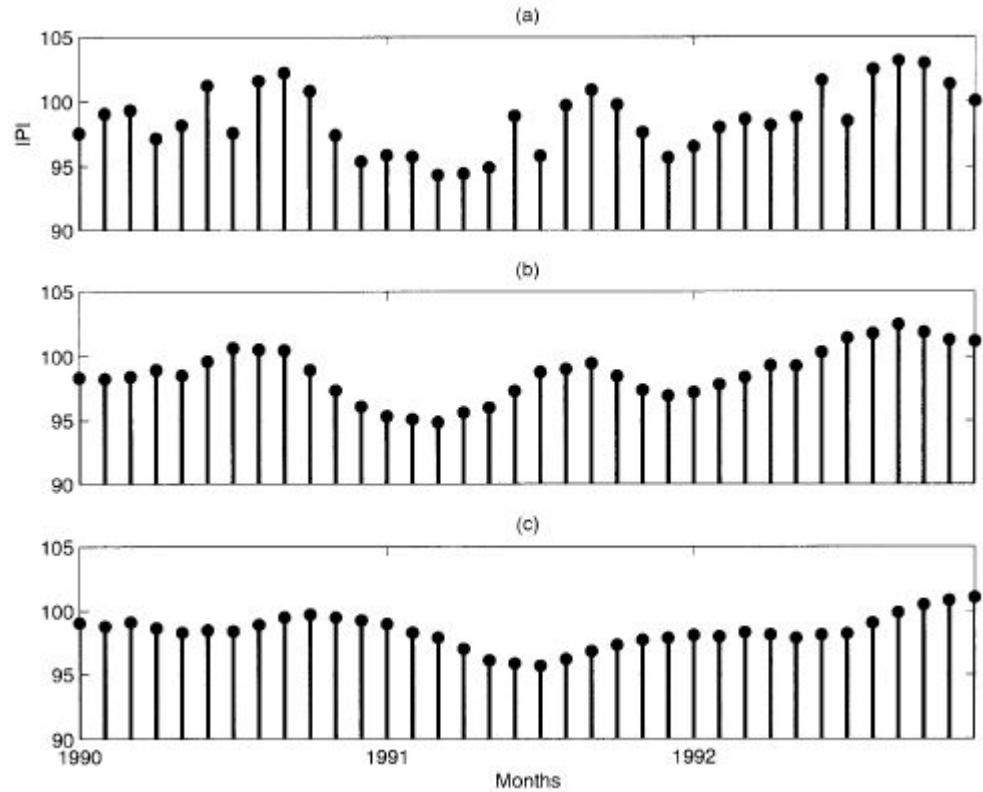
$$\begin{aligned} H(f) &= \frac{1}{3} (1 + e^{-i2\pi f} + e^{i2\pi f}) \\ &= \frac{1}{3} [1 + 2\cos(\pi f)], \end{aligned}$$

koji ima nula fazni ugao.

Zapravo, fazni ugao bi bio nula za sve simetrične centrirane pokretne momente, zato što je frekventni odziv pokretnog proseka sa jednakim težinama dat sa

$$H(f) = \frac{1}{N+M+1} e^{i2\pi f[(N-M)/2]} \frac{\sin[2\pi f(M+N+1)/2]}{\sin(2\pi f/2)} \quad (3.25)$$

gde je M broj lag vrednosti i N broj budućih vrednosti ulaza (Oppenheim i Schafer, 1989, poglavljje 6). 3.10(b) prikazuje centrirani pokretni



Slika 3.10: Fazni pomeraj kao rezultat jednostavnog pokretnog prosjeka. (a) Originalni podaci: IPI SAD-a (Industrial Production Index), $1992=100$. (b) Centrirani pokretni prosek IPI-a, $M = N = 4$. (c) Jednostavni pokretni prosek IPI-a, $M = 7$. Podaci u (a) pokazuju da je indeks uzimao najmanje vrednosti u martu 1991., dok je u 8-mesečnom periodu jednostavnog pokretnog proseka pod (c) imao najmanju vrednost u julu 1991. Postoji fazni pomeraj od četiri perioda nakon filtriranja sa jednostavnim pokretnim prosekom od osam perioda. Možemo videti da u centriranom pokretnom proseku pod (b) ne dolazi do faznog pomeraja. Izvor podataka: Datastream.

prosek IPI-a za $M = N = 4$, pri čemu poklapanje minimalne vrednosti filtera izlaza sa originalnim vremenskim serijama ukazuje na to da filter ima nula-fazu.

Uzročni FIR filter može, takođe biti visokopropusni filter. Na primer, 2-periodična pokretna razlika

$$y_t = 0.5x_t - 0.5c_{t-1}$$

ima sledeću frekventnu odziv funkciju:

$$\begin{aligned} H(f) &= \frac{1}{2} \left(1 - e^{-i2\pi f} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{i\pi f} - e^{i\pi f} \right) e^{-i\pi f} \\ &= \sin(\pi f) i e^{-i\pi f}, \end{aligned}$$

gde je dobit nula za frekvenciju jednaku nuli ($f = 0$) i raste sa porastom f , a dostiže maksimum za frekvenciju $f = 1/2$. Stoga se radi o visokopropusnom filteru. Konačno IIR filter (iz diferencne jednačine) može biti i visokopropusan i niskopropusan filter.

Razmotrimo sada IIR filter,

$$\sum_{k=0}^L a_k y_{t-k} = \sum_{k=0}^M \omega_k x_{t-k},$$

čiji je frekventni odziv

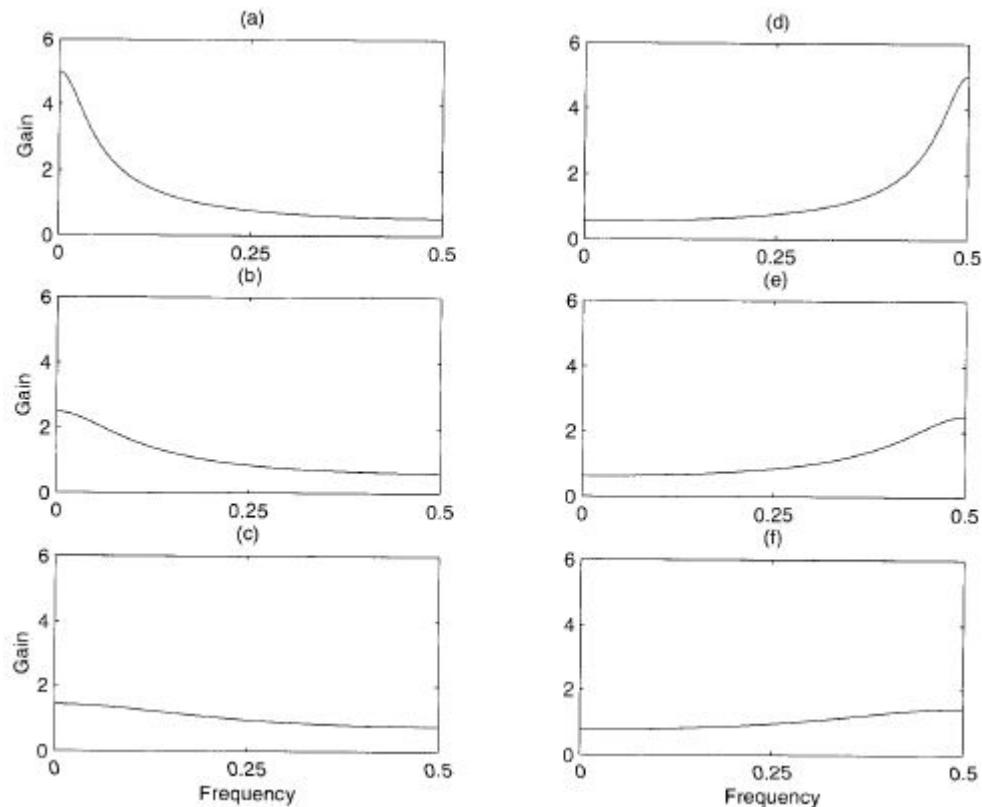
$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{\sum_{k=0}^M \omega_k e^{-ik2\pi f}}{\sum_{k=0}^L a_k e^{-ik2\pi f}},$$

gde su $y(f)$ i $X(f)$ Furijeove transformacije izlaza izlaza y_t i ulaza x_t , respektivno (Oppenheim i Schafer, 1989, str. 213). Kao primer, posmatrajmo diferencnu jednačinu prvog reda

$$y_t + ay_{t-1} = x_t, \quad (3.26)$$

koja ima sledeći frekventni odziv:

$$H(f) = \frac{1}{1 - ae^{-i2\pi f}}.$$



Slika 3.11: Funkcija dobiti za diferencnu jednačinu prvog reda iz jednačine 3.26 sa različitim parametrima. Predznak parametra a određuje da li je linearna diferencna jednačina niskopropusni filter, kao sa leve strane, ili visokopropusni filter, kao na desnoj strani. (a) $a = 0.8$. (b) $a = 0.6$. (c) $a = 0.3$ (d) $a = -0.8$. (e) $a = -0.6$. (f) $a = -0.3$. Uočimo da apsolutne vrednosti parametra opadaju i da funkcija dobiti postaje ravnija oko jednog, približno faznog filtera.

Na slici 3.11 je prikazan frekventni odziv za različite vrednosti parametra a . Znak parametra a određuje da li je linearna diferencna jednačina iz jednačine (3.26) niskopropusni filter, kao sa leve strane, ili visokopropusni filter, kao na desnoj strani slike 3.11.

Glava 4

Primena filtera i malih talasa u praksi

4.1 Uvod

Idealni pojasni filter uklanja određene komponente frekvencije vremenskih serija, koje leže u određenom opsegu frekvencije. U praksi je veoma teško konstruisati idealan pojasni filter jer to zahteva beskonacan broj podataka. Stoga se koristi približan idealan filter za izvlačenje komponenti vremenskih serija u određenom opsegu frekvencija, kao što su poslovni ciklusi sa poznatim vremenom trajanja. U ovom delu opisamo jedan primer filtera koji se koriste u ekonomiji i finansijama. Deo 4.1.1 prikazuje primer eksponencijalnog težinskog pokretnog proseka (EWMA - *Exponentially Weighted Moving Average*) koji se koristi za ocenu volatilnosti na deviznom tržištu. Deo 4.1.2 predstavlja uvod u upotrebu poznatog Hodrick i Prescott (1997) filtera u makroekonomiji. Deo 4.1.3 bavi se sličnim filterom koji su predložili Baxter i King (1999). Poglavlje se završava sa nekoliko primera koji se koriste u analizi cena na finansijskom tržištu. Primeri su preuzeti iz literature [3].

4.1.1 EWMA i ocenjivanje volatilnosti

Eksponencijalni težinski pokretni prosek (EWMA) filter je uveden u delu 3.2.3. Ovaj filter igra važnu ulogu upravljanju u rizicima

na finansijskom tržištu. *RiskMetrics* model, koji je razvio J.P.Morgan 1994. godine, posebno se oslanja na EWMA metod ocenjivanja volatilnosti (volativnost je mera nepredvidive promene neke promenljive u nekom vremenskom periodu) i korelacije između finansijskih instrumenata za izračunavanje tržišnog rizika u okviru VaR-a (Value at Risk). VaR je mera maksimalne moguće promene vrednosti portfolija finansijskih instrumenata sa datom verovatnoćom. Sledeći jednostavan primer iz RiscMetrics dokumenta objašnjava ovu ideju (Morgan, 1996). Napomenimo da je u ovom primeru korišćen odnos nemačke marke (DEM) i američkog dolara (USD) što ne čudi zbog godine u kojoj je istraživanje vršeno.

Prepostavimo da kompanija sa sedištem u SAD-u ima 140 miliona DEM deviznih (FX - foreign exchange) pozicija. Ako je devizni kurs 1.40 DEM za 1 USD, tržišna vrednost pozicije iznosi 100 miliona USD, što je ukupno izlaganje firme. Ako devizni kurs opada, firma će beležiti gubitke, dok je, s druge strane, porast deviznog kursa poželjan. Standardna devijacija stope prinosa kursa DEM-USD se može uzeti kao indikator mogućih promena deviznog kursa. Standardna RiskMetrics metoda, prepostavlja normalnu raspodelu prinosa.¹ Stoga, za datu vrednost dnevne standardne devijacije, potencijalni pad (drop) u dnevnom deviznom kursu sa datom verovatnoćom može se izračunati iz normalne raspodele. Na primer, ako je izračunata dnevna standardna devijacija od 0.5%, VaR sa 5% verovatnoće dat je sa 1.65 puta 0.5% (1.65σ) (npr. $0.5 * 1.65 = 0.825$ jer je 0.5% vrednost na krajevima standardne normalne distribucije 1.65). Ovo znači da se nije očekivao gubitak u deviznom kursu više od 0.825%, u 95% vremena jednog dana. Dakle, Var od 140 miliona pozicija DEM u USD je ukupno izlaganje (100 miliona) pomnoženo sa ocenjenom volatilnosti, što je 825,000 USD.

Čak i ako prihvatimo prepostavku o normalnoj raspodeli prinosa, potrebna nam je ocena dnevne standardne devijacije. Jednostavan pokretni prosek i EWMA ocenjivač dnevne standardne devijacije su dati sa

$$\hat{\sigma}_t^s = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (r_{t-i} - \bar{r})^2}, \quad (4.1)$$

¹Standardizovani prinos se definiše kao r_t/σ_t , gde r_t predstavlja log-promenu cene, a σ_t standardnu devijaciju.

56 GLAVA 4. PRIMENA FILTERA I MALIH TALASA U PRAKSI

$$\hat{\sigma}_t^e = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=0}^{N-1} \lambda^i} \sum_{i=0}^{N-1} \lambda^i (r_{t-i} - \bar{r})^2}, \quad (4.2)$$

gde je $\hat{\sigma}_t$ ocena dnevne standardne devijacije, N dužina filtera (prosječnog perioda), r_t dnevna razlika log cena (prinos), \bar{r} prosek u periodu i λ opadajući vektor ($0 < \lambda < 1$). Opadajući vektor određuje relativni značaj trenutnih posmatranja. Za velike prosečne periode, može se koristiti sledeća aproksimacija jednačine (4.2):

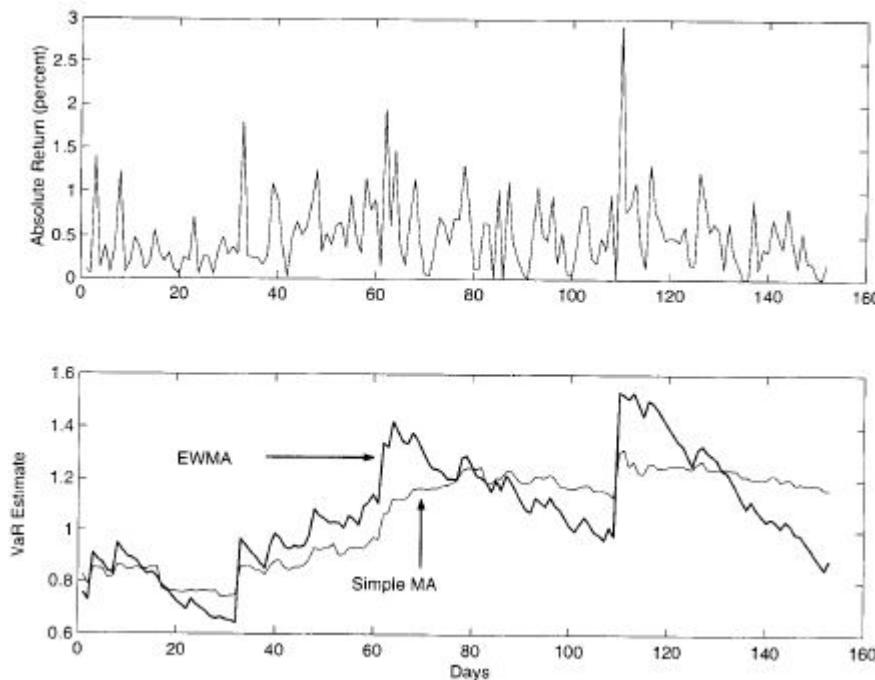
$$\hat{\sigma}_t^e = \sqrt{(1 - \lambda) \sum_{i=0}^{N-1} \lambda^i (r_{t-i} - \bar{r})^2}, \quad (4.3)$$

jer $\sum_{i=0}^{N-1} \lambda^i = 1/(1 - \lambda)$, $N \rightarrow \infty$.

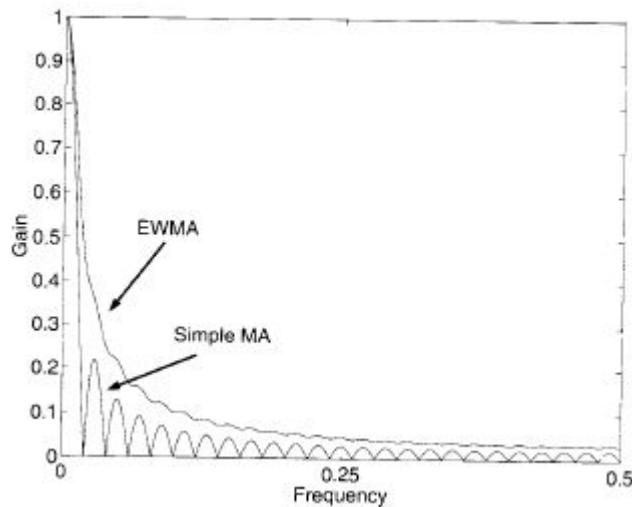
RiskMetrics dokument preporučuje EWMA metod za ocenu standardne devijacije iz sledećih razloga. Prvo, EWMA ocena volatilnosti brže reaguje na poremećaje tržišta nego jednostavni pokretni prosek, zbog činjenice da EWMA daje više značaja trenutnim posmatranjima. Drugo, posle šoka, EWMA ocena volatilnosti opada eksponencijalno sa vremenom.

Slika 4.1 ilustruje volatilnost dnevnog DEM-USD deviznog kursa i VaR (Value at Risk) ocenu za period od 6. juna 1997. do 31. decembra 1997. Gornja slika ilustruje apsolutnu vrednost dnevne DEM-USD log-promene cene izraženu u procentima. Na donjoj slici prikazan je VaR sa nivoom verovatnoće od 5%, zasnovan na 50-periodičnom EWMA i 50-periodičnom jednostavnom pokretnom proseku. Opadajući faktor u EWMA oceni je 0.94 ($\lambda = 0.94$), što je predloženo od strane RiskMetrics. Po pretpostavci, standardizovan prinos ima normalnu raspodelu, VaR ocena je 1.65 puta standardna devijacija. Napomenimo da EWMA ocena VaR-a hvata iznenadni skok i kasniji pad u volatilnosti oko 110-og dana uspešnije od jednostavnog pokretnog proseka. Jednostavni pokretni prosek je delimično uspešan u hvatanju rasta volatilnosti oko 110-og dana, ali ne uzima u obzir brzi pad, iako postoji zapažen pad volatilnosti.

Slika 4.2 prikazuje krivu funkcije dobiti dobijenu EWMA metodom naspram funkcije dobiti dobijene pomoću jednostavnog pokretnog prosjeka. Dužina filtera (averaging period) je 50. Opadajući faktor u EWMA filteru je 0.94 ($\lambda = 0.94$). Primetimo da vrednost funkcije dobiti jednostavnog pokretnog proseka jednaka nuli za vrednosti frekven-



Slika 4.1: Volatilnost dnevnog DEM-USD deviznog kursa i VaR (Value at Risk) ocena (1.65σ) za period od 6. juna 1997. do 31. decembra 1997. (vikendi isključeni). Gornja slika ilustruje absolutnu vrednost dnevne DEM-USD log-promene cene. Na donjoj slici prikazan je VaR sa nivoom verovatnoće od 5%, zasnovan na 50-periodičnom EWMA i 50-periodičnom jednostavnom pokretnom proseku dnevne standardne devijacije. Opadajući faktor u EWMA oceni je 0.94 ($\lambda = 0.94$), što je predloženo od strane RiskMetrics. Uočimo da EWMA ocena volatilnosti hvata iznenadne skokove u volatilnosti oko 110-og dana relativno bolje od jednostavnog pokretnog proseka.



Slika 4.2: Kriva funkcije dobiti dobijena EWMA metodom naspram funkcije dobiti dobijene pomoću jednostavnog pokretnog proseka. Dužina filtera je 50. Opadajući faktor u EWMA filteru je 0.94 ($\lambda = 0.94$). Uočimo da funkcija dobiti EWMA filtera ostaje iznad nule za sve frekvencije. Dakle, EWMA filter izlaz sadrži mnogo višu frekvencijsku dinamiku od jednostavnog pokretnog proseka filter izlaza i stoga pruža bolju lokalnu ocenu volatilnosti.

cije $f = 1/N$ za $0 < f < 0.5$, gde je N dužina filtera (vidi jednačinu (3.25)). Međutim, iz jednačine (3.14) vidimo da to nije slučaj sa EWMA filterom. Funkcija dobiti EWMA filtera je iznad nule za sve vrednosti frekvencija. Dakle, EWMA filter izlaz sadrži mnogo višu frekvencijsku dinamiku od jednostavnog pokretnog prosek filter izlaza i stoga pruža bolju lokalnu ocenu volatilnosti.

Ocena dnevne standardne devijacije može se takođe dobiti pomoću *Exponential Smoothing* metoda:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \lambda \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \lambda)^i (r_{t-i} - \bar{r})^2, \quad (4.4)$$

što se može zapisati i

$$\hat{\sigma}_t^2 = \lambda(r_t - \bar{r})^2 + \lambda(1 - \lambda)(r_{t-1} - \bar{r})^2 + \lambda(1 - \lambda)^2(r_{t-2} - \bar{r})^2 + \dots \quad (4.5)$$

Ako jednačinu (4.5) vratimo jedan period unazad i pomnožimo je sa $(1 - \lambda)$, dobijamo:

$$(1 - \lambda)\hat{\sigma}_t^2 = \lambda(1 - \lambda)(r_{t-1} - \bar{r})^2 + \lambda(1 - \lambda)^2(r_{t-2} - \bar{r})^2 + \dots \quad (4.6)$$

Oduzimanjem jednačine (4.6) od jednačine (4.5) dobijamo sledeće

$$\hat{\sigma}_t^2 = \lambda(r_t - \bar{r})^2 + (1 - \lambda)\hat{\sigma}_{t-1}^2. \quad (4.7)$$

Jasno je da se za λ bliže jedinici daje više značaja sadašnjem posmatranju. Jednačina (4.7) se može modifikovati kao

$$\hat{\sigma}_t^2 = \lambda(r_t - \bar{r})^2 + (1 - \lambda)(\hat{\sigma}_{t-1}^2 + s_{t-1}), \quad (4.8)$$

gde se s_{t-1} dobija iz sledeće jednakosti:

$$s_t = \gamma(\hat{\sigma}_t^2 - \hat{\sigma}_{t-1}^2) + (1 - \gamma)s_{t-1}, \quad (4.9)$$

gde je $0 < \gamma < 1$. Jednačine (4.9) i (4.8) poznate su kao *Holt-ov*

exponential smoothing ili *Holt Winters smoothing* metod (Holt, 1957; Winters, 1960). U jednačini (4.9), s_t obuhvata prosečnu stopu rasta (trend) ocene standardne devijacije. Za primenu Holt Winters smoothing metoda u ekonomiji, pogledati Chatfield i Yar (1991) i Grubb i Mason (2001).

4.1.2 Hodrick-Prescott filter

Hodrick-Prescott (HP) filter koristi se za identifikaciju komponenti poslovnog ciklusa u makroekonomskim vremenskim serijama (Hodrick i Prescott, 1997). Cilj HP filtera je rastavljanje vremenskih serija na cikličnu komponentu y_t^c i glatku (smooth) komponentu y_t^s . Ovaj filter se dobija rešavanjem sledećeg problema minimizacije:

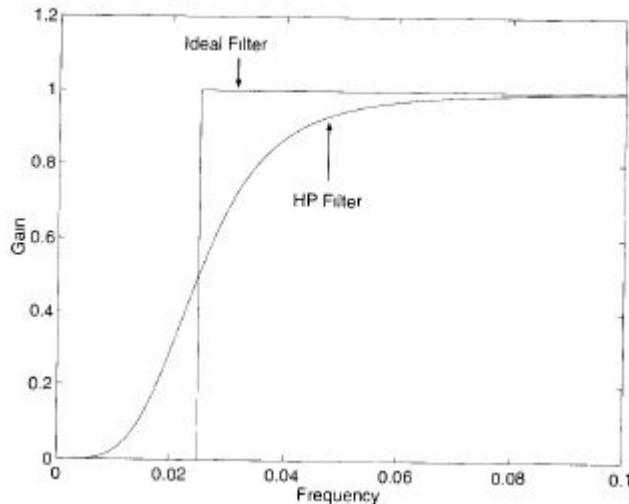
$$\min_{y_t^s} \sum_{t=1}^N \left\{ (y_t - y_t^s)^2 + \lambda [(y_{t+1}^s - y_t^s) - (y_t^s - y_{t-1}^s)]^2 \right\},$$

gde je λ arbitražna konstanta koja kažnjava (penalize) varijabilnost u glatkoj komponenti. Za veće vrednosti λ , prisutne su veće fluktuacije u glatkoj komponenti. Kada je $\lambda = 0$, glatka komponenta sadrži samo podatke, te nije došlo ni do kakvog poravnanja. U graničnom smislu kada $\lambda \rightarrow \infty$, glatka komponenta predstavlja linearni vremenski trend. U mnogim primenama, vrednost λ se obično postavi na $\lambda = 1600$ za kvartalne podatke, što su prvo bitno predložili Hodrick i Prescott (1997).

Kada su jednom dobijene glatke komponente, razmatraju se reziduali $y_t^c = y_t - y_t^s$, kao komponente poslovnog ciklusa vremenskih serija. King i Rabelo (1993) su proučavali osobine HP filtera i pokazali da ciklične komponente ovog filtera imaju sledeću funkciju frekventnog odziva:

$$H(f, \lambda) = \frac{4\lambda[1 - \cos(2\pi f)]^2}{1 + 4\lambda[1 - \cos(2\pi f)]^2}. \quad (4.10)$$

King i Rabelo (1993) su takođe pokazali da je glatka komponenta filtera HP data sa:



Slika 4.3: Funkcija dobiti ciklične komponente filtera HP kada je $\lambda = 1600$ naspram funkcije dobiti idealnog propusnog filtera koji hvata dinamičke frekvencije veće od $f = 0.025$, što implicira period dužine 10 godina (40 kvartala) za kvartalni skup podataka. Primetimo da HP filter jedino aproksimira idealan visokopropusni filter u okolini $f = 0.025$.

$$y_t^s = \frac{\theta_1 \theta_2}{\lambda} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \left(A_1 \theta_1^j + A_2 \theta_2^j \right) y_{t-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \left(A_1 \theta_1^j + A_2 \theta_2^j \right) y_{t+j} \right], \quad (4.11)$$

gde su θ_1 i θ_2 konjugovano kompleksni brojevi koji zavise od λ , a A_1 i A_2 su funkcije koje zavise od θ_1 i θ_2 . Dakle, glatki (smooth) HP je centrirani pokretni prosek. Kao rezultat, neće postojati fazni pomeraj nakon filtriranja u glatkoj komponenti. Međutim, ovaj filter u njegovoj originalnoj formi je beskonačni pokretni prosek. Stoga, ne može biti implementiran bez nekog ograničenja, odnosno pretpostavke o dužini lag-a.

Slika 4.3 prikazuje funkciju dobiti za cikličnu komponentu HP filtera ($\lambda = 1600$). Ciklična komponenta je bez niskih frekvencija jer je magnituda frekventnog odziva jednaka nuli kada je $f = 0$. Ciklična

komponenta počinje sa skupljanjem frekventnih komponenti originalnih vremenskih serija oko $f = 0.025$. Primetimo da $f = 0.025$ odgovara periodu dužine od 10 godina (40 kvartala) za kvartalni skup podataka.² Stoga, HP filter sa $\lambda = 1600$, unutar konteksta kvartalnih podataka, proizvodi glatku krivu koja sadrži nisko-frekventne komponente koje se protežu otprilike 10 godina. Ciklična komponenta sadrži dinamiku poslovnog ciklusa (tj. varijacije sa periodom dužine približno 10 godina ili manje).

Nekoliko studija kritikuju HP filter da izobličuje dinamiku originalnih vremenskih serija. Harvey and Jeager (1993) i Kaiser i Maraval (2000) su pokazali da HP filter indukuje lažne cikluse ako je originalna vremenska serija stacionarna (difference stationary). Pollock (2000) predlaže racionalni kvadratni-talas filter pristup kako bi istakao da HP filter greši u zadacima generisanja odvojenih serija, dozvoljavajući niskofrekventnim komponentama da prođu kroz odvojene serije. Kao što je spomenuto, HP filter može takođe imati i neke praktične probleme, kao što je neobično ponašanje cikličnih komponenti u blizini kraja uzorka. McCallum (2000) takođe kritikuje HP filter. Radi ilustracije, McCallum primenjuje HP filter na realni bruto domaći proizvod SAD-a tokom 1920-ih i 1930-ih. Ocena cikličnih komponenti filtera HP za vreme ovog perioda sugerira da se zapravo velika depresija nije ni desila.

4.1.3 Baxter-King (BK) filter

Baxter i King (1999) filter (BK) je specifični pojedostavljeni filter koji se koristi za hvatanje oscilacija sa periodom dužine 6 do 32 kvartala u datom kvartalu vremenskih serija. Kod najdužih američkih poslovnih ciklusa definisano je trajanje poslovnog ciklusa od više od jedne godine do 10 (ili 12) godina. BK filter je takođe centrirani pokretni prosek sa simetričnim težinskim koeficijentima, a to je

²Napomenimo da je $f = 1/p$, gde je p dužina perioda. U ovom primeru je $f = 0.025 = 1/40$ što implicira period dužine 40 kvartala.

Lead-Lag	BK(6,32)	BK(2,32)	BK(2,8)
0	0.2777	0.9425	0.7741
1	0.2204	-0.0571	-0.2010
2	0.0838	-0.0559	-0.1351
3	-0.0521	-0.0539	-0.0510
4	-0.1184	-0.0513	
5	-0.1012	-0.0479	
6	-0.0422	-0.0440	
7	0.0016	-0.0396	
8	0.0015	-0.0348	
9	-0.0279	-0.0297	
10	-0.0501	-0.0244	
11	-0.0423	-0.0190	
12	-0.0119	-0.0137	

Tabela 4.1: Baxter i King (1999) filter koeficijenti. BK(6,32), BK(2,32) i BK(2,8) propuštaju frekventne komponente između 6 i 32 kvartala, 2 i 32 kvartala i dve i osam godina, respektivno.

$$y_t^f = \sum_{i=-K}^K \omega_u y_{t-i}. \quad (4.12)$$

Koeficijenti BK filtera su izvedeni sa ograničenjem da dobit filtera (filter gain) treba biti nula za frekvenciju nula. Ovo zahteva da suma filter koeficijenata mora biti nula (vidi tabelu 4.1).³ U cilju prikupljanja glavnih karakteristika poslovnog ciklusa kvartalnog skupa podataka, Baxter i King preporučuju lead-lag kompenzator dužine $K = 12$. BK(6,32) filter propušta većinu frekvencija između 6 i 32 kvartala, uklanjajući varijacije niskih frekvencija i ravnajući neravnomerne varijacije visokih frekvencija. BK(2,32) filter propušta većinu frekvencija između 2 i 32 kvartala, uklanjanjem varijacija trenda, ali ne ispravlja varijacije visoke frekvencije. Za godišnje podatke, Baxter i King (1999) preporučuju jedan filter sa $K = 3$, koji propušta periodične kompo-

³Generalno, ako se filter integriše (sumira) u jedinicu, onda se radi o niskopropusnom filteru (tj. ima dobit jedan na nula frekvenciji). S druge strane, ako se filter integriše u nulu, radi se o visokopropusnom filteru (tj. dobit je jedan na najvećoj frekvenciji). Zahtev da suma filter koeficijenata mora biti nula za BK filter implicira da je filter diferencijalni filter (differencing filter) i stoga je visokopropusni/pojasni filter. Ista ideja važi i za wavelet (malotalasni) filter.

64 GLAVA 4. PRIMENA FILTERA I MALIH TALASA U PRAKSI

nente između 2 i 8 godina.

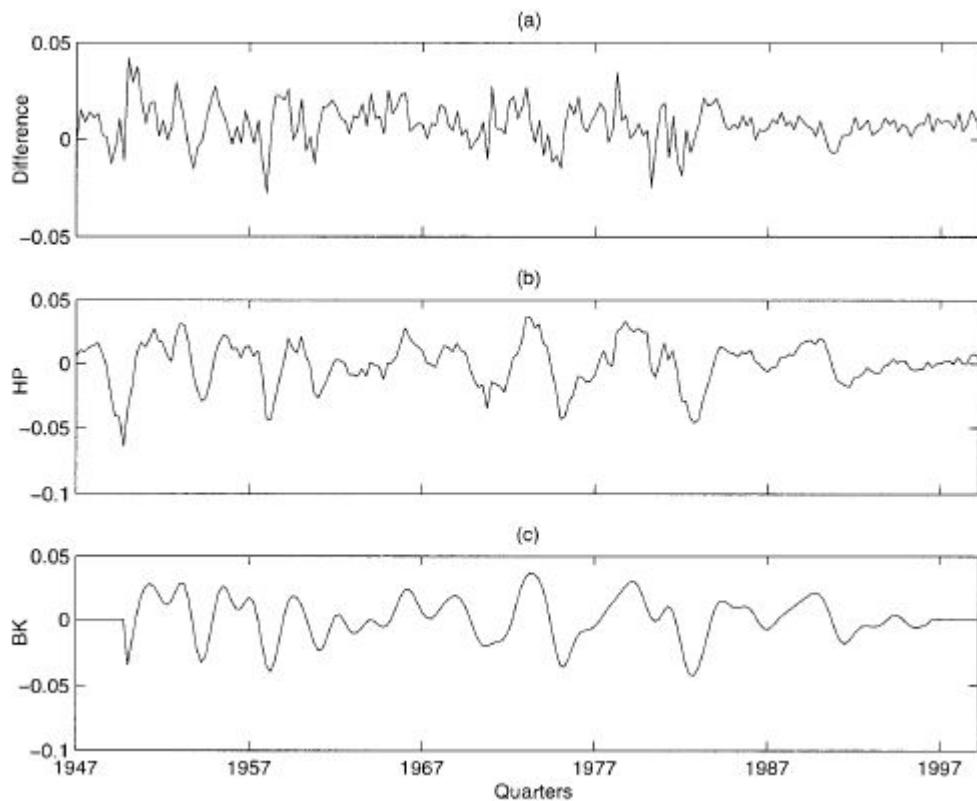
BK filter je kritikovan po osnovi da može da naruši dinamičke osobine i da njegova ciklična komponenta ne uspeva da uhvati značajan deo varijabilnosti frekvencija poslovnog ciklusa (Guay i St-Amant, 1997; Murray, 2001). Ipak, oba, HP i BK filteri mogu biti standarni alat u trenutnim studijama poslovnog ciklusa. Slika 4.4 prikazuje primenu HP i BK(6,32) filtera na log kvartile realnog bruto nacionalnog proizvoda SAD-a (GNP - Gross National Product).

Prvi segment slike prikazuje FD realnog GNP-a (kvartalna stopa rasta). Na slici 4.4(b), prikazan je HP filter izlaz ($\lambda = 1600$). Na slici 4.4(c), prikazan je BK(6,32) filter izlaz ($\lambda = 1600$). Napomenimo da je BK izlaz više glatak od HP izlaza. Međutim, nedostaje 12 tačaka (podaci iz 3 godine) na svakom kraju BK(6,32) filter izlaza jer je to neuzročni filter.

4.1.4 Filteri u tehničkoj analizi finansijskih tržišta

Tehnička analiza na finansijskim tržištima predstavlja proučavanje tržišnih aktivnosti uz pomoć grafikona kako bi se prognozirao budući pravac kretanja cena. Najčešće korišćeni alati tehničke analize su filteri, na primer pokretni prosek. Glavna pretpostavka tehničke analize koja koristi pokretni prosek je da cena prati određeni trend u određeno vreme. Stoga, uloga tehničkog analitičara (takođe poznatog kao agent (chartist)) je da identifikuje različite trendove (niskofrekventne komponente) u njihovom ranom stadijumu i da uoči njihove prednosti pre nego što drugi učesnici na tržištu to otkriju. Nedavna istraživanja pokazuju da korišćenje jednostavnih pravila trgovanja može unaprediti prognoziranje performansi postojećeg modela.

Najčešće korišćeni alat u tehničkoj analizi je jednostavni pokretni prosek. Sa jednostavnim pokretnim prosekom daje se signal za *kupovinu* (buy signal), kada se poslednja cena pomeri iznad jednostavnog pokretnog proseka. Ako je cena pala ispod jednostavnog pokretnog proseka, izdaje signal za *prodaju* (sell signal). Konzervativni analitičar bi čekao da se pokretni prosek vrati u pravcu cene prelaza (price



Slika 4.4: Filtrirani log kvartali realnog bruto nacionalnog proizvoda SAD-a (sezonski usklađena godišnja stopa, 1992 dolara). (a) First-difference(FD) ocena originalnih vremenskih serija. (b) HP ciklus ($\lambda = 1600$). (c) BK(6,32) ciklus. Napomenimo da 12 podataka nedostaju na kraju BK(6,32) filter izlaza. Izvor: U.S. Department of Commerce, Bureau of Economic Analysis.

66 GLAVA 4. PRIMENA FILTERA I MALIH TALASA U PRAKSI

crossing), kako bi zaključio da li treba aktivirati odluku o kupovini ili prodaji. Slika ??(a) prikazuje primer jednostavnog pokretnog proseka koji aktivira signal kupovine i prodaje na deviznom tržištu.

Analitičar može postaviti interval poverenja (granicu) oko jednostavnog pokretnog proseka. Granica se može zasnivati na arbitražnom pravilu kao što je $\pm 5\%$ ili nekom drugom statističkom kriterijumu. Postavljanje ovakvih granica je u literaturi tehničke analize poznato kao *percentage envelope*. Ako se cena pomeri iznad gornje granice, dolazi do preteranog reagovanja na tržištu (tj. preterane kupovine). Ako cena padne ispod donje granice dolazi do preterane prodaje i ne-realnog pada cena.

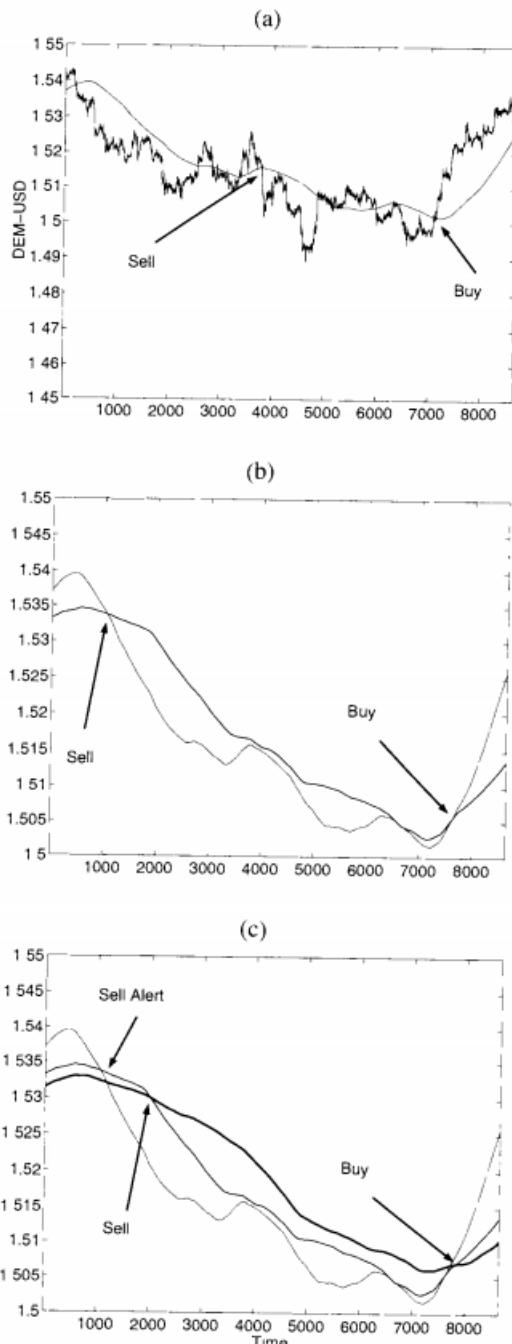
Umesto ovog pravila za formiranja granica oko jednostavnog pokretnog proseka mogu se koristiti i neke statističke mere. Kao jedna od takvih mera uzima se granica (band) od dve standardne devijacije iznad i dve standardne devijacije ispod pokretnog proseka. Ova mera poznata je pod nazivom *Bollinger* granica. Napomenimo da se Bollinger granica može proširiti ili suziti u zavisnosti od volatilnosti cene na tržištu, dok bi percentage envelope ostao konstantan oko pokretnog proseka.

Jasno je da kratak period pokretnog proseka ima tendenciju da daje ranije signal nego što je to slučaj kod dužeg perioda. Kao strategija mogu se koristiti i dva pokretna proseka zajedno da bi se utvrdilo u kom pravcu se kreće tržište. Ova tehnika se naziva *double crossing* metod. U ovom pristupu, ako je kratki pokretni prosek iznad dugog pokretnog proseka prihvata se signal za kupovinu. Ako je kratki pokretni prosek ispod dugog pokretnog proseka prihvata se signal za prodaju. Slika ??(b) ilustruje double crossing metod.

U tehničkoj analizi može se kombinovati nekoliko pokretnih proseka. Na primer, *triple crossing* metod (prikazan na slici ??(c)) bi mogao koristiti tri različita pokretna proseka za recimo 5, 10, 15 perioda. U tom slučaju, ako je 5-periodični pokretni prosek iznad 10-periodičnog i 15-periodičnog pokretnog proseka, generiše se signal da postoji trend rasta što ukazuje na kupovinu. Ako se u međuvremenu 10-periodični pokretni prosek takođe pomeri iznad 15-periodičnog proseka, potvrđuje se trend rasta i aktivira se signal za kupovinu. U trendu opadanja, pokretni prosek za kratak period bi pao ispod pokretnog proseka za srednji i dugi period. To se prihvata kao prvi znak za prodaju. Kada srednji prosek padne ispod proseka za dugi period, prihvata se trend opadanja i aktivira se signal za prodaju.

Iako postoje neki sporazumi na tržištu oko dužine pokretnih proseka, analitičar je taj koji odlučuje koji će pokretni prosek raditi najbolje za dato tržište određenih instrumenata, sa unapred određenim periodom trgovanja i funkcijom troškova.⁴ Obimnije o tehničkoj analizi se može pronaći u Murphy (1999) ili Edwards i Magee (1997).

⁴Murphy (1999) je objavio neke popularne kombinacije dnevnih pokretnih proseka na tržištu fjučersa kao 4-9, 9-18, 5-20 i 10-20 dana. Na tržištu akcija je popularan 50-dnevni pokretni prosek. Na duže staze, 200-dnevni pokretni proseci su obično u upotrebi. Bollinger granice su obično 10-dnevni i 20-dnevni pokretni proseci. Iako ovi pokretni proseci nisu rešenje za neke dobro definisane optimizacione probleme, mogu ukazivati na neke empirijske zakonitosti. Drugim rečima, mogu igrati veoma važnu ulogu u formiranju cena.



Slika 4.5: Tehnička analiza 5-minutnog DEM-USD deviznog kursa od 26.11.1996. do 31.12.1996. (vikendi isključeni). (a) Jednonedeljni pokretni prosek (tanka linija) naspram stvarnih podataka. (b) Double crossing: jednonedeljni jednostavni pokretni prosek (tanka linija) naspram dvonedeljnog pokretnog prosekova. (c) Triple crossover: jednonedeljni jednostavni pokretni prosek (tanka linija), dvoonedeljni pokretni prosek (označena linija) i tronedeljni jednostavni pokretni prosek (tamna linija). Originalni skup podataka nije nacrtan na delovima (b) i (c) kako bi slika bila jasnija.

Glava 5

Implementacija Hodrick-Prescott filtera

Jedan primer na kojem će biti prikazan primer ilustracije teorijske činjenice pojašnjene u prethodnoj glavi je Bruto društveni proizvod Sjedinjenih Američkih Država, na kome će biti primenjen Hodrick-Prescott (HP) filter. Podaci su preuzeti sa sajta Federalnih Rezervi St. Luisa (<https://fred.stlouisfed.org/series/GDP>) i odnose se na kvartalne vrednosti BDP-a u poslednjih 10 godina (40 perioda, od 1.7.2007. do 1.4.2017.). Podaci će biti obrađeni u programskom jeziku MATLAB. Serija je zadata u formi matrice dimenzija 40x1, sadrži vrednosti počev od najstarije i nosi naziv "A".

Seriju „gdp” možemo da filtriramo pozivajući prethodnu funkciju u obliku „[g]=hpfilter(A,lambda)”, pri čemu je „g” tražena komponenta rasta filtrirane serije, a „lambda” je parametar uglađivanja. Ovaj parametar je proizvoljan, a najčešće uzima vrednost 100 za podatke na godišnjem, 1600 na kvartalnom i 14400 na mesečnom nivou. S obzirom da su podaci za BDP dati na kvartalnom nivou, koristićemo parametar 1600.

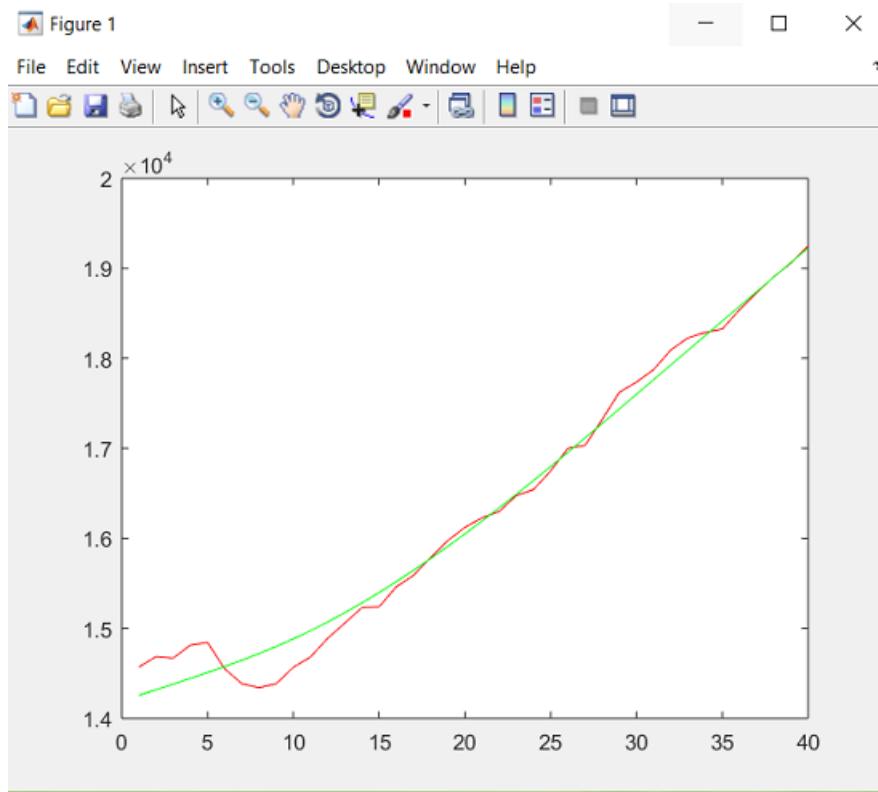
Primenom filtera, dobijamo vrednosti za „g”, što se može videti na grafiku (plot (A,g)) na slici 5.1.

Na slici 5.1 mogu se videti paralelno originalni i filtrirani podaci. Vertikalna osa predstavlja desetine hiljada milijardi dolara, dok su na horizontalnoj osi obeleženi kvartali (počev od 1.7.2007.). Originalni podaci (A) su obeleženi crvenom bojom, dok su filtrirani (g) prikazani zelenom. Razliku između originalnih i filtriranih podataka možemo videti na grafiku (plot(A-g)) koji je predstavljen na slici 5.2.

70GLAVA 5. IMPLEMENTACIJA HODRICK-PRESCOTT FILTERA

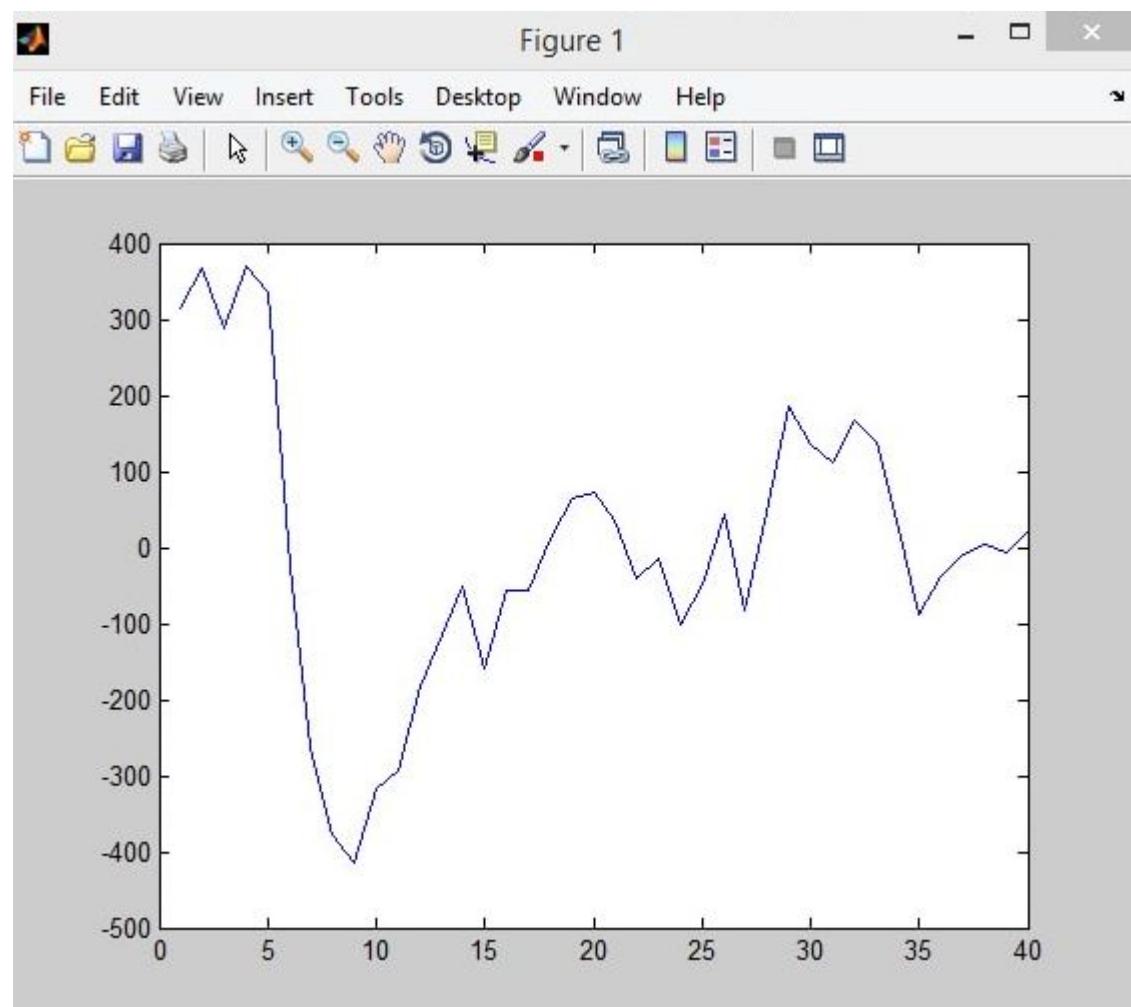
Listing 5.1: Kod koji se unosi u MATLAB-u za primenu HP filtera je sledeći:

```
1 function [g] = hpfilter(A,lambda)
2 % A: vremenska serija
3 % lambda=parametar ugladjivanja (m: 14400, q: 1600, y: 100)
4
5
6 if nargin < 2
7     error('Zahtevana su bar dva parametra.');
8 end
9
10 [m,n] = size (x);
11 if m < n
12     x = x';
13     m = n;
14 end
15
16
17 a(1)=lambda+1;
18 a(2)=5*lambda+1;
19 a(3:m-2)=6*lambda+1;
20 a(m-1)=5*lambda+1;
21 a(m)=lambda+1;
22 b(1)=-2*lambda;
23 b(2:m-2)=-4*lambda;
24 b(m-1)=-2*lambda;
25 c(1:m-2)=lambda;
26
27 g=penta2(x,a,b,c);
28 if nargin == 3
29     plot(g,'g'); grid on; hold on; plot(A,'r');
30 end
31 end
```



Slika 5.1: Ovde se mogu se videti paralelno originalni podaci i filtrirani podaci. Vertikalna osa predstavlja desetine hiljada milijardi dolara, dok su na horizontalnoj osi obeleženi kvartali (počev sa 1.7.2007.). Originalni podaci (A) su obeleženi crvenom bojom, dok su filtrirani (g) prikazani zelenom.

72 GLAVA 5. IMPLEMENTACIJA HODRICK-PRESCOTT FILTERA



Slika 5.2: Razlika između originalnih i filtriranih podataka (razlika između svakog para podataka koje smo označili sa „A” i „g”)

Zaključak

Tema ovog rada jeste primena malih talasa u oblasti ekonomije i finan- sija. Analizirana je teorija malih talasa, uz osvrt na Furijeovu analizu. Objasnjeno je kako malotalasna analiza, odnosno analiza filtera, po- maže u pojašnjavanju vremenskih serija. Filteri su značajni kao alat sa stanovista ekonomije i finansija jer analiziraju razne komponente vremenskih serija. Neki od pojašnjenjih filtera imaju ulogu u upravl- janju rizicima na finansijskom tržistu ili u identifikaciji komponenti poslovnog ciklusa. U ilustrativnom primeru jednog od ovih filtera ko- rišćen je programski paket MATLAB.

O autoru

Maja Ljubišić rođena je 26.09.1989. godine u Sisku u Republici Hrvatskoj. Osnovnu školu „Jožef Atila” u Novom Sadu završila je 2004. godine kao nosilac Vukove diplome. Iste godine upisuje gimnaziju „Isidora Sekulić” u Novom Sadu, koju završava 2008. godine sa odličnim uspehom. Po završetku gimnazije, 2008. godine upisuje osnovne studije na Prirodno - matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer matematika finansija. Osnovne studije završava 2013. godine i upisuje master studije na istom smeru. Zaključno sa septembarskim rokom 2015. godine položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom i stekla uslov za odbranu master rada.



Literatura

- [1] Luís Aguiar-Conraria, Nuni Azevedo, Maria Joana Soares, *Using wavelets to decompose the time-frequency effects of monetary policy*, ScienceDirect (2008).
- [2] António Miguel Pinto, Oliveira Gomes Rua, *Essays on Wavelets in Economics*, Universidade Técnica de Lisboa (2011).
- [3] Ramazan Gençay, Faruk Selçuk, Brandon Whitcher, *An introduction to Wavelets and Other Filtering Methods in Finance and Economics*, Academic Press.
- [4] http://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/amalonso/esp/TSAProyect_BaharDadashova.pdf/
- [5] <http://www.krannert.purdue.edu/faculty/knaknoi/Econ635/matlabfilter.html/>
- [6] <https://www.mathworks.com/help/matlab/>

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Maja Ljubišić
AU

Mentor: dr Nenad Teofanov
MN

Naslov rada: Teorija malih talasa sa nekim primenama u ekonomiji
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski/engleski
JL

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2018.

GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: 5/73/6/2/26/0/0
(broj poglavlja/strana/lit citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Matematička analiza
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: Furijeova transformacija, teorija malih talasa, vejvlet, linearni filteri, filtracija, filter, odziv filtera, ekonomija, frekventni odziv, EWMA, volatilnost, analiza finansijskog tržišta, jednostavan pokretni prosek, vremenska serija, frekvencija
PO

UDK:

Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Novi Sad
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: U najširem smislu, ovaj rad bavi se teorijom malih talasa i primenom istih u ekonomiji.

U užem smislu, rad se bavi prelaskom sa Furijeove na vejvlet transformaciju i pojašnjnjem linearnih filtera u vremenskom i frekventnom domenu, a zatim primenom nekoliko linearnih filtera u izučavanju vremenskih serija i analizi finansijskog tržišta.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 22.09.2017.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

Predsednik: dr Ljiljana Gajić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Mentor: dr Nenad Teofanov, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu.

Član: dr Sanja Rapajić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

DO

**UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND
MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION**

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monographic type
DT

Type of record: Text printed material
TR

Contents code: Master thesis
CC

Author: Maja Ljubišić
AU

Mentor: Nenad Teofanov, Ph.D.
MN

Title: Wavelet theory with some applications in economics
TI

Language of text: Serbian(Latin)
LT

Language of abstract: Serbian/English
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2018.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ.place: University of Novi Sad, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: 5/73/6/2/26/0/0
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphs/additional lists)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Mathematical analysis
SD

Subject / Key words: Fourier analysis, wavelet analysis, wavelet, linear filters, filtration, filter, filter response, economics, EWMA, volatility, analysis of the financial market, simple moving average, time series, frequency
SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Novi Sad
HD

Note:

N

Abstract: In a broad sense, the subject of this paper is wavelet theory and its application in economics.

In the narrow sense, the particular focus is on transition from Fourier analysis to wavelet approach. The aim is to explain linear filters in time and frequency domain and application of some linear filters in time series research and analysis of the financial market.

AB

Accepted by Scientific Board on: 22.09.2017.

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

President: dr Ljiljana Gajić, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Mentor: dr Nenad Teofanov, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: dr Sanja Rapajić, Associate Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

DB