UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU

Maja Četić

POSTUPCI ŠESTOG REDA ZA REŠAVANJE NELINEARNIH JEDNAČINA

Master rad

Novi Sad 2013.

Sadržaj

Predgovor

Jedan od najvažnijih i najizazovnijih problema u naučnim i inžinjerskim primenama je nalaženje rešenja nelinearnih jednačina. Problemi približnih vrednosti, koji se pojavljuju, ne samo u primenjenoj matematici, nego i u fizici, astronomiji, ekonomiji i drugim primenljivim oblastima, su svedeni na rešavanje ovih jednačina. Mnogi problemi optimizacije, dakle, vode ka ovakvim jednačinama. Traženje tačnog rešenja nelinearne jednačine pomoću formule, koja se sastoji od elementarnih algebarskih operacija i elementarnih funkcija, je moguće samo kod malog broja nelinearnih jednačina (npr. kvadratne). Zato se primenjuju određeni numerički (iterativni) postupci pomoću kojih se, uz početne uslove, dobija približno rešenje nelinearne jednačine sa zadatom tolerancijom. Ovaj problem je posebno dobio na važnosti sa pojavom računara i prednostima koje on pruža. A to je brzo, jednostavno i tačno ili bar približno izračunavanje rešenja nelinearnih jednačina, uz pomoć što većeg broja decimala, čime se znatno smanjuje greška pri izračunavanju.

Ovaj rad se bavi iterativnim metodama za nalaženje jednostrukog korena jednačine $f(\alpha) = 0$ i $f'(\alpha) \neq 0$ za $f(x) = 0$, gde je $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilna realna funkcija. Najpopularniji i najrasprostranjeniji je Njutnov metod, koji za nalaženje α, počinje sa početnom aproksimacijom x_0 koja je blizu α i generiše niz sukcesivnih iteracija $\{x_n\}_0^\infty$ koje kvadratno konvergiraju ka korenu. To je dato sa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Mnogi naučnici već godinama razmatraju razne načine da poboljšaju lokalni red konvergencije Njutnove metode na račun dodatnih izračunavanja funkcija, izvoda i promena u koracima iteracija. Sve ove modifikaciju idu u smeru povećanja reda konvergencije sa ciljem da se poveća njihova efikasnost.

Cilj ovog rada je da se razvije familija metoda, koja predstavlja uopštenje metode date u radu [18], gde je razvijena modifikacija Njutnovog postupka šestog reda konvergencije. Ova modifikacija je zasnovana na rezultatu rada [17], gde je data modifikacija Njutnovog postupka trećeg reda konvergencije. Postupajući na sličan način dajemo familiju postupaka šestog reda konvergencije, koristeći rezultate radova [6], [8] i [18].

Master rad je podeljen u četiri dela. U prvom delu rada dajemo oznake, definicije i teoreme koje ćemo koristiti u daljem radu. Drugi deo rada sadrži teoreme i algoritme koje se odnose na iterativne postupake šestog reda konvergencije za rešavanje nelinearnih jednačina datih u radovima [3], [5], [6], [8], [9], [13], [14], [18]. U trećem delu posmatramo modifikacije iterativnih postupaka opisanih u drugom delu, neke njihove specijalne slučajeve i naše modifikacije Njutnovog postupka šestog reda konvergencije. Kao originalni rezultat dajemo modifikacije Njutnovog postupka šestog reda konvergencije, koje kao specijalan slučaj sadrže postupak iz [18]. Ove modifikacije su zasnovane na rezultatima radova [6] i [8]. Za izabrane postupke, pod određenim pretpostavkama, dokazujemo konvergenciju i određujemo red konvergencije. Za ove postupke određujemo indekse efikasnosti i upoređujemo dobijene rezultate sa odgovarajućim indeksima iz radova [3], [9], [15] i [18].

U poslednjem delu rada prikazaćemo numeričke eksperimente urađene u programskom paketu *Mathematica 8*. Primeri su uzeti iz navedenih radova, a najviše iz [6], [8], [9] i [18]. Na kraju rada je priložena literatura, na osnovu koje se došlo do dobijenih metoda.

***

Ovom prilikom se zahvaljujem svom mentoru, profesoru dr Dragoslavu Hercegu na korisnim savetima i sugestijama u izradi ovog master rada. Zahvaljujem se članovima komisije, zaposlenima u biblioteci i svim profesorima sa kojima sam sarađivala u toku osnovnih studija.

Takođe, veliku zahvalnost dugujem mojoj porodici, koja me je sve ove godine nesebično podržavala i bodrila.

Novi Sad, septembar 2013. godine Maja Četić

1. Uvodni deo

1.1. Oznake

- $D = [a, b]$ – interval kojem pripada niz x_k
- α – rešenje jednačine $f(x) = 0$
- $\alpha = \lim_{k \to \infty} x_k$ – granična vrednost niza x_k
- $C_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$ – asimptotska konstanta greške
- $e_n = x_n - \alpha$ – greška u n-toj iteraciji
- $e_{n+1} = Ce_n^p + O(e_n^{p+1})$ – jednačina greške
- p – red konvergencije iterativnog postupka
- m – broj funkcionalnih evaluacija po iteraciji
- $p^{\frac{1}{m}}$ – indeks efikasnosti metode

1.2. Definicije i teoreme

Kako je tema ovog rada, ne samo nalaženje tačnih ili približnih rešenja nelinearnih jednačina, nego i brzina kojom dolazimo do tih rešenja, uvešćemo prvo definicije koje nam daju objašnjenje nekih osnovnih pojmova kojima ćemo se baviti.

Definicija 1. Svaki realan broj α, za koji važi da je $f(\alpha) = 0$, nazivamo *rešenje* ili *koren* jednačine $f(x) = 0$.

Koren jednačine $f(x) = 0$ nazivamo i *nula* funkcije *f*.

Definicija 2. Nula α je *višestrukosti s*, ako je $f(x) = (x - \alpha)^s g(x)$, gde je $g(x)$ ograničeno u α i $g(\alpha) \neq 0$.

Za *s* se uvek uzima pozitivan ceo broj. Ako je $s = 1$, onda kažemo da je koren *prost* ili *jednostruk*, a ako je $s > 1$, onda je *višestruk*.

Definicija 3. Neka je $F: D[a, b] \to \mathbb{R}$.. Broj $\alpha \in D$ je *nepokretna tačka funkcije* F ako je

$$\alpha = F(\alpha).$$

Neka je x_0 proizvoljan broj iz intervala $[a, b]$. Formirajmo niz brojeva $x_0, x_1, x_2, \dots$ prema

$$x_{k+1} = F(x_k), \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ovaj niz je moguće formirati samo ako $F(x_k) \in [a, b]$, $k = 0, 1, 2, \dots$, zbog definisanosti funkcije F na intervalu $[a, b]$. Očigledno, ako funkcija F preslikava interval $[a, b]$ u samog sebe, važi $F(x_k) \in [a, b]$, $k = 0, 1, 2, \dots$ Ako je niz $x_0, x_1, x_2, \dots$ dobro definisan i ima graničnu vrednost, tj. za neko $\alpha \in [a, b]$ važi

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \alpha,$$

onda je α rešenje jednačine $F(x) = x$, ako je funkcija F neprekidna na intervalu $[a, b]$. Naime, iz $F(x_k) \in [a, b]$, za svako $x \in [a, b]$, a zbog neprekidnosti funkcije F sledi

$$\alpha = \lim_{k \to \infty} x_{k+1} = \lim_{k \to \infty} F(x_k) = F\left(\lim_{k \to \infty} x_k\right) = F(\alpha)$$

Dakle, ako niz $x_0, x_1, x_2, \dots$ konvergira ka α, tada je njegova granična vrednost, α, rešenje jednačine $F(x) = x$, a članovi tog niza aproksimiraju to rešenje.

Ovaj postupak, u kome računamo vrednosti $x_0, x_1, x_2, \dots$ prema $x_{k+1} = F(x_k)$, je primer *iterativnog postupka* (*postupak sukcesivnih aproksimacija*), gde je $x_{k+1} = F(x_k)$ iterativno pravilo, funkcija F funkcija koraka, a niz $x_0, x_1, x_2, \dots$ je iterativni niz. Prvi član tog niza x_0 je *početna aproksimacija* (startna vrednost). Kada iterativni niz konvergira za proizvoljnu početnu vrednost iz nekog skupa, kažemo da iterativni postupak konvergira.

Definicija 4. Ako niz $\{x_k | k \geq 0\}$ teži ka granici α, tako da

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^p} = C$$

za neko $C \neq 0$ i $p \geq 1$, onda je *red konvergencije niza* jednak p, a C je *asimptotska konstanta greške*.

Ako je $p = 1$, konvergencija je linearna, dok za $p = 2$ i $p = 3$, niz konvergira kvadratno i kubno, redom. Ako je $p > 3$, onda je konvergencija 4. reda, 5. reda, 6. reda itd. Vrednost p je red konvergencije metode koju generiše niz $\{x_k | k \geq 0\}$.

Definicija 5. Ako je $e_n = x_n - \alpha$ greška u n-toj iteraciji, relacija

$$e_{n+1} = C e_n^p + O(e_n^{p+1}),$$

gde je C asimptotska konstanta greške, a p red konvergencije, se naziva *jednačina greške postupka*.

Definicija 6. Konvergentan niz $x_0, x_1, x_2, \ldots$, čija je granična vrednost α, ima red konvergencije $p \in (1, \infty)$, ako postoji konstanta C različita od nule i prirodan broj n_0, takvi da je

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq C |x_n - \alpha|^p, \qquad n \geq n_0$$

Ako je $p = 1$, onda dodatno pretpostavljamo da je $C < 1$.

Definicija 7. Red konvergencije iterativnog postupka jednak je redu konvergencije iterativnog niza dobijenog posmatranim iterativnim postupkom.

Definicija 8. Kažemo da je iterativni postupak sa redom konvergencije p_1 brži od iterativnog postupka sa redom konvergencije p_2, ako je $p_1 > p_2$.

Definicija 9. Neka je α rešenje jednačine $f(x)$ i pretpostavimo da su x_{n+1}, x_n, x_{n-1} tri uzastopne iteracije blizu rešenja α. Tada se *računski red konvergencije* ρ može aproksimirati pomoću formule

$$\rho \approx \frac{ln\left|\frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha}\right|}{ln\left|\frac{x_n - \alpha}{x_{n-1} - \alpha}\right|}.$$

Obzirom da ćemo u analizi konvergencije za aproksimaciju određenih funkcija koristiti linearnu interpolaciju za konkretne dve tačke ili Taylor-ov razvoj funkcije u okolini korena funkcije, definisaćemo upravo pomenuto.

Definicija 10. Neka su u koordinatnom sistemu date dve tačke (x_1, y_1) i (x_2, y_2). Konstrukcija (umetanje) treće tačke izmedju dve zadate, po formuli

$$y - y_1 = \frac{(x - x_1)(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1}$$

se naziva *linearna interpolacija*.

Mi ćemo, zbog jednostavnosti i preglednosti, koristiti izmenjen oblik ove formule

$$y = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} y_2 + \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} y_1$$

Definicija 11. Neka je funkcija $f(x)$ n puta diferencijabilna u tački $x = a$. Za polinomnu funkciju $T_n(x)$ određenu formulom

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

kažemo da je *Taylor-ov polinom* ili *Taylor-ov razvoj u red*, koji u tački $x = a$ odgovara funkciji *f*.

Definicija 12. Funkcionalni red oblika

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - c)^n$$

naziva se *stepeni* ili *potencijalni red*, gde a_n predstavlja koeficijent *n*-tog sabirka, *c* je konstanta, a *x* je promenljiva u okolini *c*.

Stepeni redovi se često javljaju i kao primeri Tejlorovih redova. Mi ćemo ovde dati primere nekoliko stepenih redova koje ćemo koristiti u daljem radu.

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$
$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$
$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} x^0 + \binom{n}{1} x^1 + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \cdots$$
$$\sqrt{1 + x} = (1 + x)^{\frac{1}{2}} = \binom{\frac{1}{2}}{0} x^0 + \binom{\frac{1}{2}}{1} x^1 - \binom{\frac{1}{2}}{2} x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3} x^3 - \cdots$$
$$\sqrt[p]{1 + x} = (1 + x)^{\frac{1}{p}} = \binom{\frac{1}{p}}{0} x^0 + \binom{\frac{1}{p}}{1} x^1 - \binom{\frac{1}{p}}{2} x^2 + \binom{\frac{1}{p}}{3} x^3 - \cdots$$

Teorema 1. [7] Neka je $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija koja na krajevima intervala $[a, b]$ ima vrednosti različitog znaka, tj. $f(a)f(b) < 0$. Tada dati interval sadrži bar jedan koren jednačine $f(x) = 0$. Taj koren je jedinstven ukoliko funkcija f ima prvi izvod f', koji ne menja znak na intervalu $[a, b]$.

Teorema 2. [7] Neka je data neprekidna funkcija $F: [a, b] \to [a, b]$, diferencijabilna na intervalu $[a, b]$. Ako postoji broj q, takav da je:

$$|F'(x)| \leq q < 1$$

za $x \in [a, b]$, tada je iterativni proces konvergentan, bez obzira na $x_0 \in [a, b]$, a granična vrednost $\lim_{k \to \infty} x_k = \alpha$ predstavlja jedinstven koren jednačine $x = F(x)$ na intervalu $[a, b]$.

Teorema 3. [7] Neka je funkcija $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilna na datom intervalu, iterativni postupak $x_{k+1} = F(x_k)$ konvergira i neka je $\lim_{k \to \infty} x_k = \alpha$. Red konvergencije jednokoračnog postupka

$$x_{k+1} = F(x_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

je pozitivan ceo broj. Ovaj postupak ima red konvergencije p ako i samo ako je

$$\alpha = F(\alpha), \quad F^{(j)}(\alpha) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, p-1, \quad F^{(p)}(\alpha) \neq 0.$$

1.3. Efikasnost iterativnog postupka

Iterativni postupak je efikasniji ukoliko se postavljeni zadatak izvrši za što kraće vreme. Efikasnost nekog iterativnog metoda se definiše uvođenjem koeficijenta efikasnosti. Efikasnost se može uvesti na više načina, ali tako da je proporcionalna redu konvergencije iterativnog metoda (brzini izvršavanja algoritma do ispunjavanja nekog kriterijuma ili zadate tačnosti) i obrnuto proporcionalna obavljenom radu, recimo broju izračunavanja funkcija ili numeričkih operacija po iteraciji.

Koeficijent efikasnosti koji je uveo Traub je $\frac{p}{m}$, gde je p red konvergencije iterativnog postupka, a m je broj novih informacija (novih računanja vrednosti funkcije) potrebnih po iteraciji. Ostrovski, koristeći iste podatke, uvodi svoj koeficijent efikasnosti, koji iznosi $p^{\frac{1}{m}}$.

1.4. Uslov zaustavljanja iterativnog postupka

Obzirom da izračunavanje zavisi od preciznosti (ε) računara, moramo da prihvatimo približno rešenje radije nego tačan koren. Te stoga koristimo sledeći uslov zaustavljanja iterativnog procesa za kompjuterske programe:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon.$$

.

Kod mnogih automatizovanih numeričkih algoritama računanje iterativnih aproksimacija se prekida ako je razlika dve uzastopne aproksimacije manja od date tolerenacije, te se tako računaju aproksimacije $x_0, x_1, x_2, \ldots$, gde se x_{n+1} prihvata kao dovoljna aproksimacija tačnog rešenja α ako je $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$, gde je ε data tolerancija. Ovaj postupak se može opisati i terminom nejednakosti zaustavljanja.

Definicija 13. Nejednakost $|x_{n+1} - \alpha| \leq |x_{n+1} - x_n|$ nazivamo nejednakost zaustavljanja.

Ako za iterativni postupak važi nejednakost zaustavljanja, onda kao izlazni kriterijum, tj. kao kriterijum za prekidanje računanja, prihvatamo $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$, jer to obezbeđuje

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq \varepsilon.$$

U slučaju da iterativni postupak konvergira sporo, koristi se nešto izmenjen uslov zaustavljanja

$$|f(x_{n+1})| \leq \varepsilon.$$

2. Razvoj familija šestog reda konvergencije

Mnogi matematičari su se bavili problematikom rešavanja nelinearnih jednačina i nalaženjem što boljih i efikasnijih metoda za izračunavanje pomenutog problema. Cilj svakog poboljšavanja metoda je bio da se, počevši od Njutnove metode i njenih modifikacija, sa što manje funkcionalnih evaluacija, što manjim stepenom izvoda, a što većim redom konvergencije, dodje do efektivne metode.

Ovde ćemo navesti nekoliko značajnijih razvoja metoda do kojih su došli neki matematičari i na taj način postavili odredjene stukturalne algoritme za dalji razvoj i modifikacije metoda.

2.1. Neta metod

U ovom radu je razvijen metod šestog reda, tako što je iteracija sačinjena od jednog Njutnovog potkoraka koji prate dve potkoraka Njutnovog modifikovanog metoda. Prvo je dat jedan uopšten metod tj.

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}\frac{f(x_n) + af(y_n)}{f(x_n) + bf(y_n)}$$
$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}\frac{f(x_n) + cf(y_n) + df(z_n)}{f(x_n) + gf(y_n) + hf(z_n)}$$

gde su *a, b, c, d, g, h* proizvoljne konstante i koji je drugog reda konvergencije. A zatim se jednostavnim transformacijama i izborom konstanti $a = -\frac{1}{2}, b = a - 2 = -\frac{5}{2}, c = -1, d = 0,$ $g = -3, h = 0$ dolazi do željenog metoda

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}\frac{f(x_n) - \frac{1}{2}f(y_n)}{f(x_n) - \frac{5}{2}f(y_n)}$$
$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}\frac{f(x_n) - f(y_n)}{f(x_n) - 3f(y_n)}$$

koji ima konvergenciju šestog reda i zadovoljava jednačinu greške:

$$e_{n+1} = \frac{1}{72} C_2 C_3^2 e_n^6 + O(e_n^7).$$

Ovaj metod zahteva isti broj izračunavanja funkcija po iteraciji, kao i metod konstruisan iz jednog potkoračnog Njutnovog metoda, praćen sa dve potkoraka sekant metode, što znači da zahteva tri izračunavanja funkcije i jedan prvi izvod po iteraciji. Red sekant metode je približno 1,62, dok je red predložene metode 5,2.

2.2. Sharma i Guha metod

Poznati Ostrovski metod četvrtog reda konvergencije je dat sa

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \frac{f(x_n)}{f(x_n) - 2f(z_n)}$$

na osnovu koga su Grau i Diaz-Barrero razvili varijantu metoda, koji je definisana sa

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \frac{f(x_n)}{f(x_n) - 2f(z_n)}$$
$$\tilde{x}_{n+1} = x_{n+1} - \frac{f(x_{n+1})}{f'(x_n)} \frac{f(x_n)}{f(x_n) - 2f(z_n)}$$

i koji red konvergencije sa četiri poboljšava na šest.

Sharma i Guha su takođe razvili metod koji poboljšava red konvergencije Ostrovskog. Naime, oni su postavili sledeću iterativnu shemu srednje tačke

$$\left.\begin{aligned} z_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} &= z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \frac{f(x_n)}{f(x_n) - 2f(z_n)} \\ \tilde{x}_{n+1} &= x_{n+1} - \frac{f(x_{n+1})}{f'(x_n)} \frac{f(x_n) + af(z_n)}{f(x_n) + bf(z_n)} \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.1)$$

gde su a i b parametri koji se određuju iz sledeće teoreme:

Teorema 4. [9] Neka je $f: I \to \mathbb{R}$ realna funkcija definisana na *I*, gde je *I* okolina prostog korena α od $f(x)$. Pretpostavimo da $f(x)$ ima neprekidne izvode sve do četvrtog reda na *I*. Onda iterativna shema (2.2.1) definiše familiju jednog parametra (npr. a) konvergencije šestog reda ako je $b = a - 2$.

Pa je predložena metoda

$$\left.\begin{aligned} z_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} &= z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \frac{f(x_n)}{f(x_n) - 2f(z_n)} \\ \tilde{x}_{n+1} &= x_{n+1} - \frac{f(x_{n+1})}{f'(x_n)} \frac{f(x_n) + af(z_n)}{f(x_n) + (a-2)f(z_n)} \end{aligned}\right\} \tag{2.2.2}$$

gde je $a \in \mathbb{R}$, takođe šestog reda konvergencije.

U (2.2.2) se primećuje da je za $a = 0$, metoda Grau-a i Diaz-Barrero-a specijalni slučaj upravo navedene metode, koja, kao i njen specijalni slučaj, koristi tri izračunavanja funkcije i jedan prvi izvod funkcije po iteraciji, pa je indeks efikasnosti, koristeći već pomenutu formulu Ostrovskog, jednak 1,565.

2.3. Kou i Li metod

Razvoj Kou i Li metoda sa konvergencijom šestog reda polazi od Jarratt-ovog metoda četvrtog reda konvergencije, koji je dat sa:

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ J_f(x_n) &= \frac{3f'(y_n) + f'(x_n)}{6f'(y_n) - 2f'(x_n)} \\ x_{n+1} &= x_n - J_f(x_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{aligned}\right\} \tag{2.3.1}$$

Oni su zatim posmatrali iterativnu shemu iz dva koraka

$$
\left.\begin{aligned}
z_n &= x_n - J_f(x_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
x_{n+1} &= z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}
\end{aligned}\right\} \tag{2.3.2}
$$

gde su $f'(z_n)$ aproksimirali linearnom interpolacijom za tačke $(x_n, f'(x_n))$ i $(y_n, f'(y_n))$ i dobili

$$
f'(z_n) \approx \frac{3}{2}J_f(x_n)f'(y_n) + \left(1 - \frac{3}{2}J_f(x_n)\right)f'(x_n).
$$

Na ovaj način su dobili poboljšan Jarratt-ov metod

$$
\left.\begin{aligned}
y_n &= x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
z_n &= x_n - J_f(x_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
x_{n+1} &= z_n - \frac{f(z_n)}{\frac{3}{2}J_f(x_n)f'(y_n) + \left(1 - \frac{3}{2}J_f(x_n)\right)f'(x_n)}
\end{aligned}\right\} \tag{2.3.3}
$$

gde je

$$
J_f(x_n) = \frac{3f'(y_n) + f'(x_n)}{6f'(y_n) - 2f'(x_n)}
$$

koji sa četiri poboljšava red konvergencije na šest i za koji važi teorema

Teorema 5. [15] Pretpostavimo da funkcija $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za otvoreni interval D, ima prosti koren $\alpha \in D$. Ako je $f(x)$ dovoljno glatka u okolini korena α, onda je metoda definisana sa (2.3.3), šestog reda konvergencije.

Ovaj metod šestog reda konvergencije zahteva izračunavanje dve funkcije i dva prva izvoda funkcije, pa je indeks efikasnosti jednak 1,565.

2.4. Metod Chun-a

Polazna tačka Chun-ovog metoda je, kao i u odeljku 2.3, takođe Jarratt-ova metoda četvrtog reda konvergencije, data sa (2.3.1).

Chun je posmatrao istu dvokoračnu iterativnu shemu (2.3.2) kao i Kou i Li, ali je za razliku od njih, funkciju $f'(z_n)$ aproksimirao funkcijom $h(z_n)$, gde je h definisano sa

$$h(x) = ax^2 + bx + c$$

pod pretpostavkom da se $h(x)$ slaže sa $f'(x)$ u tačkama $(x_n, f'(x_n))$ i $(y_n, f'(y_n))$. Na taj način je dobio aproksimaciju

$$f'(z_n) \approx h(z_n) = a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + \frac{3}{2}J_f(x_n)f'(y_n) + \left(1 - \frac{3}{2}J_f(x_n)\right)f'(x_n)$$

pa je dobijeni metod

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = x_n - J_f(x_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + \frac{3}{2}J_f(x_n)f'(y_n) + \left(1 - \frac{3}{2}J_f(x_n)\right)f'(x_n)},$$

gde je

$$J_f(x_n) = \frac{3f'(y_n) + f'(x_n)}{6f'(y_n) - 2f'(x_n)},$$

šestog reda konvergencije, koji zadovoljava jednačinu greške

$$e_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\frac{a}{f'(\alpha)} - c_3\right)\left(c_2^3 - c_2c_3 + \frac{1}{9}c_4\right)e_n^6 + O(e_n^7)$$

gde $a \in \mathbb{R}$.

Ovaj metod, kao i metod Kou i Li, takođe zahteva izračunavanja dve funkcije i dva prva izvoda po iteraciji, pa je indeks efikasnosti jednak 1,565.

Primećuje se da je Kou i Li metod zapravo specijalni slučaj upravo date familije Chun-a, kad je $a = 0$. Za $a = -1$ metod je takođe šestog reda konvergencije.

2.5. Kou metod

Chebyshev-Halley familija metoda trećeg reda konvergencije je definisana na sledeći način:

$$\left.\begin{aligned} L_f(x_n) &= \frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2} \\ x_{n+1} &= x_n - \left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{L_f(x_n)}{1-\alpha L_f(x_n)}\right)\cdot\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{aligned}\right\} \tag{2.5.1}$$

Ova familija sadrži klasični Chebyshev metod za $\alpha = 0$, Halley-ev metod za $\alpha = \frac{1}{2}$ i Super-Halley-ev metod za $\alpha = 1$.

U cilju poboljšanja lokalnog reda konvergencije Chebyshev-Halley-evih metoda, razvijene su metode petog i šestog reda konvergencije. Koristeći Tejlorovu aproksimaciju za inverzne funckije, razvijena je sledeća metoda petog reda:

$$M_\theta(x_n, x_{n+1}) = \frac{f''(x_n)(f(x_n) - \theta f(x_{n+1}))}{f'(x_n)^2}$$

$$\tilde{x}_{n+1} = x_{n+1} - \left(1 + \frac{M_\theta(x_n, x_{n+1})}{1 - \beta M_\theta(x_n, x_{n+1})}\right)\cdot\frac{f(x_{n+1})}{f'(x_n)}$$

gde je $\beta \in \mathbb{R}$. Ove metode mogu da poboljšaju red konvergencije i računske efikasnosti za klasične metode trećeg reda, korišćenjem dodatne procene funkcije.

Kou je predložio drugu modifikaciju Chebyshev-Halley-eve metode koja red konvergencije sa tri povećava na šest. Ta metoda ima sledeći oblik:

$$\tilde{x}_{n+1} = x_{n+1} - f(x_{n+1})\left[\frac{3(x_{n+1} - x_n)}{f(x_{n+1}) - f(x_n)} - \frac{2}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)(f(x_n) - \theta f(x_{n+1}))}{2f'(x_n)^3}\right]$$

gde je $\theta \in \mathbb{R}$ i metoda zadovoljava sledeću jednačinu greške:

$$\tilde{e}_{n+1} = [(2\theta\alpha - 4\alpha - 2\theta + 9)C_2^3 + (\theta - 7)C_2C_3 + C_4][2(1-\alpha)C_2^2 - C_3]e_n^6 + O(e_n^7).$$

Ovaj metod zahteva dva izračunavanja funkcije po iteraciji, jedan njen prvi izvod i jedan njen drugi izvod, pa je indeks efikasnosti 1,565, što je svakako bolje nego indeks efikasnosti Chebyshev-Halley metode trećeg reda, koji iznosi 1,442.

2.6. Kou i Wang metod

I u ovom, kao i u odeljku 2.5., se polazi od familije Chebyshev-Halley metoda trećeg reda konvergencije, date u (2.5.1).

Da bi se poboljšao lokalni red konvergencije Chebyshev-Halley-evih metoda, razvijene su razne metode višeg reda, među koje spada i metoda petog reda konvergencije, date od strane Kou i Li-a:

$$
\begin{aligned}
z_n &= x_n - \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{L_f(x_n)}{1 - \alpha L_f(x_n)}\right) \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
x_{n+1} &= z_n - \left(1 + \frac{L_f(x_n)}{1 - \beta L_f(x_n)}\right) \cdot \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}
\end{aligned}
$$

Aproksimacijom $f'(z_n)$ u datoj metodi se dolazi do metode sa poboljšanim redom konvergencije:

$$
\left.
\begin{aligned}
z_n &= x_n - \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{L_f(x_n)}{1 - \alpha L_f(x_n)}\right) \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
x_{n+1} &= z_n - \left(1 + \frac{L_f(x_n)}{1 - \beta L_f(x_n)} + \theta \frac{f(z_n)}{f(x_n) - \gamma f(z_n)}\right) \cdot \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}
\end{aligned}
\right\} \qquad (2.6.1)
$$

gde je izbor realnih parametara α, β, γ i θ, određen sledećom teoremom

Teorema 6. [14] Pretpostavimo da funkcija $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za otvoreni interval *D*, ima prosti koren $x^* \in D$. Neka je $f(x)$ dovoljno glatka funkcija u okolini korena x^*. Tada je red konvergencije metode (2.6.1), jednak šest, ako je $\beta = \frac{3}{2}\alpha$, $\theta = 3$.

Pa se primenom poslednje teoreme dobija sledeća metoda šestog reda:

$$
\left.
\begin{aligned}
z_n &= x_n - \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{L_f(x_n)}{1 - \alpha L_f(x_n)}\right) \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
x_{n+1} &= z_n - \left(1 + \frac{L_f(x_n)}{1 - \frac{3}{2} L_f(x_n)} + 3 \frac{f(z_n)}{f(x_n) - \gamma f(z_n)}\right) \cdot \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}
\end{aligned}
\right\} \qquad (2.6.2)
$$

gde je $\gamma \in \mathbb{R}$.

Metod (2.6.2) metodi (2.5.1) dodaje samo jednu procenu funkcije, ali se njen red konvergencije povećava sa tri na šest.

Ova familija metoda sadrži i varijante Chebyshev metode za $\alpha = 0$ i Halley metode za $\alpha = \frac{1}{2}$ i Super-Halley metode za $\alpha = 1$.

Po iteraciji, ova metoda zahteva dva izračunavanja funkcije, jedan njen prvi izvod i jedan njen drugi izvod, pa je indeks efikasnosti jednak 1,565.

2.7. Parhi i Gupta metod

Za ovaj rad je korišćen metod trećeg reda konvergencije Weerakoon-a i Fernando-a za rešavanje nelinearnih jednačina:

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)}$$

koji je generalizovan na oblik

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$z_n = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)}$$
$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

gde je, linearnom interpolacijom za tačke $(x_n, f'(x_n))$ i $(y_n, f'(y_n))$, dobijena aproksimacija funkcije $f'(z_n)$

$$f'(z_n) \approx \frac{f'(x_n)(3f'(y_n) - f'(x_n))}{f'(x_n) + f'(y_n)}$$

pa je dobijen metod šestog reda konvergencije

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ z_n &= x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)} \\ x_{n+1} &= z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \frac{f'(x_n) + f'(y_n)}{3f'(y_n) - f'(x_n)} \end{aligned}\right\} \qquad (2.7.1)$$

za koji važi sledeća teorema:

Teorema 7. [18] Neka $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ima neprekidne izvode do trećeg reda na $\mathbb{R}$. Ako $f(x)$ ima prosti koren α na $\mathbb{R}$ i x_0 je blizu α, onda greška metode (2.7.1) zadovoljava jednačinu

$$e_{n+1} = C_2\left((C_2^2 - C_3)^2 - \frac{9}{4}C_3^2\right)e_n^6 + O(e_n^7).$$

Dobijeni metod zahteva dve evaluacije funkcije i dva prva izvoda po iteraciji, pa je indeks efikasnosti 1,565, što je bolje od indeksa efikasnosti Njutnovog metoda koji iznosi 1,414 i od indeksa efikasnosti metode Weerakoon i Fernando-a koji iznosi 1,442. Poredeći sa drugim metodama šestog reda koje imaju isti indeks efikasnosti, vidi se da ovaj metod efektivnije i brže konvergira ka korenu funkcije.

2.8. Herceg i Herceg modifikacije

U radovima [6] i [8] je primećeno da mnoge metode trećeg reda konvergencije imaju sličnu formu:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\phi(s(x_n))$$

gde je

$$s(x) = \frac{f'\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f'(x)}.$$

Pa su uzete neke modifikacije Njutnove metode bazirane na Stolarsky i Gini sredinama, date sa:

$$E_{r,p}(a,b) = \begin{cases} \left(\frac{r}{p}\cdot\frac{b^p-a^p}{b^r-a^r}\right)^{1/(p-r)}, & rp(r-p)\neq 0 \\ exp\left(-\frac{1}{r}+\frac{a^r lna - b^r lnb}{a^r-b^r}\right), & r=p\neq 0 \\ \left(\frac{1}{r}\cdot\frac{b^r-a^r}{lnb-lna}\right)^{1/r}, & r\neq 0, p\neq 0 \\ \sqrt{ab}, & r=p=0 \end{cases}$$

i

$$G_{r,p}(a,b) = \begin{cases} \left(\frac{a^p+b^p}{a^r+b^r}\right)^{1/(p-r)}, & r\neq p \\ exp\left(\frac{a^r lna + b^r lnb}{a^r+b^r}\right), & r=p\neq 0 \\ \sqrt{ab}, & r=p=0 \end{cases}$$

redom. Zatim, aproksimiranjem $f'(x_n)$ klasičnom Njutnovom metodom koristeći Stolarsky sredinu, dobija se Stolarsky sredina Njutnove metode (SN), gde je funkcija ϕ definisana sa:

$$\phi_{E,r,p}(s)=\begin{cases}\sqrt[r-p]{\frac{r(1-s^p)}{p(1-s^r)}}, & rp(r-p)\neq 0\\ exp\left(\frac{1}{r}+\frac{s^r\,lns}{1-s^r}\right), & r=p\neq 0\\ \sqrt[r]{\frac{r\cdot lns}{s^r-1}}, & r\neq 0, p\neq 0\\ \frac{1}{\sqrt{s}}, & r=p=0\end{cases}$$

Analogno, aproksimirajući $f'(x_n)$ klasičnom Njutnovom metodom pomoću Gini sredine, dobija se Gini sredina Njutnove metode (GN), gde je funkcija ϕ definisana sa:

$$\phi_{G,r,p}(s)=\begin{cases}\sqrt[p-r]{\frac{1+s^r}{1+s^p}}, & r\neq p\\ exp\left(-\frac{s^r\,lns}{1+s^r}\right), & r=p\neq 0\\ \frac{1}{\sqrt{s}}, & r=p=0\end{cases}$$

Lako se uočava da GN metoda sadrži *p*-stepenu Njutnovu metodu kao specijalni slučaj za $r=0$ i $p\neq 0$. Čak štaviše, kako su aritmetička, harmonijska i geometrijska sredina Njutnove metode specijalni slučajevi *p*-stepene sredine Njutnove metode za $p=1$, $p=-1$ i $p=0$, redom, ove metode su takođe i specijalni slučajevi GN metode, čije formule su date na sledeći način:

Aritmetička sredina Njutnove metode: $\phi(s)=\frac{2}{1+s}$

Harmonijska sredina Njutnove metode: $\phi(s)=\frac{1+s}{2s}$

Geometrijska sredina Njutnove metode: $\phi(s)=\frac{1}{\sqrt{s}}$

p-stepena sredina Njutnove metode: $\phi(s)=\frac{\sqrt[p]{2}}{\sqrt[p]{1+s^p}}$

Teorema 8. [8] Neka je α jednostruka nula funkcije f, f ima dovoljan broj neprekidnih izvoda u okolini α i g je bilo koja funkcija sa $g(0)=1$, $g'(0)=\frac{1}{2}$ i $|g'(0)|<\infty$. Iteracija $x_{k+1}=F(x_k)$ sa $F(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}\left(g\big(t(x)\big)+h(x)f(x)^2\right)$, gde je $t(x)=\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$ i $h(x)$ funkcija vezana za α i zavisna od f i njenih izvoda, je trećeg reda.

Teorema 9. [8] Neka je $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ i neka f ima dovoljan broj neprekidnih izvoda na (a,b). Pretpostavimo da je α jednostruka nula funkcije f na (a,b). Ako je $f'(\alpha)>0$, onda postoji neko $\eta>0$, takvo da je: ako $|x_0-\alpha|<\eta$, onda niz $\{x_k\}$, generisan sa $x_{k+1}=F(x_k)$, gde je $F(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}\phi(s(x))$ i ϕ je $\phi_{S,r,p}$ ili $\phi_{G,r,p}$, postoji i konvergira kubno ka α.

3. Predložene metode sa analizom konvergencije

Posmatrajući princip po kom su nastale mnoge metode šestog reda konvergencije, navedene u 2. delu, možemo zaključiti da su sve razvijene generalizacijom tj. uvodjenjem dodatne funkcionalne evaluacije na postojeće metode nižeg reda konvergencije. Shodno sličnom principu, koristićemo metodu

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$z_n = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)}$$
$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

navedenu u odeljku 2.7. [18] i opštu formu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \phi(s(x_n))$$

gde je

$$s(x) = \frac{f'\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f'(x)}$$

navedenu u odeljku 2.8. [6] i [8]. Poseban akcenat ćemo staviti na funkciju $\phi(s(x_n))$, koja je u radovima [6] i [8] data kao aritmetička sredina Njutnove metode, harmonijska sredina Njutnove metode, geometrijska sredina Njutnove metode i p-stepena sredina Njutnove metode.

Naime, funkcija z_n je definisana na sličan način kao aritmetička sredina Njutnove metode, data u [2], tj.

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f'(x_n) + f'(y_n)}{2}}$$

Međutim, funkcija z_n se može zapisati i na sledeći način

$$z_n = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{2f'(x_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)}$$

gde vidimo da je funkcija

$$\frac{2f'(x_n)}{f'(x_n)+f'(y_n)} = \frac{\frac{2f'(x_n)}{f'(x_n)}}{\frac{f'(x_n)+f'(y_n)}{f'(x_n)}} = \frac{2}{1+\frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}}$$

zapravo

$$\phi(s) = \frac{2}{1+s}$$

gde je

$$s(x_n) = \frac{f'\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)} = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)},$$

aritmetička sredina Njutnove metode data upravo u onom obliku u kom je definisana u radovima [6] i [8].

Koristeći sve navedeno, dolazimo do sledećeg opšteg oblika modifikacje Njutnove metode:

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ z_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \cdot \phi\left(s(x_n)\right) \\ x_{n+1} &= z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

pomoću koje ćemo na analogan način razviti tri nove metode, uzimajući za funkciju $\phi(s(x_n))$ harmonijsku sredinu Njutnove metode, geometrijsku sredinu Njutnove metode i *p*-stepenu sredinu Njutnove metode, a aproksimaciju za $f'(z_n)$ ćemo dobijati korišćenjem linearne interpolacije za tačke $(x_n, f'(x_n))$ i $(y_n, f'(y_n))$.

3.1. Proširena harmonijska sredina Njutnove metode

Polazeći od opšteg modela modifikacije Njutnove metode date u (1), uzimamo za $\phi(s)$ harmonijsku sredinu Njutnove metode, tj.

$$\phi(s) = \frac{1+s}{2s}$$

gde je

$$s(x_n) = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{i} \qquad y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

odnosno

$$\phi(s(x_n)) = \frac{1 + \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}}{2\frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}} = \frac{\frac{f'(x_n)+f'(y_n)}{f'(x_n)}}{2\frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}} = \frac{f'(x_n)+f'(y_n)}{2f'(y_n)}$$

pa je

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{f'(x_n)+f'(y_n)}{2f'(y_n)}$$

Korišćenjem linearne interpolacije za tačke $(x_n, f'(x_n))$ i $(y_n, f'(y_n))$ dobijamo

$$f'(x) \approx \frac{x-x_n}{y_n-x_n} f'(y_n) + \frac{x-y_n}{x_n-y_n} f'(x_n)$$

pa je aproksimacija za $f'(z_n)$ data sa

$$f'(z_n) \approx \frac{z_n-x_n}{y_n-x_n} f'(y_n) + \frac{z_n-y_n}{x_n-y_n} f'(x_n)$$

$$f'(z_n) \approx \frac{-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{f'(x_n)+f'(y_n)}{2f'(y_n)}}{-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} f'(y_n) + \frac{-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{f'(x_n)+f'(y_n)}{2f'(y_n)} + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}{\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} f'(x_n)$$
$$= \frac{f'(x_n)f'(y_n) + f'(y_n)^2}{2f'(y_n)} + \left(-\frac{f'(x_n)+f'(y_n)}{2f'(y_n)} + 1\right) f'(x_n)$$
$$= \frac{f'(y_n)^2 - f'(x_n)^2 + 2f'(x_n)f'(y_n)}{2f'(y_n)}$$

Pa je predložena metoda za harmonijsku sredinu Njutnove metode

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ z_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{f'(x_n) + f'(y_n)}{2f'(y_n)} \\ x_{n+1} &= z_n - \frac{f(z_n)}{\frac{f'(y_n)^2 - f'(x_n)^2 + 2f'(x_n)f'(y_n)}{2f'(y_n)}} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

na osnovu koje imamo teoremu koja glasi:

Teorema 10. Pretpostavimo da funkcija $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za otvoreni interval *D*, ima prosti koren $\alpha \in D$. Neka je $f(x)$ dovoljno glatka funkcija u okolini korena α. Tada postupak (2) ima red konvergencije šest i jednačinu greške

$$e_{n+1} = -\frac{5}{4} C_2 C_3^2 e_n^6 + O(e_n^7)$$

gde je $C_j = \dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{j!\, f'(\alpha)}$ i $e_n = x_n - \alpha$.

Dokaz.

Neka je α koren funkcije $f(x)$ (tj. $f(\alpha) = 0$ i $f'(\alpha) \neq 0$) i $x_n = \alpha + e_n$. Koristeći Tejlorov razvoj, dobijamo sledeći izraz:

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(\alpha + e_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!} f^{(2)}(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(\alpha)e_n^3 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(\alpha)e_n^4 + O(e_n^5) \\ &= f'(\alpha)\left[e_n + \frac{1}{2!}\frac{f^{(2)}(\alpha)}{f'(\alpha)}e_n^2 + \frac{1}{3!}\frac{f^{(3)}(\alpha)}{f'(\alpha)}e_n^3 + \frac{1}{4!}\frac{f^{(4)}(\alpha)}{f'(\alpha)}e_n^4 + O(e_n^5)\right] \\ &= f'(\alpha)[e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + C_4 e_n^4 + O(e_n^5)] \end{aligned} \qquad (3)$$

gde je $C_j = \dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{j!\, f'(\alpha)}$.

Na sličan način Tejlorovim razvojem za $f'(x_n)$,dobijamo

$$f'(x_n) = f'(\alpha)[1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + 4C_4 e_n^3 + O(e_n^4)] \qquad (4)$$

Delimo (3) sa (4)

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= \frac{f'(\alpha)[e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + C_4 e_n^4 + O(e_n^5)]}{f'(\alpha)[1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + 4C_4 e_n^3 + O(e_n^4)]} = \\ &= [e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + C_4 e_n^4 + O(e_n^5)][1 - 2C_2 e_n - 3C_3 e_n^2 - 4C_4 e_n^3 + 4C_2^2 e_n^2 + 12C_2 C_3 e_n^3 \\ &\qquad - 8C_2^3 e_n^3 + O(e_n^4)] \end{aligned}$$

$$= e_n - 2C_2e_n^2 - 3C_3e_n^3 + 4C_2^2e_n^3 + C_2e_n^2 - 2C_2^2e_n^3 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)$$
$$= e_n - C_2e_n^2 + (2C_2^2 - 2C_3)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{5}$$

Kako je $e_n = x_n - \alpha$, za $x_n = e_n + \alpha$ i uz pomoć izraza (5), dobijamo sledeću jednakost

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} =$$
$$= e_n + \alpha - e_n + C_2e_n^2 - (2C_2^2 - 2C_3)e_n^3 + O(e_n^4)$$
$$= \alpha + C_2e_n^2 + (2C_3 - 2C_2^2)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{6}$$

Pa se ponovo Tejlorovim razvojem dobija

$$f'(y_n) = f'(\alpha)[1 + 2C_2^2e_n^2 + 4C_2(C_3 - C_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)] \tag{7}$$

Koristeći izraze (4) i (7), dobijamo sledeću jednakost

$$\frac{f'(x_n) + f'(y_n)}{2f'(y_n)} =$$
$$= \frac{f'(\alpha)[1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + 4C_4e_n^3 + 1 + 2C_2^2e_n^2 + 4C_2(C_3 - C_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)]}{2f'(\alpha)[1 + 2C_2^2e_n^2 + 4C_2(C_3 - C_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)]}$$
$$= \left[1 + C_2e_n + \left(C_2^2 + \frac{3}{2}C_3\right)e_n^2 + (4C_4 + 4C_2C_3 - 4C_2^3)e_n^3 + O(e_n^4)\right][1 - 2C_2^2e_n^2 - 4C_2(C_3 - C_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)]$$
$$= 1 + C_2e_n + \left(\frac{3}{2}C_3 - C_2^2\right)e_n^2 + (4C_4 - 2C_2^3)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{8}$$

Množimo (5) i (8)

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{f'(x_n) + f'(y_n)}{2f'(y_n)} =$$
$$= [e_n - C_2e_n^2 + (2C_2^2 - 2C_3)e_n^3 + O(e_n^4)][1 + C_2e_n + \left(\frac{3}{2}C_3 - C_2^2\right)e_n^2 + (4C_4 - 2C_2^3)e_n^3 + O(e_n^4)]$$
$$= e_n - \tfrac{1}{2}C_3e_n^3 + O(e_n^4) \tag{9}$$

Ponovo koristimo $x_n = e_n + \alpha$ i izraz (9)

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{f'(x_n) + f'(y_n)}{2f'(y_n)} =$$
$$= e_n + \alpha - e_n + \frac{1}{2}C_3e_n^3 + O(e_n^4)$$
$$= \alpha + \tfrac{1}{2}C_3e_n^3 + O(e_n^4) \tag{10}$$

Tejlorovim razvojem za izraz (10), dobijamo

$$f(z_n) = f'(\alpha)[\tfrac{1}{2}C_3e_n^3 + \tfrac{1}{4}C_2C_3^2e_n^6 + O(e_n^7)] \tag{11}$$

Kvadriramo izraze (4) i (7)

$$f'(x_n)^2 = f'(\alpha)^2[1 + 4C_2e_n + (4C_2^2 + 6C_3)e_n^2 + (8C_4 + 12C_2C_3)e_n^3 + O(e_n^4)] \tag{12}$$

$$f'(y_n)^2 = f'(\alpha)^2[1 + 4C_2^2e_n^2 + 8C_2(C_3 - C_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)] \tag{13}$$

i množimo izraze (4) i (7)

$$f'(x_n)\cdot f'(y_n) = f'(\alpha)^2[1 + 2C_2e_n + (2C_2^2 + 3C_3)e_n^2 + 4(C_2C_3 + C_4)e_n^3 + O(e_n^4)] \tag{14}$$

Iz izraza (12), (13) i (14) sledi

$$\begin{aligned}
&f'(y_n)^2 - f'(x_n)^2 + 2f'(x_n)\cdot f'(y_n) = \\
&= f'(\alpha)[1 + 4C_2^2e_n^2 + 8C_2(C_3 - C_2^2)e_n^3 + O(e_n^4) - 1 - 4C_2e_n - (4C_2^2 + 6C_3)e_n^2 - \\
&(8C_4 + 12C_2C_3)e_n^3 + O(e_n^4) + 1 + 2C_2e_n + (2C_2^2 + 3C_3)e_n^2 + 4(C_2C_3 + C_4)e_n^3 + O(e_n^4)] \\
&= 2f'(\alpha)^2[1 + 2C_2^2e_n^2 + (2C_2C_3 - 4C_2^3)e_n^3 + O(e_n^4)]
\end{aligned} \tag{15}$$

Deljenjem (15) sa dvostrukim (7), dobijamo

$$\begin{aligned}
&\frac{f'(y_n)^2 - f'(x_n)^2 + 2f'(x_n)\cdot f'(y_n)}{2f'(y_n)} = \\
&= f'(\alpha)[1 + 2C_2^2e_n^2 + (2C_2C_3 - 4C_2^3)e_n^3 + O(e_n^4)][1 - 2C_2^2e_n^2 - 4C_2(C_3 - C_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)] \\
&= f'(\alpha)[1 - 2C_2^2e_n^2 - (4C_2C_3 - 4C_2^3)e_n^3 + 2C_2^2e_n^2 + (2C_2C_3 - 4C_2^3)e_n^3 + O(e_n^4)] \\
&= \ f'(\alpha)[1 - 2C_2C_3e_n^3 + \ O(e_n^4)]
\end{aligned} \tag{16}$$

Konačno, deljenjem (11) sa (16) se dobija

$$\begin{aligned}
&\frac{f(z_n)}{\dfrac{f'(y_n)^2 - f'(x_n)^2 + 2f'(x_n)\cdot f'(y_n)}{2f'(y_n)}} = \\
&= \frac{f'(\alpha)[\frac{1}{2}C_3e_n^3 + \frac{1}{4}C_2C_3^2e_n^6 + O(e_n^7)]}{f'(\alpha)[1 - 2C_2C_3e_n^3 + \ O(e_n^4)]} \\
&= \left[\frac{1}{2}C_3e_n^3 + \frac{1}{4}C_2C_3^2e_n^6 + O(e_n^7)\right][1 + 2C_2C_3e_n^3 + \ O(e_n^4)] \\
&= \frac{1}{2}C_3e_n^3 + C_2C_3^2e_n^6 + \frac{1}{4}C_2C_3^2e_n^6 + O(e_n^7) \\
&= \tfrac{1}{2}C_3e_n^3 + \tfrac{5}{4}C_2C_3^2e_n^6 + O(e_n^7)
\end{aligned} \tag{17}$$

Iz (10) i (17) dobijamo izraz

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{\frac{f'(y_n)^2 - f'(x_n)^2 + 2f'(x_n)f'(y_n)}{2f'(y_n)}} =$$
$$= \alpha + \frac{1}{2}C_3e_n^3 + O(e_n^4) - \frac{1}{2}C_3e_n^3 - \frac{5}{4}C_2C_3^2e_n^6 + O(e_n^7)$$
$$= \alpha - \frac{5}{4}C_2C_3^2e_n^6 + O(e_n^7) \tag{18}$$

Pa je iz $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$ i (18)

$$e_{n+1} = -\frac{5}{4}C_2C_3^2e_n^6 + O(e_n^7) \tag{19}$$

što je po Definiciji 5, metoda 6. reda konvergencije i time je teorema dokazana.

□

3.2. Proširena geometrijska sredina Njutnove metode

Sada ćemo u izrazu (1) za funkciju $\phi(s(x_n))$ uzeti geometrijsku sredinu Njutnove metode tj.

$$\phi(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}$$

gde je

$$s(x_n) = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}$$

pa je

$$\phi(s(x_n)) = \frac{\sqrt{f'(x_n)}}{\sqrt{f'(y_n)}}.$$

A zatim uvrštavanjem funkcije $\phi(s(x_n))$ u funkciju z_n, dobijamo sledeću jednakost

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \cdot \phi(s(x_n)) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{\sqrt{f'(x_n)}}{\sqrt{f'(y_n)}} = x_n - \frac{f(x_n)}{\sqrt{f'(x_n)f'(y_n)}}$$

Aproksimacija za $f'(z_n)$ linearnom interpolacijom za tačke $(x_n, f'(x_n))$ i $(y_n, f'(y_n))$ je

$$\begin{aligned}
f'(z_n) &\approx \frac{z_n - x_n}{y_n - x_n} f'(y_n) + \frac{z_n - y_n}{x_n - y_n} f'(x_n) = \\
&= \frac{x_n - \frac{f(x_n)}{\sqrt{f'(x_n)f'(y_n)}} - x_n}{x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - x_n} f'(y_n) + \frac{x_n - \frac{f(x_n)}{\sqrt{f'(x_n)f'(y_n)}} - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}{x_n - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} f'(x_n) \\
&= \frac{f'(x_n)\left(f'(y_n) - f'(x_n) + \sqrt{f'(x_n)f'(y_n)}\right)}{\sqrt{f'(x_n)f'(y_n)}}
\end{aligned}$$

Pa je predložena metoda za geometrijsku sredinu Njutnove metode

$$\left.\begin{aligned}
y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
z_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{\sqrt{f'(x_n)f'(y_n)}} \\
x_{n+1} &= z_n - \frac{f(z_n)}{\frac{f'(x_n)\left(f'(y_n) - f'(x_n) + \sqrt{f'(x_n)f'(y_n)}\right)}{\sqrt{f'(x_n)f'(y_n)}}}
\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Teorema 11. Pretpostavimo da funkcija $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za otvoreni interval D, ima prosti koren $\alpha \in D$. Neka je $f(x)$ dovoljno glatka funkcija u okolini korena α. Tada postupak (20) ima red konvergencije šest i jednačinu greške

$$e_{n+1} = C_2\left(\frac{1}{2}C_2^2 + \frac{1}{2}C_3\right)\left(\frac{1}{2}C_2^2 - \frac{5}{2}C_3\right)e_n^6 + O(e_n^7)$$

gde je $C_j = \dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{j!\, f'(\alpha)}$ i $e_n = x_n - \alpha$.

Dokaz.

Obzirom da su $f'(x_n)$ i $f'(y_n)$ iste funkcije kao i za proširenu harmonijsku sredinu, koristićemo izraz (14), koji ćemo korenovati

$$\begin{aligned}
&\sqrt{f'(x_n)\cdot f'(y_n)} = \\
&= f'(\alpha)[1 + \frac{1}{2}(2C_2e_n + (2C_2^2 + 3C_3)e_n^2 + (4C_2C_3 + 4C_4)e_n^3) \\
&\qquad - \frac{1}{8}(4C_2^2e_n^2 + 4C_2(2C_2^2 + 3C_3)e_n^3) + \frac{1}{16}8C_2^3e_n^3 + O(e_n^4)] \\
&= f'(\alpha)[1 + C_2e_n + \left(\tfrac{3}{2}C_3 + \tfrac{1}{2}C_2^2\right)e_n^2 + \left(2C_4 + \tfrac{1}{2}C_2C_3 - \tfrac{1}{2}C_2^3\right)e_n^3 + O(e_n^4)]
\end{aligned} \tag{21}$$

Delimo izraz (3) sa izrazom (21)

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x_n)}{\sqrt{f'(x_n)\cdot f'(y_n)}} = \frac{f'(\alpha)[e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + C_4e_n^4 + O(e_n^5)]}{f'(\alpha)\left[1 + C_2e_n + \left(\frac{3}{2}C_3 + \frac{1}{2}C_2^2\right)e_n^2 + \left(2C_4 + \frac{1}{2}C_2C_3 - \frac{1}{2}C_2^3\right)e_n^3 + O(e_n^4)\right]} \\
&= [e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + C_4e_n^4 + O(e_n^5)]\Big[1 - C_2e_n - \left(\frac{3}{2}C_3 + \frac{1}{2}C_2^2\right)e_n^2 \\
&\qquad - \left(2C_4 + \frac{1}{2}C_2C_3 - \frac{1}{2}C_2^3\right)e_n^3 + C_2^2e_n^2 + 2C_2(\frac{3}{2}C_3 + \frac{1}{2}C_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)\Big] \\
&= e_n - C_2e_n^2 - \left(\frac{3}{2}C_3 + \frac{1}{2}C_2^2\right)e_n^3 + C_2^2e_n^3 + C_2e_n^3 - C_2e_n^3 + C_3e_n^3 + O(e_n^4) \\
&= e_n - \left(\tfrac{1}{2}C_3 + \tfrac{1}{2}C_2^2\right)e_n^3 + O(e_n^4)
\end{aligned} \tag{22}$$

A zatim iz $x_n = e_n + \alpha$ i (22) dobijamo

$$\begin{aligned}
&z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{\sqrt{f'(x_n)f'(y_n)}} = \\
&= e_n + \alpha - e_n + \left(\frac{1}{2}C_3 + \frac{1}{2}C_2^2\right)e_n^3 + O(e_n^4) \\
&= \alpha + \left(\tfrac{1}{2}C_3 + \tfrac{1}{2}C_2^2\right)e_n^3 + O(e_n^4)
\end{aligned} \tag{23}$$

Ponovo primenjujemo Tejlorov razvoj na (23)

$$f(z_n) = f'(\alpha)\left[\left(\frac{1}{2}C_3 + \frac{1}{2}C_2^2\right)e_n^3 + C_2\left(\frac{1}{2}C_3 + \frac{1}{2}C_2^2\right)^2 e_n^6 + O(e_n^7)\right] \tag{24}$$

A zatim iz (4), (7) i (21) sledi

$$\begin{aligned} &f'(y_n) - f'(x_n) + \sqrt{f'(x_n)\cdot f'(y_n)} = \\ &= f'(\alpha)\left[1 - C_2e_n + \left(\frac{5}{2}C_2^2 - \frac{3}{2}C_3\right)e_n^2 + \left(\frac{9}{2}C_2C_3 - \frac{9}{2}C_2^3 - 2C_4\right)e_n^3 + O(e_n^4)\right] \end{aligned} \tag{25}$$

Množenjem (4) i (25) dobijamo

$$\begin{aligned} &f'(x_n)\left(f'(y_n) - f'(x_n) + \sqrt{f'(x_n)\cdot f'(y_n)}\right) = \\ &= f'(\alpha)^2[1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + 4C_4e_n^3 + O(e_n^4)][1 - C_2e_n + \left(\frac{5}{2}C_2^2 - \frac{3}{2}C_3\right)e_n^2 \\ &\qquad + \left(\frac{9}{2}C_2C_3 - \frac{9}{2}C_2^3 - 2C_4\right)e_n^3 + O(e_n^4)] \\ &= f'(\alpha)^2[1 + C_2e_n + \left(\frac{1}{2}C_2^2 + \frac{3}{2}C_3\right)e_n^2 + \left(-\frac{3}{2}C_2C_3 + \frac{1}{2}C_2^3 + 2C_4\right)e_n^3 + O(e_n^4)] \end{aligned} \tag{26}$$

Iz deljenja (26) sa (21) sledi

$$\begin{aligned} &\frac{f'(x_n)\left(f'(y_n) - f'(x_n) + \sqrt{f'(x_n)\cdot f'(y_n)}\right)}{\sqrt{f'(x_n)\cdot f'(y_n)}} = \\ &= f'(\alpha)\left[1 + C_2e_n + \left(\frac{1}{2}C_2^2 + \frac{3}{2}C_3\right)e_n^2 + \left(-\frac{3}{2}C_2C_3 + \frac{1}{2}C_2^3 + 2C_4\right)e_n^3 + O(e_n^4)\right]\left[1 - C_2e_n\right. \\ &\qquad - \left(\frac{1}{2}C_2^2 + \frac{3}{2}C_3\right)e_n^2 - \left(2C_4 + \frac{1}{2}C_2C_3 - \frac{1}{2}C_2^3\right)e_n^3 + C_2^2e_n^2 + 2C_2\left(\frac{1}{2}C_2^2 + \frac{3}{2}C_3\right)e_n^3 \\ &\qquad \left. - C_2^3e_n^3 + O(e_n^4)\right] \\ &= f'(\alpha)[1 + (C_2^3 - 2C_2C_3)e_n^3 + O(e_n^4)] \end{aligned} \tag{27}$$

I zatim opet delimo (24) sa (27)

$$\begin{aligned} &\frac{f(z_n)}{\frac{f'(x_n)\left(f'(y_n) - f'(x_n) + \sqrt{f'(x_n)\cdot f'(y_n)}\right)}{\sqrt{f'(x_n)\cdot f'(y_n)}}} = \\ &= \frac{f'(\alpha)[\left(\frac{1}{2}C_3 + \frac{1}{2}C_2^2\right)e_n^3 + C_2\left(\frac{1}{2}C_3 + \frac{1}{2}C_2^2\right)^2 e_n^6 + O(e_n^7)]}{f'(\alpha)[1 + (C_2^3 - 2C_2C_3)e_n^3 + O(e_n^4)]} = \\ &= \left[\left(\frac{1}{2}C_3 + \frac{1}{2}C_2^2\right)e_n^3 + C_2\left(\frac{1}{2}C_3 + \frac{1}{2}C_2^2\right)^2 e_n^6 + O(e_n^7)\right][1 - (C_2^3 - 2C_2C_3)e_n^3 + O(e_n^4)] \\ &= \left(\frac{1}{2}C_3 + \frac{1}{2}C_2^2\right)e_n^3 - \left(\frac{1}{2}C_3 + \frac{1}{2}C_2^2\right)(C_2^3 - 2C_2C_3)e_n^6 + C_2\left(\frac{1}{2}C_3 + \frac{1}{2}C_2^2\right)^2 e_n^6 + O(e_n^7) \\ &= \left(\frac{1}{2}C_3 + \frac{1}{2}C_2^2\right)e_n^3 + C_2\left(\frac{1}{2}C_3 + \frac{1}{2}C_2^2\right)\left(\frac{5}{2}C_3 - \frac{1}{2}C_2^2\right)e_n^6 + O(e_n^7) \end{aligned} \tag{28}$$

Uvrstimo (23) i (28) u x_{n+1}

$$x_{n+1} = \alpha + \left(\frac{1}{2}C_3 + \frac{1}{2}C_2^2\right)e_n^3 - \left(\frac{1}{2}C_3 + \frac{1}{2}C_2^2\right)e_n^3 - C_2\left(\frac{1}{2}C_3 + \frac{1}{2}C_2^2\right)\left(\frac{5}{2}C_3 - \frac{1}{2}C_2^2\right)e_n^6 + O(e_n^7)$$

$$x_{n+1} = \alpha - C_2\left(\frac{1}{2}C_3 + \frac{1}{2}C_2^2\right)\left(\frac{5}{2}C_3 - \frac{1}{2}C_2^2\right)e_n^6 + O(e_n^7)$$

pa se dobija jednačina greške

$$e_{n+1} = C_2\left(\frac{1}{2}C_2^2 + \frac{1}{2}C_3\right)\left(\frac{1}{2}C_2^2 - \frac{5}{2}C_3\right)e_n^6 + O(e_n^7)$$

što pokazuje da je, ponovo po Definiciji 5., i za geometrijsku sredinu Njutnove metode, predložena metoda 6. reda konvergencije.

□

3.3. Proširena p-stepena sredina Njutnove metode

Ponovo posmatramo izraz (1) i za funkciju $\phi\big(s(x_n)\big)$ sada uzimamo p-Stepenu sredinu Njutnove metode koja glasi

$$\phi(s) = \frac{\sqrt[p]{2}}{\sqrt[p]{1+s^p}}$$

gde je

$$s(x_n) = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}$$

pa je

$$\phi\big(s(x_n)\big) = \frac{\sqrt[p]{2}}{\sqrt[p]{1+\dfrac{f'(y_n)^p}{f'(x_n)^p}}} = \frac{\sqrt[p]{2}}{\sqrt[p]{\dfrac{f'(x_n)^p + f'(y_n)^p}{f'(x_n)^p}}} = \frac{\sqrt[p]{2}\, f'(x_n)}{\sqrt[p]{f'(x_n)^p + f'(y_n)^p}}$$

odakle dobijamo

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{\sqrt[p]{2}\, f'(x_n)}{\sqrt[p]{f'(x_n)^p + f'(y_n)^p}} = x_n - \frac{\sqrt[p]{2}\, f(x_n)}{\sqrt[p]{f'(x_n)^p + f'(y_n)^p}}.$$

A $f'(z_n)$ aproksimiramo linearnom interpolacijom za tačke $(x_n, f'(x_n))$ i $(y_n, f'(y_n))$

$$f'(z_n) \approx \frac{z_n - x_n}{y_n - x_n} f'(y_n) + \frac{z_n - y_n}{x_n - y_n} f'(x_n) =$$

$$= \frac{x_n - \dfrac{\sqrt[p]{2}\, f(x_n)}{\sqrt[p]{f'(x_n)^p + f'(y_n)^p}} - x_n}{x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} - x_n} f'(y_n) + \frac{x_n - \dfrac{\sqrt[p]{2}\, f(x_n)}{\sqrt[p]{f'(x_n)^p + f'(y_n)^p}} - x_n + \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}}{x_n - x_n + \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}} f'(x_n)$$

$$= \frac{f'(x_n)\left(\sqrt[p]{2} f'(y_n) - \sqrt[p]{2} f'(x_n) + \sqrt[p]{f'(x_n)^p + f'(y_n)^p}\right)}{\sqrt[p]{f'(x_n)^p + f'(y_n)^p}}$$

Pa je predloženi metod

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ z_n &= x_n - \frac{\sqrt[p]{2}\, f(x_n)}{\sqrt[p]{f'(x_n)^p + f'(y_n)^p}} \\ x_{n+1} &= z_n - \frac{f(z_n)}{\dfrac{f'(x_n)\left(\sqrt[p]{2} f'(y_n) - \sqrt[p]{2} f'(x_n) + \sqrt[p]{f'(x_n)^p + f'(y_n)^p}\right)}{\sqrt[p]{f'(x_n)^p + f'(y_n)^p}}} \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

za koji važi teorema

Teorema 12. Pretpostavimo da funkcija $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za otvoreni interval *D*, ima prosti koren $\alpha \in D$. Neka je $f(x)$ dovoljno glatka funkcija u okolini korena α. Tada je postupak (29) ima red konvergencije šest i jednačinu greške

$$e_{n+1} = C_2\left(\frac{p+1}{2}C_2^2 + \frac{1}{2}C_3\right)\left(\frac{p+1}{2}C_2^2 - \frac{5}{2}C_3\right)e_n^6 + O(e_n^7)$$

gde je $C_j = \dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{j!\, f'(\alpha)}$ i $e_n = x_n - \alpha$.

Dokaz.

Stepenujemo (4) i (7) *p* stepenom, redom.

$$\begin{aligned} f'(x_n)^p &= f'(\alpha)^p[1 + p(2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + 4C_4e_n^3) + \frac{p(p-1)}{2}(4C_2^2e_n^2 + 12C_2C_3e_n^3) \\ &\qquad + \frac{p(p-1)(p-2)}{6}8C_2^3e_n^3 + O(e_n^4)] \\ &= f'(\alpha)^p[1 + 2pC_2e_n + (3pC_3 + 2p(p-1)C_2^2)e_n^2 \\ &\qquad + \left(4pC_4 + 6p(p-1)C_2C_3 + \tfrac{4}{3}p(p-1)(p-2)C_2^3\right)e_n^3 + O(e_n^4)] \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} f'(y_n)^p &= f'(\alpha)^p[1 + p(2C_2^2e_n^2 + 4C_2(C_3 - C_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)] \\ &= f'(\alpha)^p[1 + 2pC_2^2e_n^2 + 4pC_2(C_3 - C_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)] \end{aligned} \tag{31}$$

A zatim sabiramo (30) i (31)

$$\begin{aligned} &f'(x_n)^p + f'(y_n)^p = \\ &= f'(\alpha)^p[2 + 2pC_2e_n + (3pC_3 + 2p^2C_2^2 - 2pC_2^2 + 2pC_2^2)e_n^2 \\ &\qquad + \left(4pC_4 + 6p^2C_2C_3 - 6pC_2C_3 + \frac{4}{3}p(p-1)(p-2)C_2^3 + 4pC_2C_3 - 4pC_2^3\right)e_n^3 \\ &\qquad + O(e_n^4)] \\ &= 2f'(\alpha)^p[1 + pC_2e_n + \left(\frac{3}{2}pC_3 + p^2C_2^2\right)e_n^2 \\ &\qquad + \left(2pC_4 + (3p^2 - p)C_2C_3 + \tfrac{2}{3}p(p^2 - 3p - 1)C_2^3\right)e_n^3 + O(e_n^4)] \end{aligned} \tag{32}$$

Korenovanjem p-korenom izraza (32) dobijamo

$$\sqrt[p]{f'(x_n)^p + f'(y_n)^p} =$$
$$= \sqrt[p]{2} f'(\alpha)[1 + \frac{1}{p}\Big(C_2 e_n + \Big(\frac{3}{2} p C_3 + p^2 C_2^2\Big) e_n^2$$
$$+ \Big(2pC_4 + (3p^2 - p)C_2 C_3 + \frac{2}{3} p(p^2 - 3p - 1) C_2^3\Big) e_n^3\Big)$$
$$+ \frac{1-p}{2p^2}(p^2 C_2^2 e_n^2 + (3p^2 C_2 C_3 + 2p^3 C_2^3) e_n^3) + \frac{(1-p)(1-2p)}{6p^3} p^3 C_2^3 e_n^3$$
$$+ O(e_n^4)]$$
$$= \sqrt[p]{2} f'(\alpha)\Big[1 + C_2 e_n + \Big(\frac{3}{2} C_3 + \frac{p+1}{2} C_2^2\Big) e_n^2 + \Big(2C_4 + \frac{3p+1}{2} C_2 C_3 - \frac{3p+1}{2} C_2^3\Big) e_n^3 + O(e_n^4)\Big] \qquad (33)$$

A zatim iz množenja $\sqrt[p]{2}$ sa (3) i deljenja sa (33) sledi

$$\frac{\sqrt[p]{2} f(x_n)}{\sqrt[p]{f'(x_n)^p + f'(y_n)^p}} =$$
$$= \frac{\sqrt[p]{2}\, f'(\alpha)[e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + C_4 e_n^4 + O(e_n^5)]}{\sqrt[p]{2} f'(\alpha)\Big[1 + C_2 e_n + \Big(\frac{3}{2} C_3 + \frac{p+1}{2} C_2^2\Big) e_n^2 + \Big(2C_4 + \frac{3p+1}{2} C_2 C_3 - \frac{3p+1}{2} C_2^3\Big) e_n^3 + O(e_n^4)\Big]}$$
$$= e_n - \Big(\frac{p+1}{2} C_2^2 + \frac{1}{2} C_3\Big) e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (34)$$

Primenjujemo $x_n = e_n + \alpha$ i (34) u z_n

$$z_n = e_n + \alpha - e_n + \Big(\frac{p+1}{2} C_2^2 + \frac{1}{2} C_3\Big) e_n^3 + O(e_n^4) = \alpha + \Big(\frac{p+1}{2} C_2^2 + \frac{1}{2} C_3\Big) e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (35)$$

a zatim Tejlorov razvoj za z_n

$$f(z_n) = f'(\alpha)\Big[\Big(\frac{p+1}{2} C_2^2 + \frac{1}{2} C_3\Big) e_n^3 + C_2 \Big(\frac{p+1}{2} C_2^2 + \frac{1}{2} C_3\Big)^2 e_n^6 + O(e_n^7)\Big] \qquad (36)$$

Iz (4), (7) i (33) sledi

$$\sqrt[p]{2} f'(y_n) - \sqrt[p]{2}\, f'(x_n) + \sqrt[p]{f'(x_n)^p + f'(y_n)^p} =$$
$$= \sqrt[p]{2}\, f'(\alpha)[\, 1 + 2C_2^2 e_n^2 + 4C_2(C_3 - C_2^2) e_n^3 - 1 - 2C_2 e_n - 3C_3 e_n^2 - 4C_4 e_n^3 + 1 + C_2 e_n$$
$$+ \Big(\frac{3}{2} C_3 + \frac{p+1}{2} C_2^2\Big) e_n^2 + \Big(2C_4 + \frac{3p+1}{2} C_2 C_3 - \frac{3p+1}{2} C_2^3\Big) e_n^3 + O(e_n^4)]$$
$$= \sqrt[p]{2}\, f'(\alpha)[1 - C_2 e_n + \Big(\frac{p+5}{2} C_2^2 - \frac{3}{2} C_3\Big) e_n^2 + \Big(\frac{3p+9}{2} C_2 C_3 - \frac{3p+9}{2} C_2^3 - 2C_4\Big) e_n^3 + O(e_n^4)] \qquad (37)$$

Množenjem (4) sa (37) se dobija

$$f'(x_n)\Big(\sqrt[p]{2} f'(y_n) - \sqrt[p]{2}\, f'(x_n) + \sqrt[p]{f'(x_n)^p + f'(y_n)^p}\Big) =$$

$$= \sqrt[p]{2}\, f'(\alpha)^2[1+2C_2e_n+3C_3e_n^2+4C_4e_n^3+O(e_n^4)][1-C_2e_n+\left(\frac{p+5}{2}C_2^2-\frac{3}{2}C_3\right)e_n^2$$
$$+\left(\frac{3p+9}{2}C_2C_3-\frac{3p+9}{2}C_2^3-2C_4\right)e_n^3+O(e_n^4)]$$
$$= \sqrt[p]{2}\, f'(\alpha)^2\left[1+C_2e_n+\left(\tfrac{p+1}{2}C_2^2+\tfrac{3}{2}C_3\right)e_n^2+\left(2C_4+\tfrac{3(p-1)}{2}C_2C_3-\tfrac{p-1}{2}C_2^3\right)e_n^3+O(e_n^4)\right] \quad (38)$$

A zatim delimo (38) sa (33)

$$\frac{f'(x_n)\left(\sqrt[p]{2}f'(y_n)-\sqrt[p]{2}\,f'(x_n)+\sqrt[p]{f'(x_n)^p+f'(y_n)^p}\right)}{\sqrt[p]{f'(x_n)^p+f'(y_n)^p}}=$$
$$=\frac{\sqrt[p]{2}\,f'(\alpha)^2[1+C_2e_n+\left(\frac{p+1}{2}C_2^2+\frac{3}{2}C_3\right)e_n^2+\left(2C_4+\frac{3(p-1)}{2}C_2C_3-\frac{p-1}{2}C_2^3\right)e_n^3+O(e_n^4)]}{\sqrt[p]{2}f'(\alpha)[1+C_2e_n+\left(\frac{3}{2}C_3+\frac{p+1}{2}C_2^2\right)e_n^2+\left(2C_4+\frac{3p+1}{2}C_2C_3-\frac{3p+1}{2}C_2^3\right)e_n^3+O(e_n^4)]}$$
$$=f'(\alpha)\left[1+C_2e_n+\left(\frac{p+1}{2}C_2^2+\frac{3}{2}C_3\right)e_n^2+\left(2C_4+\frac{3(p-1)}{2}C_2C_3-\frac{p-1}{2}C_2^3\right)e_n^3+O(e_n^4)\right]$$
$$\cdot\left[1-C_2e_n-\left(\frac{3}{2}C_3+\frac{p+1}{2}C_2^2\right)e_n^2-\left(2C_4+\frac{3p+1}{2}C_2C_3-\frac{3p+1}{2}C_2^3\right)e_n^3+C_2^2e_n^2\right.$$
$$\left.+(3C_2C_3+(p+1)C_2^3)e_n^3-C_2^3e_n^3+O(e_n^4)\right]$$
$$=f'(\alpha)[1+\left((p+1)C_2^3-2C_2C_3\right)e_n^3+O(e_n^4)] \quad (39)$$

Delimo (36) sa (39)

$$\frac{f(z_n)}{\frac{f'(x_n)\left(\sqrt[p]{2}f'(y_n)-\sqrt[p]{2}\,f'(x_n)+\sqrt[p]{f'(x_n)^p+f'(y_n)^p}\right)}{\sqrt[p]{f'(x_n)^p+f'(y_n)^p}}}=$$
$$=\frac{f'(\alpha)\left[\left(\frac{p+1}{2}C_2^2+\frac{1}{2}C_3\right)e_n^3+C_2\left(\frac{p+1}{2}C_2^2+\frac{1}{2}C_3\right)^2e_n^6+O(e_n^7)\right]}{f'(\alpha)[1+\left((p+1)C_2^3-2C_2C_3\right)e_n^3+O(e_n^4)]}$$
$$=\left[\left(\frac{p+1}{2}C_2^2+\frac{1}{2}C_3\right)e_n^3+C_2\left(\frac{p+1}{2}C_2^2+\frac{1}{2}C_3\right)^2e_n^6+O(e_n^7)\right][1-\left((p+1)C_2^3-2C_2C_3\right)e_n^3$$
$$+O(e_n^4)]$$
$$=\left(\frac{p+1}{2}C_2^2+\frac{1}{2}C_3\right)e_n^3-\left(\frac{p+1}{2}C_2^2+\frac{1}{2}C_3\right)\left((p+1)C_2^3-2C_2C_3\right)e_n^6$$
$$+C_2\left(\frac{p+1}{2}C_2^2+\frac{1}{2}C_3\right)^2e_n^6+O(e_n^7)$$
$$=\left(\tfrac{p+1}{2}C_2^2+\tfrac{1}{2}C_3\right)e_n^3+C_2\left(\tfrac{p+1}{2}C_2^2+\tfrac{1}{2}C_3\right)\left(-\tfrac{p+1}{2}C_2^2+\tfrac{5}{2}C_3\right)e_n^6+O(e_n^7) \quad (40)$$

pa se, konačno, primenom (35) i (40) u x_{n+1} dobija

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} = {} & \alpha + \left(\frac{p+1}{2} C_2^2 + \frac{1}{2} C_3\right) e_n^3 - \left(\frac{p+1}{2} C_2^2 + \frac{1}{2} C_3\right) e_n^3 \\
& -C_2 \left(\tfrac{p+1}{2} C_2^2 + \tfrac{1}{2} C_3\right)\left(-\tfrac{p+1}{2} C_2^2 + \tfrac{5}{2} C_3\right) e_n^6 + O(e_n^7) \\
= {} & \alpha - C_2 \left(\tfrac{p+1}{2} C_2^2 + \tfrac{1}{2} C_3\right)\left(-\tfrac{p+1}{2} C_2^2 + \tfrac{5}{2} C_3\right) e_n^6 + O(e_n^7)
\end{aligned}
\tag{41}
$$

Odakle sledi da je

$$
e_{n+1} = C_2 \left(\tfrac{p+1}{2} C_2^2 + \tfrac{1}{2} C_3\right)\left(\tfrac{p+1}{2} C_2^2 - \tfrac{5}{2} C_3\right) e_n^6 + O(e_n^7) \tag{39}
$$

što dokazuje da je prošireni metod i primenom p-stepene sredine Njutnove metode, takođe šestog reda konvergencije.

□

3.4. Analiza dobijenih rezultata

U odeljku 2.8. [8] je navedeno da su aritmetička, harmonijska i geometrijska sredina specijalni slučajevi *p*-stepene sredine, pa na isti način možemo primetiti da proširena *p*-stepena sredina Njutnove metode zapravo sadrži i metodu datu u [18] i proširenu harmonijsku sredinu Njutnove metode i proširenu geometrijsku sredinu Njutnove metode, za $p = 1$, $p = -1$ i $p = 0$, redom. To se najbolje može videti iz koeficijenata jednačina greške:

- Proširena aritmetička sredina Njutnove metode (Parhi i Gupta metod):

$$e_{n+1} = C_2\left((C_2^2 - C_3)^2 - \frac{9}{4}C_3^2\right)e_n^6 + O(e_n^7) = C_2\left(C_2^2 + \frac{1}{2}C_3\right)\left(C_2^2 - \frac{5}{2}C_3\right)e_n^6 + O(e_n^7)$$

- Proširena harmonijska sredina Njutnove metode:

$$e_{n+1} = -\frac{5}{4}C_2C_3^2e_n^6 + O(e_n^7)$$

- Proširena geometrijska sredina Njutnove metode:

$$e_{n+1} = C_2\left(\frac{1}{2}C_2^2 + \frac{1}{2}C_3\right)\left(\frac{1}{2}C_2^2 - \frac{5}{2}C_3\right)e_n^6 + O(e_n^7)$$

- Proširena *p*-stepena sredina Njutnove metode:

$$e_{n+1} = C_2\left(\frac{p+1}{2}C_2^2 + \frac{1}{2}C_3\right)\left(\frac{p+1}{2}C_2^2 - \frac{5}{2}C_3\right)e_n^6 + O(e_n^7)$$

Metod	**Koeficijenti**
Proširena *p*-stepena sr. Nj. metode	$C_2\left(\frac{p+1}{2}C_2^2 + \frac{1}{2}C_3\right)\left(\frac{p+1}{2}C_2^2 - \frac{5}{2}C_3\right)$
Proširena aritmetička sr. Nj. metode $(p = 1)$	$C_2\left(C_2^2 + \frac{1}{2}C_3\right)\left(C_2^2 - \frac{5}{2}C_3\right)$
Proširena harmonijska sr. Nj. Metode $(p = -1)$	$-\frac{5}{4}C_2C_3^2$
Proširena geometrijska sr. Nj. metode $(p = 0)$	$C_2\left(\frac{1}{2}C_2^2 + \frac{1}{2}C_3\right)\left(\frac{1}{2}C_2^2 - \frac{5}{2}C_3\right)$

Tabela 1. Koeficijenti jednačina greške

4. Numerički eksperimenti

U ovom delu ćemo se baviti numeričkim proračunima pomenutih i izvedenih metoda kroz konkretne primere, koji su uzeti iz radova [3], [9], [15] i [18]. Za njih ćemo posmatrati broj iteracija potrebnih da se dodje do rešenja funkcije, indeks efikasnosti i broj funkcionalnih evaluacija za svaku od njih i uporedićemo rezultate. Svi proračuni su rađeni u programu *Mathematica 8*, a preciznost je povećana na 20000 cifara pomoću funkcije SetPrecision. Izlazni kriterijum, pomenut u delu 2, je $|x_{n+1}-\alpha| \leq \varepsilon$ tj. $|f(x_{n+1})| \leq \varepsilon$, gde je α koren funkcije.

Pored svake zadate funkcije se nalazi njeno jedno jednostruko (dva u funkciji f_{13}) rešenje, a u tabeli upoređujemo broj iteracija, za zadate početne vrednosti x_0, dobijenih korišćenjem samo metoda šestog reda konvergencije.

$f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10, \quad \alpha = 1.365230013414097$

$f_2(x) = sin^2 x - x^2 + 1, \quad \alpha = 1.404491648215341$

$f_3(x) = xe^{x^2} - sin^2 x + 3cosx + 5, \quad \alpha = -1.207647827130919$

$f_4(x) = (x-1)^3 - 1, \quad \alpha = 2$

$f_5(x) = e^{x^2+7x-30} - 1, \quad \alpha = 3$

$f_6(x) = x^3 - 10, \quad \alpha = 2.154434690031884$

$f_7(x) = x^{10} - 1, \quad \alpha = 1$

$f_8(x) = x^2 - e^x - 3x + 2, \quad \alpha = 0.257530285439861$

$f_9(x) = (x-2)^{23} - 1, \quad \alpha = 3$

$f_{10}(x) = x^3 + 1, \quad \alpha = -1$

$f_{11}(x) = x^2 + \sin\left(\frac{x}{5}\right) - \frac{1}{4}, \quad \alpha = 0.409992017989137$

$f_{12}(x) = x - 3lnx, \quad \alpha = 1.857183860207835$

$f_{13}(x) = e^x - 4x^2, \quad \alpha_1 = 0.714805912362778; \quad \alpha_2 = 4.306584782206997$

$f_{14}(x) = e^{-x} + cosx, \alpha = 1.746139530408012$

	x_0	**Neta**	**ShG**	**KL**	**GP**	**PHS**	**PGS**	**PpSS**	
$f_1(x)$	1	2	2	2	2	2	2	2 3	2≤p≤18 p>18
	2	2	2	2	2	2	2	2 3	2≤p≤6 p>6
$f_2(x)$	1	2	3	2	2	2	4	18 13 12 11	p=2 p=4 p=6 p≥8*
	3	3	3	3	2	3	12	11 10	p={2,4} p≥6*

$f_3(x)$	-1.6	3	3	3	3	3	3	2 3	p=2 p≥3
$f_4(x)$	2.5	2	3	2	2	2	2	2 3	p=2 p≥3
	3.5	3	3	3	3	3	3	3 4	2≤p≤21 p>21
$f_5(x)$	3.25	3	4	4	3	div	div	3 4	p=2 p≥3
	3.5	5	5	5	4	div	div	4 5 6	p=2 3≤p≤7 p>7
$f_6(x)$	1.5	2	3	2	2	2	2	2 3	p=2 p≥3
$f_7(x)$	0.5	div	141	18	11	div	div	13 15 16 17 18 19	p=2 p=3 p=4 5≤p≤7 8≤p≤22 p>22
	0.8	**	7	3	3	4	4	3 4	p={2,3} p≥4
$f_8(x)$	2	3	3	4	3	3	5	6 *	
	3	4	3	3	4	4	6	7 *	
$f_9(x)$	3.5	4	6	6	4	div	div	5 6 7	p=2 3≤p≤6 p>6
	4.5	7	10	15	7	div	div	9 10 11 12 13	p=2 p=3 p={4,5} 6≤p≤21 p>21
$f_{10}(x)$	-0.8	2	2	2	2	2	2	2 3	2≤p≤13 p>13
$f_{11}(x)$	0.5	2	2	2	2	2	2	2	
$f_{12}(x)$	2	2	2	2	2	2	6	6*	
$f_{13}(x)$	0.75	2	2	2	2	2	4	4*	
	4.25	2	2	2	2	2	2	2	
$f_{14}(x)$	1.5	2	2	2	2	2	5	5*	
	2	2	2	2	2	2	5	5*	

Tabela 2. Broj iteracija

* - metod konvergira ka realnom korenu samo za paran broj *p*
** - metod konvergira ka -1 posle 47 iteracija
div – metod divergira

U Tabeli 2. se nalaze metode šestog reda konvergencije, koje smo u delu 2 već pominjali, i to metod B.Neta (Neta), Sharma i Guha (ShG), Kou i Li (KL), Gupta i Parhi (GP), a poslednje tri kolone su metode izvedene u ovom radu: proširena harmonijska sredina (PHS), proširena geometrijska sredina (PGS) i proširena *p*-stepena sredina (PpSS).

Iteracije u metodi ShG su dobijene za $a = 1$, što je takođe uzeta vrednost datog parametra u radu [9]. Metode PHS i PGS češće divergiraju od ostalih metoda, ali samo za predložene početne vrednosti. Ove metode konvergiraju u nekoliko iteracija ka rešenjima funkcija za početne vrednosti dovoljno bliske samom rešenju funkcije. U koloni PpSS se nalaze sve iteracije, zavisno od promene broja *p*. Proračuni su rađeni za $2 \leq p \leq 500000$, jer su vrednosti $p = 1$, $p = -1$, $p = 0$ već obezbeđeni metodama GP, PHS, PGS, redom. Za funkcije f_2, f_8, f_{12}, f_{13}(za $x_0 = 0.75$) i f_{14} postupak PpSS konvergira ka realnom rešenju samo za paran broj *p*. Uopšteno gledajući, u tabelu smo mogli uneti samo vrednost $p = 2$, za koju generalno dobijamo najmanji broj iteracija, ali primer funkcije f_2 pokazuje da broj iteracija nije uvek rastući niz, tj. da sa porastom broja *p*, broj iteracija opada, u zavisnosti od zadate funkcije.

Svaka od pomenutih metoda u tabeli zahteva odredjen broj izračunavanja funkcija i broj prvih izvoda funkcija po iteraciji. Metode B.Neta i ShG zahtevaju izračunavanje tri funkcije i jedan prvi izvod, dok metode KL i GP zahtevaju izračunavanje dve funkcije i dva prva izvoda po iteraciji. Novodobijena metoda PHS zahteva, takođe, izračunavanje dve funkcije i dva prva izvoda po iteraciji, dok PGS i PpSS zahtevaju još i izračunavanje kvadratnog, odnosno *p*-korena funkcije, pa je shodno tome, broj funkcionalnih evaluacija *m* po iteraciji, za PHS metodu, jednak 4, dok je za PGS i PpSS jednak 5. Računski red konvergencije, po formuli

$$\rho \approx \frac{ln\left|\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}\right|}{ln\left|\frac{x_n-\alpha}{x_{n-1}-\alpha}\right|}$$

pokazuje da su sve tri metode zaista šestog reda konvergencije, pa je indeks efikasnosti za PHS metodu $6^{\frac{1}{4}} = 1{,}5651$, a za PGS i PpSS $6^{\frac{1}{5}} = 1{,}431$.

Broj funkcionalnih proračuna po iteraciji za ove metode ćemo predstaviti u sledećoj tabeli:

	x_0	Neta	ShG	KL	GP	PHS	PGS	PpSS	
$f_1(x)$	1	8	8	8	8	8	10	10 15	2≤p≤18 p>18
	2	8	8	8	8	8	10	10 15	2≤p≤6 p>6
$f_2(x)$	1	8	12	8	8	8	20	90 65 60 55	p=2 p=4 p=6 p≥8*
	3	12	12	12	8	12	60	55 50	p={2,4} p≥6*

$f_3(x)$	-1.6	12	12	12	12	12	15	10 15	p=2 p≥3
$f_4(x)$	2.5	8	12	8	8	8	10	10 15	p=2 p≥3
	3.5	12	12	12	12	12	15	15 20	2≤p≤21 p>21
$f_5(x)$	3.25	12	16	16	12	-	-	15 20	p=2 p≥3
	3.5	20	20	20	16	-	-	20 25 30	p=2 3≤p≤7 p>7
$f_6(x)$	1.5	8	12	8	8	8	10	10 15	p=2 p≥3
$f_7(x)$	0.5	-	564	72	44	-	-	65 75 80 85 90 95	p=2 p=3 p=4 5≤p≤7 8≤p≤22 p>22
	0.8	-	28	12	12	16	20	15 20	p={2,3} p≥4
$f_8(x)$	2	12	12	16	12	12	25	30 *	
	3	16	12	12	16	16	30	35*	
$f_9(x)$	3.5	16	24	24	16	-	-	25 30 35	p=2 3≤p≤6 p>6
	4.5	28	40	60	28	-	-	45 50 55 60 65	p=2 p=3 p={4,5} 6≤p≤21 p>21
$f_{10}(x)$	-0.8	8	8	8	8	8	10	10 15	2≤p≤13 p>13
$f_{11}(x)$	0.5	8	8	8	8	8	10	10	
$f_{12}(x)$	2	8	8	8	8	8	30	30*	
$f_{13}(x)$	0.75	8	8	8	8	8	20	20*	
	4.25	8	8	8	8	8	10	10	
$f_{14}(x)$	1.5	8	8	8	8	8	25	25*	
	2	8	8	8	8	8	25	25*	

Tabela 3. Broj funkcionalnih proračuna po iteraciji

5. Zaključak

Kao što je već navedeno u delu 2, mnoge metode šestog reda konvergencije su nastale uvođenjem proračuna dodatne funkcije ili generalizacijom neke metode nižeg reda konvergencije. Međutim, takav princip nije uvek dovoljno efektan, odnosno bez obzira što mnoge metode šestog reda konvergencije imaju isti koeficijent efikasnosti, po broju iteracija primećujemo da ipak ne konvergiraju sve istom brzinom ka rešenju funkcije, a isto tako na broj iteracija tj. na brzinu konvergencije dobijenih metoda, veliki uticaj ima izbor početne vrednosti.

U ovom radu smo razvili tri nove metode, i to proširenu harmonijsku sredinu Njutnove metode (PHS), proširenu geometrijsku sredinu Njutnove metode (PGS) i *p*-stepenu sredinu Njutnove metode (PpSS) za koje smo, kroz numeričke eksperimente, primetili da njihova efikasnost varira od funkcije do funkcije. Najbolje se pokazala PHS, koja u velikoj meri parira ostalim metodama šestog reda konvergencije, dok ostale dve novodobijene metode ne zadovoljavaju očekivane kriterijume, što potvrđuje i koeficijent efikasnosti.

Možemo zaključiti da, bez obzira što generalizacija ili uvodjenje proračuna dodatne funkcije povećava red konvergencije i samim tim ubrzava metode nižeg reda, ipak najbolje rešenje dobijamo iz specijalnih slučajeva metoda višeg reda konvergencije. Ovu činjenicu možemo potkrepiti i konkretnim primerima. Na primer, za metod Sharma i Gupta specijalni slučaj je metod Grau i Diaz-Barrero kad je $a = 0$, gde se u nekim funkcijama znatno menja broj iteracija kao npr. u funkciji f_7, gde se za početnu vrednost $x_0 = 0.5$ umesto 141 dobija 15 iteracija, a za $x_0 = 0.8$ se, umesto 7, dobiju 4 iteracije. Zatim, metod Chun-a ima za specijalni slučaj metod Kou-a, takođe za $a = 0$, gde se, iako su oba metoda šestog reda konvergencije, metod Kou-a mnogo bolje ponaša u odnosu na metod Chun-a. I konačno, kao što smo i dokazali, Sharma i Gupta metod, PHS i PGS su specijalni slučajevi za PpSS, gde smo se kroz numeričke eksperimente uverili da se samo uopštenje tj. PpSS, ponaša isto ili lošije kroz različite primere, a u zavisnosti od promene broja *p*, dok se Sharma i Gupta metod, koji je zapravo proširena aritmetička sredina Njutnove metode, kao specijalni slučaj za $p = 1$, ponaša najefektivnije i na njega previše ne utiče izbor početne vrednosti, kao što je to slučaj sa PHS i PGS. Najveći broj specijalnih slučajeva je već naveden u radu [6].

Dakle, ovim master radom možemo zaključiti da je kroz generalizaciju ili kroz uvođenje dodatnih funkcija i njihovih izvoda, potrebno doći do povećanja reda konvergencije metode, a da se u isto vreme ne umanji njena efikasnost.

Kako je u poslednjih 35 godina počela ekspanzija razvoja metoda za rešavanje nelinearnih jednačina i još uvek nije pronađen dovoljno efikasan i tačan metod, to pitanje ostaje otvoreno za neka dalja istraživanja.

6. Biografija

Rođena sam 02.05.1977. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu „Petar Kočić“ u Temerinu sam završila 1992. godine kao nosilac Vukove diplome, a zatim sam se upisala u Gimnaziju u Bečeju, u kojoj sam 1996. godine maturirala kao odličan učenik. Iste godine sam se upisala na Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, odsek matematika, smer diplomirani matematičar, na kojem sam početkom 2003. godine i diplomirala i na kojem sam od januara do juna 2004 god. radila kao administrator u Računskom centru, a od oktobra iste godine do decembra 2011. sam radila kao profesor matematike u Gimnaziji Bečej. Posao profesora matematike sam napustila radi dodatnog usavršavanja i učenja jezika u inostranstvu. Od maja 2013. godine držim časove dopunske nastave matematike na Lerninstitutu u Klagenfurtu, u Austriji. Govorim engleski i nemački jezik, a u slobodno vreme se bavim muzikom.

Obzirom da sam osnovne studije završila po starom nastavnom programu, po statutu i odobrenju dekana novosadskog univerziteta, stekla sam pravo na odbranu master rada.

Novi Sad, septembar 2013. Maja Četić

7. Literatura

[1] A.M. Ostrowski, Solution of Equations and Systems of Equations, Academic Press Inc., 1966.

[2] A.Y. Özban, Some new variants of Newton's method, Appl. Math. Lett.,17, 2004, 677-682.

[3] B. Neta, A sixth order family of methods for nonlinear equations, Int. J. Comput. Math. 7 (1979) 157–161.

[4] C. Chun, Iterative methods improving Newton’s method by the decomposition method, Comput. Math. Appl. 50 (2005) 1559–1568.

[5] C. Chun, Some improvements of Jarratt’s method with sixth-order convergence, Appl. Math. Comput. 190 (2007) 1432–1437.

[6] D. Herceg, Dj. Herceg, Means based modifications of Newton’s method for solving nonlinear equations, Appl. Math. Comput., 219,11,(2013), 6126-6133.

[7] D. Herceg, N. Krejić, Numerička analiza, Univerzitet u Novom Sadu, Stylos, Novi Sad, 1997.

[8] Dj. Herceg, D. Herceg, Third-order modifications of Newton's method based on Stolarsky and Gini means, Journal of Computational and Applied Mathematics 245 (2013) 53–61.

[9] J. R. Shrma, R. K. Guha, A family of modified Ostrowski methods with accelerated sixth order convergence, Applied Mathematics and Computation 190 (2007) 111-115.

[10] J.F. Traub, Iterative Methods for the Solution of Equations, Prentice Hall, Clifford, NJ, 1964.

[11] J.M. Ortega, W.C. Rheinboldt, Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press, New York, 1970.

[12] Jinhai Chen, Some new iterative methods with three-order convergence, Appl. Math. Comput. 181 (2006) 1519–1522.

[13] Jisheng Kou, On Chebyshev–Halley methods with sixth-order convergence for solving non-linear equations, Appl. Math. Comput. 190 (2007) 126–131.

[14] Jisheng Kou, Xiuhua Wang, Sixth-order variants of Chebyshev–Halley methods for solving non-linear equations, Appl. Math. Comput. 190 (2007)1839–1843.

[15] Jisheng Kou, Yitian Li, An improvement of Jarratt method, Appl. Math. Comput. 189 (2007) 1816–1821.

[16] M. Frontini, E. Sormani, Some variant of newton’s method with third-order convergence, Appl. Math. Comput. 140 (2003) 419–426.

[17] S. Weerakoon, T.G.I. Fernando, A variant of Newton’s method with accelerated third-order convergence, Appl. Math. Lett. 13 (2000) 87–93.

[18] S.K. Parhi, D.K. Gupta, A sixth order method for nonlinear equations, Applied Mathematics and Computation 203 (2008) 50–55.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Maja Četić
AU
Mentor: dr Dragoslav Herceg
MN
Naslov rada: Postupci šestog reda za rešavanje nelinearnih jednačina
NR
Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski i engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2013.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 3
MA
Fizički opis rada: 4 poglavlja/ 41 strana/ 3 tabele/ 1 fotografija/ 18 literatura
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Numerička matematika
ND
Ključne reči: Metod, red konvergencije, izračunavanje funkcije, iteracija, indeks efikasnosti
KR
Predmetna odrednica: Numeričko rešavanje nelinearnih jednačina
PO

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: U radu se posmatraju modifikacije iterativnih postupaka šestog reda konvergencije, neki njihovi specijalni slučajevi i naše modifikacije Njutnovog postupka šestog reda konvergencije. Kao originalni rezultat dajemo modifikacije Njutnovog postupka šestog reda konvergencije, koje kao specijalan slučaj sadrže postupak iz [18]. Ove modifikacije su zasnovane na rezultatima radova [6] i [8].
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 17.05.2013.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: dr Đorđe Herceg, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Helena Zarin, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Dragoslav Herceg, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORD DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents Code: Master thesis
CC
Author: Maja Četić
AU
Mentor: dr Dragoslav Herceg
MN
Title: A sixth order method for nonlinear equations
TI
Language of text: Serbian (Latin)
LT
Language of abstract: Serbian and English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2013
PY
Publisher: Author’s reprint
PU
Publication place: Novi Sad, Department of mathematics and informatics, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 3
PP
Physical description: 4 chapters/ 41 pages/ 3 tables/ 1 photograph/ 18 references
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Numerical mathematics
SD
Key words: Methods, order of convergence, function evaluation, iteration, efficiency index
KW
Subject heading: Numerical solving nonlinear equations

SH
Holding data: Department of Mathematics and Informatics Library
HD
Note:
N
Abstract: In this paper, a sixth order methods of convergence, some of theirs special cases and our modifications of Newton's sixth order method of convergence are considered. As the original result some modifications of Newton's sixth order of convergence are given, with a special case given in [18]. These modifications are based on the results given in [6] and [8].
AB
Accepted by the Scientific Board on: 17.05.2013.
ASB
Defended:
DE
Thesis defense board:
DB
President: dr Đorđe Herceg, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member: dr Helena Zarin, Associate Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member: dr Dragoslav Herceg, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad