UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Maja Janus

Teorija propasti za perturbovane modele rizika

-Master rad-

Mentor: Prof. dr Dora Seleši

Novi Sad, septembar 2019.

Sadržaj

‘Mathematics is the most beautiful
and most powerful creation of the human spirit.’
Stefan Benach

Predgovor

'I neprihvatanje rizika veliki je rizik.'
E. Jong

Teorija rizika je drugi izraz za matematiku neživotnog osiguranja što je i jednim delom tema ovog master rada. Ona se bavi modeliranjem i računanjem šteta i rizika, njihove raspodele, vremenske dinamike, ukupne štete, kao i verovatnoće propasti, odnosno gubitka u portfoliju.
Klasičan Kramer-Lundbergov model, koji koristimo kao osnovu, glasi:

$$U(t) = u + c \cdot t - S(t). \qquad (1.1)$$

U radu ćemo proširiti ovaj model uvođenjem α- stabilnih Levijevih procesa na (1.1). Konkrentno, radi jednostavnosti, uzimamo Levijev proces za $\alpha = 2$ takozvano Braunovo kretanje sa driftom. Perturbovan model rizika je sada dat

$$U(t) = u + c \cdot t - S(t) + \sigma W(t). \qquad (1.2)$$

Glavna motivacija za obradu ove teme u master tezi esencijalno leži u važnosti obrađene teorije. Naime, teorija propasti predstavlja jedan od temelja aktuarske nauke, bez koje moderno osiguranje ne bi postojalo u obliku u kom ga danas poznajemo. I kao što kaže veliki Šekspir: "Svet je zanimljiv, onoliko koliko smo mi radoznali." Naša radoznalost i želja da istražimo i bolje razumemo teoriju tako široke primene, aktuelnost teme, neraspolaganje opsežnom literaturom na srpskom jeziku koja na sveobuhvatan način obrađuje temu – doveli su nas do ovog skromnog rada (koji nam je pružio nemerljivo zadovoljstvo istraživanja).

Rad će zbog složenosti teme, biti podeljen u tri tematske celine.

U uvodnom delu biće navedeni osnovni pojmovi teorije rizika, kao i teorije propasti. Takođe, biće navedene definicije određenih stohastičkih procesa. Summa summarum, krenućemo od znanja i saznanja koja su nam poznata, a zatim se fokusiramo na istraživanje i razumevanje centralnog dela.

Centralni deo rada biće podeljen u dva dela. Prvi deo će biti posvećen našem proširenom modelu procesa viška (1.2) kao i detaljnoj obradi istog, definisaćemo i dokazati neke od teorema i lema. U priču ćemo uvesti verovatnoće propasti i preživljavanja, kao i metode procene ovih verovatnoća. Dok će se drugi, centralni deo, bazirati na konkretnim numeričkim primerima u kojima ilustraciono prezentujemo sve ono teorijski naznačeno u radu. Za pojedinačne iznose šteta biramo konkretne raspodele, procenjujemo krajnu propast kao i grešku. Numeričke aproksimacije računamo putem programa MS Excel, Matlab i Mathematica i na osnovu toga testiramo validnost datih metoda aproksimacija.

Završni deo rada odnosiće se na teorijsku priču o reosiguranju, kao i o njegovoj ulozi i delovanju na verovatnoću propasti.

Veliku zahvalnost dugujem svojoj mentorki, prof dr. Dori Seleši, na savetima i smernicama tokom pisanja ovog rada.

Takođe, zahvalila bih se članovima komisije, prof dr. Danijeli Rajter-Ćirić i prof dr. Sanji Rapajić na znanju koje su mi prenele i saradnji koja je je do tog znanja i dovela.

Najveću zahvalnost dugujem svojoj porodici, ocu Radetu i majci Nataši, a naročito bratu Srđanu, na nesebičnoj podršci tokom čitavog školovanja.

Zahvaljujem i svojim sinovima, Urošu i Bogdanu, i svom suprugu Nebojši. Oni su moja snaga i motiv za sve što radim!

Maja Janus

Novi Sad, septembar 2019.

Poglavlje 1.

'Postoji rizik, a postoji i sigurnost.
Čamac u luci je siguran, ali mu s vremenom istrune dno. '
J. Brown

1.0. Uvod

Teorija rizika (kolektivna teorija rizika) je polje matematike koji je važan deo aktuarstva jer koristi matematičke modele da objasni način i nivo zaštite od propasti. S druge strane teorija rizika ima svoje poreklo s početka 20.veka, kada je Filip Lundberg, 1903. godine, objavio svoje prve ideje na temu klasičan proces viška. On se bavio definisanjem verovatnoće propasti, odnosno preživljavanja, raspodelom viška pre same propasti i deficitom u tom vremenskom trenutku kada je propast nastala.

Kramer-Lundbergov model je izmenjen dodavanjem Levijevih procesa u složen Poasonov proces i na taj način dobijamo mogućnost da razmotrimo i analiziramo neizvesnost prihoda od premija, kretanja kamatnih stopa, broja osiguranika…Cilj ovog rada je da definišemo obrazac za verovatnoću propasti (verovatnoću kada model postaje negativan) u beskonačnom vremenskom trenutku.

Dobro poznatu aproksimaciju za verovatnoću propasti u savremenoj teoriji rizika, De Valderovu metodu, ćemo primeniti na naš modifikovan model. Kako su svi ulazni parametri povezani sa nesigurnošću, te zbog toga verovatnoću propasti nije moguće eksplicitno izračunati preko navedenih formula, iz tog razloga u radu ćemo posmatrati aproksimaciju verovatnoće propasti.

Na samom kraju, kada raspolažemo bitnim činjenicama koje se odnose na naš model, osvrćemo se na teoriju o reosiguranju, posebno - proporcionalnom reosiguranju. Navodimo oblik jednačine za pronalaženje koeficijenta prilagođavanja, za koji znamo da što je veći, verovatnoća propasti je manja. Dokazujemo kako je pomenuti koeficijent pri reosiguranju veći od koeficijenta dobijenog bez reosiguranja, na osnovu čega zaključujemo da je rizik manji.

Čitaoci moraju poznavati osnovne pojmove teorije propasti i teorije rizika. Potrebno je znati stohastički račun, teoriju verovatnoće i statistiku. Zato u sledećim redovima i izlažem osnovne činjenice koje nalaže klasičan Kramer – Lundbergov model, smatram da je to potrebno da bismo razumeli ovaj naš perturbovan model.

Poglavlje 2.

'If I were again beginning my studies,
I would follow the advice of Plato and start with mathematics.'
Galileo Galilei

2.0. Uvod

U ovom odeljku posmatraćemo perturbovani model rizika, izmenjen klasičan model, dobijen kad se u Kramer-Lundbergov model ubaci stabilan Levijev proces. Ovaj proces nazvan je po francuskom matematičaru Paul Leviju, u pitanju je stohastički proces. On je relevantniji i precizniji za opisivanje realnosti finansijskog tržišta od modela sa Braunovim kretanjem. Međutim, literature ne sadrži u sebi puno toga kad su u pitanju Levijevi procesi u modelu rizika, te zbog toga se ograničavamo na Braunovo kretanje, kao specijalan slučaj Levijevih procesa za $\alpha = 2$.

2.1. Kramer-Lundbergov model rizika

Teorija rizika je, kao što je već rečeno, drugi izraz za matematiku neživotnog osiguranja . Godine 1903., Filip Lundberg je postavio temelje moderne teorije rizika. Teorija rizika kao sinonim za matematiku neživotnog osiguranja, bavi se modeliranjem zahteva koji pristižu u osiguravajuću kompaniju i daje savet kolika premija treba da bude naplaćena kako bi se izbegao bankrot, odnosno propast osiguravajućeg društva. Jedan od Lundbergovih ključnih doprinosa je uvođenje jednostavnog modela koji je sposoban da opiše osnovnu dinamiku homogenog portfolija osiguranja. No, nismo spomenuli notaciju očekivanog iznosa pojedninačnih šteta u oznaci:

$$\mu = E(X_i) \qquad i = 1,2, \dots, n.$$

Dok k-ti momenat definišemo:

$$\mu_k = E(X^k)$$

za koji pretpostavljamo da postoji ako je $X_0 \equiv 0$.

Postoje tri osnovne pretpostavke koji Kramer-Lundbergov, klasičan, model nosi sa sobom:

- Proces prebrajanja zahteva, N , u posmatranom vremenskom intervalu je slučajna promenljiva. Zahtevi pristižu u vremenima T_i za koje važi $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \cdots \leq T_N$. Ta vremena nazivamo vremena dospevanja zahteva, ili vremena pristizanja zahteva, ili jednostavno dospeća (claim arrival times).

- Pristizanje i-tog zahteva u vremenu T_i prouzrokuje isplatu štete u iznosu X_i. Niz $\{X_i\}$ je niz nezavisnih, nenegativnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom. Ove slučajne promenljive nazivamo veličinama (iznosima) zahteva (claim sizes).
- Proces veličine zahteva X_i i proces pristizanja zahteva T_i su međusobno nezavisni.

U ovom radu ćemo zanemariti inflaciju i druge eventualne dinamičke promene u portfoliju, pa ukupna vrednost šteta u intervalu [0, t] iznosi

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i.$$

Slučajna promenljiva $S(t)$ ima složenu Poasonovu raspodelu sa parametrom λ. Gde je $N(t)$ proces broja zahteva definisan:

$$N(t) = card\{i \geq 0 : T_i < t\}, \qquad t \geq 0.$$

Tačnije $N = (N(t))_{t\geq 0}$ je proces prebrajanja na intervalu (0,∞], matematički nazvan, brojač, a $N(t)$ broj zahteva koji su dospeli do trenutka t.
Primetimo da trajektorije procesa N i trajektorija procesa S imaju 'skokove' u istim vremenskim trenucima T_i, veličine 1 za N i veličine X_i za S.

$$E\big(S(t)\big) = E\big(N(t)\big) \cdot E(X_i) = \lambda \cdot t \cdot \mu_1.$$

Pretpostavimo da je $u \geq 0$ početni kapital osiguranika, te da se premije naplaćuju po konstantnoj stopi $c > 0$, tako da je u intervalu [0, t] na ime premija naplaćeno ukupno $c \cdot t$. Prirodno je pitati da li postoji neki vremenski trenutak u kojem do tada naplaćene premije zajedno s inicijalnim kapitalom ne pokrivaju sve do tada ostvarene štete. U tom bismo slučaju govorili o propasti osiguranika, odnosno bankrotu istog. Definišimo klasičan model rizika (eng. risk process ili surplus process) kao

$$U(t) = u + c \cdot t - S(t). \qquad (2.1)$$

Propast dakle, odgovara događaju $\{U(t) < 0 : \text{za neko } t \geq 0\}$. Primećujemo da ovako definisana propast u praksi ne znači nužno i stvarnu propast osiguranika. Naime, osiguranik je u mogućnosti povisiti premije ako se proces rizika previše približi 0. Dalje, ovako definisan proces $\{U(t)\}$ opisuje tek jedan od mnogo homogenih portfolija osiguraonika u rukama velike osiguravajuće kompanije, pa se gubici u jednom portfoliju mogu pokriti zaradom iz preostalih.

Posmatraćemo kratkoročne polise osiguranja koje su svojstvene neživotnom osiguranju. Dakle, polisa traje relativno kratko, najčešće godinu dana, i to vreme je unapred fiksirano. Osiguranik plaća premiju osiguravaču, tj. osiguravajućem društvu, a za uzvrat osiguravač isplaćuje štete nastale po polisi za vreme trajanja polise. Rizik uključuje kako individualnu polisu, tako i određenu grupu polisa. Pretpostavićemo da je trajanje polise jedna godina.

2.2. Teorija propasti sa peturbacijama

Klasičan Poasonov model rizika u teoriji propasti pretpostavlja da su vremenski intervali između dva uzastopna zahteva međusobno nezavisni, takođe su zahtevi i intervali zahteva međusobno nezavisni. No ovde će biti reči o modifikovanom Poasonovom modelu rizika, o verovatnoći propasti, odnosno preživljavanja unutar ovog modela. Posmatraćemo kako dodavanje Braunovog kretanja utiče na neizvesnost u prihodu od premija, fluktuacije kamatnih stopa, promene u broju osiguranika, bez zanemarivanja svih drugih pretpostavki.
Na ovom putu posmatramo eksponencijalno raspoređene iznose šteta, predstavljamo nove tehnike aproksimacije napravljene za perturbovane modele u beskonačnom vremenu. Zatim testiramo tačnost ovih aproksimacija koristeći kombinaciju eksponencijalne raspodele za pojedinačne iznose šteta i dajemo konkretan numerički primer na kome ćemo ilustrovati sve u radu teorijski navedeno.

2.2.1. Teorija propasti sa Braunovim kretanjem

Kao što je već rečeno, u klasičnom modelu teorije rizika proces viška u trenutku t dat je sa

$$U(t) = u + c \cdot t - S(t)\,, \qquad t \geq 0\,. \qquad (2.2)$$

Ovde $u \geq 0$ predstavlja početni kapital, c premijska stopa, a ukupni zahtevi dati su slučajnom promenljivom $S(t)$ koja ima složenu Poasonovu raspodelu sa parametrom λ. Funkcija raspodele pojedinačnih zahteva iznosi $F_X(x)$. Očekivana vrednost pojedinačnih iznosa šteta označena je sa μ. Pretpostavimo da postoji pozitivna konstanta θ, u nazivu koeficijent opterećenja, i da za njega važi:

$$\theta = c \cdot (\lambda \cdot \mu) - 1 > 0.$$

Ovaj koeficijent je pozitivan, jer u suprotnom bi važilo $c < \lambda \cdot \mu$ što bi u beskonačnom vremenskom intervalu rezultovalo propast.

Mi ćemo proširiti ovaj model dodavanjem α-stabilnih Levijevih procesa na (2.2), pri čemu model u vremenu dobija svoj novi oblik:

$$U(t) = u + c \cdot t - S(t) + \sigma \cdot Z_\alpha(t). \qquad (2.3)$$

Gde parametar $\sigma > 0$ označava drift, a $Z_\alpha(t)$ Levijev process $\alpha \in (0,2]$. Radi jednostavnosti u ovom radu ćemo razmotriti slučajeve kada je $\alpha = 2$, tada $Z_2(t) = W(t)$, $W(t)$ Braunovo kretanje. Za svako $t > 0$ slučajne promenljive $\{W_t\}$ i $\{S_t\}$ su nezavisne.

Definicija 1. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - prostor verovatnoća. Standardno jednodimenzionalno Braunovo kretanje ili Vinerov proces je realan slučajan proces $W(t), t \geq 0, t \in \mathbb{R}$ koji ima sledeće osobine:

(1) $W(0) = 0$ skoro sigurno
(2) Proces $W(t), t \geq 0$ ima nezavisne priraštaje
(3) Za $0 \leq s < t$ priraštaj $W(t) - W(s)$ ima $\mathcal{N}(0, t - s)$ raspodelu.

Uvođenje $\sigma \cdot Z_\alpha(t)$ u klasičan model postavlja dodatno pitanje. Šta se promenilo u definisanju funkcije verovatnoće preživljavanja, verovatnoće propasti, u odnosu na klasičan model?

Naime, pre definisanja i dalje analize, ukratko želimo da napomenemo da su svi stohastički procesi definisani na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. U ovom delu uvodimo zajedničke elemente i definicije za predstavljeni model u jednačini (2.3), tačnije , verovatnoću propasti i preživljavanja, Lundbergovu nejednakost, koeficijent prilagođavanja, jednostavna gornju granicu, maksimalni agregatni gubitak i neke asimptotske rezultate.

Definicija 2. Neka je T_u slučajna promenljiva koja predstavlja vreme dolaska pojedinačnih šteta u funkciji od početnih rezervi, u, tada

$$T_u = \left\{\begin{matrix} inf\{t: U_t < 0\} \\ \infty \quad U_t \geq 0 \end{matrix}, t \geq 0\right\}, \quad u \geq 0. \qquad (2.4)$$

Definicija 3. Pretpostavimo da je $G(u, y) = P(U(t) \in (-y, 0) \wedge T_u < \infty | U(0) = u)$ to je verovatnoća da se propast dešava sa početnim rezervama u i bankrotom u konačnom vremenskom trenutku sa deficitom koji je najviše y, tada za $y \to \infty$

$$\lim_{y \to \infty} G(u, y) = \psi(u) = P(T_u < \infty | V(0) = u), \quad u \geq 0. \qquad (2.5)$$

Gde je $\psi(u)$ - verovatnoća propasti.

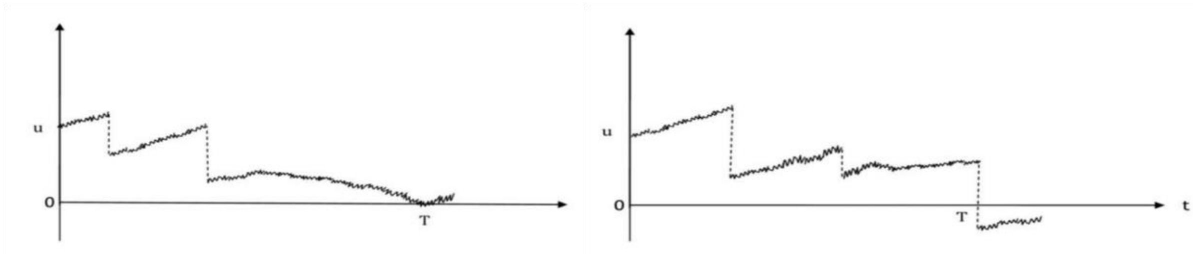
Na osnovu jednakosti (2.4) i (2.5) definišimo verovatnoću preživljavanja $\phi(u) = 1 - \psi(u)$, kao verovatnoću da do bankrota ne dođe nikada u zavisnosti od početnih rezervi u. Da bismo na neki način osigurali da $\phi(u) \neq 0$ za svako $u \geq 0$ potrebno je da je stanje profita osiguranika

$$c - \mu \cdot \lambda > 0. \qquad (2.6)$$

Drugim rečima, potrebno je da je u svakom vremenskom trenutku premija veća od očekivanog iznosa šteta. Ukoliko ovaj uslov nije ispunjen tada je $\phi(u) = 0$, a $\psi(u) = 1$ za svako $u \geq 0$. Jednačina (2.6) ustvari rasvetljava ekonomski značaj klasičnom modelu, te zato za koeficijent opterećenja i važi

$$\theta = c \cdot (\lambda \cdot \mu) - 1.$$

Kako Braunovo kretanje predstavlja pojavu haotičnog kretanja, uvođenjem njega u model dobijamo razlaganje verovatnoće propasti.Verovatnoća propasti se sastoji iz svoje dve komponente ψ_d i ψ_c, gde je ψ_d (d – diffusion) - verovatnoća propasti izazvana oscilacijama, koje potiču od Braunovog kretanja, odnosno višak rezervi je u trenutku propasti jednak nuli, a ψ_c (c – claim) - je verovatnoća propasti s kojom smo se upoznali kod standardnog Kramer-Lundbergovog modela, verovatnoća propasti koja potiče od iznosa zahteva, kada je višak rezervi u trenutku propasti negativan. Ovo smo pokazali i ilustrovano na slici 1.



Slika 1. Razlaganje verovatnoće propasti na ψ_d i ψ_c

Definicija 4. Neka je verovatnoća propasti jednaka zbiru verovatnoća propasti nastalih usled zahteva i oscilacija, i to na sledeći način

$$\psi(u) = P(T_u < \infty | U(0) = u) = \psi_d(u) + \psi_c(u)$$

gde je:

$$\psi_c(u) = P(T_u < \infty \ i \ U(t) < 0 | U(0) = u)$$
$$\psi_d(u) = P(T_u < \infty \ i \ U(t) = 0 | U(0) = u).$$

Kako je za $u = 0$ tada:

$$E\big(U(t)\big) = E\big(0 + c \cdot t - S(t) + \sigma \cdot W(t)\big) =$$
$$= c \cdot t - \lambda \cdot t \cdot \mu_1 + \sigma \cdot 0 = (c - \lambda \cdot \mu_1) \cdot t \geq 0.$$

Gornja nejednakost sledi iz činjenice da je $c - \lambda \cdot \mu_1 > 0$ i $t \geq 0$.

Na osnovu $E\big(U(t)\big) \geq 0, \ \ t \geq 0$ prirodno, nameću se sledeće jednakosti

$$\phi(0) = \psi_c(0) = 0$$
$$\psi(0) = \psi_d(0) = 1.$$

Treba istaći da bez obzira na pojedinačno ponašanje ove dve verovatnoće za $u = 0$, one se u zbiru ponašaju isto kao verovatnoća propasti u klasičnom modelu, odnosno, sa porastom početnih rezervi, verovatnoća propasti opada.

Osiguravajuće kompanije nastoje da ove dve verovatnoće u svakom trenutku kontrolišu kako bi obezbedile svoju egzistenciju i bolje poslovanje. Ukoliko su poznate početne rezerve u i faktor opterećenja θ ove dve verovatnoće bivaju kontrolisane od strane osiguravajućih kompanija.

Međutim, postavlja se pitanje šta ako želimo da ograničimo verovatnoću propasti, ako želimo da postignemo da je $(u) < \alpha$, $\alpha \in (0,1)$? Koliko onda da uzmemo da je u, θ? Kako da sklonimo rezerve koje ne smemo da trošimo?

Ova i još mnoga druga pitanja se nameću u teoriji propasti, a metode za računanje ovih verovatnoća su teške.

Pomoću ovog našeg izmenjenog oblika pokušaćemo da dobijemo oblik za računanje verovatnoće propasti i preživljavanja.

Prvi koji se bavio izmenama osnovnog modela je Gerber (1970), dok studije pokazuju da su i mnogi drugi autori poslednjih godina intezivno radili na ovakvim modelima, koristeći se onim što je Gerber pokazao.
Da bismo razumeli dokaze nekih teorema, potrebno je objasniti sledeću strategiju. Posmatramo slučaj kada je višak, $u \leq b$, odnosno postoji barijera b, koja podrazumeva da svaki višak koji dostigne zadato b bude isplaćen kao dividenda. Gerber-Šui dali su formalnu definiciju:

$$M(t) = \max_{0 \leq s \leq t} U(s), \qquad t \geq 0.$$

Ukupne dividende isplaćene do trenutka t su:

$$D(t) = (M(t) - b)_+ = \begin{Bmatrix} 0 & ako\ je\ M(t) \leq b \\ M(t) - b & ako\ je\ M(t) > b \end{Bmatrix}.$$

Neka je $U_b(t)$ funkcija viška koja odgovara modifikovanom modelu rizika sa početnim viškom $U_b(0) = u$, pri čemu je u ispod zadate barijere b. Tada je:

$$U_b(t) = U(t) - D(t), \qquad t \geq 0\,.$$

Zatim definišimo vreme propasti za ovu funkciju viška $U_b(t)$ kao i verovatnoću propasti:

$$T_b = inf\{t: U_b(t) \leq 0\}$$

$$\psi_b(u) = P(T_b < \infty | U_b(0) = u), \qquad 0 \leq u \leq b.$$

Verovatnoću propasti nastalu oscilacijama u $U_b(t)$ prouzrokovanim Braunovim kretanjem $W(t)$ definišemo kao:

$$\psi_{b,d}(u) = P(T_b < \infty, U_b(T_b) = 0\ | U_b(0) = u) \qquad 0 \leq u \leq b.$$

I na kraju verovatnoću propasti izazvanu iznosima šteta

$$\psi_{b,c}(u) = P(T_b < \infty, U_b(T_b) < 0\ | U_b(0) = u) \qquad 0 \leq u \leq b.$$

Važi:

$$\psi_b(u) = \psi_{b,d}(u) + \psi_{b,c}(u)$$

$$\psi_{b,c}(0) = 0$$

$$\psi_{b,d}(0) = 1.$$

,2.2.2. Maksimalni ukupni gubitak

Kako bismo u našu priču uveli verovatnoću preživljavanja, definišimo sledeću slučajnu promenljivu. U ovom delu rada, zarad dalje analize, a u cilju jednostavnosti, posmatraćemo perturbovan model sa Braunovim kretanjem kod koga je $\sigma = 1$.

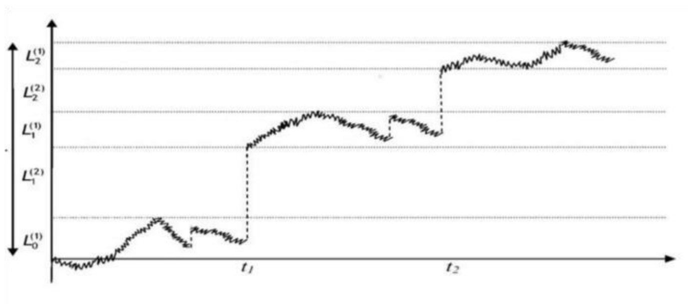
Definicija 5. Neka je L slučajna promenljiva koja predstavlja maksimalni ukupni gubitak, takva da proces $\{L(t): t \geq 0\}, L(t) = u - U(t)$ ima funkciju raspodele:

$$F_L(u) = P(L \leq u) = P(L(t) \leq u, \forall t \geq 0) = P(U(t) \geq 0, \forall t \geq 0) = \phi(u).$$

Gde je $\phi(u)$ verovatnoća preživljavanja za koju važi $(u) = F_L(u) = q = \frac{\theta}{1+\theta}$.

Kako slučajna promenlja L predstavlja maksimalni gubitak definišemo je kao:

$$L = max\{u - U(t)\} = max\{S(t) - ct - W(t)\} = L_0{}^{(1)} + \sum_{i=1}^{N} (L_i{}^{(1)} + L_i{}^{(2)}).$$



Slika 2. Dekompozicija maksimalnog gubitka

Ovde N predstavlja maksimalan broj procesa $\{L(t)\}$ koji su uzrokovani pojavom šteta. $T_1, T_2, \dots, T_N$ predstavljaju vremena pojave ovih zahteva, uzimajući da je $T_0 = 0$, a $T_{N+1} = \infty$.

Definišimo $L_k{}^{(1)}$ i $L_k{}^{(2)}$ kao:

$$L_k{}^{(1)} = max\{L(t); t < T_{k+1}\} - L(T_{k+1})$$

$$L_k{}^{(2)} = L(T_k) - L(T_{k-1}) - L_{k-1}{}^{(1)}.$$

Gde je $max\{L(t); t < T_{k+1}\}$ maksimalni gubitak koji se javlja zbog Braunovog kretanja pre vremena T_{k+1}. Dok $L_k{}^{(1)}$ i $L_k{}^{(2)}$ predstavljaju iznose koji se rezultiraju u periodu $(k, k+1)$ i figurišu u maksimalnom gubitku, jedan potiče od Braunovih oscilacija, a drugi od šteta, respektivno.

Teorema 1. Slučajna promenljiva N ima geometrijsku raspodelu.

Dokaz.

Kako je $\phi(0) = \frac{\theta}{1+\theta}$ i $(0) = 1 - \phi(0) = \frac{1}{1+\theta}$.

N – broj padova ispod datog nivoa

$$P\{N=0\}=\phi(0)=\frac{\theta}{1+\theta}.$$

Ova jednačina znači da nije bilo pada ispod zadatog nivoa, odnosno da smo preživeli.

$$P\{N=1\}=\psi(0)\cdot(1-\phi(0)).$$

Na ovaj način definišemo verovatnoća da dođe do jednog pada, ukoliko je verovatnoća pada data sa $\psi(0)$.

$$P\{N=2\}=\psi(0)^2\cdot(1-\phi(0))$$

$$P\{N=k\}=\psi(0)^k\cdot(1-\phi(0)).$$

Na osnovu čega slučajna promenljiva N ima geometrijsku raspodelu. ■

Dalje zarad lakše notacije uzmimo $p=\frac{1}{1+\theta}$.

Slučajne promenljive ${L_0}^{(1)}$, ${L_1}^{(1)}$ imaju isti raspodelu sa funkcijom raspodele $g_1(x)$, dok ${L_1}^{(2)}$, ${L_2}^{(2)}$ imaju isti raspodelu sa funkcijom raspodele $g_2(x)$. Važi da su $N,{L_0}^{(1)},{L_1}^{(1)},{L_1}^{(2)},{L_2}^{(2)},\ldots$ nezavisne slučajne promenljive.

Definišimo sa $G(x)=P(S\le x)$ funkciju raspodele slučajne promenljive koja predstavlja ukupan iznos šteta.
Dalje, neka je $F_X(x)=P(X\le x)$ funkcija raspodele individulanog zahteva i $p_n=P(N=n)$ gde je $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ funkcija raspodele slučajne promenljive koja predstavlja broj zahteva.
Možemo izvesti formulu za funkciju raspodele slučajne promenljive S, odnosno $P(S\le x)$ koji postoji ako je broj zahteva $n, n=0,1,2,\ldots$ i ako je suma tih n zahteva ne veća od x.

Definišimo:

$$\{S\le x\}=\bigcup_{n=0}^{\infty}(S\le x\ i\ N=n).$$

Uvođenjem verovatnoće u gornju jednakost dobijamo

$$G(x)=P(S\le x)=\sum_{n=0}^{\infty}P(S\le x\ i\ N=n).$$

Iz definicije uslovne verovatnoće sledi

$$P(S\le x\ i\ N=n)=P(S\le x|N=n)\cdot P(N=n)$$

$$P(S\le x|N=n)=P(\sum_{i=1}^{n}X_i\le x)=F^{n*}(x)$$

Prema tome,

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot F^{n*}(x).$$

Za funkciju $F^{n*}(x)$ bitno je reći da je $F^{0*}(x) = \begin{Bmatrix} 1, x \geq 0 \\ 0, inače \end{Bmatrix}$.

Za dalju analizu moramo se podsetiti i nekih definicija iz teorije verovatnoće.

Definicija 6. Ako je $Z = X + Y$, tada je gustina $f_z(z)$ promenljive Z, data pomoću:

$$f_Z(z) = f_{X,Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)dx,$$

pri čemu je $f_{X,Y}$ gustina raspodele slučajnih promenljivih X i Y. Dalje, ako su X, Y nezavisne slučajne promenljive, tada je:

$$f_{X,Y} = f_X(x) \cdot f_Y(y),$$

gde je $f_X(x)$ gustina raspodele slučajne promenljive X, a $f_Y(y)$ gustina raspodele slučajne promenljive Y.

Definicija 7. Ukoliko imamo nezavisnost slučajnih promenljivih, prethodna jednakost dobija oblik:

$$f_Z(z) = f_{X,Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot g(z-x)dx = f * g(z).$$

Na osnovu prethodne analize i činjenice da je $\phi(u) = P(L(t) \leq u;\ \forall t \geq 0) = P(L \leq u)$ funkcija raspodele slučajne promenljive L, pritom je slučajna promenljiva L jednaka zbiru nezavisnih slučajnih promenljivih ${L_k}^{(1)}$ $k = 0,1,2$ .... i ${L_k}^{(2)}$, $k = 1,2,3$ ... važi sledeća formula:

$$\phi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} p \cdot (1-p)^n \cdot {G_1}^{*(n+1)} * {G_1}^{*(n)}\,(u)$$

gde su $G_1(x)$ i $G_2(x)$ funkcije raspodele slučajne promenljive redom ${L_k}^{(1)}$, $k = 0,1,2$ .... i ${L_k}^{(2)}$, $k = 1,2,3$ ... .

Vidimo da je ova jednakost slična jednakosti koja sledi iz formule verovatnoće preživljavanja:

$$\phi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} q \cdot (1-q)^n \cdot {H_1}^{*(n+1)} * {H_1}^{*(n)}\,(u)$$

i na osnovu toga zapažamo da važi sledeće:

$$p = g, G_1(x) = H_1(x), G_2(x) = H_2(x).$$

Dokaz ove teoreme navodimo nešto kasnije, nakon što uvedemo i pokažemo oblike integro – diferenecijalnih jednačina za verovatnoće propasti i preživljavanja.

Sledi jedna teorema koju navodimo bez dokaza.

Teorema 2. Funkcija generatrise momenata slučajne promenljive L data je na sledeći način

$$M_l(t) = \frac{t\cdot\zeta\cdot(c-\lambda\cdot\mu)}{c\cdot\zeta\cdot(t\cdot(\zeta-t)-\lambda\cdot M_x(t)-1)}, \quad \sigma > 0.$$

Podsetimo se funkcije viška sa barijerom $b, U_b(t)$, definišimo verovatnoću preživljavanja za ovu funkciju.

Definicija 8. Za neko $\delta > 0$ definišimo:

$$\phi_{b,c}(u) = E\left[e^{-\delta T_b} I(T_b < \infty, U_b(T_b) = 0 \,\middle|\, U_b(0) = u\right], \quad 0 \le u \le b$$

$$\phi_{b,c}(0) = 1.$$

Vidimo da je verovatnoća preživljavanja definisana kao Laplasova transformacija vremena propadanja T_b u odnosu na δ, ako je propast izazvana oscilacijama, pri čemu je $I(\cdot)$ indikator funkcija.

Definicija 9. Definišimo 'penalty function' $w(x, y)$ za $x, y \ge 0$ nenegativne promenljive, zatim definišimo:

$$\phi_{b,d}(u) = E\left[e^{-\delta T_b} w(U_b(T_b -), |U_b(T_b)|) I(T_b < \infty, U_b(T_b) = 0 \,\middle|\, U_b(0) = u\right], \quad 0 \le u \le b$$

$$\phi_{b,d}(0) = 0$$

takozvanu 'expected discounted penalty' (Gerber-Shiu) funkciju definisanu ukoliko do propasti dođe zbog šteta.

Bitno je napomenuti da ovo nije originalna definicija Gerber-Shui funkcije jer Gerber-Shui funkcija ne podrazumeva nikakavo ograničenje na višak rezervi , nego važi $u \ge 0$. Međutim oznake su iste kao u ovoj, pomenutoj, funkciji, te $U_b(T_b -)$ predstavlja višak rezervi pre propasti, dok $|U_b(T_b)|$ predstavlja deficit uoči propasti.

Uočimo za $w \equiv 1$ 'penalty function' svodimo na verovatnoću propasti. U ovom radu, $\delta = 0$, ne uzimamo u obzir diskontni faktor, jer u našoj analizi zanemarujemo kamatnu stopu, koja se sama po sebi razlikuje od nule i kao takva postoji, ali dodatno komplikuje stvrari. Uzimajući i nju u obzir pisaćemo u nekom dugom radu.

2.2.3. Integro - diferencijalne jednačine i njihovo rešenje

Kako smo definisali verovatnoće preživljavanja i propasti, sad ćemo matematički da pristupimo integro - diferencijalnim jednačinama i rešavanju istih.
Prvo, pre analize integro-diferencijalnih jednačina za naš model, podsetimo se integro-diferencijalne jednačine u Kramer -Lundbergovom modelu.

Definicija 10. Integro-diferencijalna jednačina u Kramer-Lundbergovom modelu ima sledeću formu:

$$c\phi'(u) = \lambda \cdot \phi(b) - \lambda \cdot \int_0^u \phi(u-x)p(x)dx.$$

Ovaj oblik služi za dalje izvođenje i uopštavanje. No, njega uzmimo kao kamen temeljac svih ostalih složenijih integro-diferencijalnih jednačina.

Teorema 3. [8] Ako je početni višak jednak u, i važi da postoji barijera b za koju pišemo $u \leq b$, onda imamo sledeću integro-diferencijalnu jednačinu:

$$\frac{1}{2}\sigma^2\phi''(b-) - c\phi'(b-) = (\lambda+\delta)\phi\,(b) - \lambda\int_0^b \phi(b-x)p(x)dx. \qquad (2.7)$$

Dokaz.

Definišimo za $u = b$ i $t \geq 0$,

$$U(t) = b + c\cdot t + \sigma\cdot W(t)\,,$$

$$M(t) = \max_{0\leq s\leq t} U(s) = \max_{0\leq s\leq t}\{b + c\cdot s + \sigma\cdot W(s)\}\,,$$

$$D(t) = |M(t) - b|_+ = \max_{0\leq s\leq t}\{c\cdot s + \sigma\cdot W(s)\}\,,$$

$$U_b(t) = U(t) - D(t) = b + c\cdot t + \sigma\cdot W(t) - \max_{0\leq s\leq t}\{c\cdot s + \sigma\cdot W(s)\}\,,$$

po rezultatima Borodina and Salminen[1] imamo

$$\max_{0\leq s\leq t}\left\{\frac{c}{\sigma}\cdot s + \sigma\cdot W(s)\right\} - \frac{c}{\sigma}\cdot t - W(t) = \left|\widetilde{W(t)} - \frac{c}{\sigma}\cdot t\right|\,,$$

gde je $W(t)$ Braunovo kretanje sa driftom $\frac{c}{\sigma}$, $\widetilde{W(t)}$ standardno Braunovo kretanje nezavisno od $W(t)$ i od ukupnog iznosa šteta $\sum_{i=1}^{N(t)} X_i$.

Odatle sledi,

$$U_b = b - \left|\sigma\cdot\ \widetilde{W(t)}\ - c\cdot t\right|. \qquad (2.8)$$

Dajemo dokaz za (2.7) koji je najsličniji dokazu koju su dali Gerber i Landry[2]. Posmatrajmo interval od 0 do dt. Diskontni faktor za ovaj interval je $1-\delta dt$. Verovatnoća da se u ovom intervalu ne realizuje ni jedan zahtev je $1-\lambda\cdot t$, dok je verovatnoća realizacije zahteva u ovom vremenskom intervalu $\lambda\cdot t$. Uzimajući u obzir ove uslove, ako se prva šteta realizuje, za $u = b$ imamo sledeće:

$$\begin{aligned}\phi(b) = (1-\lambda\cdot dt)\cdot(1-\delta\cdot dt)\cdot E\big[\phi\big(U_b(dt)\big)\big]\\ +\lambda\cdot dt\cdot(1-\delta\cdot dt)\cdot E[\phi(U_b(dt)-X_1)]\,.\end{aligned} \qquad (2.9)$$

[1] Andrei N. Borodin, Paavo Salminen – Handbook of Brownian Motion - Facts and Formulae str.73, 2002.

[2] H.U.Gerber and B. Landy On the discounted penalty at ruin in a jump diffusion and the perpetual put option, 1998.

Zamenom (2.8) u (2.9) dobijamo, kao i korišćenjem prethodnih osobina dobijamo:

$$\phi(b) = (1-\lambda\cdot dt)\cdot(1-\delta\cdot dt)\cdot E\left[\phi\left(b-\left|\sigma\cdot\ \widetilde{W(dt)}\ -c\cdot dt\right|\right)\right] + \lambda\cdot dt\cdot(1-\delta\cdot dt)\cdot E\left[\int_0^{b-\left|\sigma\cdot\ \widetilde{W(dt)}\ -c\cdot dt\right|}\phi\left(b-\left|\sigma\cdot\ \widetilde{W(dt)}\ -c\cdot dt\right|-x\right)p(x)dx\right]. \qquad (3.0)$$

Dalje,

$$E\left[\phi\left(b-\left|\sigma\cdot\ \widetilde{W(dt)}\ -c\cdot dt\right|\right)\right] = \phi(b) + \mathcal{G}_{\phi(b)}dt + o(dt).$$

Gde je $\lim_{dt\to 0}\frac{o(dt)}{dt} = 0$, a $\mathcal{G}_{\phi(b)}$ generator procesa $\left\{\left|\sigma\cdot\ \widetilde{W(t)}\ -c\cdot t\right| =; t\geq 0\right\}$.

Definicija 11. Generator procesa $\sigma\cdot W(t)-c\cdot t,\ t\geq 0$ koji zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednačinu $dX_t = \sigma\cdot W(t)\cdot dt - c\cdot dt$ dat je na sledeći način

$$\mathcal{G}_{\phi(b)} = -c\cdot\phi(b)' + \frac{\sigma^2}{2}\cdot\phi(b)''.$$

Tada,

$$E\left[\phi\left(b-\left|\sigma\cdot\ \widetilde{W(dt)}\ -c\cdot dt\right|\right)\right] = \phi(b) - c\cdot\phi(b-)' + \frac{\sigma^2}{2}\cdot\phi(b-)'' + o(dt). \qquad (3.1)$$

Zamenom (3.1) u (3.0), oduzimanjem $\phi(u)$ sa obe strane, deljenom leve i desne strane sa dt i puštanjem $dt\to 0$, i uzimanjem u obzir definiciju Braunovog kretanja $W(0)=0$, imamo sledeće:

$$\frac{\sigma^2}{2}\cdot\phi(b-)'' - c\cdot\phi(b-)' = (\lambda+\delta)\phi(b) - \lambda\int_0^b\phi(b-x)p(x)dx. \qquad \blacksquare$$

Teorema 4. [5] Pretpostavimo da je $p(x)$ diferencijalna na intervalu $(0,\infty)$, tada $\phi_{b,d}(u)$ zadovoljava sledeću integro – diferencijalnu jednačinu za $0<u<b$

$$\frac{1}{2}\sigma^2\cdot\phi''_{b,d}(u) + c\cdot\phi'_{b,d}(u) = \lambda\cdot\phi_{b,d}(u) - \lambda\cdot\int_0^u\phi_{b,d}(u-x)p(x)dx$$

$$\phi_{b,d}(0) = 1$$

$$\phi'_{b,d}(b-) = 0.$$

Dokaz.

Ideja dokaza je da posmatramo funkciju $\phi_{\infty,c}(u)$, odnosno da početne rezerve zadovoljavaju $0<u<\infty$.

Posmatramo interval sa beskonačno malom dužinom i razlikujemo postoji li šteta u tom interval, ili ne postoji.

Iz zakona verovatnoća sledi

$$\phi(u) = (1 - \lambda \cdot dt) \cdot E\big[\phi\big(U(dt)\big)\big]$$
$$+\lambda \cdot dt \cdot E[\phi(U(dt) - X_1)]$$

$$\phi(u) = (1 - \lambda \cdot dt) \cdot E\big[\phi\big(u + c \cdot dt + \sigma \cdot W(dt)\big)\big]$$

$$+\lambda \cdot dt \cdot E\left[\int_0^{u+c\cdot dt+\sigma\cdot W(dt)} \phi(u + c \cdot dt + \sigma \cdot W(dt) - x)\, p(x)dx\right]. \quad (3.2)$$

Kako je

$$E\big[\phi\big(u + c \cdot dt + \sigma \cdot W(dt)\big)\big] = \phi(u) + c \cdot dt\phi'(u) + \frac{\sigma^2}{2} \cdot dt\phi''(u),$$

zamenimo ovo u jednakost (3.2), nakon čeka dobijemo

$$\phi(u) = (1 - \lambda \cdot dt) \cdot \left[\phi(u) + c \cdot dt\phi'(u) + \frac{\sigma^2}{2} \cdot dt\phi''(u)\right]$$

$$+\lambda \cdot dt \cdot E\left[\int_0^{u+c\cdot dt+\sigma\cdot W(dt)} \phi(u + c \cdot dt + \sigma \cdot W(dt) - x)\, p(x)dx\right].$$

No, kako je $E(c) = c$, u drugom sabirku imamo očekivanu vrednost konstante, pa sledi da je poslednja jednakost:

$$\phi(u) = (1 - \lambda \cdot dt) \cdot \left[\phi(u) + c \cdot dt\phi'(u) + \frac{\sigma^2}{2} \cdot dt\phi''(u)\right]$$

$$+\lambda \cdot dt \cdot \left[\int_0^{u+c\cdot dt+\sigma\cdot W(dt)} \phi(u + c \cdot dt + \sigma \cdot W(dt) - x)\, p(x)dx\right].$$

Oduzmemo $\phi(u)$ sa obe strane i podelimo celu jednakost sa dt i dobijemo:

$$0 = -\lambda \cdot \phi(u) + c \cdot \phi'(u) + \frac{\sigma^2}{2} \cdot \phi''(u) - \lambda \cdot \phi(u) - \lambda \cdot c \cdot dt\phi'(u) - \lambda \cdot \frac{\sigma^2}{2} \cdot dt\phi''(u)$$
$$+\lambda \cdot \left[\int_0^{u+c\cdot dt+\sigma\cdot W(dt)} \phi(u + c \cdot dt + \sigma \cdot W(dt) - x)\, p(x)dx\right].$$

Sada $dt \to 0$ i $W(0) = 0$

$$0 = -\lambda \cdot \phi(u) + c \cdot \phi'(u) + \frac{\sigma^2}{2} \cdot \phi''(u) + \lambda \cdot \left[\int_0^u \phi(u - x)\, p(x)dx\right]$$

$$c \cdot \phi'(u) + \frac{\sigma^2}{2} \cdot \phi''(u) = \lambda \cdot \phi(u) - \lambda \cdot \left[\int_0^u \phi(u - x)\, p(x)dx\right]. \qquad \blacksquare$$

Na osnovu prethodnih teorema izvešćemo oblik za verovatnoću preživljavanja i verovatnoću propasti koji zavisi samo od u. Podrazumevamo da su vremenski intervali dužine dt beskonačno mali odnosno $dt \to 0$. Shodno tome diskontni faktor $1 + \delta \cdot dt = 1$. Treba još napomenuti da se vremenski intervali razlikuju po tome da li se u njima realizovao zahtev za štetu, ili se nije realizovao.

Izvedimo sada integro-diferencijalne jednačine za naše verovatnoće uz pretpostavku o perturbovanom modelu rizika.

Iskoristimo jednačinu iz poslednje teoreme:

$$\frac{1}{2}\sigma^2\phi''(u) + c\phi'(u) = \lambda \cdot \phi\,(u) - \lambda \cdot \int_0^u \phi(u-x)p(x)dx. \qquad (3.3)$$

Integralimo sada (3.3) sa $\int_{u=0}^{u=v}$. Uzimajući u obzir da je $\phi(0) = 0$ dobijamo

$$\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot\big(\phi'(v) - \phi'(0)\big) = -c\cdot\phi(v) + \lambda\cdot\int_0^v \phi(v-y)\big[1 - F_y\,(y)\big]dy, \quad v \geq 0\,. \quad (3.4)$$

Kako je $\lim_{u\to\infty} \phi(u) = 1$, kada početne rezerve teže beskonačnosti, verovatnoća preživljavanja je skoro siguran događaj. Odnosno, kao što smo već rekli, što su početne rezerve veće, verovatnoća propasti je manja. Za $v \to \infty$, uz prethodnu činjenicu kao i uz činjenicu da zahtevi imaju Poasonovu raspodelu sa parametrom μ, važi:

$$\int_0^\infty [1 - F_x(x)]dx = E(x) = \mu.$$

Kako je podintegralna funkcija $f(x)$ definisana na beskonačnom intervalu podintegracije važi:

$$\lim_{\beta\to\infty}\int_0^\beta f(x)dx = \int_0^\infty f(x)dx$$

izraz (3.4) postaje:

$$\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot\big(\phi'(\infty) - \phi'(0)\big) = -c\cdot\phi(\infty) + \lambda\cdot\int_0^\infty \phi(\infty)\big[1 - F_y(y)\big]dy,$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot\big(0 - \phi'(0)\big) = c + \lambda\cdot\mu$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot\big(-\phi'(0)\big) = c + \lambda\cdot\mu$$

$$\phi'(0) = \frac{-c - \lambda\cdot\mu}{\frac{1}{2}\cdot\sigma^2} = \frac{2\cdot(-c - \lambda\cdot\mu)}{\sigma^2}$$

odakle sledi:

$$\phi'(0) = \frac{2\cdot(-c - \lambda\cdot\mu)}{\sigma^2} = \zeta\cdot q$$

gde je $\zeta = \frac{2\cdot c}{\sigma^2}$, a q parametar geometrijske raspodele slučajne promenljive N.

Na kraju jednačina (3.4) dobija sledeći oblik:

$$\phi'(v) - q \cdot \zeta = \zeta \cdot \phi(u) + 2 \cdot \frac{\lambda}{\sigma^2} \cdot \int_0^v \phi(v-y)\left[1 - F_y(y)\right] dx, \quad v \geq 0. \qquad (3.5)$$

Po Gerberu (1970) je ovo finalni oblik "extended defective renewal equation". Studije posle njegove objave su otišle još jedan korak dalje i pokazale sledeće.

Prvo, integralimo jednačinu (3.5) sa $\int_{v=0}^{v=x} e^{\zeta v}$. Nakon čega dobijamo:

$$\int_{v=0}^{v=x} e^{\zeta v} \cdot \phi'(v) dv - q \cdot \zeta \cdot \int_{v=0}^{v=x} e^{\zeta v} dv =$$

$$\zeta \cdot \int_{v=0}^{v=u} e^{\zeta v} \cdot \phi(v) dv + 2 \cdot \frac{\lambda}{\sigma^2} \cdot \int_{v=0}^{v=x} \int_0^v \phi(v-y)\left[1 - F_y(y)\right] dy dv. (*)$$

Rešimo prvi integral parcijalnom integracijom $u = e^{\zeta v} \qquad du = \zeta \cdot e^{\zeta v}$

$$dv = \phi'(v) \quad v = \phi(v)$$

$$\int_{v=0}^{v=x} e^{\zeta v} \cdot \phi'(v) dv = e^{\zeta v} \cdot \phi(v) \Big|_0^x - \zeta \cdot \int_{v=0}^{v=x} e^{\zeta v} \cdot \phi\,(v) dv.$$

Zamenimo ovo u (*)

$$e^{\zeta v} \cdot \phi(v) \Big|_0^x - \zeta \cdot \int_{v=0}^{v=x} e^{\zeta v} \cdot \phi\,(v) dv - q \cdot \zeta \cdot \int_{v=0}^{v=x} e^{\zeta v} dv =$$

$$-\zeta \cdot \int_{v=0}^{v=x} e^{\zeta v} \cdot \phi(v) dv + 2 \cdot \frac{\lambda}{\sigma^2} \cdot \int_{v=0}^{v=x} \int_0^v \phi(v-y)\left[1 - F_y(y)\right] dy dv,$$

skratimo šta se skratiti može nakon čega dobijamo izraz

$$e^{\zeta x} \cdot \phi(x) - q \cdot \zeta \cdot \int_{v=0}^{v=x} e^{\zeta v} dv = 2 \cdot \frac{\lambda}{\sigma^2} \cdot \int_{v=0}^{v=x} \int_0^v \phi(v-y)\left[1 - F_y(y)\right] dy dv.$$

Rešenje drugog integrala se trivijalno dobije

$$\int_{v=0}^{v=x} e^{\zeta \cdot v} \cdot q \cdot \zeta dv = q \cdot \zeta \cdot \frac{1}{\zeta} \cdot (e^{\zeta \cdot x} - 1),$$

kao finalnu jednačinu dobijamo

$$e^{\zeta x} \cdot \phi(x) = q \cdot \left(e^{\zeta x} - 1\right) + 2 \cdot \frac{\lambda}{\sigma^2} \cdot \int_{v=0}^{v=x} \int_0^v \phi(v-y)\left[1 - F_y(y)\right] dy dv. \qquad (3.6)$$

Uvodimo funkcije gustine $h_1(.)$ i $h_2(.)$ definisane na sledeći način:

$$h_1(x) = \zeta \cdot e^{-\zeta x}$$

$$h_2(x) = {\mu_1}^{-1}[1 - F_x(x)], \quad x > 0.$$

Dok su $H_1(x)$ i $H_2(x)$ odgovarajuće funkcije raspodele za date funkcije gustine.

Prema tome,

$$H_1(x) = \int_0^x h_1(x)dx$$

$$= \int_0^x \zeta \cdot e^{-\zeta x} dx$$

$$= -\zeta \cdot \frac{1}{\zeta} \cdot \int_0^x e^{-\zeta x} dx \qquad \text{Smena : } t = -\zeta x$$

$$= 1 - e^{-\zeta x}. \qquad dt = -\zeta \cdot dx$$

Takođe na isti način dobijamo i $H_2(x)$. Podsetimo se matematičkog pojma konvolucija.

Definicija12. Konvoluciju među dvema funkcijama f, g definišemo na sledeći način:

$$h(t) = \int f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau,$$

odnosno kraće,

$$h(t) = f(t) * g(t).$$

Zapišimo konvoluciju naših funkcija $h_1(t)$ i $h_2(t)$

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

$$= \int \zeta \cdot e^{-\zeta \cdot \tau} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot [1 - F(\tau - t)]\, d\tau.$$

Primetimo, ovaj izraz jako podseća na unutrašnji integral jednakosti (3.5).

Posmatrajmo sada:

$$e^{\zeta x} \cdot \phi(x) = q \cdot \left(e^{\zeta x} - 1\right) + 2 \cdot \frac{\lambda}{\sigma^2} \cdot \int_{v=0}^{v=x} \int_0^v \phi(v - x)[1 - F_x(x)]\, dx dv,$$

podelimo ovaj izraz sa $e^{\zeta x}$

$$\phi(x) = \frac{q}{e^{\zeta x}} \cdot \left(e^{\zeta x} - 1\right) + 2 \cdot \frac{\lambda}{\sigma^2 \cdot e^{\zeta x}} \cdot \int_{v=0}^{v=x} \int_0^v e^{\zeta v} \cdot \phi(v - y)\left[1 - F_y(y)\right] dy dv.$$

Analizirajmo prvi sabirak

$$\frac{q}{e^{\zeta x}} \cdot \left(e^{\zeta x} - 1\right) = q \cdot \left(1 - e^{-\zeta x}\right)$$

$$= q \cdot H_1(x).$$

Zatim drugi,

$$2 \cdot \frac{\lambda}{\sigma^2} \cdot \int_{v=0}^{v=x} \int_0^v e^{-\zeta \cdot (v-x)} \cdot \phi(v-y)\left[1-F_y(y)\right] dydv,$$

pomnožimo i podelimo ovaj integral sa konstantama $\zeta, \frac{1}{\mu}$.

$$2 \cdot \frac{\lambda \cdot \mu}{\sigma^2 \cdot \zeta} \cdot \int_{v=0}^{v=x} \int_0^v \zeta e^{-\zeta \cdot (v-x)} \cdot \phi(v-y) \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \left[1-F_y(y)\right] dydv =$$

$$2 \cdot \frac{\lambda \cdot \mu}{\sigma^2 \cdot \frac{2 \cdot c}{\sigma^2}} \cdot \int_{v=0}^{v=x} \int_0^v \zeta e^{-\zeta \cdot (v-x)} \cdot \phi(v-y) \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \left[1-F_y(y)\right] dydv =$$

$$2 \cdot \frac{\lambda \cdot \mu}{2 \cdot c} \cdot \int_{v=0}^{v=x} \int_0^v \zeta e^{-\zeta \cdot (v-x)} \cdot \phi(v-y) \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \left[1-F_y(y)\right] dydv =$$

$$\frac{\lambda \cdot \mu}{c} \cdot \int_{v=0}^{v=x} \int_0^v h_1(v-x) \cdot \phi(v-y) \cdot h_2(y)\, dydv. \qquad (**)$$

Stoga definišimo sledeće: $t = x - v + y$,

$\tau = v - x,$

$z = v - y$.

Pogledajmo još čemu je jednak izraz

$$1 - q = 1 - \left(1 - \frac{\lambda \cdot \mu \cdot \sigma^2}{c}\right)$$

$$= \frac{\lambda \cdot \mu \cdot \sigma^2}{c},$$

uz ove oznake poslednja jednakost (**) postaje

$$(1-q) \cdot \int_0^x \phi(z) \cdot h_1 * h_2(x-z)dz.$$

Pomoću ove analize dobijamo izraz za verovatnoću preživljavanja koja zavisi samo od x i evo ga njen oblik:

$$\phi(x) = q \cdot H_1(x) + (1-q) \int_0^x \phi(z) \cdot h_1 * h_2(x-z)dz, \qquad x \geq 0.$$

No, kako naše verovatnoće zavise od početnih rezervi u u našoj priči uzećemo da je $x = u$.

$$\phi(u) = q \cdot H_1(u) + (1-q)\int_0^u \phi(z) \cdot h_1 * h_2(u-z)dz, \qquad u \geq 0 \qquad (3.7)$$

Daćemo izraze za $\psi(x), \psi_d\,(x), \psi_c\,(x)$.

Isto kao što smo u teoremi 1. pokazali kako dobijamo integro - diferencijalnu jednačinu za verovatnoću preživljavanja na isti način dobijamo i integro - diferencijalnu jednačinu za verovatnoću propasti.

$$\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \psi_d''^{(u)} - c \cdot \psi_d'(u) = \lambda \cdot \psi_d\,(u) - \lambda \cdot \int_0^u \psi_d(u-x)\varphi_x(x)dx.$$

Integralimo sada prethodnu jednakost sa $\int_{u=0}^{u=v}$.Uzimajući u obzir da je $\phi(0) = 0$ dobijamo

$$\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \left(\psi_d'(v) - \psi_d'(0)\right) = -c \cdot \psi_d\,(v) + \lambda \cdot \int_0^v \psi_d\,(v-y)\left[1 - F_y\,(y)\right]dy, \quad v \geq 0\,. \quad (***)$$

Kako je $\lim_{u\to\infty} \psi_d(u) = 0$, pustimo li $v \to \infty$ dobijamo

$$\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \left(\psi_d'(\infty) - \psi_d'(0)\right) = -c \cdot \psi_d\,(\infty) + \lambda \cdot \int_0^\infty \psi_d\,(\infty)\left[1 - F_y\,(y)\right]dy.$$

Na osnovu prethodnog sve ide u nulu osim $\psi_d'(0)$, pa sledi

$$-\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \psi_d'(0) = 0,$$

pa je jednakost (***) sledećeg oblika

$$\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \left(\psi_d'(v)\right) = -c \cdot \psi_d\,(u) + \lambda \cdot \int_0^v \psi_d\,(v)\left[1 - F_y\,(y)\right]dy.$$

Integralimo gornju jednakost sa $\int_{v=0}^{v=x} e^{\zeta \cdot v}$, analizirajmo na isti način kao kod verovatnoće preživljavanja, uvođenjem odgovarjućih funkcija gustine $h_1(x)$, $h_2(x)$ kao i funkcije raspodele $H_1(x)$, $H_2(x)$.

$$\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \int_{v=0}^{v=x} e^{\zeta v}\left(\psi_d'(v)\right) = -c \cdot \int_{v=0}^{v=x} e^{\zeta v}\,\psi_d\,(u) + \lambda \cdot \int_0^v \psi_d\,(v)\left[1 - F_y\,(y)\right]dy.$$

Prvi integral rešavamo parcijalnom integracijom nakon čega dobijamo

$$\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \int_{v=0}^{v=x} e^{\zeta v}\left(\psi_d'(v)\right) = \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot e^{\zeta v} \cdot \psi_d\,(u)\,\Big|_0^x - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \int_{v=0}^{v=x} e^{\zeta v}\psi_d\,(v)dv$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot e^{\zeta v}\cdot\psi_d\,(u)\,\Big|_0^x-\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot\int_{v=0}^{v=x}e^{\zeta v}\psi_d\,(v)dv=$$

$$-c\cdot\int_{v=0}^{v=x}e^{\zeta v}\,\psi_d\,(u)+\lambda\cdot\int_0^v\psi_d\,(v)[1-F_y\,(y)]dy$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot e^{\zeta x}\cdot\psi_d\,(x)-\frac{1}{2}\cdot\sigma^2+\left(c-\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\right)\int_{v=0}^{v=x}e^{\zeta v}\psi_d\,(v)dv$$
$$=\lambda\cdot\int_0^v\psi_d\,(v-y)[1-F_y\,(y)]dy.$$

Podelimo poslednju jednačinu sa $\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot e^{\zeta\cdot x}$

$$\psi_d\,(x)-\frac{1}{e^{\zeta x}}+\left(\frac{c}{\frac{1}{2}\cdot\sigma^2}-1\right)\cdot\frac{1}{e^{\zeta x}}\cdot\int_{v=0}^{v=x}e^{\zeta v}\psi_d\,(v)dv$$
$$=\frac{\lambda}{\frac{1}{2}\cdot\sigma^2}\cdot\int_0^x\int_0^v e^{-\zeta v}\psi_d\,(v-y)[1-F_y\,(y)]dydv.$$

Drugi integral takođe rešavamo parcijalnom integracijom $u=\psi_d(u)\quad du={\psi'}_d(u)du$

$$dv=e^{\zeta v}dv\qquad v=\frac{1}{\zeta}\cdot e^{\zeta v}.$$

Kako je $\psi_d(0)=1$ dobijamo

$$\int_0^x e^{\zeta\cdot v}\cdot\psi_d(v)dv=\frac{1}{\zeta}e^{\zeta x}\psi_d(x)-\frac{1}{\zeta}\cdot\int_0^x e^{\zeta v}\,\psi_d{}'(v)dv.$$

Nakon sto u poslednju jednakost zamenimo vrednost integrala $\int_{v=0}^{v=x}e^{\zeta v}\psi_d{}'\,(v)dv$ koji smo detaljno izračunali na prethodnim stranicama sledi da je

$$\int_0^x e^{\zeta\cdot v}\cdot\psi_d(v)dv=0.$$

Prema tome,

$$\psi_d\,(x)-\frac{1}{e^{\zeta x}}=\frac{\lambda}{\frac{1}{2}\cdot\sigma^2}\cdot\int_0^x\int_0^v e^{-\zeta v}\psi_d\,(v-y)[1-F_y\,(y)]dydv.$$

Desna strana je jednaka

$$\frac{\lambda}{\frac{1}{2}\cdot\sigma^2}\cdot\int_0^x\int_0^v e^{-\zeta v}\psi_d\,(v-y)[1-F_y\,(y)]dydv\;=(1-q)\cdot\int_0^x\psi_d(x-z)h_1*h_2(z)dz.$$

Poslednju jednakost dobijamo pomoću definicije konvolucije dve funkcije. Gde je $[h_1 * h_2](z) = \int_0^z h_1(x) \cdot h_2(z-x)dx$ konvolucija definisana na intervalu $(0, z)$.

$$\psi_d(x) - \frac{1}{e^{\zeta x}} = (1-q) \cdot \int_0^x \psi_d(x-z) \cdot h_1 * h_2(z)dz.$$

Kako je $1 - H_1(x) = \frac{1}{e^{\zeta \cdot x}}$

$$\psi_d(x) = 1 - H_1(x) + (1-q) \cdot \int_0^x \psi_d(x-z) \cdot h_1 * h_2(z)dz.$$

Naime, možemo pokazati i vezi između verovatnoće preživljavanja i verovatnoće propasti. Odnosno, podsetimo se oblika za verovatnoću preživljavanja

$$\phi(x) = q \cdot H_1(x) + (1-q) \cdot \int_0^x \phi(x-z) \cdot h_1 * h_2(z)dz.$$

Odredimo $\phi'(x)$

$$\phi'(x) = q \cdot h_1(x) + (1-q) \cdot \int_0^x \phi'(x-z) \cdot h_1 * h_2(z)dz.$$

Kako važi,

$$h_1(x) = \zeta \cdot [1 - H_1]$$

$$\phi'(x) = q \cdot \zeta \cdot \psi_d(x).$$

Ovim dobijamo vezu između ove dve verovatnoće, odnosno ukoliko je poznato $\phi(u)$ možemo lako odrediti $\psi(u)$.

Svakako važi i

$$\psi(u) = 1 - \phi(u)$$

$$\psi(u) = q \cdot \big(1 - H_1(u)\big) + (1-q) \cdot \big(H_1(u) - [H_1 * H_2](u)\big)$$

$$+(1-q) \int_0^u \psi(u-x)[h_1 * h_2](x)dx.$$

Ukoliko odredimo i ovu veličinu lako dolazimo i do

$$\psi_c(x) = \psi(x) - \psi_d(x)$$

$$\psi_c(u) = (1-q)(H_1(u) - [H_1 * H_2](u) + (1-q) \int_0^u \psi_s(u-x)[h_1 * h_2](x)dx.$$

No, kada znamo oblike integro – diferencijalnih jednačina, gore navedeno, možemo dokazati sledeću teoremu.

Teorema 5. [8] Pokažimo da važe sledeće jednakosti

$$p = q, G_1(x) = H_1(x), G_2(x) = H_2(x).$$

Dokaz.

$$\phi(x) = p \cdot G_1(x) + (1-p) \cdot \int_0^x \phi(z) \cdot g_1 * g_2(x-z)\, dz$$

i

$$\psi_d(x) = 1 - G_1(x) + (1-p) \cdot \int_0^x \psi_d(x-z)\, g_1 * g_2(z) dz.$$

Odredimo prvi izvod $\phi'(x)$

$$\phi'(x) = p \cdot g_1(x) + (1-p) \cdot \int_0^x \phi'(z) \cdot g_1 * g_2(x-z) dz.$$

Kako smo pokazali da je

$$\phi'(x) = q \cdot \zeta \cdot \psi_d(x).$$

Izjednačavanjem prethodne jednakosti sa ovom formulom dobijamo

$$q \cdot \zeta \cdot \psi_d(x) = p \cdot g_1(x) + (1-p) \cdot \int_0^x \phi'(z) \cdot g_1 * g_2(x-z) dz.$$

Ubacivanjem $\psi_d(x)$ u prethodnju jednakost dobijamo

$$q \cdot \zeta \cdot \left(\left(1 - G_1(x)\right) + (1-p) \cdot \int_0^x \psi_d(x-z) \cdot g_1 * g_2(z)\, dz \right) =$$

$$q \cdot g_1(x) + (1-p) \cdot \int_0^x q \cdot \zeta \cdot \psi_d \cdot g_1 * g_2(x-z) dz.$$

Kako su ovi integrali isti dobijamo

$$q \cdot \zeta \cdot \left(1 - G_1(x)\right) = p \cdot q_1(x),$$

odavde sledi da je $g_1(x) = \alpha \cdot \zeta e^{-\alpha \cdot \zeta \cdot x}, \alpha = \frac{q}{p}$.

Odredimo drugi izvod verovatnoće preživljavanja $\phi''(x)$

$$\phi''(x) = p \cdot g_1'(x) + (1-p) \cdot \int_0^x \phi''(z) \cdot g_1 * g_2(x-z) dz$$

$$\phi''(0) = p \cdot g_1'(0).$$

Kako je $g_1'(x) = -\zeta^2 \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha\zeta x}$ pa je $g_1'(0) = -\zeta^2 \cdot \alpha$.

$$\phi''(0) = -p \cdot \zeta^2 \cdot \alpha.$$

S druge strane imamo da je

$$\phi''(x) = q \cdot h_1'(x) + (1-q) \cdot \int_0^x \phi''(x-z) \cdot h_1 * h_2(z)dz$$

$$\phi''(0) = q \cdot h_1'(0)$$

$$\phi''(x) = -q \cdot \zeta^2$$

$$\phi''(x) = q \cdot h'_1(x) + (1-q) \cdot \int_0^x \phi''(x$$

$$\phi''(0) = q \cdot h'_1(0)$$

$$\phi''(0) = -q \cdot \zeta^2$$

Sledi $-p \cdot \zeta^2 \cdot \alpha^2 = -q \cdot \zeta^2$ odatle zaključujemo $p = q$.

Iz $g_1(x) = \alpha \cdot \zeta e^{-\alpha \cdot \zeta \cdot x}$ sledi $g_1(x) = h_1(x)$.

Naime kako važi

$$\phi'(x) = p \cdot g_1(x) + (1-p) \cdot \int_0^x \phi'(z) \cdot g_1 * g_2(x-z)\, dz$$

i

$$\phi'(x) = q \cdot h_1(x) + (1-q) \cdot \int_0^x \phi'(x-z) \cdot h_1 * h_2(z)dz.$$

Zaključujemo da je $h_2(x) = g_2(x)$. ■

2.2.4.Proces numeričkog računanja verovatnoće preživljavanja $\phi(x)$

Definišimo Laplasovu transformaciju:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt. \qquad \{s = \sigma + i\omega, \sigma > 0, t \geq 0\}.$$

Funkcija $F(s)$ je slika ili Laplasova transformacija originala $f(t)$.

Primenimo Laplasovu transformaciju na (3.7)

$$F(s) = q \cdot F_1(s) + (1-q) \cdot F(s) \cdot F_1(s) \cdot F_2(s). \qquad (3.8)$$

Gde su

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \cdot \varphi_X(x) dx$$

$$F_1(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \cdot \varphi_X(x) dx = \int_0^\infty e^{-sx} \cdot \zeta \cdot e^{-\zeta x} dx = \zeta \cdot \int_0^\infty e^{-sx} \cdot e^{-\zeta x}.$$

Integral rešavamo smenom i to: $t = -(s+\zeta) \cdot x$
$dt = -(s+\zeta) dx$

$$= \frac{-\zeta}{\zeta + s} \cdot \int_{-\infty}^{0} e^t = \frac{-\zeta}{\zeta + s} \cdot e^t \Big| \begin{matrix} 0 \\ -\infty \end{matrix} = \frac{-\zeta}{\zeta + s} \cdot (e^0 - e^{-\infty}) = \frac{-\zeta}{\zeta + s}$$

$$F_2(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \cdot h_2(x) dx = \int_0^\infty e^{-sx} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot [1 - F_X(x)] dx.$$

Ovaj integral ćemo rešiti parcijalnom integracijom, uzimajući za $u = 1 - F_X(x) \quad du = -\varphi_X(x)$

$$dv = e^{-sx} dx \qquad v = \frac{-e^{-sx}}{s}$$

$$\int_0^\infty e^{-sx} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot [1 - F_X(x)] dx = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot [1 - F_X(x)] \cdot e^{-sx} \Big| \begin{matrix} \infty \\ 0 \end{matrix} - \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \varphi_X(x) \cdot e^{-sx} dx.$$

Kako je

- $F_X(\infty) = \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$
- $F_X(0) = 0$

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot [1 - F_X(x)] \cdot e^{-sx} \Big| \begin{matrix} \infty \\ 0 \end{matrix} - \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \varphi_X(x) \cdot e^{-sx} dx = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \left(1 - \int_0^\infty \varphi_X(x) \cdot e^{-sx} dx\right).$$

Iz (3.8) sledi:

$$F(s) = \frac{q \cdot F_1(s)}{1 - (1-q) \cdot F_1(s) \cdot F_2(s)}.$$

Teorema 6. Verovatnoća preživljavanja zadovoljava sledeću jednakost

$$\phi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} q \cdot (1-q)^n \cdot {H_1}^{*(n+1)} * {H_2}^{*n}(u).$$

Dokaz. Podsetimo se ove formule koju smo dobili u delu maksimalnog gubitka

$$\phi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} q \cdot (1-q)^n \cdot {G_1}^{*(n+1)} * {G_2}^{*n}(u).$$

U tom delu ona je imala ovaj oblik, međutim u ovom delu smo pokazali i neke od jednakosti kao što su

$$H_1(u) = G_1(u)$$

$$H_1(u) = G_1(u)$$

na osnovu čega sledi dokaz teoreme. ■

2.2.5. Lundbergova jednačina

Kod osnovnog Kramer-Lundbergovog modela, ako postoji rešenje jednačine

$$c \cdot t - \lambda \cdot (M_x(t) - 1) = 0,$$

tada to rešenje nazivamo koeficijent prilagođavanja, $\mathcal{K}$, ili Lundbergov eksponent.

Isti pojam u našem perturbovanom modelu definišemo na sledeći način.

Definicija 13. Koeficijent prilagođavanja premije $\mathcal{K}$ je prvi vremenski trenutak koji je striktno pozitivan $t \geq 0$ i za koji važi

$$c \cdot t - \frac{\sigma^2}{2} \cdot t^2 - \lambda \cdot (M_x(t) - 1) = 0.$$

Ova jednačina može da ima više od jednog rešenja, međutim $M_x(t) = E[e^{tx}]$ predstavlja funkciju generatrisu momenata za štete, koja ne postoji za sve slučajne promenljive. Ukoliko postoji funkcija generatrise momenata postoji i $\mathcal{K}$.

Definišimo

$$y(t) = c \cdot t - \frac{\sigma^2}{2} \cdot t^2 - \lambda \cdot (M_x(t) - 1).$$

Ukoliko postoji $M_x(t)$, tada je $M_x(0) = E[e^0] = 1$ tako da je $y(0) = 0$. Tada važi i

$$y'(t) = c - \sigma^2 \cdot t - \lambda \cdot M_x'(t) \Rightarrow y'(0) = c - \lambda \cdot \mu > 0$$

$$y''(t) = -\sigma^2 - \lambda \cdot M_x''(t) \ < 0.$$

Na osnovu prethodnog sledi da je ova funkcija konveksna i ima maksimum. Shodno tome funkcija $y(t)$ ima dva rešenja jedno trivijalno i drugo veće od nule.

U nastavku dajemo dve teoreme bez dokaza.

Teorema 7. (Lundbergova nejednakost) Verovatnoća propasti ograničena je sa gornje strane.

$$\psi(u) \leq e^{-\mathcal{K}u}, \quad u \geq 0.$$

Ova nejednakost je u skladu sa očekivanjem, što imam više početnih rezervi manja je verovatnoća propasti.

Teorema 8. (Kramerova asimptotska formula za verovatnoću propasti) Za verovatnoće propasti $\psi_d(u)$ i $\psi_c(u)$ važe sledeće asimptotske formule

$$\psi_c(u) \sim C_c \cdot e^{-\mathcal{K}u}$$

$$\psi_d(u) \sim C_d \cdot e^{-\mathcal{K}u}$$

gde su C_d i C_c konstante za koje važi $C = C_d + C_c \leq 1$. Za dovoljno velike početne rezerve imamo

$$C_d = \left[\int_0^\infty e^{\mathcal{K}x}(1 - H_1(x)dx\right] \cdot \left[(1-q)\int_0^\infty x \cdot e^{\mathcal{K}x} h_1 * h_2 dx\right]^{-1}$$

$$C_c = \left[\int_0^\infty e^{\mathcal{K}x}(1-p)[H_1(x) - H_1 * H_2(x)]dx\right] \cdot \left[(1-q)\int_0^\infty x \cdot e^{\mathcal{K}x} h_1 * h_2 dx\right]^{-1}.$$

2.3.Pojedinačni iznosi šteta, $\mathrm{X_i}$, $\mathbf{i = 1, 2, 3, \ldots, n}$ sa eksponencijalnom raspodelom

2.3.1. Oblik verovatnoće propasti kad su zahtevi eksponencijalno raspoređeni

Neka je gustina raspodele pojedinačnog iznosa štete oblika

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^n A_i \beta_i e^{-\beta_i x}, \qquad x > 0.$$

Pri čemu neki od A_i mogu biti negativni, sve dok je $f_X(x) \geq 0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt + \int_{x}^{\infty} f_X(t)dt = 1$$

$$F(x) + \int_{x}^{\infty} f(t) = 1.$$

Kako je $\int_0^\infty e^{-\beta_1 x} = -\frac{1}{\beta_1} \cdot e^{-\beta_1 x} \Big| \begin{matrix} 0 \\ -\infty \end{matrix}$ i kako važi $e^{-\infty} = 0$ sledi

$$1 - F(x) = 1 - \left[1 - \sum_{i=1}^{n} A_i e^{-\beta_i \cdot \infty} - \sum_{i=1}^{n} A_i e^{-\beta_i \cdot x}\right] = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{-\beta_i \cdot x}, \qquad x \geq 0. \qquad (3.9)$$

Zatim imamo da

$$M_2(p) = \int_0^\infty e^{-px} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot [1 - F(x)]dx, \qquad (4.0)$$

gde je kao što je na samom početku rečeno, μ očekivana vrednost slučajne promenljive X čija je funkcija gustine $f_X(x)$. Prema tome,

$$\mu = \int_0^\infty x \cdot f_X(x)dx = \int_0^\infty x \cdot A_1 \cdot \beta_1 \cdot e^{-\beta_1 x}dx = A_1 \cdot \beta_1 \cdot \int_0^\infty x \cdot e^{-\beta_1 x}du = \frac{A_1}{\beta_1}.$$

Poslednji integral se rešava parcijalnom integracijom pri čemu je $\tilde{u} = x$, a $dv = \int_0^\infty e^{-\beta_1 x}$.

Vratimo se na računanje integrala (4.0). Naime prvo ćemo se prisetiti činjenice da je integral zbira zbir integrala, pa shodno tome mi ćemo računati integral za $i = 1$.

$$\int_0^\infty e^{-px} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot [1 - F(x)]dx = \int_0^\infty e^{-px} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot A_1 e^{-\beta_1 \cdot x}dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-px} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot A_1 e^{-\beta_1 \cdot x}dx = \frac{1}{\mu} \cdot A_1 \cdot \int_0^\infty e^{-(p+\beta_1) \cdot x}dx =$$

$$\frac{1}{\mu} \cdot A_1 \cdot \left(\frac{1}{-(p+\beta_1)} \cdot e^{-(p+\beta_1) \cdot x}\Big|_0^\infty\right) = \frac{1}{\mu} \cdot A_1 \cdot \frac{1}{p+\beta_1}.$$

Ako pojedinačni iznosi šteta imaju eksponencijalnu raspodelu tada su funkcije $H_1(u)$ i $H_2(u)$ eksponecijalne funkcije i to

$$H_1(u) = 1 - e^{-\zeta u}$$

$$H_2(u) = \int_0^u \frac{1}{\mu} \cdot [1 - F(x)]dx = \int_0^u \frac{1}{\mu} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} A_i e^{-\beta_i \cdot x}\right]dx.$$

Uzimajući u obzir prethodno izračunat integral sledi da imamo

$$\int_0^u \frac{1}{\mu} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} A_i e^{-\beta_i \cdot x}\right]dx = \frac{1}{\mu} \cdot \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \left(\frac{1}{-\beta_i} \cdot e^{-\beta_i \cdot x}\Big|_0^u\right) = \frac{1}{\mu} \cdot \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \left(\frac{1}{\beta_i} \cdot e^{-\beta_i \cdot u} - \left(\frac{1}{\beta_i}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{\mu}\cdot\sum_{i=1}^{n}A_i\cdot\frac{1}{\beta_i}\cdot(\,e^{-\beta_i\cdot u}-1).$$

Kako verovatnoća propasti zadovoljava sledeću jednakost, a važi i da je $\psi(u)=1-\phi(u)$

$$\phi(u)=\sum_{n=0}^{\infty}q\cdot(1-q)^n\cdot {H_1}^{*(n+1)}*{H_2}^{*n}(u).$$

Izvešćemo oblik za verovatnoću propasti u slučaju eksponecijalne raspodele šteta. Hajde da vidimo kog obilka je konvolucija funkcija $H_1(u)$ i $H_2(u)$

$$H_1(u)*\;H_2(u)=\int_0^u\left(1-e^{-\zeta t}\right)\cdot\left[\frac{1}{\mu}\cdot\sum_{i=1}^{n}A_i\cdot\frac{1}{\beta_i}\cdot(\,e^{-\beta_i\cdot(\tau-t)}-1)dt\right]=$$

$$\frac{1}{\mu}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{\beta_i}\cdot\int_0^u\left[-1+e^{-\beta_i\cdot(\tau-t)}+e^{-\zeta t}-e^{(-\zeta+\beta_i)t-\beta_i\cdot\tau}\right]dt=$$

$$\frac{1}{\mu}\cdot\textstyle\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{\beta_i}\left[-u+e^{-\beta_i\cdot\tau}\cdot\int_0^u e^{\beta_i\cdot t}dt\;+\int_0^u e^{-\zeta t}dt-e^{-\beta_i\cdot\tau}\cdot\int_0^u e^{(-\zeta+\beta_i)t}dt\right].$$

Vidimo da je konvolucija eksponencijalnog oblika, jer kako važi skala divergencije $u\prec e^u$, znači eksponencijalna funkcija „brže“ ide u beskonačnost od linearne funkcije. Ukoliko je eksponent negativan, tada za velike vrednosti početnih rezervi ta funkcija teži nuli, pa imamo da je verovatnoća propasti oblika $-u$ što nije moguće jer verovatnoća pripada intervalu $[0,1]$, pa ovaj slučaj ne posmatramo. Zbog ove analize, razume se zanemarujemo linearnost u ovom slučaju i reći ćemo sledeće.

Teorema 9. Ako pojedinačni zahtevi imaju eksponencijalnu raspodelu funkcija propasti mora biti oblika

$$\psi(u)=\textstyle\sum_{k=1}^{n+1}C_k\cdot e^{-r_k u}\,,\quad u\geq 0. \qquad (4.1)$$

Dokaz. Na osnovu prethodne analize. Potrebno je još samo prokomentarisati da suma u ovom slučaju ide od $1,\dots,n+1$, a u konvoluciji od $1,\dots,n$, odnosno verovatnoća propasti ima jedan sabirak više, kako prilikom definisanja verovatnoće preživljavanja kao geometrijske sume imamo konvoluciju funkcija gustine ${H_1}^{n+1}$ i ${H_2}^{n}$ što znači da učestvuje još jedna slučajna promenjiva više od naznačene brojačem. ∎

Odredimo koeficijente $r_1,r_2,\dots,r_{n+1,}\,C_{1,}\,C_2,\dots\;,\;C_{n+1}$.

Kako je $\phi(u)=1-\psi(u)$, zamenimo $\phi(u)$ u jednakost

$$\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot\psi(u)'+c\cdot\psi(u)=\lambda\cdot\int_0^u\psi(u-y)\,[1-F(y)]dy+\lambda\cdot\int_0^u[1-F(y)]dy\,.$$

Sada ćemo u prethodnu jednakost umesto funkcije propasti zamenuti oblik gore naveden takođe ćemo iskoristiti i jednakost (3.9) .

$$-\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot\sum_{k=1}^{n+1}C_k\cdot r_k\cdot e^{-r_kx}+c\cdot\sum_{k=1}^{n+1}C_k\cdot r_k\cdot e^{-r_kx}=$$

$$\lambda\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i\cdot C_k}{\beta_i-r_k}\left(e^{-r_kx}-e^{-\beta_ix}\right)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{\beta_i}\cdot e^{-\beta_ix}.$$

Ukoliko poredimo koeficijente uz e^{-r_kx} dobijemo jednačine po nepoznatim $r_k, k=1,2,\dots,n+1$.

$$\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{\beta_i-r}+\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot r=c. \qquad (4.2)$$

Radi jednostavnosti pretpostavimo da ove jednačine imaju $n+1$ različito rešenje, to važi samo ako su $A_i>0$ jer kako je

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{\beta_i-r}=\frac{2c-\sigma^2\cdot r}{2\lambda}.$$

Sa desne strane dobijamo linearnu funkciju po nepoznatoj r, a sa leve strane imamo linearnu kombinaciju eksponencijalnih funkcija koje su dobrim delom iznad $x-$ose ako je $A_i>0$, pa na osnovu $\sigma>0$, imamo pravu kosu nadole (koeficijent pravca $-\frac{\sigma^2}{2\lambda}<0$). Treba napomenuti da je upravo najmanje r koeficijent prilagođavanja $\mathcal{K}$ iz Lundebergove jednakosti.

Sa druge strane ako posmatramo koeficijente uz $e^{-\beta_ix}$ dobijemo jednačine po nepoznatim C_k,

$k=1,2,\dots,n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\beta_i}{\beta_i-r_k}C_k=1 \quad i=1,2,\dots,n. \qquad (4.3)$$

Kako važi da je $\psi(0)=1$ sledi jednakost

$$C_1+C_2+\cdots+C_{n+1}=1. \qquad (4.4)$$

Na ovaj način smo definisali $n+1$ jednačinu po C_k koju rešavamo pomoću racionalne funkcije

$$Q(x)=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{C_k\cdot r_k}{x-r_k}.$$

Kako važe jednakosti (4.3) i (4.4) za ovako definisanu racionalnu funkciju važi $Q(0)=-1$ i

$Q(\beta_i)=0$ za $i=1,2,\dots,n$.

Pokažimo raspisivanjem za slušaj kada je $n=1, k=2, i=1$ da je $Q(\beta_1)=0$.

$$Q(\beta_1) = \frac{C_1 \cdot r_1}{(\beta_1 - r_1)} + \frac{C_2 \cdot r_2}{(\beta_1 - r_2)} = \frac{C_1 \cdot r_1 \cdot (\beta_1 - r_2) + C_2 \cdot r_2 \cdot (\beta_1 - r_1)}{(\beta_1 - r_1) \cdot (\beta_1 - r_2)} =$$

$$\frac{C_1 \cdot r_1 \cdot (\beta_1 - r_2) + C_2 \cdot r_2 \cdot (\beta_1 - r_1)}{(\beta_1 - r_1) \cdot (\beta_1 - r_2)} =$$

$$\frac{C_1 \cdot r_1 \cdot \beta_1 - C_1 \cdot r_1 \cdot r_2 + C_2 \cdot r_2 \cdot \beta_1 - C_2 \cdot r_1 \cdot r_2}{(\beta_1 - r_1) \cdot (\beta_1 - r_2)}.$$

Kako je $C_1 + C_2 = 1$ izvlačenjem proizvoda $r_1 \cdot r_2$ ispred zagrade dobijamo

$$\frac{C_1 \cdot r_1 \cdot \beta_1 - r_1 \cdot r_2 + C_2 \cdot r_2 \cdot \beta_1}{(\beta_1 - r_1) \cdot (\beta_1 - r_2)}. \tag{4.5}$$

Posmatrajmo i raspišimo jednakost (4.3)

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{\beta_1}{\beta_1 - r_k} C_k = 1$$

$$\frac{\beta_1 \cdot C_1}{\beta_1 - r_1} + \frac{\beta_1 \cdot C_2}{\beta_1 - r_2} = 1.$$

Ukoliko ovo svedemo na isti imenioc, zatim sredimo izraz dobijemo sledeću jednakost

$$\beta_1 \cdot C_1 \cdot r_2 + \beta_1 \cdot C_2 \cdot r_1 = -\beta_1 \cdot r_2 - \beta_1 \cdot r_1 + r_1 \cdot r_2.$$

Prebacimo sve što množi β_1 na levu stranu

$$-\beta_1 \cdot C_1 \cdot r_2 - \beta_1 \cdot C_2 \cdot r_1 + \beta_1 \cdot r_2 + \beta_1 \cdot r_1 = r_1 \cdot r_2$$

$$r_2 \cdot \beta_1 \cdot (1 - C_1) + r_1 \cdot \beta_1 \cdot (1 - C_2) = r_1 \cdot r_2,$$

kako je

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$r_2 \cdot \beta_1 \cdot C_2 + r_1 \cdot \beta_1 \cdot C_1 = r_1 \cdot r_2.$$

Kada ubacimo ovaj rezultat u (4.5) dobijamo traženu jednakost.

Podsetimo se posledice Bezuovog stava

Definicija 14. Ako je $P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$ i neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nule polinoma tada važi

$$P_n(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

Rastavimo našu racionalnu funkciju kao proizvod njenih nula. Radi jednostavnosti posmatrajmo slučaj $n = 1, k = 2, i = 1$.

$$Q(x)=\sum_{k=1}^{2}\frac{C_k\cdot r_k}{x-r_k}=\frac{C_1\cdot r_1}{x-r_1}+\frac{C_2\cdot r_2}{x-r_2}=\frac{C_1\cdot r_1\cdot(x-r_2)+C_2\cdot r_2\cdot(x-r_1)}{(x-r_1)\cdot(x-r_2)}=$$

$$\frac{C_1\cdot r_1\cdot x-C_1\cdot r_1\cdot r_2+C_2\cdot r_2\cdot x-C_1\cdot r_1\cdot r_2}{(x-r_1)\cdot(x-r_2)}=$$

$$\frac{(C_1\cdot r_1+C_2\cdot r_2)\cdot x-C_1\cdot r_1\cdot r_2-C_1\cdot r_1\cdot r_2}{(x-r_1)\cdot(x-r_2)}.$$

Uočimo da je koeficijent uz najviši stepen jednak

$$\sum_{i=1}^{n+1}C_k\cdot r_k.$$

Neka je β_1 nula date racionalne funkcije, odnosno nula broioca i neka važi $\beta_1\neq r_1,r_2$. Tada naša racionalna funkcija na osnovu posledice Bezuovog stava glasi

$$Q(x)=\frac{(C_1\cdot r_1+C_2\cdot r_2)\cdot(x-\beta_1)}{(x-r_1)\cdot(x-r_2)}.$$

Raspišimo čemu je jednak koeficijent $C_1\cdot r_1+C_2\cdot r_2$, odnosno rešimo sistem jednačina (5) i (6) po C_1,C_2 u ovom specijalnom slučaju, za ove specijalne vrednosti i,k,n. Sistem koji rešavamo metodom zamene glasi

$$\frac{\beta_1}{\beta_1-r_1}C_1+\frac{\beta_1}{\beta_1-r_2}C_2=1$$

$$C_1+C_2=1.$$

Nakon par koraka dolazimo do rešenja ovog sistema i to

$$C_1=\frac{r_2\cdot(\beta_1-r_1)}{\beta_1\cdot(r_2-r_1)}\qquad C_2=\frac{r_1\cdot(r_2-\beta_1)}{\beta_1\cdot(r_2-r_1)}.$$

Zatim ubacimo ove dobijene konstante u našu racionalnu funkciju $Q(x)$.

$$Q(x)=\frac{(C_1\cdot r_1+C_2\cdot r_2)\cdot(x-\beta_1)}{(x-r_1)\cdot(x-r_2)}=$$

$$\frac{\left(\frac{r_2\cdot(\beta_1-r_1)}{\beta_1\cdot(r_2-r_1)}\cdot r_1+\frac{r_1\cdot(r_2-\beta_1)}{\beta_1\cdot(r_2-r_1)}\cdot r_2\right)\cdot(x-\beta_1)}{(x-r_1)\cdot(x-r_2)}=$$

$$\frac{\left(\frac{r_2\cdot r_1\cdot(\beta_1-r_1)+r_1\cdot r_2\cdot(r_2-\beta_1)}{\beta_1\cdot(r_2-r_1)}\right)\cdot(x-\beta_1)}{(x-r_1)\cdot(x-r_2)}=$$

$$\frac{\left(\frac{r_1\cdot r_2\cdot(\beta_1-r_1+r_2-\beta_1)}{\beta_1\cdot(r_2-r_1)}\right)\cdot(x-\beta_1)}{(x-r_1)\cdot(x-r_2)}=$$

$$\frac{\left(\frac{r_1 \cdot r_2}{b_1}\right) \cdot (x - \beta_1)}{(x - r_1) \cdot (x - r_2)}.$$

Ovako izgleda racionalna funkcija $Q(x)$ za $n = 1, k = 2, i = 1$. Uopštimo je za proizvoljno i, k, n.

Neka su β_i nule polinoma $Q(x)$ za $i = 1,2,3, \dots, n$ tada važi

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x - \beta_i}{\beta_i}\right) \prod_{k=1}^{n+1} \left(\frac{r_k}{x - r_k}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{C_k \cdot r_k}{x - r_k} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x - \beta_i}{\beta_i}\right) \prod_{k=1}^{n+1} \left(\frac{r_k}{x - r_k}\right),$$

posmatrajmo $h -$ ti član u sumi $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{C_k \cdot r_k}{x - r_k}$ za njega važi sledeća jednakost

$$\frac{C_h \cdot r_h}{x - r_h} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x - \beta_i}{\beta_i}\right) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{n+1} \left(\frac{r_h}{x - r_h}\right),$$

ukoliko celu jednakost pomnožimo sa $\frac{x - r_h}{r_h}$ dobijamo

$$C_h = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x - \beta_i}{\beta_i}\right) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{n+1} \left(\frac{r_k}{x - r_k}\right) \qquad h = 1,2,3, \dots, n + 1,$$

uzmimo za $x = r_h$

$$C_h = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{r_h - \beta_i}{\beta_i}\right) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{n+1} \left(\frac{r_k}{r_h - r_k}\right) \qquad h = 1,2,3, \dots, n + 1. \qquad (4.6)$$

Ukoliko pojedinačni iznosi šteta imaju kombinovanu eksponencijalnu raspodelu verovatnoća propasti data je sa (4.1), gde su r_k rešenja jednačina (4.2) , a C_k rešenja jednačina (4.6).

U našoj priči verovatnoća propasti sastoji se od dva sabirka. Analizirajmo ih u ovoj sekciji.

Posmatrajmo jednačinu (4.2), pomnožimo je sa $\prod_{i=1}^{n}(\beta_i - r)$

$$\lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \prod_{i=1}^{n}(\beta_i - r) + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot r \cdot \prod_{i=1}^{n}(\beta_i - r) \ = c \cdot \prod_{i=1}^{n}(\beta_i - r)$$

$$\lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\beta_j - r) + \left(\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot r - c\right) \cdot \prod_{j=1}^{n} (\beta_j - r) \ = 0. \qquad (4.7)$$

Podsetimo se Vietovih pravila.

Definicija 15. Neka je dat polinom $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x \ + a_0 \ , a_n \neq 0$, koji po osnovnoj teoremi algebre ima n (ne nužno različitih) kompleksnih nula $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Vietova pravila se odnose na

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ (x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + \cdots + x_1 \cdot x_n) + (x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + \cdots + x_2 \cdot x_n) + \cdots + x_{n-1} \cdot x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \vdots \\ x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = (-1)^n \cdot \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

Kada raspišemo koeficijent uz r^{n+1} je $(-1)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \sigma^2$, potrebno je odrediti oblik slobodnog člana.

Raspišimo jednakost (4.7) za $n = 2$

$$\lambda \cdot \sum_{i=1}^{2} A_i \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2} (\beta_j - r) + \left(\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot r - c\right) \cdot \prod_{j=1}^{2} (\beta_j - r) \ = 0$$

$$\lambda \cdot A_1 \cdot (\beta_2 - r) + \lambda \cdot A_2 \cdot (\beta_1 - r) + \left(\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot r - c\right) \cdot (\beta_1 - r) \cdot (\beta_2 - r) \ = 0\,.$$

Nakon malo sređivanja dobijamo

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot r^3 - \left(\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \beta_1 + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \beta_2 + c\right) \cdot r^2 \\ &+ \left(\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 + c \cdot \beta_2 + c \cdot \beta_1 - \lambda \cdot (A_1 + A_2)\right) \cdot r \\ &+ \lambda \cdot (A_1 \cdot \beta_2 + A_2 \cdot \beta_1) - c \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 = 0. \end{aligned}$$

Uočimo kako je ovo jednačina trećeg stepena koja ima tri rešenje i r_1, r_2, r_3 su upravo rešenja ove jednačine.

Slobodan član je oblika $\lambda \cdot (A_1 \cdot \beta_2 + A_2 \cdot \beta_1) - c \cdot \beta_1 \cdot \beta_2$ izvucimo ispred zagrade umanjenika proizvod $\beta_1 \cdot \beta_2$

$$\lambda \cdot (A_1 \cdot \beta_2 + A_2 \cdot \beta_1) - c \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 = \lambda \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{A_1}{\beta_1} + \frac{A_2}{\beta_2}\right) - c \cdot \beta_1 \cdot \beta_2.$$

Kako je $\mu = \frac{A_1}{\beta_1} + \frac{A_2}{\beta_2}$ poslednja jednakost je

$$\lambda \cdot (A_1 \cdot \beta_2 + A_2 \cdot \beta_1) - c \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 = \lambda \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \mu - c \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 = (\lambda \cdot \mu - c) \cdot \beta_1 \cdot \beta_2.$$

Uopštimo za proizvoljno n slobodan član je oblika $(\lambda \cdot \mu - c) \cdot \prod_{i=1}^{n} \beta_i$.

Po Vijetovim pravilima

$$\prod_{k=1}^{n+1} r_k = \frac{c - \lambda \cdot \mu}{\frac{1}{2} \cdot \sigma^2} \cdot \prod_{j=1}^{n} \beta_j = q \cdot \zeta \cdot \prod_{j=1}^{n} \beta_j$$

$$C_h = \frac{1}{r_h} \cdot q \cdot \zeta \cdot \prod_{i=1}^{n} (r_h - \beta_i) / \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{n} (r_h - r_k)$$

$$\psi_d(x) = \sum_{k=1}^{n+1} {C_k}^d \cdot e^{-r_k \cdot x}, \qquad x \geq 0,$$

gde je

$${C_k}^d = \frac{r_h}{q \cdot \zeta} \cdot C_h = \prod_{i=1}^{n} (r_h - \beta_i) / \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{n} (r_h - r_k).$$

Ilustrujmo prethodno dobijene rezultate na sledećem numeričkom primeru.

Primer 1. Uticaj parametra σ, drifta, na verovatnoću propasti.

Pretpostavimo da su iznosi šteta eksponencijalno raspoređeni i neka su dati parametri $c = 103, \lambda = 100, \beta = 1$. Izračunajmo verovatnoće propasti $\psi(u), \psi_d(u), \psi_c(u)$ pomoću gore izvedenih formula za sledeće vrednosti parametra $\sigma = 1.2, 1.0, 0.8, 0.6, 0.4$.

$$\psi(u) = C_1 \cdot e^{-r_1 \cdot u} + C_2 \cdot e^{-r_2 \cdot u}$$

$$\psi_d(u) = {C_1}^d \cdot e^{-r_1 \cdot u} + {C_2}^d \cdot e^{-r_2 \cdot u}$$

$$\psi_c(u) = {C_1}^c \cdot e^{-r_1 \cdot u} + {C_2}^c \cdot e^{-r_2 \cdot u},$$

gde je

$$C_1 = \left(\frac{r_1 - \beta}{\beta}\right) \cdot \left(\frac{r_2}{r_1 - r_2}\right), \ C_2 = \left(\frac{r_2 - \beta}{\beta}\right) \cdot \left(\frac{r_1}{r_2 - r_1}\right),$$

$${C_1}^d = \frac{r_1 - \beta}{r_1 - r_2}, {C_2}^d = \frac{r_2 - \beta}{r_2 - r_1},$$

$$C_1{}^c = C_1 - C_1{}^d, \qquad C_2{}^c = C_2 - C_2{}^d\,,$$

dok su r_1, r_2 rešenja jednačine $\frac{\lambda}{\beta - r} + \frac{\sigma^2}{2} \cdot r - c = 0.$

U programu mathematica računamo ove parametre, a zatim za određene vrednosti početnih rezervi u i volatilnosti σ dobijamo sledeće tri tabele.

	$\psi(u)$				
u	$\sigma = 1.2$	$\sigma = 1.0$	$\sigma = 0.8$	$\sigma = 0.6$	$\sigma = 0.4$
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.001	0.995211	0.993313	0.990116	0.984354	0.974003
0.005	0.981630	0.976884	0.971236	0.966081	0.964039
0.01	0.972601	0.968560	0.965372	0.963986	0.963808
0.055	0.962845	0.962682	0.962568	0.962479	0.962416
1	0.930389	0.930200	0.930045	0.929924	0.929837
5	0.803475	0.803104	0.802800	0.802563	0.802393
10	0.665251	0.664723	0.664289	0.663951	0.663708
20	0.117848	0.117389	0.117012	0.116720	0.116511

			$\psi_c(u)$		
u	$\sigma = 1.2$	$\sigma = 1.0$	$\sigma = 0.8$	$\sigma = 0.6$	$\sigma = 0.4$
0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.001	0.128448	0.179399	0.265207	0.419898	0.697769
0.005	0.491507	0.618604	0.769801	0.907567	0.961699
0.01	0.730629	0.838269	0.922886	0.959069	0.963057
0.055	0.955419	0.957999	0.959586	0.960800	0.961669
1	0.923929	0.925706	0.927164	0.928302	0.929115
5	0.797896	0.799224	0.800313	0.801162	0.801770
10	0.660632	0.661511	0.662231	0.662793	0.663193
20	0.117030	0.116821	0.116650	0.116516	0.116421

	$\psi_d(u)$				
u	$\sigma = 1.2$	$\sigma = 1.0$	$\sigma = 0.8$	$\sigma = 0.6$	$\sigma = 0.4$
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.001	0.866763	0.813914	0.724909	0.564456	0.276234
0.005	0.490123	0.358280	0.201435	0.058514	0.002340
0.01	0.241972	0.130291	0.042486	0.004917	0.000751
0.055	0.007426	0.004683	0.002982	0.001679	0.000747
1	0.006460	0.004494	0.002881	0.001622	0.000722
5	0.005579	0.003880	0.002487	0.001401	0.000623
10	0.004619	0.003212	0.002058	0.001158	0.000515
50	0.000818	0.000568	0.000362	0.000204	0.000090

Kao što rezultati pokazuju verovatnoće propasti $\psi(u)$ i $\psi_d(u)$ se povećavaju kako se vrednosti drifta povećavaju, što je i bilo za očekivati, jer što je rasipanje, drift, veće to je i naša nesigurnost veća. Odnosno, sa porastom oscilacija, raste nemoć praćenja (kontrolisanja) procesa. Što se tiče verovatnoće propasti $\psi_c(u)$ vidimo da za male vrednosti početnih rezervi i ima nekog uticaja drifta na njenu vrednost, dok kod velikih vrednosti drift neznatno utiče na nju. Ovi rezultati su za očekivati jer što je drift veći to je veća verovatnoća da će do propasti doći zbog velikog rasipanja i ne mogućnosti kontrolisanja procesa, te zbog toga je za očekivati da početne rezerve budu veće kako bismo se na neki način osigurali od propasti. A kako je drift manji manja je verovatnoća koja potiče od drifta što prouzrokuje da mi nemamo potrebu za velikim početnim rezervama, pa je verovatnoća propasti koja potiče od visine iznosa šteta veća. Međutim $\psi_c(u)$ nije rastuća funkcija u zavisnosti od σ, nego kako σ raste verovatnoća propasti je sve manja. Funkcija $\psi_c(u)$ se razlikuje od ponašanja funkcija $\psi(u)$ i $\psi_d(u)$.

2.3.2. De Valderova metoda aproksimacije verovatnoće propasti

Pretpostavimo da su zahtevi eksponecijalno raspoređeni, tada verovatnoću propasti možemo odrediti eksplicitno, koristeći neki od aproksimacija, mi ćemo konkretno De Valderovu aproksimaciju. Glavna ideja De Valderove aproksimacije u klasičnom modelu rizika leži u zameni klasičnog procesa $U(t)$ sa novim procesom (i novim parametrima) korišćenjem trećeg momenta eksponencijalne raspodele, recimo $U_{3E}(t)$, sa srednjom vrednošću $\frac{1}{\beta}$. Za De Valderovu aproksimaciju potrebno je da postoje prva tri momenta raspodele, jer parametre u klasičnom modelu rizika biramo tako da momenti procesa $U(t)$ i $U_{3E}(t)$ budu jednaki. Razmislimo sada, kako bismo priču o ovoj aproksimaciji verovatnoće propasti uveli u naš perturbovani model. Kako Braunovo kretanje ima normalnu $\mathcal{N}(0,t)$ raspodelu, a procesima sa ovom raspodelom lako računamo prvi, drugi, treći i četvrti centralni momenat. Te zbog toga se u našem modifikovanom modelu opredeljujemo za izjednačavanja ova četiri momenta.

Centralni moment k-tog reda za promenljivu X meri stepen udaljenosti elemenata od sredine. Centralni momenat prvog reda je takozvano matematičko očekivanje date slučajne promenljive, drugog reda je disperzija, trećeg reda iskošenost (skewness), a četvrtog spljoštenost (kurtosis). Intuitivno, treba napomenuti samo da iskošenost je mera simetričnosti, a spljoštenost je mera postojanja ispupčenja.

Mi ćemo naš proces $U(t)$ zameniti četvrtominutnom aproksimacijom $U_{4E}(t)$. Proces ukupnog gubitka, aproksimiran je sledećim procesom $\{S_{4E}(t): t \geq 0\}$, gde je $S_{4E}(t)$ nov Poasonov proces sa parametrom λ_*, a pojedinačni iznosi šteta dati sa $X(t)$ aproksimirani su procesom $X_{4E}(t)$, imaju eksponencijalnu raspodelu sa sredinom vrednošću $\frac{1}{\beta}$. Centralni momenat $U(t)$ dat je, u_k. Momenti procesa $X_{4E}(t)$ definišu se

kao u teoriji verovatnoće

$$E\left[{X_{4E}}^k(t)\right] = \frac{\Gamma(1+k)}{\beta^k} \qquad k = 1,2,\dots,n.$$

Gde je $\Gamma(\cdot)$ gama funkcija.

Definicija 16. Gama funkcija u oznaci, $\Gamma(\cdot)$, je nesvojstveni integral dat sa:

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty x^{k-1} \cdot e^{-x} dx, \qquad k > 0.$$

Primetimo da ovaj integral ne zavisi od x, no kada se analitički ili numerički izračuna zavisi od k. Ovaj integral ima sledeće osobine:

- $\Gamma(n) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n! \quad 0! = 1$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma(p+1) = p \cdot \Gamma(p)$.

Izjednačimo $k-$ ti momenat procesa $U(t)$ i $k-$ ti momenat procesa kojim je aproksimiran proces $U(t)$, odnosno $U_{4E}(t)$, $u_k = u_{k,4E}$ za $k = 1,2,3,4$. Na taj način dobijamo sisteme jednačina iz kojih računamo parametre aproksimacije $c_*, \sigma_*, \lambda_*, \beta$.

Izjednačimo prvo prve momente

$$E\big(U(t)\big) = E(U_{4E}(t))$$

$$E\big(U(t)\big) = E\big(u + c \cdot t - S(t) + \sigma \cdot W(t)\big) =$$

$$u + c \cdot t - E(N_t) \cdot E(X) + \sigma \cdot E\big(W(t)\big) =$$

$$u + c \cdot t - \lambda \cdot t \cdot \mu_1 + \sigma \cdot 0 = u + c \cdot t - \lambda \cdot t \cdot \mu_1.$$

Sa druge strane imamo

$$E\big(U_{4E}(t)\big) = E\big(u + c \cdot t - S_{4E}(t) + \sigma \cdot W(t)\big) =$$

$$u + c_* \cdot t - \lambda_* \cdot t \cdot \frac{1}{\beta} + \sigma \cdot 0 = u + c_* \cdot t - \lambda_* \cdot t \cdot \frac{1}{\beta}.$$

Izjednačavajući dobijene rezultate dobijamo

$$u + c \cdot t - \lambda \cdot t \cdot \mu_1 = u + c_* \cdot t - \lambda_* \cdot t \cdot \frac{1}{\beta}$$

$$c \cdot t - \lambda \cdot t \cdot \mu_1 = c_* \cdot t - \lambda_* \cdot t \cdot \frac{1}{\beta}. \quad (4.8)$$

Izjednačimo centralne momente drugog reda, tj. disperzije dobijamo sledeće

$$E\left[\Big(U(t) - E\big(U(t)\big)\Big)^2\right] = E\left[\Big(U_{4E}(t) - E\big(U_{4E}(t)\big)\Big)^2\right]$$

$$U(t) - E\big(U(t)\big) = u + c \cdot t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i + \sigma \cdot W(t) - u - c \cdot t + \lambda \cdot t \cdot \mu_1 =$$

$$-\sum_{i=1}^{N(t)} X_i + \sigma \cdot W(t) + \lambda \cdot t \cdot \mu_1.$$

Dobijeni izraz je potrebno kvadrirati, a zatim izračunati njegovo očekivanje.

$$\Big(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\Big)^2 - 2 \cdot \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \cdot \sigma \cdot W(t) + \big(\sigma \cdot W(t)\big)^2 + 2 \cdot \Big(\sigma \cdot W(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i\Big) \cdot \lambda \cdot t \cdot \mu_1 + (\lambda \cdot t \cdot \mu_1)^2.$$

Vidimo da će matematičko očekivanje od nekih članova izraza napraviti nulu i to od svakog člana koji sadrži $W(t)$. Čak i $E\Big[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \cdot \sigma \cdot W(t)\Big] = 0$ jer su procesi $S(t)$ i $W(t)$ nezavisni, pa važi da je matematičko očekivanje proizvoda proizvod matematičkog očekivanja. Prema tome,

$$E\left[\Big(U(t) - E\big(U(t)\big)\Big)^2\right] = E\left(\Big(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\Big)^2\right) + E\left(\big(\sigma \cdot W(t)\big)^2\right) - 2 \cdot E\Big(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \cdot \lambda \cdot t \cdot \mu_1\Big) + E\big((\lambda \cdot t \cdot \mu_1)^2\big).$$

Sada računajmo $E\left(\Big(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\Big)^2\right)$ kako je $D\big(S(t)\big) = E(S(t)^2) - \Big(E\big(S(t)\big)\Big)^2$

$$E(S(t)^2) = D\big(S(t)\big) + \Big(E\big(S(t)\big)\Big)^2 =$$

$$= D\big(N(t)\big) \cdot D(X) + (\lambda \cdot t \cdot \mu_1)^2 =$$

$$= \lambda \cdot t \cdot \mu_2 + (\lambda \cdot t \cdot \mu_1)^2$$

$$\lambda \cdot t \cdot \mu_2 + (\lambda \cdot t \cdot \mu_1)^2 + \sigma^2 \cdot t - 2 \cdot (\lambda \cdot t \cdot \mu_1)^2 + (\lambda \cdot t \cdot \mu_1)^2$$

$$= \lambda \cdot t \cdot \mu_2 + \sigma^2 \cdot t.$$

Sa druge strane za proces $U_{4E}(t)$ imamo sledeće

$$U_{4E}(t) - E\big(U_{4E}(t)\big) = u + c_* \cdot t - S_{4E}(t) + \sigma_* \cdot W(t) - u - c_* \cdot t + \lambda_* \cdot t \cdot \frac{1}{\beta}$$

$$U_{4E}(t) - E\big(U_{4E}(t)\big) = \lambda \cdot t \cdot \mu_1 - S_{4E}(t) + \sigma_* \cdot W(t)$$

$$E\left[\Big(U_{4E}(t) - E\big(U_{4E}(t)\big)\Big)^2\right] = E(S_{4E}(t)^2) + E\left(\big(\sigma_* \cdot W(t)\big)^2\right) - 2 \cdot E\left(S_{4E}(t) \cdot \lambda_* \cdot t \cdot \frac{1}{\beta}\right) + E\left(\left(\lambda_* \cdot t \cdot \frac{1}{\beta}\right)^2\right).$$

Podsetimo se da smo na prethodnoj stranici napisali obrazac za računanje $k -$ tog centralnog momenta procesa $X_{4E}(t)$ preko gama funkcije i iskoristimo to.

$$E\left[{X_{4E}}^2(t)\right] = \frac{\Gamma(2)}{\beta^2}$$

$$\Gamma(2) = \int_0^\infty x \cdot e^{-x} dx = 2.$$

Ovaj integral se rešava parcijalnom integracijom, već smo ovakve oblike rešavali, pa ćemo u ovoj analizi napisati samo rezultat datog integrala.

Prema tome važi da je $E\left[{X_{4E}}^2(t)\right] = \frac{2}{\beta^2}$.

Kako je

$$E(S_{4E}(t)^2) = D\big(S_{4E}(t)\big) + \Big(E\big(S_{4E}(t)\big)\Big)^2 = \lambda_* \cdot t \cdot \frac{2}{\beta^2} + \left(\lambda_* \cdot t \cdot \frac{1}{\beta}\right)^2,$$

na osnovu toga,

$$E\left[\Big(U_{4E}(t) - E\big(U_{4E}(t)\big)\Big)^2\right] = \lambda_* \cdot t \cdot \frac{2}{\beta^2} + \left(\lambda_* \cdot t \cdot \frac{1}{\beta}\right)^2 + \sigma_* \cdot t - 2 \cdot \left(\lambda_* \cdot t \cdot \frac{1}{\beta}\right)^2 + \left(\lambda_* \cdot t \cdot \frac{1}{\beta}\right)^2$$

$$= \lambda_* \cdot t \cdot \frac{2}{\beta^2} + \sigma_* \cdot t$$

$$\lambda \cdot t \cdot \mu_2 + \sigma^2 \cdot t = \lambda_* \cdot t \cdot \frac{2}{\beta^2} + \sigma_* \cdot t$$

$$\lambda \cdot t \cdot \mu_2 + \sigma^2 \cdot t = \lambda_* \cdot t \cdot \frac{2}{\beta^2} + \sigma_* \cdot t\,. \qquad (4.9)$$

Potrazimo treći momenat procesa $X_{4E}(t)$.

Ovaj integral rešavamo sa dve parcijalne integracije pri čemu se za $u = x^2$, a za $dv = e^{-x}dx$.

Treće momente procesa $U(t)$ i $U_{4E}(t)$ računamo na sledeći način

$$E\left[\left(U(t) - E\big(U(t)\big)\right)^3\right] = E\left[\left(U(t) - E\big(U(t)\big)\right)^2 \cdot \left(U(t) - E\big(U(t)\big)\right)\right]$$

$$\left(U(t) - E\big(U(t)\big)\right)^2 \cdot \left(U(t) - E\big(U(t)\big)\right) =$$

$$\left(\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right)^2 - 2 \cdot \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \cdot \sigma \cdot W(t) + \big(\sigma \cdot W(t)\big)^2 + 2 \cdot \left(\sigma \cdot W(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right) \cdot \lambda \cdot t \cdot \mu_1 + (\lambda \cdot t \cdot \mu_1)^2\right) \cdot \left(-\sum_{i=1}^{N(t)} X_i + \sigma \cdot W(t) + \lambda \cdot t \cdot \mu_1\right) =$$

$$\left(-\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right)^3 + \left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right)^2 \cdot \lambda \cdot t \cdot \mu_1 - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \cdot \big(\sigma \cdot W(t)\big)^2 + \big(\sigma \cdot W(t)\big)^2 \cdot \lambda \cdot t \cdot \mu_1$$

$$+2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right)^2 \cdot \lambda \cdot t \cdot \mu_1 - 2 \cdot \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \cdot (\lambda \cdot t \cdot \mu_1)^2 - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \cdot \lambda \cdot t \cdot \mu_1 + (\lambda \cdot t \cdot \mu_1)^3. \qquad (*)$$

Kada potražimo očekivanje ovog gore navedenog izraza, i uzmemo u obzir da je

$$E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right) = \lambda \cdot t \cdot \mu_1$$

$$E\big(N(t)\big) \cdot E(X^3) = E((S(t) - E(S(t))^3) =$$

$$E(S(t)^3) + 3 \cdot E(S(t)^2) \cdot E\big(S(t)\big) - 3 \cdot \left(E\big(S(t)\big)\right)^2 \cdot E\big(S(t)\big) + \left(E\big(S(t)\big)\right)^3$$

sledi

$$E(S(t)^3) = E\big(N(t)\big) \cdot E(X^3) + 3 \cdot E(S(t)^2) \cdot E\big(S(t)\big) - 2 \cdot \left(E\big(S(t)\big)\right)^3 =$$

$$= \lambda \cdot t \cdot \mu_3 + 3 \cdot (\lambda \cdot t \cdot \mu_2 + (\lambda \cdot t \cdot \mu_1)^2) \cdot \lambda \cdot t \cdot \mu_1 - 2 \cdot (\lambda \cdot t \cdot \mu_1)^3 =$$

$$= \lambda \cdot t \cdot \mu_3 + 3 \cdot \lambda \cdot t \cdot \mu_2 \cdot \lambda \cdot t \cdot \mu_1 + (\lambda \cdot t \cdot \mu_1)^3.$$

U izrazu (*) zamenimo $E(S(t)^2)$ i $E(S(t)^3)$, zatim potiremo šta se da potirati i dobijemo

$$E\left[\left(U(t) - E\big(U(t)\big)\right)^3\right] = -\lambda \cdot t \cdot \mu_3$$

$$E\left[{X_{4E}}^3(t)\right] = \frac{\Gamma(3)}{\beta^3}$$

$$\Gamma(3) = \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-x} dx \ = 6$$

$$E\left[\left(U_{4E}(t) - E\big(U_{4E}(t)\big)\right)^3\right] = -\tfrac{6 \cdot t \cdot \lambda_*}{\beta^3},$$

izjednačavanjem dobijamo

$$-\lambda \cdot t \cdot \mu_3 = -\frac{6 \cdot t \cdot \lambda_*}{\beta^3}$$

$$\lambda \cdot t \cdot \mu_3 = \frac{6 \cdot t \cdot \lambda_*}{\beta^3}. \qquad (3)$$

I za kraj izjednačimo četvrti momenat

$$E\left[\left(U(t) - E\big(U(t)\big)\right)^4\right] = E\left[\left(U_{4E}(t) - E\big(U_{4E}(t)\big)\right)^4\right].$$

Raspišimo

$$\left(U(t) - E\big(U(t)\big)\right)^4 = \left(\left(-\textstyle\sum_{i=1}^{N(t)} X_i + \sigma \cdot W(t)\right) + \lambda \cdot t \cdot \mu_1\right)^4.$$

Ovaj račun podrazumeva osnovno znanje iz teorije polinoma, te kao takvo nije teško samo što je potrebno kvadrirati polinome, pa su izrazi dugački. No, kada dati izraz raspišemo i sredimo dobijemo sledeće

$$E\left[\left(U(t) - E\big(U(t)\big)\right)^4\right] = \lambda \cdot \mu_4 + 6 \cdot t \cdot \sigma^4 + 6 \cdot t \cdot \lambda \cdot \sigma^2 \cdot \mu_2 + 3 \cdot t \cdot \lambda^2 \cdot {\mu_2}^2 + \lambda \cdot \mu_4$$

$$E\left[\left(U_{4E}(t) - E\big(U_{4E}(t)\big)\right)^4\right] = 6 \cdot t \cdot {\sigma_*}^4 + \frac{12 \cdot t \cdot \lambda_* \cdot {\sigma_*}^2}{\beta^2} + \frac{12 \cdot t \cdot {\lambda_*}^2}{\beta^4} + \frac{24 \cdot \lambda_*}{\beta^4}$$

$$\lambda \cdot \mu_4 + 6 \cdot t \cdot \sigma^4 + 6 \cdot t \cdot \lambda \cdot \sigma^2 \cdot \mu_2 + 3 \cdot t \cdot \lambda^2 \cdot {\mu_2}^2 + \lambda \cdot \mu_4 = 6 \cdot t \cdot {\sigma_*}^4 + \frac{12 \cdot t \cdot \lambda_* \cdot {\sigma_*}^2}{\beta^2} + \frac{12 \cdot t \cdot {\lambda_*}^2}{\beta^4} + \frac{24 \cdot \lambda_*}{\beta^4}. \qquad (5.1)$$

Parametri ove aproksimacije su rešenja ovog sistema jednačina koji se sastoji od jednačina (4.8), (4.9), (5.0), (5.1) i dati su na sledeći način:

$$\lambda_* = \frac{32}{3} \cdot \lambda \cdot \frac{{\mu_3}^4}{{\mu_4}^3}$$

$$c_* = \lambda \cdot \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{{\mu_3}^3}{{\mu_4}^2} + \theta \cdot \mu_1\right)$$

$$\beta = 4 \cdot \frac{\mu_3}{\mu_4}$$

$$\sigma_* = \sqrt{\lambda \cdot \left(\mu_2 - \frac{4 \cdot \mu_3{}^2}{3 \cdot \mu_4}\right) + \sigma^2}.$$

Daćemo tri teoreme bez dokaza koje se odnose na oblik funkcije verovatnoće, $\psi(u) = \sum_{k=1}^{n+1} C_k \cdot e^{-r_k \cdot u}$, odnosno kako i na koji način se računaju parametri C_k, r_k $k = 1,2, \dots, n+1$ kad koristimo De Valderovu aproksimaciju verovatnoće propasti.

Teorema 10. Ako su iznosi (zahtevi) šteta eksponencijalno raspoređeni, sa funkcijom gustine $f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} A_k \cdot f_X(x)$ i parametrom β_k ($k -$ ti centralni momenat slučajne promenljive X) i ako važi $\sum_{k=1}^{n} A_k = 1$ tada je verovatnoća propasti sledećeg oblika

$$\psi_{4E}(u) = \sum_{k=1}^{n+1} C_k \cdot e^{-r_k \cdot u}, \qquad u \geq 0, \qquad t \to \infty,$$

gde je

$$C_k = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{r_k - \beta_i}{\beta_i}\right) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+1} \left(\frac{r_j}{r_k - r_j}\right),$$

za $k = 1,2,3, \dots, n+1$ i $\sum_{k=1}^{n+1} C_k = 1$, a $r_1, r_2, \dots, r_n$ su rešenja sledeće jednačine

$$\frac{A_1}{\beta_1 - r} + \frac{A_2}{\beta_2 - r} + \cdots + \frac{A_n}{\beta_n - r} = \frac{2 \cdot c_* - \sigma_*{}^2 \cdot r}{2 \cdot \lambda_*}.$$

Napomena 1. Neka je $n = 1$ i neka su iznosi šteta eksponencijalno raspoređeni sa parametrom β i neka je $A = 1$ dakle za linearnu kombinaciju eksponencijalnih raspodela naša aproksimacija je data sa $\psi_{4E}(u) = C_1 \cdot e^{-r_1 \cdot u} + C_2 \cdot e^{-r_2 \cdot u}$ je u stvari ista funkcija $\psi(u)$, bez aproksimacije, gde je

$$C_1 = \frac{r_1 - \beta}{\beta} \cdot \frac{r_2}{r_1 - r_2}, \quad C_2 = \frac{r_2 - \beta}{\beta} \cdot \frac{r_1}{r_2 - r_1}, \quad \frac{\lambda_*}{\beta - r} = c_* - \frac{1}{2} \cdot \sigma_*{}^2 \cdot r,$$

a rešenja ove jednačine su r_1, r_2 oblika:

$$r_{1,2} = \frac{2 \cdot c_* + \beta \cdot \sigma_*{}^2 \pm \sqrt{4 \cdot (c_*{}^2 - \beta \cdot c_* \cdot \sigma_*{}^2 + 2 \cdot \lambda_* \cdot \sigma_*{}^2) + \beta^2 \cdot \sigma_*{}^4}}{2 \cdot \sigma_*{}^2}.$$

2.3.3. Numerička ilustracija

U daljem tekstu biće analiziran konkretan primer koji pokazuje koliko je De Valderova aproksimacija verovatnoće propasti dobra i kako promena vrednosti početnih rezervi utiče na njene rezultate. Pojedinačni iznosi šteta imaju eksponencijalnu raspodelu sa parametrom β. Dalje, $\mu_k =$

$\frac{k!}{\beta^k}$. Prilikom analiziranja konkretnog primera važi $\sigma = 1$ i modifikovan perturbovan model koji posmatramo glasi:

$$U_{4E}(t) = u + \lambda \cdot \mu \cdot t - S_{4E}(t) + W_{4E}(t)\,, \quad t \geq 0.$$

Za određivanje preciznosti ovih aproksimacija koriste se relativne greške čija je formula

$$\psi_{Error} = \left|\frac{\psi_{Approx}(u) - \psi_{Exact}(u)}{\psi_{Exact}(u)}\right|.$$

Primer 2. Podrazumevamo da iznosi šteta imaju eksponencijalnu raspodelu sa parametrom β, a proces $S(t)$ ima Poasonovu raspodelu sa paramertom $\lambda = 1$ i da važi $\theta = \frac{5}{7}$, a $c = \frac{12}{7}$. Funkcija gustine pojedinačnih iznosa šteta data je sa $f_X(u) = 12 \cdot (e^{-3 \cdot u} + e^{-4 \cdot u}) = 4 \cdot (3e^{-3 \cdot u}) - 3 \cdot (4 \cdot e^{-4 \cdot u}),\ u > 0$. Izračunajmo De Valderovu aproksimaciju za $u = 0.5, 1, 2.5, 4, 7$?

Računajmo momente pojedinačnih iznosa šteta korišćenjem formule $\mu_k = \frac{k!}{\beta^k}$ pa važi:

$$E\left({X_{4E}}^k(t)\right) = \int_0^\infty u \cdot e^{-u} du = \frac{k!}{1^k} = \mu_k$$

$$E(X) = \frac{7}{12}$$

$$E(X^2) = \frac{37}{72}$$

$$E(X^3) = \frac{175}{288}$$

$$E(X^4) = \frac{781}{864}.$$

Izračunajmo sada parametre aproksimacije $\lambda_*, c_*, \beta, \sigma_*$ i to pomoću sledećih jednakosti

$$\lambda_* = \frac{32}{3} \cdot \lambda \cdot \frac{{\mu_3}^4}{{\mu_4}^3} = \frac{937890625}{476379541}$$

$$c_* = \lambda \cdot \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{{\mu_3}^3}{{\mu_4}^2} + \theta \cdot \mu_1\right) = \frac{700765}{609961}$$

$$\beta = 4 \cdot \frac{\mu_3}{\mu_4} = \frac{2100}{781}$$

$$\sigma_* = \sqrt{\lambda \cdot \left(\mu_2 - \frac{4 \cdot {\mu_3}^2}{3 \cdot \mu_4}\right) + \sigma^2} = 1{,}508606221.$$

Sada, odredimo r_1, r_2, r_3 kao rešenje jednačine

$$\frac{A_1}{\beta_1 - r} + \frac{A_2}{\beta_2 - r} = \frac{2 \cdot c_* - {\sigma_*}^2 \cdot r}{2 \cdot \lambda_*},$$

odnosno,

$$\frac{1}{2} \cdot {\sigma_*}^2 \cdot r^3 - \left(\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \beta_1 + \frac{1}{2} \cdot {\sigma_*}^2 \cdot \beta_2 + c_*\right) \cdot r^2$$
$$+ \left(\frac{1}{2} \cdot {\sigma_*}^2 \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 + c_* \cdot \beta_1 + c_* \cdot \beta_2 - \lambda_* \cdot (A_1 + A_2)\right) \cdot r$$
$$+\lambda_* \cdot (A_1 \cdot \beta_2 + A_2 \cdot \beta_1) - c_* \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 = 0$$

$$1.13795 \cdot r^3 - 9.59411 \cdot r^2 + 21.1951 \cdot r + 7.43754 = 0$$

$$r_1 = 0.306762 \quad r_2 = 4.3689 + 1.48956i \quad r_3 = 4.3689 - 1.48956i.$$

Ovim računom vidimo da moramo da nametnemo dodatne uslove, onda kada nam ne važi $A_i > 0$ za svako i. No kako je

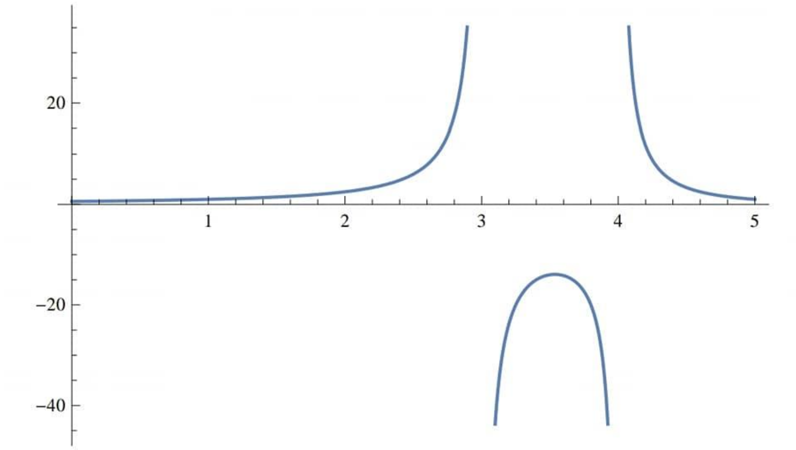
$$\frac{A_1}{\beta_1 - r} + \frac{A_2}{\beta_2 - r} = \frac{2 \cdot c_* - {\sigma_*}^2 \cdot r}{2 \cdot \lambda_*}$$

izraz sa desne strane je linearna funkcija po r, odnosno prava linija, dok izraz sa leve strane je funkcija generatrisa momenata, odnosno linearna kombinacija dve eksponencijalne funkcije.

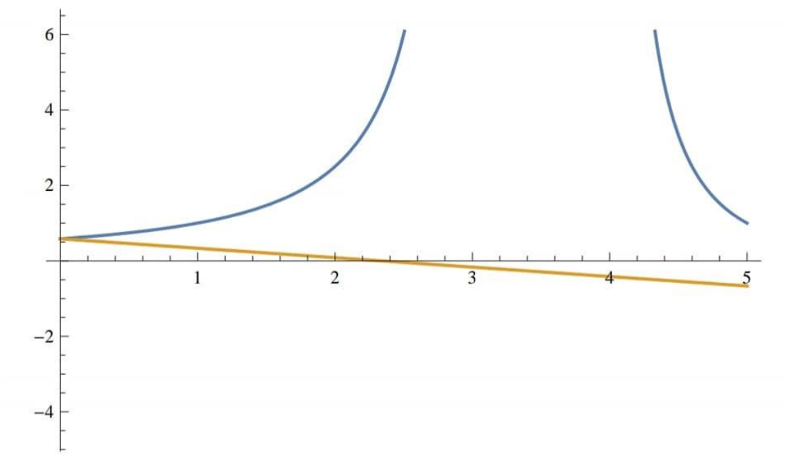
U našem primeru jednakost ovih funkcija izgleda

$$\frac{4}{3 - r} - \frac{3}{4 - r} = \frac{476379541\left(\frac{1404530}{609961} - r\sqrt{-\frac{24}{781} + \sigma^2}\right)}{1875781250}.$$

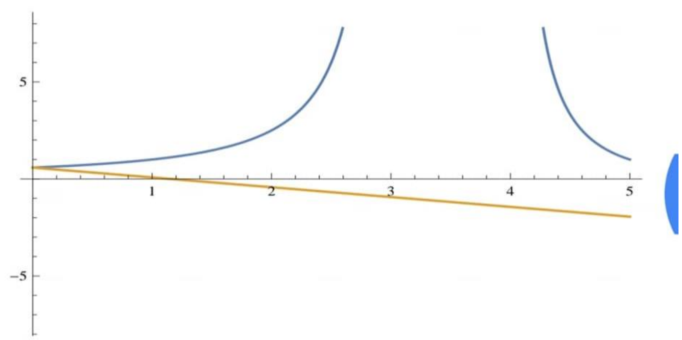
Pogledajmo kako se ove dve funkcije ponašaju za različite vrednosti σ.



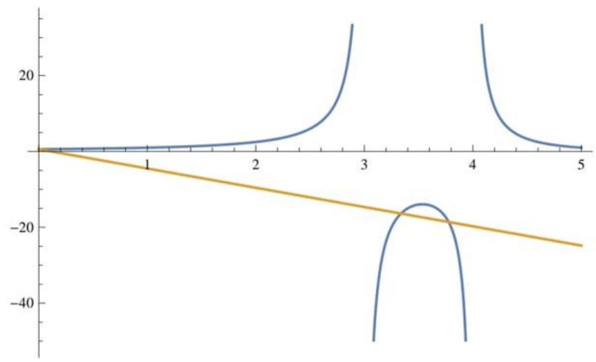
Slika 3. $\sigma = 0$



Slika 4. $\sigma = 1$



Slika 5. $\sigma = 2$



(

Slika 6. $\sigma = 20$

Na osnovu datih grafika zaključujemo sledeće, kako raste volatilnost, tako raste i ocena volatilnosti i naši grafici se seku, odnosno uspostavljamo datu jednakost na četvrtoj slici, kada dobijamo tri realna korena kao rešenja.

Aproksimirana vrednost volatilnostitada iznosi $\sigma_* = \sqrt{-\frac{24}{781} + \sigma^2} = 19{,}9999 \approx 20.$

Potražimo r_1, r_2, r_3 u programu mathematica

$$r_1 = 3.77698, r_2 = 3.33787, r_3 = 0.0000388843.$$

Za dobijena rešenja, izračunajmo C_1, C_2, C_3

$$C_1 = \left(\frac{r_1 - \beta_1}{\beta_1}\right)\left(\frac{r_1 - \beta_2}{\beta_2}\right)\left(\frac{r_2}{r_1 - r_2}\right)\left(\frac{r_3}{r_1 - r_3}\right)$$

$$C_2 = \left(\frac{r_2 - \beta_1}{\beta_1}\right)\left(\frac{r_2 - \beta_2}{\beta_2}\right)\left(\frac{r_1}{r_2 - r_1}\right)\left(\frac{r_3}{r_2 - r_3}\right)$$

$$C_3 = \left(\frac{r_3 - \beta_1}{\beta_1}\right)\left(\frac{r_3 - \beta_2}{\beta_2}\right)\left(\frac{r_1}{r_3 - r_1}\right)\left(\frac{r_2}{r_3 - r_2}\right)$$

$$C_1 = -1.13006 \cdot 10^{-6} \quad C_2 = 1.86807 \cdot 10^{-6} \quad C_3 = 0.99999,$$

pa verovatnoća propasti ima oblik:

$\psi_{4E}(u) = -1.13006 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-3.77698u} + 1.86807 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-3.33787u} + 0.99999 \cdot e^{-0{,}000038843u}$.

Izračunajmo sada r_1, r_2, r_3 za verovatnoću propasti ukoliko nema aproksimacije

$$\frac{4}{3 - r} - \frac{3}{4 - r} = \frac{2 \cdot \frac{12}{7} - 20^2 \cdot r}{2 \cdot 1}$$

$$\frac{4}{3-r} - \frac{3}{4-r} = \frac{12}{7} - 200r$$

$$r_1 = 3.99622, \quad r_2 = 3.0067, \quad r_3 = 0.00564749.$$

Zatim odredimo C_1, C_2, C_3 i na osnovu dobijenih vrednosti zapišimo oblik verovatnoće propasti.

$$C_1 = -1.34943 \cdot 10^{-6}, \quad C_2 = 4.21484 \cdot 10^{-6}, \quad C_3 = 0.999997,$$

$$\psi(u) = -1.34943 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-3.9962u} + 4.21484 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-3.0067u} + 0.99997 \cdot e^{-0,00564749u}.$$

Prikazimo u tabeli vrednosti aproksimirane verovatnoće propasti i vrednosti verovatnoće propasti bez aproksimacije za različite vrednosti početnih rezervi.

u	$\psi_{4E}(u)$	$\psi(u)$	ψ_{error}
0	0.99991	1	0.00009
10	0.999602	0.945087	0.05768
20	0.999213	0.893193	0.11869
30	0.998825	0.844148	0.18323
50	0.99805	0.753989	0.32369
10000	0.678114	$2.97345 \cdot 10^{-25}$	0.678114

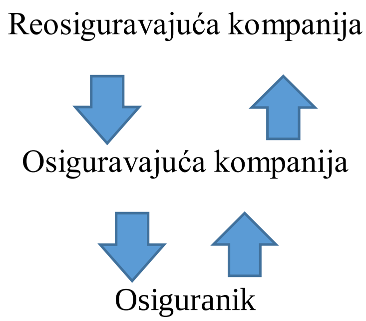
Na osnovu dobijenih rezultata vidimo da De Valderova aproksimacija verovatnoće propasti gubi kvalitet, odnosno greška raste kako povećavamo naše rezerve. Uočimo da aproksimirana verovatnoća propasti dosta sporije opada sa povećanjem početnih rezervi, što znači da bismo je na neki način anulirali, odnosno obezbedili egzistenciju osiguranika, odnosno osiguravajuće kuće, potrebne su nam ogromne količine početnih rezervi.

Poglavlje 3

'Actuaries are people who wanted to be accountants but didn't have the personality.'
Kaz Cooke

3.1. Reosiguranje

Osiguravajuće društvo i samo može uzeti polisu da bi se osiguralo (zaštitilo) od ”velikih” šteta. Takva polisa zove se reosiguranje. Društvo će u celosti platiti štetu do iznosa $h(X)$ koji se zove samopridržaj (retencija, engl. retention) ili ti nivo zadržavanja, a svaki iznos iznad nivoa zadržavanja pokriće reosiguranik. Nivo zadržavanja društva za osiguranje je iznos ugovorom preuzetih rizika koji društvo uvek zadržava u sopstvenom pokriću i koji može pokriti sopstvenim sredstvima. Društvo je dužno da uvek zadrži deo rizika u samopridržaju. Deo rizika iznad samopridržaja se reosigurava. Postoji određena hijerarhija u načinu funkcionisanja osiguranika, osiguravajuće kuće i reosiguravajuće kuće.



Plave strelice označavaju plaćanje, bitno je naznačiti da nije moguće povući strelicu od reosiguravajuće kompanije do osiguranika. Ovo poslednje nas navodi na to da ukoliko nasa osiguravajuća kompanija propadne mi nećemo nikakvu vrstu isplate dobiti od reosiguravajuće kompanije.

U poslovima reosiguranja, osiguravajuće društvo koje traži reosiguranje odnosno želi da ustupi deo rizika naziva se direktni osiguranik. On ocenjuje kolika šteta bi mogla da ugrozi njegovu solventnost, pa zadržava samo onoliki deo rizika koji bi mogao da isplati (samopridržaj), a preostali deo predaje reosiguraniku, koji ovako preuzeti rizik ili u potpunosti zadržava kao sopstveni samopridržaj ili zadržava samo onoliki deo koliko može da pokrije ako dođe do štete, a ostalo daje drugom reosiguraniku. Osiguranik koji ustupi deo obaveza reosiguraniku za njega postaje cedent (cessio – ustupanje), reosiguranik koji preuzima deo obaveze se naziva cesionar. To praktično znači da je cesija iznos osiguranja prenesen na reosiguranika. U slučajevima kada reosiguranik prenosi deo obaveze na druge reosiguranike, on vrši retrocesiju i postaje retrocedent, a ti reosiguranici retrocedenti. Dakle, odluka o prenošenju rizika se donosi na osnovu procene vlastitog samopridržaja i očekivane visine potencijalnih šteta. Samopridržaj je ukupan iznos preuzetih rizika, koji se pokriva sopstvenim sredstvima, a utvrđuju ga osiguravajuće kompanije na osnovu prethodnog iskustva. Maksimalno moguća šteta predstavlja iznos najveće štete koja se prema proceni osiguravača može očekivati na jednom osiguranom riziku, pod pretpostavkom da je totalna šteta moguća ali malo verovatna. Prenisko određena maksimalno moguća šteta može dovesti osiguranika u situaciju da ne može da odgovori svojim obavezama, a previsoko određena maksimalno moguća šteta dovodi do nepotrebnog odliva dela premije u reosiguranje. Svaki ugovor o reosiguranju sadrži limit, koji predstavlja maksimalan iznos za koji je reosiguranik preuzeo obavezu da će isplatiti u slučaju štete. Ako se radi o proporcionalnom ugovoru, onda se limit odnosi na svaki rizik obuhvaćen tim ugovorom. U slučaju neproporcionalnih ugovora, limit ugovora se odnosi na jedan ili grupu rizika obuhvaćenih bilo jednim ili sa više štetnih događaja. Kao olakšica cedentu u slučaju šteta manjeg obima ovi ugovori sadrže više nivoa (layer-a), tako da se u slučaju štetnog događaja koji će pogoditi ugovor, ali ne i njegov gornji limit, ugovor samo delimično iscrpljuje (ili reaktivira delimičnom doplatom premije).

Postoje dva osnovna tipa ugovora o reosiguranju i to:

1. Ugovor o reosiguranju ukupne štete:
    - Proporcionalno reosiguranje
    - Stop-loss reosiguranje
    - Reosiguranje viška štete
2. Ugovori o reosiguranju ekstemno velikih šteta

3.1.1. Proporcionalno osiguranje

U praksi najprimenljivije je proporcionalno osiguranje. Ono podrazumeva da osiguranik nadoknadi iznos ${X_i}^L = \alpha \cdot X_i$ za svaku štetu, a reosiguranik će nadoknaditi iznos ${X_i}^R = (1-\alpha) \cdot X_i$. Potrebno je napomenuti da prilikom reosiguranja naš drift Braunovog kretanja u oznaci $\sigma^L = \sqrt{\alpha} \cdot \sigma$, zavisi od α . Objasničemo kako ovo osiguranje i na koji način smanjuje rizik. Kako je verovatnoća propasti $\psi(u) \leq e^{-\mathcal{K}u}$, odnosno možemo zaključiti da što je koeficijent prilagođavanja veći to je verovatnoća propasti manja. No, koeficijent prilagođavanja se računa iz sledeće jednačine

$$c \cdot t - \alpha \cdot \frac{\sigma^2}{2} \cdot t^2 - \lambda \cdot (M_{\alpha \cdot X}(t) - 1) = 0.$$

Funkcija generatrise slučajne promenljive ${X_i}^L$ je

$$M_{{X_i}^L}(t) = M_{\alpha \cdot X}(t) = E(e^{t\alpha X_i}) = M_X(\alpha \cdot t).$$

Neka i osiguranik i reosiguranik primenjuju princip očekivane vrednosti za određivanje premije. Važi $c^L = \alpha \cdot c$. Neka je $\{{S_t}^L, t \geq 0\}$ proces kojim označavamo ukupne štete u portfoliju osiguranika, tada je premija koju će osiguranik naplatiti

$$E({S_t}^L) = \lambda \cdot \mu_L \cdot t.$$

Gde je $\mu_L = E\left({X_i}^L\right) = \alpha \cdot E(X_i) = \alpha \cdot \mu$, prema tome premija osiguranika je

$$E\left({S_t}^L\right) = \lambda \cdot \alpha \cdot \mu \cdot t,$$

a premijska stopa je $c^L = \alpha \cdot \lambda \cdot \mu$.

Da se nije reosigurao, osiguranik bi u skladu sa principom očekivane vrednosti odredio premijsku stopu $c = \mu \cdot \lambda$. Na osnovu toga sledi da se odgovarajući koeficijent prilagođavanja dobija kao rešenje jednačine

$$\alpha \cdot c \cdot t - \alpha \cdot \frac{\sigma^2}{2} \cdot t^2 - \lambda \cdot (M_{\alpha \cdot X}(t) - 1) = 0.$$

Ova jednačina je istog oblika kao odgovarajuća jednačina koja odgovara slučaju reosiguranja, pri čemu je $\mathcal{K} = \alpha \cdot \mathcal{K}^L$gde je $\mathcal{K}^L$ koeficijent prilagođavanja pod reosiguranjem. Novi koeficijent prilagođavanja je veći, ali rizik postaje manji.

Zaključak

U ovom radu smo na poseban, aprakstan način objasnili teoriju propasti, onda kada je u priču dodato Braunovo kretanje. No, svaki segment teorije propasti je neopipljiv, nepredvidljiv, ona je sama po sebi teška za analizu, uvođenjem Braunovog kretanja u osnovni model, dobijamo razlaganje verovatnoće propasti na dva segmenta, jedan koji potiče od zahteva i drugi koji potiče upravo od Braunovih oscilacija. Ovim razlaganjem kontrolišemo verovatnoću propasti, tako što ograničavamo posebno deo koji potiče od zahteva, posebno deo koji potiče od drifta.

Dali smo jasne integro – diferencijalne jednačine kako za verovatnoće propasti, tako i za verovatnoće preživljavanja. Izveli smo gornje ocene za naše razlaganje verovatnoće propasti. Uveli u priču koeficijent prilagođavanja, objasnili jednačinu iz koje određujemo isti. Dali numerički primer u kome smo pokazali ponašanje verovatnoće propasti u globalu, kao i ponašanje pojedninačih delova ove verovatnoće. Pokazali smo da verovatnoće propasti $\psi(u)$ i $\psi_d(u)$ se povećavaju kako se vrednosti drifta povećavaju, što je i bilo za očekivati, jer što je rasipanje, drift, veće to je i naša nesigurnost veća. Međutim $\psi_c(u)$ nije rastuća funkcija u zavisnosti od σ, nego kako σ raste verovatnoća propasti je sve manja. Funkcija $\psi_c(u)$ se razlikuje od ponašanja funkcija $\psi(u)$ i $\psi_d(u)$.

Na jedan matematički korektan način smo dali sliku o načinu izražavanja verovatnoće propasti kada su pojedinačni iznosi šteta eksponencijalno raspoređeni. Oblik verovatnoće propasti dat je sa:

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{n+1} C_k \cdot e^{-r_k u}.$$

Obradili smo priču o koeficijentima $C_k, r_k\ k = 1,2, \dots, n$, nametnuli uslove pod kojima oni postoje kao realni brojevi. Videli iz oblika jednakosti po kojoj tražimo r_k da je upravo najmanje r_k rešenje Lundbergove jednakosti, odnosno koeficijent prilagođavanja $\mathcal{K}$.

Međutim, kako se verovatnoća propasti u nekim slučajevima ne može eksplicitno izračunati, bavili smo se aproksimacijama verovatnoće propasti. Konkretnim primerom, gde imamo mešovitu eksponencijalnu raspodelu šteta. U datom primeru smo odredili i apsolutnu vrednost greške, na osnovu koju zaključujemo da De Valderova aproksimacije ne daje sjajne rezultate.

Na samom kraju smo u našu priču uvodimo i reosiguranje. Dajemo teorijski pristup reosiguranju i posebno obrađujemo proporcionalno reosiguranje. Pokazujemo kako ukoliko se osiguranik ili osiguravajuća kuća reosigura da se na taj način rizik od propasti smanjuje.

Literatura

[1] P.Embrechts, C.Kluppelberg, T.Mikosch, Modelling Extremal Events for Insurance and Finance, Springer-Verlag, Februar 12 , 1997

[2] David C.M. Dickson, Insurance Risk and Ruin,Cambridge, Faculty of actuaries, 2005

[3] D. Seleši, Skripte iz aktuarska matematika, skripte, 2014

[4] D. Rajter – Ćirić, Stohastička analiza, skripte, 2010

[5] Franqois Dufresne, Hans U. Gerber, Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion, North-Holland, October 1990, 51-59

[6] Asymptotic estimates for the probability of ruin in a Poisson model with diffusion, North-Holland, Januar 1993, 57-62

[7] Shuanming Lia and Biao Wu , Centre for Actuarial Studies, Department of Economics, The University of Melbourne, Australia School of Mathematics and Statistics Carleton University, Canada, The Diffusion Perturbed Compound Poisson Risk Model with a Dividend Barrier, 2006

[8] Jun Cai, Department of Statistics and Actuarial Science University of Waterloo and Hailiang Yang Department of Statistics and Actuarial Science University of Hong Kong, Ruin in the Perturbed Compound Poisson Risk Process under Interest Force, Jun 2005

[9] MSc. Maikol Alejandra Diasparra Ramos, Control de modelos Markovianos.Una aproximacion al problema de ruina, Department of Statistics, Leganes (Madrid), April, 2009

Biografija

Maja Janus je rođena 08. juna 1991. godine u Novom Sadu. Završila je osnovnu školu ”Đorđe Natošević” u Novom Sadu 2006. godine kao nosilac Vukove diplome. Upisuje gimnaziju ”Isidora Sekulić” u Novom Sadu, prirodno-matematički smer, koju završava 2010. godine.

Zbog sklonosti ka matematici i ekonomiji, iste godine upisuje Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer primenjena matematika, matematika finansija. Zaključno sa septembarskim ispitnim rokom 2013. godine položila je sve predviđene ispite sa prosekom 9.54 i stekala zvanje Matematičar - primenjena matematika.

Oktobra 2013. godine upisuje master studije na istom fakultetu, smer master primenjena matematika. Završava prvu godinu u roku, nakon čega upisuje drugu. Nakon januarsko-februarskog ispitnog roka 2015. rađa sina Uroša i time pravi pauzu na fakultetu. Ostaju joj tri ispita i master rad. Od septembra 2016. godine radi u osnovnoj školi ” Ruža Đurđev Crna ” kao nastavnik matematike. Zatim ostaje drugi put u drugom stanju, rađa sina Bogdana. Septembra 2018. Vraća se na posao al ovaj put u osnovnu školu ”Petar Kočić”, gde i dalje radi na poziciji nastavnik matematike. Položila je sve ispite zaključno sa septembarskim ispitim rokom 2019. godine predviđenje planom i programom sa prosečnom ocenom 8,29 i time stekala uslov za odbranu master rada.

Tokom fakulteta volontirala na festivalima: ” Zmajeve dečije igre ” i ” Festival Nauke ”. Od septembra 2013.godine pohađa školu jezika ”Queen” koju završava juna 2015., na nivou B_2. U slobodno vreme voli da šeta, sluša muziku i vozi bicikl, čita knjige, gleda filmove.

UNIVERZITET U NOVOM SADU PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Maja Janus

AU

Mentor: dr Dora Seleši

MN

Naslov rada: Teorija propasti za perturbovane modele rizika

NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: srpski/engleski

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2019.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku,

Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu,

Trg Dositeja Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (3/58/9/4/6/0)

(broj poglavlja/strana/lit./tabela/grafika/priloga)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Aktuarska matematika

ND

Predmetna odrednica/

/Ključne reči: Poasonov proces, pojedinačni iznosi šteta, eksponencijalna raspodela, verovatnoća propasti, verovatnoća preživljavanja, Lundbergova nejednakost, Kramer Lundbergova model, koeficijent prilagođavanja, De Valderova aproksimacija, proporcionalno reosiguranje

PO,UKR

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku

Prirodno -matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

ČU

Važna napomena: Nema

VN

Izvod: U uvodnom delu biće navedeni osnovni pojmovi teorije rizika, kao i teorije propasti. Takođe, biće navedene definicije određenih stohastičkih procesa. Centralni deo rada će biti podeljen u dva dela. Prvi deo će biti posvećen našem proširenom modelu procesa viška kao i detaljnoj obradi istog, definisaćemo i dokazati neke od teorema i lema. U priču ćemo uvesti verovatnoće propasti i preživljavanja, kao i metode procene ovih verovatnoća. Dok će se drugi centralni deo bazirati na konkretnim numeričkim primerima u kojima islustraciono prezentujemo

sve ono teoriski naznačeno u radu. Za pojedinačne iznose šteta biramo konkretne raspodele, procenjujemo krajnu propast kao i grešku. Numeričke aproksimacije računamo putem programa MS Excel, Matlab i Mathematica i na osnovu toga testiramo validnost datih metoda aproksimacija. Završni deo rada odnosiće se na teorijsku priču o reosiguranju, kao i o njegovoj ulozi i delovanju na verovatnoću propasti.

IZ

Datum prihvatanja

Teme od strane

NN veća: 05.07.2019.

DP

Datum odbrane: 2019.

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Danijela Rajter - Ćirić, rednovni profesor,

Prirodno- -matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Sanja Rapajić, vanredovni profesor,

Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Mentor: dr Dora Seleši, redovni profesor,

Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD

FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Dokument type: Monograph documentation

DT

Type of record: Textual printed material

TR

Contents code: Master thesis

CC

Author: Maja Janus

AU

Mentor: dr Dora Seleši

MN

Title: Ruin theory for perturbed risk models

TI

Language of text: Serbian (latin)

LT

Language of abstract: Serbian/ English

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2019.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Faculty of Science and Mathematics,

Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical deskription: (3/58/9/4/6/0)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Actuarial mathematics

SD

Subject Key words: Poisson process, individual claims, exponential distribution, ruin probability, survival probability, Lundberg's inequality, the Kramer Lundberg model,coefficient of adjustment, De Valder approximation, proportional reinsurance

SKW, UC

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Computer Sciences

HD

Note: None

N

Abstract: The introduction will outline basic concepts of risk theory as well as theories of failure. Also, definitions of certain stochastic processes will be provided. The central part of the paper will be divided into two parts. The first part will be devoted to our extended model of the redundancy process as well as the detailed processing of the same, we will define and prove some of the theorems and lemmas. We will introduce probabilities of ruin and survival in the story, as well as methods of estimating these probabilities. While the second central part will be based on specific numerical examples in which we illustrate all the theoretical points outlined in the paper. For individual amounts of damages, we select specific distributions, estimate the ultimate failure as well as the error. We calculate numerical approximations using MS Excel, Matlab, and Mathematica, and test the validity of the given approximation methods. The final part of the paper will deal with the theoretical story of reinsurance as well as its role and effect on the likelihood of failure.

AB

Accepted on the

Scientific board on: 05.07.2019.

AS

Defended: 2019.

DE

Thesis Defend board:

D

President: dr Danijela Rajter-Ćirić, full professor,

Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: dr Sanja Rapajić, associate professor ,

Faculty of Science , University of Novi Sad

Mentor: dr Dora Seleši, full professor,

Faculty of Science, University of Novi Sad