UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU

Maja Ćosić

Kontinualna i diskretna malotalasna transformacija i primene

Master rad

Mentor:
Prof. dr Nenad Teofanov

Novi Sad, 2014

Sadržaj

Predgovor

Tema rada spada u oblast primene harmonijske analize na obradu signala. Osnovna ideja nam je bila da se pokaže kako jedna apstraktna matematička teorija o ortonormiranim bazama u Hilbertovim prostorima dovodi do brzih i efikasnih algoritama za analizu, obardu i sintezu signala. Radi ograničenog prostora, pažnju smo usmerili na obradu slike, dvodimenzionog signala, a napominjemo da se isti matematički aparat može primeniti u obradi audio signala.

U odnosu na korišćenu literaturu, ovde smo kombinovali čisto inženjerski pristup korišćen u npr [1], sa teorijskim rezultatima izloženim u [3],[4]. Konačno, u ilustrativnim primerima korišćen je programski paket MATLAB.

Ovom prilikom želela bih da iskažem veliku zahvalnost svom mentoru, dr Nenadu Teofanovu na strpljivom i stručnom usmeravanju, kao i korisnim savetima prilikom izrade ovog rada. Takođe, zahvaljujem se članovima komisije, dr Arpadu Takačiju i dr Milošu Kuriliću, kao i svim profesorima i asistentima sa kojima sam sarađivala u toku svojih studija na Prirodno-matematičkom fakultetu.
Posebnu zahvalnost dugujem svojim roditeljima na beskrajnoj podršci i razumevanju u toku školovanja.

Maja Ćosić

1

Uvod

Teorija malih talasa (vejvleta) veoma je značajna sa stanovišta obrade signala. Nastala je sa pokušajima lokalizacije Furijeove analize, te je prirodno da se prilikom uvođenja pojma malog talasa moramo osvrnuti i na Furijeovu transformaciju.

Druga glava u ovom radu polazi od Furijeove transformacije i njene nadogradnje, kratkotrajne Furijeove transformacije, koja je ključna za formiranje ideje o vejvlet transformaciji. Dat je istorijski razvoj pojma malog talasa, a zatim su prikazane sličnosti i razlike između Furijeovih i vejvlet transformacija. Takođe, izložena su i pojedina svojstva kontinualnih transformacija i princip neodređenosti kroz koji se ogleda glavni nedostatak kratkotrajne Furijeove transformacije. Ovu glavu završavamo primerima vejvleta.

Upotreba računara i numeričkih algoritama zahteva diskretizaciju podataka. U trećoj glavi uvodimo pojam diskretnog signala i odgovarajuće diskretne vejvlet transformacije. To je posebno značajno jer se u kontinualnom slučaju javlja redudantnost koeficijenata transformacije koja govori o višku podataka, a samim tim i većem memorijskom prostoru potrebnom za čuvanje signala. Uvodimo pojam funkcije skaliranja i filtera pomoću kojih formiramo diskretnu transformaciju i izlažemo njenu vezu sa kontinualnim slučajem. Takođe izlažemo teorijski koncept multirezolucije koja je ključna za primenu vejvleta u kompresiji signala.

Cilj ovog rada je da se prikaže primena vejvleta u kompresiji signala. Stoga je u četvrtoj glavi izložen piramidalni algoritam i proces kompresije digitalne slike sa akcentom na korak transformacije signala u kojem se direktno primenjuju vejvleti. Dato je nekoliko konkretnih primera te primene u programskom paketu MATLAB, kao i primer primene vejvleta u otklanjanju šuma sa slike.

Peta glava je dodatak u kojem je izložena upotreba alatki u programu MATLAB, neophodnih za izvođenje analiza u ovom radu.

2

Malotalasna (vejvlet) transformacija

Razvoj teorije malih talasa počinje još od pokušaja lokalizacije Furijeove analize i svoju najveću primenu pronašla je u oblastima obrade signala. U ovoj glavi prvo dajemo karatak istorijski pregled značajnih teorijskih dostignuća i ideja koje su dovele do pomenute teorije. Dalje, uvodimo pojam Furijeove, kratkotrajne Furijeove i malotalasne (vejvlet, engl. *wavelet*) transformacije i poredimo ih. Zatim prelazimo prvo na kontinualni slučaj i algoritam konstrukcije kratkotrajne i vejvlet transformacije kao i inverznog postupka za dobijanje polaznog signala. Dati algoritam je opisan u literaturi [1]. Konačno ilustrujemo nekoliko primera vejvleta. U ovom poglavlju korištena je literatura [1], [2], [3] i [4].

2.1 Kratak istorijski pregled

Teorija malih talasa nastala je kao odgovor na praktične zahteve inženjera i fizičara u potrazi za matematičkim aparatom koji pruža detaljniju analizu od postojeće Furijeove analize. U tom pogledu, možemo je posmatrati kao sledbenika Furijeove teorije, ali u određenom smislu unapređenu i prilagođenu potrebama analize seizmičkih signala. Sam naziv vejvlet(engl. *wavelet*) pojavio se osamdesetih godina XX veka, a za to je zaslužan inženjer Morlet. Može se reći da je u tom periodu izgrađena i uobličena teorija o malim talasima.

Polaznu osnovu za postavljanje teorije vejvleta stvorio je Joseph Fourier 1807. godine kada je došao do saznanja da je moguće svaku periodičnu funkciju aproksimirati sumom određenih trigonometrijskih funkcija. Ukoliko posmatramo vejvlete kao specifične funkcije pomoću kojih reprezentujemo neke druge funkcije, možemo uočiti povezanost sa idejom koja je temelj Furijeove analize.

Sledeći značajan korak koji je doprineo izgradnji i primeni teorije vejvleta bila je familija Haar vejvleta (1909. godine) koju čine po delovima neprekidne funkcije što ograničava njihovu primenu.

Jean Morlet i Alex Grossman začetnici su teorije o vejvletima koja se danas primenjuje u raznim oblastima poput fizike, obrade digitalnog signala itd. Do tada, postojali su razni pokušaji i pojedini doprinosi u postavljenju matematičke teorije malih talasa (Paul Levy, Denis Gabor). Na primer, kratkotrajna Furijeova transformacija, koju je predložio Gabor, lokalizuje signal u vremensko-frekvencijskoj ravni, za razliku od uobičajene Furijeove transformacije koja omogućava globalnu spektralnu analizu signala. Međutim, ona ima jedan nedostatak koji je Morlet primetio i u pokušaju da ga otkloni napravio značajan pomak ka stvaranju teorije o vejvletima. Kratkotrajna Furijeova transformcija omogućava da se frekvencija signala posmatra po delovima ili kroz tzv prozore. Nedostatak je u tome što je širina tih prozora fiksna. Upravo Morlet, prilikom analize seizmičkih signala, dolazi do ideje da upotrebi transformaciju koja će, u zavisnosti od veličine detalja koji nas interesuju, menjati širinu prozora. Potpunom razvoju i oblikovanju teorije malih talasa doprineo je fizičar Alex Grossman kada je zajedno sa Morletom realizovao ideju da se zadati signal u izvesnom smislu transformiše primenom vejvleta, a zatim ponovo vrati u početni oblik. Pri tome, cilj je bio očuvanje informacija potrebnih za rekonstrukciju signala. Ovakva ideja našla je začajnu primenu u kompresiji signala.

Stephane Mallat i Yves Meyer su svojim radom u kasnim osamdesetim godinama XX veka omogućili savremenu primenu vejvleta i algoritme u obradi digitalnog signala. Njihov rad baziran je na pronalaženju veze između pojma filtera i piramidalnog algoritma. Konačno, Ingrid Daubechies dolazi do nove familije ortonormiranih vejvleta sa veoma važnim svojstvom kompaktnog nosača. Na osnovu navedenih radova izgradila se u međuvremenu cela oblast harmonijske analize, poznata kao teorija malih talasa.

2.2 Od Furijeove do vejvlet transformacije

Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definišemo Furijeovu trasformaciju $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ na sledeći način:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt. \tag{2.1}$$

Na ovaj način formirali smo funkciju koja zavisi od promenljive ω koju zovemo frekvencija. Posmatrajmo funkciju $f(t)$ kao signal koji nosi određene informacije. Furijeova transformacija datog signala, definisana pomoću (2.1) omogućava analizu signala kroz frekvencijski domen. Dakle, $\hat{f}(\omega)$ otkriva da li se frekvencija ω pojavljuje u signalu i u kojoj meri. Funkcija f treba da ispuni određene uslove da bi nesvojstveni integral (2.1) postojao. Stoga uvodimo formalno definiciju Furijeove transformacije.

Definicija 2.2.1. *Posmatramo po delovima neprekidnu i apsolutno integrabilnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Tada je Furijeova transformacija funkcije f definisana sa* (2.1).

Kako je $|e^{-i\omega t}| = 1$, važi:

$$\Big| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \Big| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < \infty,$$

pa je $\hat{f}$ dobro definisana kada f ispunjava uslove definicije 2.2.1.

U zavisnosti od analize pojave koju želimo da izvršimo, neophodne su nam različite informacije. Koristeći razne načine predstavljanja polazne funkcije, ističemo njene određene osobine. Nemoguće je pronaći jednu univerzalnu reprezentaciju koja otkriva sve podatke. Vrlo često jedna grupa svojstava, izložena kroz datu reprezentaciju, prikriva neka druga svojstva funkcije. Stoga je poželjno imati mogućnost transformacije funkcije na više načina da bismo dobili željeni rezultat.

Transformacija koju smo prethodno definisali, može se napisati u drugom, opštem obliku, koji ćemo koristiti i za predstavljanje kratkotrajne Furijeove i vejvlet transformacije. U tom smislu uvodi se funkcija $g(t)$, pomoću koje vršimo transformaciju polaznog signala $f(t)$ na sledeći način:

$$f(t) \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}\, dt. \tag{2.2}$$

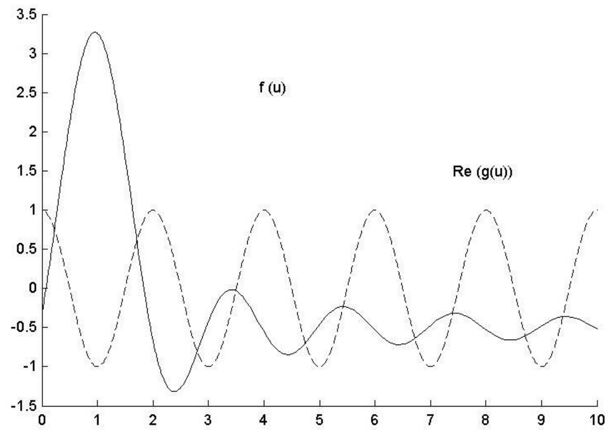
Funkcija $g(t)$ je analizirajuća funkcija koja je u opštem slučaju kompleksna. Vidmo da, ukoliko za funkciju $g(t)$ biramo $g_\omega(t) = e^{-i\omega t}$ dobijamo Furijeovu transformaciju. Dakle, opšti oblik transformacije koju ćemo korsititi podrazumeva integraciju proizvoda polazne funkcije (signala) $f(t)$ i kompleksno konjugovane vrednosti funkcije $g(t)$ i to nad vremenskim domenom.

Signal predstavljamo funkcijom $f(t)$ kojom se modelira njegova promena u vremenskom domenu. Furijeova transformacija je značajna jer omogućava analizu frekvencijskog sadržaja signala. Frekvencija je u stvari mera brzine promene neke pojave. Visoke frekvencije karakterišu brze promene, dok se niske frekvencije vezuju za spore promene. Primenom transformacije (2.2) poredimo polaznu funkciju (signal) sa izabranom funkcijom g. Kako kod Furijeove transformacije funkcija g zavisi od frekvencije ω, pojavom te frekvencije u signalu, stvara se nenula uticaj na $\hat{f}$. Stoga $\hat{f}$ daje informaciju da li se data frekvencija ω pojavljuje u signalu ili ne.

Na primer, na slici 2.1 prikazana je funkcija

$$f(u) = 1.2\pi\frac{\sin(\pi u - 3)}{\pi u - 3} - 0.5$$

i realni deo funkcije $g_\pi(u) = e^{-i\pi u}$. Iz Ojlerove formule $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ sledi da je $Re(g_\pi(u)) = \cos\pi u$.



Slika 2.1: Grafici funkcija $f(u)$ i realni deo funkcije $g_\pi(u)$.

Međutim, nedostatak Furijeove transformacije je to što ne daje odgovor na pitanje u kojem vremenskom trenutku se pojavljuje željena frekvencija. Specijalnim izborom funkcije g možemo da reprezentujemo signal i kroz vreme i kroz frekvenciju. Posmatranjem polazne funkcije kroz delove (*window*) i računanjem Furijeove transformacije pojedinih delova lokalizujemo pojavu frekvencije u vremenu. U tu svrhu, funkciju $g(u)$ u (2.2) modifikujemo operacijama translacije, modulacije i dilatacije.

Definicija 2.2.2. *Za funkciju g definišemo operatore translacije $T_t g$, modulacije $M_\omega g$, i dilatacije $D_a g$:*

$$T_t g(u) = g(u-t),\ t \in \mathbb{R},$$

$$M_\omega g(u) = e^{i\omega u} g(u),\ \omega \in \mathbb{R},$$

$$D_a g(u) = |a|^{-\frac{1}{2}} g\left(\frac{u}{a}\right),\ a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Uz pomoć translacije i modulacije dobijamo modifikaciju Furijeove transformacije i zovemo je kratkotrajna Furijeova transformacija (*Windowed Fourier Transform*):

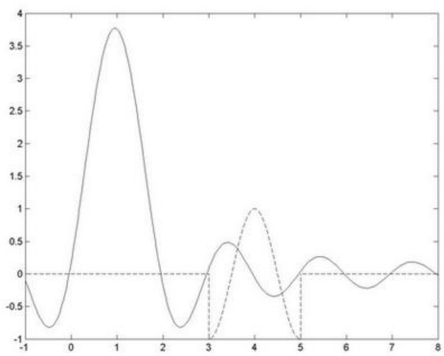
Definicija 2.2.3. *Za funkciju f, kratkotrajnu Furijeovu transformaciju $\hat{f}_g$ u odnosu na prozor g definišemo na sledeći način:*

$$\hat{f}_g(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\overline{g_{(\omega,t)}(u)}\,du,\ \omega, t \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

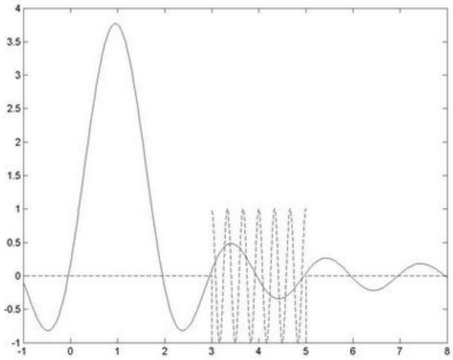
kadgod je dati nesvojstveni integral konvergentan. Pri tome je funkcija $g_{(\omega,t)}$ definisana sa $g_{(\omega,t)}(u) = M_\omega T_t g(u)$.

Funkciju $g(u)$ zovemo prozor funkcija (*window function*) ili prozor. Primetimo da smo na ovaj način dobili funkciju $\hat{f}_g$ koja zavisi i od ω i od t. Posmatrajmo sada slike 2.2 i 2.3. na kojima su dati grafici polaznog signala f i analizirajuće funkcije $M_\omega T_t g(u)$, za $t = 4$ i $\omega = \pi$ odnosno $\omega = 6\pi$, respektivno, gde je $g(u)$ prozor širine 2, dat sa:

$$g(u) = \begin{cases} 1, & -1 \le u \le 1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$



Slika 2.2: Grafici funkcija $f(u)$ i realni deo funkcije $M_\pi T_4 g(u)$.



Slika 2.3: Grafici funkcija $f(u)$ i realni deo funkcije $M_{6\pi}T_4g(u)$.

Kratkotrajna Furijeova transformacija podrazumeva podelu vremenske ose na segmente i primenu Furijeove transformacije na svakom od njih, uz pretpostavku da je na datim segmentima funkcija stacionarna. Analiza na segmentima vrši se pomoću prozor funkcije g i omogućena je lokalizacija u datom momentu t. Na slikama 2.2 i 2.3 prikazano je ponašanje realnog dela analizirajuće funkcije g i vidimo da se ona lokalizuje u momentu t=4.

Nedostatak ovakve transformacije je konstantna širina prozor funkcije, što nije uvek pogodno. Za male širine prozora ostvaruje se dobra vremenska lokalizacija, ali gubimo na frekvencijskoj rezoluciji. Za analiziranje malih detalja signala, povećava se frekvencija analizirajuće funkcije. Nasuprot tome, pri velikoj širini prozora, gubimo na lokaliziciji vremena. Na ovaj način teško se postiže potpuna informacija i o vremenu i o frekvenciji. Ključni problem predstavlja izbor širine prozora. Transformacija koja otklanja ovaj nedostatak je upravo vejvlet transformacija. Sa $L^2(\mathbb{R})$ će se označavati prostor kvadrat integrabilnih funkcija (signala konačne energije), videti sledeće poglavlje.

Definicija 2.2.4. *Neka je data funkcija $g \in L^2(\mathbb{R})$ za koju važi $\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\,du = 0$. Funkciju g zovemo vejvlet(wavelet) a vejvlet transformacija $W_gf(a,t)$ funkcije $f \in L^2(\mathbb{R})$ dobijena pomoću g definiše se na sledeći način:*

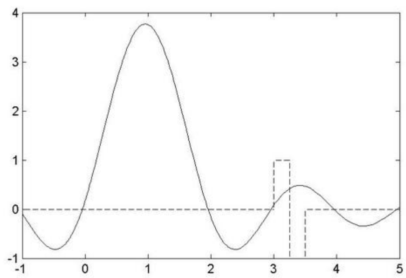
$$W_gf(a,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\overline{T_tD_ag(u)}\,du, \tag{2.4}$$

gde je a faktor skale.

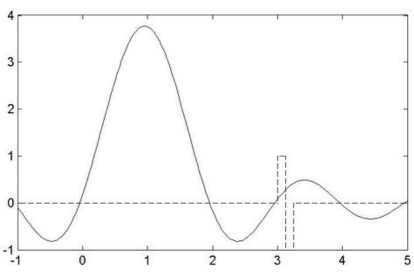
Uslov $\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\ du = 0$ implicira oscilovanje funkcije g. U praksi se nameće i uslov opadanja u beskonačnosti, pa otud naziv talasić, mali talas. Vejvlet transformacija ne uzima u obzir frekvenciju već faktore skale odnosno detalje veličine a. Menjajući skale dobija se kompletna informacija i o vremenu i o frekvenciji. Veličina detalja i frekvencija su obrnuto proporcionalni, kao što smo videli kod kratkotrajne Furijeove transformacije. Kratkotrajnom Furijeovom transformacijom formira se funkcija koja zavisi od vremena t i frekvencije ω i u tom smislu govorili smo o reprezentaciji u faznoj, $t-\omega$ ravni, dok kod vejvlet transformacije dobijena funkcija zavisi od faktora skale a i vremena t, pa tada govorimo o $t-a$ ravni.

Ukoliko uporedimo prethodno opisane transformacije signala f, dolazimo do zaključka o njihovim sličnostima i razlikama. Vidimo da su sve tri transformacije dobijene pomoću polaznog signala i odgovarajuće analizirajuće funkcije, primenom integracije. Furijeova transformacija daje informaciju samo o prisustvu određene frekvencije u signalu, dok kratkotrajna Furijeova i vejvlet transformcija pružaju informaciju i o vremenu i o frekvenciji. Osnovna razlika između poslednje dve pomenute transformacije jeste u prilagodljivosti širine prozora. Stoga je vejvlet transformacija veoma značajna jer u slučaju visokih frekvencija dozvoljava uzan prozor, a kod niskih širi. To svojstvo ilustrovano je na slikama 2.4 i 2.5, gde je kao vejvlet izabran Haarov vejvlet, definisan sa:

$$g(u) = \begin{cases} 1, & 0 \leq u < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} \leq u < 1, \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$



Slika 2.4: Grafici funkcija $f(u)$ i $g(\frac{u-t}{a})$, $a = \frac{1}{2}$, $t = 3$.



Slika 2.5: Grafici funkcija $f(u)$ i $g(\frac{u-t}{a})$, $a = \frac{1}{4}$, $t = 3$.

Vejvlet transformacija omogućava usklađenost veličine prozora odnosno vremenske rezolucije sa skalom svake od frekvencijskih komponenti funkcije. Na slikama 2.4 i 2.5 vidimo da ukoliko nas zanimaju više frekvencije koje karakterišu detalje, analizirajuća funkcija je sabijena i u tome se ogleda prednost vejvlet transformacije.

2.3 Neka svojstva transformacija

Signal kao pojavu koja se kontinualno menja kroz vreme možemo predstaviti funkcijom $f(t)$, gde je t parametar vremena. Neka za signal $f(t)$ važi da ima konačnu energiju odnosno neka važi uslov:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt < \infty.$$

Matematičkim rečnikom, signali konačne energije su kvadrat integrabilne funkcije, elementi Hilbertovog prostra $L^2(\mathbb{R})$. Videli smo na koji način za signal $f(t)$ formiramo njegovu Furijeovu transformaciju $\hat{f}(\omega)$ u izrazu (2.1). Od velikog je značaja invertibilnost ove transformacije koja podrazumeva rekonstrukciju polaznog signala. Dati postupak zovemo inverznom Furijeovom transformacijom. Ipak, pomenuta inverzna transformacija je moguća u slučaju neprekidne funkcije i ona je definisana sa:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{+i\omega t} \, d\omega. \tag{2.5}$$

Relacija (2.5) je ključna prilikom rekonstrukcije signala u slučaju kratkotrajne Furijeove i vejvlet transformacije. Invertibilnost je još jedna njihova zajednička osobina. Pri tome, obično se pretpostavlja da važi

$$f \in \mathbf{L^1}(\mathbb{R}), \hat{f} \in \mathbf{L^1}(\mathbb{R}), \tag{2.6}$$

gde je $L^1(\mathbb{R})$ oznaka prostora integrabilnih funkcija. Kako je $|e^{j\omega t}| = 1$ za $\omega, t \in \mathbb{R}$, uzimajući u obzir (2.6) dobijamo:

$$|f(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{i\omega t} \hat{f}(\omega)| \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)| \, d\omega < \infty. \tag{2.7}$$

Dakle, signal f je kontinualan i ograničen. Formulisaćemo lemu koja će nam biti potrebna za dokaz tvrđenja 2.3.1.

Lema 2.3.1. *Formula izvoda: Neka je f neprekidna i diferencijabilna funkcija takva da su f i f' po delovima neprekidne i apsolutno integrabilne funkcije nad skupom $\mathbb{R}$. Tada važi:*

$$\hat{f'}(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega).$$

Dokaz: Kako je f apsolutno integrabilna funkcija sledi $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Iz izraza:

$$\hat{f'}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-i\omega x}\,dx = \lim_{L,M\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{L} f'(x)e^{-i\omega x}\,dx,$$

parcijalnom integracijom dobijamo:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{L} f'(x)e^{-i\omega x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[f(x)e^{-i\omega x}\Big|_{-M}^{L} - \int_{-M}^{L} f(x)(-i\cdot\omega)e^{-i\omega x}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[f(L)e^{-i\omega L} - f(-M)e^{i\omega M} + i\omega\int_{-M}^{L} f(x)e^{-i\omega x}\,dx\right].$$

Iz $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ sledi $\lim_{L,M\to\infty}[f(L)e^{-i\omega L} - f(-M)e^{i\omega M}] = 0$.
Dakle,

$$\hat{f'}(\omega) = \lim_{L,M\to\infty}\frac{i\omega}{2\pi}\int_{-M}^{L} f(x)e^{-i\omega x}\,dx = i\omega\hat{f}(\omega). \square$$

Takođe, ukoliko su funkcije $f, f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ neprekidno diferencijabilne i $f^{(n)}$ po delovima neprekidna i apsolutno integrabilna nad skupom $\mathbb{R}$, analogno se pokazuje da važi:

$$\widehat{f^{(n)}}(\omega) = (i\omega)^n\hat{f}(\omega).$$

Teorema 2.3.1. *Funkcija f je ograničena i p puta neprekidno diferencijabilna, sa ograničenim izvodima, ukoliko važi:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|(1 + |\omega|^p)\,d\omega < \infty. \tag{2.8}$$

Dokaz:
Pretpostavimo da važi uslov (2.8). Treba pokazati da je:

$$|f^{(k)}(t)| < \infty, \ \textit{za svako } k \le p.$$

U dokazu koristimo formulu izvoda (lema 2.3.1). Kako je Furijeova transformacija k-tog izvoda funkcije $f(t)$ data formulom $\widehat{f^{(k)}(t)} = (i\omega)^k \hat{f}(\omega)$, primenjujući (2.7) dobijamo:

$$|f^{(k)}(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)||\omega|^k \, d\omega.$$

Dalje, iz uslova (2.8), za svako $k \leq p$ sledi da je:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)||\omega|^k \, d\omega \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|(1 + |\omega|^p) \, d\omega < \infty. \square$$

Ponašanje $|\hat{f}(\omega)|$ kada ω raste govori o globalnoj regularnosti (glatkosti) signala f. Brže opadanje $|\hat{f}(\omega)|$ odgovara glatkom signalu. Teorema 2.3.1 daje zaključak da ukoliko bi $\hat{f}$ imala kompaktan nosač, tada bi signal bio beskonačno mnogo puta diferencijabilan. U nastavku navodimo teoremu koja govori kada će važiti (2.5). Dokaz se može naći u [2].

Teorema 2.3.2. *Ako je f po delovima neprekidna i apsolutno integrabilna funkcija nad skupom $\mathbb{R}$, onda za svaku tačku $x \in \mathbb{R}$ u kojoj postoje jednostrani izvodi funkcije f važi:*

$$\frac{f_-(x) + f_+(x)}{2} = \lim_{M \to \infty} \int_{-M}^{M} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} \, d\omega.$$

2.3.1 Princip neodređenosti

Kratkotrajna Furijeova transformacija, za razliku od Furijeove traformacije omogućava lokalizovanje signala u vremensko-frekencijskom domenu. Ipak, ispostavlja se da takva lokalizacija ne pruža podjednako dobre informacije i za frekvenciju i za vreme. Moguće je utvrditi samo frekvencijski opseg koji se javlja u proizvoljnom intervalu vremena. Princip iz kojeg sledi dati zaključak je Hajzenbergov princip neodređenosti (*Heisenberg Uncertainty principle*).

Neka je signal f takav da je $\int_{-\infty}^{+\infty} t|f(t)|^2 = 0$ i $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 = 1$. Uvodimo brojeve $\sigma^2(f)$ i $\sigma^2(\hat{f})$, redom za vremenski i frekvencijski domen signala f, definisane sa

$$\sigma^2(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |f(t)|^2 \, dt, \; \sigma^2(\hat{f}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 \, d\omega.$$

Prvi broj predstavlja meru odstupanja signala od svog središnjeg položaja, a drugi broj je odstupanje $\hat{f}$ od centralne frekvencije. Date veličine su vremenska i frekvencijska varijansa signala.

Teorema 2.3.3. *Neka je dat signal $f \in \mathbf{L^2}(\mathbb{C})$ takav da važi:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t|f(t)|^2\,dt = 0,\ 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} \omega|\hat{f}(\omega)|^2\,d\omega = 0,$$

i neka su vremenska i frekvencijska varijansa signala f dobro definisane, odnosno integrali koji ih definišu su konačni. Tada je:

$$\sigma^2(f)\sigma^2(\hat{f}) \geq \frac{1}{4}.$$

Dokaz:
Dokaz ove teoreme izvodimo prema [2]. Posmatrajmo sledeći integral koji zavisi od $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda t f(t) - f^{'}(t)|^2\,dt \geq 0$$

Kvadriranjem dobijamo:

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda t f(t) - f^{'}(t)|^2\,dt = \lambda^2\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^2|f(t)|^2\,dt$$

$$+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} t(f(t)\overline{f^{'}}(t) + f^{'}(t)\overline{f}(t))\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} |f^{'}(t)|^2\,dt.$$

Dalje, kako je $\sigma^2(f) < \infty$, važiće da je $\lim\limits_{t\to\pm\infty} t|f(t)|^2 = 0$. Primenom formule za izvod proizvoda dobijamo:

$$\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} t(f(t)\overline{f^{'}}(t) + f^{'}(t)\overline{f}(t))\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t(f(t)\overline{f}(t))^{'}\,dt$$

$$= t|f(t)|^2\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,dt = -1.$$

Iz osobina Furijeove transformacije (transformacija izvoda funkcije) dobijamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f^{'}(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2|\hat{f}(\omega)|^2\,d\omega = \sigma^2(\hat{f}) \geq 0$$

Vidimo, $I(\lambda)$ je kvadratna funkcija i $\lambda^2\sigma^2(f) - \lambda + \sigma^2(\hat{f}) \geq 0$. To znači da njena diskriminanta mora biti nula ili negativna. Odatle, $\sigma^2(f)\sigma^2(\hat{f}) \geq \frac{1}{4}$. $\square$

2.3.2 Kompaktan nosač

Svojstvo kompaktnog nosača transformacije signala je poželjno za ostvarenje lokalnih rezultata. Međutim, ispostavlja se da Furijeova transformacija poseduje to svojstvo samo ukoliko je polazni signal beskonačnog trajanja, što ne odgovara realnosti. Drugim rečima, signal f i njegova Furijeova transformacija ne mogu istovremeno da poseduju svojstvo kompaktnog nosača osim kada je $f \equiv 0$. Stoga se i primenjuje analiza vejvletima koja otklanja taj nedostatak. U nastavku je teorema na osnovu koje sledi prethodni zaključak.

Teorema 2.3.4. *Neka je $f(t)$ signal za koji važi $f \not\equiv 0$ i koji ima kompaktan nosač. Tada $\hat{f}$ ne može imati kompaktan nosač. Takođe, ako $\hat{f} \not\equiv 0$ ima kompaktan nosač, onda $f(t)$ ne može da ima kompaktan nosač.*

Dokaz:
Dokaz izvodimo prema [3] za prvi deo tvrđenja. Drugi deo se izvodi primenom Furijeove transformacije. Neka je $f \not\equiv 0$ i ima kompaktan nosač. Pretpostavimo suprotno, tj da $\hat{f}$ ima kompaktan nosač na $[-b, b]$. Tada važi da postoji inverzna transformacija za f data sa:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{b} \hat{f}(\omega) e^{+i\omega t} \, d\omega. \tag{2.9}$$

Za $f = 0$, $t \in [c, d]$, primenom n-tog izvoda u tački $t_0 = (c + d)/2$ dobijamo

$$f^{(n)}(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{b} \hat{f}(\omega)(i\omega)^n e^{+i\omega t_0} \, d\omega = 0$$

Jednačinu (2.9) možemo drugačije zapisati kao

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{b} \hat{f}(\omega) e^{i\omega(t-t_0)} e^{+i\omega t_0} \, d\omega,$$

a zatim razviti izraz $e^{+i\omega(t-t_0)}$ u Maklorenov red za sve $t \in \mathbb{R}$. Tada dobijamo:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i(t-t_0))^n}{n!} \int_{-b}^{b} \hat{f}(\omega) \omega^n e^{+i\omega t_0} \, d\omega = 0, \; t \in \mathbb{R},$$

što je kontradikcija sa pretpostavkom $f \not\equiv 0$. $\square$

2.3.3 Kratkotrajna Furijeova transformacija

Neka je g simetričan prozor , odnosno parna funkcija: $g(u) = g(-u)$. Prilikom definisanja kratkotrajne Furijeove transformacije kao u (2.3) vršimo pomeranje za t i modulaciju frekvencijom ω. Množenje prozor funkcijom omogućava lokalizaciju signala u okolini $u = t$. Rezultat je reprezentacija u (t, ω) ravni. Definisaćemo parametre lokalizacije za signal f sa konačnom energijom, $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt < \infty$.

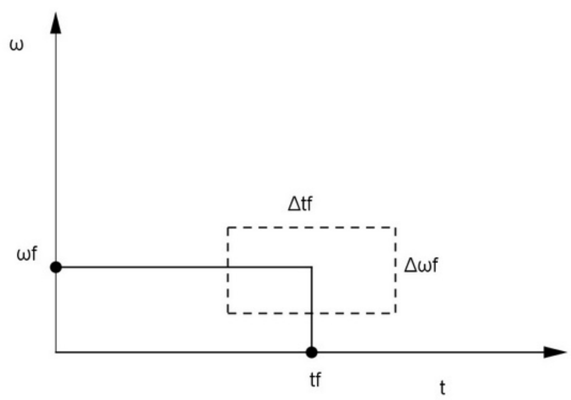
$$t_f = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{+\infty} t|f(t)|^2\, dt, \tag{2.10}$$

$$\omega_f = \frac{1}{2\pi E} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega|\hat{f}(t)|^2\, d\omega, \tag{2.11}$$

$$\triangle\ t_f = \sqrt{\frac{1}{E} \int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_f)^2 |f(t)|^2\, dt}, \tag{2.12}$$

$$\triangle\ \omega_f = \sqrt{\frac{1}{2\pi E} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \omega_f)^2 |\hat{f}(\omega)|^2\, d\omega}. \tag{2.13}$$

Izrazi (2.10) i (2.11) govore gde je signal lokalizovan u vremenu, odnosno frekvenciji respektivno dok izrazi (2.12) i (2.13) govore o širini prostiranja oko vrednosti t_f i ω_f. Fazna ravan predstavljena je na slici 2.6.



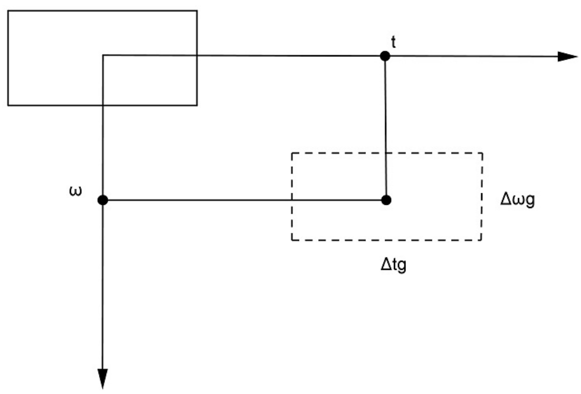
Slika 2.6: Fazna ravan

Ako za parametre lokalizacije prozora g izaberemo $t_g = 0, \omega_g = 0$, onda funkcija $g_{(\omega,t)} = M_\omega T_t g$ koja definiše Kratkotrajnu Furijeovu transformaciju (2.3) ima parametre lokalizacije:

$$t_{M_\omega T_t g} = t,\ \omega_{M_\omega T_t g} = \omega$$

$$\triangle\ t_{M_\omega T_t g} = \triangle\ t_g, \triangle\ \omega_{M_\omega T_t g} = \triangle\ \omega_g.$$

Na slici 2.7 predstavljeni su domeni funkcija g i $M_\omega T_t g$ u faznoj ravni.Vidimo da je pravougaona oblast površine $\triangle\ \omega_g\ \triangle\ t_g$ samo promenila položaj u faznoj ravni, ali ne i dimenzije, odnosno rezolucija je svuda jednaka.



Slika 2.7: Fazna ravan

Posledica principa neodređenosti je da površina pravougaonika, $\triangle\ \omega_g\ \triangle\ t_g$, ne može da ima proizvoljno malu vrednost. To znači da, iako kratkotrajna Furijeova transformacija daje vremensko-frekvencijsku reperezentaciju signala, ona ne može da bude istovremeno precizna za obe veličine. Ipak, postoji funkcija koja je optimalan izbor za prozor i zovemo je Gausova funkcija. Biranjem ovakve funkcije za prozor g dostiže se donja granica za površinu pravougaonika. Gausova funkcija definisana je sa:

$$g = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Za kontinualni signal f koji ima konačnu energiju, moguće je izvršiti inverzni postupak i dobiti polazni signal iz njegove kratkotrajne Furijeove transformacije. U nastavku je teorema koja daje formulu rekonstrukcije. Dokaz se može naći u [1].

Teorema 2.3.5. *Ako je $f \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ tada važi:*

$$f(t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_g(\omega,\tau)g(t-\tau)e^{i\omega t}\,d\omega\,d\tau}{2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|g(u)|^2\,du},$$

gde je jednakost u smislu normi prostora $L^2(\mathbb{R})$.

2.3.4 Vejvlet transformacija

Definicija 2.3.1. *Vejvlet je svaka funkcija $\psi \in L^2(\mathbb{R})\backslash\{0\}$ za koju važi:*

$$c_\psi = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\,d\omega < \infty. \tag{2.14}$$

Kontinualna vejvlet transformacija definisana je sa:

$$W_\psi f(a,t) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}}\frac{1}{\sqrt{|a|}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\psi}\left(\frac{u-t}{a}\right)f(u)\,du, za\, a \neq 0, t \in \mathbb{R}. \tag{2.15}$$

Broj a zovemo faktorom skale i on je obrnuto proporcionalan frekvenciji.

Da bi uslov (2.14) bio zadovoljen, dovoljno je da ψ ima srednju vrednost nula, odnosno da važi :

$$\hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\,dt = 0 \tag{2.16}$$

Svojstvo (2.16) govori o oscilatornoj prirodni funkcije ψ. Poželjno je da su vejvleti funkcije sa kompaktnim nosačem. Međutim, na osnovu definicije (2.3.1) funkcija ψ može biti vejvlet kada se uslov kompaktnog nosača zameni uslovom da funkcija $\psi(t)$ opada brzo ka nuli kada, $|t| \to \infty$. To sledi iz činjenice da ψ ima konačnu energiju. Pomenuta svojstva odgovaraju pojmu "mali talas" jer ukazuju da je to funkcija koja osciluje oko vremenske ose na malom intervalu, a izvan njega brzo opada ka nuli. Dakle, počevši od funkcije ψ sa navedenim osobinama, skaliranjem faktorom a i pomeranjem za t dobijamo familiju vejvleta.

Kao i kod kratkotrajne Furijeove transformacije, polazni signal može se rekonstruisati iz svoje vejvlet transformacije. U nastavku je teorema o rekonstrukciji čiji dokaz se može naći u [4].

Teorema 2.3.6. *Neka je ψ funkcija sa konačnom energijom koja zadovoljava uslov (2.14). Tada za svaki signal sa konačnom energijom f važi:*

$$f(t) = \frac{2\pi}{\sqrt{c_\psi}} \int_{-\infty}^{+\infty} W_\psi f(a,u) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-u}{a}\right) \frac{duda}{a^2},$$

gde je jednakost u smislu normi prostora $L^2(\mathbb{R})$.

Svojstvo koje je poželjno postići prilikom konstrukcije vejvleta je da on ima što više momenata jednakih nuli. Funkcija ψ ima M momenata jednakih nuli ako važi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) t^m \, dt = 0, \; m = 0, \ldots, M-1. \tag{2.17}$$

Signal se sastoji iz delova koji su glatki, i delova na kojima se dešavaju određene promene, prekidi. Ako signal može da se predstavi po delovima glatkim funkcijama, tada će vejvlet transformacija na glatkim delovima imati vrednost nula ukoliko ψ ima dovoljno nula momenata. To omogućava da se detektuju i lokalizuju promene. Pomoću M puta diferencijabilne funkcije $\phi(t)$ kontruišemo vejvlet $\psi(t)$ na sledeći način:

$$\psi(t) = \frac{d^M \phi}{dt^M}.$$

U nastavku dajemo primere vejvleta konstruisanih na taj način za $M = 1$ i $M = 2$, za koje važi (2.17).

Primer 1. *(Haarov vejvlet za $M = 1$) Za funkciju ϕ_H definišemo Haarov vejvlet ψ_H:*

$$\phi_H(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < \frac{1}{2} \\ 1-t, & \frac{1}{2} \le t < 1 \\ 0, & inače \end{cases}$$

$$\psi_H(t) \begin{cases} 1, & 0 \le t < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \le t < 1 \\ 0, & inače \end{cases}$$

Primer 2. *(Meksički šešir[1], $M = 2$) Za funkciju ϕ_{MH} definišemo vejvlet ψ_{MH}:*

$$\phi_{MH}(t) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\psi_{MH}(t) = \frac{d^2 \phi_{MH}}{dt^2}(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-\frac{1}{4}} (1-t^2) e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

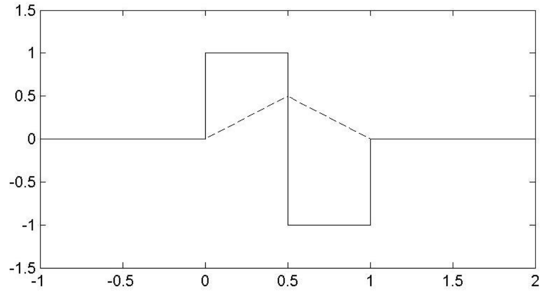
[1]Engl. The Mexican-hat-wavelet

Kako je $M = 2$, za ψ_{MH} važi da ima prvi i drugi momenat jednak nuli.

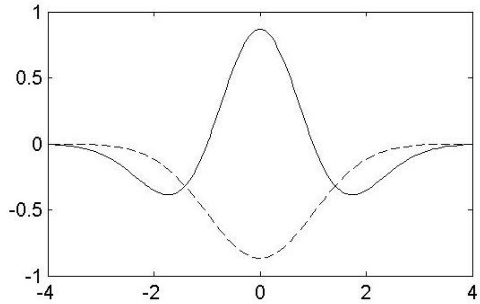
Primer 3. *(Morletov vejvlet)*

$$\psi_M = \pi^{-\frac{1}{4}}(e^{-i\alpha t} - e^{-\frac{\alpha^2}{2}})e^{-\frac{t^2}{2}},\ \alpha = \pi\sqrt{\frac{2}{\ln 2}}$$

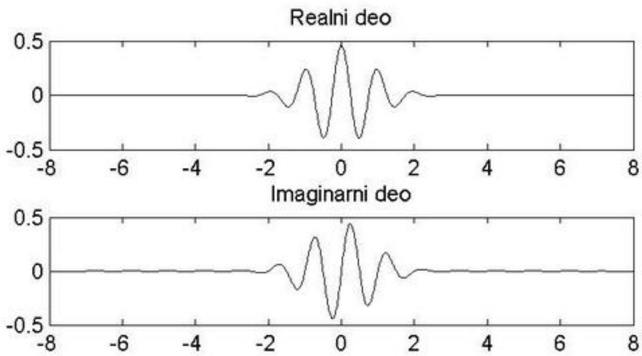
Na slikama 2.8, 2.9, 2.10 prikazani su redom dati vejvleti i funkcije ϕ.



Slika 2.8: Funkcija ϕ_H (isprekidana linija) i funkcija ψ_H (puna linija)



Slika 2.9: Funkcija ϕ_{MH} (isprekidana linija) i funkcija ψ_{MH} (puna linija)



Slika 2.10: Realni i imaginarni deo Morletovog vejvleta ψ_M

3

Diskretna malotalasna (vejvlet) transformacija

U prethodnom poglavlju objasnili smo pojam vejvlet transformacije i način na koji se ona računa kada je zadat signal $f(t)$ koji je kompleksna funkcija vremenske promenljive t. Ipak, transformacija zadata sa (2.15) nosi sa sobom ograničenja u smislu izračunavanja, s obzirom da numerički algoritmi i rad na računarima zahtevaju diskretne podatke. Pored toga, kontinualna vejvlet transformacija ima izraženu redudantnost koja ukazuje na izračunavanje većeg broja koeficijenata od potrebnog. U ovom poglavlju posmatraćemo uzorkovani signal i prikazati algoritam za računanje diskretne vejvlet transformacije, kao i rekonstrukciju polazog signala. Upoznajemo se sa pojmom funkcije skaliranja i digitalnog filtera. U ovom poglavlju korišćena je literatura [1],[4],[5].

3.1 Diskretizacija signala

Neka je signal zadat preko svojih N uzorkovanih vrednosti sa korakom uzorkovanja T_s:

$$f = \{f_k\}_{k=0}^{N-1} = \{f(kT_s)\}_{k=0}^{N-1}.$$

Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_M$ faktori skaliranja. Primenom brzog algoritma za računanje kontinualne vejvlet transformcije[1], dobijamo koeficijente transformacije

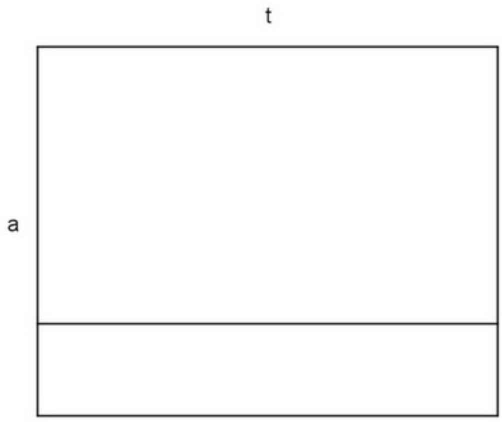
$$W_\psi f(a_i, kT_s) \;\; za \;\; k = 0, \ldots, N-1, \; i = 1, \ldots, M.$$

[1] Engl. Fast CWT-algorithm

Detaljan opis algoritma može se naći u [1]. Vidimo da je polazni signal predstavljen sa N vrednosti, a kao rezultat transformacije, dobijeno je $M \times N$ koeficijenata, što je mnogo više od polaznog broja podataka. Iako to znači da primenom brzog algoritma kontinualne transformacije ne gubimo nijednu informaciju o signalu, datih $M \times N$ vrednosti nam više služe za analizu signala i u tom smislu su korisne. Ipak, kada je u pitanju prenos signala ili njegovo čuvanje na računarima, od praktičnog je značaja redukovati broj vrednosti i signal predstaviti sa što manje podataka iz kojih se može rekonstruisati. Ovaj problem javlja se kod kompresije signala. Ideja je da se od polaznog signala koji se sastoji od N vrednosti dobije transformisani signal sa istim brojem vrednosti koje su dovoljne za rekonstrukciju, a pritom zauzimaju što manje memorijskog prostora.

Kontinualnom vejvlet transformacijom smo vršili translaciju i dilataciju faktorom a neprekidno i tako pokrili ceo signal. To znači da nam je potreban beskonačan broj operacija translacije i dilatacije, što nije praktično. Kao rešenje ovog problema koristi se diskretizacija $t - a$ ravni i takav izbor vejvleta ψ da se dobije N umesto $M \times N$ vrednosti $W_\psi f(a_i, kT_s)$ dovoljnih za rekonstrukciju polaznog signala zadatog vektorom sa N vrednosti.

Vrednosti dobijene brzim algoritmom mogu se predstaviti matricom formata $M \times N$. Broj vrsta te matrice odgovara broju izabranih faktora skale. Ispostavlja se da je za rekonstrukciju polaznog signala potrebno samo N vrednosti koje odgovaraju dobro odabranom fakoru skale, odnosno samo jedan red u matrici, što je ilustrovano na slici 3.1.



Slika 3.1: Matrica transformacije

3.1.1 Diskretni vejvleti

Diskretni vejvleti su po delovima neprekidne funkcije koje skaliramo i pomeramo u konačnom broju koraka, a za to je neophodna diskretizacija $t - a$ ravni. Dati su izrazom:

$$\psi_{m,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}}\psi\left(\frac{t - kt_0a_0^m}{a_0^m}\right), \ m, k \in \mathbb{Z}, \ \ a_0 > 1, \tag{3.1}$$

odnosno

$$\psi_{m,k}(t) = a_0^{-\frac{m}{2}}\psi(a_0^{-m}t - kt_0). \tag{3.2}$$

Najčešće se uzima da je $a_0 = 2, \ t_0 = 1$. Dakle, translacijom i skaliranjem (dilatacijom) osnovnog vejvleta ψ na diskretizovanoj mreži $t - a$ dobijamo diskretne vejvlete:

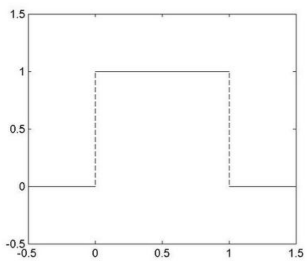
$$\psi_{m,k}(t) = 2^{-\frac{m}{2}}\psi(2^{-m}t - k), \tag{3.3}$$

$$\psi_{m,k}(t) = 0, \ t \notin [2^m k, 2^m(k+1)].$$

Faktor skaliranja a u svakom koraku ima dvostruko veću vrednost nego u prethodnom, s obzirom da je a oblika 2^m, što znači da se vejvlet širi sa povećanjem m, a rezolucija smanjuje. Kako je $m \in \mathbb{Z}$ faktor a može da ide i do beskonačnosti sa povećanjem m, pa se ispostavlja da je i dalje potreban neograničen broj operacija za računanje transformacije vejvletima. Taj problem rešava se uvođenjem funkcije skaliranja.

3.2 Haarova funkcija skaliranja

Funkcija koja ima veliku ulogu u formiranju vektorskih prostora na čije komponente možemo razložiti signal, primenom malih talasa je Haarova funkcija skaliranja. Njen grafik je dat na slici 3.2.



Slika 3.2: Grafik funkcije $\phi_H(t)$

$\phi_H(t)$ je Haarova funkcija skaliranja definisana sa:

$$\phi_H(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{3.4}$$

Vidimo da ϕ_H ima nosač na intervalu [0,1]. Translacijom tog intervala, na kojem je različita od nule, formiramo novu familiju funkcija oblika $\phi_H(t-k)$. Pomoću njih gradimo vektorski prostor $V_0 \subset L^2(\mathbb{R})$ koji se sastoji od funkcija oblika:

$$\sum_{k\in A} a_k \phi_H(t-k), \; a_k \in \mathbb{R}, \; A \subset \mathbb{Z}, \; A \not\equiv \mathbb{Z}.$$

Kako je funkcija ϕ_H ustvari karakteristična funkcija jediničnog intervala sa prekidima u 0 i 1, tada funkcije $\phi_H(t-k)$ imaju prekide u k i $k+1$. Odatle sledi da je V_0 prostor po delovima neprekidnih funkcija sa kompaktnim nosačem, čija veličina zavisi od izbora skupa A. Pretpostavljamo da je A konačan skup, $|A| < \aleph_0$. Sledeći prostor dobijamo smanjivanjem širine intervala na kojem je funkcija različita od nule, prvo na $\frac{1}{2}$ i tako redom, vršimo "profinjenje". Dakle, za $m \in \mathbb{N}_0$ formiramo prostore V_m koje čine funkcije oblika:

$$g_m = \sum_{k\in A} a_k \phi_H(2^m t - k).$$

U nastavku je teorema koja govori o odnosu prethodno definisanih vektorskih prostora.

Teorema 3.2.1. *Za navedene vektorske prostore važi:*

$$V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{m-1} \subset V_m \subset \ldots$$

Dokaz:
Vidimo da g_m možemo predstaviti preko g_{m-1}, s obzirom da se pomoću dva bloka dužine $\frac{1}{2^m}$ može formirati blok širine $\frac{1}{2^{m-1}}$, dok obrnuto ne važi. Dokaz se formalno izvodi indukcijom.□

Teorema 3.2.2. *Skup* $\{2^{\frac{m}{2}}\phi_H(2^m t-k)\}$ *je ortonormirana baza prostora* V_m.

Dokaz:
Skup V_m je konstruisan kao linearna kombinacija funkcija $\phi_H(2^m t-k)$, te se iz same konstrukcije prostora vidi da je dati skup njegova baza. Pokazujemo ortonormiranost, imajući u vidu da su date funkcije iz prostora $L^2(\mathbb{R})$. Tada imamo:

$$\begin{aligned}
\left\|2^{\frac{m}{2}}\phi_H(2^m t-k)\right\|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2^{\frac{m}{2}}\phi_H(2^m t-k)2^{\frac{m}{2}}\phi_H(2^m t-k)\,dt\\
&= \int_{k}^{k+\frac{1}{2^m}} 2^m(\phi_H(2^m t-k))^2\,dt\\
&= \int_{k}^{k+\frac{1}{2^m}} 2^m\,dt = 1.
\end{aligned}$$

Takođe za $k \neq l$ važi:

$$(2^{\frac{m}{2}}\phi_H(2^m t-k), 2^{\frac{m}{2}}\phi_H(2^m t-l)) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2^{\frac{m}{2}}\phi_H(2^m t-k)2^{\frac{m}{2}}\phi_H(2^m t-l)\,dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{k}^{k+\frac{1}{2^m}} 2^m(\phi_H(2^m t-k))(\phi_H(2^m t-l))\,dt\\
&+ \int_{l}^{l+\frac{1}{2^m}} 2^{\frac{m}{2}}(\phi_H(2^m t-k))2^{\frac{m}{2}}(\phi_H(2^m t-l))\,dt\\
&= \int_{k}^{k+\frac{1}{2^m}} 1\cdot 0\,dt + \int_{l}^{l+\frac{1}{2^m}} 0\cdot 1\,dt = 0. \;\square
\end{aligned}$$

Prethodna teorema je od velikog značaja za razlaganje signala na komponente iz datih prostora. Kako važi stroga inkluzija datih prostra, ideja je da prostor V_m prikažemo kao direktnu sumu potprostora V_{m-1} i njegovog ortogonalnog komplementa W_{m-1}.

Teorema 3.2.3. *Neka su dati prostori V_m, $m \in \mathbb{N}$. Tada važi:*

$$V_m = V_{m-1} \oplus W_{m-1},$$

gde je W_{m-1} sačinjen od funkcija oblika:

$$\sum_{k\in A} a_k\psi_H(2^{m-1}t-k),\ A \subset \mathbb{Z}$$

$$\textit{gde je } \psi_H(t) = \phi_H(2t) - \phi_H(2t-1).$$

Funkciju ψ_H zovemo Haarov mali talas.

Dokaz:
Neka je $m = 1$, odnosno polazimo od najjedostavnijeg slučaja. Tada:

$$V_1 = V_0 \oplus W_0,$$

pri čemu je V_0 skup svih mogućih linearnih kombinacija funkcija iz skupa $\{\phi_H(t-k),\ k \in \mathbb{Z}\}$, a W_0 njegov ortogonalni komplement u odnosu na V_1. W_0 je potprostor prostora V_1, pa je važno odrediti kako izgleda funkcija ψ koja ga generiše. S obziorom da $\psi \in V_1$ i W_0 je ortogonalni komplement V_0, odnosno $\psi \perp V_0$, tada za ψ moraju da važe uslovi:

1. $\psi(t) = \sum_A a_k \phi_H(2t-k),\ a_k \in \mathbb{R},\ A \subset \mathbb{Z},\ |A| < \aleph_0$,
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\phi_H(t-k)\ dt = 0,\ \forall k \in \mathbb{Z}$.

Uslov (2) za $k = 0$ ekvivalentan je sa uslovom $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\phi_H(t)\ dt = 0$, odnosno $\int_0^1 \psi(t)\ dt = 0$. Jedna od funkcija koja zadovoljava takve uslove je

$$\psi_H = \phi_H(2t) - \phi_H(2t-1). \tag{3.5}$$

Indeks H u ovom slučaju dodat je jer funkcija formirana na ovaj način predstavlja Haarov vejvlet (videti primer 1 u poglavlju 2.3). Jasno je da je $\psi_H \in V_1$, a uslov (2) je takođe zadovoljen:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_H(t)\phi_H(t)\ dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} \psi_H(2t)\phi_H(t)\ dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 \psi_H(2t-1)\phi_H(t)\ dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} 1\ dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 1\ dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dakle, funkcija ψ_H generiše prostor funkcija

$$G = \big\{ g = \sum_{k \in A} a_k \psi_H(t-k) \big|\ A \subset \mathbb{Z},\ |A| < \aleph_0 \big\}.$$

Sve funkcije iz prostora G su u W_0 zbog načina na koji ih formiramo i osobina funkcije ψ_H, tj važi $G \subseteq W_0$. Ostaje da pokažemo $W_0 \subseteq G$, odnosno da svaka funkcija iz W_0 pripada i prostoru G, pa će tada važiti $G \equiv W_0$.

Neka je $g \in W_0$. Kako je $W_0 \subset V_1$ važi da je g oblika

$$g(t) = \sum_{k \in A} a_k \phi_H(2t-k).$$

Kako je $W_0 \perp V_0$ tada je $g \perp \phi_H(t-k),\ \forall k \in \mathbb{Z}$. Specijalno, za $k = 0$ važi:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\phi_H(t)\ dt &= 0, \text{ odnosno} \\
\int_0^1 g(t)\ dt &= 0.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned}\int_0^1 (a_0\phi_H(2t) + a_1\phi_H(2t-1))\;dt &= 0,\ \text{odnosno}\\ \int_0^{\frac{1}{2}} a_0\;dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 a_1\;dt &= 0.\end{aligned}$$

Odatle sledi da je

$$a_0 + a_1 = 0.$$

Slično, za svaki indeks i, važi $a_i + a_{i+1} = 0$, pa su nam dovoljni koeficijenti sa parnim indeksima da bismo zapisali funkciju g:

$$\begin{aligned}g(t) &= \sum_k a_{2k}(\phi_H(2t-2k) - \phi_H(2t-(2k+1)))\\ &= \sum_k a_{2k}(\phi_H(2(t-k)) - \phi_H(2(t-k)-1)).\end{aligned}$$

Time smo dobili da je $g(t) = \psi_H(t-k)$ što znači da $g \in G$, odnosno

$$W_0 = \Big\{\sum_{k\in A} a_k\psi_H(t-k)\Big|\ A \subset \mathbb{Z},\ |A| < \aleph_0\Big\}$$

Razlaganje se analogno pokazuje i za V_m.$\Box$

Ukoliko sukcesivno primenimo razlagnje iz prethodne teoreme prvo na prostor V_m, zatim na V_{m-1} i tako redom sve do V_1, dobijamo:

$$\begin{aligned}V_m &= V_{m-1} \oplus W_{m-1}\\ &= V_{m-2} \oplus W_{m-2} \oplus W_{m-1}\\ &\dots\\ &= V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_{m-2} \oplus W_{m-1}.\end{aligned}$$

Ovaj rezultat nam omogućava da svaku funkciju $g_m \in V_m$ predstavimo na sledeći način:

$$g_m = v_0 + w_0 + w_1 + \cdots + w_{m-2} + w_{m-1},$$

$$v_0 \in V_0,\ w_l \in W_l,\ l = 0, 1, \dots, m-1.$$

To se može uopštiti za $m \to \infty$ pa važi tvrđenje:

Teorema 3.2.4. *Neka je $g \in L^2(\mathbb{R})$ kompaktnog nosača. Tada se ona na jedinstven način predstavlja kao:*

$$v_0 + \sum_{m=0}^{\infty} w_m,\ v_0 \in V_0,\ w_m \in W_m.$$

S obzirom da funkcije iz $L^2(\mathbb{R})$ koje imaju kompaktan nosač čine gust podskup u $L^2(\mathbb{R})$, može se pokazati proširenje teoreme 3.2.4 na proizvoljne funkcije iz $L^2(\mathbb{R})$.

3.3 Diskretna i kontinualna transformacija

U ovom poglavlju se dovodi u vezu diskretan signal $f = \{f_k\}_{k=0}^{N-1}$ sa odgovarajućom kontinualnom vejvlet transformacijom.

Posmatrajmo uzorkovani signal $f = \{f_k\}_{k=0}^{N-1}$. Dalje, neka je data funkcija $\phi_H(t)$ kao u (3.4). Translacijom date funkcije $\phi_H(t)$ za k pomeramo intervale na kojima je ona različita od nule i dobijamo funkcije $\phi_H(t-k)$ pomoću kojih gradimo signal $f(t)$:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \phi_H(t-k). \tag{3.6}$$

Kako su nenula delovi ovakvih funkcija širine jedan i konstantni, tada je i dobijeni signal po delovima konstantan i to na intervalima dužine jedan. Nastavljamo dalje sa konstruisanjem "grublje" verzije signala f^1 koji će ponovo biti konstantan po delovima intervala, ali sada su ti delovi dužine 2 jer nam je u cilju da dobijeni signal f^1 pokrije isti interval kao i polazni f.

$$f^1(t) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_k^1 \phi_H\left(\frac{t}{2} - k\right). \tag{3.7}$$

Vrednosti f_k^1 dobijamo od polaznog niza f_k tako što računamo aritmetičke sredine susednih članova i dobijeni niz je dužine $\frac{N}{2}$. U nastavku sledi primer kao ilustarcija prethodno opisanog postupka.

Primer 4. *Neka je dat uzorkovani signal $\{f_k\}_{k=0}^{7} = \{8, 4, 6, 8, 9, 7, 2, 4\}$. Niz $f^1 = \{f_k\}_{k=0}^{3}$ računamo kao:*

$$f^1 = \left\{\frac{f_0 + f_1}{2}, \frac{f_2 + f_3}{2}, \frac{f_4 + f_5}{2}, \frac{f_6 + f_7}{2}\right\} = \{6, 7, 8, 3\}.$$

Definišemo dalje razliku $d^1(t)$ polaznog signala $f(t)$ i $f^1(t)$:

$$d^1(t) = f(t) - f^1(t). \tag{3.8}$$

Signal d^1 možemo shvatiti kao nosioca detalja koje pamtimo i koji su potrebni da se iz grublje verzije rekonstruiše polazni signal. Vratimo se na primer 4, kako bismo pojasnili na koji način računamo $d^1(t)$. Prvo računamo niz d^1, tako što posmatramo svaki drugi član niza f i od njega oduzimamo odgovarajuće elemente niza f^1.

$$d^1 = \{d^1_k\}_{k=0}^3 = \{f_0 - f^1_0, f_2 - f^1_1, f_4 - f^1_2, f_6 - f^1_3\},$$

$$d^1 = \{8-6, 6-7, 9-8, 2-3\} = \{2, -1, 1, -1\}$$

Primetimo da smo niz d^1 mogli dobiti i samo preko vrednosi iz niza f, s obzirom da je f^1 definisano preko f:

$$\{d^1_k\}_{k=0}^3 = \left\{\frac{f_0 - f_1}{2}, \frac{f_2 - f_3}{2}, \frac{f_4 - f_5}{2}, \frac{f_6 - f_7}{2}\right\}.$$

Na osnovu niza d^1 definišemo razliku $d^1(t)$:

$$d^1(t) = \sum_{k=0}^{3} d^1_k \psi_H\left(\frac{t}{2} - k\right). \tag{3.9}$$

Na slici (3.3) u levoj koloni prikazani su nizovi f, f^1, d^1, a u desnoj funkcije $f(t)$, $f^1(t)$, $d^1(t)$, redom.

S obzirom na formu Haarovog vejvleta i signala $d^1(t)$, možemo razliku $d^1(t)$ predstaviti na sledeći način

$$d^1(t) = 2\psi_H\left(\frac{t}{2}\right) - \psi_H\left(\frac{t}{2} - 1\right) + \psi_H\left(\frac{t}{2} - 2\right) - \psi_H\left(\frac{t}{2} - 3\right)$$

što odgovara tome kako smo definisali $d^1(t)$. Računanje vejvlet transformacije definisane sa (2.15) vršili smo do sad izračunavanjem integrala za razne vrednosti parametara a i t. Ipak sa pojavom ideje o razlaganju signala na njegovu aproksimaciju i detalje to je znatno olakšano. Veza prethodno prikazane diskretizacije, odnosno razlaganja signala na grublju verziju i detalje, i kontinualne vejvlet transformacije definisane u (2.15), data je sledećom formulom:

$$W_{\psi_H} f(2, 2k) = \sqrt{\frac{2}{c_{\psi_H}}} d^1_k, \; k = 0 \ldots \frac{N}{2} - 1. \tag{3.10}$$

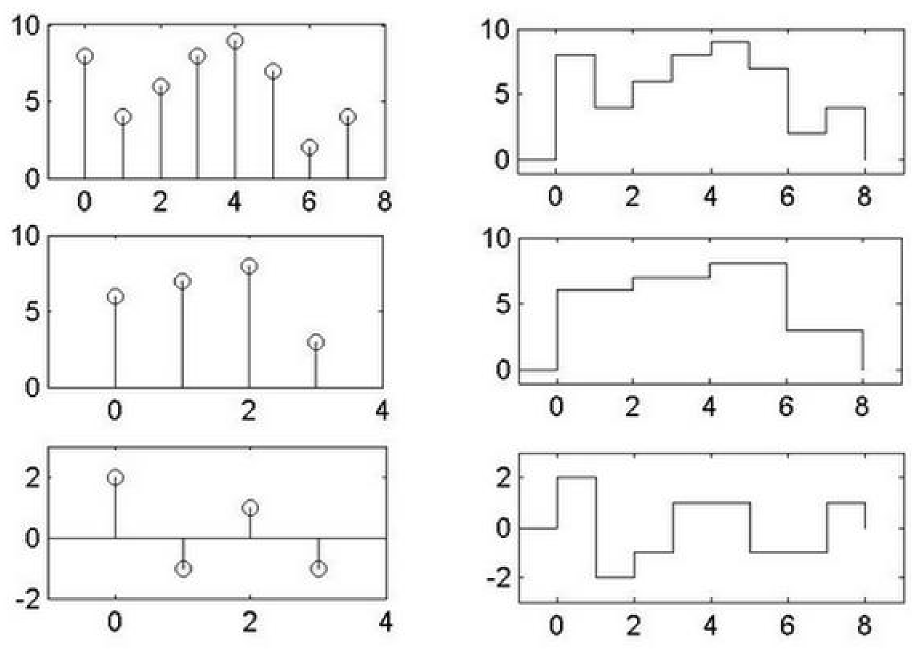
Vidimo da je umesto računanja integrala neophodno samo raspolagati podacima o nizu d^1.

Dakle, polazeći od uzorkovanog signala f, pomoću Haarovog vejvleta i njegove funkcije skaliranja računamo grublju verziju, odnsno niz f^1 i niz detalja d^1. Time smo dobili neophodne podatke za računanje diskretne vejvlet transformacije (3.10) za $a = 2,\ t = 2k$.

Sledeći korak je konstruisanje kontinualnih verzija $f(t),\ f^1(t)$ i $d^1(t)$, pri čemu je relacija (3.8) ključna za rekonstrukciju signala jer važi:

$$f(t) = f^1(t) + d^1(t).$$

Ovaj algoritam je izveden za jedan korak. Svakako, data procedura može da se primeni i u sledećem koraku, odnosno da se umesto sa $f(t)$ počne sa $f^1(t)$. Primenom opisanog algoritma izvršili smo računanje kontinualne vejvlet transformacije preko diskretne vejvlet transformacije, odnosno u pojedinim tačkama $t - a$ ravni. Ipak, znatan nedostatak ovakve diskretizacije je ograničavanje na faktor skale oblika $a = 2$ i translacije $t = 2k$.



Slika 3.3: Nizovi i funkcije

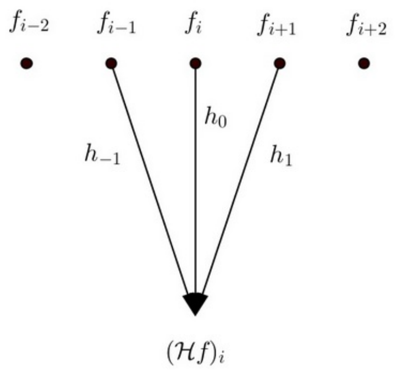
3.4 Primena filtera

Filtri se mogu posmatrati kao operatori pomoću kojih od polaznog signala, dobijamo novi signal. Služe za izdvajanje ili zanemarivanje željenih frekvencijskih komponenti signala. U ovom radu ograničili smo se na pojam digitalnog filtera koji je određen svojim koeficijenatima h_i. Cilj ovog poglavlja je da se pokaže da se veza nizova f f^1 i d^1 iz prethodnog poglavlja može opisati uz pomoć filtera.

Za diskretno zadat signal $f = \{f_k\}$ digitalni filter $\mathcal{H}$ konstruiše novi signal $\mathcal{H}f$:

$$(\mathcal{H}f)_k = \sum_k h_{i-k} f_i.$$

Na slici 3.4 data je šema primene operatora $\mathcal{H}$ za koeficijente $\{h_{-1}, h_0, h_1\}$.



Slika 3.4: Primena operatora $\mathcal{H}$ sa tri koeficijenta

Elemente novog signala $(\mathcal{H}f)$ računamo tako što odgovarajuće elemente polaznog signala množimo koeficijentima fitera i sabiramo. Konkretno, šema 3.4 se zapisuje:

$$(\mathcal{H}f)_i = f_{i-1}h_{-1} + f_i h_0 + f_{i+1}h_1.$$

Ovako definisani filtri su filtri konačnog impulsnog odziva[2]. Najčešće se u obradi signala koriste kauzalni filtri kod kojih je $h_k = 0,$ za $k > 0$. Ako za neko k važi $h_k \neq 0$, to bi značilo da komponenta izlaznog signala $(\mathcal{H}f)$ zavisi od budućeg ulaza. Na primer, za $h_1 \neq 0$ vrednost u trenutku iT_s ne možemo da izračunamo pre trenutka $(i+1)T_s$.

[2]Engl. FIR-filter

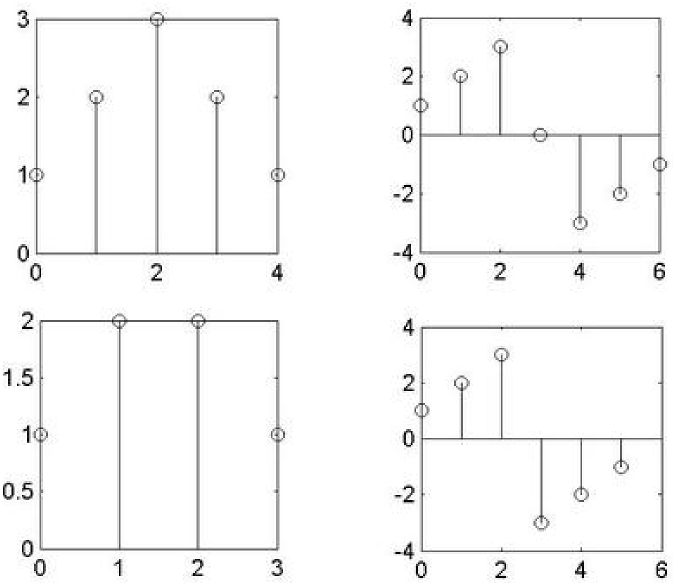
Važno svojstvo filtera sa konačnim odzivom je funkcija prenosa, okarakterisana svojim frekvencijskim odzivom:

$$\mathcal{H}(\Omega) = \sum_k h_k e^{-ik\Omega}, \; 0 \leq \Omega < \pi.$$

Frekvencijski odziv nam omogućava da dođemo do spektra signala $\mathcal{H}f$, polazeći od f. FIR filti mogu da ostvare određene poželjne osobine, kao što su linearna faza i linearna amplitudska svojstva. Frekvencijski odziv možemo razložiti na fazni $\phi(\Omega)$ i ampitudni $A(\Omega)$ odziv:

$$\mathcal{H}(\Omega) = A(\Omega) e^{i\phi(\Omega)}.$$

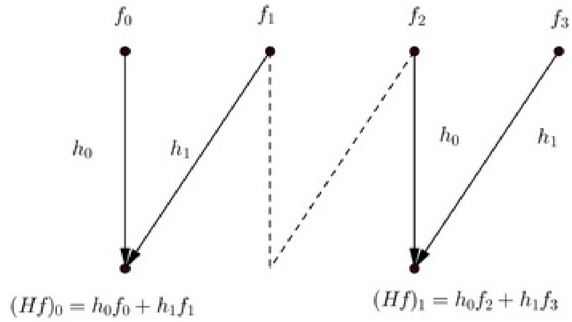
Jedan od ciljeva filtriranja jeste smanjenje distorzije signala, a ono se postiže kada je fazni odziv linearan u odnosu na Ω. Kao posledica javlja se pomeranje svih frekvencijskih komponenti polaznog signala u vremenu za konstantnu veličinu. Ovakvo svojstvo postiže se kod simetričnih i antisimetričnih filtera. Postoje četiri vrste FIR filtera sa linearnim faznim odzivom, u zavisnosti od broja koeficijenata koji može biti paran ili neparan. Na slici 3.5 u prvoj koloni su prikazani simetrični filtri sa neparnim odnosno parnim brojem koeficijenata, a u drugoj antismetrični.



Slika 3.5: Simetrični i asimetrični filtri

U ovom radu, od značaja su nam simetrični filtri kod kojih su koeficijenti simetrični u odnosu na centralni koeficijent (za neparnu dužinu filtera), dok su za parnu dužinu filtera koeficijenti simetrični u odnosu na liniju koja razdvaja prvu i drugu polovinu koeficijenata. U primeru 4 videli smo kako od niza $\{f_k\}$ dolazimo do niza $\{f_k^1\}$. To možemo uraditi i upotrebom filtera, prateći šemu 3.4 za koeficijente $h_0 = \frac{1}{2},\ h_1 = \frac{1}{2},$ ali izostavljajući svaki drugi član dobijenog niza. Opšti oblik ove procedure ilustrovan je na slici 3.6, a može se zapisati kao Hf i dat je sa:

$$(Hf)_k = \sum_i h_{i-2k} f_i.$$

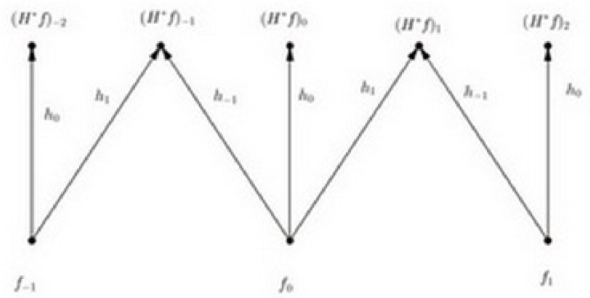


Slika 3.6: Filtriranje sa dva koeficijenta $h_0,\ h_1$

Dakle, za filter H sa koeficijentima $h_0 = \frac{1}{2},\ h_1 = \frac{1}{2},$ i filter G sa koeficijentima $g_0 = \frac{1}{2},\ g_1 = -\frac{1}{2}$ računamo nizove $\{f_k^1\}\ i\ \{d_k^1\}$ kao primenu filtera H odnosno G na f:

$$f^1 = Hf,\ d^1 = Gf. \tag{3.11}$$

Pretpostavimo sada da imamo izračunate nizove $f^1,\ i\ d^1$ i da želimo da rekonstruišemo polazni signal $\{f_k\}$. Koristeći do sada navedene procedure prvo bismo morali da dobijemo kontinualne verzije $f(t)$ i $d(t)$ pomoću (3.7) i (3.9). Zatim bismo računali signal $f(t)$ i tek nakon toga, pomoću (3.6) možemo da rekonstruišemo polazni niz. Međutim, uvođenjem pojma dualnog filtera, to možemo da izvršimo na jednostavniji način, direktno koristeći f^1 i d^1. Kao što se primenom filtera H i G dobja niz koji je duplo kraći od polaznog, za očekivati je da se u inverznom postupku broj elemenata udvostruči u odnosu na polazni niz. Dualni filter je takođe zadat svojim koeficijentima, samo je način primene filtera drugačiji. Na slici 3.7 je šematski prikazana primena dualnog filtera sa tri koeficijenta.



Slika 3.7: Filtriranje sa tri koeficijenta

Formula je data sa:

$$(H^*f)_k = \sum_i h_{k-2i} f_i.$$

Vratimo se na primer 4. Želimo da izračunamo niz $\{f_k\}$ primenom dualnih filtera H^* i G^* na nizove f^1 i d^1. Koeficijenti filtera H^* su $h_0 = \frac{1}{2}$, $h_1 = \frac{1}{2}$, dok su koeficijenti filtera G^* $g_0 = \frac{1}{2}$, $g_1 = -\frac{1}{2}$.

Prvo od nizova $\{f_k^1\}_k$, $\{d_k^1\}_k$ pravimo nizove $F^1 = H^*f^1$, $D^1 = G^*d^1$.

$$F^1 = \left\{3, 3, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, 4, 4, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}.$$

$$D^1 = \left\{1, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}.$$

Konačno, polazni niz dobijamo od F^1 i D^1:

$$(H^*f^1 + G^*d^1) = 2(F^1 + D^1) = 2\left\{4, 2, 3, 4, \frac{9}{2}, \frac{7}{2}, 1, 2\right\} = f.$$

Vidimo da je zbog $f^1 = Hf$, $d^1 = Gf$ identičko preslikavanje I_d dato sa:

$$I_d = 2(H^*H + G^*G). \tag{3.12}$$

Na ovaj način smo rekonsruisali polazni uzorkovani signal bez potrebe za formiranjem njegove kontinualne verzije.

Dakle pomoću filtera H i G izvršili smo dekompoziciju signala f, a primenom dualnih filtera H^* i G^* rekonstruisali smo polazni niz iz f^1 i d^1. Opisana procedura je jednokoračna diskretna malotalasna transformacija sa

Haarovim vejvletom. Naravno, ona može da se izvede i za signale različitih dužina od signala iz primera 4. Takođe, pomenuta procedura može da se uopšti i za druge vejvlete, uz određene modifikacije, što ćemo videti u narednom odeljku.

3.5 Dobeši (Daubechies) vejvleti

Videli smo da je poželjno da vejvlet ima što više momenata jednakih nuli. Kako Haarov vejvlet ima samo jedan nula momenat, javlja se potreba za novom familijom filtera koja će omogućiti formiranje takvih vejvleta i odgovarajućih funkcija skaliranja. Ingrid Daubechies dolazi do jedne takve famlije čiji su članovi indeksirani prirodnim brojevima, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Polazimo od koeficijenata

$$h_0 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ h_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{3.13}$$

$$g_0 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ g_1 = \frac{-\sqrt{2}}{2}. \tag{3.14}$$

Primetimo da su koeficijenti (3.13) i (3.14) dobijeni od koeficijenata filtera H i G iz primera 4 množenjem sa $\sqrt{2}$. Obeležimo nove filtere sa H' i G', gde je:

$$H' = \sqrt{2}H\ ,\ G' = \sqrt{2}G.$$

Tada umesto (3.12) imamo:

$$H'^*H' + G'^*G' = I_d, \tag{3.15}$$

gde je sa I_d označen identički operator. Takođe, primetimo da za ovako zadate koeficijente važi :

$$\sum_k h_k = \sqrt{2},$$

$$\sum_k g_k = 0.$$

Radi jednostavnosti u nastavku ćemo umesto H' pisati H, a umesto G' ćemo pisati G, pa relacija (3.15) postaje:

$$H^*H + G^*G = I_d. \tag{3.16}$$

Dalje, na isti način kao u primeru 4 izvodimo jednokoračnu diskretnu transformaciju, s tim da se sada veza između kontinualne i diskrene transformacije zapisuje kao:

$$W_{\psi_H} f(2, 2k) = \sqrt{\frac{1}{c_{\psi_H}}} d_k^1. \tag{3.17}$$

Dakle, filtri H i G nam određuju funkciju skaliranja i vejvlet, što možemo označiti sa:

$$(H, G) \leftrightarrow (\phi_H, \psi_H). \tag{3.18}$$

Ingrid Daubechies je došla do familije filtera za koje je dovoljno znati koeficijente za H, a odgovarajući koeficijenti za G su određeni sa:

$$g_k = (-1)^k h_{1-k}. \tag{3.19}$$

Dobeši filtri su dobijeni numeričkim metodama. Dajemo oblik koeficijenata za $n = 1$ i $n = 2$, a više o tome se može naći u [4].

Koeficijenti za $n = 1$ su dati sa (3.13), dok su za $n = 2$ dati sa:

$$\{h_k\}_{k=0}^{3} = \left\{ \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \right\}.$$

Dobeši vejvlete i funkcije skaliranja koje formiramo pomoću izložene familije filtera obeležavamo sa dbn, $(n = 1, 2, 3, \dots)$. Najjednostavniji član familije Dobeši vejvleta je db1, a to je upravo Haarov vejvlet ψ_H, dok je odgovarajuća funkcija skaliranja Haarova funkcija skaliranja ϕ_H (3.4).

Za svaki član familije Dobeši filtera dovoljno je odrediti koeficijenje za H, i funkciju skaliranja, a relacija pomoću koje iz funkcije sklairanja formiramo vejvlet data je sa:

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_k g_k \phi(2t - k). \tag{3.20}$$

Konkretno, za Haarov vejvlet se lako proverava relacija (3.20):

$$\begin{aligned}
\psi_H(t) &= \sqrt{2} \sum_{k=0}^{1} g_k \phi_H(2t - k) \\
&= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \phi_H(2t) - \frac{\sqrt{2}}{2} \phi_H(2t - 1) \right) \\
&= \phi_H(2t) - \phi_H(2t - 1).
\end{aligned}$$

Ovu vezu smo već izveli u poglavlju 3.2, videti (3.5). Da bismo odredili vejvlete iz Dobeši familije, potrebna nam je funkcija skaliranja, ali nju znamo samo za prvi član familije, odnosno Haarov vejvlet. Iterativna pocedura kojom se računa funkcija skaliranja za bilo koji dbn,$(n = 1, 2, 3, \dots)$ je poznata kao kaskadni algoritam[3]. Izvodi se pod pretpostavkom da su zadati koeficijenti Dobeši filtera H. Detaljnije objašnjenje se može naći u [1], a u ovom radu dajemo kratak opis algoritma za $db1$.

Prvo delimo t-osu na intervale koji su dužine 1, pri čemu vodimo računa da je vrednost $t = 0$ centar jedan od tih intervala i njega označimo sa I_0. Susedne intervale sa leve strane indeksirajmo redom sa I_i, $(i = -1, -2, -3 \dots)$, a intervale desno od I_0 sa I_i, $(i = 1, 2, 3 \dots)$.

Formiramo niz $e = \{e_i\}$ i za njega odgovaajuću funkciju $e(t)$:

$$e_i = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

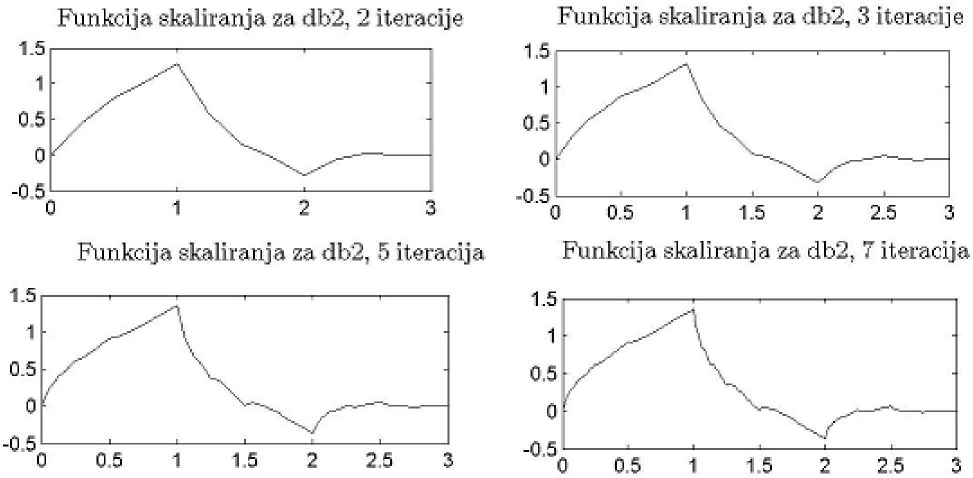
$$e(t) = \begin{cases} 1, & t \in I_0, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Dalje primenjujemo dualni filter H^* sa koeficijentima 1 i tako dobijamo niz $e^1 = \sqrt{2}H^*e$, a zatim i funkciju $e^1(t)$:

$$e^1(t) = \begin{cases} e_0^1 = 1, & t \in I_0, \\ e_1^1 = 1, & t \in I_1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Nastavljajući dalje, primenom dualnog filtera H^*, dobijamo nizove $e^2,\ e^3, \dots$ Na kraju, željenu funkciju skaliranja ψ_H dobijamo kao granicu ka kojoj konvergiraju funkcije $e(t), e^1(t), e^2(t) \dots$. Naravno, sa povećanjem broja iteracija dobjamo i bolju aproksimaciju. Na slici (3.8) prikazana je funkcija skaliranja za $db2$ i različit broj iteracija. Bolja glatkost funkcija skaliranja i vejvleta Dobeši familije postiže se za veće n i veći broj iteracija.

[3]Engl. Cascade algorithm

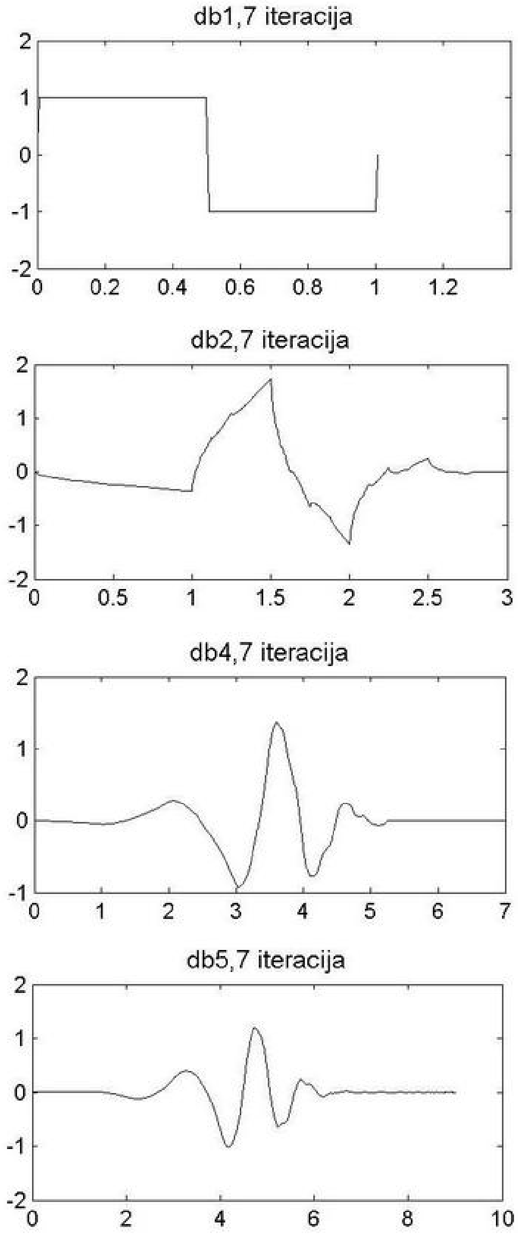


Slika 3.8: Funkcija skaliranja za db2

Važno je napomenuti da je filter H nisko-frekventni filter, dok je filter G visoko-frekventni filter. Primenom filtera H na signal prigušuju se visoke frekvencije, a niske frekvencije se menjaju neznatno. Dakle, time se izdvajaju harmonici niskih frekvencija. Sa druge strane, filter G služi za propuštanje visokih frekvencija, jer ih primenom na signal ne menja, a niske frekvencije prigušuje. Visoko-frekventni filtri određuju vejvlete, dok nisko-frekventni filtri određuju funkcije skaliranja. Filterom H se vrši "usrednjavanje" signala, s obzirom da su promene izražene visokim frekvencijama koje H zanemaruje. Filter G deluje obrnuto i ističe promene, a zanemaruje glatke delove signala. Ove dve vrste filtera u paru omogućuju rekonstrukciju polaznog signala.

U tu svrhu govorimo o banci filtera koja predstavlja skup filtera. U zavisnosti od toga da li razlažemo signal ili ga rekonstruišemo, razlikujemo banku filtera analize i banku filtera sinteze. Filtri analize razlažu signal na frekvencijske komponente, dok filtri sinteze rekonstruišu signal. U prethodno izloženom govorili smo o banci filtera sa dva filtera, jedim nisko-frekventnim (H) i jednim visoko-frekventnim (G).

Na slici (3.9) prikazano je nekoliko Dobeši vejvleta za različito n. Vidimo da je za $n = 5$ funkcija vejvleta najglatkija, dok je za $n = 1$ najmanje glatka.



Slika 3.9: Dobeši vejvleti

3.5.1 Biortogonalni filtri

Videli smo da je familija Dobeši vejvleta pogodna zbog dovoljnog broja nula momenata. Ipak, Dobeši filtri nisu simetrični za $n > 1$, a to znači da nemaju lienarni fazni odziv, što svakako predstavlja njihov nedostatak. Familija filtera koji poseduju dobre osobine Dobeši filtera uz dodatak simetričnosti je familija biortogonalnih filtera do koje je došao Cohen.

Koncept biortogonalnih filtera dozvoljava da za dekompoziciju koristimo filtre H i $\tilde{G}$, dok za rekonstrukciju koristimo drugi par dualnih filtera, $\tilde{H}^*$ i G^*. Drugim rečima, filtri analize i sinteze se razlikuju. Dakle parovi vejvleta i funkcija skaliranja određeni su parovima visoko-frekventnih i nisko-frekventnih filtera. Umesto relacija (3.16) i (3.18) pišemo:

$$\tilde{H}^* H + G^* \tilde{G} = I_d. \tag{3.21}$$

$$(H, \tilde{H}, G, \tilde{G}) \leftrightarrow (\phi, \tilde{\phi}, \psi, \tilde{\psi}). \tag{3.22}$$

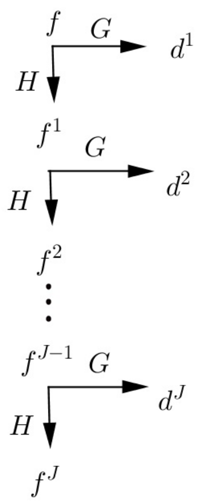
Osim Haarovog vejvleta koji ima ograničenu primenu, ne postoji vejvlet koji je generisan simetričnim ili antismimetričnim filtrima, a da pri tome ima kompaktan nosač i generiše ortonormiranu bazu. Zato se javila potreba za biortogonalnim vejvlet filtrima koji imaju svojstvo simetričnosti. Biortogonalni vejvlet filtri imaju značajnu primenu u kompresiji slike, s obzirom da JPEG 2000 standard koristi par biortogonalnih filtera sa 9 i 7 koeficijenata. Više detalja o JPEG 2000 standardu može se naći u [3].

3.6 Multirezolucija

Videli smo kako se izvodi jednokoračna diskretna vejvlet transformacija, koristeći filtere (H, G). Ova procedura se može proširiti na više iteracija i tako dolazimo do višeskalne analize[4] ili multirezolucije signala.

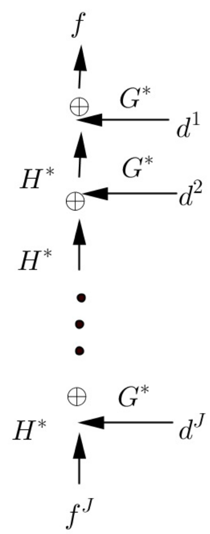
Polazimo od signala f i koeficijenata Dobeši filtera (H, G). Vršimo razlaganje signala na f^1 i d^1, a zatim primenjujemo tu proceduru na f^1 dobijajući f^2 i d^2. Sukcesivnom primenom dekompozicije, nakon J koraka dolazimo do aproksimacije signala f^J. Maksimalan broj koraka je ograničen u zavisnosti od dužine signala. Kako se u ovom postupku podrazumeva da je dužina polaznog signala oblika 2^L, tada J može biti najviše L. Signale d^j, $j = 1 \ldots J$ zovemo detalji. Pomenuta procedura za jednodimenzionalni signal ilustrovana je na slici 3.10.

[4]Engl. Multiscale analysis



Slika 3.10: Dekompozicija

Kada smo uveli jednokoračnu diskretnu transformaciju, videli smo da je dužina polaznog signala podeljena sa 2. Nastavljajući po istom principu u svakom narednom koraku, primećujemo da je ukupan broj izlaznih podataka koji se dobija sabiranjem dužina dobijenih signala $f^J, d^J, d^{J-1} \dots d^1$ jednak dužini polaznog signala. Dakle, broj podataka ostaje nepromenjen i dati algoritam omogućava da se izbegne redudantnost podataka na $t-a$ ravni. Slično, primenom dualnih filtera (H^*, G^*) rekonstruišemo polazni signal kao na slici 3.11, ali sada polazeći od f^J .



Slika 3.11: Rekonstrukcija

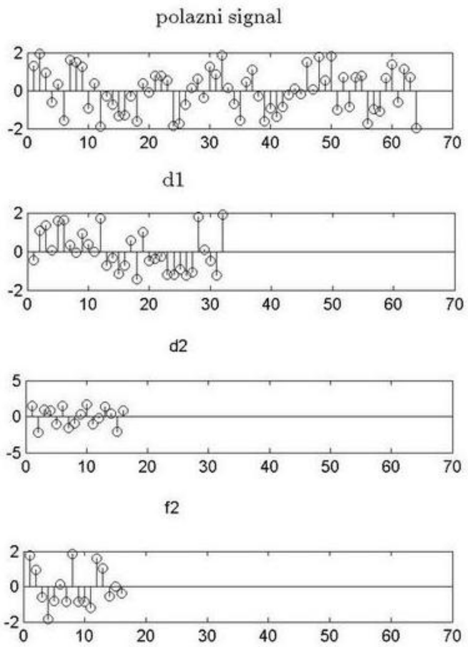
Konačno, kontinualna transformacija se pomoću J koraka diskretne transformacije za $a = 2^j$, $t = 2^j k$ zapisuje:

$$W_\psi f(2^j, 2^j k) = \sqrt{\frac{1}{c_\psi}} d_k^j, \ j = 1, 2 \ldots, J. \tag{3.20}$$

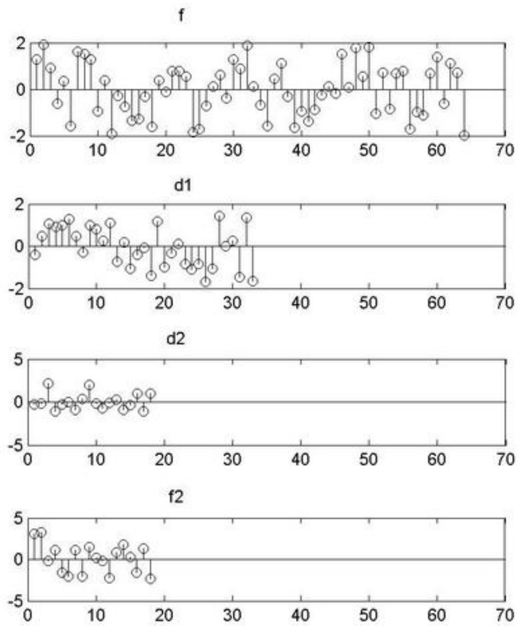
Ukoliko bismo za korak uzorkovanja uzeli prizvoljno T_s umesto $T_s = 1$, tada bi izraz 3.20 postao:

$$W_\psi f(4T_s, 4T_s) = \sqrt{\frac{1}{c_\psi}} d_1^2. \tag{3.21}$$

Rekli smo da se sa povećanjem n, povećava i glatkost Dobeši vejvleta. Na slici 3.12 i 3.13 prikazane su dekompozicije za $db1$ i $db2$ filtere, redom. Kao polazni signal f izabran je vektor od 64 random vrednosti, generisanih u MATLABU-u. Kako $db2$ ima bolja svojstva od $db1$, očekujemo da će detalj signali za $db2$ biti bolje raspoređeni oko značajnih promena signala, ukoliko one postoje, nego kod $db1$. Ako je signal pravilne forme, bez naglih promena, tada će vrednosti detalj signala biti skoncentrisane oko 0, odnosno biće male. To svosjtvo ukazuje da se prilikom izvođenja diskretne transformacije, sve važne informacije vezane za signal nalaze u svega nekoliko značajnih koeficijenata i ono ima važnu ulogu prilikom kompresije signala.



Slika 3.12: Dekompozicija primenom $db1$ filtera



Slika 3.13: Dekompozicija primenom *db*2 filtera

Prethodno opisana procedura sa J koraka može se proširiti i na dvodimenzionalni slučaj, odnosno primeniti na signal koji predstavlja digitalnu sliku. Kako je slika reprezentovana pomoću piksela, ulazni signal će biti reprezentovan matricom, a ne vektorom. Dakle, neka je dat signal f:

$$f = \{f_{mn}\},\ m = 0, \ldots, M-1;\ n = 0, \ldots, N-1.$$

Svaki elemenat f_{mn} označava piksel koji se nalazi u m-toj vrsti i n-toj koloni i u zavisnosti od svoje veličine predstavljen je sivim nijansama, tako da se malim pikselima pridružuje tamna, a velikim svetla vrednost. Primena filtera na dvodimenzionalni signal podrazumeva njihovo dejstvo na vrste, odnosno kolone matrice signala. Za zadati signal f i filtere H i G, razlikujemo 4 kombinacije filtriranja, u zavisnosti od izbora filtera i toga da li vršimo filtriranje po vrstama (oznaka indeksa r) li kolonama (oznaka indeksa c):

$$H_rH_cf,\ H_rG_cf,\ G_rH_cf,\ G_rG_cf.$$

Vršenjem svih navedenih kombinacija, dobijamo jednokoračnu diskretnu transformaciju, izvršenu na digitalnoj slici. Primenom filtera H po vrstama dobijamo novi signal i on se zapisuje:

$$(H_rf)_{mn} = \sum_k h_{k-2n} f_{mk}.$$

Pri tome se dužina svake vrste prepolovila, dok se kod primene filtera na kolone, isto dešava sa dužinom kolona. Svaka od navedenih kombinacija daje novi signal koji je reprezentovan sa 4 puta manje podataka od polaznog, pa samim tim ako primenimo sve četiri vrste filtriranja, ukupan izlazni broj podataka ostaje isti kao i polazni. Kao i u jednodimenzionalnom slučaju, sa jednim korakom filtriranja dobijamo aproksimaciju signala $f^1 = H_r H_c f$ i horizontalne, vertikalne i dijagonalne detalje, redom:

$$d^{1h} = H_r G_c f, \; d^{1v} = G_r H_c f, \; d^{1d} = G_r G_c f.$$

Na taj način dobijamo 4 nove slike, što možemo predstaviti kao:

$$\left(\begin{array}{c|c} f^1 & d^{1h} \\ \hline d^{1v} & d^{1d} \end{array}\right)$$

Slično, za više koraka, aproksimacije signala dobijamo sukcesivno:

$$f^2 = H_r H_c f^1, \; f^3 = H_r H_c f^2, \; \ldots$$

4

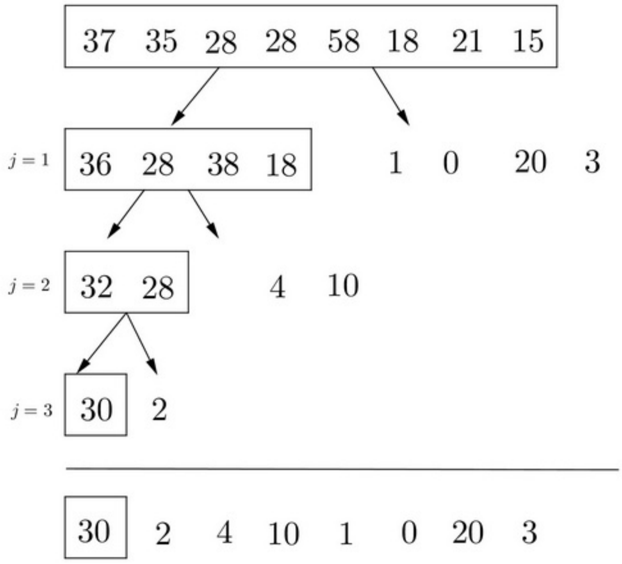
Primena vejvleta

Bez kompresije, čuvanje audio signala i digitalnih slika i njihova obrada na računarima zauzimali bi mnogo prostora, a njihov prenos bi zahtevao mnogo vremena. Stoga, primena vejvleta u procesu kompresije signala zauzima veoma značajno mesto i u ovoj glavi govorimo o toj primeni. Dajemo opis šeme kompresije, i konkretne primere manipulacije koeficijentima dekompozicije, a korišćena je literatura [1], [5] i [6].

4.1 Piramidalni algoritam

Neka je signal f zadat vrednostima: $f = \{37, 35, 28, 28, 58, 18, 21, 15\}$. Kompresija signala primenom Haarove diskretne transformacije za $J = 3$ prikazana je na slici 4.1. Radi jednostavnosti računa za filter koeficijente smo uzeli $h_0 = \frac{1}{2}, h_1 = \frac{1}{2}$ i $g_0 = \frac{1}{2}, g_1 = -\frac{1}{2}$. Cilj ove dekompozicije je formiranje znatno manjih koeficijenata, pomoću kojih rekonstruišemo polazni signal. Zbog prirode algoritma, važno je da dužina ulaznog signala bude oblika 2^L, za neko $L \in \mathbb{N}$. U prvom koraku, vršeći transformaciju, dobijamo dva niza čije su dužne jednake polovini dužine polaznog niza. Dakle, u svakom koraku polovimo dužinu niza iz prethodnog koraka, pa je ukupan broj koeficijenata na kraju jednak dužini originalnog signala. Uokvireni deo na slici 4.1 predstavlja koeficijente skaliranja, odnosno uprosečene vrednosti, a ostatak su vejvlet koeficijenti.

Konkretno za naš primer sa sike 4.1, u prvom koraku dobijamo nizove $\{36, 28, 38, 18, \}$ i $\{1, 0, 20, 3\}$ koji predstavljaju f^1 i d^1, redom. Zatim, u drugom koraku dobjamo nizove $\{32, 28\}$ i $\{4, 10\}$ koju predstavljaju f^2 i d^2. Konačno, u trećem koraku dobijamo aproksimaciju f^3 kojoj odgovara vrednost $\{30\}$ i d^3 kojem odgovara vrednost $\{2\}$.



Slika 4.1: Kompresija signala

Dakle, u j-tom koraku za $i = 1 \dots 2^{L-j}$, koristeći susedne vrednosti iz prethodnog koraka f_{2i-1}^{j-1} i f_{2i}^{j-1}, računamo koeficijente skaliranja f_i^j i koeficijente vejvleta d_i^j:

$$f_i^j = \frac{f_{2i-1}^{j-1} + f_{2i}^{j-1}}{2}, \; d_i^j = \frac{f_{2i-1}^{j-1} - f_{2i}^{j-1}}{2}.$$

Primetimo da su izračunati koeficijenti dobijeni upravo primenom filtera, videti (3.11) na strani 37. Nakon poslednjeg, L-tog koraka, dobijamo jedan koeficijent skaliranja i 2^L-1 vejvlet koeficijenta koji predstavljaju izostavljene detalje nakon usrednjavanja signala. Detalji su važni kao nosioci informacija o naglim promenama u signalu.

Razlikujemo kompresiju bez gubitaka i kompresiju sa gubicima. U prvom slučaju, rekonstrukcija kompresovanog signala se ne razlikuje od originalnog signala. Pri tome nismo zanemarili nijedan koeficijent različit od nule. Ipak, kako nam je u cilju da signal predstavimo sa što manje koeficijenata, možemo određene vejvlet koeficijente anulirati i tada se rekonstruisani signal neznatno razlikuje od originalnog. To je veoma korisno prilikom prenosa podataka, jer zanemarujemo "male" vrednosti (za izabrani prag) i na taj način smanjujemo veličinu podataka. Ovaj način kompresije se zove odsecanje (threshold).

Sintezu signala vršimo tako što polazimo od krajnjeg koeficijenta skaliranja kojem dodajemo i oduzimamo poslednji vejvlet koeficijent. Tako smo dobili prethodna dva koeficijenta skaliranja. U prethodnom primeru to bi bilo:

$$30 + 2 = 32,$$

$$30 - 2 = 28.$$

U narednom koraku prelazimo na sledeća dva vejvlet koeficijenta i njih dodamo i oduzmemo od dobijenih koeficijenata skaliranja. U prethodnom primeru to je:

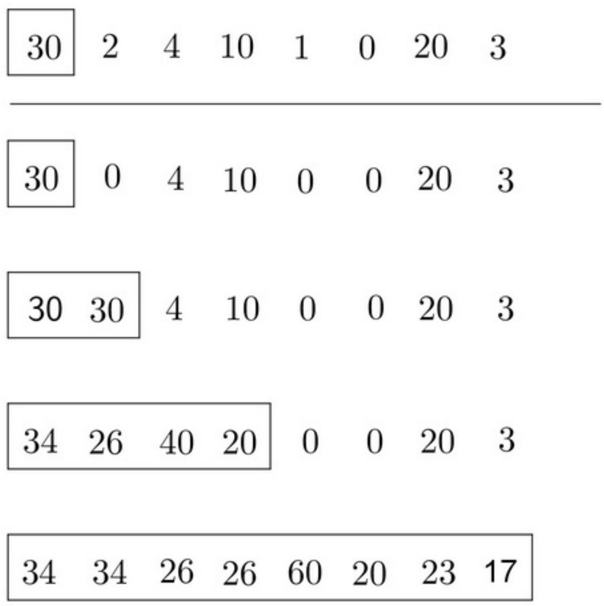
$$32 + 4 = 36,$$

$$32 - 4 = 28,$$

$$28 + 10 = 38,$$

$$28 - 10 = 18.$$

Postupak ponavljamo dok ne dođemo do polaznih vrednosti. Na slici 4.2 prikazana je sinteza signala za različite pragove zanemarivanja. U prvom slučaju taj prag iznosi 2, što znači da zanemarujemo sve vejvlet koeficijente manje od 2, a u drugom slučaju prag je 4. Vidimo da za prag 2 možemo signal predstavljen sa 8 koeficijenata zapisati pomoću 6. Dok se za prag 4 broj potrebnih vrednosti za zapisivanje signala smanjuje i iznosi 3. Ako izabremo vejvlete na pravi način, tada će koeficijenti detalja imati male vrednosti čije zanemarivanje onda prihvatljivo utiče na kvalitet rekonstrukcije. Ako ne zanemarimo njedan koeficijent, dobili bismo baš polazni niz. Takva rekontrukcija je savršena rekonstrukcija, ali ona zahteva i pamćenje većeg broja podataka.



$$\boxed{30} \quad 2 \quad 4 \quad 10 \quad 1 \quad 0 \quad 20 \quad 3$$

$$\boxed{30} \quad 0 \quad 0 \quad 10 \quad 0 \quad 0 \quad 20 \quad 0$$

$$\boxed{30 \quad 30} \quad 0 \quad 10 \quad 0 \quad 0 \quad 20 \quad 0$$

$$\boxed{30 \quad 30 \quad 40 \quad 20} \quad 0 \quad 0 \quad 20 \quad 0$$

$$\boxed{30 \quad 30 \quad 30 \quad 30 \quad 60 \quad 20 \quad 20 \quad 20}$$

Slika 4.2: Rekonstrukcija sa pragom 2 i 4

U sledećem poglavlju prelazimo na dvodimenzionalni slučaj, odnosno kompresiju digitalne slike.

4.2 Kompresija digitalne slike

Polazimo od signala koji je zadat svojom matricom podataka

$$f = \{f_{mn}\},\ m = 0, \ldots, M-1;\ n = 0, \ldots, N-1.$$

Kako se slika sastoji od MN piksela, od kojih svaki zauzima b bita, tada ukupan memorijski prostor koji slika zauzima iznosi S_f bita :

$$S_f = MNb.$$

Uvodimo stopu kompresije za signal f i kompresovan signal f^c, koja meri redukciju veličine signala:

$$C = \frac{S_f}{S_{f^c}}. \tag{4.1}$$

Cilj kompresije je da se polazni signal predstavi sa što manje podataka, ali tako da distorzija kompresovanog signala bude zanemarljiva. Uslov koji bi stopa kompresije trebalo da zadovolji je $C \gg 1$, s obzirom da želimo da smanjimo broj podataka, pa imenilac u izrazu za C treba da bude veći od brojioca. Označimo sa f^{dec} signal koji rekonstruišemo iz kompresovanog signala f^c. Takođe, u cilju nam je da rekonstruisani signal bude približno jednak originalnom, $f^{dec} \approx f$. Taj uslov možemo zapisati kao minimizaciju sledeće veličine:

$$||f^{dec} - f|| = \sqrt{\sum_{mn} (f_{mn} - f_{mn}^{dec})^2}. \tag{4.2}$$

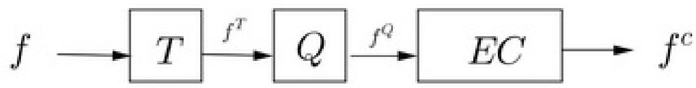
Izraz (4.2) ustvari predstavlja metriku u Hilbertovom prostoru $l^2(M \times N)$. Minimizacija date norme ekvivalentna je maksimizaciji veličine PSNR[1]:

$$PSNR(f, f^{dec}) = 10 \log_{10} \left(\frac{MN(2^b - 1)^2}{||f^{dec} - f||^2} \right) dB. \tag{4.3}$$

Pojednostavljeno gledano, kompresija se može predstaviti kao procedura koja se sastoji iz tri koraka kroz koje signal prolazi: transformacija (T), kvantizacija (Q) i entropijsko kodiranje (EC). Veoma je važno da ti koraci omoguće da budu ispunjeni uslovi koje smo prethodno izložili. Inverzna procedura je dekompresija koja polazeći od kompresovanog signala f^c dovodi do njegove rekonstrukcije f^{dec}. Sastoji se od inverznih koraka kompresije EC^{-1}, Q^{-1},T^{-1}.

[1]Engl. Peak-signal-to-noise-ratio

Šematski kompresiju možemo prikazati kao na slici 4.3.



Slika 4.3: Šema kompresije

Kompresiju možemo vršiti metodama koje čuvaju sve informacije (loseless) ili metodama kojima se gube određeni podaci, ali ostvaruje veća efikasnost (lossy). U prvu grupu spadaju skraćivanje dužine ponavljajućih nizova[2] i Hafmanov algoritam, dok u drugu grupu spadaju kvantizacija koeficijenata i EZW algoritam[3]. Proces kompresije započinjemo tako što na signal primenjujemo linearnu i invertibilnu transformaciju T. U ovom radu smo izložili diskretnu vejvlet transformaciju čija se primena vidi baš u ovom koraku kompresije. Ona se koristi u standardu JPEG 2000 i u ovom radu se ograničavamo na njenu primenu, ali napominjemo da T može biti i neka druga linearna i invertibilna transformacija. Sledeća dva koraka kompresije samo ukratko izlažemo, s obzirom da je naš cilj primena vejvleta koja se direktno javlja samo u prvom koraku kompresije.

Kvantizacija koeficijenata (Q)

Pretpostavimo da smo izvršili transformaciju signala i izračunali f^T. Korak kvantizacije podrazumeva deljenje vejvlet koeficijenata sa faktorom Q i zaokruživanje na najbliži ceo broj. Vrednosti f^T se nalaze u određenim intervalima i svakom od tih intervala dodeljena je jedna vrednost S_j, odnosno simbol. Dakle, elementi iz istog intervala su reprezentovani sa S_j. Vidimo da je tada izlaz kvantizacije f^Q ponovo matrica. Kvantizaciju u kojoj su intervali konstantne dužine zovemo uniformna kvantizacija. Vršimo preslikavanje $[q_j, q_{j+1}) \to S_j$. Kako ovakvo preslikavanje nije injekcija i ista vrednost se ponavlja više puta, možemo primetiti da kvantizacija predstavlja metodu sa gubicima, s obzirom da su neke od informacija suvišne pa se uklanjaju. Veličinom definisanom u (4.2) merimo grešku kvantizacije, odnosno distorziju. Ključnu ulogu ima izbor faktora Q koji se zove prag kvantizacije. Svi

[2]Engl. Runlength

[3]Engl. Embedded Zerotrees of Wavelet transforms

vejvlet koeficijenti koji su manji od zadatog praga, imaju kvantizovanu vrednost nula.

Entropijsko kodiranje (EC)

EC podrazumeva kodiranje simbola matrice f^Q tako da zauzima što manje bita, što daje kompresovani signal f^c. Ovaj korak karakteriše njegova prava invertibilnost, što nije bio slučaj kod kvantizacije za koju postoji samo približno inverzan postupak. Entropijsko kodiranje je korak bez gubitaka, s obzirom da važi korespodencija

$$f^Q \leftrightarrow f^c.$$

Kada se izvrši kvantizacija dobija se matrica f^Q čiji su elementi iz skupa simbola $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$. Svaki od simbola S_i pojavljuje se n_i puta u matrici f^Q, $i = 1, 2 \ldots, n$ pa definišemo relativne frekvencije za svaki simbol sa:

$$p_i = \frac{n_i}{MN}$$

pri čemu važi da je suma svih frekvencija jednaka 1. Tada entropiju za f^Q definišemo kao funkciju koja zavisi od relativnih frekvencija:

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i,$$

$$0 \leq H(p_1, p_2, \ldots, p_n) \leq log_2\, n.$$

Entropija svoju minimalnu vrednost dostiže kada se u f^Q pojavi samo jedan simbol, dok maksimalnu vrednost dostiže kada su svi simboli zastupljeni podjednako u matrici f^Q. Nakon kvantizacije cilj je sačuvati signal f^Q na računaru, za šta je potrebna reprezentacija binarnim kodom. Najčešće su to nizovi nula i jedinica. Dakle, svakom simbolu S_i dodeljujemo jedan takav niz, odnosno kodovanu reč[4] dužine l_i . Prosečna dužina svih kodovanih reči $\bar{l}$, uzimajući u obzir relativne frekvencije, dobija se kao $\bar{l} = \sum_{i=1}^{n} p_i l_i$. Ispostavlja se da je donja granica za $\bar{l}$ u proizvoljnom binarnom kodu baš entropija H. U interesu je koristiti binarni kod za koji se ta granica dostiže, jer se na taj način u proseku svi simboli predstavljaju sa nizovima optimalnih dužina. Takav sistem kodiranja zovemo entropijski kodek[5]. Optimalnim izborom transformacije T i kvantizacije, ostvarujemo manju entropiju H, a potom za takvu

[4]Engl. codeword

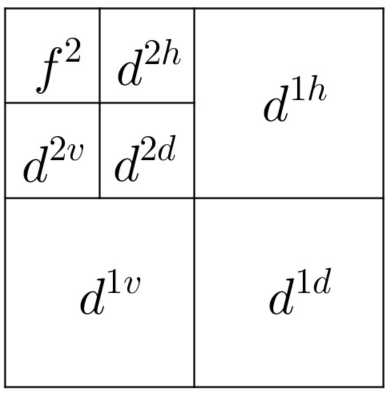
[5]Engl. entropy codec

entropiju primenjujemo entropijski kodek na f^Q i dobijamo kompresovani signal f^c. Kodeci koji se u praksi koriste su Hafmanov (Engl. Huffman) i aritmetički kodek. Simboli koje treba kodovati, ne pojavljuju se sa istom relativnom frekvencijom. Neki se pojavljuju češće od drugih. Hafmanov algoritam pridružuje manje kodove frekventnijim simbolima, a duže kodove simbolima koji se ređe pojavljuju. Kao izlaz kodiranja dobija se niz bitova. Bilo koji simbol predstavljen je nizom nula i jedinica. Ipak, Hafmanov algoritam nije optimalan jer se njim ne postiže donja granica za $\bar{l}$. Kodek koji to omogućava je aritmetički kodek. U ovom radu to samo napominjemo, bez dalje analize.

Videli smo na koji način se signal kompresuje. U toj proceduri, za ovaj rad je najznačajniji prvi korak, odnosno transformacija signala, primenom diskretne vejvlet transformacije.

4.2.1 Primena vejvleta u kompresiji slike

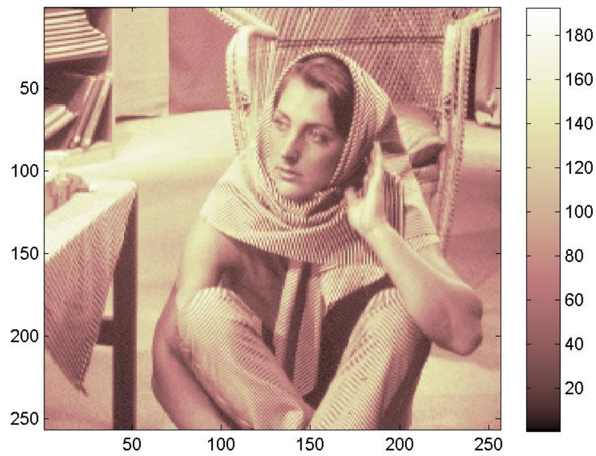
Piramidalni algoritam možemo primeniti i u dvodimenzionalnom slučaju. Na slici 4.5 prikazana je šema dekompozicije za dva koraka koju koristi standard JPEG 2000.

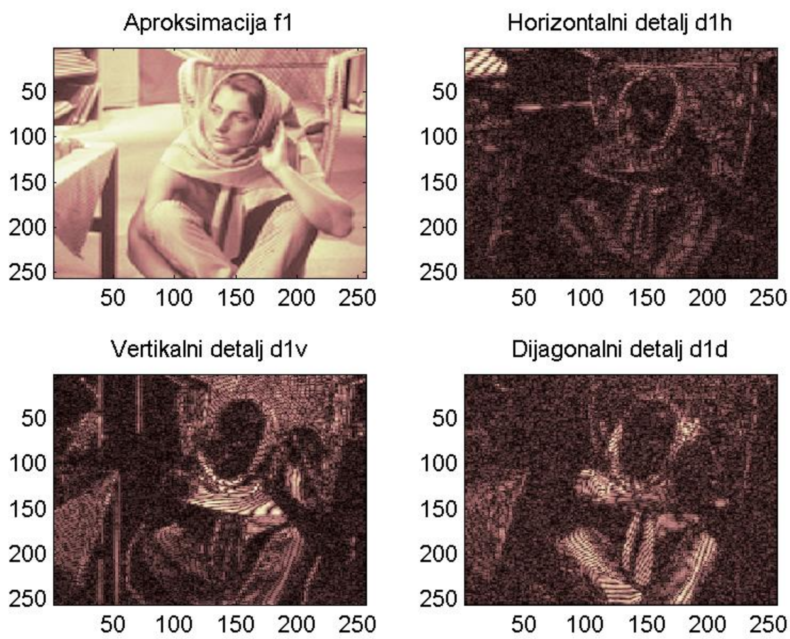


Slika 4.4: Transformacija koristeći JPEG 2000

U nastavku dajemo konkretan primer jednokoračne dekompozicije signala. Na slici 4.5 prikazan je original kao i aproksimacija i detalji, nakon jednog koraka diskretne vejvlet transformacije za biortogonalni filter 3.7.

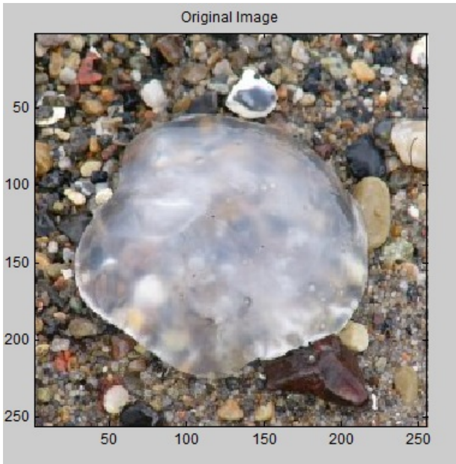
Analiza je izvršena u programskom paketu MATLAB. Više o tome objašnjeno je u dodatku.

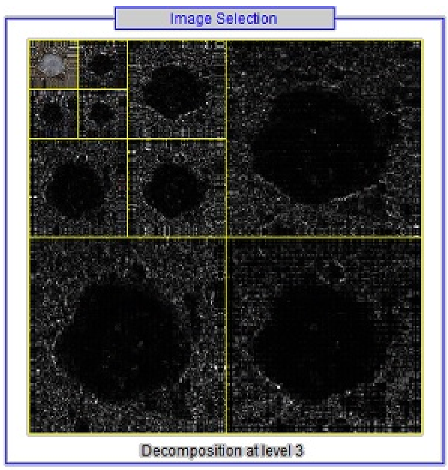




Slika 4.5: Dekompozicija primenom biortogonalnog filtera 3.7

Razlaganje možemo nastaviti dalje, primenjujući algoritam na aproksimaciju f^1, koja se nalazi u gornejm levom uglu dekompozicije na slici 4.6. U nastavku je primer dekompozicije za 3 koraka, primenom biortogonalnog filtera kao i rekonstruisana slika.

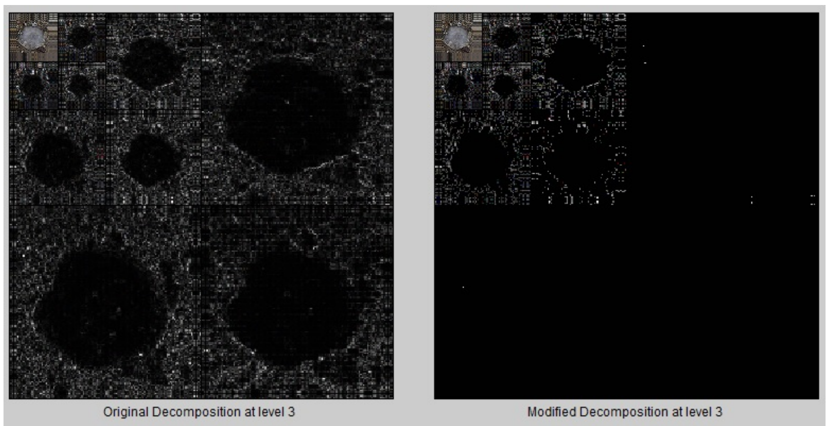




Slika 4.6: Dekompozicija

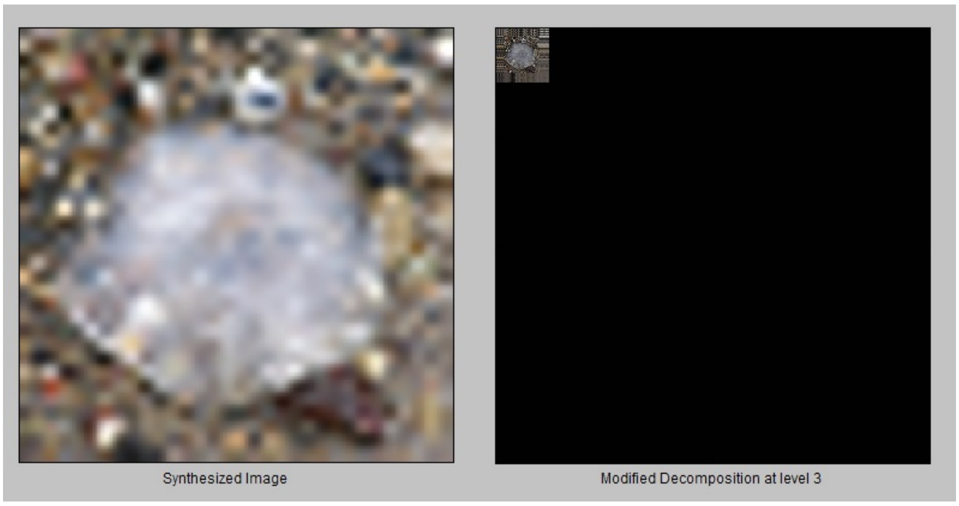
U ovom primeru nismo menjali koeficijente dekompozicije, stoga je rekonstruisana slika identična polaznoj. Kao što smo već pomenuli, moguće je vršiti manipulaciju koeficijentima, da bi se smanjila veličina podataka. Pri tome, krajnji rezultat se ne razlikuje mnogo od početnog, što i jeste prednost korišćenja vejvleta. Primenom analize u MATLAB-u, o kojoj će biti više reči u dodatku, prikazaćemo kako se razlikuju original i rekonstrukcija pri zanemarivanju koeficijenata na određenim nivoima.

Posmatramo naš original (slika 4.6). Nakon dekompozicije sa tri nivoa, bez promene u koeficijentima, ukupan broj nenula koeficijenata je 238950. Rekonstruisana slika se ne razlikuje od polazne. Smanjimo sada ukupan broj nenula koeficijenata nakon dekompozicije sa tri nivoa deset puta. Koeficijenti koje zadržavamo su oni sa najvećim apsolutnim vrednostima. Modifikovana i polazna dekompozicija su date na gornjem delu slike 4.7, a ispod su prikazani original i rekonstrukcija.



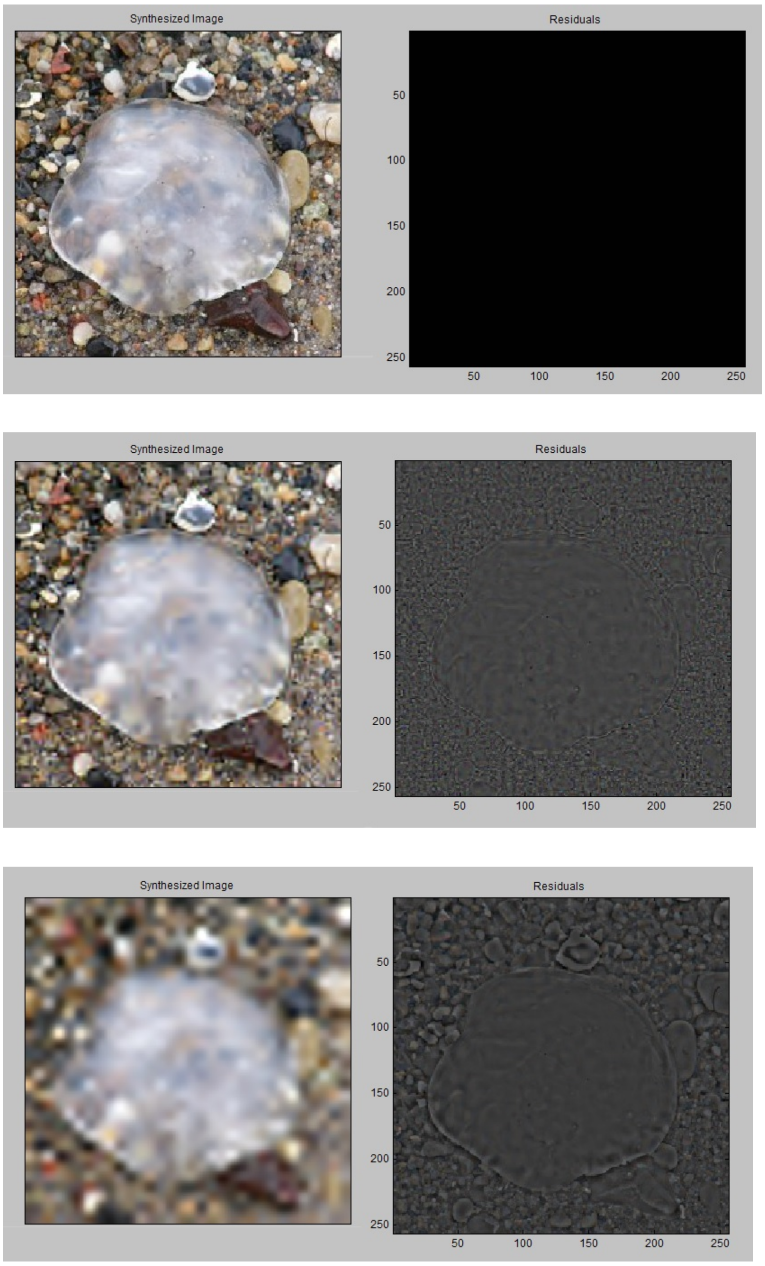
Slika 4.7: Dekompozicije, original i rekonstrukcija nakon uklajanja koeficijenata

Primetimo da nema velike razlike između rekonstruisane slike i orginala. Da bismo prenos signala učinili lakšim, možemo anulirati sve koeficijente iz detalja a zadržati samo one koji karakterišu aproksimaciju na poslednjem nivou dekompozicije. Za očekivati je da će nakon ovog koraka razlika u kvalitetu biti daleko uočljivija. Na sledećoj slici prikazana je rekonstrukcija nakon odstranjivanja svih koeficijenata osim koeficijenata aproksimacije f^3, kao i modifikovana dekompozicija. Naglašavamo da je sada ukupan broj koeficijenata 6075, što je skoro 40 puta manje.



Slika 4.8: Rekonstrukcija i dekompozicija nakon uklanjanja svih koeficijenata osim za f^3

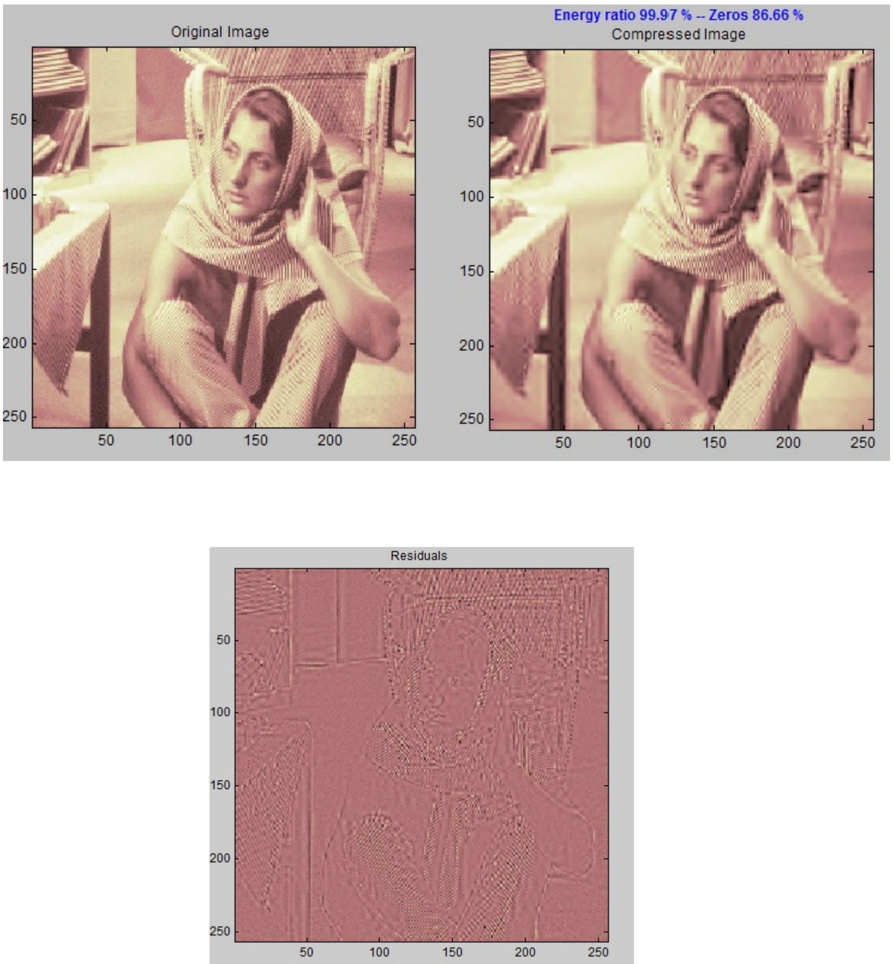
Rekonstruisana slika je u ovom slučaju daleko manjeg kvaliteta, ali se prepoznaje struktura koja je ostala ista kao kod originala. Ako uporedimo rekonstruisane slike u sva tri slučaja, videćemo da su odonos kvaliteta slike i veličina podataka obrnuto proporcionalni. U prvom slučaju nismo manipulisali koeficijentima, odnosno nismo izostavili nijedan detalj, pa je rekonstrukcija identična originalu. Smanjivanjem broja koeficijenata 10 puta, nema velike razlike u kvalitetu. U poslednjem slučaju smo izbacili sve detalje i ostavili samo aproksimaciju, pa je i rekonstrukcija evidentno drugačija od originala. U nastavku dajemo prikaz informacija koje smo izostavili u svakom od tri slučaja. Analiza je urađena u programskom paketu MATLAB, opcijom prikazivanja reziduala. Više o tome objašnjeno je u dodatku. Na slici 4.9 prikazani su rezultati transformacije bez manipulacije koeficijentima, nakon manje manipulacije i nakon odstranjivanja svih detalja tim redom, kao i odgovarajući izostavljeni detalji (reziduali).



Slika 4.9: Rekonstrukcije i reziduali

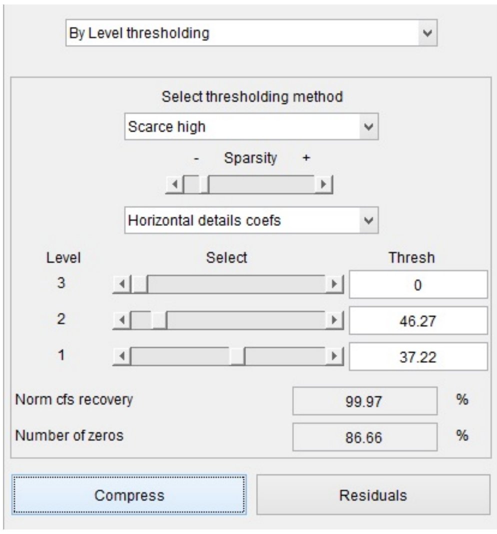
4.2.2 Primer kompresije u MATLAB-u

Programski paket MATLAB pruža mogućnost različitih analiza vejvletima primenom odgovarajućih alata (wavelet toolbox) u programu. Kada je u pitanju kompresija slike, postoje dva načina da se ona izvrši. Jedan je direktna upotreba koda, pozivanjem ugrađenih funkcija, a drugi je primena grafičkog interfejsa (Engl. graphical interface). Više o upotrebi navedenih alata biće izloženo u dodatku. Sada dajemo primer originalne slike i njene kompresije, primenom biortogonalnog filtera 3.7 sa 3 nivoa. Takođe, prikazani su i reziduali.



Slika 4.10: Kompresija slike i reziduali

Program daje mogućnost odsecanja koeficijenata (thresholding) na globalnom nivou ili po nivoima dekompozicije. Odabir granice možemo izvršiti manuelno ili prihvatiti automatsko odsecanje. Program je podešen tako da održi ravnotežu između očuvanja energije signala i njegovog predstavljanja sa što manje koeficijenata. U slučaju da želimo manuelno da upravljamo koeficijentima, prvo biramo nivo dekompozicije (level), a potom odredimo na kojim detaljima vršimo odsecanje (vertikalni, horizontalni, dijagonalni). Kada se postavi granica thresholding-a, svi koeficijenti koji su manji od nje biće anulirani. U našem primeru, na slici 4.10 vidimo da je gotovo 87% koeficijenata eliminisano, a izgubljena energija je skoro zanemarljiva. To se vidi i u maloj razlici između originala i kompresovane slike. U nastavku je dat prikaz prozora u kojem se vrši thresholding. Prvo biramo kako vršimo odsecanje (by level ili global), zatim biramo detalje i podešavamo granicu za svaki nivo (thresh). Na dnu prozora nalaze se informacije o energiji i broju nula koeficijenata.



Slika 4.11: Thresholding

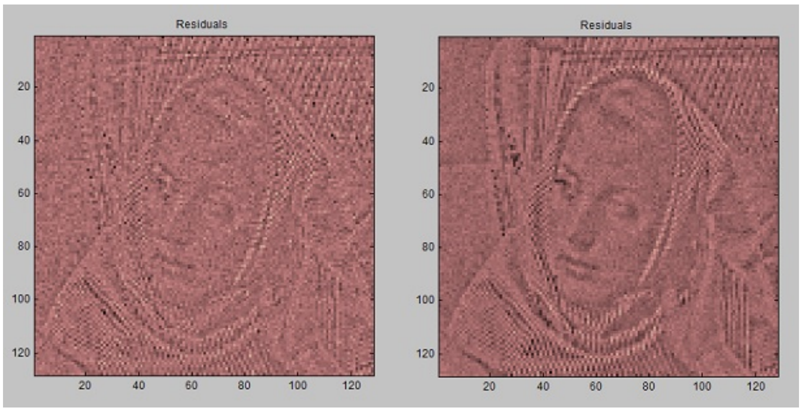
4.2.3 Uklanjanje šuma

Vrlo često, prilikom obrade ili snimanja signala, nastaju problemi koji se manifestuju u vidu pojave šuma na signalu. Šum (engl. noise) zapravo predstavlja varijacije informacija o signalu koje nisu prisutne u objektu koji se snima. To može da se dogodi zbog lošeg rada instrumenta kojim se snima, kao i pri prenošenju ili promeni medija iz jednog oblika u drugi. Šum se javlja kao neželjeni produkt beleženja signala.

Vejvleti se mogu primeniti i u rešavanju ovakvih problema, čiji je cilj izdvajanje signala i otklanjanje smetnji. Slično kao i prilikom kompresije, i ovde je važno podesiti granicu odsecanja koeficijenata. Pored toga, važno je i odrediti opseg frekvencije. U sledećem primeru prikazano je uklanjanje šuma odstranjivanjem koeficijenata koji odgovaraju niskim, a zatim i visokim frekvencijama.

Slika 4.12: Uklanjanje šuma

Na donjem delu slike 4.12 prikazano je uklanjanje šuma odstranjivanjem koeficijenata sa niskim, a sa desne strane koeficijenata sa visokim frekvencijama. Jasno je da je u prvom slučaju dobijen bolji rezultat, što se može videti i na osnovu reziduala.



Slika 4.13: Reziduali

U ovom radu ograničli smo se na signale čije su dimenzije stepeni dvojke, pa su prethodne analize vršene u skladu sa tim. Napominjemo da se one mogu proširiti i za signale drugačijih dimenzija upotrebom različitih metoda produžavanja. Tri takve metode su dodavanje nula[6], simetrizacija[7] i povećanje glatkosti[8], videti [6].

[6]Zero-Padding
[7]Symmetrization
[8]Smooth Padding

5

Dodatak o vejvletima u MATLAB-u

U ovoj glavi navodimo alatke za obradu slike primenom vejvleta koje se koriste u programskom paketu MATLAB. Da bi se izvršile željene analize, potrebno je raspolagati vejvlet alatima u programu (wavelet toolbox). Analize se mogu vršiti upotrebom koda u komandnom prozoru tj.pozivanjem ugrađenih funkcija ili radom u okruženju Graphical Interface (GI). U ovom poglavlju dajemo osnovne smernice za upotrebu pomenutih alata. Korištena je literatura [6] i [7].

5.1 Primeri vejvleta

Programski paket MATLAB sadrži informacije o pojedinim familijama vejvleta i do njih se može doći pozivanjem funkcije `waveinfo` 'ime vejvleta'. Program prepoznaje imena ugrađenih vejvlet familija. Ovde navodimo samo neke od primera:

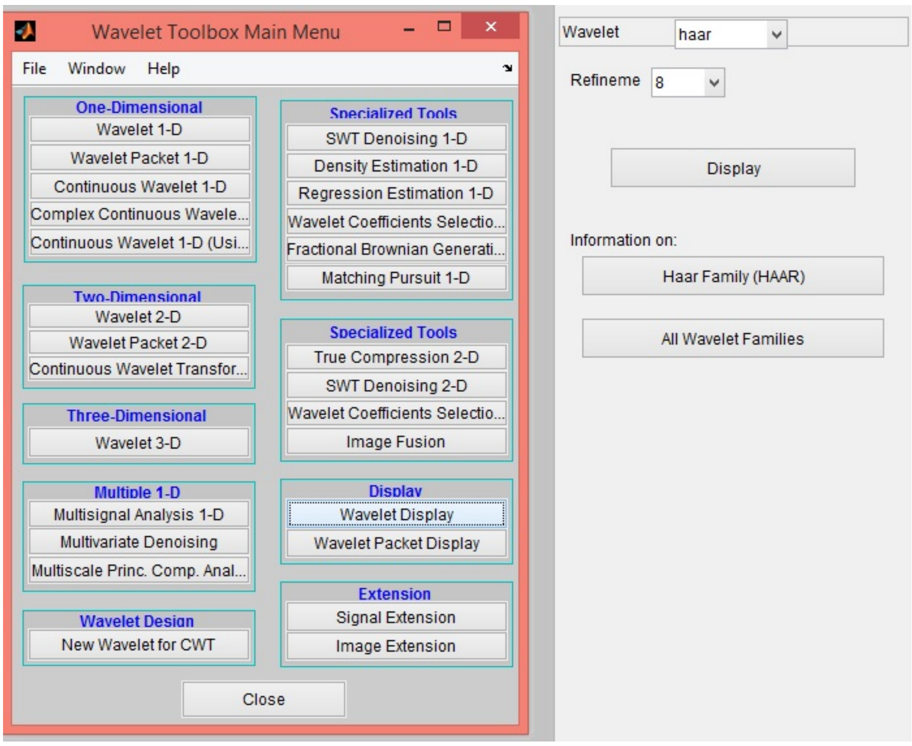
1. `'haar'` što označava Haarov vejvlet
2. `'db'` što označava Dobeši familiju vejvleta
3. `'bior'` što označava biortogonalne vejvlete
4. `'morl'` što označava Morletov vejvlet
5. `'mexh'` što označava Meksički šešir

Pozivanjem date funkcije dobijamo informacije o kompaktnom nosaču, nula momentima, ortogonanosti itd. Ukoliko želimo da prikažemo vrednosti aproksimacije vejvlet funkcije i funkcije skaliranja za zadatu familiju, koristimo komandu `wavefun`. Funkciju pozivamo u komandnom prozoru na sledeći način:

$$[\mathrm{PHI}, \mathrm{PSI}, \mathrm{X}] = \texttt{wavefun}('\mathrm{naziv}', \mathrm{br\_iter}).$$

Ulazni argumenti su familija vejvleta i broj iteracija, a izlazni argumenti PHI i PSI su vrednosti aproksimacija funkcije skaliranja i vejvleta u tačkama X. Kada smo to izračunali, grafik vejveleta možemo dobiti primenom komande `plot`(X,PSI).

Pored ovog načina, izgled i osobine vejvleta možemo istražiti koristeći GI. Komandom `wavemenu` otvora se prozor Wavelet Toolbox Main Menu, koji je prikazan na levoj strani slike 5.1:



Slika 5.1: Graphical Interface

Odabirom alatke `Wavelet Display` otvara se prozor kao na desnoj strani slike 5.1 u kojem imamo mogućnost da izaberemo familiju vejvleta, kao i da prikažemo grafike vejvleta i funkcija skaliranja pritiskom na `Display`. Informacije o pojedinim familijama dobijamo u delu `Information on`.

5.2 Dekompozicija

Multirezolucija, odnosno dekompozicija opisana u delu 3.6 u MATLAB-u se može izvršiti primenom funkcije `wavedec` za jednodimenzionalni slučaj i `wavedec2` za dvodimenzionalni slučaj. Ulazni argumenti funkcije `wavedec` su signal f koji je zadat kao vektor, broj koraka dekompozicije J i naziv familije vejvleta. U komandnom prozoru funkciju pozivamo na sledeći način:

$$[\mathrm{ftrans}, \mathrm{L}] = \mathtt{wavedec}(\mathtt{f}, \mathtt{J}, '\mathtt{naziv\_vejvleta}').$$

Kao izlaz dobija se vektor $ftrans$ sa koeficijentima aproksimacije i detalja i vektor L koji sadrži u sebi informacije o dužinama vektora aproksimacije i detalja. Važno je napomenuti da je izlazni signal $ftrans$ često malo duži od polaznog signala.

Slično, kod dvodimenzionalnih signala (slika) ulazni parametri su matrica vrednosti signala M, broj koraka dekompozicije J i vejvlet familija. U komandnom prozoru, dekompoziciju dobijamo pozivanjem funkcije na sledeći način:

$$[\mathrm{Mtrans}, \mathrm{L}] = \mathtt{wavedec2}(\mathtt{M}, \mathtt{J}, '\mathtt{naziv\_vejvleta}').$$

Kao izlaz dobijamo matricu Mtrans koja sadrži podmatrice detalja i aproksimacije i matricu L koja daje dimenzije detalja i aproksimacije. Funkcije koje omogućavaju obrnut postupak, tj rekonstrukciju su redom `waverec` i `waverec2`. Sada su ulazni parametri prethodno dobijeni rezultati, pa se funkcije redom za oba slučaja pozivaju na sledeći način:

$$f = \mathtt{waverec}(\mathtt{ftrans}, \mathrm{L}, '\mathtt{naziv\_vejvleta}'),$$

$$M = \mathtt{waverec2}(\mathtt{Mtrans}, \mathrm{L}, '\mathtt{naziv\_vejvleta}').$$

Kako je dekompozicija vršena primenom filtera, napominjemo da je funkcija kojom se prikazuju H-filter koeficijenti, u MATLAB-u zadata sa

$$h = \mathtt{wfilters}('\mathtt{naziv\_vejvleta}').$$

Grafički prikaz dekompozicije slike primenom komandne linije postižemo kroz sledeće korake:

1. Prvo komandom `load` naziv_signala pripremimo signal koji želimo da koristimo za anlizu

2. Zatim funkcijom `wavedec2` vršimo željenu dekompoziciju

3. "Izvlačimo" koeficijente detalja i aproksimacije iz izlazne matrice

4. Komandom `image(wcodemat)` predstavljamo rekonstruisane detalje i aproksimaciju.

Korak 3. možemo izvršiti upotrebom funkcija za ekstrakovanje koeficijenata aproksimacije i detalja. Koeficijente aproksimacije dobijamo pomoću:

$$KAp = \texttt{appcoef2}(\texttt{Mtrans}, \texttt{L}, '\texttt{naziv\_vejvleta}', \texttt{J})$$

Koeficijente detalja (horizontalni H_j, vertikalni V_j, dijagonalni D_j) dobijamo za svaki korak j ($j = 1, \ldots, J$) posebno, pozivanjem funkcije:

$$[\texttt{KHj}, \texttt{KVj}, \texttt{KDj}] = \texttt{detcoef2}('\texttt{all}', \texttt{Mtrans}, \texttt{L}, \texttt{j}).$$

Da bismo rekonstruisali aproksimaciju i detalje, koristimo funkciju `wrcoef2`:

$$\texttt{Ap} = \texttt{wrcoef2}('\texttt{a}', \texttt{Mtrans}, \texttt{L}, '\texttt{naziv\_vejvleta}', \texttt{J})$$

$$\texttt{Hj} = \texttt{wrcoef2}('\texttt{h}', \texttt{Mtrans}, \texttt{L}, '\texttt{naziv\_vejvleta}', \texttt{j})$$

$$\texttt{Vj} = \texttt{wrcoef2}('\texttt{v}', \texttt{Mtrans}, \texttt{L}, '\texttt{naziv\_vejvleta}', \texttt{j})$$

$$\texttt{Dj} = \texttt{wrcoef2}('\texttt{d}', \texttt{Mtrans}, \texttt{L}, '\texttt{naziv\_vejvleta}', \texttt{j})$$

gde su argumenti a, h, v, d redom oznake za aproksimaciju, horizontalne, vertikalne i dijagonalne detalje, a $j = 1, 2, \ldots J$. Konačno, rekonstrukciju (sintezu) slike dobijamo komandom

$$\texttt{fr} = \texttt{waverec2}(\texttt{Mtrans}, \texttt{L}, '\texttt{naziv\_vejvleta}').$$

Prikazivanje slika aproksimacije i detalja vršimo komandom

$$\texttt{image}(\texttt{wcodemat}).$$

U nastavku je primer dekompozicije sa dva koraka za biortogonalni vejvlet. Prvo iz postojećeg direktorijuma u MATLAB-u učitavamo signal sa nazivom wbarb i vršimo njegovu dekompoziciju naredbama:

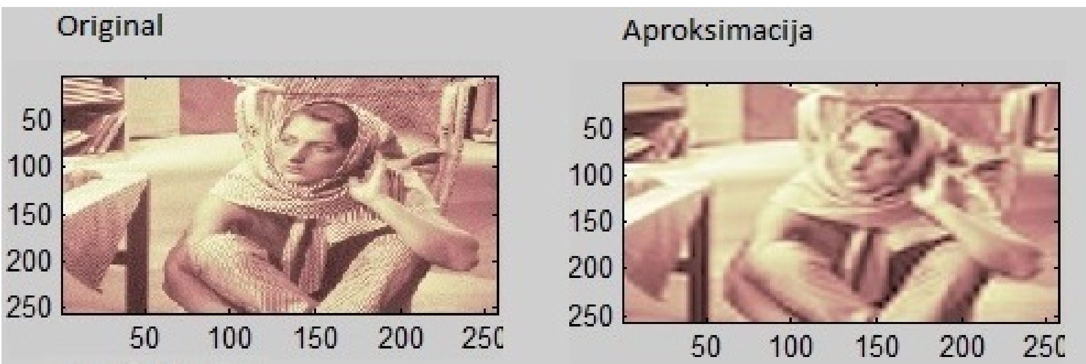
```
≫ load wbarb;
≫ image(X); colormap(map);
≫ [Mtrans, L] = wavedec2(X, 2,'bior3.7', 2);
≫ KAp = appcoef2(Mtrans, L,'bior3.7', 2);
≫ [KH1, KV1, KD1] = detcoef2('all', Mtrans, L, 1);
≫ [KH2, KV2, KD2] = detcoef2('all', Mtrans, L, 2);
```

Zatim od dobijenih koeficijenata rekonstruišemo detalje, aproksimaciju i polazni signal:

```
>> Ap = wrcoef2('a', Mtrans, L, 'bior3.7', 2);
>> H1 = wrcoef2('h', Mtrans, L, 'bior3.7', 1);
>> V1 = wrcoef2('v', Mtrans, L, 'bior3.7', 1);
>> D1 = wrcoef2('d', Mtrans, L, 'bior3.7', 1);
>> H2 = wrcoef2('h', Mtrans, L, 'bior3.7', 2);
>> V2 = wrcoef2('v', Mtrans, L, 'bior3.7', 2);
>> D2 = wrcoef2('d', Mtrans, L, 'bior3.7', 2);
>> fr = waverec2(Mtrans, L, 'bior3.7');
```

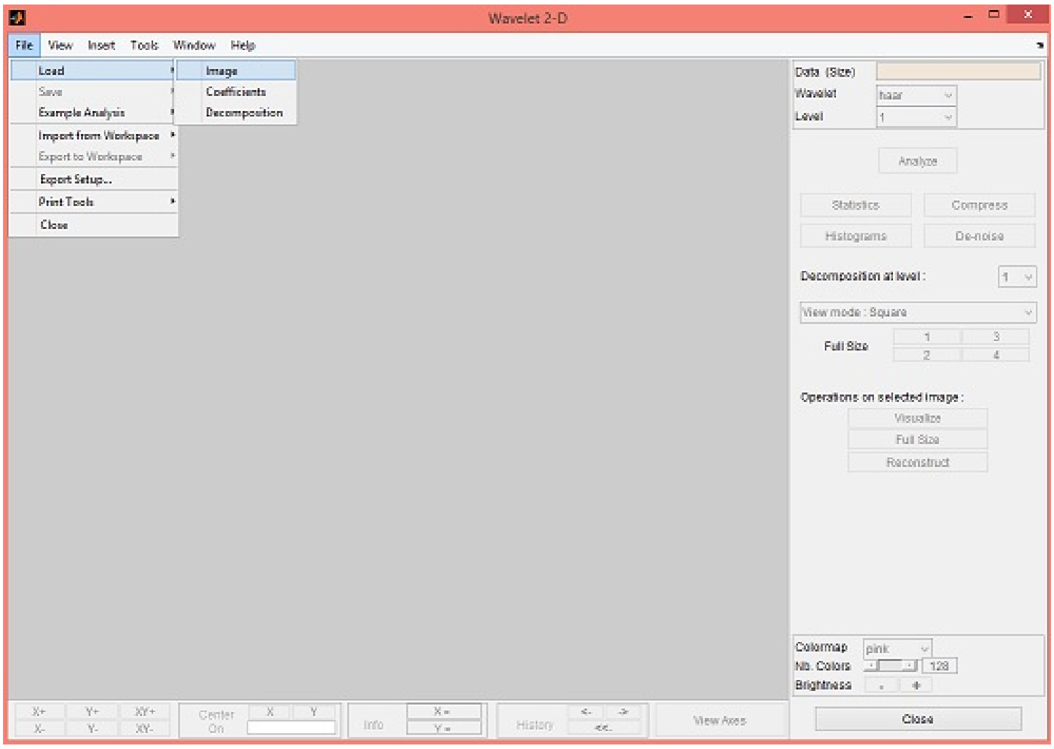
Konačno, predstavljamo grafički original, aproksimaciju i rekonstrukciju a rezultat je prikazan na slici ispod:

```
>> figure;
>> colormap(map);
>> subplot(3, 1, 1);
>> image(X);
>> subplot(3, 1, 2);
>> image(wcodemat(Ap, 192));
>> subplot(3, 1, 3);
>> image(wcodemat(fr, 192));
```



Napominjemo da se za dekompoziciju slike čije dimenzije nisu stepeni dvojke, koristi funkcija `ndwt2`. Više o tome može se naći u [6].

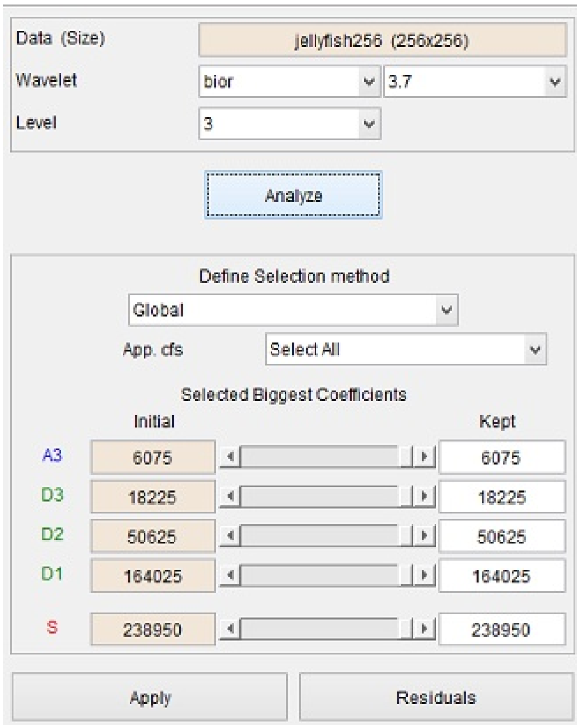
Opisanu dekompoziciju možemo dobiti i upotrebom GI u programu. Kada otvorimo prozor Wavelet Toolbox Main Menu (slika 5.1) biramo alatku `Wavelet 2-D`. Tada dobijamo prozor kao na slici 5.2.



Slika 5.2: Wavelet 2-D prozor

Odabirom `File` komande, a zatim `Load image` učitavamo željenu sliku. Takođe, MATLAB omogućava i rad na primerima slika koje su u sklopu programa, a do njih se dolazi odabirom `Example analysis`. Kada smo odabrali sliku na kojoj želimo da izvršimo analizu, sa desne strane prozora biramo vejvlet familiju (`wavelet`) i broj koraka dekompozicije (`level`). Pritiskom na `Analyze` dobijamo traženu dekompoziciju. Program prikazuje original, rekonstrukciju (`Synthesized Image`) i dekompoziciju. Takođe, nakon dekompozicije možemo sačuvati koeficijente aproksimacija i detalja, kao i rekonstruisanu sliku komandom `File` pa `Save`.

U prethodnom poglavlju pomenuli smo da se može manipulisati koeficijentima dekompozicije i videli efekat uklanjanja detalja. Ovakvu analizu vršimo u MATLAB-u koristeći alatku `Wavelet Coefficients Selection 2-D`. Odabirom ove alatke otvara se prozor veoma sličan prozoru sa slike 5.2. Na isti način biramo željenu sliku i vejvlet familiju, a zatim izvršimo dekompoziciju. Ono što je drugačije je deo u kojem baratamo koeficijentima dekompozicije. Na narednoj slici prikazan je deo prozora u kojem to možemo izvršiti.



Slika 5.3: Wavelet coefficients selection 2-D

Na slici 5.3 prikazana je polazna dekompozicija u kojoj nisu promenjeni koeficijenti. Vrednosti u ovom slučaju odgovaraju analizi koju smo vršili u poglavlju 4.2.1, slika 4.6. A_3, D_3, D_2, D_1 su redom brojevi koeficijenata krajnje aproksimacije i svih detalja po nivoima koji su različiti od nule. Sa S je označen ukupan broj koeficijenata. Program nudi mogućnost da promenimo ukupan broj koeficijenata različitih od nule pomeranjem strelice ili kucanjem željenog broja u redu koji odgovara ukupnom broju koeficijenata. Kada to uradimo program ih sam raspoređuje po nivoima. Pritiskom na komandu `Apply` dobijamo, pored polazne dekompozicije i originalne slike, modifikovanu dekompoziciju (`Modified Decomposition`) i na osnovu nje rekonstruisanu sliku. Biranjem komande `Residuals` dobijamo grafički prikaz reziduala.

5.3 Kompresija i uklanjanje šuma

Primer kompresije videli smo u poglavlju 4.2.2. Sada objašnjavamo na koji način to možemo izvršiti u MATLAB-u. Ukoliko želimo da primenimo funkciju za kompresiju u komandnom prozoru, pozivamo `wdencmp`.

Dakle, nakon što izvršimo željenu dekompoziciju kao što smo objasnili u delu 5.2, treba da izaberemo na koji način ćemo izvršiti kompresiju slike. Postoje dve opcije, globalno odsecanje (global thresholding) i odsecanje po nivoima (thresholding by level). U prvom slučaju potrebna je dekompozicija, a u komandnom prozoru zadajemo sledeću funkciju:

$$[\mathtt{xd},\mathtt{cxd},\mathtt{lxd},\mathtt{perf0},\mathtt{perfl2}] = \mathtt{wdencmp}('\mathtt{gbl}',\mathtt{Mtrans},\mathtt{L},\mathtt{vejv},\mathtt{n},\mathtt{trh},\mathtt{vr},1)$$

Ulazni argument `'gbl'` označava globalni thresholding, `n` je nivo dekompozicije, `trh` je nivo thresholding-a, a `vr` je oznaka za vrstu thresholding-a (`'s'` za soft ili `'h'` za hard thresholding). Poslednji argument `1` označava da se koeficijenti aproksimacije u dekompoziciji zadržavaju i da na njih ne primenjujemo odsecanje. Izlazni argument `xd` predstavlja kompresovani signal i njega prikazujemo komandom

$$\mathtt{image}(\mathtt{xd}).$$

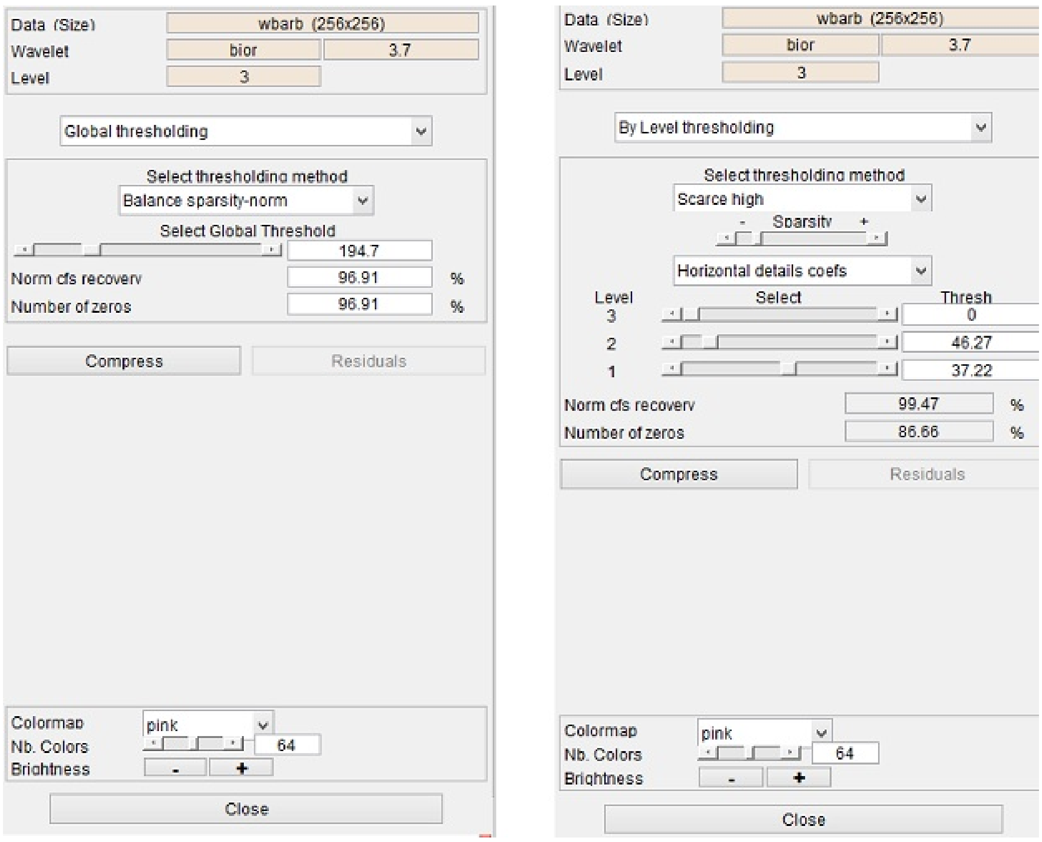
Sa `cxd` i `lxd` označena je dekompozicija kompresovanog signala, a argumenti `perf0` i `perfl2` su redom procenat nula i parametar koji ukazuje na očuvanje energije pri kompresiji.

Odsecanje po nivoima vršimo istom funkcijom `wdencmp`, samo su ulazni parametri nešto drugačiji:

$$[\mathtt{xd},\mathtt{cxd},\mathtt{lxd},\mathtt{perf0},\mathtt{perfl2}] = \mathtt{wdencmp}('\mathtt{lvd}',\mathtt{X},\mathtt{vejv},\mathtt{n},\mathtt{trh},\mathtt{vr})$$

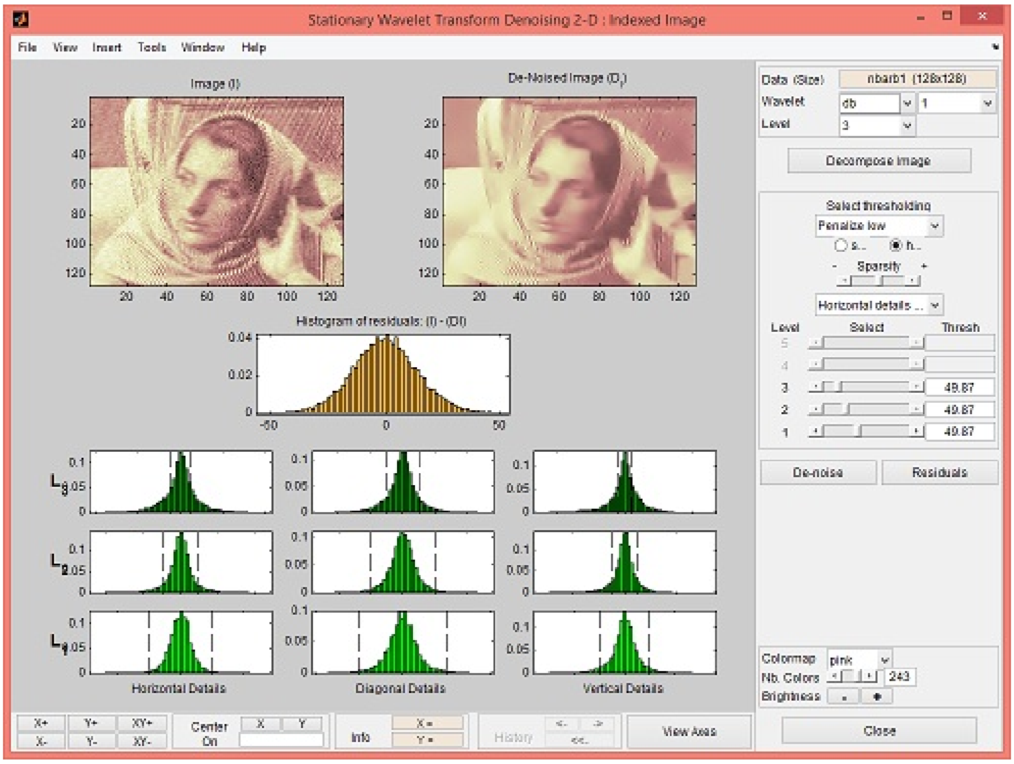
U ovom slučaju, umesto dekompozicije, ulazni parametar je signal `X`, a sa `'lvd'` označen je thresholding po nivoima. Parametar `trh` je sada vektor sa vrednostima thresholding-a horizontalnih, vertikalnih i dijagonalnih detalja posebno.

Kompresiju možemo izvršiti i upotrebom GI, otvaranjem prozora `Wavelet 2-D` kao na slici 5.2. Prvo izaberemo i izvršimo dekompoziciju, a zatim biramo komandu `Compress`. Otvara se prozor u kojem imamo mogućnost da podesimo parametre kompresije. Na slici 5.4 sa leve strane prikazana je opcija globalnog odsecanja, a sa desne odsecanja po nivoima. `Norm cfs Recovery` daje informaciju o očuvanju energije dok `Number od zeros` govori o procentu nula koeficijenata nakon kompresije. U slučaju odsecanja po nivoima, za svaki nivo (`Level`) biramo vrednost do koje odsecamo koeficijente (`Thresh`). Kada podesimo sve parametre, pritiskom na dugme `Compress` prikazuju se originalna slika i pored nje kompresovana sa informacijama o očuvanoj energiji i procentu nula.



Slika 5.4: Kompresija

Probleme sa šumom na slikama možemo rešiti upotrebom alatke `SWT Denoising 2-D`. Kada izaberemo sliku i izvršimo dekompoziciju u prozoru se nudi opcija `Select thresholding` pomoću koje biramo da li ćemo izostaviti koeficijente koji su nosioci visokih frekvencija (`Penalize high`) ili one koji su nosioci niskih frekvencija (`Penalize low`). Takođe biramo i vrstu koeficijenata u zavisnosti od vrste detalja (horizontalni, vertikalni, dijagonalni detalji). Konačno, za svaki nivo dekompozicije biramo granicu do koje izostavljamo koeficijente (`Thresh`). Komandom `De-noise` prikazuju se original i slika kod koje je šum uklonjen. Opcijom `Residuals` prikazuju se informacije koje smo pri toj proceduri odstranili. Prozor u kojem vršimo pomenutu analizu prikazan je na slici 5.5.



Slika 5.5: Kompresija

Zaključak

Furijeova analiza predstavlja standardni alat koji se koristi za reprezentaciju signala u frekvencijskom domenu. Sa pojavom kratkotrajne Furijeove transformacije, otvorila se mogućnost fleksibilnije reprezentacije funkcija. Osnovna mana date transformacije je nemogućnost prilagođavanja širine prozora, što je upravo dovelo do potrebe za vejvletima. Teorija malih talasa je razvijana u razičitim oblastima matematike, fizike, kao i elektrotehnike. Stoga je jasno da je njihova primena široka. Posebno ističemo primenu u obradi signala iz različitih oblasti nauke, poput medicine, elektrotehnike, klimatologije itd.

Osnovu ovog rada čini koncept multirezolucije koja je značajna za diskretizaciju funkcije i formiranje vejvleta. Njena primena pre svega je izložena kroz jedan od koraka kompresije, odnosno transformaciju signala i u ovom radu ta primena ilustrovana je na jedan od brojnih načina, u programskom paketu MATLAB.

Literatura

[1] H.G. Stark, *Wavelets and Signal Processing*, University of Applied Sciences, Germany, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005.

[2] N. Teofanov, *Predavanja iz primenjene analize*, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Zavod za udžbenike, Beograd, 2011.

[3] S. Mallat, *A wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, New York, 1998.

[4] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992.

[5] D.P. Radunović, *Talasići*, Akademska misao, Beograd,2005.

[6] $http : //www.mathworks.com/help/wavelet/examples/non-decimated-wavelet - analysis.html$

[7] M. Misiti, Y. Misiti, G. Oppenheim, J.M. Poggi, *Wavelet Toolbox For Use with MATLAB*, MathWorks, 1967.

Biografija

Maja Ćosić je rođena 23. jula 1990. godine u Kikindi. Završila je Osnovnu školu "Jovan Popović" u Novom Sadu, kao nosilac Vukove diplome.

Zatim je upisala Gimnaziju "Jovan Jovanović Zmaj", društveno-jezički smer, u Novom Sadu, koju je 2009. godine završila sa skroz odličnim uspehom.

Iste godine upisala je osnovne studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer matematika finansija. Sve predviđene ispite položila je 2012. godine sa prosečnom ocenom 9.50, i oktobra iste godine upisala je master studije na istom fakultetu.

Predviđene ispite sa master studija položila je u junskom ispitnom roku 2014. godine sa prosečnom ocenom 9.57 i time stekla uslov za odbranu master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Maja Ćosić
AU

Mentor: dr Nenad Teofanov
ME

Naslov rada: Kontinualna i diskretna malotalasna transformacija i primene
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezk izvoda: s / en
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2014
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (5/88/0/0/41/0/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)
FO:

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Harmonijska analiza i teorija malih talasa
ND

Ključne reči: transformacija, signal, vejvlet, filter, dekompozicija, rekonstrukcija, kompresija
PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Ovaj rad se bavi analizom malih talasa (vejvleta). U prvom delu rada uvodi se pojam vejvleta i kontinualne vejvlet transformacije i razlozi za njihovo uvođenje. Povezuje se teorija malih talasa sa Furijeovom teorijom i ističu njihove razlike. Zatim je dat pregled definicija i osnovnih svojstava transformacija. Prvi deo rada završava se izlaganjem nekoliko primera vejvleta. U drugom delu rada izložena je diskretna vejvlet transformacija i njena veza sa kontinualnom. Zatim je objašnjen koncept multirezolucije primenom filtera, prvo za Haarov vejvlet, a potom i proširenje na Dobeši vejvlete. U trećem delu rada objašnjena je primena vejvleta u procesu kompre-

sije slike i uklanjanja šuma na primerima u programskom paketu MATLAB. Poslednje poglavlje sadrži opis alatki koje program nudi za obradu slike primenom vejvleta i način na koji se one koriste.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 10.04.2014.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
ČK

Predsednik: dr Arpad Takači, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor: dr Nenad Teofanov, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Miloš Kurilić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Maja Ćosić
AU

Mentor: dr Nenad Teofanov
MN

Title: Continuous and Discrete wavelet transform with applications
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: s / en
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2014
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
PP

Physical description: (5/88/0/0/41/0/0)(chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Harmonic analysis and Wavelet theory
SD

Subject/Key words: transform, signal, wavelet, filter, decomposition, reconstruction, compression
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: This master thesis is about wavelet theory. The first part of the thesis presents the notion of wavelet and continuous wavelet transform and the reasons they were needed. The relation between wavelet and Fourier theory is established. Further, we give the preview of definitions and relevant transformation properties. The first part of this thesis is concluded with the examples of wavelets. The second part of the thesis presents the discrete wavelet transform and link betweeen discrete and continuous case. Additionally, the concept of multiresolution is given and explained using digital filters. We will begin with the Haar wavelet and then proceed to Daubechies

wavelets. In the third part of this thesis, the application of wavelets in image compression and denoising is presented with the examples in MATLAB. Finally, the use of functions and wavelet analysis tools are presented in MATLAB.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 10.04.2014.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: dr Arpad Takači, full professor at Faculty of Science in Novi Sad
Member: dr Miloš Kurilić, full professor at Faculty of Science in Novi Sad
Mentor: dr Nenad Teofanov, full professor at Faculty of Science in Novi Sad