



**UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU
I INFORMATIKU**



Živanović Katarina

**Koncept donošenja odluka
u fazi okruženju**

-master rad-

Novi Sad, 2013.

Sadržaj

Predgovor	4
1. Uvodni pojmovi	5
1.1 Fazi skupovi	5
1.2 Osnovne operacije nad fazi skupovima	10
1.3 Trougaone norme	12
1.3.1 Operacije na fazi skupovima zasnovane na t-normama i t-konormama	15
1.4 Fazi brojevi.....	17
1.5 L-R fazi brojevi	19
1.6 Trougaoni fazi brojevi	21
1.7 Fazi intervali.....	23
1.8 Princip proširenja	25
1.9 Fazi relacije	27
1.9.1 Osnovne operacije na fazi relacijama	28
1.10 Fazi logika	29
1.10.1 Osnove fazi logike	29
1.10.2 Viševrednosna logika	31
1.10.3 Lingvističke promenljive	32
1.10.4 Lingvistički modifikatori	33
1.10.5 Pravila povezivanja fazi iskaza i semantički zahtevi	35
2. Princip usrednjavanja za fazi vrednosti	36
2.1 Statističko usrednjavanje	36
2.2 Aritmetičke operacije sa trougaonim i trapezoidnim brojevima	37
2.3 Fazi usrednjavanje	39
2.4 Defazifikacija fazi usednjavanja (fazi sredine)	41
2.5 Model predviđanja fazi Delphi	42
2.6 Fazi PERT za Projektni menadžment	47
2.6.1 Klasični PERT i CPM.....	47
2.6.2 Probabilistički PERT	48
2.6.3 Fazi PERT za predviđanje vremena.....	49
2.6.4 Raspored alokacije resursa	51
2.6.5 Predviđanje tražnje	53
3. Dnošenje odluke u fazi okruženju	54

3.1 Donošenje odluke kao presek fazi skupa ciljeva i fazi skupa ograničenja zasnovano na t-normi $T_M=\min$	54
3.1.1 Razne aplikacije u kojima se primenjuje proces donošenja odluka kao presek fazi skupova ciljeva i ograničenja.....	57
3.1.2 Modeli postavljanja cena za nove proizvode	63
3.2 Donošenje odluka putem fazi usrednjavanju koje se bazira na t-normi $T_M=\min$	68
3.2.1 Proces donošenja odluke zasnovan na mišljenjima velikog broja stručnjaka (eng. <i>Multi-Expert Decision Making</i>).....	72
4. Donošenje odluka u fazi okruženju preko preseka fazi skupa ciljeva i fazi skupa ograničenja, koje se zasniva na t-normi proizvoda: T_P	76
5. Donošenje odluka putem fazi usrednjavanja koje je bazirano na t-normi drastičnog preseka: T_W	80
Zaključak.....	84
Literatura.....	85
Biografija	86
Ključna dokumentacija.....	87

Predgovor

Donošenje odluka predstavlja svakodnevni problem u ekonomiji i finansijama, medicini, biologiji, psihologiji, sociologiji, politici, lingvistici, informatici, elektronskom poslovanju, inženjeringu, menadžmentu, itd. Modeli u bilo kojoj od pomenutih oblasti se tradicionalno zasnivaju na matematički koja se temelji na klasičnoj dvoelementnoj logici tj. logici u kojoj svaki element ili pripada ili ne pripada skupu, a treće opcije nema. Međutim za složene situacije i sisteme prožete neodređenošću, takav pristup nije odgovarajući jer je previše ograničen. Kako bi se taj problem izbegao i omogućio što verodostojniji rezultat, potrebno je sve posmatrati u fazi okruženju.

Reč *fazi* (eng. *fuzzy*) je engleskog porekla i označava neodređen, neprecizan pojam, a prvi put se kao takav javlja u delu „*Fuzzy Sets: Informatin and Control*“ – *Lofti Zadeh*-a 1965. godine. Zahvaljujući fazi skupovima i fazi logici omogućeno je modelovanje vrednostima koje ne moraju samo da pripadaju ili ne pripadaju nekom skupu, već mogu sa nekim stepenom tj. u određenoj meri pripadati. Stepen je određen funkcijom pripadnosti koja uzima neku od realnih vrednosti na zatvorenom intervalu [0,1]. Zahvaljujući tome, fazi skupovi se lakše prilagođavaju realnim problemima i omogućavaju modeliranje različitih tipova neodređenosti.

Na početku rada su dati osnovni pojmovi potrebni za razumevanje rada u celini. Između ostalog, to su fazi skupovi, fazi relacije, operacije na fazi skupovima zasnovane na trougaonim normama. Objasnjeni su fazi brojevi, poseban slučaj fazi skupova, sa naglaskom na trougaone fazi brojeve koji imaju široku primenu u različitim oblastima, kao i princip proširenja koji omogućuje da se aritmetičke operacije izvode na fazi brojevima. Literatura korišćena pri izradi ovog poglavlja je [1, 2, 3, 4, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17].

U drugom delu se govori o principu usrednjavanja za fazi vrednosti. Naime, ispitivanje i analiza komplikovanih situacija podrazumeva angažovanje velikog broja stručnjaka, čime se dolazi do velikog broja različitih mišljenja koja se moraju obraditi da bi se došlo do finalne odluke. Upravo fazi skupovi na prirodn način opisuju ova različita mišljenja jer dozvoljavaju određenu dozu nepreciznosti koja je uvek prisutna u stvarnom životu. Ovaj princip se koristi u nekoliko modela (kao što su: fazi Delphi, fazi PERT i predviđanje tražnje) koji su ilustrovani kroz primere. Ovaj deo je zasnovan na literaturi [2, 3, 6, 9, 11].

Treća glava je posvećena upravo temi samog rada. Ciljevi i ograničenja su definisani trougaonim fazi brojevima. Detaljno će biti objasnjeni principi donošenja odluka u navedenom okruženju, kako teorijski aspekt, tako i kroz primere iz stvarnog života. Rezultati i primeri iz ovog dela se zasnivaju na literaturi [1, 2, 4, 5, 11, 14, 16].

Kako je u predstavljenom pristupu presek fazi skupa ciljeva i fazi skupa ograničenja, kao i fazi usrednjavanje, modelovano trougaonom normom $T_M = \min$, u završnom delu rada biće ispitana uticaj drugih trougaonih normi na rezultujući fazi skup, pa samim tim i na konačnu odluku.

* * *

Izuzetnu zahvalnost dugujem svom mentoru, prof. dr Ivani Štajner-Papuga, na ukazanom poverenju, pruženom znanju, pozrtvovanosti, velikom strpljenju i pomoći, kao i na korisnim sugestijama i primedbama bez kojih ne bih uspela da završim ovaj rad. Takođe, zahvaljujem se prof. dr Zagorki Lozanov-Crvenković na podršci i znanju koje mi je pružala tokom osnovnih i master studija, kao i prof. dr Tatjani Grbić, članu komisije.

Posebnu zahvalnost dugujem i svojoj porodici, naročito sestri i prijateljima koji su mi bili podrška tokom čitavih studija.

1. Uvodni pojmovi

Na samom početku, da bi izlaganje o fazi skupovima bilo jasnije, daće se osnovni pojmovi o fazi skupovima i funkciji pripadnosti. Zatim će se govoriti o fazi brojevima, trougaonim normama i konormama, fazi intervalima, fazi relacijama i svim ostalim pojmovima koji će pomoći u kasnijem predstavljanju same teme rada ([1, 2, 3, 4, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17]).

1.1 Fazi skupovi

Funkcija pripadnosti kod običnih skupova je precizna i može uzeti samo dve vrednosti. Tu je dakle sve čisto „crno ili belo“. Međutim u svakodnevnom životu osim brojeva neminovno je sretati se i sa raznim lingvističkim terminima koje je potrebno modelovati, a za koje je jako teško napraviti jasnu razliku da li pripadaju ili ne pripadaju nekom skupu. Recimo ako se posmatra temperatura na kojoj se voda ledi, skup će činiti sve vrednosti stepena koje su ispod nule uključujući i nulu, tj. $A = \{x \in U | x \leq 0\}$. Samim tim funkcija pripadnosti je:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } x \leq 0 \\ 0, & \text{za } x > 0 \end{cases}$$

Ovde je nedvosmisleno jasno da je granica za temperaturu zamrzavanja tačno definisana i bilo koja temperatura ako se uzme, ona će ili pripadati skupu A ili neće. Međutim, šta ako se uzme da je skup „*skup niskih temperatura*“? Sada nije moguće postaviti jasnu granicu i ona itekako zavisi od subjektivnih osećaja, stoga ovde primena logike klasičnih skupova nije od koristi jer je potrebna gradacija. Ideja je da se definiše delimično pripadanje uz pomoć funkcije pripadnosti (karakteristične funkcije). Tako se do fazi skupova. Osnivač teorije fazi skupova, Lofti Zadeh,¹ je uveo ocene između 0 i 1 da bi objasnio delimično pripadanje nekog elementa skupu. Sada funkcija pripadnosti ne uzima samo vrednosti 0 i 1, već sve vrednosti iz zatvorenog intervala $[0, 1]$ i na taj način daje stepen pripadanja nekog elementa skupu. Korišćena literatura je [2, 3, 7, 8, 12, 15, 17].

Priča o fazi logici počinje mnogo pre Zadeha. Da bi postavio konciznu teoriju logike a kasnije i matematike, Aristotel je postavio takozvane „Zakone misli“. Jedan od tih zakona, „Zakon isključenja trećeg“, govori da svaki iskaz mora biti ili tačan ili netačan. Čak i kada je Parmenid predložio prvu verziju ovog zakona 400 godina pre nove ere, bilo je jakih prigovora. Na primer Heraklit je predložio da treba da se prihvati da neki iskazi mogu istovremeno biti i tačni i netačni. A Platon je postavio temelje onome što će postati fazi logika ukazujući da postoji i nešto treće, pored isključivo tačnog i netačnog ([7]).

Definicija 1.1 [2] Funkcija pripadnosti za fazi skupove, u oznaci μ je preslikavanje $\mu: U \rightarrow [0,1]$ gde je U univerzalni skup.

Definicija 1.2 [2] Neka je $A \subset U$ običan skup. *Fazi skup* \mathcal{A} se definiše kao skup uređenih parova binarne relacije:

$$\mathcal{A} = \{(x, \mu_{\mathcal{A}}(x)) \mid x \in A, \mu_{\mathcal{A}}(x) \in [0,1]\}$$

¹Lotfali Askar Zadeh (1921-) je poznati matematičar, elektroinženjer, istraživač u oblasti veštice inteligencije i računarskih nauka i akademik Univerziteta u Kaliforniji. On je uveo, odnosno definisao fazi skupove 1965. godine kao matematički formalan pojam kojim se modelira neodređenost u lingvistici.

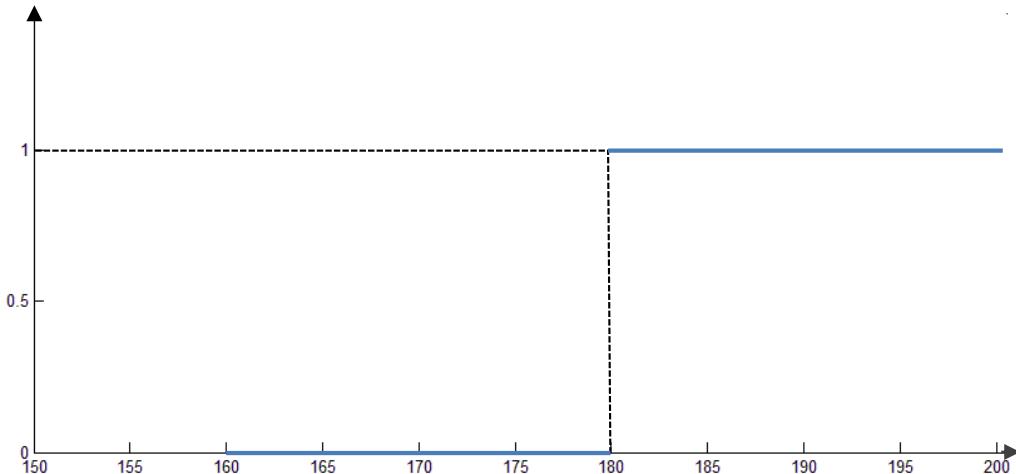
gde je $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ funkcija pripadnosti. Ona određuje ocenu, odnosno stepen kojim neki element $x \in A$ pripada fazi skupa \mathcal{A} . Ova definicija povezuje svaki element skupa A sa realnim brojem $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ iz intervala $[0,1]$. Što je veća vrednost za $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ to je veći stepen pripadnosti. Fazi skup se formalno može poistovetiti sa svojom funkcijom pripadnosti, tj. može se posmatrati i kao funkcija koja elemente domena (skupa A) preslikava u interval $[0,1]$.

$$\mu_{\mathcal{A}}(x): A \rightarrow [0,1]$$

Primer 1.1 [2]

- a) Recimo da treba opisati visinu ljudi uz pomoć klasičnog skupa. Neka je pretpostavka da je čovek visok ukoliko je njegova visina bar 180cm, inače je nizak (neka je početna visina 160cm). Prema tome, skup je $A = \{\text{visoki ljudi}\}$, a njegova funkcija pripadnosti:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako } 160 \leq x < 180 \\ 1, & \text{ako } x \geq 180 \end{cases}$$



Slika 1.1 Funkcija pripadnosti klasičnog skupa A

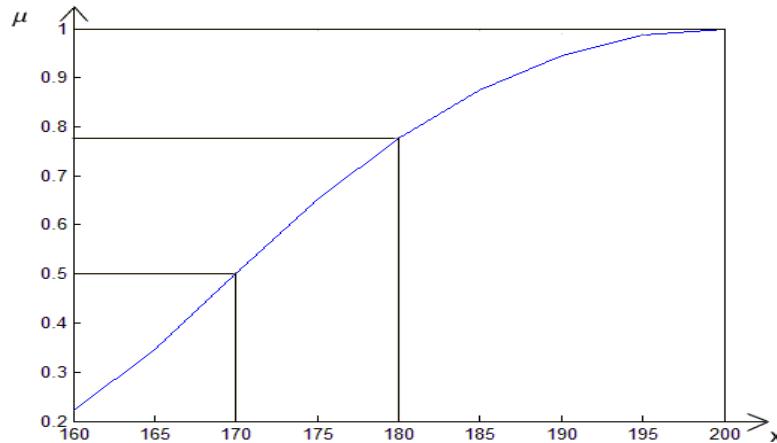
Vidi se da je ovakav način razmišljanja nekako ograničen i nije zadovoljavajući. To je zbog toga što ne dozvoljava postepeno povećavanje visine, odnosno gradaciju. Zbog toga, ukoliko se tako razmišlja, može se doći do logički pogrešnih zaključaka. Naime po ovom modelu osoba koja je visoka 179cm, spada u niske ljude (ima funkciju pripadnosti nula), a osoba koja je samo jedan centimetar viša spada u visoke. S druge strane, i osoba koja je visoka 180cm i osoba od 2m su visoke, a pri tome razlika među njima je velika.

Ovakvi i slični, pre svega lingvistički problemi, moraju se posmatrati na drugačiji način. Tu dolazi do izražaja „neodređenost“ (rasplinutost). Zato se u primeru pod b) daje fazi skup jer kod njega nema takvih nedostataka.

- b) Opisuje se ista situacija kao i pod a) samo što će sada skup $A = \{\text{visoki ljudi}\}$ biti opisan uz pomoć fazi skupa. Neka je $\mathcal{V} = \{(x, \mu_{\mathcal{V}}(x))\}$ fazi skup kod kojeg $x \in [160\text{cm}, 200\text{cm}]$ i

$$\mu_V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2 \cdot 30^2} (x - 140)^2, & \text{za } 160 \leq x \leq 170 \\ 1 - \frac{1}{2 \cdot 30^2} (x - 200)^2, & \text{za } 170 \leq x \leq 200 \end{cases}$$

Ovo se lepo može prikazati grafički tako da x predstavlja visine na horizontalnoj osi, a vrednosti funkcije pripadnosti na vertikalnoj osi prikazuju sa kojim stepenom se ljudi mogu kategorisati kao visoki tj. sa kojim stepenom pripadaju skupu visokih ljudi.



Slika 1.2 Grafik funkcije pripadnosti fazi skupa iz primera b)

Kao što se već dalo primetiti, fazi skupovi će se označavati velikim pisanim slovima: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$, a odgovarajuće funkcije pripadnosti: $\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x), \mu_{\mathcal{C}}(x), \dots$. Element koji ima nula stepeni pripadnosti se uglavnom ni ne prikazuje.

Sada kad su uvedeni fazi supovi, obični skupovi se mogu posmatrati kao specijalan slučaj fazi skupova kada je funkcija pripadnosti jednaka jedinici.

Ukoliko je funkcija $\mu_{\mathcal{A}}(x) = 0$ za svako $x \in A$, skup \mathcal{A} je prazan skup.

Definicija 1.3 [2] Fazi skup je *normalizovan* ako bar jedan element $x \in U$ dostiže maksimalnu vrednost funkcije pripadanja, tj. vrednost 1. U suprotnom, fazi skup je *nenormalizovan*. Dakle, ako je fazi skup \mathcal{A} nenormalizovan, onda je $\max \mu_{\mathcal{A}}(x) < 1$. Da bi se skup \mathcal{A} normalizovao, potrebno je da se normalizuje funkcija pripadnosti $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ na primer na sledeći način: $\frac{\mu_{\mathcal{A}}(x)}{\max \mu_{\mathcal{A}}(x)}$.

Definicija 1.4 [2] Fazi singleton je skup $\mathcal{A} = \{(x_1, \mu_{\mathcal{A}}(x))\}$ gde je x_1 jedini element skupa $A \subset U$, i $\mu_{\mathcal{A}}(x) \in [0, 1]$.

Za razliku od skupa A koji je podskup univerzalnog skupa U , skup \mathcal{A} to nije.

Pored pomenutog zapisa fazi skupa, postoji još nekoliko načina predstavljanja fazi skupova koje pojedini autori koriste:

$\mathcal{A} = \{\mu_{\mathcal{A}}(x)/x, x \in A, \mu_{\mathcal{A}}(x) \in [0, 1]\}$, gde simbol „/“ nije znak deljenja već pokazuje da je $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ vrednost funkcije pripadanja za element x .

Primer 1.2 Neka je dat sledeći fazi skup:

$\mathcal{A} = \{(x_1, 0.1), (x_2, 0.4), (x_3, 0.2), (x_4, 1), (x_5, 0.8), (x_6, 0.3)\}$ što se može predstaviti i kao:

$$\mathcal{A} = \{(0.1/x_1), (0.4/x_2), (0.2/x_3), (1/x_4), (0.8/x_5), (0.3/x_6)\}$$

To je jedan diskretan fazi skup sastavljen od šest uređenih parova. Elementi $x_i, i = 1, \dots, 6$ ne moraju da budu brojevi, oni jednostavno pripadaju običnom skupu $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, $A \subseteq U$. Funkcija pripadnosti na intervalu $[0, 1]$ uzima sledeće vrednosti:

$$\begin{aligned}\mu_{\mathcal{A}}(x_1) &= 0.1; \quad \mu_{\mathcal{A}}(x_2) = 0.4; \quad \mu_{\mathcal{A}}(x_3) = 0.2; \quad \mu_{\mathcal{A}}(x_4) = 1; \quad \mu_{\mathcal{A}}(x_5) = 0.8; \\ \mu_{\mathcal{A}}(x_6) &= 0.3\end{aligned}$$

Zaključak je da element x_4 u potpunosti pripada fazi skupu \mathcal{A} , dok element x_1 jako malo pripada fazi skupu \mathcal{A} jer je 0.1 jako blizu nule.

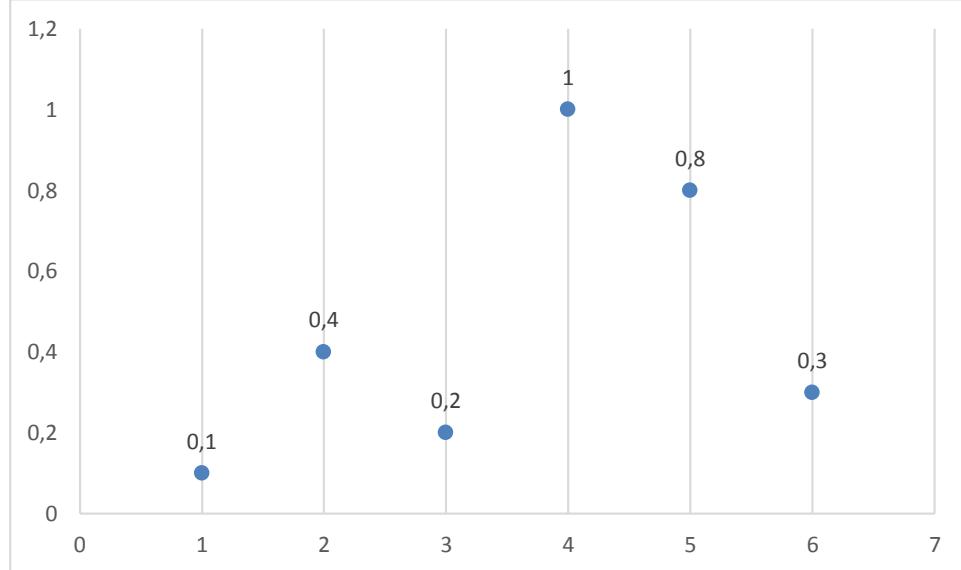
Sad slede dva primera za gore definisan skup A :

a) Neka su $x_i, i = 1, \dots, 6$ definisani na sledeći način:

$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5, x_6 = 6$. Dakle skup A je $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i on je podskup univerzalnog skupa koji je u ovom slučaju skup prirodnih brojeva $U = \mathbb{N}$. Onda fazi skup \mathcal{A} postaje:

$$\mathcal{A} = \{(1, 0.1), (2, 0.4), (3, 0.2), (4, 1), (5, 0.8), (6, 0.3)\}$$

Što se može predstaviti i grafički:



Slika 1.3 Grafički prikaz fazi skupa \mathcal{A}

b) Sad se može uzeti empirijski primer. Ninina ljubimica Lora, dobila je 6 štenaca, no nisu joj svi podjednako dragi. To znači da u skladu sa definicijom gore datog fazi skupa \mathcal{A} sledi:

$$\mathcal{A} = \{(Roki, 0.1), (Bob, 0.4), (Sima, 0.2), (Beti, 1), (Marli, 0.8), (Rex, 0.3)\}$$

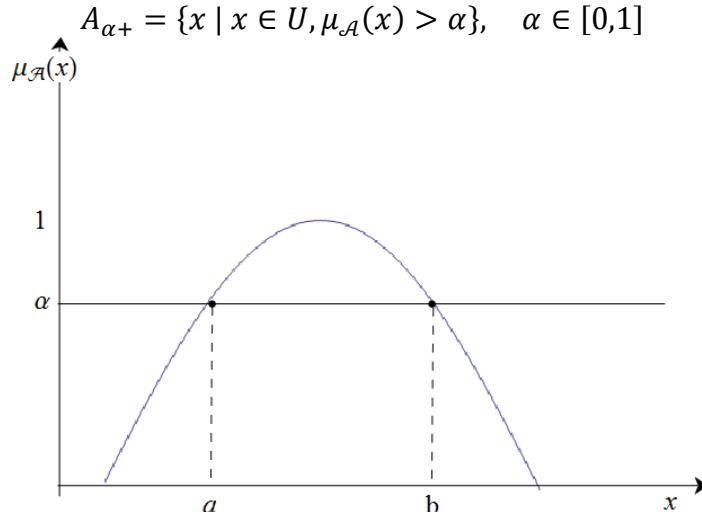
Odnosno, iz pomenutog legla Nina će sebi odabratи Beti dok će preostalih 5 štenaca recimo pokloniti svojim drugaricama.

Definicija 1.5 [2] Za fazi skup \mathcal{A} definiše se njegov α -presek u oznaci A_α , kao običan skup elemenata x koji pripadaju fazi skupu \mathcal{A} bar sa stepenom α :

$$A_\alpha = \{x \mid x \in U, \mu_{\mathcal{A}}(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in [0,1]$$

Na taj način može da se definiše granica stepena pripadnosti i da se svi elemente čiji je stepen pripadnosti strogog manji od α recimo ne uzmu u razmatranje.

Može da se definiše i *striktni* α -presek:



Slika 1.4 Jedan primer α -preseka

Definicija 1.6 [2, 8] Fazi skup je konveksan ako i samo ako:

$$\mu_{\mathcal{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{\mu_{\mathcal{A}}(x_1), \mu_{\mathcal{A}}(x_2)\}, \quad x_1, x_2 \in U, \lambda \in [0,1]$$

Prema tome, ako se uzmu dva elementa a i b iz konveksnog fazi skupa i spoje jednom duži, vrednost funkcije pripadnosti za svaku tačku te duži mora biti veća ili jednaka minimalnoj vrednosti funkcije pripadnosti za elemente a i b .

Kada postoji neki problem sa određenim stepenom neodređenosti, to može da se modelira i verovatnoćom koja isto kao i funkcija pripadnosti uzima vrednosti iz intervala $[0,1]$. Zato sledi primer koji će ukazati na osnovnu razliku u primeni verovatnoće i funkcije pripadnosti.

Primer 1.3 [12]

Neka je U skup svih tečnosti. Potrebno je uočiti njegov podskup $A =$ tečnosti pogodne za piće. Sada treba dodeliti različite vrednosti stepena pripadanja različitim tečnostima: recimo voda će imati stepen 1, sok 0.8, vino 0.6, rakija 0.2, i sona kiselina 0. Neka sada žedni i umorni putnik nailazi na dve boce pri čemu na jednoj piše da je stepen pripadnosti $\mu_{\mathcal{A}}(x) = 0.92$, a na drugoj da je verovatnoća da je to pitka voda 0.92. Koju će bocu putnik izabrati? Funkcija pripadnosti koja ima vrednost 0.92 znači da je u boci tečnost između soka i vode (dakle izuzetno pitka), dok verovatnoća 0.92, znači da postoji i verovatnoća od 0.08 da je u pitanju sona kiselina, pa će po svemu sudeći, putnik odabrati prvu bocu.

1.2 Osnovne operacije nad fazi skupovima

Sledi pregled definicija osnovnih operacija nad fazi skupovima u skladu sa [2]:

Neka je U univerzalni skup, i skupovi \mathcal{A} i \mathcal{B} fazi skupovi definisani na sledeći način:

$$\mathcal{A} = \{(x, \mu_{\mathcal{A}}(x))\}, \quad \mu_{\mathcal{A}}(x) \in [0,1]$$

$$\mathcal{B} = \{(x, \mu_{\mathcal{B}}(x))\}, \quad \mu_{\mathcal{B}}(x) \in [0,1]$$

Operacije sa ovim fazi skupovima biće objašnjene preko njihovih funkcija pripadnosti.

Definicija 1.7 [2] Fazi skupovi \mathcal{A} i \mathcal{B} su *ekvivalentni*, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, ako i samo ako za svako $x \in U$ važi $\mu_{\mathcal{A}}(x) = \mu_{\mathcal{B}}(x)$.

Definicija 1.8 [2]

a) Fazi skup \mathcal{A} je *podskup* fazi skupa \mathcal{B} , u oznaci $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, ako za svako $x \in U$ važi da je

$$\mu_{\mathcal{A}}(x) \leq \mu_{\mathcal{B}}(x)$$

b) Fazi skup \mathcal{A} je *pravi podskup* fazi skupa \mathcal{B} , $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, ako je \mathcal{A} poskup od \mathcal{B} i $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$, tj. ako važe sledeća dva uslova istovremeno:

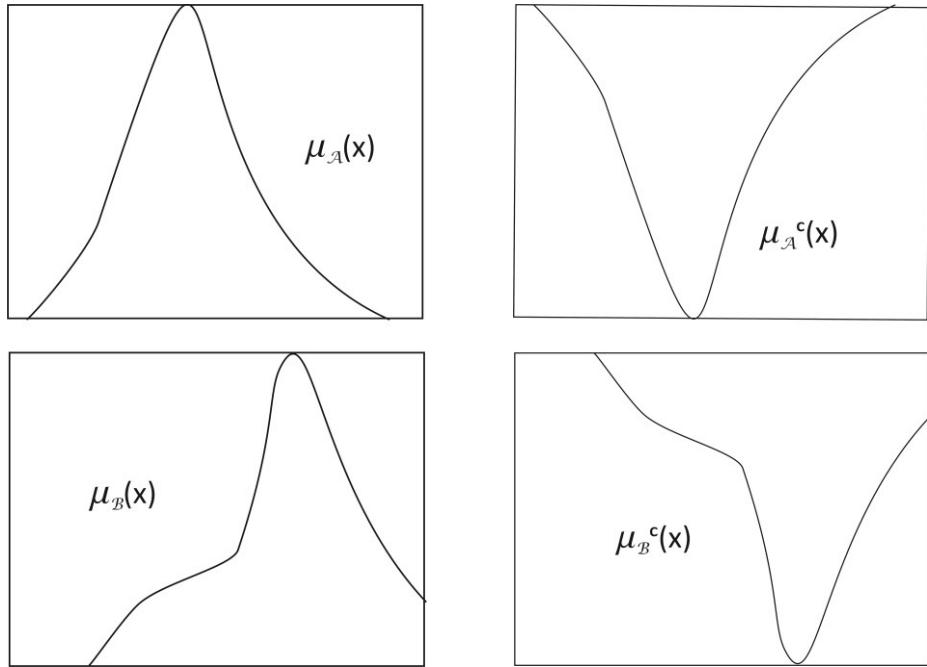
$$(1) \mu_{\mathcal{A}}(x) \leq \mu_{\mathcal{B}}(x), \text{ za svako } x \in U$$

$$(2) \mu_{\mathcal{A}}(x) < \mu_{\mathcal{B}}(x), \text{ za bar jedno } x \in U.$$

Definicija 1.9 [2] Fazi skupovi \mathcal{A} i \mathcal{A}^c su *komplementi* ako važi:

$$\mu_{\mathcal{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\mathcal{A}}(x) \quad \text{tj } \mu_{\mathcal{A}}(x) + \mu_{\mathcal{A}^c}(x) = 1.$$

Funkcije $\mu_{\mathcal{A}^c}(x)$ i $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ su simetrične u odnosu na pravu $\mu = 0,5$.



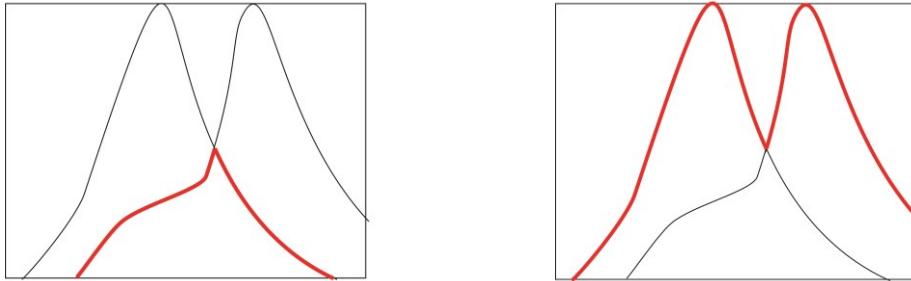
Slika 1.5 – Prikaz funkcija pripadnosti fazi skupova (levo) i njihovih komplementata (desno)

Definicija 1.10 [2] Operacija *preseka* fazi skupova \mathcal{A} i \mathcal{B} , u oznaci $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, definiše se na sledeći način:

$$\mu_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(x) = \min(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x)), \quad x \in U$$

Definicija 1.11 [2] Operacija *unije* fazi skupova \mathcal{A} i \mathcal{B} , u oznaci $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, definiše se na sledeći način:

$$\mu_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}(x) = \max(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x)), \quad x \in U$$

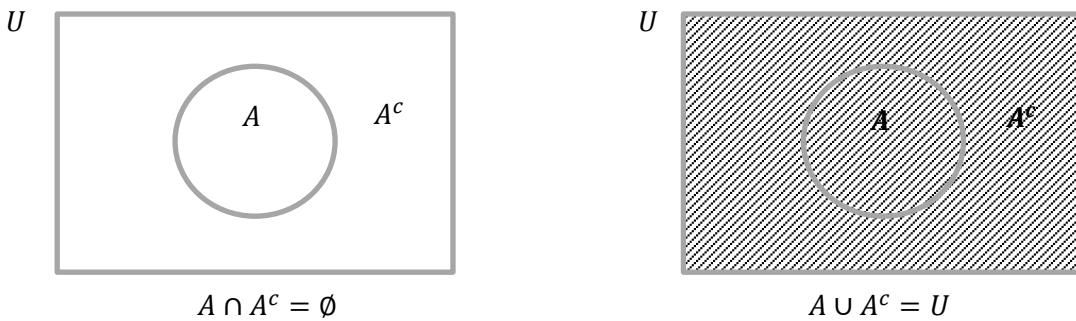


Slika 1.6 – Funkcija pripadnosti preseka fazi skupova predstavljena je crvenom bojom na slici levo, a unije na slici desno

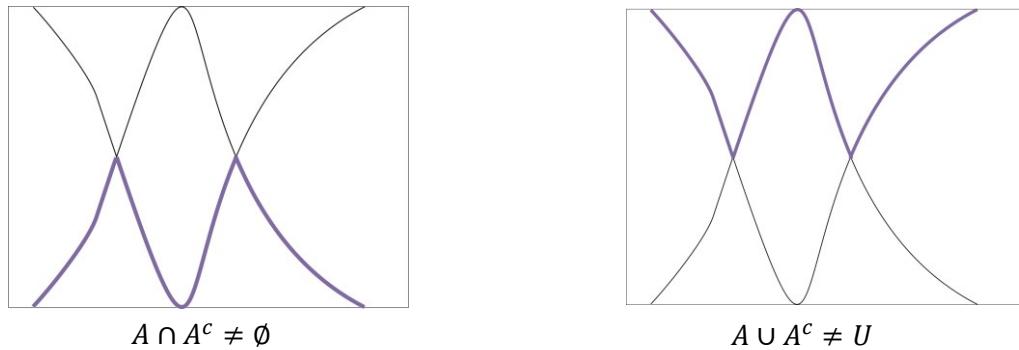
Često se u literaturi može naići na naziv *standardni presek* i *standardna unija* ([8]) s obzirom na to da postoji uopštenje o kojem će biti reči već u *poglavlju 1.3.1*.

Zakon isključenja trećeg i fazi skupovi: Obični skupovi imaju važnu osobinu isključenja trećeg: $A \cap A^c = \emptyset$ i $A \cup A^c = U$. Međutim ovaj zakon ne važi kod fazi skupova, što se može lepo videti na *Slici 1.8*.

Ovo je i veoma logično jer kod običnih skupova element ili pripada ili ne pripada skupu, treće situacije nema, ona je isključena, dok kod fazi skupova to nije tačno.



Slika 1.7 – Zakon isključenja trećeg za „obične“ skupove



Slika 1.8 – Zakon isključenja trećeg ne važi za fazi skupove

1.3 Trougaone norme

Trougaone norme su specijalne operacije na jediničnom intervalu. One predstavljaju, između ostalog, uopštenje operacija preseka i unije kod skupova, odnosno analogno tome, uopštenje konjukcije i disjunkcije u logici. Prvi put se pojavljuju 1942. godine u radu Mengera². Potom se godinama usavršavaju od strane brojnih naučnika, a danas se najčešće koristi definicija koju su dali Švajcer i Skalar koristeći ideje Mengera ([13]). Oni su uveli klasu realnih binarnih operacija koje su nazvali trougaonim normama i te operacije se danas pored teorije probabilističkih metričkih prostora, javljaju i u drugim teorijama kao što su teorija fazi logike, teorija informacija, teorija igara kao i u fazi skupovima, fazi kontrolerima, neuralnim mrežama itd. Ovo poglavlje se oslanja na [7, 8, 10, 12].

Definicija 1.12 [12] Trougaona norma T (kraće *t-norma*) je funkcija $T: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ takva da za svako $x, y \in [0,1]$ važe sledeće osobine:

- | | |
|---|-----------------------|
| (T1) $T(x,y) = T(y,x)$ | <i>komutativnost</i> |
| (T2) $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)$ | <i>asocijativnost</i> |
| (T3) $T(x,y) \leq T(x,z)$ za $y \leq z$ | <i>monotonost</i> |
| (T4) $T(x,1) = T(1,x) = x, T(x,0) = T(0,x) = 0$ | <i>rubni uslovi</i> |

Postoji mnoštvo trougaonih normi ([10, 12]), ali za potrebe ovog predstavljanja, navode se četiri osnovne t-norme, i to su:

1. $T_M(x,y) = \min(x,y)$ minimum
2. $T_P(x,y) = x \cdot y$ algebarski proizvod
3. $T_L(x,y) = \max(0, x + y - 1)$ Lukašijevičeva t-norma (eng. Lukasiewich)
4. $T_W(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \text{ako } \max(x,y) = 1 \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$ Norma drastičnog preseka

S obzirom na to da važi osobina asocijativnosti za trougaone norme (*Definicija 1.12*), one se mogu proširiti na n-arne operacije $T_{i=1}^n: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ i to po sledećem pravilu:

$$T_{i=1}^n x_i = T(T_{i=1}^{n-1} x_i, x_n) = \dots = T(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Tako se dobijaju sledeće n-arne operacije od elementarnih t-normi:

1. $T_M(x_1, \dots, x_n) = \min(x_1, \dots, x_n)$
2. $T_P(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$
3. $T_L(x_1, \dots, x_n) = \max(0, \sum_{i=1}^n x_i - (n-1))$
4. $T_W(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} x_i, & \text{ako je } x_j = 1, i \neq j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$

Takođe, operacija T se može proširiti i na beskonačnu operaciju $T_{i=1}^\infty$: za bilo koji niz $\{x_n\}$ iz intervala $[0,1]$ je $T_{n=1}^\infty x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{i=1}^n x_i$. Pošto je niz $\{T_{i=1}^n x_i\}$ nerastući, granica na desnoj strani uvek postoji ([12]).

² Karl Menger (eng. *Karl Menger*) (1902-1985), sin poznatog ekonomiste Karla Mengera (eng. *Carl Menger*), bio je američki matematičar koji je dao doprinos teoriji igara kao i društvenim naukama. Takođe postoji i teorema u teoriji grafova koja nosi njegovo ime.

Definicija 1.13 [12] Trougaona norma T_1 je *slabija* od trougaone norme T_2 , u oznaci $T_1 \leq T_2$, ako važi da je $T_1(x, y) \leq T_2(x, y)$, za svako $(x, y) \in [0,1]^2$. Analogno se može reći da je T_2 *jača* od T_1 .

T-norma T_M je najjača a T_W najslabija t-norma, što se lepo vidi iz sledećeg tvrđenja:

Tvrđenje 1.1 [10] Za svaku t-normu T i za sve $(x, y) \in [0,1]^2$, važi: $T_W(x, y) \leq T(x, y) \leq T_M(x, y)$.

Dokaz: Neka su $x, y \in [0,1]$, i neka je $T(x, y)$ proizvoljna t-norma. Pošto je prepostavka da je $y \in [0,1]$ sledi da je $y \leq 1$ i koristeći osobine monotonosti i rubne uslove, dobija se: $T(x, y) \leq T(x, 1) = x \leq x$.

Prepostavka je i $x \in [0,1]$, pa koristeći pored monotonosti i rubnih uslova još i komutativnost, dobija se: $T(x, y) = T(y, x) \leq T(y, 1) = y \leq y$. Onda iz $T(x, y) \leq x$ i $T(x, y) \leq y$ sledi da je proizvoljna t-norma $T(x, y) \leq \min(x, y)$ a to je upravo t-norma minimuma, tj. $T(x, y) \leq T_M(x, y)$.

Sad se posmatra slučaj kada $x = 1$. Onda je $T(x, y) = T(1, y) = y = T_W(x, y)$, a za slučaj kad je $y = 1$ slično: $T(x, y) = T(x, 1) = x = T_W(x, y)$. Znači u oba slučaja je $T(x, y) = T_W(x, y)$ pa samim tim važi da je $T(x, y) \geq T_W(x, y)$, jer s druge strane ako $x, y \in (0,1)$ sledi $T_W(x, y) = 0 \leq T(x, y)$.

□

Za elementarne t-norme važi:

$$T_W \leq T_L \leq T_P \leq T_M$$

Definicija 1.14 [12] Trougaona konorma S , ili kraće rečeno *t-konorma*, je funkcija $S: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ takva da važe sledeće osobine:

- | | |
|--|---|
| (S1) $S(x, y) = S(y, x)$
(S2) $S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$
(S3) $S(x, y) \leq S(x, z)$ za $y \leq z$
(S4) $S(x, 0) = x, S(x, 1) = 1$ | <i>komutativnost</i>
<i>asocijativnost</i>
<i>monotonost</i>
<i>rubni uslovi</i> |
|--|---|

Sve to uz prepostavku da $x, y, z \in [0,1]$.

Može se lako uočiti da se trougaone norme i trougaone konorme razlikuju samo po rubnim uslovima.

Analogno kao kod trougaonih normi, i ovde se navode četiri elementarne trougaone konorme:

1. $S_M(x, y) = \max(x, y)$
2. $S_P(x, y) = x + y - x \cdot y$
3. $S_L(x, y) = \min(1, x + y)$
4. $S_W(x, y) = \begin{cases} \max(x, y), & \text{za } \min(x, y) = 0 \\ 1, & \text{inače} \end{cases}$

U početku je trougaona konorma uvedena kao dualna operacija za trougaonu normu od strane Švajcera i Skalara ([13]):

$$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y), x, y \in [0,1].$$

Za ovo postoji i tvrđenje ispod navedeno:

Tvrđenje 1.2 [10] Funkcija $S: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ je trougaona konorma ako i samo ako postoji trougaona norma T takva da za sve $(x, y) \in [0,1]^2$, važi $S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y)$.

Dokaz: (\Rightarrow) Neka je S trougaona konorma i neka je preslikavanje $T: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ definisano sa $T(x,y) = 1 - S(1-x, 1-y)$. Treba pokazati da je ovako definisano preslikavanje trougaona norma, tj. treba pokazati da su osobine (T1) – (T4) iz Definicije 1.13 zadovoljene:

1. **(T1)** $T(x,y) = 1 - S(1-x, 1-y) = 1 - S(1-y, 1-x) = T(y,x)$ – važi zbog prepostavke da je S trougaona konorma, a ona ima osobinu komutativnosti.
2. **(T2)** $T(x, T(y,z)) = 1 - S(1-x, 1 - T(y,z)) =$
 $= 1 - S(1-x, 1 - (1 - S(1-y, 1-z))) =$
 $= 1 - S(1-x, 1 - 1 + S(1-y, 1-z)) =$
 $= 1 - S(1-x, S(1-y, 1-z)) = 1 - S(S(1-x, 1-y), 1-z)) =$
 $= 1 - S(1-x + S(1-y, 1-z), 1-z) = 1 - S(1 - T(x,y), 1-z) =$
 $= T(T(x,y), z)$ – ovo sve važi zbog toga S kao trougaona konorma ima osobinu asocijativnosti.
3. **(T3)** Neka je $y \leq z$.
Onda važi i da je $1-y \geq 1-z$ (*).
Iz (*) i iz osobine monotonosti za trougaone konorme, važi da je:
 $S(1-x, 1-y) \geq S(1-x, 1-z)$ iz čega sledi:
 $1 - S(1-x, 1-y) \leq 1 - S(1-x, 1-z)$ i onda imamo:
 $T(x,y) = 1 - S(1-x, 1-y) \leq 1 - S(1-x, 1-z) = T(x,z)$.
4. **(T4)**
 $T(x, 1) = 1 - S(1-x, 1-1) = 1 - S(1-x, 0) = 1 - (1-x) = x$
 $T(x, 0) = 1 - S(1-x, 1-0) = 1 - S(1-x, 1) = 1 - 1 = 0$

(\Leftarrow) Sada se pretpostavlja da je T trougaona norma takva da za svako $x, y \in [0,1]$ važi $S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y)$. Na analogni način kao što je pokazano da važi smer (\Rightarrow), pokazuje se da je preslikavanje S trougaona konorma.

□

Za trougaonu konormu S definisanu u Tvrđenju 1.2 kaže se da je *dualna* trougaonoj normi T , i obrnuto, t-norma T je *dualna* t-konormi S . Upoređujući odgovarajuće elementarne trougaone norme i konorme, vidi se da su jedne drugima dualne. Upravo zbog dualnosti, menja se poredak koji važi za trougaone norme, pa za elementarne t-konorme važi da je:

$$S_M \leq S_P \leq S_L \leq S_W$$

U skladu sa tim, dualnost utiče i na jačinu t-konormi. Pa tako sledi tvrđenje:

Tvrđenje 1.3 [10] Za svaku trougaonu konormu S i svako $x, y \in [0,1]$ važi:

$$S_M(x,y) \leq S(x,y) \leq S_W(x,y)$$

Dokaz: Dokaz ide analogno dokazu za Tvrđenje 1.1:

Neka su $x, y \in [0,1]$ i neka je $S(x,y)$ prizvoljna trougaona konorma. Iz osobina komutativnosti, monotonosti, graničnih uslova i $y \geq 0$ sledi da je $S(x,y) \geq S(x,0) = x \geq x$. Zatim ako se iskoristi da je $x \geq 0$ i osobine monotonosti, komutativnosti i graničnih uslova za t-konorme, dobija se da je $S(x,y) = S(y,x) \geq S(y,0) = y \geq y$.

Prema tome sledi da je $S(x, y) \geq x$ i $S(x, y) \geq y$, pa iz toga zajedno sledi da je:

$$S(x, y) \geq \max(x, y)$$

U slučaju da je $x = 0, y \neq 0$ važi $S(x, y) = S(0, y) = y = S_W(x, y)$

U slučaju da je $x \neq 0, y = 0$ važi $S(x, y) = S(x, 0) = x = S_W(x, y)$.

Za $x, y \in (0,1)$ važi $S(x, y) \leq S(x, 1) = S(1, x) \leq S(1, 1) = 1 = S_W(x, y)$.

tj. važi da je $S(x, y) \leq S_W(x, y)$. □

Sledi pregled osobina trougaonih normi:

Tvrđenje 1.4 [12] Trougaona norma T_M je jedina trougaona norma koja zadovoljava $T(x, x) = x$ za sve $x \in (0,1)$.

Dokaz: Neka za trougaonu normu važi $T(x, x) = x$ za sve $x \in (0,1)$. Onda za neko $y \leq x < 1$ zbog monotonosti i zbog toga što je svaka trougaona norma slabija od norme T_M , sledi da je:

$$y = T(y, y) \leq T(x, y) \leq T_M = \min(x, y) = y$$

gde sad na osnovu komutativnosti i rubnog uslova sledi da je $T = T_M$ □

Tvrđenje 1.5 [12] Trougaona norma T_W je jedina trougaona norma za koja zadovoljava $T(x, x) = 0$ za sve $x \in (0,1)$.

Dokaz: Neka za trougaonu normu važi $T(x, x) = 0$ za sve $x \in (0,1)$. Tada za svako $y, 0 \leq y < x$ važi

$$0 \leq T(x, y) \leq T(x, x) = 0$$

Iz čega sledi da je $T = T_W$. □

Definicija 1.15 [12] Trougaona norma T je *striktna* ako je neprekidna (u smislu neprekidna kao funkcija dve promenljive) i važi:

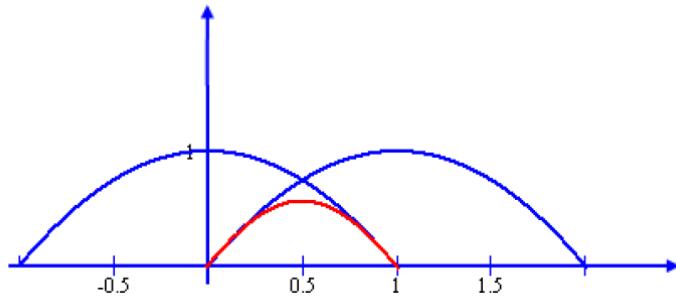
$$T(x, y) < T(x, z) \text{ kad god je } x > 0 \text{ i } y < z.$$

Obrnuto ne važi.

1.3.1 Operacije na fazi skupovima zasnovane na t-normama i t-konormama

Predstaviće se definicije preseka i unije fazi skupova koje se baziraju na trougaonim normama i trougaonim konormama. To su uopštenja standardnog preseka i unije [7, 8, 10].

Definicija 1.16 [7, 10] Neka je T proizvoljna trougaona norma. T – *presek* fazi skupova \mathcal{A} i \mathcal{B} , $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ definiše se kao $\mu_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(x) = T(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x))$, za svako $x \in U$.

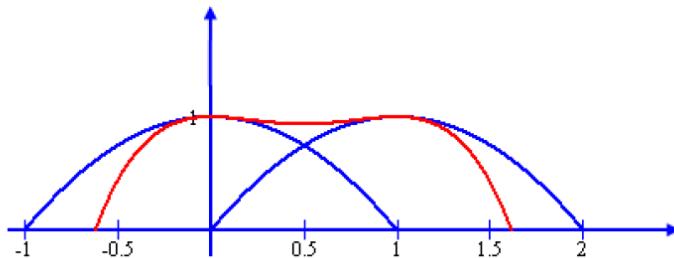


Slika 1.9 – T-presek fazi skupova \mathcal{A} i \mathcal{B}

Primer 1.4 Neka su dati fazi skupovi \mathcal{A} i \mathcal{B} , neka su date njihove funkcije pripadnosti respektivno: $\mu_{\mathcal{A}}(x) = 1 - x^2$ koja je definisana za $x \in [-1, 1]$, i $\mu_{\mathcal{B}}(x) = 1 - (1 - x)^2$ koja je definisana za $x \in [0, 2]$ i neka je data trougaona norma $T_p(x, y) = x \cdot y$, onda sledi da je funkcija pripadnosti preseka fazi skupova \mathcal{A} i \mathcal{B} : $\mu_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(x) = \mu_{\mathcal{A}}(x) \cdot \mu_{\mathcal{B}}(x) = (1 - x^2) \cdot (1 - (1 - x)^2)$.

Definicija 1.17 [7, 10] Neka je S proizvoljna trougaona konorma. S – unija fazi skupova \mathcal{A} i \mathcal{B} , $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ definiše se kao $\mu_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}(x) = S(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x))$, za svako $x \in U$.

Primer 1.5 Neka su dati fazi skupovi \mathcal{A} i \mathcal{B} , i neka su njihove funkcije pripadnosti definisane kao u prethodnom primeru i neka je data trougaona konorma $S_p(x, y) = x + y - x \cdot y$, onda sledi da je funkcija pripadnosti unije fazi skupova \mathcal{A} i \mathcal{B} : $\mu_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}(x) = \mu_{\mathcal{A}}(x) + \mu_{\mathcal{B}}(x) - \mu_{\mathcal{A}}(x) \cdot \mu_{\mathcal{B}}(x) = 1 - x^2 + 1 - (1 - x)^2 - (1 - x^2) \cdot (1 - (1 - x)^2) = -x^4 + 2 \cdot x^3 - x^2 + 1$.



Slika 1.10 – S-unija fazi skupova \mathcal{A} i \mathcal{B}

1.4 Fazi brojevi

Fazi broj predstavlja specijalan fazi skup. Oni su od posebnog značaja za primenu. Zato se iako su i oni fazi skupovi, ipak koristi posebna oznaka kako bi se istakli. U literaturi se može naći više definicija fazi brojeva, a ovde će se koristiti definicija u skladu sa [8].

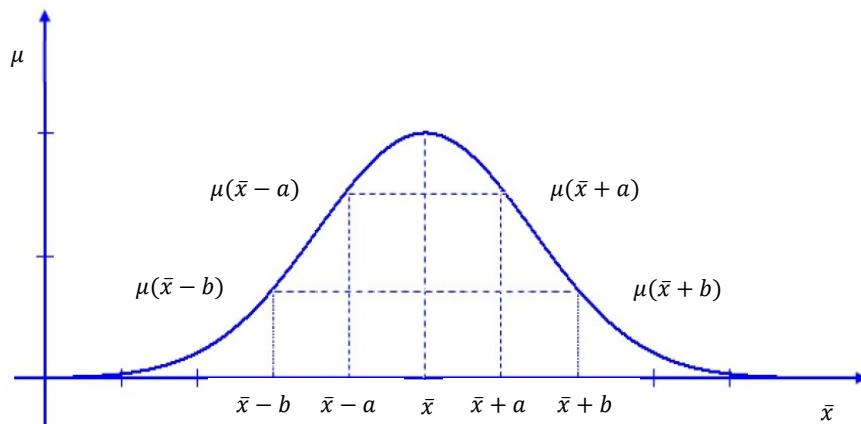
Definicija 1.18 [8] Za fazi skup \mathcal{P} nad skupom realnih brojeva, kaže se da je *fazi broj* \mathbf{P} ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

1. \mathcal{P} je *normalizovan* fazi skup
2. \mathcal{P} je konveksan
3. Postoji tačno jedno $\bar{x} \in \mathbb{R}$ takvo da je $\mu_{\mathbf{P}}(\bar{x}) = 1$
4. Funkcija pripadnosti $\mu_{\mathbf{P}}(x)$ za $x \in \mathbb{R}$ je bar po delovima neprekidna.

Modalna vrednost fazi broja \mathbf{P} je vrednost \bar{x} kojoj odgovara maksimalan stepen pripadnosti.

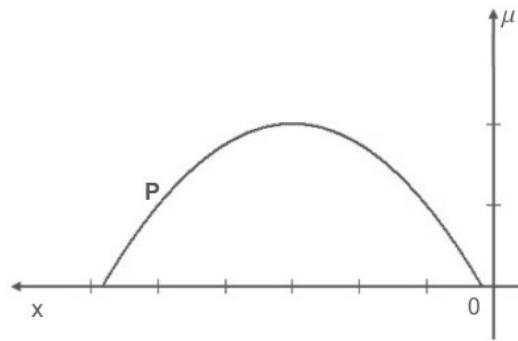
Fazi brojevi će se označavati velikim masnim slovima: **A**, **B**, **C**, **D**,..., a njihove funkcije pripadnosti sa: $\mu_{\mathbf{A}}(x), \mu_{\mathbf{B}}(x), \mu_{\mathbf{C}}(x), \dots$

Definicija 1.19 [8] Fazi broj \mathbf{P} iz prethodne definicije je simetričan ako njegova funkcija pripadnosti zadovoljava $\mu_{\mathbf{P}}(\bar{x} + x) = \mu_{\mathbf{P}}(\bar{x} - x)$, za svako $x \in \mathbb{R}$.



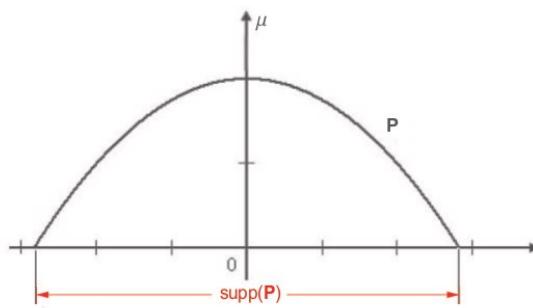
Slika 1.11 – Funkcija pripadnosti simetričnog fazi broja

Definicija 1.20 [8] Fazi broj je strogo pozitivan, tj. $\mathbf{P} > 0$, ako i samo ako nosač tog fazi broja, $\text{supp}(\mathbf{P}) \subseteq (0, \infty)$, odnosno strogo negativan, tj. $\mathbf{P} < 0$, ako i samo ako $\text{supp}(\mathbf{P}) \subseteq (-\infty, 0)$. (Na Slici 1.11, pored toga što je predstavljena funkcija pripadnosti simetričnog fazi broja, istovremeno je dat i primer funkcije pripadnosti jednog strogo pozitivnog fazi broja).



Slika 1.12 – Funkcija pripadnosti strogo negativnog fazi broja

Definicija 1.21 [8] Za fazi broj se kaže da je *fazi-nula* broj, u oznaci $\text{sgn}(\mathbf{P}) = 0$, ako nije ni pozitivan ni negativan, tj. ako $0 \in \text{supp}(\mathbf{P})$.



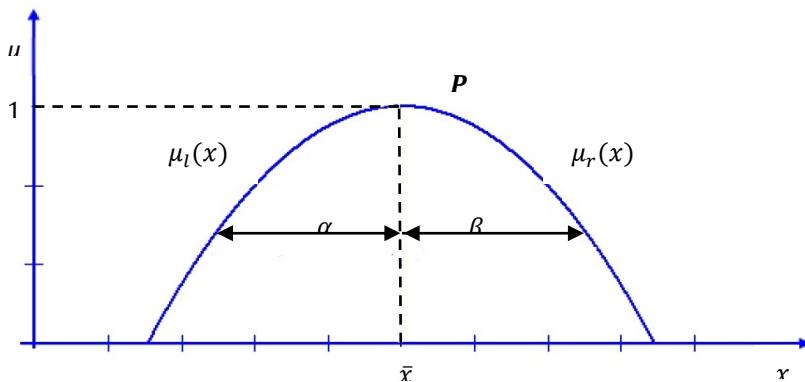
Slika 1.13 – Funkcija pripadnosti fazi-nula broja

Pri interpretaciji broja kaže se da je to realan broj blizu \mathbf{P} , pošto je to ipak nekako neodređeno i nejasno, u tom smislu i fazi, pa se ne može se definisati jedinstveno.

1.5 L-R fazi brojevi

L-R fazi brojevi predstavljaju jedan od osnovnih načina reprezentacije fazi brojeva. Naziv potiče od ideje da se funkcija pripadnosti fazi broja može posmatrati iz dva dela: jednog koji se nalazi levo (eng. *Left*) od modalne vrednosti \bar{x} i drugog koji se nalazi desno (eng. *Right*) od \bar{x} . Tako nastaju dve funkcije pripadnosti $\mu_l(x)$ i $\mu_r(x)$. Ako se još sa α i β označe odstupanja u levu odnosno desnu stranu od modalne vrednosti \bar{x} , respektivno, a sa L i R takozvane referentne funkcije (eng. *reference functions*) tj. funkcije oblika – ove funkcije određuju oblik fazi broja i upravo u zavisnosti od izbora tih funkcija, razlikuju se trougaoni, eksponencijalni, kvadratni,... fazi brojevi ([8, 12]) – onda se funkcija pripadnosti fazi broja može zapisati na sledeći način:

$$\mu_P(x) = \begin{cases} \mu_l(x) = L\left(\frac{\bar{x}-x}{\alpha}\right), & \text{za } x < \bar{x} \\ \mu_r(x) = R\left(\frac{x-\bar{x}}{\beta}\right), & \text{za } x \geq \bar{x} \end{cases}$$



Slika 1.14 – Funkcija pripadnosti L-R fazi broja

Da bi L i R bile referentne funkcije L-R fazi brojeva, one moraju zadovoljiti neke osobine:

1. $L(u) \in [0,1]$ za svako u
 $R(u) \in [0,1]$ za svako u

Pošto se vrednosti funkcija pripadnosti moraju naći u intervalu $[0,1]$, onda i L i R koje figurišu u funkcijama pripadnosti, moraju upasti u isti interval

2. $L(0) = R(0) = 1$

Pošto je \bar{x} modalna vrednost fazi broja P onda mora biti i modalna vrednost levog i desnog fazi broja, tj. funkcije pripadnosti $\mu_l(x)$ i $\mu_r(x)$ moraju biti jednakе jedinici u tački \bar{x} .

$$1 = \mu_l(\bar{x}) = L\left(\frac{\bar{x}-\bar{x}}{\alpha}\right) = L(0)$$

$$1 = \mu_r(\bar{x}) = R\left(\frac{\bar{x}-\bar{x}}{\alpha}\right) = R(0)$$

3. $L(u)$ i $R(u)$ su opadajuće funkcije na intervalu $[0, \infty)$.

Naime, funkcija $\mu_l(x)$ je rastuća na intervalu $[0, \infty)$, iz čega sledi da je L opadajuća na tom intervalu, tj. treba pokazati da je zadovoljeno:

$x_1 > x_2 \Rightarrow \mu_l(x_1) > \mu_l(x_2) \Leftrightarrow L\left(\frac{\bar{x}-x_1}{\alpha}\right) > L\left(\frac{\bar{x}-x_2}{\alpha}\right)$, a važi da je $x_1 < \bar{x}$ i $x_1 < \bar{x}$.

Ako se označi $\frac{\bar{x}-x_1}{\alpha} = u_1$ i $\frac{\bar{x}-x_2}{\alpha} = u_2$, onda sledi $L(u_1) > L(u_2)$. Zatim se dobija $x_1 = \bar{x} - \alpha u_1$ i $x_2 = \bar{x} - \alpha u_2$. Pretpostavka je da je $x_1 > x_2$ pa sledi $\bar{x} - \alpha u_1 > \bar{x} - \alpha u_2 \Rightarrow u_1 < u_2$. Dakle, dobija se da je za $u_1 < u_2$, $L(u_1) > L(u_2)$, tj. L je opadajuća funkcija. Slično se, polazeći od toga da je $u_r(x)$ opadajuća na intervalu $[0, \infty)$, pokazuje da je i R opadajuća funkcija na istom intervalu.

4. $L(1) = 0$ ako je $\min_u L(u) = 0$

$$R(1) = 0 \text{ ako je } \min_u R(u) = 0$$

$$\min_u L(u) = 0 \Leftrightarrow \min_u \mu_l = 0, \text{ a funkcija } \mu_l \text{ ima minimum u tački } u^* = \bar{x} - \alpha, \text{ pa je zato } 0 = \mu_l(u^*) = \mu_l(\bar{x} - \alpha) = L\left(\frac{\bar{x} - (\bar{x} - \alpha)}{\alpha}\right) = L(1)$$

Ako je $L(u) > 0$ za svako u , onda je $\lim_{u \rightarrow \infty} L(u) = 0$, pošto je L opadajuća funkcija nad intervalu $[0, \infty)$. Analogno se pokazuje za funkciju R .

Za zapis L-R fazi broja \mathbf{P} koristi se oznaka $\mathbf{P} = \langle \bar{x}, \alpha, \beta \rangle_{L,R}$, gde je \bar{x} modalna vrednost a α i β odstupanja od modalne vrednosti.

Definicija 1.22 [8] L-R fazi broj je *semi-simetričan* ako su funkcije L i R jednake, tj. $L(u) = R(u)$ za svako $u \in \mathbb{R}_0^+$. Ako su odstupanja od modalne vrednosti, α i β , jednaka, L-R fazi broj je *simetričan*.

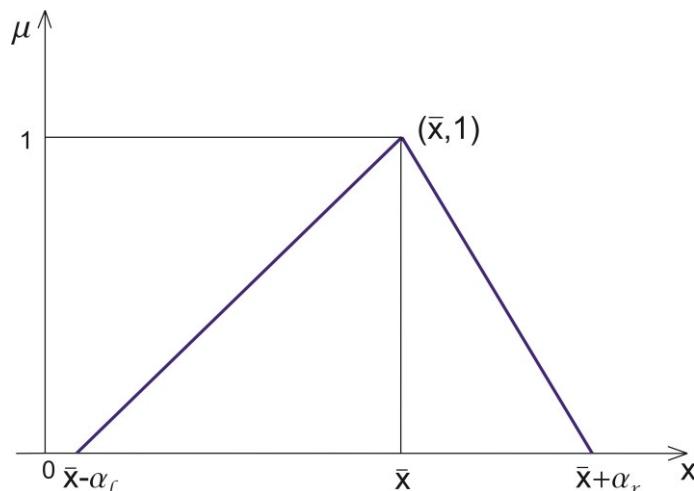
1.6 Trougaoni fazi brojevi

Trougaoni fazi brojevi predstavljaju specijalan slučaj L-R fazi brojeva. (Celo predstavljanje je u skladu sa [2, 10]).

Trougaoni fazi brojevi se još zovu i *linearni* jer imaju linearu funkciju pripadnosti koja je definisana na sledeći način:

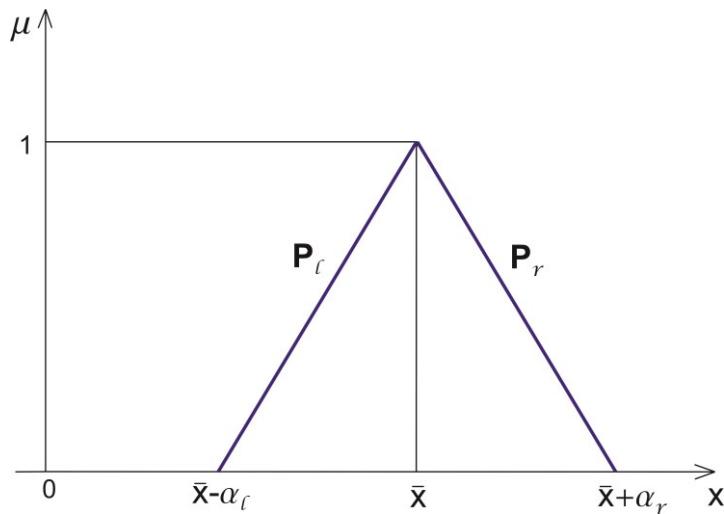
$$\mu(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x - \bar{x}}{\alpha_l}, & \bar{x} - \alpha_l < x < \bar{x} \\ 1 - \frac{x - \bar{x}}{\alpha_r}, & \bar{x} \leq x < \bar{x} + \alpha_r \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Trougaoni fazi broj se označava sa $\mathbf{P} = tfn(\bar{x}, \alpha_l, \alpha_r)$ ili $\mathbf{P} = tfn(\bar{x} - \alpha_l, \bar{x}, \bar{x} + \alpha_r)$, gde je \bar{x} modalna vrednost fazi broja, a α_l i α_r su odstupanja sa leve i desne strane respektivno. Pored ovog zapisa, radi jednostavnosti, prilikom izlaganja o principima usrednjavanja, uvode se sledeće smene u zapisu: $p_1 = \bar{x} - \alpha_l$, $p_M = \bar{x}$ i $p_2 = \bar{x} + \alpha_r$ tako da će trougaoni fazi broj biti $\mathbf{P} = (p_1, p_M, p_2)$. Interval $[\bar{x} - \alpha_l, \bar{x} + \alpha_r]$ se zove *nosač fazi broja*. U praksi se često modalna vrednost fazi broja nalazi na sredini tog intervala: $\bar{x} = \frac{(\bar{x} - \alpha_l) + (\bar{x} + \alpha_r)}{2}$, pa kad se zameni ta vrednost u funkciju pripadnosti, dobija se *simetričan (centralni) fazi broj*.



Slika 1.15 – Trougaoni fazi broj

Funkcija pripadnosti trougaonih fazi brojeva je, kao što je već pomenuto, linearna, odnosno ona se sastoji od dva linearna dela koji se spajaju u tački $(\bar{x}, 1)$ koja predstavlja maksimum. Levi trougaoni broj je $\mathbf{P}_l = (\bar{x} - \alpha_l, \bar{x}, \bar{x})$ a desni $\mathbf{P}_r = (\bar{x}, \bar{x}, \bar{x} + \alpha_r)$. Levi trougaoni broj \mathbf{P}_l je zgodan u praksi da označi pojmove kao što su *veoma star, veliki rizik, veliki profit*, itd., dakle u onim situacijama kad je modalna vrednost velika (eng. *Positive Large*). Analogno, desni trougaoni broj \mathbf{P}_r se koristi da opiše pojmove kao što su *mlad, mali profit, mali rizik, ...*, to su na neki način pozitivno male veličine (eng. *Positive Small*).



Slika 1.16 – Centralni trougaoni fazi broj

Trougaoni brojevi imaju veliku primenu u menadžerskom donošenju odluke, poslovanju i finansijama, društvenim naukama itd. Operacije sa trougaonim brojevima su luke s obzirom na mogućnost njihovog grafičkog predstavljanja. A takođe je bitno i to da se oni mogu lako konstruisati i ukoliko se zna malo potrebnih detalja. Naime uvek može da se definiše najmanja i najveća moguća vrednost za neku nepreciznu veličinu koja je predmet rasprave, tj. konstruiše se noseći interval $[\bar{x} - \alpha_l, \bar{x} + \alpha_r]$. Zatim se uoči vrednost iz tog intervala $\bar{x} \in [\alpha_l, \alpha_r]$ koja je najverodostojnija za nepreciznu vrednost, i onda će maksimalna vrednost funkcije biti u tački $(\bar{x}, 1)$. Dakle uz pomoć tri vrednosti: α_l , α_r i \bar{x} može se konstruisati trougaoni broj i napisati njegova funkcija pripadnosti.

1.7 Fazi intervali

Ako fazi skup \mathcal{P} koji je definisan nad \mathbb{R} , ne zadovoljava jedan od četiri uslova navedena u definiciji fazi broja (*Definicija 1.18*), on neće biti fazi broj. No ako ne važi baš treći uslov, tj. ako postoji više od jedne modalne vrednosti, onda se takvi fazi skupovi zovu *fazi intervali*. Korišćena literatura je [10, 12]

Definicija 1.23 [12] Neka su L i R referentne funkcije. *Fazi L-R interval:* $\mathbf{A} = \langle l, r, \alpha, \beta \rangle_{L,R}$, definiše se preko funkcije pripadnosti:

$$\mathbf{A} \triangleq \mu_{\mathbf{A}}(x) = \begin{cases} 0, & r + \beta \leq x \leq l - \alpha \\ L\left(\frac{l-x}{\alpha}\right), & l - \alpha \leq x \leq l \\ 1, & l \leq x \leq r \\ R\left(\frac{x-r}{\beta}\right), & r \leq x \leq r + \beta \end{cases}$$

Fazi skupovi su uopštenje običnih skupova. Na isti način se i obični brojevi mogu predstaviti fazi brojevima. Pa neka je \check{x} „običan“ broj, onda se on preko funkcije pripadnosti može zapisati kao fazi broj na sledeći način:

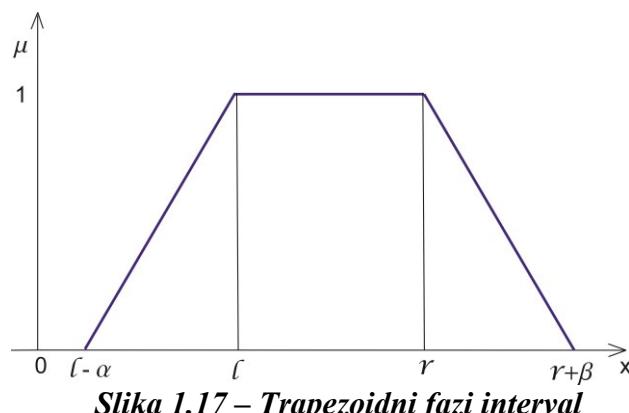
$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \neq \check{x} \\ 1, & x = \check{x} \end{cases} \text{ za svako } x \in \mathbb{R}$$

Isto tako se i običan interval može posmatrati kao specijalan slučaj fazi intervala sa sledećom funkcijom pripadnosti:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x < l \text{ i } x > r \\ 1, & x \in [l, r] \end{cases} \text{ pri čemu } x \in \mathbb{R}$$

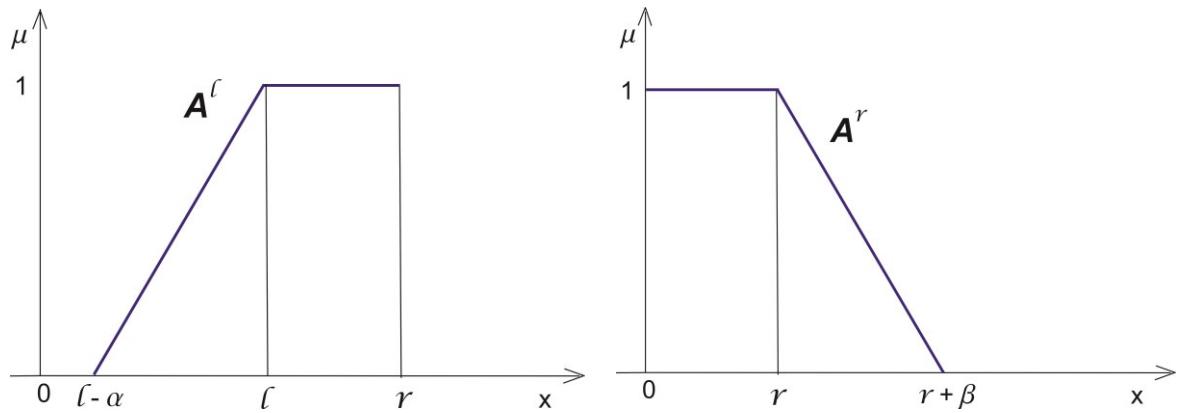
Jedna vrsta L-R fazi intervala su i *trapezoidni fazi intervali* i oni se obeležavaju sa: $\mathbf{A} = (l - \alpha, l, r, r + \beta)$. Vrlo često se, iako (po definiciji koja je ovde data) nisu fazi brojevi, ovi trapezoidni fazi intervali mogu u literaturi naći kao *trapezoidni fazi brojevi*. Taj naziv će se najčešće koristiti i u daljem izlaganju. Oni predstavljaju uopštenje trougaonih fazi brojeva kada se uzme da je $l = r = \bar{x}$, što znači da se trougaoni brojevi uvek mogu zapisati kao fazi intervali.

Definicija 1.24 [2] Ako važi $[l - \alpha, l] = [r, r + \beta]$, onda je trapezoidni fazi interval *simetričan* u odnosu na pravu $x = \frac{l+r}{2}$.



Slika 1.17 – Trapezoidni fazi interval

Isto kao što su već definisani levi i desni trougaoni fazi broj, ovde se mogu definisati levi i desni trapezoidni fazi interval. Pa tako sledi da je $A^l = (l - \alpha, l, r, r)$ sa nosećim intervalom $[l - \alpha, r]$ levi, a $A^r = (0, 0, r, r + \beta)$ sa nosećim intervalom $[0, r + \beta]$ desni trapezoidni fazi interval. Oni su jako pogodni za opisivanje pojmovra kao što su „malo“ i „veliko“: $veliko \triangleq (l - \alpha, l, r, r)$ i $malo \triangleq (0, 0, r, r + \beta)$, gde je l velik broj.



Slika 1.18 – Levi i desni trapezoidni fazi intervali

1.8 Princip proširenja

Da bi se fazi brojevi mogli koristiti u intelligentnim sistemima, potrebno je omogućiti da se aritmetičke operacije mogu izvoditi na njima. Osnovne operacije na skupu fazi brojeva se zasnivaju na primeni uopštene verzije Zadehovog principa proširenja. Ovaj princip je osnovni koncept u teoriji fazi skupova jer omogućava da se klasična matematička relacija proširi tako da može da se primenjuje na fazi skupove. Izlaganje u ovom poglavlju zasnovano je na [4, 7, 8].

Sledi formulacija Zadehovog principa proširenja:

Definicija 1.25 [8] Neka su $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ fazi podskupovi klasičnih skupova X_1, \dots, X_n respektivno i neka je dato preslikavanje $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ takvo da za svaku n-torku $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ važi: $f(x_1, \dots, x_n) = y \in Y$. Tada je $\mathcal{B} = f(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n)$ fazi podskup od Y čija je funkcija pripadnosti:

$$\mu_{\mathcal{B}}(y) = \begin{cases} \sup_y \min\{\mu_{\mathcal{A}_1}(x_1), \dots, \mu_{\mathcal{A}_n}(x_n)\}, & \text{ako postoji } y = f(x_1, \dots, x_n) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

tj. princip proširenja kaže da je slika nekog fazi skupa opet fazi skup čija je funkcija pripadnosti upravo ova gore navedena.

Primer 1.6 Neka su data dva fazi skupa $\mathcal{A}_1 = \{(-1, 0.2), (0, 0.8), (2, 0.4)\}$ i $\mathcal{A}_2 = \{(3, 0.6), (0, 0.1)\}$ i preslikavanje $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2$. Potrebno je naći skup $\mathcal{B} = f(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$, koristeći princip proširenja.

Radi preglednijeg zapisa, koristiće se tabelarni prikaz.

U prvoj koloni tabele navode se elementi prvog fazi skupa i to su elementi oblika $x_{1i}^{\langle \mu_{\mathcal{A}_1}(x_i) \rangle}$, a u prvom redu elementi drugog fazi skupa $x_{2j}^{\langle \mu_{\mathcal{A}_2}(x_j) \rangle}$. U preseku i -te vrste i j -te kolone nalazi se element $y_{i,j}$ a on se dobije kad se na $x_{1i}^{\langle \mu_{\mathcal{A}_1}(x_i) \rangle}$ i $x_{2j}^{\langle \mu_{\mathcal{A}_2}(x_j) \rangle}$ primeni funkcija f . Stepen pripadnosti za element $y_{i,j}$ se dobija kao $\min\{\mu_{\mathcal{A}_1}(x_1), \mu_{\mathcal{A}_2}(x_2)\}$

	$3^{\langle 0.6 \rangle}$	$0^{\langle 0.1 \rangle}$
$-1^{\langle 0.2 \rangle}$	$4^{\langle 0.2 \rangle}$	$1^{\langle 0.1 \rangle}$
$0^{\langle 0.8 \rangle}$	$3^{\langle 0.6 \rangle}$	$0^{\langle 0.1 \rangle}$
$2^{\langle 0.4 \rangle}$	$7^{\langle 0.4 \rangle}$	$4^{\langle 0.1 \rangle}$

Nakon formiranja tabele, za neke vrednosti $y_{i,j}$ postoji više različitih stepena pripadnosti, pa se za konačan stepen uzima njihov supremum. I tako se dobija skup $\mathcal{B} = \{(0, 0.1), (1, 0.1), (3, 0.6), (4, 0.2), (7, 0.4)\}$.

Slično se mogu definisati i ostale osnovne aritmetičke operacije, ali prilikom ovako direktnе primene principa proširenja postoji problem zato što se za beskonačno mnogo različitih vrednosti x_1 i x_2 dobija ista vrednost $y = f(x_1, x_2)$. Svaka od tih kombinacija x -eva daje istu vrednost za y sa različitim stepenom pripadnosti i zato je potrebno pronaći supremum dobijenih stepena pripadnosti za y . Upravo tih vrednosti ima beskonačno mnogo i tu nastaje problem. Razvijeno je nekoliko različitih pristupa ovome, a ovde je najznačajniji princip proširenja uopšten korišćenjem t -normi.

Definicija 1.26 [7, 8] Neka su $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ fazi podskupovi klasičnih skupova X_1, \dots, X_n , respektivno i neka je dato preslikavanje $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ takvo da za svaku n-torku $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ važi da $f(x_1, \dots, x_n) = y \in Y$. Za neku proizvoljnu trougaonu normu T kao rezultat uopštenog principa proširenja se dobija fazi podskup $\mathcal{B} \in Y$, $\mathcal{B} = f(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n)$, sa funkcijom pripadnosti:

$$\mu_{\mathcal{B}}(y) = \begin{cases} \sup_y T\{\mu_{\mathcal{A}_1}(x_1), \dots, \mu_{\mathcal{A}_n}(x_n)\}, & \text{ako postoji } y = f(x_1, \dots, x_n) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Ovaj princip proširenja se još zove i *Zadehov sup-T princip proširenja*. Ukoliko se za trougaonu normu iz definicije uzme baš t-norma minimuma T_M , dobija se originalni Zadehov princip proširenja.

Primenom uopštenog principa proširenja, mogu se dobiti formule za izračunavanje zbiru fazi brojeva pomoću određenih t-normi:

Tvrđenje 1.6 [4] Neka su $\mathbf{A}_i = \langle l, r, \alpha, \beta \rangle_{L,R}$, $i = 1, \dots, n$ n L-R fazi intervala. Njihov zbir, u oznaci $\bigoplus_{T_M} \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i$ (ukoliko se posmatra trougaona norma T_M) je dat sa:

$$\bigoplus_{T_M} \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i = \left(\sum_{i=1}^n l_i, \sum_{i=1}^n r_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i, \sum_{i=1}^n \beta_i \right)_{LR}$$

Ukoliko se umesto najjače trougaone norme T_M posmatra najslabija T_W , formulu za izračunavanje zbiru daje naredno tvrđenje:

Tvrđenje 1.7 [4] Neka su $\mathbf{A}_i = \langle l, r, \alpha, \beta \rangle_{L,R}$, $i = 1, \dots, n$ n L-R fazi intervala. Njihov zbir, u oznaci $\bigoplus_{T_W} \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i$ je dat sa:

$$\bigoplus_{T_W} \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i = \left(\sum_{i=1}^n l_i, \sum_{i=1}^n r_i, \max_{i=1}^n \alpha_i, \max_{i=1}^n \beta_i \right)_{LR}$$

Bitno je napomenuti da fazi intervali dobijeni primenom prethodna dva tvrđenja i dalje ostaju L-R fazi intervali. Primetno je da kod sabiranja zasnovanog na operatoru minimuma rezultujući interval ima odstupanja u levu i desnu stranu (spredove) koja su suma početnih odstupanja, dok su kod sabiranja zasnovanog na najslabijoj trougaonoj normi, rezultujuća odstupanja najveća od svih ulaznih.

1.9 Fazi relacije

Fazi relacije imaju široku primenu, jer za razliku od običnih relacija koje pokazuju da li su neki elementi u relaciji ili ne, fazi relacija omogućava da elementi budu u određenoj meri u relaciji ([2, 8]).

Definicija 1.27 [2] Neka je dat Dekartov proizvod:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

gde su skupovi A i B podskupovi univerzalnih skupova U_1 i U_2 respektivno. *Fazi relacija* na $A \times B$ u oznaci \mathcal{R} ili $\mathcal{R}(x, y)$ se definiše kao skup:

$$\mathcal{R} = \{((x, y), \mu_{\mathcal{R}}(x, y)) \mid (x, y) \in A \times B, \mu_{\mathcal{R}}(x, y) \in [0, 1]\}$$

gde je $\mu_{\mathcal{R}}(x, y)$ funkcija dve promenljive koja se zove funkcija pripadnosti. Ona daje stepen pripadnosti uređenog para (x, y) u \mathcal{R} , pridružujući svakom paru (x, y) u $A \times B$ jedan realan broj iz intervala $[0, 1]$. Taj stepen pripadanja, pokazuje stepen kojim je x u relaciji sa y . Pretpostavka je da je funkcija $\mu_{\mathcal{R}}(x, y)$ po delovima neprekidna ili diskretna nad domenom $A \times B$ (opisuje površ). Fazi relacija \mathcal{R} je skup uređenih troki.

Definicija 1.28 [2] *n-arna fazi relacija* \mathcal{R} je uređen par:

$$\mathcal{R} = ((a_1, a_2, \dots, a_n), \mu_{\mathcal{R}}(a_1, a_2, \dots, a_n))$$

gde je $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, i $\mu_{\mathcal{R}}(a_1, a_2, \dots, a_n) \in [0, 1]$

Definicija 1.28 je uopštenje *Definicije 1.2* za dvodimenzionalni fazi skup (*poglavlje 1.1*). Za razliku od običnih relacija, fazi relacije u većoj meri povezuju elemente koji su u relaciji. Uobičajeno je koristiti sledeće izraze: *x je mnogo veći od y*, *x je blizu y*, *x je bitan u odnosu na y*, *x i y su skoro isti*, *x i y su jako daleki, itd.*

Primer 1.7 Neka postoje dva skupa poslovnih kompanija: $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ i $B = \{b_1, b_2\}$ i neka je \mathcal{R} fazi relacija između ta dva skupa, koja predstavlja jezičku promenljivu *velika udaljenost* odnoseći se na udaljenost među kompanijama skupa A i B , data sa:

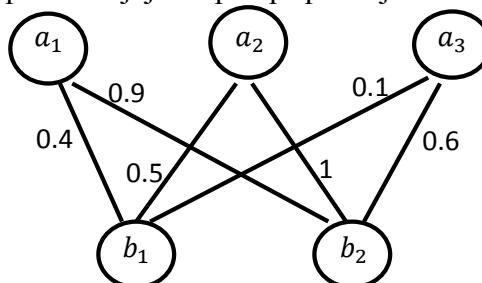
$$\mathcal{R} = \{((a_1, b_1), 0.4), ((a_1, b_2), 0.9), ((a_2, b_1), 0.5), ((a_2, b_2), 1), ((a_3, b_1), 0.1), ((a_3, b_2), 0.6)\},$$

Što se takođe može predstaviti tabelom da bude preglednije:

	Kompanija b_1	Kompanija b_2
Kompanija a_1	0.4	0.9
Kompanija a_2	0.5	1
Kompanija a_3	0.1	0.6

Funkcija pripadnosti pokazuje koliko su kompanije udaljene jedna od druge, pa se tako može utvrditi da su recimo Kompanija a_2 i Kompanija b_2 na *velikoj udaljenosti* (pripadnost je 1), dok Kompanija a_3 i Kompanija b_1 nisu na *velikoj udaljenosti* (pripadnost je 0.1).

Opisana fazi relacija \mathcal{R} može da se predstavi i pomoću fazi grafa gde vrednosti na vezama između čvorova, predstavljaju stepen pripadanja:



Slika 1.19 – Fazi relacija \mathcal{R} iz primera 1.7 predstavljena kao graf

1.9.1 Osnovne operacije na fazi relacijama

Neka su \mathcal{R}_1 i \mathcal{R}_2 dve relacije definisane nad $A \times B$,

$$\mathcal{R}_1 = \{(x, y), \mu_{\mathcal{R}_1}(x, y)\}, \quad (x, y) \in A \times B$$

$$\mathcal{R}_2 = \{(x, y), \mu_{\mathcal{R}_2}(x, y)\}, \quad (x, y) \in A \times B$$

Da bi se pokazale operacije na fazi relacijama, koriste se funkcije $\mu_{\mathcal{R}_1}(x, y)$ i $\mu_{\mathcal{R}_2}(x, y)$.

Definicija 1.29 [2] Dve relacije su *ekvivalentne*, u oznaci $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$, ako i samo ako za svaki par $(x, y) \in A \times B$, važi $\mu_{\mathcal{R}_1}(x, y) = \mu_{\mathcal{R}_2}(x, y)$.

Definicija 1.30 [2] Za svaki par $(x, y) \in A \times B$ za koji važi da je $\mu_{\mathcal{R}_1}(x, y) \leq \mu_{\mathcal{R}_2}(x, y)$ kaže se da je \mathcal{R}_1 *inkluzija* od \mathcal{R}_2 ili da je \mathcal{R}_2 veće od \mathcal{R}_1 u oznaci $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$

Ako vazi da je $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$ i istovremeno važi da postoji bar jedan par $(x, y) \in A \times B$ tako da za taj par važi da je $\mu_{\mathcal{R}_1}(x, y) < \mu_{\mathcal{R}_2}(x, y)$, onda je $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$.

Definicija 1.31 [2] \mathcal{R}^c je *komplement* od \mathcal{R} i definiše se na sledeći način: za svaki par $(x, y) \in A \times B$ $\mu_{\mathcal{R}^c}(x, y) = 1 - \mu_{\mathcal{R}}(x, y)$.

Definicija 1.32 [2] *Presek* dve relacije $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ definiše se kao:

$$\mu_{\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2}(x, y) = \min\{\mu_{\mathcal{R}_1}(x, y), \mu_{\mathcal{R}_2}(x, y)\}, \quad (x, y) \in A \times B$$

Definicija 1.33 [2] *Unija* dve relacije $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ definiše se kao:

$$\mu_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2}(x, y) = \max\{\mu_{\mathcal{R}_1}(x, y), \mu_{\mathcal{R}_2}(x, y)\}, \quad (x, y) \in A \times B$$

Definicija 1.34 [2] *Direkstan (Dekartov) proizvod*: Neka su \mathcal{A} i \mathcal{B} fazi skupovi definisani na sledeći način:

$$\mathcal{A} = \{(x, \mu_{\mathcal{A}}(x))\}, \quad \mu_{\mathcal{A}}(x) \in [0, 1]$$

$$\mathcal{B} = \{(y, \mu_{\mathcal{B}}(y))\}, \quad \mu_{\mathcal{B}}(y) \in [0, 1]$$

za $x \in \mathcal{A} \subset U_1$ i $y \in \mathcal{B} \subset U_2$. Date su dve vrste direktnog proizvoda:

- a) *Direkstan minimalan proizvod* fazi skupova \mathcal{A} i \mathcal{B} u oznaci $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ sa funkcijom pripadnosti $\mu_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}$ je fazi relacija koja se definiše:

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(x, y), \min(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(y))\}, \quad (x, y) \in A \times B\}$$

što znači da se mora izračunati Dekartov³ proizvod $A \times B$ i za svaki par (x, y) dodati pripadajuća vrednost, minimalna od $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ i $\mu_{\mathcal{B}}(y)$.

- b) *Direkstan maksimalan proizvod* fazi skupova \mathcal{A} i \mathcal{B} u oznaci $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ sa funkcijom pripadnosti $\mu_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}$ je fazi relacija koja se definiše:

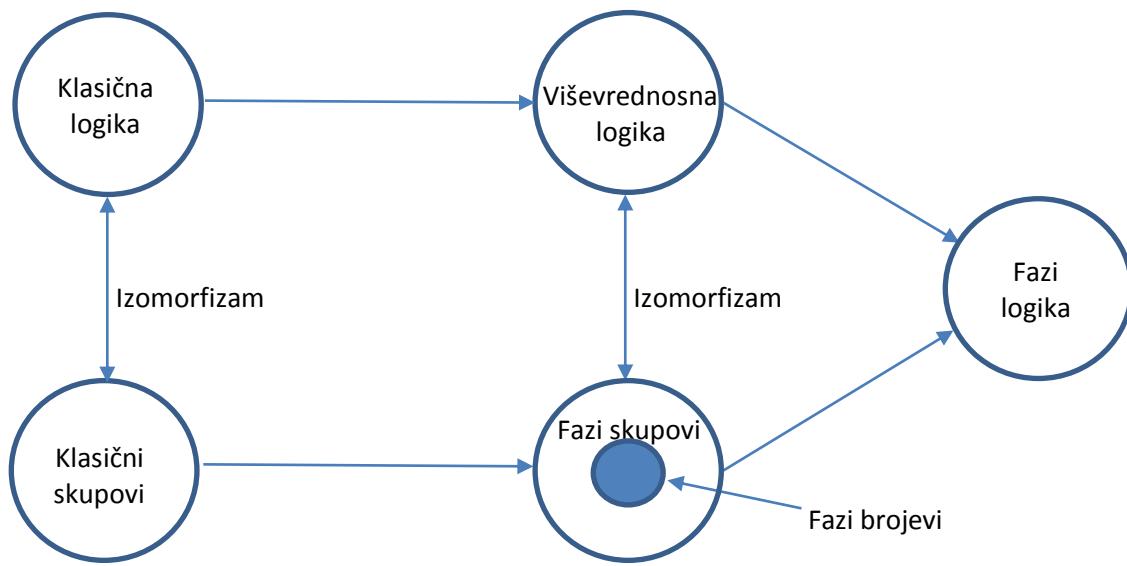
$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(x, y), \max(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(y))\}, \quad (x, y) \in A \times B\}$$

Ovde svaki par (x, y) ima pripadajuću vrednost, maksimalnu od $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ i $\mu_{\mathcal{B}}(y)$.

³ Ovaj proizvod je dobio naziv po francuskom matematičaru, filozofu i naučniku – René Dekartu (*René Descartes*) (1596-1650). On je svojim delom „Geometrija“ (*La Geometrie*) postavio temelje analitičke geometrije. Poznat je i po rečenici „Cogito ergo sum“ – „Mislim, dakle postojim“.

1.10 Fazi logika

Ukratko će biti predstavljeni najosnovniji elementi fazi logike pošto se ona nastavlja na „običnu“ logiku, a sve se zasniva na [2, 3, 7, 8, 10, 11, 15, 16]. Naime, u logici se razlikuju *klasična logika* (koja ima samo dve vrednosti *Tačno* i *Netačno*), i *viševrednosna logika* koja, kao što i sam naziv kaže, ima više vrednosti. Fazi logika je uopštenje viševrednosne logike u smislu da fazi skupove i fazi relacije koristi kao alat u sistemu viševrednosne logike. Veze između klasičnih skupova, klasične logike, fazi skupova, viševrednosne logike i naravno fazi logike, mogu se predstaviti grafički:



Slika 1.20 – Veza klasične logike, klasičnih skupova, viševrednosne logike, fazi skupova i fazi logike

1.10.1 Osnove fazi logike

Osnivač fazi logike je Lofti Zadeh. On je dao ogroman doprinos za osnivanje fazi logike kao naučne discipline. To područje je još uvek otvoreno za nove zaključke i metode i još uvek su neke teme pod istraživanjem.

Iskaz je deklarativna rečenica koja može imati samo dve logičke vrednosti: *tačno* (T) što se još označava sa 1, i *netačno* (\perp) što se još može označiti sa 0. Skup $T_2 = \{0,1\}$ zove se *skup istinitosnih vrednosti za iskaz*. Drugim rečima, iskaz je misaona tvrdnja koja može imati dve vrednosti, tačnu ili netačnu, a ne može istovremeno imati obe. Dakle, one se međusobno isključuju.

Iskazi će se označavati malim latiničnim slovima p, q, r, \dots . Oni mogu biti *prosti* i *složeni*. Prost iskaz je recimo „Marko sedi.“, dok je iskaz „Marko sedi i igra kompjutersku igricu.“ složen, jer se sastoji od dva iskaza koji su povezani veznikom *i*. Tačnost / netačnost složenog iskaza se određuje na osnovu tačnosti / netačnosti prostih iskaza od kojih je on sastavljen kao i od vrste veznika kojima su prosti iskazi povezani.

Sledi pregled operacija sa iskazima:

Negacija p (ne p) u oznaci $\neg p$ je tačna kada je p netačno i obrnuto, pa iz toga sledi:

$$\neg p = 1 - p$$

To se može predstaviti tablicom:

p	$\neg p$
1	0
0	1

Konjukcija iskaza p i q ($p \wedge q$), u oznaci $p \wedge q$ je tačna, ako su i iskaz p i iskaz q tačni, u suprotnom, konjukcija je netačna:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Disjunkcija iskaza p i q (p ili q), u oznaci $p \vee q$ je tačna ako je bar jedan od iskaza tačan, u suprotnom je netačna:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Implikacija (kondicional): p implicira q (ako p , onda q) u oznaci $p \Rightarrow q$ je netačna samo kada je p tačan a q netačan, u svim preostalim slučajevima je tačna:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

U implikaciji prvi iskaz se zove *antecedent* a drugi *konsekvent*. Operacija implikacije nije komutativna.

Tablice koje su navedene za svaku operaciju ponaosob, zovu se *tablice istinitosti*⁴ i vrlo su dobro oruđe.

Ako je istinitosna vrednost iskaza uvek 0, bez obzira na vrednost prostih iskaza, to je *kontradikcija*.

Jedan deo klasične logike koji se bavi složenim iskazima poznat je kao *iskazni račun*, a njegov nastavak je *predikatski račun*. *Predikat* je deklarativna rečenica koja sadrži jednu ili više nepoznatih. Predikat nije ni tačan ni netačan, s obzirom na to da nije iskaz. Označava se sa $p(x), q(x, y), \dots$, gde su x, y, \dots nepoznate. Zovu se još i logičke funkcije. Ukoliko se u predikatima promenljive zamene vrednostima, oni postaju iskazi. Predikati zato čine uopštenje iskaza.

⁴ Tablice istinitosti je uveo filozof Ludwig Wittgenstein (1889-1951) u delu „Tractatus Logico-Philosophicus“ (1921) gde pokušava da pokaže, da se cela tradicionalna filozofija zasniva na konfuziji same "logike našega jezika". Takođe argumentuje, da bilo koje značajno pripovedanje mora da poseduje preciznu logičku strukturu.

Postoji veza između logičkih operatora i operacija definisanih nad skupovima. Ova korespondencija omogućava da se svaka teorema ili rezultat iz teorije skupova može primeniti u klasičnoj logici, i obrnuto. Korespondencija se može predstaviti tabelom:

Logika	Teorija skupova
\vee	\cup
\wedge	\cap
$\neg p$	A^c
\Rightarrow	\subseteq

1.10.2 Viševrednosna logika

Jasno je da je u svakodnevnom životu nemoguće sve deklarisati kao samo tačno ili samo netačno. Pogotovo ukoliko se radi o budućnosti. Na primer rečenica: „Sutra će sijati sunce.“ – za ovaj iskaz se ne može reći ni da je tačan ni da je netačan. Prosto, ne može se znati da li će sutra zaista sijati sunce. Istinitosna vrednost pomenutog budućeg iskaza, može se utvrditi tek kad se on desi, u ovom slučaju „sutra“. Prema tome, logično je uključiti i neku treću mogućnost, pored tačnog i netačnog.

Recimo, može se pretpostaviti da su na raspolaganju sledeće tri vrednosti: tačno tj. 1, netačno tj. 0 i neutralno, odnosno neodređeno tj. $\frac{1}{2}$. Tako nastaje skup istinitosnih vrednosti $T_3 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

Ako su p i q iskazi, logičke operacije koje su objašnjene u poglavlju 1.10.1 primenjuju se i ovde, jedina je razlika što se istinite vrednosti uzimaju iz skupa $T_3 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Što se može videti u tablici ispod:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$
1	1	0	0	1	1	1
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
1	0	0	1	0	1	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	1	0	0	1	1
0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	1	1	0	0	1

Tabela 1.1 – Tablica istinitosnih vrednosti za iskaze p i q

Naravno, može još da se generalizuje i da se ovaj slučaj sa tri vrednosti, proširi. Pa tako za bilo koji prirodni broj $n \geq 3$, istinitosne vrednosti mogu da se predstave kao racionalni brojevi u intervalu $[0,1]$ i tako se dobija sledeći skup istinitosnih vrednosti:

$$T_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \frac{3}{n-1}, \dots, \frac{n-3}{n-1}, \frac{n-2}{n-1}, \frac{n-1}{n-1} = 1\right\}$$

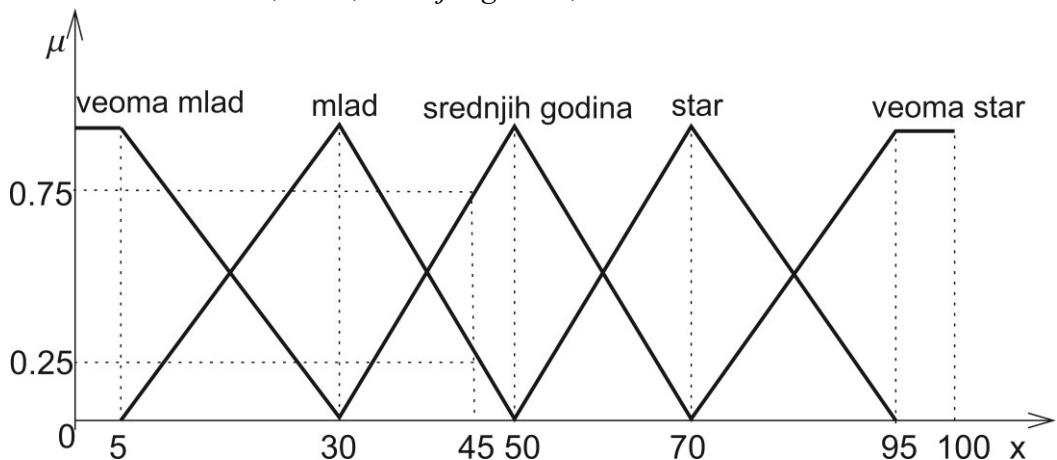
Ovo je Lukasiewicz-eva n -vrednosna logika i sve logičke operacije mogu i ovde da se primene. Ukoliko se vrednosti predstave umesto racionalnim, realnim brojevima iz

intervala $[0,1]$, dobija se skup istinitosnih vrednosti $T_\infty = [0,1]$ i to je beskonačno-vrednosna logika, poznata kao *standardna Lukasiewicz-ova logika* ([2, 8]).

1.10.3 Lingvističke promenljive

Promenljive koje za vrednosti uzimaju reči ili rečenice, zovu se lingvističke promenljive. Može se uzeti recimo *starost* koja je lingvistička promenljiva čije vrednosti mogu biti reči kao što su: *veoma mlad*, *mlad*, *srednjih godina*, *star*, *veoma star*. To su izrazi lingvističke promenljive *starost* i izražavaju se fazi skupovima nad univerzalnim skupom $U \subset \mathbb{R}_+$ koji se još zove *radni domen* meren u godinama.

Primer 1.8 [2] U ovom primeru će se objasniti lingvistička promenljiva *starost* na univerzalnom skupu $U = [0, 100]$. x -osa će predstavljati godine starosti, a starost će biti predstavljena trougaonim (delom i trapezoidnim) brojevima koji će da predstavljaju izraze kao što su: *veoma mlad*, *mlad*, *srednjih godina*, *star* i *veoma star*.



Slika 1.21 – Vrednosti lingvističke promenljive „starost“

Funkcije pripadnosti za ove izraze su:

$$\begin{aligned}\mu_{veoma\ mlad} &= \begin{cases} 1, & \text{za } 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{30-x}{25}, & \text{za } 5 \leq x \leq 30 \end{cases} \\ \mu_{mlad} &= \begin{cases} \frac{x-5}{25}, & \text{za } 5 \leq x \leq 30 \\ \frac{50-x}{20}, & \text{za } 30 \leq x \leq 50 \end{cases} \\ \mu_{srednjih\ godina} &= \begin{cases} \frac{x-30}{20}, & \text{za } 30 \leq x \leq 50 \\ \frac{70-x}{20}, & \text{za } 50 \leq x \leq 70 \end{cases} \\ \mu_{star} &= \begin{cases} \frac{x-50}{20}, & \text{za } 50 \leq x \leq 70 \\ \frac{95-x}{25}, & \text{za } 70 \leq x \leq 95 \end{cases} \\ \mu_{veoma\ star} &= \begin{cases} \frac{x-70}{25}, & \text{za } 70 \leq x \leq 95 \\ 1, & \text{za } 95 \leq x \leq 100 \end{cases}\end{aligned}$$

Sad se posmatra na primer osoba koja ima 45 godina starosti. Ona je mlađa sa stepenom pripadnosti od 0.25 a srednjih je godina sa stepenom pripadnosti 0.75. Ovi stepeni se dobijaju kada se zameni vrednost x -a u formulama za μ_{mlad} i $\mu_{srednjih\ godina}$ sa 45. Znači neko ko ima 45 godina je „manje“ mlađ a „više“ je srednjih godina.

Lingvističke promenljive su izuzetno važne u sistemima finansija i menadžmenta zbog promenljivih kao što su: *istina, poverenje, stres, pritisak, prihodi, profit, inflacija, rizik, investicije*, itd.

1.10.4 Lingvistički modifikatori

Neka je $x \in U$ i \mathcal{A} fazi skup sa funkcijom pripadnosti $\mu_{\mathcal{A}}(x)$. I neka je sa m označen *lingvistički modifikator*, na primer *vrlo, ne, skoro*. Onda je modifikovan fazi skup $m\mathcal{A}$ (modifikovan sa m), a njegova funkcija pripadnosti je $\mu_{m\mathcal{A}}(x)$. Najčešće se za opis pomenutih modifikatora koriste sledeće definicije:

$$\begin{aligned} ne, \quad \mu_{ne\mathcal{A}}(x) &= 1 - \mu_{\mathcal{A}}(x) \\ vrlo, \quad \mu_{vrlo\mathcal{A}}(x) &= [\mu_{\mathcal{A}}(x)]^2 \\ skoro, \quad \mu_{skoro\mathcal{A}}(x) &= [\mu_{\mathcal{A}}(x)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Primer 1.9 [2] Neka fazi skup \mathcal{A} predstavlja vrednosti za visoku ocenu u vezi sa pozajmicama. Vrednosti za promenljivu, kao i određenu funkciju pripadnosti, mogu da se predstave tabelom:

x	0	20	40	60	80	100
$\mu_{visoka}(x)$	0	0.2	0.5	0.8	0.9	1

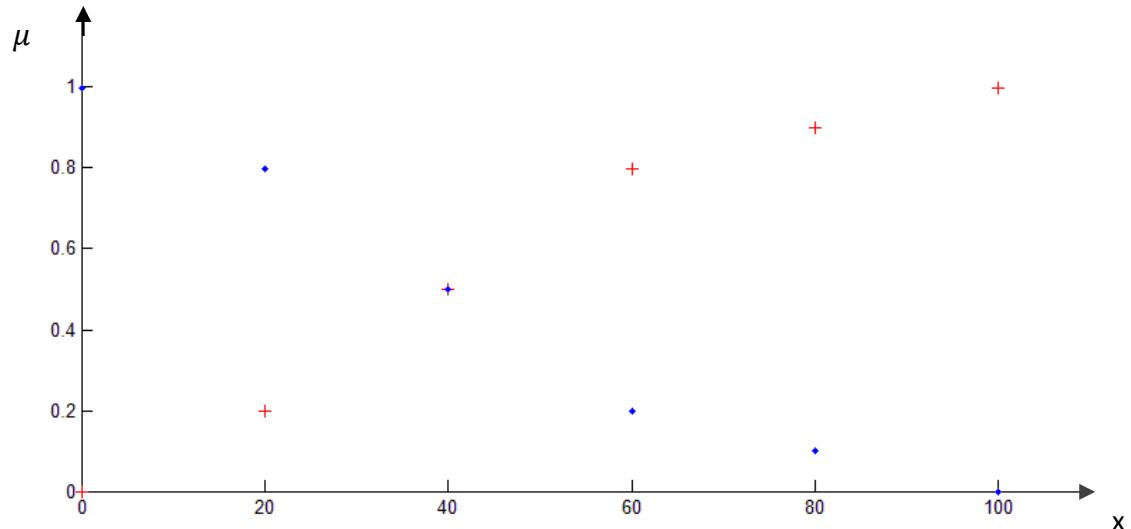
Sada lingvistička vrednost *visoka ocena* može da se modifikuje da postane *niska ocena, vrlo visoka ocena i skoro visoka ocena*.

Za nisku ocenu će biti:

$$\begin{aligned} \mu_{niska\ ocena}(0) &= 1 - \mu_{visoka\ ocena}(0) = 1 - 0 = 1 \\ \mu_{niska\ ocena}(20) &= 1 - \mu_{visoka\ ocena}(20) = 1 - 0.2 = 0.8 \\ \mu_{niska\ ocena}(40) &= 1 - \mu_{visoka\ ocena}(40) = 1 - 0.5 = 0.5 \\ \mu_{niska\ ocena}(60) &= 1 - \mu_{visoka\ ocena}(60) = 1 - 0.8 = 0.2 \\ \mu_{niska\ ocena}(80) &= 1 - \mu_{visoka\ ocena}(80) = 1 - 0.9 = 0.1 \\ \mu_{niska\ ocena}(100) &= 1 - \mu_{visoka\ ocena}(100) = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Sad tabela izgleda ovako:

x	0	20	40	60	80	100
$\mu_{niska}(x)$	1	0.8	0.5	0.2	0.1	0



Slika 1.22 – Fazi skup vrednosti za visoku ocenu (crveni krstići) i nisku ocenu (plave tačkice)

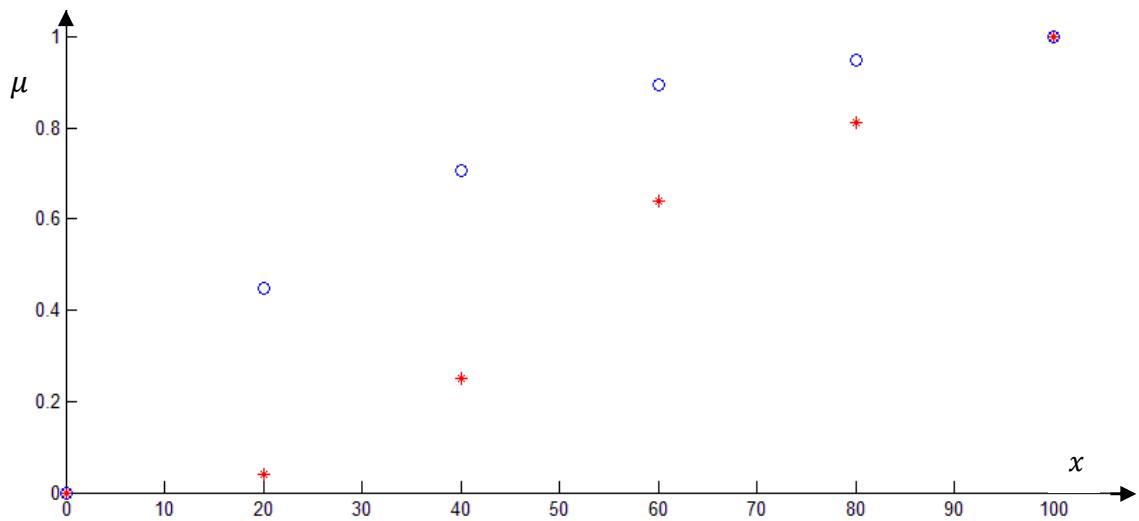
Slično se dobijaju vrednosti i za vrlo visoku kao i za skoro visoku ocenu:

$$\mu_{vrlo\ visoka}(x) = [\mu_{visoka}(x)]^2$$

x	0	20	40	60	80	100
$\mu_{vrlo\ visoka}(x)$	1	0.04	0.25	0.64	0.81	1

$$\mu_{skoro\ visoka}(x) = [\mu_{visoka}(x)]^{\frac{1}{2}}$$

x	0	20	40	60	80	100
$\mu_{skoro\ visoka}(x)$	1	0.447	0.707	0.894	0.949	1



Slika 1.23 – Fazi skup vrednosti za vrlo visoku ocenu (crvene zvezdice) i skoro visoku ocenu (plavi kružići)

1.10.5 Pravila povezivanja fazi iskaza i semantički zahtevi

U klasičnoj logici, iskaz p može imati dve vrednosti (*tačno* i *netačno*). U više-vrednosnoj logici i fazi logici, postoji granični slučaj, gde je vrednost iskaza *tačna do na stepen* na intervalu $[0,1]$. Istinitost iskaza p u fazi logici se iskazuje preko fazi skupa, tj. njegove funkcije pripadnosti.

Primeri iskaza koji uključuju fazi skupove $\mathcal{A} = \{(x, \mu_{\mathcal{A}}(x))\}$ i $\mathcal{B} = \{(y, \mu_{\mathcal{B}}(y))\}$.

- (i) $x \in \mathcal{A}$, iskaz u kanonskoj formi,
- (ii) $x \in m\mathcal{A}$, modifikovani iskaz,
- (iii) Ako je $x \in \mathcal{A}$, onda je $y \in \mathcal{B}$, uslovni iskaz.

Operacija povezivanja se sastoji od dva iskaza p i q , koji su povezani nekim logičkim veznikom. Iskazi su definisani sa:

$p \triangleq x \in \mathcal{A}$, $q \triangleq y \in \mathcal{B}$, gde su \mathcal{A} i \mathcal{B} fazi skupovi: $\mathcal{A} = \{(x, \mu_{\mathcal{A}}(x)) | x \in \mathcal{A} \subset U_1\}$, $\mathcal{B} = \{(y, \mu_{\mathcal{B}}(y)) | y \in \mathcal{B} \subset U_2\}$.

Povezivanje konjukcijom $p \wedge q$

Istinita vrednost (*tr – od engleske reči True*) za $p \wedge q$ (p i q) se definiše kao $tr(p \wedge q) = \mu_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}(x, y) = \min\{\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(y)\}$, $(x, y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, gde je $\mu_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}(x, y)$ funkcija pripadnosti minimuma direktnog proizvoda.

Povezivanje disjunkcijom $p \vee q$

Istinita vrednost za $p \vee q$ (p ili q) se definiše kao $tr(p \vee q) = \mu_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}(x, y) = \max\{\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(y)\}$, $(x, y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, gde je $\mu_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}(x, y)$ funkcija pripadnosti maksimuma direktnog proizvoda.

Povezivanje implikacijom $p \Rightarrow q$

Istinita vrednost za $p \Rightarrow q$ (ako p onda q) se definiše kao $tr(p \Rightarrow q) = \min\{1, 1 - \mu_{\mathcal{A}}(x) + \mu_{\mathcal{B}}(y)\}$, $(x, y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, gde za svaki par (x, y) Dekatovog proizvoda $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, treba da se veže manja pripadajuća vrednost koja se nalazi između 1 i $1 - \mu_{\mathcal{A}}(x) + \mu_{\mathcal{B}}(y)$.

Ova pravila povezivanja slede još iz klasične logike. Sa desne strane ovih formula nalaze se funkcije pripadnosti fazi relacija, s obzirom na to da par (x, y) pripada Dekartovom proizvodu $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset U_1 \times U_2$. Zato se istinite vrednosti povezivanja predstavljaju fazi relacijama. Potrebno je naglasiti da funkcije pripadnosti za \mathcal{A} i \mathcal{B} imaju različite argumente.

Semantički zahtevi imaju veliku primenu u fazi logici jer predstavljaju glavno pravilo zaključivanja. Ovde je reč o inkluziji fazi skupova. Neka su p i q iskazi:

$$p \triangleq x \in \mathcal{A}, \quad q \triangleq y \in \mathcal{B}$$

oba definisana nad istim univerzalnim skupom U . Iskaz p semantički zahteva iskaz q (q je semantički zahtevan od p), u oznaci $p \Rightarrow q$ ako i samo ako važi:

$$\mu_{\mathcal{A}}(x) \leq \mu_{\mathcal{B}}(y), \quad x \in U$$

Primer 1.10 [2] U skladu sa pričom o pozajmici iz *Primera 1.9*, konstruiše se iskaz:

$$p \triangleq \text{Klijentova pozajmica je vrlo visoko ocenjena}$$

Ovo semantički zahteva iskaz

$$q \triangleq \text{Klijentova pozajmica je visoko ocenjena}$$

Iz iskaza p , može se zaključiti da važi iskaz q . Takođe, ako se vrati na prethodni primer i pogledaju *Slike 1.22* i *1.23*, vidi se da je zadovoljeno $\mu_{\text{vrlo visoko}}(x) \leq \mu_{\text{visoko}}(y)$, $x \in U$.

Semantički zahtevi se mogu generisati i za više iskaza.

2. Princip usrednjavanja za fazi vrednosti

Sposobnost da se predvide i procene budući događaji podrazumeva proučavanje nepreciznih informacija koje proizilaze iz okruženja koje se brzo menja kao što je slučaj sa sadašnjim munjevitim načinom života. To su situacije u kojima je bolje koristiti fazi logiku nego druge klasične metode. Da bi se složene situacije analizirale, potrebna su mišljenja raznih stručnjaka koja je onda potrebno skupiti i iz njih proizvesti jedan zaključak. To uopšte nije jednostavno, pošto se pomenuta mišljena razlikuju, a često su i potpuno suprotna ([2, 11]). Jedan od načina da se na osnovu više mišljenja dobije jedan zaključak je upravo princip usrednjavanja. Ovaj princip se koristi u nekoliko modela kao npr. fazi Delphi, fazi PERT i predviđanje tražnje.

2.1 Statističko usrednjavanje

Jedan od najbitnijih principa u statistici je *prosek* ili *srednja vrednost* koja se za n merenja datih realnim brojevima $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{R}$, predstavlja na sledeći način:

$$r_{ave} = \frac{r_1 + \dots + r_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n r_i}{n}$$

Ako merenja r_1, r_2, \dots, r_n imaju različitu važnost izraženu realnim brojevima $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, onda je *ponderisana srednja vrednost*:

$$r_{ave}^w = \frac{\lambda_1 r_1 + \dots + \lambda_n r_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = w_1 r_1 + \dots + w_n r_n = \sum_{i=1}^n w_i r_i$$

gde je $w_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ i važi $\sum_{i=1}^n w_i = 1$

w_i se zovu *težine* (eng. *weight*) odnosno *ponderi* i one predstavljaju značajnost merenja r_i .

Sve što važi za „običnu“ srednju vrednost može se uopštiti ukoliko se umesto realnih brojeva uzmu fazi brojevi. Da bi se to izvelo do kraja, potrebno je izvesti određene aritmetičke operacije koje dovode do komplikovanih računanja kada su u pitanju fazi brojevi, i zato se posmatra uopštenje samo za trougaone i trapezoidne fazi brojeve. Ovi fazi brojevi su često u upotrebi, a i lako je izvoditi aritmetičke operacije sa njima.

2.2 Aritmetičke operacije sa trougaonim i trapezoidnim brojevima

Definicije u nastavku se zasnivaju na trougaonoj normi $T_M(x, y) = \min(x, y)$, u skladu sa *Tvrđenjem 1.6 (poglavlje 1.8)*. Korišćena literatura je [2, 4].

Definicija 2.1 [2] Može se pokazati da je *zbir dva trougaona broja*, takođe trougaoni broj:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 &= (p_1^{(1)}, p_M^{(1)}, p_2^{(1)}) + (p_1^{(2)}, p_M^{(2)}, p_2^{(2)}) \\ &= (p_1^{(1)} + p_1^{(2)}, p_M^{(1)} + p_M^{(2)}, p_2^{(1)} + p_2^{(2)})\end{aligned}$$

Ovo se može uopštiti na n trougaonih brojeva, a može da se primeni i na *leve i desne* trougaone brojeve npr.:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_1^r + \mathbf{P}_2 &= (p_M^{(1)}, p_M^{(1)}, p_2^{(1)}) + (p_1^{(2)}, p_M^{(2)}, p_2^{(2)}) \\ &= (p_M^{(1)} + p_1^{(2)}, p_M^{(1)} + p_M^{(2)}, p_2^{(1)} + p_2^{(2)}) \\ \mathbf{P}_1^l + \mathbf{P}_2^l &= (p_1^{(1)}, p_M^{(1)}, p_M^{(1)}) + (p_1^{(2)}, p_M^{(2)}, p_M^{(2)}) \\ &= (p_1^{(1)} + p_1^{(2)}, p_M^{(1)} + p_M^{(2)}, p_M^{(1)} + p_M^{(2)})\end{aligned}$$

Definicija 2.2 [2] *Proizvod trougaonog i realnog broja* je takođe trougaoni broj:

$$\mathbf{Pr} = r\mathbf{P} = r(p_1, p_M, p_2) = (rp_1, rp_M, rp_2)$$

Definicija 2.3 [2] *Deljenje trougaonih brojeva realnim brojem* se definiše kao množenje trougaonog broja recipročnom vrednošću realnog broja, uz uslov da je realan broj različit od nule. Dakle:

$$\frac{\mathbf{P}}{r} = \frac{1}{r}(p_1, p_M, p_2) = \left(\frac{p_1}{r}, \frac{p_M}{r}, \frac{p_2}{r}\right)$$

Operacije sa trapezoidnim brojevima (trapezoidnim fazi intervalima) se definišu na sličan način kao sa trougaonim. Radi jednostavnijeg zapisa, umesto $\mathbf{A} = (l - \alpha, l, r, r + \beta)$ koje je definisano u *poglavlju 1.7* uvodi se $\mathbf{A} = (a_1, b_1, b_2, a_2)$ gde je $a_1 = l - \alpha$, $b_1 = l$, $b_2 = r$ i $a_2 = r + \beta$ (*Tvrđenje 1.6* i dalje važi).

Definicija 2.4 [2] *Zbir dva trapezoidna broja* je trapezoidni broj.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 &= (a_1^{(1)}, b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, a_2^{(1)}) + (a_1^{(2)}, b_1^{(2)}, b_2^{(2)}, a_2^{(2)}) \\ &= (a_1^{(1)} + a_1^{(2)}, b_1^{(1)} + b_1^{(2)}, b_2^{(1)} + b_2^{(2)}, a_2^{(1)} + a_2^{(2)})\end{aligned}$$

Ovo se može uopštiti na n trapezoidnih brojeva (trapezoidnih fazi intervala), i može da se primeni i na *leve i desne* trapezoidne brojeve.

Definicija 2.5 [2] *Množenje trapezoidnih brojeva realnim brojem*:

$$\mathbf{Ar} = r\mathbf{A} = (ra_1, rb_1, rb_2, ra_2)$$

Definicija 2.6 [2] *Deljenje trapezoidnih brojeva realnim brojem*:

$$\frac{\mathbf{A}}{r} = \frac{1}{r}(a_1, b_1, b_2, a_2) = \left(\frac{a_1}{r}, \frac{b_1}{r}, \frac{b_2}{r}, \frac{a_2}{r}\right), \quad r \neq 0$$

S obzirom na to da se trougaoni broj može uvek predstaviti u formi trapezoidnog broja, mogućnost množenja ova dva trapezoidna broja (fazi intervala) je jasna:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_1 + \mathbf{A}_2 &= (p_1^{(1)}, p_M^{(1)}, p_2^{(1)}) + (a_1^{(2)}, b_1^{(2)}, b_2^{(2)}, a_2^{(2)}) \\&= (p_1^{(1)}, p_M^{(1)}, p_M^{(1)}, p_2^{(1)}) + (a_1^{(2)}, b_1^{(2)}, b_2^{(2)}, a_2^{(2)}) \\&= (p_1^{(1)} + a_1^{(2)}, p_M^{(1)} + b_1^{(2)}, p_M^{(1)} + b_2^{(2)}, p_2^{(1)} + a_2^{(2)})\end{aligned}$$

2.3 Fazi usrednjavanje

Za razliku od statističkog usrednjavanja, ono na čemu se zasnivaju već pomenuti fazi PERT i fazi Delphi, kao i kasnije princip donošenja odluka, jeste upravo fazi usrednjavanje ([2]). U nastavku će se definisati formule za trougaono i trapezoidno usrednjavanje.

Definicija 2.7 [2] *Formula za trougaono usrednjavanje:* Neka postoji n trougaonih brojeva. Koristeći sabiranje trougaonih brojeva (*Definicija 2.1*) kao i deljenje sa realnim brojem (*Definicija 2.2*), dobija se sledeća formula:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{ave} &= \frac{\mathbf{P}_1 + \cdots + \mathbf{P}_n}{n} = \frac{(p_1^{(1)}, p_M^{(1)}, p_2^{(1)}) + \cdots + (p_1^{(n)}, p_M^{(n)}, p_2^{(n)})}{n} \\ &= \frac{(\sum_{i=1}^n p_1^{(i)}, \sum_{i=1}^n p_M^{(i)}, \sum_{i=1}^n p_2^{(i)})}{n} \end{aligned}$$

Ovako definisana srednja vrednost je takođe trougaoni broj.

$$\mathbf{P}_{ave} = (m_1, m_M, m_2) = (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_1^{(i)}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_M^{(i)}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_2^{(i)})$$

Definicija 2.8 [2] *Ponderisano trougaono usrednjavanje:* Ako realni broj λ_i predstavlja važnost (težinu/ponder) za

$$\mathbf{P}_i = (p_1^{(i)}, p_M^{(i)}, p_2^{(i)}), \quad i = 1, \dots, n,$$

onda koristeći

$$r_{ave}^w = \frac{\lambda_1 r_1 + \cdots + \lambda_n r_n}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} = w_1 r_1 + \cdots + w_n r_n = \sum_{i=1}^n w_i r_i$$

gde je $w_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$ i važi $\sum_{i=1}^n w_i = 1$

dobija se ponderisani prosek:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{ave}^w &= \frac{\lambda_1 \mathbf{P}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{P}_n}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} = w_1 (p_1^{(1)}, p_M^{(1)}, p_2^{(1)}) + \cdots + w_n (p_1^{(n)}, p_M^{(n)}, p_2^{(n)}) \\ &= (w_1 p_1^{(1)}, w_1 p_M^{(1)}, w_1 p_2^{(1)}) + \cdots + (w_n p_1^{(n)}, w_n p_M^{(n)}, w_n p_2^{(n)}) \\ &= (w_1 p_1^{(1)} + \cdots + w_n p_1^{(n)}, w_1 p_M^{(1)} + \cdots + w_n p_M^{(n)}, w_1 p_2^{(1)} + \cdots + w_n p_2^{(n)}) \end{aligned}$$

koji se može zapisati kao trougaoni broj:

$$\mathbf{P}_{ave}^w = (m_1^w, m_M^w, m_2^w) = (\sum_{i=1}^n w_i p_1^{(i)}, \sum_{i=1}^n w_i p_M^{(i)}, \sum_{i=1}^n w_i p_2^{(i)})$$

Definicija 2.9 [2] *Formula za trapezoidno usrednjavanje:* Za trapezoidne brojeve $\mathbf{A}_i = (a_1^{(i)}, b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, a_2^{(i)})$, $i = 1, \dots, n$ sledi:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ave} = (m_1, m_{M_1}, m_{M_2}, m_2) &= \frac{\left(a_1^{(1)}, b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, a_2^{(1)}\right) + \cdots + \left(a_1^{(n)}, b_1^{(n)}, b_2^{(n)}, a_2^{(n)}\right)}{n} \\ &= \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_1^{(i)}, \sum_{i=1}^n b_1^{(i)}, \sum_{i=1}^n b_2^{(i)}, \sum_{i=1}^n a_2^{(i)}\right)}{n} \end{aligned}$$

Definicija 2.10 [2] Ponderisano trapezoidno usrednjavanje je:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ave}^w = (m_1^w, m_{M_1}^w, m_{M_2}^w, m_2^w) &= w_1 \left(a_1^{(1)}, b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, a_2^{(1)}\right) + \cdots + w_n \left(a_1^{(n)}, b_1^{(n)}, b_2^{(n)}, a_2^{(n)}\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n w_i a_1^{(i)}, \sum_{i=1}^n w_i b_1^{(i)}, \sum_{i=1}^n w_i b_2^{(i)}, \sum_{i=1}^n w_i a_2^{(i)}\right) \end{aligned}$$

Trougaono i trapezoidno usrednjavanje je krajnji ishod odnosno zaključak svih varijanti mišljenja kaja su izražena preko trougaonih i trapezoidnih brojeva, sa većim ili manjim stepenom pripadnosti.

Navedene formule za srednje vrednosti trapezoidnih brojeva važe i kada su neki od \mathbf{A}_i trougaoni brojevi, s obzirom na to da se oni mogu predstaviti kao trapezoidni brojevi.

Ovakav proces usrednjavanja za trougaone i trapezoidne fazi brojeve spada u takozvanu *fazi statistiku*.

2.4 Defazifikacija fazi usednjavanja (fazi sredine)

Pošto se kao krajnji produkt svih mišljenja dobijaju srednje vrednosti koje su trougaoni odnosno trapezoidni brojevi, najčešće je rezultat potrebno prikazati kao „običnu“ vrednost koja najbolje reprezentuje pomenutu srednju vrednost. Upravo to vraćanje iz fazi brojeva na „obične“ vrednosti predstavlja *defazifikaciju* ([2]).

Recimo, ako se posmatra sredina trougaonog fazi broja:

$$\mathbf{P}_{ave} = (m_1, m_M, m_2) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_1^{(i)}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_M^{(i)}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_2^{(i)} \right)$$

najlogičnije je da se za „običnu“ vrednost uzme vrednost m_M za interval $[m_1, m_2]$ od \mathbf{P}_{ave} , pošto m_M ima najveći stepen pripadnosti u \mathbf{P}_{ave} (ima stepen pripadnosti 1), odnosno \mathbf{P}_{ave} dostiže svoj maksimum u $x_{max} = m_M$ i ta vrednost se zove *maksimizirajuća vrednost*.

Defazifikacija se ne može univerzalno definisati, tako da će se ovde predstaviti tri načina za defazifikaciju trougaonog broja $\mathbf{P}_{ave} = (m_1, m_M, m_2)$:

$$(1) x_{max}^{(1)} = \frac{m_1 + m_M + m_2}{3}$$

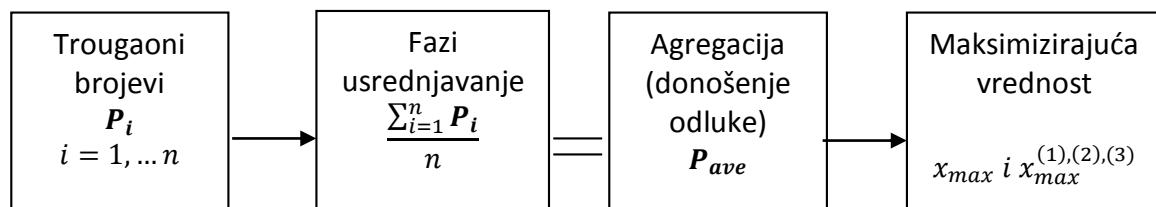
$$(2) x_{max}^{(2)} = \frac{m_1 + 2m_M + m_2}{4}$$

$$(3) x_{max}^{(3)} = \frac{m_1 + 4m_M + m_2}{6}$$

Ova tri načina uzimaju u obzir pored m_M , i m_1 i m_2 i daju drugačije vrednosti.

Ukoliko je trougaoni broj \mathbf{P}_{ave} blizu centralnog trougaonog broja, tj. ako je m_M na sredini intervala $[m_1, m_2]$, onda $x_{max} = m_M$ daje dobru „običnu“ vrednost i pomenuta tri načina daju takođe maksimizirajuće vrednosti blizu m_M .

Proces defazifikacije se može predstaviti putem blok dijagrama:



Slika 2.1 – Blok dijagram procesa defazifikacije

Za defazifikaciju $\mathbf{P}_{ave}^w = (m_1^w, m_M^w, m_2^w)$ sve se radi isto kao i za \mathbf{A}_{ave} samo što se umesto vrednosti m_1, m_M, m_2 respektivno uzimaju m_1^w, m_M^w, m_2^w .

Za defazifikaciju trapezoidnog fazi broja koji predstavlja trapezoidno usrednjavanje $\mathbf{A}_{ave} = (m_1, m_{M_1}, m_{M_2}, m_2)$ koristi se ista ideja kao i kod trougaonog fazi broja s tom razlikom da se umesto vrednosti m_M , uzima srednja tačka segmenta $[m_{M_1}, m_{M_2}]$ na maksimalnom nivou $\alpha = 1$ i onda se dobijaju sledeće masimizirajuće vrednosti:

$$x_{max} = \frac{m_{M_1} + m_{M_2}}{2}$$

$$(1) x_{max}^{(1)} = \frac{m_1 + \frac{m_{M_1} + m_{M_2} + m_2}{2}}{3}$$

$$(2) x_{max}^{(2)} = \frac{m_1 + m_{M_1} + m_{M_2} + m_2}{4}$$

$$(3) x_{max}^{(3)} = \frac{m_1 + 2(m_{M_1} + m_{M_2}) + m_2}{6}$$

Za defazifikaciju fazi broja $\mathbf{A}_{ave}^w = (m_1^w, m_{M_1}^w, m_{M_2}^w, m_2^w)$, samo se umesto $m_1, m_{M_1}, m_{M_2}, m_2$ uzimaju respektivno $m_1^w, m_{M_1}^w, m_{M_2}^w, m_2^w$.

2.5 Model predviđanja fazi Delphi

Fazi Delphi model predviđanja predstavlja uopštenje običnog modela za dugoročno predviđanje u menadžmentu. Naziv je dobio po drevnim grčkim prorocima iz Delfija koji su bili poznati po predviđanju budućnosti. Prvi put se ovaj model razvio u Kaliforniji u preduzeću „Rand“. Ovo je tipična procedura predviđanja koja kombinuje poglede i mišljenja velikog broja stručnjaka ([2, 3, 9]).

Model Delphi podrazumeva da se od visoko kvalifikovanih stručnjaka za konkretnu oblast – nauke, tehnologije, poslovanja – traže mišljenja, nezavisno jedno od drugog, o tome kada će se desiti neki događaj. To na primer mogu biti predviđanje tržišta, predviđanje ekonomije, tehnoloških napredaka,... Zatim se tako dobijeni subjektivni podaci analiziraju statistički tako što se usrednjavaju, pa se rezultati saopštavaju stručnjacima. Stručnjaci pregledaju rezultate i daju nove procene koje se opet nakon statističkog usrednjavanja saopštavaju stručnjacima. Taj proces se ponavlja iznova i iznova sve dok rezultat ne iskonvergira ka nekom racionalnom (realnom) rešenju sa tačke gledišta menadžera ili bilo kojeg drugog vodećeg tela. Najčešće su dva – tri ponavljanja dovoljna da se doneše zadovoljavajući zaključak.

S obzirom na to da je, kada se govori o Delphi modelu, u pitanju dugoročno predviđanje velikog opsega, kao problemi pri predviđanju se javljaju neprecizne i nekompletne informacije. Negativno je i to što su mišljenja koja dolaze od stručnjaka subjektivna i zavise od njihove kompetentnosti. Upravo zbog ovih loših strana je idealnije koristiti fazi brojeve umesto „običnih“ brojeva. Posebno su dobri trougaoni fazi brojevi jer se konstruišu veoma jednostavno s obzirom na to da ih definišu svega tri vrednosti: *najmanja*, *najveća* i *najverovatnija*. Zato se analiza zasniva na fazi usrednjavanju, a ne na običnoj srednjoj vrednosti.

Fazi Delphi model su uveli Arnold Kaufman i Madan M. Gupta ([9]) i on se u skladu sa gore datim objašnjenjem, sastoji od sledećih koraka:

Korak 1 Od stručnjaka $E_i, i = 1, \dots, n$ se traži da dostave moguće datume nekih događaja u nauci, tehnologiji ili poslovanju na sledeći način: prvi mogući datum $p_1^{(i)}$, najverovatniji datum realizacije događaja $p_M^{(i)}$ i najkasniji datum $p_2^{(i)}$. Podaci koje daju stručnjaci se predstavljaju dakle u formi trougaonog broja:

$$\mathbf{P}_i = (p_1^{(i)}, p_M^{(i)}, p_2^{(i)}), \quad i = 1, \dots, n$$

Korak 2 Prvo se računa srednja vrednost $\mathbf{P}_{ave} = (m_1, m_M, m_2)$. Onda se za svako E_i računa odstupanje između \mathbf{P}_{ave} i \mathbf{P}_i . To je takođe trougaoni broj:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{ave} - \mathbf{P}_i &= (m_1 - p_1^{(i)}, m_M - p_M^{(i)}, m_2 - p_2^{(i)}) \\ &= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_1^{(i)} - p_1^{(i)}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_M^{(i)} - p_M^{(i)}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_2^{(i)} - p_2^{(i)} \right) \end{aligned}$$

Odstupanje se šalje nazad stručnjacima $E_i, i = 1, \dots, n$, na pregledanje.

Korak 3 Svaki E_i daje novi trougaoni broj:

$$\mathbf{Q}_i = (q_1^{(i)}, q_M^{(i)}, q_2^{(i)}), \quad i = 1, \dots, n$$

Ovaj proces koji počinje Korakom 2 se ponavlja. Trougaona sredina \mathbf{Q}_m se računa pomoću formule:

$$\mathbf{Q}_m = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_1^{(i)}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_M^{(i)}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_2^{(i)} \right)$$

Ukoliko je potrebno, generišu se i novi trougaoni brojevi $\mathbf{R}^{(i)} = (r_1^{(i)}, r_M^{(i)}, r_2^{(i)})$ i računa njihova sredina \mathbf{R}_m . I to se tako ponavlja sve dok dva uzastopna odstupanja ne budu dovoljno blizu.

Korak 4 Kasnije, predviđanje može da se posmatra ponovo ukoliko se javi neka značajna informacija koja bi dovela do toga.

Analiza slučaja 2.1 Procena vremena za tehničku realizaciju inovativnog proizvoda ([2])

Grupa od 15 stručnjaka iz oblasti računarskih nauka je upitana da dâ procenu potrebnog vremena za tehničku realizaciju najnovijeg proizvoda. Svi eksperti su isto rangirani s obzirom na to da sva njihova mišljenja imaju istu težinu, odnosno, podjednako su važna. I tako se mogu trougaoni brojevi dobijeni njihovim mišljenjem prikazati u *Tabeli 2.1*, što ujedno predstavlja Korak 1:

E_i	\mathbf{P}_i	Najraniji datum	Najverovatniji datum	Najkasniji datum
E_1	\mathbf{P}_1	$p_1^{(1)} = 2014$	$p_M^{(1)} = 2022$	$p_2^{(1)} = 2039$
E_2	\mathbf{P}_2	$p_1^{(2)} = 2016$	$p_M^{(2)} = 2023$	$p_2^{(2)} = 2029$
E_3	\mathbf{P}_3	$p_1^{(3)} = 2019$	$p_M^{(3)} = 2024$	$p_2^{(3)} = 2029$
E_4	\mathbf{P}_4	$p_1^{(4)} = 2017$	$p_M^{(4)} = 2022$	$p_2^{(4)} = 2027$
E_5	\mathbf{P}_5	$p_1^{(5)} = 2019$	$p_M^{(5)} = 2024$	$p_2^{(5)} = 2034$
E_6	\mathbf{P}_6	$p_1^{(6)} = 2014$	$p_M^{(6)} = 2019$	$p_2^{(6)} = 2024$
E_7	\mathbf{P}_7	$p_1^{(7)} = 2029$	$p_M^{(7)} = 2037$	$p_2^{(7)} = 2039$
E_8	\mathbf{P}_8	$p_1^{(8)} = 2014$	$p_M^{(8)} = 2027$	$p_2^{(8)} = 2032$
E_9	\mathbf{P}_9	$p_1^{(9)} = 2014$	$p_M^{(9)} = 2021$	$p_2^{(9)} = 2026$
E_{10}	\mathbf{P}_{10}	$p_1^{(10)} = 2027$	$p_M^{(10)} = 2028$	$p_2^{(10)} = 2039$
E_{11}	\mathbf{P}_{11}	$p_1^{(11)} = 2029$	$p_M^{(11)} = 2039$	$p_2^{(11)} = 2043$
E_{12}	\mathbf{P}_{12}	$p_1^{(12)} = 2015$	$p_M^{(12)} = 2021$	$p_2^{(12)} = 2025$
E_{13}	\mathbf{P}_{13}	$p_1^{(13)} = 2017$	$p_M^{(13)} = 2025$	$p_2^{(13)} = 2029$
E_{14}	\mathbf{P}_{14}	$p_1^{(14)} = 2016$	$p_M^{(14)} = 2024$	$p_2^{(14)} = 2031$
E_{15}	\mathbf{P}_{15}	$p_1^{(15)} = 2021$	$p_M^{(15)} = 2019$	$p_2^{(15)} = 2039$

Tabela 2.1

U Koraku 2 treba izračunati srednju vrednost \mathbf{P}_{ave} , a za to su potrebne sume poslednje tri kolone i one iznose:

$$\sum_{i=1}^{15} p_1^{(i)} = 30281, \quad \sum_{i=1}^{15} p_M^{(i)} = 30375, \quad \sum_{i=1}^{15} p_2^{(i)} = 30485$$

Kad se ove vrednosti zamene u *Definiciju 2.7* dobija se:

$$\mathbf{P}_{ave} = \left(\frac{30281}{15}, \frac{30375}{15}, \frac{30206}{15} \right) = (2018.7, 2025, 2032,3)$$

tj. približno kad se zaokruži da nema decimala jer je ideja da se izrazi vrednost u celim godinama, dobija se:

$$\mathbf{P}_{ave}^z = (2019, 2025, 2032)$$

Sada se odstupanje između \mathbf{P}_{ave} i \mathbf{P}_i predstavlja u tabeli ispod:

E_i	$m_1 - p_1^{(i)}$	$m_M - p_M^{(i)}$	$m_2 - p_2^{(i)}$
E_1	5	3	-7
E_2	3	2	3
E_3	0	1	3
E_4	2	3	5
E_5	0	1	-2
E_6	5	6	8
E_7	-10	-12	-7
E_8	5	-2	0
E_9	5	4	6
E_{10}	-8	-3	-7
E_{11}	-10	-14	-11
E_{12}	4	4	7
E_{13}	2	0	3
E_{14}	3	1	1
E_{15}	-2	6	-7

Tabela 2.2

U ovoj tabeli se vidi divergencija mišljenja svakog stručnjaka od proseka. Ako se samo baci pogled, čini se da su eksperti E_3 , E_5 , E_8 , E_{13} i E_{14} blizu proseka, dok E_7 i E_{11} baš nisu. Pošto je to da su oni blizu ili daleko od proseka pomalo neodređeno, može se posebno govoriti i o razlici (rastojanju) $d_{i,j}$ dva trougaona broja \mathbf{P}_i i \mathbf{P}_j (više o razlici dva trougaona fazi broja može se dobiti iz [3], dok u ovom izlaganju o tome neće biti detalja).

Dalje, pretpostavka je da rukovodilac nije zadovoljan prosekom (2019, 2025, 2032). Onda se ide na Korak 3 pa se odstupanje daje ekspertima ponovo na predlaganje trougaonih brojeva \mathbf{Q}_i što je prikazano u *Tabeli 2.3*:

E_i	\mathbf{Q}_i	Najraniji datum	Najverovatniji datum	Najkasniji datum
E_1	\mathbf{Q}_1	$q_1^{(1)} = 2015$	$q_M^{(1)} = 2023$	$q_2^{(1)} = 2037$
E_2	\mathbf{Q}_2	$q_1^{(2)} = 2016$	$q_M^{(2)} = 2023$	$q_2^{(2)} = 2030$
E_3	\mathbf{Q}_3	$q_1^{(3)} = 2019$	$q_M^{(3)} = 2024$	$q_2^{(3)} = 2030$
E_4	\mathbf{Q}_4	$q_1^{(4)} = 2017$	$q_M^{(4)} = 2022$	$q_2^{(4)} = 2029$
E_5	\mathbf{Q}_5	$q_1^{(5)} = 2019$	$q_M^{(5)} = 2024$	$q_2^{(5)} = 2034$
E_6	\mathbf{Q}_6	$q_1^{(6)} = 2016$	$q_M^{(6)} = 2018$	$q_2^{(6)} = 2024$
E_7	\mathbf{Q}_7	$q_1^{(7)} = 2024$	$q_M^{(7)} = 2034$	$q_2^{(7)} = 2035$
E_8	\mathbf{Q}_8	$q_1^{(8)} = 2015$	$q_M^{(8)} = 2027$	$q_2^{(8)} = 2032$
E_9	\mathbf{Q}_9	$q_1^{(9)} = 2016$	$q_M^{(9)} = 2023$	$q_2^{(9)} = 2029$
E_{10}	\mathbf{Q}_{10}	$q_1^{(10)} = 2023$	$q_M^{(10)} = 2028$	$q_2^{(10)} = 2036$
E_{11}	\mathbf{Q}_{11}	$q_1^{(11)} = 2023$	$q_M^{(11)} = 2034$	$q_2^{(11)} = 2035$
E_{12}	\mathbf{Q}_{12}	$q_1^{(12)} = 2015$	$q_M^{(12)} = 2023$	$q_2^{(12)} = 2025$
E_{13}	\mathbf{Q}_{13}	$q_1^{(13)} = 2017$	$q_M^{(13)} = 2025$	$q_2^{(13)} = 2029$
E_{14}	\mathbf{Q}_{14}	$q_1^{(14)} = 2016$	$q_M^{(14)} = 2023$	$q_2^{(14)} = 2031$
E_{15}	\mathbf{Q}_{15}	$q_1^{(15)} = 2020$	$q_M^{(15)} = 2018$	$q_2^{(15)} = 2034$

Tabela 2.3

Eksperti E_5 i E_{13} nisu promenili svoje ocene, dok su eksperti $E_2, E_3, E_4, E_8, E_{12}$ i E_{14} uneli male izmene. Koristeći ponovo Definiciju 2.7 dobija se:

$$\mathbf{Q}_{ave} = (2018.1, 2024.6, 2031.3)$$

što je kad se zaokruži:

$$\mathbf{Q}_{ave}^z = (2018, 2025, 2031)$$

Sada je rukovodilac zadovoljan, stopira fazi Delphi proces, i prihvata trougaoni broj \mathbf{Q}_{ave}^z kao zaključak kombinovan od mišljenja eksperata. Zaključak je da će se realizacija inovacije desiti u vremenskom intervalu [2018, 2031] što je interval poverenja (noseći interval) za trougaoni broj \mathbf{Q}_{ave}^z koji je gotovo centriran. Najverovatnija godina kad se očekuje da će se desiti inovacija je 2025. Treba napomenuti da formule za defazifikaciju trougaonog broja (poglavlje 2.4) daju brojeve koji su približni 2025.

Takođe, u poslovanju, menadžmentu, finansijama i nauci, znanje, iskustvo i stručnost nekih stručnjaka se preferira više u odnosu na druge. To se može predstaviti težinama odnosno ponderirima w_i . U običnom modelu fazi Delphi su svi stručnjaci bili po prepostavci isto važni pa nije bilo potrebe za ovim vrednostima. Sada se posmatra slučaj u kojem procene i mišljenja stručnjaka imaju različite važnosti i tako se dolazi do *ponderisanog modela predviđanja fazi Delphi*.

Ako se prepostavi da svaki stručnjak $E_i, i = 1, \dots, n$ ima svoj ponder $w_i, i = 1, \dots, n$, $w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1$, mogu da se koriste koraci koji su navedeni za običan model fazi Delphi ali sa malim modifikacijama koje podrazumevaju da se umesto formule za trougaono usrednjavanje $\mathbf{P}_{ave}, \mathbf{Q}_{ave}, \mathbf{R}_{ave}, \dots$ koristi formula za ponderisano trougaono usrednjavanje $\mathbf{P}_{ave}^w, \mathbf{Q}_{ave}^w, \mathbf{R}_{ave}^w, \dots$

Analiza slučaja 2.2 Ponderisana procena vremena za tehničku realizaciju inovativnog proizvoda ([2])

Sada se posmatra *Analizu slučaja 2.1* gde je bilo 15 stručnjaka koji su davali svoje procene preko trougaonih brojeva koji su prikazani u *Tabeli 2.1*, ali se uvodi prepostavka da su eksperti E_1, E_3, E_5, E_8 i E_{13} više rangirani, odnosno da se njihova mišljenja više uvažavaju (neka njima ponder bude $w_i = 0.1$) nego od ostalih eksperata (za ostale se uzima da je $w_i = 0.05$, pošto mora suma svih pondera da bude jednaka jedinici). Tako nastaje sledeća tabela:

E_i	w_i	$w_i \times a_i^{(i)}$	$w_i \times a_M^{(i)}$	$w_i \times a_2^{(i)}$
E_1	0.1	201.4	202.2	203.9
E_2	0.05	100.8	101.15	101.45
E_3	0.1	201.9	202.4	202.9
E_4	0.05	100.85	101.1	101.35
E_5	0.1	201.9	202.4	203.4
E_6	0.05	100.7	100.95	101.2
E_7	0.05	101.45	101.85	101.95
E_8	0.1	201.4	202.7	203.2
E_9	0.05	100.7	101.05	101.3
E_{10}	0.05	101.35	101.4	101.95
E_{11}	0.05	101.45	101.95	102.15
E_{12}	0.05	100.75	101.05	101.25
E_{13}	0.1	201.7	202.5	202.9
E_{14}	0.05	100.8	101.2	101.55
E_{15}	0.05	101.05	100.95	101.95
Total	1	2018.2	2024.85	2032.4

Tabela 2.4

Vrednosti za total se ubace u formulu za računanje ponderisane srednje vrednosti tj. u *Definiciju 2.8*, i sledi:

$$\mathbf{P}_{ave}^w = (2018.2, 2024.85, 2032.4)$$

odnosno kad se zaokruži:

$$\mathbf{P}_{ave}^{wz} = (2018, 2025, 2032)$$

Gotovo isti rezultat se dobio i u prethodnoj analizi. I ovde formule za defazifikaciju trougaonog broja \mathbf{P}_{ave}^{wz} (*poglavlje 2.4*) daju brojeve koji su približni 2025. Takođe, ukoliko se defazifikuje \mathbf{P}_{ave}^w umesto \mathbf{P}_{ave}^{wz} , opet se dobijaju vrednosti koje su približno jednake sa 2025.

2.6 Fazi PERT za Projektni menadžment

Danas je nezamislivo da se bilo koji proces u okviru nekog poslovanja obavlja bez unapred utvrđenog plana. Projektni menadžment mora da obavi komplikovani poduhvat koji uključuje planiranje različitih aktivnosti koje se moraju sprovesti u procesu razvoja novog proizvoda ili tehnologije. Projekti predstavljaju jedinstveni proces i imaju određen početak i kraj. Projekti su podeljeni na manje aktivnosti radi jednostavnosti. I te aktivnosti takođe imaju svoj početak i svoj kraj. Aktivnosti se moraju odvijati po nekim logičkim pravilima (neke redom jedna za drugom, a neke istovremeno). Vreme koje je potrebno da se završi svaka aktivnost mora da se proceni (oceni) i moraju se utvrditi troškovi za svaku aktivnost, kao i potrebni resursi ([2, 6]).

2.6.1 Klasični PERT i CPM

Da bi se olakšalo planiranje i kontrolisanje projekata, razvijene su dve klasične tehnike: *Tehnika ocene i revizije projekta* tj. PERT (eng. *Project Evaluation and Review Technique*) i *Metod kritičnog puta* tj. CPM (eng. *Critical Path Method*).

PERT je razvila američka mornarica u toku planiranja izgradnje nuklearne podmornice „Polaris“. CPM su razvili u otprilike isto vreme istraživači iz Remington Rand i DuPont-a za održavanje hemijskog postrojenja. Postoje sličnosti između ove dve tehnike i vrlo često se koriste zajedno kao jedna.

Da bi se što bolje objasnili PERT i CPM, predstaviće se pojednostavljena i modifikovana verzija realnog projekta u skladu sa [6]. Šematski je predstavljen u *Tabeli 2.5* projekat koji se zove *Industrijski sistem-dizajn* i koji uključuje dizajn, izradu, montažu i testiranje. Projekat je podeljen na 8 aktivnosti A, B, C, D, E, F, G, H. Vreme potrebno da se obavi svaka aktivnost, koje su procenili menadžeri zaduženi za određene aktivnosti, je dato u poslednjoj koloni *Tabele 2.5*.

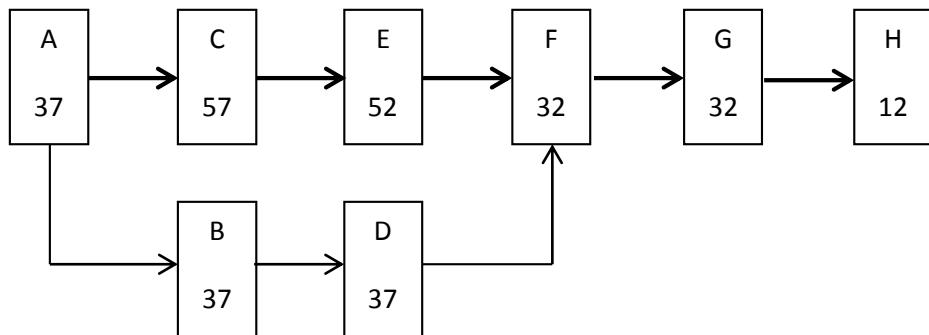
	Opis aktivnosti	Prethodne aktivnosti	Istovremene aktivnosti	Sledeće aktivnosti	Potrebno vreme(dani)
A	Mehanički dizajn	-	-	B,C	37
B	Elektroprojekat	A	C	D	37
C	Mehanička izrada	A	B	E	57
D	Električna izrada	B	C,E	F	37
E	Električna submontaža	C	D	F	52
F	Električna instalacija	D,E	-	G	32
G	Instalacija cevovoda	F	-	H	32
H	Pokratanje, testiranje, slanje	G	-	-	12

Tabela 2.5

Model mrežnog planiranja

PERT i CPM izgrađuju model mrežnog planiranja od podataka iz *Tabele 2.5*. Model koji odgovara datoj tabeli predstavljen je na *Slici 2.2*. Mogu se koristiti kvadrati, pravougaonici ili krugovi u kojima se navodi oznaka svake aktivnosti kao i vreme ocenjeno kao potrebno da se aktivnost obavi.

Ovaj model daje tačnu reprezentaciju uzastopnih veza i zavisnosti između aktivnosti koje čine projekat.



Slika 2.2 – Mrežni dijagram

Kritični put

Kritični put definiše se kao put aktivnosti povezanih u niz od početka do kraja projekta koje zahtevaju najduže vreme da se projekat završi. Zato je ukupno vreme za završavanje projekta, vreme potrebno da se završe aktivnosti na kritičnom putu. Model mrežnog planiranja pomaže da se odredi kritični put. Kritični put sa *Slike 2.2* je onaj predstavljen debelim strelicama koji povezuje aktivnosti *A, C, E, F, G* i *H*. Prema tome, ukupno vreme za završetak projekta je $37 + 57 + 52 + 32 + 32 + 12 = 222$ dana. Sa slike se vidi da aktivnosti *B* i *D* nisu na kritičnom putu, pa one ne moraju da se završe kako je planirano, ali kašnjenje ne bi trebalo da bude više od 35 dana, u suprotnom bi došlo do odlaganja aktivnosti na kritičnom putu počevši od *F* pa do kraja.

2.6.2 Probabilistički PERT

Procenjivanje ili predviđanje vremena za završavanje aktivnosti je samo po sebi neprecizno. Da bi se izborili sa nepreciznošću, istraživači su proširili mogućnost PERT-a time što su dodali verovatnoću i statistiku. PERT zahteva od stručnjaka tri ocene za vreme trajanja svake aktivnosti: *optimistično vreme* t_1 (najkraći tj. minimalni vremenski period za koji se aktivnost može ostvariti – to je vreme za koje će biti realizovana data aktivnost, ako se tokom izvođenja steknu najpovoljniji uslovi za to), *najverovatnije vreme* t_M (vreme koje je potrebno da se aktivnost završi po normalnim uslovima tj. ako sve ide po planu) i *pesimistično vreme* t_2 (maksimalno potrebno vreme za izvršenje aktivnosti u krajnje nepovoljnim uslovima – ukoliko ima poteškoća ili nešto krene nizbrdo). Vreme potrebno za pojedinu aktivnost se računa kao ponderisana srednja vrednost koristeći sledeću formulu:

$$t_e = \frac{t_1 + 4t_M + t_2}{6}$$

Ukupno vreme za završetak projekta T_e je vreme potrebno da se završe aktivnosti na kritičnom putu. Vreme koje se dobije iz formule: $t_e = \frac{t_1 + 4t_M + t_2}{6}$ za model mrežnog planiranja biće jako blizu onim vrednostima koje se nalaze u pravougaonicima na slici, i generalno će dati bolje procene. Ukupno vreme T_e (koje je *približno* 222 dana), je mnogo realnije nego tačno 222 dana. Dalje, PERT računa standardno odstupanje za t_e i druge analize iz teorije verovatnoće. U nastavku će biti predstavljena jedna alternativa za probabilistički PERT model koja je jednostavnija, a dovoljno objasnjava.

Tri ocene t_1, t_M, t_2 za svaku aktivnost dolaze od strane stručnjaka koji koriste pri tome svoje znanje, iskustvo i svaku informaciju koja je od pomoći i koja je dostupna. Subjektivni

su ali nisu proizvoljni. Pošto ima nepreciznosti, ovaj problem je pre fazi nego probabilistički. PERT ne predlaže način za pronalaženje t_1, t_M, t_2 , već samo činjenicu da se moraju oceniti i kombinovati u statističkoj formuli ponderisanih srednjih vrednosti.

2.6.3 Fazi PERT za predviđanje vremena

Ideja je da se poboljša PERT koristeći model fazi Delphi (*poglavlje 2.5*) prilikom ocenjivanja t_1, t_M, t_2 za svaku aktivnost. Stručnjaci predstavljaju vreme potrebno za svaku aktivnost preko trougaonih brojeva (t_1, t_M, t_2). Za svaku aktivnost se izračuna trougaona srednja vrednost, a da bi se odredilo „obično“ vreme za aktivnost mora da se uradi defazifikacija. Jednostavno, može se uzeti maksimizirajuća vrednost ili da se koriste formule za defazifikaciju o kojima se govorilo u *poglavlju 2.4*.

Fazi PERT je najbolje objasniti kroz primer:

Analiza slučaja 2.3 (deo 1) Predviđanje vremena potrebnog za organizovanje projekta za sistem upravljanja materijalima [2]

Neka je dizajn sistema za upravljanje materijalima dat kao u *Tabeli 2.5* i na *Slici 2.2* ali uz zanemarivanje podataka o predviđanjima koje je dao klasični PERT. Sada svaka aktivnost treba da bude ocenjena od strane tri eksperta.

Stručnjaci su zamoljeni da daju optimističnu, najverovatniju i pesimističnu procenu vremena za aktivnosti A, B, \dots, H u vidu trougaonih brojeva $\mathbf{T}_i^A, \mathbf{T}_i^B, \dots, \mathbf{T}_i^H, i = 1, 2, 3$. I tako nastaje *Tabela 2.6*:

E_i	\mathbf{T}_i^A	Optimistično vreme	Najverovatnije vreme	Pesimistično vreme
E_1	\mathbf{T}_1^A	35	37	40
E_2	\mathbf{T}_2^A	35	36	39
E_3	\mathbf{T}_3^A	34	38	41
Total	$\sum_{i=1}^3 \mathbf{T}_i^A$	104	111	120

Tabela 2.6

Kad se skupe sva mišljenja dobija se prosečno vreme za završetak aktivnosti A u danima:

$$\mathbf{T}_{ave}^A = \left(\frac{104}{3}, \frac{111}{3}, \frac{120}{3} \right) = (34.67, 37, 40) \approx (35, 37, 40)$$

Zatim treba defazifikovati \mathbf{T}_{ave}^A :

$$(1) t_{max}^{(1)} = \frac{34.67+37+40}{3} = 37.22$$

$$(2) t_{max}^{(2)} = \frac{34.67+2 \cdot 37+40}{3} = 37.17$$

$$(3) t_{max}^{(3)} = \frac{34.67+4 \cdot 37+40}{3} = 37.11$$

Sve vrednosti su blizu 37, no pošto se broje dani, decimale se zanemaruju pa se vrednost zaokružuje i koristi se tačna vrednost 37.

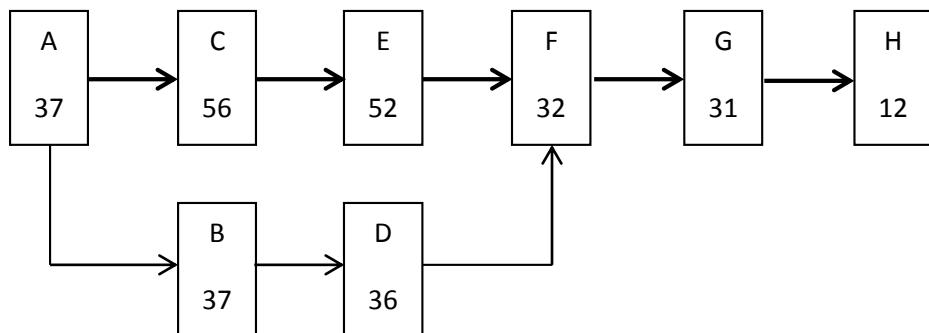
Na isti način se odradi procena i za preostale aktivnosti (grupe stručnjaka koji učestvuju mogu biti različite). U ovom slučaju pretpostavlja se da su te vrednosti već procenjene i date su u *Tabeli 2.7*:

Aktivnost	Prosečno vreme	Optimistično vreme t_1	Najverovatnije vreme t_M	Pesimistično vreme t_2
A	T_{ave}^A	35	37	40
B	T_{ave}^B	34	37	40
C	T_{ave}^C	53	56	60
D	T_{ave}^D	34	36	38
E	T_{ave}^E	48	52	55
F	T_{ave}^F	29	32	35
G	T_{ave}^G	29	31	34
H	T_{ave}^H	9	12	14

Tabela 2.7

Svaki trougaoni broj koji predstavlja srednju vrednost (druga kolona u *Tabeli 2.7*) mora da se defazifikuje. Ti trougaoni brojevi su skoro centrirani, pa kad se iskoristi formula $t_{max} = t_M$ dobijaju se baš vrednosti iz četvrte kolone, ali i kad se iskoriste tri formule za defazifikaciju trougaonih brojeva dobijaju se gotovo iste vrednosti.

Sada se defazifikovana vremena mogu predstaviti kao model mrežnog planiranja:



Slika 2.3 – Model mrežnog dijagrama za defazifikovana vremena

Ukupno vreme potrebno da se projekat završi, izraženo kroz trougaoni broj T je vreme potrebno za završavanje aktivnosti na kritičnom putu. Pa se tako dobija:

$$T = T_{ave}^A + T_{ave}^C + T_{ave}^E + T_{ave}^F + T_{ave}^G + T_{ave}^H = (271, 293, 316)$$

Odatle sledi da će realizacija projekta trajati između 271 i 316 dana, najverovatnije 293 dana. Ako se iskoriste formule za defazifikaciju, sledi:

- (1) $T_{max}^{(1)} = 293.33$
- (2) $T_{max}^{(2)} = 293.25$
- (3) $T_{max}^{(3)} = 293.17$

Sve vrednosti su blizu 293, dakle prognoza za projekat je 293 dana.

2.6.4 Raspored alokacije resursa

Vreme trajanja aktivnosti i alokacija resursa, bilo materijalnih ili ljudskih, su blisko povezani. Normalna je praksa da se pre alokacije resursa projekta uspostavi model mrežnog planiranja. Predviđanje vremena trajanja aktivnosti podrazumeva posredno da su potrebni resursi pristupačni i da bi se mogli alokalizovati na aktivnosti u nekoj odgovarajućoj stopi tako da proces može da se nastavi bez prekida. U realnosti različite poteškoće mogu da nađu i iskomplikuju posao. Često je mišljenje menadžmenta da treba dodati dodatne resurse da bi se smanjilo vreme završavanja aktivnosti. To može dodatno koštati. Skraćivanje trajanja projekata može biti poželjno zbog nagrada, a ukoliko se previše produži mogu se plaćati i penali.

PERT pomaže u analiziranju problema koji su u vezi sa raspoređivanjem resursa. Za probleme u kojima je potrebno ocenjivanje, PERT se može kombinovati sa fazi Delphi-jem u smislu predviđanja vremena i pronalaženja kritičnog puta.

Analiza Studija slučaja 2.3 (Deo 2) Fazi PERT za skraćenje dužine projekta ([2])

Koriste se sledeće promenljive t_n – *normalno vreme* potrebno da se završi neka aktivnost kao što je planirano, zatim t_s – *skraćeno vreme* za neku aktivnost, C_n – *normalni troškovi* za završavanje neke aktivnosti i C_s – *uvećani troškovi* za završavanje neke aktivnosti u skraćenom vremenu. Za svaku aktivnost se moraju proceniti ova četiri parametra. Sledi primer koji se nadovezuje na primer koji je predstavljen u prvom delu ove iste studije slučaja, a koji se tiče *Predviđanja vremena potrebnog za organizovanje projekta za sistem upravljanja materijalima (Analiza slučaja 2.2 – Deo 1)*

Da bi se smanjilo vreme za realizaciju projekta, mora se zapravo smanjiti dužina kritičnog puta. Smanjivanje vremena za aktivnosti koje nisu na kritičnom putu (u primeru to su aktivnosti B i D), neće smanjiti maksimalno vreme. Naravno da uvek postoji i mogućnost da se recimo neki resursi alocirani na B i D , premeste na C i D u cilju da se skrati njihovo vreme. To je interno premeštanje resursa, ali ovde će se razmotriti samo skraćivanje vremena na kritičnom putu, bez internog premeštanja

t_n za svaku aktivnost je već procenjena, to je $t_{max} = t_M$, odnosno to su vrednosti u četvrtoj koloni *Tabele 2.7*. Vrednosti za t_s , C_n i C_s za svaku aktivnost se mogu prognozirati na isti način kao što je to urađeno za t_n , koristeći Fazi Delphi. Defazifikovane vrednosti će se označavati sa $t_{s max}$, $C_{n max}$ i $C_{s max}$.

Ispod se daje procena za normalne troškove za aktivnost A :

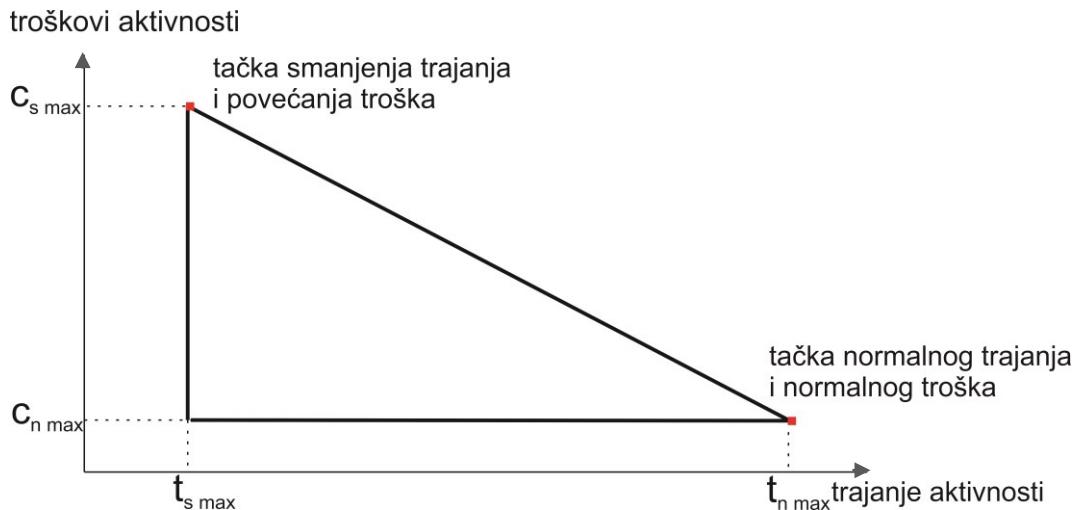
Ekspert	Najmanja cena troška C_{n1}	Najverovatnija cena troška C_{nM}	Najviša cena troška C_{n2}
E_1	23000	25000	27000
E_2	24500	26000	27000
E_3	22000	24500	26000
Total	69500	75500	80000

Tabela 2.8

Iz tih podataka sledi da je: $\mathbf{C}_{n ave}^A = (23166.67, 25166.67, 26666.67)$. To se može zaokružiti i tako se dobija: $\mathbf{C}_{n ave}^A = (23000, 25000, 26500)$. Defazifikacijom se takođe dolazi do cifre od 25000.

Zatim se isto ovo uradi i za t_s i C_s , pa se opet sva tri podatka računaju i za sve ostale aktivnosti koje su na kritičnom putu. Da bi se odredile aktivnosti za koje treba da se smanji vreme trajanja, PERT koristi takozvani *troškovni nagib*:

$$k = \text{troškovni nagib} = \left| \frac{C_{n \max} - C_{s \max}}{t_{n \max} - t_{s \max}} \right|$$



Slika 2.4 – Troškovni nagib za skraćenje vremena trajanja aktivnosti

Aktivnost	Normalno vreme $t_{n \max}$	Skraćeno vreme $t_{s \max}$	Normalni trošak $C_{n \max}$	Povećani trošak $C_{s \max}$	Troškovni nagib \$ po danu
<i>A</i>	37	27	25000	31000	600
<i>C</i>	56	32	35500	45500	417
<i>E</i>	52	34	33000	40000	389
<i>F</i>	32	24	23500	30000	813
<i>G</i>	31	22	20000	24000	444
<i>H</i>	12	10	12000	13000	500

Tabela 2.9 – Defazifikovano normalno i skraćeno vreme i normalni i povećani troškovi za aktivnosti

Troškovni nagib za aktivnost *A* dobija se po formuli koju je navedena:

$$k_A = \left| \frac{C_{n \max} - C_{s \max}}{t_{n \max} - t_{s \max}} \right| = \left| \frac{25000 - 31000}{37 - 27} \right| = \left| \frac{-6000}{10} \right| = 600$$

I tako se dobiju vrednosti koje se unose u poslednju kolonu *Tabele 2.9*.

Tabela 2.9 se može zameniti tabelom u kojoj su aktivnosti rangirane po troškovnom nagibu:

Rang	Aktivnost	Smanjenje vremena $t_{n\ max} - t_{s\ max}$	Dodatni trošak $C_{s\ max} - C_{n\ max}$	Troškovni nagib \$ po danu
1	E	18	7000	389
2	C	24	10000	417
3	G	9	4000	444
4	H	2	1000	500
5	A	10	6000	600
6	F	8	6500	813

Tabela 2.10 – Aktivnosti rangirane prema troškovnom nagibu

2.6.5 Predviđanje tražnje

Tražnja je nešto osnovno u poslovanju i ekonomiji. Tražnja se u osnovi sastoji iz dve komponente: kvantiteta proizvoda koji se traži po određenoj ceni u određenom vremenu i spremnosti i mogućnosti da se proizvod kupi. Tražnja za novim proizvodom bi trebala da se predviđa. Predviđanje je bolje ukoliko postoje podaci o istoriji tražnje nekog sličnog proizvoda pošto onda neke osnovne veze između prošlosti i budućnosti predstavljaju sadašnjost.

Tražnja za datim delom inventara se deli na nezavisne tražnje i zavisne tražnje⁵. Tražnja je *nezavisna* kada ne zavisi ili se ne dobija iz tražnje nekog drugog proizvoda. U suprotnom je *zavisna*. Nezavisna tražnja mora da se predviđi dok se za zavisnu tražnja treba odrediti iz tražnji sličnih proizvoda tj. proizvoda sa kojima je u zavisnoj vezi.

⁵ Ideja raspodele na nezavisnu i zavisnu tražnju je u skladu sa konceptom koji je dao američki inženjer Džosef Orickli (eng. Joseph Orlicky) 1975. u delu „*Material requirements planning*“.

3. Donošenje odluke u fazi okruženju

Potreba da se doneše odluka javlja se u svakodnevnom životu. Ponekad su to sitne odluke ali nekad mogu biti i veliki problemi koji se mogu rešiti povoljno ili nepovoljno u zavisnosti od toga da li je doneta dobra ili loša odluka. Prema tome, može se reći da donošenje odluka podrazumeva proces rešavanja problema. To je izbor jednog od mnogo različitih načina da se nešto reši, odnosno obavi. Sve ovo je od izuzetno velikog značaja u poslovnom svetu, menadžmentu, ekonomiji, finansijama, društvenim i političkim naukama, inženjeringu i IT nauci, biologiji i medicini. Proces donošenja odluke nije nimalo jednostavan. Mnogo je nepreciznosti i subjektivnosti pa se upravo zbog toga on posmatra u fazi okruženju.

Ovde će se akcenat staviti na dva pristupa tj. dve metode za donošenje odluka koje su zasnovane na fazi skupovima i fazi logici. U pitanju je pristup koji su dali Bellman i Zadeh ([1]) po kojem se donošenje odluka definiše kao presek ciljeva i ograničenja opisanih fazi skupovima, dok drugi pristup kombinuje ciljeve i ograničenja uz pomoć fazi usrednjavanja ([2]).

3.1 Donošenje odluke kao presek fazi skupa ciljeva i fazi skupa ograničenja zasnovano na t-normi $T_M=\min$

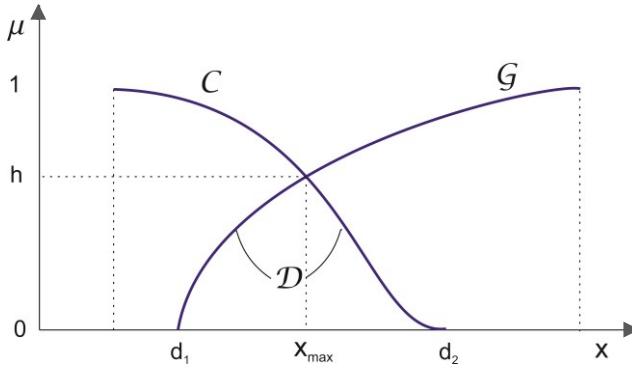
Prilikom odlučivanja uvek postoji neki cilj za kojim se teži, a pri tom se ne sme izaći iz postavljenih okvira. Recimo trivijalan primer: Osoba želi da se zaposli, i u tom slučaju posmatra recimo tri kompanije koje su joj interesantne. Naravno, želi visoku platu (to je njen cilj), ali pored toga, bitno je da posao bude zanimljiv i da nije predaleko od kuće (navedena dva uslova su ograničenja). Dakle podrazumeva se da se iz skupa nekih alternativa odabere jedna, tako da se prilikom donošenja odluke postigne cilj, a da se pri tom ne izade iz skupa ograničenja ([2]). Naredna definicija će pojasniti ovu priču:

Definicija 3.1 [1, 2] Neka je fazi skup \mathcal{G} sa svojom karakterističnom funkcijom $\mu_{\mathcal{G}}(x)$ skup ciljeva i neka je fazi skup \mathcal{C} sa karakterističnom funkcijom $\mu_{\mathcal{C}}(x)$ skup ograničenja, gde je x element običnog skupa alternativa A_{alt} . Odluka je fazi skup \mathcal{D} sa karakterističnom funkcijom $\mu_{\mathcal{D}}(x)$, koji se dobija kao presek skupova \mathcal{G} i \mathcal{C} .

$$\mathcal{D} = \mathcal{G} \cap \mathcal{C} = \{(x, \mu_{\mathcal{D}}(x)) | x \in [d_1, d_2], \mu_{\mathcal{D}}(x) \in [0, h \leq 1]\}$$

Gde je $h = \max \mu_{\mathcal{D}}(x)$. Tako se dobija rezultat za odlučivanje u isečku $D = [d_1, d_2]$ glavnog skupa alternativa A_{alt} . Funkcija pripadnosti $\mu_{\mathcal{D}}(x)$ pokazuje stepen pripadanja svakog $x \in [d_1, d_2]$ skupu odluke \mathcal{D} . Sve se ovo još jasnije može predstaviti šematski na grafiku (*Slika 3.1*).

Oznake potiču od engleskih reči: \mathcal{D} – „*Decision*“ (odluka), \mathcal{G} – „*Goal*“ (cilj) i \mathcal{C} – „*Constraint*“ (ograničenje).



Slika 3.1

Funkcija pripadanja fazi skupu odluke \mathcal{D} se s obzirom na osobine preseka (zasnovano na trougaonoj normi *minimuma*) dobija na sledeći način:

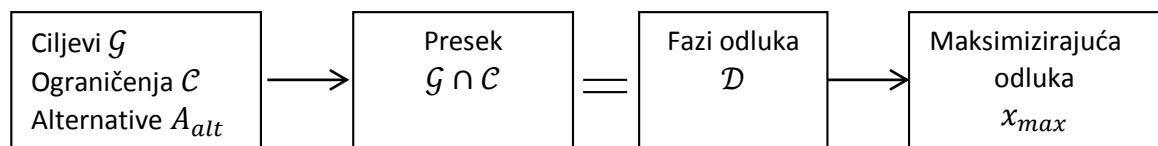
$$\mu_{\mathcal{D}}(x) = \min(\mu_{\mathcal{G}}(x), \mu_{\mathcal{C}}(x)), x \in A_{alt}$$

Zbog komutativnosti preseka važi i $\mathcal{D} = \mathcal{G} \cap \mathcal{C} = \mathcal{C} \cap \mathcal{G}$, tako da nije problem ako se skup ciljeva obrne sa skupom ograničenja. Upravo zbog toga, često se dešava da se prilikom rešavanja problema donošenja odluke uopšte ne naglašava tačno šta je šta, već se sve kategorije posmatraju zajedno kao aspekti problema te se primena ovog načina odlučivanja može proširiti (primer za to će se obraditi u poglavljiju 3.1.2).

Donosioci odluka žele da kao krajnji rezultat imaju običnu vrednost a ne fazi, dakle oni traže vrednost iz skupa $[d_1, d_2] \in A_{alt}$ koja najbolje tj. najadekvatnije daje reprezentaciju celog fazi skupa \mathcal{D} . Upravo se iz ovih razloga vrši defazifikacija fazi skupa \mathcal{D} . U te svrhe, najprirodnije je da se iz skupa $[d_1, d_2] \in A_{alt}$ izabere ona vrednost x -a koja ima najveći stepen pripadnosti u skupu \mathcal{D} . Kaže se da ta vrednost x -a maksimizira funkciju $\mu_{\mathcal{D}}(x)$ i zove se maksimizirajuća odluka:

$$x_{max} = \{x | \max \mu_{\mathcal{D}}(x) = \max \min(\mu_{\mathcal{G}}(x), \mu_{\mathcal{C}}(x))\}$$

Proces donošenja odluke se može predstaviti blok dijagramom:



Formule koje su predstavljene u definiciji kada postoji jedan skup ciljeva i jedan skup ograničenja, mogu da se generalizuju. Pa tako za n ciljeva $\mathcal{G}_i, i = 1, \dots, n$ i m ograničenja $\mathcal{C}_j, j = 1, \dots, m$, odluka je $\mathcal{D} = \mathcal{G}_1 \cap \dots \cap \mathcal{G}_n \cap \mathcal{C}_1 \cap \dots \cap \mathcal{C}_m$, a funkcija pripadnosti $\mu_{\mathcal{D}}(x) = \min(\mu_{\mathcal{G}_1}(x), \dots, \mu_{\mathcal{G}_n}(x), \mu_{\mathcal{C}_1}(x), \dots, \mu_{\mathcal{C}_m}(x))$. Maksimizirajuća odluka je $x_{max} = \{x | \mu_{\mathcal{D}}(x) \text{ je max}\}$.

Ukoliko skup alternativa nije neprekidan skup, npr. ako je u pitanju podskup skupa prirodnih brojeva, sve pomenute formule i dalje važe.

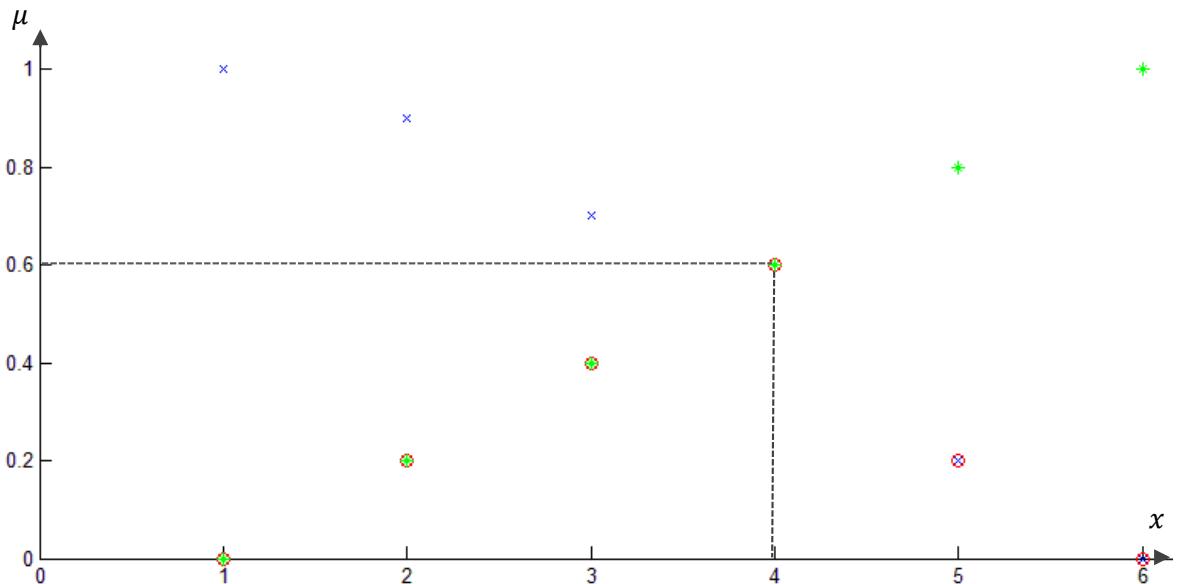
Primer 3.1 Neka je dat skup alternativa $A_{alt} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. I neka su fazi skupovi ciljeva i ograničenja dati na sledeći način:

$$\mathcal{G} = \{(1,0), (2,0.2), (3,0.4), (4,0.6), (5,0.8), (6,1)\}$$

$$\mathcal{C} = \{(1,1), (2,0.9), (3,0.7), (4,0.6), (5,0.2), (6,0)\}$$

Koristeći formulu za donošenje odluke, dobija se:

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \mathcal{G} \cap \mathcal{C} = \{(1, \min(0,1)), (2, \min(0.2,0.9)), (3, \min(0.4,0.7)), \\ &\quad (4, \min(0.6,0.6)), (5, \min(0.8,0.2)), (6,1,0)\} \\ &= \{(1, 0), (2, 0.2), (3, 0.4), (4, 0.6), (5, 0.2), (6, 0)\}\end{aligned}$$



Slika 3.2 – Skup \mathcal{G} je predstavljen zelenim zvezdicama, skup \mathcal{C} plavim iksićima, dok je skup \mathcal{D} (fazi odluka) je predstavljen crvenim krugovima

Treba skrenuti pažnju na komentar dat u [1], a koji govori o tome da ovako definisana odluka kao presek fazi skupa ciljeva i fazi skupa ograničenja $\mathcal{D} = \mathcal{G}_1 \cap \dots \cap \mathcal{G}_n \cap \mathcal{C}_1 \cap \dots \cap \mathcal{C}_m$ nije jedina mogućnost. Mogu se osim preseka koristiti i druge operacije u fazi skupovima, a može se definisati odluka kao „spajanje“ ciljeva i ograničenja.

3.1.1 Razne aplikacije u kojima se primenjuje proces donošenja odluka kao presek fazi skupova ciljeva i ograničenja

U ovom poglavlju će se kroz primere iz stvarnog života videti primena *Definicije 3.1* na rešavanje problema donošenja odluke. Sve analize i rezultati su u skladu sa literaturom [2].

Analiza slučaja 3.1 – Dividende ([2])

U jednoj kompaniji odbor direktora je voljan da plati atraktivnu dividendu akcionarima, ali s druge strane, treba da ostanu skromni i da ne potroše previše sredstava. U ovom slučaju skup ciljeva \mathcal{G} predstavlja lingvističku vrednost *atraktivna dividenda* i on je definisan nad određenim skupom alternativa $A_{alt} = \{x | 0 < x \leq 8\}$, gde se x meri u dolarima. Za funkciju pripadnosti se mogu uzimati trougaoni ili delovi trapezoidnih brojeva.

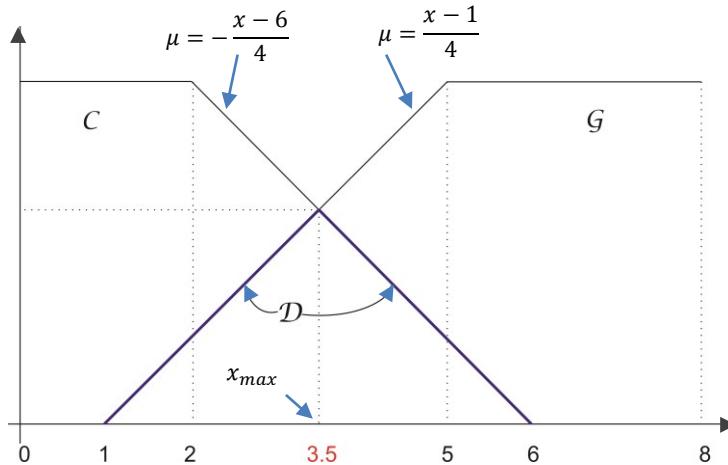
Fazi skup ciljeva \mathcal{G} , *atraktivne dividende*, definiše se preko odgovarajuće funkcije pripadnosti $\mu_{\mathcal{G}}(x)$ koja je rastuća na intervalu A_{alt} , na sledeći način:

$$\mathcal{G} \triangleq \mu_{\mathcal{G}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } 0 < x \leq 1 \\ \frac{x-1}{4}, & \text{za } 1 \leq x \leq 5 \\ 1, & \text{za } 5 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

Fazi skup ograničenja \mathcal{C} , *skromne dividende* definiše se preko funkcije pripadnosti $\mu_{\mathcal{C}}(x)$ koja je opadajuća nad istim skupom alternativa, na sledeći način:

$$\mathcal{C} \triangleq \mu_{\mathcal{C}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } 0 < x \leq 2 \\ -\frac{x-6}{4}, & \text{za } 2 \leq x \leq 6 \\ 0, & \text{za } 6 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

Na osnovu definicije za dobijanje fazi skupa odluke, $\mathcal{D} = \mathcal{G} \cap \mathcal{C}$, fazi skup \mathcal{D} je predstavljen na grafiku na *Slici 3.3* preko svoje funkcije pripadnosti.



Slika 3.3 – Fazi skup odluke \mathcal{D}

Skup $[d_1, d_2]$, predstavlja interval $[1, 6]$. Tačka preseka pravih $\mu = \frac{x-1}{4}$ i $\mu = -\frac{x-6}{4}$ je $(3.5, 0.625)$, tj. $x_{max} = 3.5$, a $h = \max \mu_D(x) = 0.625$. Prema tome dividenda koja će se platiti je 3.5 dolara.

Analiza slučaja 3.2 – Politika zapošljavanja ([2])

U ovom primeru se daje u matematičkom smislu, uopštenje priče iz *Analize slučaja 3.1*. Kompanija raspisuje konkurs za određenu poziciju na koju konkuriše 5 kandidata $x_k, k = 1, \dots, 5$. Oni čine diskretan skup alternativa $A_{alt} = \{x_1, x_2, \dots, x_5\}$. Sektor za regrutaciju kadrova očekuje od kandidata da ima određene kvalifikacije: *iskustvo, poznavanje računara, mala starost (mlade godine)* koje se posmatraju kao ciljevi $\mathcal{G}_i, i = 1, 2, 3$. Potrebno je takođe nametnuti i određena ograničenja kao što je recimo *skromna plata* \mathcal{C} . Nakon intervjua svaki kandidat x_k se ocenjuje sa tačke gledišta ciljeva i ograničenja, nekom ocenom od 0 do 1. Ocena koja se tiče ciljeva označava se sa a_{k_i} , a ocena koja se tiče ograničenja sa b_{k_i} . Koristeći ocene sektor za regrutaciju konstruiše diskretne fazi skupove \mathcal{G}_i i \mathcal{C} nad skupom alternativa A_{alt} :

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_1 &= \{(x_1, 0.8), (x_2, 0.6), (x_3, 0.3), (x_4, 0.7), (x_5, 0.5)\} \\ \mathcal{G}_2 &= \{(x_1, 0.7), (x_2, 0.6), (x_3, 0.8), (x_4, 0.2), (x_5, 0.3)\} \\ \mathcal{G}_3 &= \{(x_1, 0.7), (x_2, 0.8), (x_3, 0.5), (x_4, 0.5), (x_5, 0.4)\} \\ \mathcal{C} &= \{(x_1, 0.4), (x_2, 0.7), (x_3, 0.6), (x_4, 0.8), (x_5, 0.9)\}\end{aligned}$$

Neka skupovi ciljeva redom predstavljaju \mathcal{G}_1 - *iskustvo*, \mathcal{G}_2 - *poznavanje računara* i \mathcal{G}_3 - *mala starost*, a skup \mathcal{C} - *spremnost kandidata da prihvati skromnu platu*. Kada se iskoristi formula preseka za dobijanje fazi skupa odluke:

$$\mathcal{D} = \mathcal{G}_1 \cap \dots \cap \mathcal{G}_n \cap \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_m = \{(x_1, \mu_1), (x_2, \mu_2), \dots, (x_p, \mu_p)\}$$

gde je funkcija pripadnosti data sa:

$$\mu_k = \min(a_{k_1}, \dots, a_{k_n}, b_{k_1}, \dots, b_{k_m}), \quad k = 1, \dots, p$$

n je broj skupova ciljeva, m broj skupova ograničenja, a p broj kandidata (alternativa).

dobija se:

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 \cap \mathcal{G}_3 \cap \mathcal{C} = \{(x_1, \mu_1), (x_2, \mu_2), (x_3, \mu_3), (x_4, \mu_4), (x_5, \mu_5)\} \\ &= \{(x_1, \min(0.8, 0.7, 0.7, 0.4)), (x_2, \min(0.6, 0.6, 0.8, 0.7)), (x_3, \min(0.3, 0.8, 0.5, 0.6)), \\ &\quad (x_4, \min(0.7, 0.2, 0.5, 0.8)), (x_5, \min(0.5, 0.3, 0.4, 0.9))\} \\ &= \{(x_1, 0.4), (x_2, 0.6), (x_3, 0.3), (x_4, 0.2), (x_5, 0.3)\}\end{aligned}$$

Kandidati sa najvećim stepenom pripadanja će predstavljati najbolje kandidate za posao.

Vidi se iz priloženog da osoba x_2 ima najveću funkciju pripadnosti, s toga ona predstavlja najboljeg kandidata za posao.

Formule koje se ovde koriste za model donošenja odluke mogu da se primene i na neke druge slučajeve, ne samo na odabir odgovarajućih kandidata na neku poslovnu poziciju. Zato će se u nastavku objasniti još nekoliko primera koji koriste istu ideju.

Analiza slučaja 3.3 – Odabir redosleda izgradnje objekata ([2])

Planirano je da se u gradu izgrade četiri zgrade, ali redosled izgradnje nije određen. Firma koja izgrađuje želi da odredi koja će se zgrada prva konstruisati. Zgrade su označene sa z_i , $i = 1, 2, 3, 4$ i čine skup alternativa A_{alt} . Firma preferira da najpre izgradi zgradu koja ne mora biti *jako bitna*, ali koja je *visko profitabilna* (to bi predstavljalo skup ciljeva). Takođe firma je svesna da gradsko veće preferira zgradu koja je od *velike važnosti*, sa *kratkim vremenom realizacije* i *razumnim troškovima izgradnje* (što bi predstavljalo ograničenja). Rukovodstvo kompanije opisuje skupove ciljeva i ograničenja na sledeći način:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_1 &\triangleq \text{ne mnogo bitna zgrada} = \{(z_1, 0), (z_2, 0.4), (z_3, 0.3), (z_4, 0.8)\} \\ \mathcal{G}_2 &\triangleq \text{veoma profitabilna zgrada} = \{(z_1, 0.5), (z_2, 0.6), (z_3, 0.7), (z_4, 0.3)\} \\ \mathcal{G}_3 &\triangleq \text{dugo vreme izgradnje} = \{(z_1, 0.8), (z_2, 0.7), (z_3, 1), (z_4, 0.2)\} \\ \mathcal{C}_1 &\triangleq \text{veoma bitna zgrada} = \{(z_1, 1), (z_2, 0.6), (z_3, 0.7), (z_4, 0.2)\} \\ \mathcal{C}_2 &\triangleq \text{kratko vreme izgradnje} = \{(z_1, 0.3), (z_2, 0.4), (z_3, 0.5), (z_4, 0.7)\} \\ \mathcal{C}_3 &\triangleq \text{razumni troškovi} = \{(z_1, 0.3), (z_2, 0.4), (z_3, 0.7), (z_4, 0.2)\}\end{aligned}$$

Odluka je u skladu sa prethodnim formulama data sa:

$$\mathcal{D} = \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 \cap \mathcal{G}_3 \cap \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 = \{(z_1, 0), (z_2, 0.4), (z_3, 0.3), (z_4, 0.2)\}$$

Odluka rukovodstva je da predloži gradskom veću izgradnju zgrade z_2 pošto ona ima najveći stepen funkcije pripadnosti. Ova zgrada najviše odgovara i uslovima ciljeva i uslovima ograničenja. Ukoliko iz nekog razloga veće grada ne bude zadovoljno predlogom, rukovodstvo je spremno da predloži da se kao prva zgrada izgradi zgrada z_3 pošto ona ima sledeći po redu stepen pripadnosti u skupu odluke \mathcal{D} .

U ovom primeru je bitno primetiti da su skupovi \mathcal{G}_1 i \mathcal{C}_1 *komplementi*, tj. $\mu_{\mathcal{C}_1}(b) = 1 - \mu_{\mathcal{G}_1}(b)$. S druge strane, \mathcal{G}_3 – *dugo vreme* je blizu komplementa (ali ipak nije komplement) od \mathcal{C}_2 – *kratko vreme*, $\mu_{\mathcal{C}_2}(b) \approx 1 - \mu_{\mathcal{G}_3}(b)$. Vrednosti *kratko* i *dugo* su jezički suprotnog značenja i mogu da se opišu fazi skupovima koji su skoro komplementi, recimo: *kratko* ≈ *nedugo*; $\mu_{\text{kratko}}(x) \approx 1 - \mu_{\text{dugo}}(x) = \mu_{\text{nedugo}}(x)$. U svakom slučaju treba biti obazriv prilikom interpretacije reči sa suprotnim značenjem.

Dosadašnji primeri su imali zadovoljene sve uslove za primenu *Definicije 3.1*. Međutim, šta ukoliko funkcija pripadnosti nekih skupova (\mathcal{G}_i ili \mathcal{C}_j) nije definisana nad istim skupom (skupom alternativa)?

Sledeća analiza pokazuje kako se prevazilazi taj problem.

Analiza slučaja 3.4 – Strategija odabira posla ([2])

Posmatra se osoba kojoj je ponuđen posao od strane tri firme f_1, f_2, f_3 i one čine skup $A_{alt} = \{f_1, f_2, f_3\}$. Ponude zarada se razlikuju od firme do firme, ali cilj osobe koja se zapošljava jeste što *veća zarada*. To čini skup \mathcal{G} , a njegova funkcija pripadnosti $\mu_{\mathcal{G}}(x)$ neprekidno raste nad univerzalnim skupom zarada koje se mere u dolarima pa pripadaju \mathbb{R}_+ . Naravno pored zarade bitno je i da li je posao *zanimljiv*, *kolika je razdaljina od kuće do posla* i *da li kompanija ima budućnost*. Sve ovo čini ograničenja koja su definisana nad

skupom alternativa. Primetno je da cilj i ograničenja nisu definisana nad istim skupom, pa da bi se mogle primeniti formule za donošenje odluke bazirane na preseku fazi skupa ciljeva i fazi skupa ograničenja, potrebno je prilagoditi situaciju. Skup plata se mora konvertovati u skup A_{alt} . To se radi tako što se plate p_1, p_2, p_3 koje nude firme f_1, f_2, f_3 , respektivno, zamenjuju u funkciju pripadanja fazi skupa cilja $\mu_G(x)$, pa se vrednosti koje se dobiju $\mu_G(p_1), \mu_G(p_2), \mu_G(p_3)$ pridružuju f_1, f_2, f_3 i tako formiraju skup visokih plata nad alternativnim skupom:

$$\mathcal{G}_{alt} = \{(f_1, \mu_G(p_1)), (f_2, \mu_G(p_2)), (f_3, \mu_G(p_3))\}$$

Godišnje zarade u dolarima po svakoj kompaniji su date u tabeli:

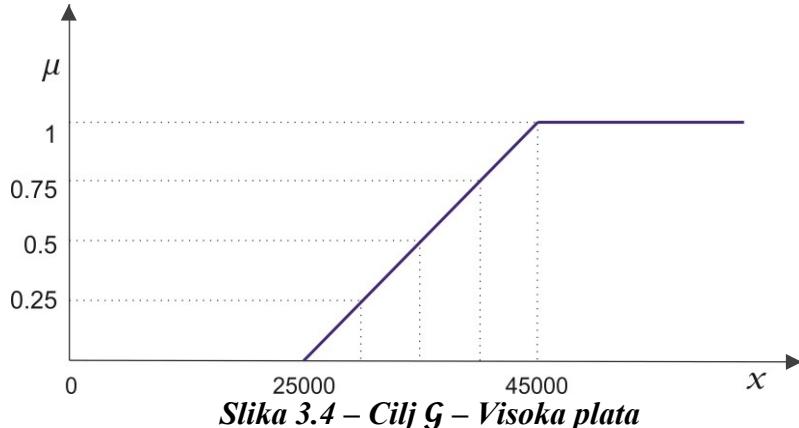
Firma	f_1	f_2	f_3
Plata	40 000	35 000	30 000

Neka \mathcal{C}_1 bude *interesantan posao*, \mathcal{C}_2 – *mala razdaljina od kuće do posla*, \mathcal{C}_3 – *firma koja ima budućnost*. Budući radnik određuje svoj fazi skup cilja i prva dva skupa ograničenja po svom subjektivnom osećaju i željama, a za treće ograničenje svakako može da se konsultuje nekom stručnom literaturom.

Cilj \mathcal{G} (*visoka plata*) definiše se preko neprekidne funkcije pripadnosti:

$$\mathcal{G} \triangleq \mu_G(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } 0 < x < 25000 \\ \frac{x - 25000}{20000}, & \text{za } 25000 \leq x \leq 45000 \\ 1, & \text{za } 45000 \leq x \end{cases}$$

nad \mathbb{R}_+ , univerzalnom skupu plata, a grafik se može videti na *Slici 3.4*.



Diskretni fazi skupovi ograničenja su:

$$\mathcal{C}_1 = \{(f_1, 0.5), (f_2, 0.7), (f_3, 0.8)\}$$

$$\mathcal{C}_2 = \{(f_1, 0.3), (f_2, 0.8), (f_3, 1)\}$$

$$\mathcal{C}_3 = \{(f_1, 0.3), (f_2, 0.7), (f_3, 0.5)\}$$

Da bi se mogla koristiti formula $\mathcal{D} = \mathcal{G}_1 \cap \dots \cap \mathcal{G}_n \cap \mathcal{C}_1 \cap \dots \cap \mathcal{C}_m$ potrebno je generisati stepene pripadanja za fazi skup cilja, zamenjujući vrednosti zarade u funkciju pripadnosti fazi skupa cilja:

$$\begin{aligned}\mu_G(f_1) &= \mu_G(40\ 000) = \frac{40000 - 25000}{20000} = 0.75 \\ \mu_G(f_2) &= \mu_G(35\ 000) = \frac{35000 - 25000}{20000} = 0.50 \\ \mu_G(f_3) &= \mu_G(30\ 000) = \frac{30000 - 25000}{20000} = 0.25\end{aligned}$$

Sada se umesto fazi skupa ciljeva nad skupom \mathbb{R}_+ , posmatra fazi skup ciljeva nad skupom alternativa:

$$\mathcal{G}_{alt} = \{(f_1, 0.75), (f_2, 0.5), (f_3, 0.25)\}$$

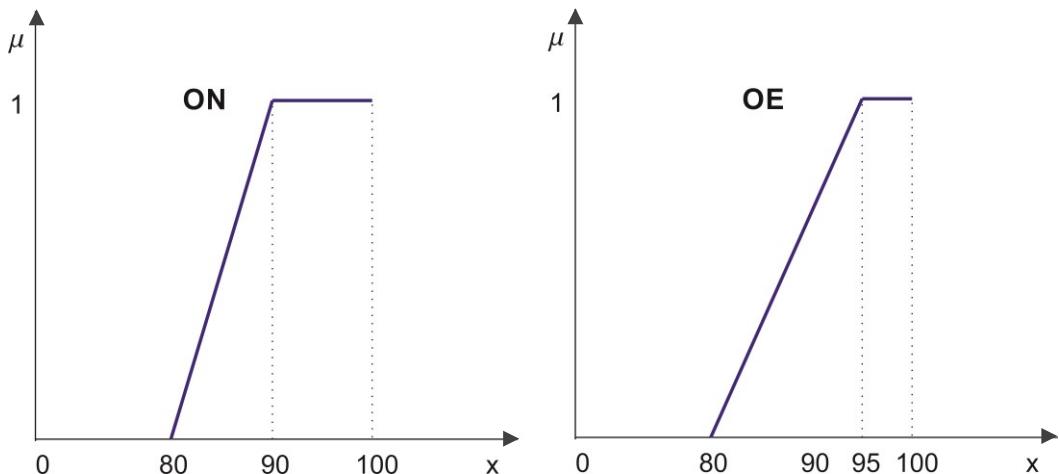
Odluka je sada:

$$\mathcal{D} = \mathcal{G}_{alt} \cap \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 = \{(f_1, 0.3), (f_2, 0.5), (f_3, 0.25)\}$$

Najveću pripadnost skupu \mathcal{D} ima druga firma, prema tome ona najbolje ispunjava zahteve i ograničenja budućeg zaposlenog.

Analiza slučaja 3.5 – Procena uspešnosti učenja ([2])

Rukovodstvo kompanije je osnovalo godišnju stipendiju za srednjoškolce sa odličnim uspehom iz *nauke* (u nju se ubrajaju *matematika, fizika i hemija*) i iz *engleskog jezika*. Ukoliko je neko *odličan* u *engleskom jeziku* označava se sa **OE**, a ukoliko je *odličan* u *nauci* sa **ON**. Prema tome, različito se posmatraju i predstavljeni su na *Slici 3.5* kao delovi trapezoidnih brojeva na univerzalnom skupu uspeha $[0, 100]$.



Slika 3.5 – Odličan uspeh u nauci (levo) i odličan uspeh u engleskom jeziku (desno)

Koristeći *Definiciju 1.23 (poglavlje 1.7)*, definiše se:

$$\mathbf{ON} \triangleq \mu_{\mathbf{ON}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } 0 \leq x \leq 80 \\ \frac{x - 80}{10}, & \text{za } 80 \leq x \leq 90 \\ 1, & \text{za } 90 \leq x \leq 100 \end{cases}$$

$$\mathbf{OE} \triangleq \mu_{\mathbf{OE}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } 0 \leq x \leq 80 \\ \frac{x-80}{15}, & \text{za } 80 \leq x \leq 95 \\ 1, & \text{za } 95 \leq x \leq 100 \end{cases}$$

Ocena 90 u *nauci* ima pripadnost 1 u skupu **ON** dok ista ocena u *engleskom jeziku* ima stepen pripadnosti 0.67 u skupu **OE**.

Neka su pet studenata kandidati za stipendiju: $A_{alt} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ i njihove ocene su predstavljene u *Tabeli 3.1*:

	<i>Matematika</i>	<i>Fizika</i>	<i>Hemija</i>	<i>Engleski</i>
x_1	86	91	95	93
x_2	98	89	93	90
x_3	90	92	96	88
x_4	96	90	88	89
x_5	90	87	92	94

Tabela 3.1 – Ocena studenata iz nauke i engleskog jezika

Zamenjujući vrednosti ocena učenika za *matematiku*, *fiziku* i *hemiju* u funkciju pripadnosti $\mu_{\mathbf{ON}}(x)$, a vrednosti ocena za *engleski* u funkciju $\mu_{\mathbf{OE}}(x)$ dobijaju se odgovarajući stepeni koji su predstavljeni u tabeli 3.2:

	<i>Matematika</i>	<i>Fizika</i>	<i>Hemija</i>	<i>Engleski</i>
x_1	0.6	1	1	0.87
x_2	1	0.9	1	0.67
x_3	1	1	1	0.53
x_4	1	1	0.8	0.60
x_5	1	0.7	1	0.93

Tabela 3.2 – Stepeni odličnog uspeha iz nauke i engleskog jezika

Vrednosti stepena pripadanja se uparuju sa odgovarajućim studentima i tako se dobijaju fazi skupovi za odličan uspeh u *nauci* i *engleskom jeziku*:

$$\mathcal{G}_1 \triangleq \text{Odličan u matematici} = \{(x_1, 0.6), (x_2, 1), (x_3, 1), (x_4, 1), (x_5, 1)\}$$

$$\mathcal{G}_2 \triangleq \text{Odličan u fizici} = \{(x_1, 1), (x_2, 0.9), (x_3, 1), (x_4, 1), (x_5, 0.7)\}$$

$$\mathcal{G}_3 \triangleq \text{Odličan u hemiji} = \{(x_1, 1), (x_2, 1), (x_3, 1), (x_4, 0.8), (x_5, 1)\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_4 \triangleq \text{Odličan u engleskom jeziku} \\ = \{(x_1, 0.87), (x_2, 0.67), (x_3, 0.53), (x_4, 0.60), (x_5, 0.93)\} \end{aligned}$$

Odluka je:

$$\mathcal{D} = \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 \cap \mathcal{G}_3 \cap \mathcal{G}_4 = \{(x_1, 0.6), (x_2, 0.67), (x_3, 0.53), (x_4, 0.6), (x_5, 0.7)\}$$

Sledi da učenik x_5 ima najbolje performanse, potom sledi x_2 , dok x_1 i x_4 imaju iste stepene pripadanja. Ispadne da je najlošije rangiran učenik x_3 .

3.1.2 Modeli postavljanja cena za nove proizvode

Predstaviće se dva primera u kojima se opisuje način postavljanja cena za nove proizvode prilikom njihovog plasiranja na tržiste. Naime, i ovde se koristi model u kojem se krajnji rezultat dobija presekom ulaznih vrednosti, dakle ideja je ista kao za problem odlučivanja. Postavljanje cena novim proizvodima je izuzetno zahtevan, odgovoran i težak zadatak. Moraju se kombinovati finansijska nastojanja, marketing, prodaja i preporuke menadžerskih stručnjaka da bi se postavila inicijalna cena novog proizvoda. Mora se jako paziti jer ukoliko se preceni proizvod, može se postaviti tržiste koje će za suparničke firme biti bolje. Model se zasniva na uslovima (zahtevima) \mathcal{R}_i koje definišu stručnjaci. Sledi spisak najčešćih uslova ([2]):

- $\mathcal{R}_1 \triangleq$ Proizvod treba da ima **nisku** cenu.
- $\mathcal{R}_2 \triangleq$ Proizvod treba da ima **visoku** cenu.
- $\mathcal{R}_3 \triangleq$ Proizvod treba da ima cenu koja je **bliska konkurentske** ceni.
- $\mathcal{R}_4 \triangleq$ Proizvod treba da ima cenu koja je **bliska dvostrukom trošku proizvodnje**.
- $\mathcal{R}_5 \triangleq$ Proizvod treba da ima cenu koja je **blago iznad konkurentske** cene.

Reči kao što su *niska cena*, *visoka cena*, *bliska cena*,... mogu da se modifikuju uz pomoć modifikatora kao što su *veoma* i *skoro*.

Uobičajeni model postavljanja cena bi trebao da ima bar dva uslova. S obzirom na to da se uslovi mogu posmatrati kao aspekti problema, nema potrebe za definisanjem ciljeva i ograničenja (pogotovo što i kad se postavljaju nije bitno šta je šta jer se posmatra ukupni presek, a presek ima osobinu komutativnosti). Suprotstavljne vrednosti kao što su niska i visoka cena, mogu biti predstavljene levim i desnim trapezoidnim brojevima ili trougaonim brojevima na skupu alternativa – podskupu \mathbb{R}_+ , mereni u dolarima. Da bi se ovo sve bolje razumelo, u nastavku slede pomenuti primeri:

Analiza slučaja 3.6 – Modeli postavljanja cena sa tri pravila ([2])

Model 1: Posmatra se model koji ima tri pravila (uslova):

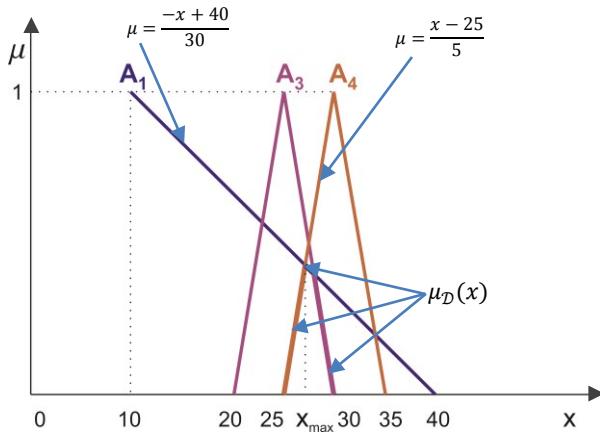
- $\mathcal{R}_1 \triangleq$ Proizvod treba da ima **nisku** cenu.
- $\mathcal{R}_3 \triangleq$ Proizvod treba da ima cenu koja je **bliska konkurentske** ceni.
- $\mathcal{R}_4 \triangleq$ Proizvod treba da ima cenu koja je **bliska dvostrukom trošku proizvodnje**.

Prepostavka je da je konkurentska cena 25 \$, a dvostruki trošak proizvodnje 30 \$. Skup alternativa je $A_{alt} = [10, 50]$, a to znači da cena koja se postavi za proizvod mora biti iz datog skupa. \mathcal{R}_1 će biti predstavljen trougaonim brojem A_1 (niska cena), \mathcal{R}_3 trougaonim brojem A_3 (cena bliska konkurentske) i \mathcal{R}_4 sa A_4 (cena bliska dvostrukom trošku proizvodnje). To se može zapisati na sledeći način:

$$A_1 \triangleq \mu_{A_1}(x) = \begin{cases} \frac{-x + 40}{30}, & \text{za } 10 \leq x \leq 40 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$A_3 \triangleq \mu_{A_3}(x) = \begin{cases} \frac{x-20}{5}, & \text{za } 20 \leq x \leq 25 \\ \frac{-x+30}{5}, & \text{za } 25 \leq x \leq 30 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$A_4 \triangleq \mu_{A_4}(x) = \begin{cases} \frac{x-25}{5}, & \text{za } 25 \leq x \leq 30 \\ \frac{-x+35}{5}, & \text{za } 30 \leq x \leq 35 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$



Slika 3.6 – Model postavljanja cena sa pravilima $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_3$ i \mathcal{R}_4

Koristeći formulu za funkciju pripadanja skupu \mathcal{D} (poglavlje 3.I), dolazi se do skupa odluke:

$$\mathcal{D} \triangleq \mu_{\mathcal{D}}(x) = \min(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_3}(x), \mu_{A_4}(x))$$

Kad se reši kao sistem, $\mu = \frac{-x+40}{30}$ i $\mu = \frac{x-25}{5}$, dobija se maksimizirajuća odluka:
 $x_{max} = 27.14$

I to je cena proizvoda. Ova vrednost se uzima kao preporuka. 14 centi kojih se javljaju u iznosu nisu od prevelikog značaja, i praktično je bilo šta u intervalu $[25, 30]$ prihvatljivo, recimo vrednost 27 \$ ili 26.99 \$. (Slika 3.6).

Sa grafika se može lepo videti kako trougaoni broj A_3 (cena bliska konkurentskoj) svakako doprinosi odluci \mathcal{D} , ali nema direktni uticaj na x_{max} , za razliku od druga dva trougaona broja koji imaju. Najveći uticaj ima A_4 (cena bliska dvostrukom trošku proizvodnje), jer on dostiže maksimum za cenu $x = 30$, $\mu_{A_4}(30) = 1$, no zbog uticaja A_1 konačna maksimizirajuća vrednost je 27.14 \$.

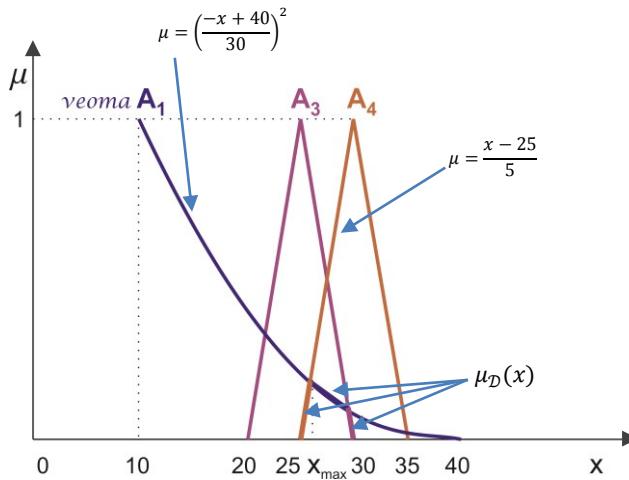
Model 2:

Ovde će biti predstavljen *Model I* ali takav gde je uslov \mathcal{R}_1 koji je predstavljen trougaonim brojem A_1 modifikovan modifikatorima (a) *veoma* i (b) *skoro*.

(a) *veoma* $\mathcal{R}_1 \triangleq$ Proizvod treba da ima **veoma nisku** cenu.

Prema poglavlju 1.10.4 sledi:

$$\mu_{veoma A_1}(x) = (\mu_{A_1})^2 = \begin{cases} \left(\frac{-x+40}{30}\right)^2, & \text{za } 10 \leq x \leq 40 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$



Slika 3.7 - Model postavljanja cena sa pravilima $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_3$ i \mathcal{R}_4 sa modifikovanim \mathcal{R}_1 (A_1), koji sada ima oblik parabole na [10, 40]

Odluka \mathcal{D} ima funkciju pripadnosti definisaniu nad intervalom $[25, 30]$:

$$\mu_{\mathcal{D}}(x) = \min(\mu_{veoma A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \mu_{A_3}(x))$$

Da bi se dobila vrednost x_{max} potrebno je rešiti sistem koji čine sledeće dve jednačine:

$$\mu = \left(\frac{-x+40}{30}\right)^2 \text{ i } \mu = \frac{x-25}{5}$$

iz njega sledi:

$$\left(\frac{-x+40}{30}\right)^2 = \frac{x-25}{5}$$

I tako se dobija kvadratna jednačina:

$$x^2 - 260x + 6100 = 0$$

koja ima dva rešenja $x_1 = 26.08$ i $x_2 = 233.92$. Interesantno je rešenje x_1 jer ono upada u interval $[25, 30]$ (Slika 3.7) nad kojim je definisana funkcija pripadnosti fazi skupa odluke \mathcal{D} . Prema tome, $x_{max} = 26.08 \approx 26 \$$ i to je predlog za vrednost cene proizvoda.

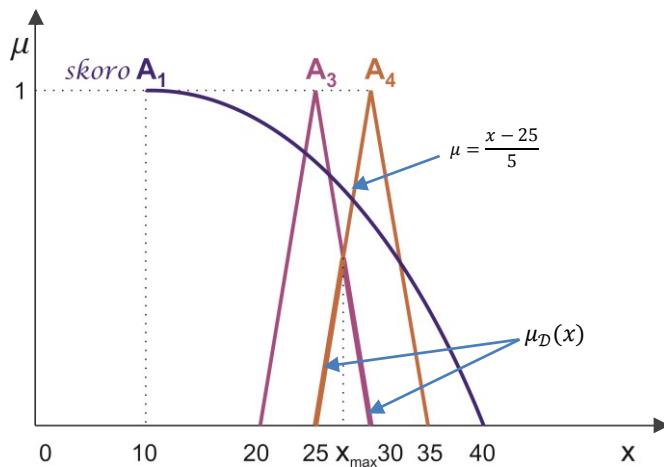
Modifikator *veoma* daje veći naglasak na nisku cenu, zbog toga se u ovom slučaju dobija vrednost 26 \\$ koja je manja od 27.14 \\$ koja je dobijena u *Modelu 1*. Slično kao i u *Modelu 1*. i ovde A_3 doprinosi fazi odluci ali ne i maksimizirajućoj vrednosti.

(b) *skoro $\mathcal{R}_1 \triangleq$ Proizvod treba da ima skoro nisku cenu.*

Prema poglavljju 1.10.4 sledi:

$$\mu_{skoro A_1}(x) = (\mu_{A_1})^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} \left(\frac{-x + 40}{30}\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{za } 10 \leq x \leq 40 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Sa Slike 3.8 se vidi da pravilo *skoro* \mathcal{R}_1 ne doprinosi fazi odluci \mathcal{D} koja ima funkciju pripadnosti $\mu_{\mathcal{D}}(x)$ na domenu $D = [25, 30]$. Samo pravila (uslovi) \mathcal{R}_3 i \mathcal{R}_4 , odnosno trougaoni brojevi A_3 i A_4 utiču na fazi skup \mathcal{D} , a maksimizirajuća odluka se nalazi na sredini intervala $[25, 30]$ i iznosi $x_{max} = 27.5 \$$.



Slika 3.8 - Model postavljanja cena sa pravilima \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_3 i \mathcal{R}_4 sa modifikovanim \mathcal{R}_1 (A_1), koji sada ima oblik parabole na $[10, 40]$

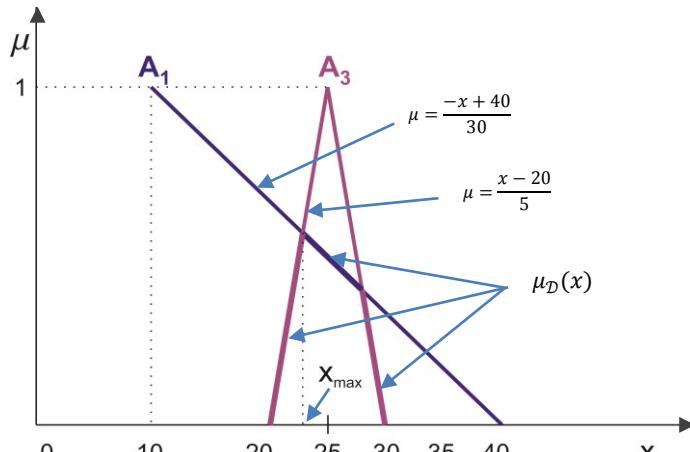
Modeli postavljanja cena koji su predstavljeni u *Analizi slučaja 3.6 (Model 1 i Model 2 (a))* daju maksimizirane odluke koje se zasnivaju na *niskim cenama* i *dvostrukoj ceni proizvodnje* bez uticaja *konkurentske cene*, koja takođe učestvuje u modelima. Ukoliko kompanija koristi ovakvu politiku, može da stvori tržište koje je povoljno za konkurente. Kao posledica, može doći do toga da kompanija snosi gubitke zbog smanjivanja cena, redizajniranja proizvoda kao i zbog, na kraju, uklanjanja proizvoda sa tržišta. Primeri iz stvarnog života (pogledati literaturu [5]) govore da bi kompaniji bilo bitnije da ozbiljno shvati cenu konkurenциje nego da pokušava da brzo profitira. Draker⁶ (eng. *Drucker*) govori kako većina američkih i gotovo sve evropske kompanije cene povećavaju kako se povećavaju troškovi i najbitnija im je troškovna marža. To rade zarad ostvarivanja profita. To jeste tako, ali za obične potrošače i klijente to je nevidljivo, jer oni ne smatraju da je njihov posao da kupovinom omoguće profit proizvođača. Postavljanje cena vodeno troškovima je loše za razliku od postavljanja troškova na osnovu cena, jer najbolje je izaći na tržište sa cenom koju potrošači mogu da plate. Naredni model ilustruje Drakerov predlog:

⁶ Peter Ferdinand Drucker (19.11.1909 – 11.11.2005.) je bio konsultant, predavač i pisac u sferi menadžmenta. On je dao veliki filozofski i praktični doprinos modernim poslovnim kompanijama. Takođe je bio voda edukacije menadžera i on je osnivač pravca – *Upravljanje prema ciljevima*.

Analiza slučaja 3.7 – Troškovni model vođen cenama ([2])

Predstaviće se u nastavku jednostavan model koji se sastoji od dva pravila kako bi se predočila ideja Drucker-a. Neka su:

\mathcal{R}_1 (niska cena) i \mathcal{R}_3 (cena bliska konkurentskoj) opisane trougaonim brojevima A_1 i A_3 (isti oni koji se pominju u Analizi slučaja 3.6 – Model I)



Slika 3.9 – Troškovni model vođen cenama koji uključuje uslove \mathcal{R}_1 i \mathcal{R}_3

Fazi odluka nad domenom $D = [20, 30]$ je:

$$\mathcal{D} \triangleq \mu_{\mathcal{D}}(x) = \min(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_3}(x))$$

Maksimizirajuća odluka predstavlja rešenje sistema jednačina $\mu = \frac{x-20}{5}$ i $\mu = \frac{-x+40}{30}$. Sledi da je $x_{max} = 22.86$, što je ispod konkurenatske cene od 25 \$, a to je u skladu sa uslovom *niska cena*.

Ovaj model, za razliku od modela koji su opisani u prethodnoj analizi slučaja, ne uzimaju u obzir troškove proizvodnje. Iznos od 22.86 \$ treba da se uzme kao predlog i proizvod treba da se dizajnira, proizvede i reklamira pri takvim troškovima da se ostvari profit ukoliko se proizvod prodaje po ceni od 22.86 dolara ili bliskoj.

Ako je proizvod nov na tržištu i nema konkurenciju, onda bi cena trebala da se predloži. Mogući model može da se bazira na pravilima \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 i \mathcal{R}_4 .

Ako je proizvod superioran u odnosu na konkurenatski proizvod, onda treba da se koristi model sa uslovom \mathcal{R}_5 . A sofisticiraniji i uopšteniji model može umesto uslova \mathcal{R}_5 da ima uslov:

$\mathcal{R}_5 \triangleq$ Ukoliko je proizvod superioran u odnosu na konkurenatski proizvod, cena proizvoda bi trebala biti veća od cene konkurenetskog.

Primetno je iz datih primera da u ovom modelu donošenja odluke mogu postojati uslovi koji ne doprinose odluci. Koren ovog problema leži u tome što se u ovom procesu donošenje odluke bazira na preseku. Formula $x_{max} = \{x | \max \mu_{\mathcal{D}}(x) = \max \min(\mu_G(x), \mu_C(x))\}$, ne omogućuje siguran doprinos svih uslova koji učestvuju u modelu. U takvim slučajevima, donošenje odluka preko preseka nije najbolja tehnika. Zato postoji drugi pristup o kojem će govoriti u nastavku, a u kojem doprinose svi ciljevi i ograničenja i koji se zasniva na fazi usrednjavanju.

3.2 Donošenje odluka putem fazi usrednjavanju koje se bazira na t-normi $T_M = \min$

U ovom delu će se objasniti kako se fazi usrednjavanje, o kojem je bilo reči u *poglavlju 2.3*, koristi za donošenje odluka ([2]). Ciljevi i ograničenja, ili zahtevi (pravila, uslovi) se opisuju trougaonim ili trapezoidnim brojevima. Ukoliko su rangirani po težini koristiće se ponderisano fazi usrednjavanje. Kao rezultat dobija se trougaoni ili trapezoidni broj \mathbf{D} koji predstavlja odluku. To se zove *prosek donošenja odluka*. Da bi se našao maksimizirajući prosek uzima se da je x vrednost u intervalu za \mathbf{D} za koju vrednost $\mu_{\mathbf{D}}(x)$ ima maksimalni stepen pripadnosti (tj. ima vrednost 1). Takođe, u ove svrhe mogu da se koriste i pomenute statističke sredine (*poglavlje 2.4*):

$$\begin{array}{ll} (1) x_{max}^{(1)} = \frac{m_1 + m_M + m_2}{3} & (1) x_{max}^{(1)} = \frac{m_1 + \frac{m_{M_1} + m_{M_2} + m_2}{2}}{3} \\ (2) x_{max}^{(2)} = \frac{m_1 + 2m_M + m_2}{4} & (2) x_{max}^{(2)} = \frac{m_1 + m_{M_1} + m_{M_2} + m_2}{4} \\ (3) x_{max}^{(3)} = \frac{m_1 + 4m_M + m_2}{6} & (3) x_{max}^{(2)} = \frac{m_1 + 2(m_{M_1} + m_{M_2}) + m_2}{6} \end{array}$$

Analiza slučaja 3.8 – Dividende sa fazi usrednjavanjem i ponderisanim fazi usrednjavanjem ([2])

1 – sa fazi usrednjavanjem:

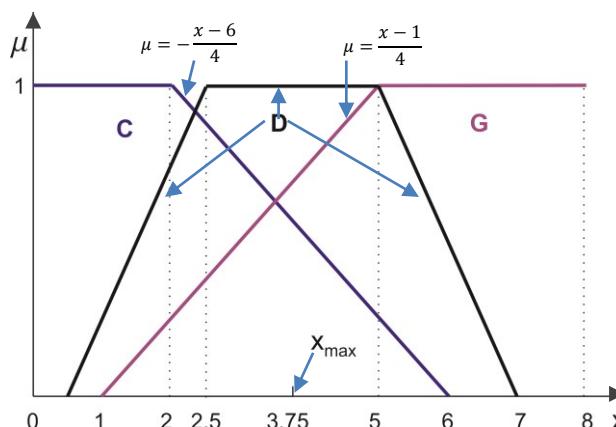
Primeniće se princip fazi usrednjavanja na problem dat u *Analizi slučaja 3.1 (poglavlje 3.1.1)*. Cilj **G** – atraktivna dividenda i ograničenja **C** – skromna dividenda predstavljaju leve i desne trapezoidne brojeve i mogu se dati kao (*poglavlje 1.7*):

$$\mathbf{G} = (1, 5, 8, 8) \text{ i } \mathbf{C} = (0, 0, 2, 6)$$

Koristeći *Definiciju 2.9* za trapezoidno usrednjavanje, dobija se:

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}_{ave} = \frac{\mathbf{G} + \mathbf{C}}{2} = \frac{(1, 5, 8, 8) + (0, 0, 2, 6)}{2} = \frac{(1, 5, 10, 14)}{2} = (0.5, 2.5, 5, 7)$$

Kao što se da videti i sa grafika na *Slici 3.10*, $x_{max} = 3.75$. Naime, sve vrednosti sa gornje osnovice trapezoida (na intervalu $[2.5, 5]$) imaju istu vrednost funkcije pripadnosti u \mathbf{D} , pa se maksimizirajuća odluka definiše na sredini tog intervala, tj. $x_{max} = \frac{2.5+5}{2} = 3.75$.



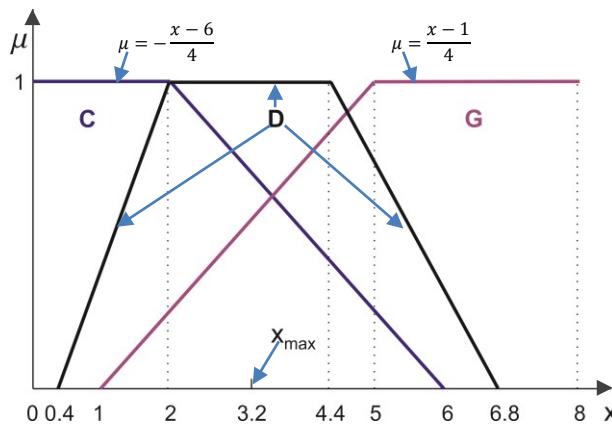
Slika 3.10 – Odluka D dobijena fazi usrednjavanjem ($x_{max} = 3.75$)

Maksimizirajuća vrednost koja se dobila u *Analizi slučaja 3.1* iznosi 3.5 \$, a na odboru direktora ostaje da odluče koju od ove dve vrednosti da koriste: 3.5 \$ ili 3.75 \$.

2 – sa ponderisanim fazi usrednjavanjem:

- (a) Sada se prepostavlja da odbor direktora daje različiti značaj *atraktivnoj* i *skromnoj dividendi*. Neka je značaj **G**, $w_G = 0.4$, a značaj **C**, $w_C = 0.6$, što bi značilo da je ograničenje nešto malo značajnije u odnosu na cilj, pa na osnovu *Definicije 2.10*, dobija se:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= A_{ave}^w = 0.4 \cdot \mathbf{G} + 0.6 \cdot \mathbf{C} \\ &= 0.4 \cdot (1, 5, 8, 8) + 0.6 \cdot (0, 0, 2, 6) \\ &= (0.4, 2, 3.2, 3.2) + (0, 0, 1.2, 3.6) \\ &= (0.4, 2, 4.4, 6.8) \end{aligned}$$



*Slika 3.11 – Odluka D dobijena ponderisanim fazi usrednjavanjem
($x_{max} = 3.2$)*

Rezultat je trapezoidni broj čija je gornja osnovica nad intervalom [2, 4.4], pa sledi:

$$x_{max} = \frac{2 + 4.4}{2} = 3.2$$

Što je manje od 3.75 \$ kada nije bilo različitog preferiranja značajnosti, a i očekivano je da je sad vrednost manja, s obzirom na to da se preferirala skromna dividenda.

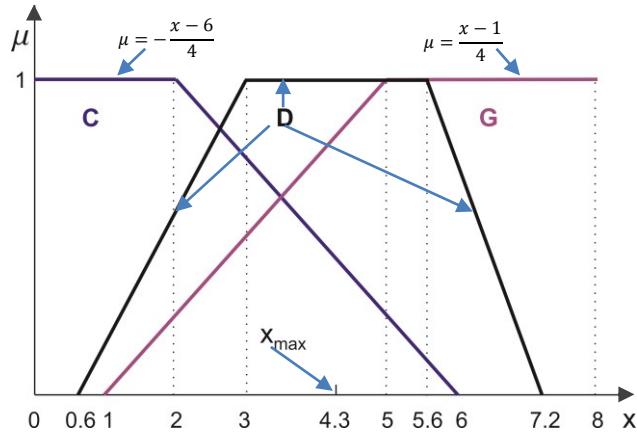
- (b) *Ovaj deo primera je originalan:* Sada se prepostavlja da se preferira *atraktivna dividenda*, odnosno, neka je sada značaj **G**, $w_G = 0.6$, a značaj **C**, $w_C = 0.4$. Na osnovu *Definicije 2.10*, sledi:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= A_{ave}^w = 0.6 \cdot \mathbf{G} + 0.4 \cdot \mathbf{C} \\ &= 0.6 \cdot (1, 5, 8, 8) + 0.4 \cdot (0, 0, 2, 6) \\ &= (0.6, 3, 4.8, 4.8) + (0, 0, 0.8, 2.4) \\ &= (0.6, 3, 5.6, 7.2) \end{aligned}$$

I dobija se da je

$$x_{max} = \frac{3 + 5.6}{2} = 4.3$$

što je veće od 3.75 \$ kada nije bilo različitog preferiranja značajnosti i očekivano je da je vrednost veća jer je veći značaj dat atraktivnoj dividendi.



*Slika 3.12 – Odluka D dobijena ponderisanim fazama usrednjavanjem
($x_{max} = 4.3$)*

Analiza slučaja 3.9 – Dva modela postavljanja cena ([2])

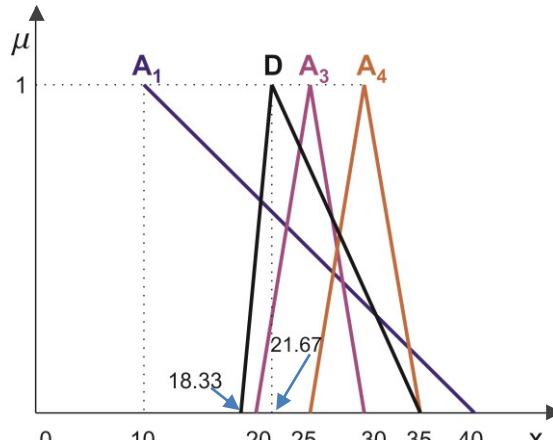
Model 1:

Posmatra se *Model 1* iz *Analize slučaja 3.6*. Pravila $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_3$ i \mathcal{R}_4 opisani su trougaonim brojevima koji se mogu zapisati na sledeći način (*Slika 3.6* i *Slika 3.13*)

$$\mathbf{A}_1 = (10, 10, 40), \quad \mathbf{A}_2 = (20, 25, 30), \quad \mathbf{A}_3 = (25, 30, 35)$$

Koristeći *definiciju 2.7* dobija se:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = \mathbf{A}_{ave} &= \frac{\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3}{3} = \frac{(10, 10, 40) + (20, 25, 30) + (25, 30, 35)}{3} \\ &= \frac{(55, 65, 105)}{3} = (18.33, 21.67, 35) \end{aligned}$$



Slika 3.13 – Model postavljanja cena sa pravilima $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_3$ i \mathcal{R}_4

I u skladu sa *poglavljem 2.4* i *defazifikacijom fazama usrednjavanja*: $x_{max} = m_M$, sledi da je u ovom slučaju $x_{max} = 21.67$, jer je to vrednost u kojoj funkcija pripadnosti $\mu_D(x)$ dostiže

svoj maksimum. Maksimizirajuća odluka iz *Modela 1* u *Analizi slučaja 3.6* je 27.14 \$. Ova razlika nije zanemarljiva i sada preostaje na stručnjacima da odrede koja vrednost da se uzme kao konačna, tj. koja vrednost da bude krajnja odluka. Vrednost 27.14 \$ je previsoka i ne odražava konkurentsku cenu (A_3). S druge strane, vrednost 21.67 \$ je mala i nije u domenu trougaonog broja A_4 iako i on ima uticaja. Jedna od ideja jeste da se nađe srednja vrednost od 27.14 i 21.67:

$$\frac{27.14 + 21.67}{2} = 24.405 \approx 24.4 \text{ \$}$$

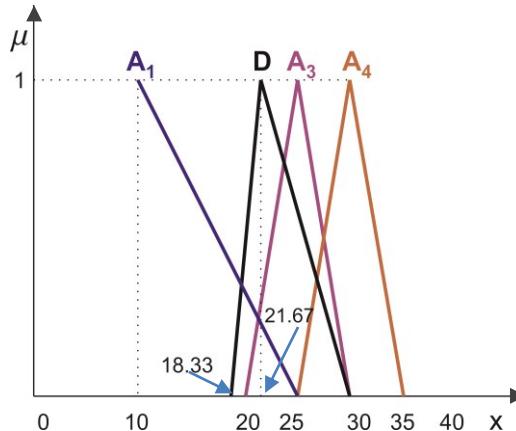
Model 2:

Koristi se sve isto kao u *Modelu 1* iznad, samo se malo menja trougaoni broj A_1 , (umesto 40, sada se uzme vrednost 25) tj.

$$A_1 = (10, 10, 25), \quad A_2 = (20, 25, 30), \quad A_3 = (25, 30, 35)$$

Sada trougaono usrednjavanje (*Definicija 2.7*) daje:

$$\begin{aligned} D = A_{ave} &= \frac{A_1 + A_2 + A_3}{3} = \frac{(10, 10, 25) + (20, 25, 30) + (25, 30, 35)}{3} \\ &= \frac{(55, 65, 90)}{3} = (18.33, 21.67, 30) \end{aligned}$$



Slika 3.14 – Model postavljanja cena sa pravilima $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_3$ i \mathcal{R}_4 sa izmenjenim trougaonim brojem A_1 koji opisuje \mathcal{R}_1

Ovde je takođe maksimizirajuća vrednost $x_{max} = 21.67$.

Da bi se moglo napraviti poređenje, primeniće se u ovom slučaju model donošenja odluke kao presek fazi skupa ciljeva i ograničenja (*Poglavlje 3.1*). Primetno je sa *Slike 3.14* da A_1 i A_4 nemaju presek. U skladu sa modelom preseka dobija se da je fazi skup odluke definisan preko njegove funkcije pripadanja:

$$D \triangleq \mu_D = \min(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_3}(x), \mu_{A_4}(x))$$

I to bi trebao da bude fazi skup (u ovom slučaju to je samo tačka sa koordinatama (25, 0)). Kada se radi sa operacijom minimuma, najmanja vrednost funkcije pripadnosti za svaku x pripada D . Vrednost 25 \$ deluje kao maksimizirajuća odluka, međutim kako je stepen pripadanja za ovu vrednost jednak nuli, zaključuje se da ovaj metod preseka nije dobar u ovom i sličnim slučajevima.

3.2.1 Proces donošenja odluke zasnovan na mišljenjima velikog broja stručnjaka (eng. Multi-Expert Decision Making)

Problemi u realnom svetu su mnogo komplikovani i složeni, pa analiza istih zahteva trud i mišljenje velikog broja stručnjaka. Ova mišljenja se iskazuju rečima na prirodnom ili profesionalnom jeziku. Naravno to se predstavlja i opisuje fazi skupovima i fazi logikom. Nije poželjno da mišljenja različitih stručnjaka budu ista. Najčešće se dešavaju dva slučaja: da su mišljenja vrlo slična ili da su potpuno suprotna, te se moraju kombinovati ili usaglasiti. To se zove agregacija. Agregacija se vrši fazi usrednjavanjem (*poglavlje 2.4*) pa se i ovde primenjuje ideja donošenja odluka zasnovanog na fazi usrednjavanju. To će se najbolje videti kroz dva primera.

Analiza slučaja 3.10 – Investicioni model kada su mišljenja stručnjaka bliska ([2])

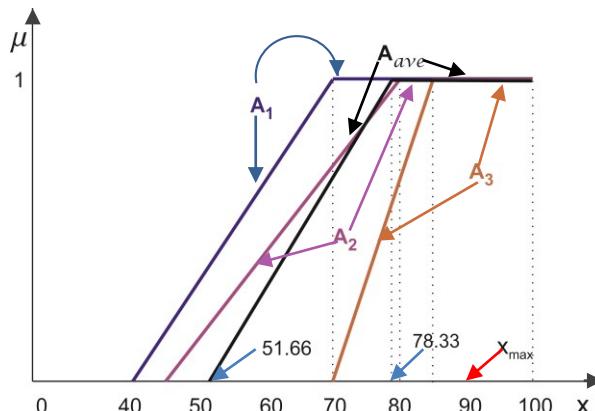
Posmatra se uprošćen, individualni model planiranja investicija koji u zavisnosti od kamatne stope koja *opada* ili *raste*, dovodi do *agresivne* odnosno *konzervativne politike*. *Agresivno* i *konzervativno* su jezičke vrednosti, pa se s toga posmatraju u fazi konceptu. Finansijski stručnjaci koji se bave ovim investicionim modelom, se slažu da agresivno investiranje opišu levim trapezoidnim brojevima nad univerzalnim skupom koji čini interval $[0, 100]$, a konzervativnu desnim trapezoidnim brojevima nad $[-100, 0]$. Sada vrednosti iz unije ova dva intervala $[-100, 100]$ imaju određena značenja stručnjacima. Recimo 50 i -50 mogu biti indikatori za *umereno agresivnu* i *umereno skromnu* investiciju, dok su 70 i -70 već *agresivna* i *skromna* investicija.

Prepostavka je da kamatna stopa opada, i tri stručnjaka S_1, S_2 i S_3 , dele mišljenje da bi investiciona politika trebala biti agresivnija i to predstavljaju svojim levim trapezoidnim brojevima:

$$A_1 = (40, 70, 100, 100), \quad A_2 = (45, 80, 100, 100), \quad A_3 = (70, 85, 100, 100)$$

Sada sledi usrednjavanje ovih mišljenja, a pošto su od iste važnosti, koristi se *Definicija 2.9*:

$$\begin{aligned} A_{ave} &= \frac{A_1 + A_2 + A_3}{3} = \frac{(40, 70, 100, 100) + (45, 80, 100, 100) + (70, 85, 100, 100)}{3} \\ &= \frac{(155, 235, 300, 300)}{3} = (51.66, 78.33, 100, 100) \end{aligned}$$



Slika 3.15 – Planiranje investicione politike (mišljenja stručnjaka su slična)

Zatim je potrebno izvršiti defazifikaciju trapezoidnog broja \mathbf{A}_{ave} :

$$x_{max} = \frac{78.33 + 100}{2} = 89.165 \approx 90$$

U skladu sa intervalom nad kojim se model posmatra, ova vrednost se može interpretirati kao *veoma agresivna* investiciona politika.

Sada se pretpostavlja da su mišljenja pomenuta tri stručnjaka različito rangirana (jedno je značajnije od drugog) na skali od 1 do 10, pa tako sledi da je $\lambda_1 = 6$ rang (reiting) stručnjaka S_1 ; $\lambda_2 = 10$ stručnjaka S_2 ; a $\lambda_3 = 4$ stručnjaka S_3 . Zatim je potrebno izračunati relativnu značajnost svakog stručnjaka ponaosob tj. odrediti težine (pondere) $w_i, i = 1, 2, 3$ koristeći $w_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$ (poglavlje 2.1):

$$w_1 = \frac{6}{6 + 10 + 4} = 0.3, \quad w_2 = \frac{10}{6 + 10 + 4} = 0.5, \quad w_3 = \frac{4}{6 + 10 + 4} = 0.2$$

Koristeći *Definiciju 2.10* dobija ponderisano trapezoidno usrednjavanje:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ave}^w &= 0.3 \cdot \mathbf{A}_1 + 0.5 \cdot \mathbf{A}_2 + 0.2 \cdot \mathbf{A}_3 \\ &= 0.3 \cdot (40, 70, 100, 100) + 0.5 \cdot (45, 80, 100, 100) + 0.2 \cdot (70, 85, 100, 100) \\ &= (12, 21, 30, 30) + (22.5, 40, 50, 50) + (14, 17, 20, 20) = (48.5, 78, 100, 100) \end{aligned}$$

Defazifikacijom se dobija:

$$\frac{78 + 100}{2} = 89$$

Ovde sa takođe predlaže *veoma agresivna* investiciona politika.

Može se primetiti da su male razlike ne samo u maksimalnim defazifikovanim vrednostima (89.165 i 89) nego i inače među trougaonim brojevima \mathbf{A}_{ave} i \mathbf{A}_{ave}^w . Prema tome, različito rangiranje stručnjaka u ovom slučaju nije imalo značaja na krajnji zaključak, a to je zbog toga što su mišljenja stručnjaka bliska kao i zbog činjenice da je stručnjak S_2 čije mišljenje je najbliže trougaonom broju \mathbf{A}_{ave} , najbolje rangiran ($r_2 = 10$).

Analiza slučaja 3.11 – Investicioni model kada su mišljenja stručnjaka suprotna ([2])

Posmatra se model koji je objašnjen u *Analizi slučaja 3.10* samo što su ovde mišljenja stručnjaka oporečena. To znači da ako dođe do pada kamatne stope, neki stručnjaci predlažu *agresivnu* politiku, dok drugi predlažu *konzervativnu* politiku investiranja, a isto tako neki stručnjaci mogu da predlažu politiku koja je negde između *agresivne* i *konzervativne*.

Pretpostavlja se da su mišljenja podjednako bitna i data sledećim trapezoidnim odnosno trougaonim brojevima:

$$\mathbf{A}_1 = (-100, -100, -50, -30), \quad \mathbf{A}_2 = (-10, 10, 30), \quad \mathbf{A}_3 = (60, 90, 100, 100)$$

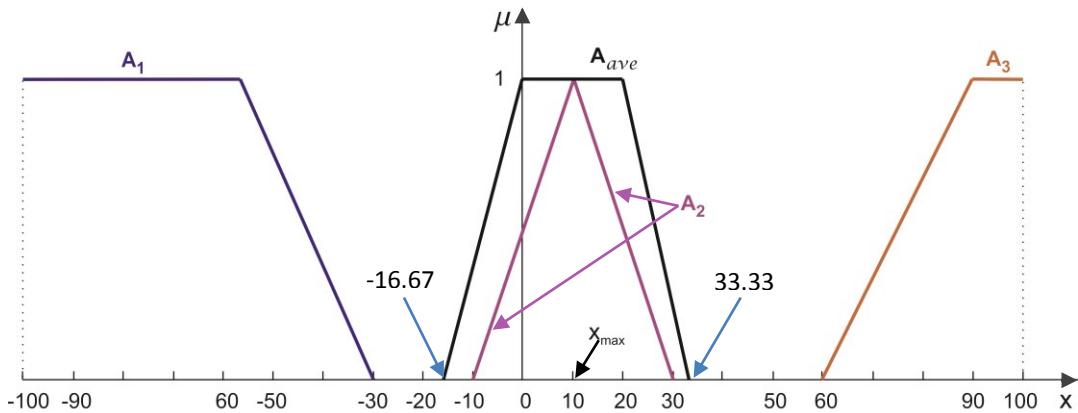
Vidi se da je A_1 desni trapezoidni broj i on opisuje *konzervativnu* politiku, A_2 je trougaoni broj koji se može interpretirati kao *malo agresivna* politika i A_3 je levi trapezoidni broj koji opisuje *agresivnu* politiku. Zbog toga, da bi se moglo izvršiti usrednjavanje, potrebno je predstaviti trougaoni broj kao trapezoidni:

$$A_2 = (-10, 10, 30) = (-10, 10, 10, 30)$$

Pa koristeći *Definiciju 2.9* dobija se:

$$\begin{aligned} A_{ave} &= \frac{A_1 + A_2 + A_3}{3} \\ &= \frac{(-100, -100, -50, -30) + (-10, 10, 10, 30) + (60, 90, 100, 100)}{3} \\ &= \frac{(-50, 0, 60, 100)}{3} = (-16.67, 0, 20, 33.33) \end{aligned}$$

i onda je maksimizirajuća vrednost: $\frac{0+20}{2} = 10$. Pošto je ovo pozitivna vrednost (sa skale za *agresivnu* politiku), predlog je agresivna politika ali veoma oprezna jer je vrednost ipak mala.



**Slika 3.16 – Planiranje investicione politike
(mišljena stručnjaka su oporečena)**

Sada se posmatra isti slučaj ali sa različitom preferencijom mišljenja stručnjaka: S_1 će biti rangiran sa $\lambda_1 = 4$, S_2 sa $\lambda_2 = 6$ i S_3 sa $\lambda_3 = 10$, pa su težine $w_i, i = 1, 2, 3$ (*poglavlje 2.I*), date sa:

$$w_1 = \frac{4}{4 + 6 + 10} = 0.2, \quad w_2 = \frac{6}{4 + 6 + 10} = 0.3, \quad w_3 = \frac{10}{4 + 6 + 10} = 0.5$$

Definicija 2.10 daje:

$$\begin{aligned} A_{ave}^w &= 0.2 \cdot A_1 + 0.3 \cdot A_2 + 0.5 \cdot A_3 \\ &= 0.2 \cdot (-100, -100, -50, -30) + 0.3 \cdot (-10, 10, 10, 30) + 0.5 \cdot (60, 90, 100, 100) \\ &= (-20, -20, -10, -6) + (-3, 3, 3, 9) + (30, 45, 50, 50) = (7, 28, 43, 53) \end{aligned}$$

sa maksimizirajućom vrednosti: $\frac{28+43}{2} = 35.5$ što takođe ukazuje da politika treba da bude oprezno agresivna.

Ima određene razlike među brojevima A_{ave} i A_{ave}^w kao i među vrednostima 10 i 35.5, a do toga dovodi favorizovanje stručnjaka S_3 koji preferira agresivnu politiku investiranja.

Ovde je kao što je na početku rečeno, predstavljen uprošćen model. U realnom slučaju bi trebalo uzeti u obzir još dosta činilaca kao što su: kretanja na berzi, trgovinski bilans, stopa nezaposlenosti itd.

4. Donošenje odluka u fazi okruženju preko preseka fazi skupa ciljeva i fazi skupa ograničenja, koje se zasniva na t-normi proizvoda: T_P

S obzirom na to da se u *poglavlju 3.1* kada se govori o donošenju odluka putem preseka fazi skupa ciljeva i fazi skupa ograničenja, sve zasniva na *trougaonoj normi minimuma*, u ovoj glavi će se originalno dati proširenje nekih od primera iz *poglavlja 3.1* na *trougaonu normu proizvoda* koja je definisana na sledeći način (*poglavlje 1.3*):

$$T_P(x, y) = x \cdot y$$

Naime, u *poglavlju 1.3.1* data je *Definicija 1.26* u kojoj je definisan T – *presek* fazi skupova \mathcal{A} i \mathcal{B} , kao:

$$\mu_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(x) = T(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x)), \text{ za svako } x \in U.$$

Donošenje odluke preko preseka fazi skupova ciljeva i ograničenja u *glavi 3* zasnivalo se na trougaonoj normi minimuma, odnosno:

$$\mu_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(x) = \min(\mu_{\mathcal{A}}(x), \mu_{\mathcal{B}}(x))$$

Sada će se koristiti t-norma proizvoda, pa će funkcija pripadnosti preseka biti:

$$\mu_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(x) = \mu_{\mathcal{A}}(x) \cdot \mu_{\mathcal{B}}(x)$$

Ukoliko se to primeni na fazi skup odluke i ciljeva, u skladu sa *Definicijom 3.1* dobija se:

$$\mathcal{D} = \mathcal{G} \cap \mathcal{C} = \{(x, \mu_{\mathcal{D}}(x)) | x \in [d_1, d_2], \mu_{\mathcal{D}}(x) \in [0, h \leq 1]\}$$

gde je funkcija pripadnosti je sada:

$$\mu_{\mathcal{D}}(x) = \mu_{\mathcal{G}}(x) \cdot \mu_{\mathcal{C}}(x), x \in A_{alt}$$

Primer 4.1 Posmatra se *Primer 3.1* u kojem su dati skup alternativa, fazi skupovi cilja i ograničenja sa:

$$A_{alt} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\mathcal{G} = \{(1,0), (2,0.2), (3,0.4), (4,0.6), (5,0.8), (6,1)\}$$

$$\mathcal{C} = \{(1,1), (2,0.9), (3,0.7), (4,0.6), (5,0.2), (6,0)\}$$

Pri korišćenju T_M dobilo se:

$$\mathcal{D}_{T_M} = \{(1, 0), (2, 0.2), (3, 0.4), (4, 0.6), (5, 0.2), (6, 0)\}$$

(urađeno u *Primeru 3.1*).

Sada, pri korišćenju T_P , sledi:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{T_P} &= \{(1, 0 \cdot 1), (2, 0.2 \cdot 0.9), (3, 0.4 \cdot 0.7), (4, 0.6 \cdot 0.6), (5, 0.8 \cdot 0.2), (6, 1 \cdot 0)\} \\ &= \{(1, 0), (2, 0.18), (3, 0.28), (4, 0.36), (5, 0.16), (6, 0)\} \end{aligned}$$

U oba slučaja se zaključuje da je element koji ima najveći stepen pripadnosti element **4** iz skupa alternativa, zatim sledi element **3**, pa. Kod t-norme minimuma **2** ima isti stepen pripadnosti kao **5** dok kod t-norme proizvoda **5** ima manji stepen pripadnosti. U oba slučaja kao elementi koji imaju najmanji stepen pripadnosti, javljaju se **1** i **6**. To se može

predstaviti recimo preferencijom \prec , pa se tako za preferenciju kada se koristi T_M dobija sledeći redosled:

$$4 > 3 > 2 = 5 > 1 = 6$$

Dok T_P daje:

$$4 > 3 > 2 > 5 > 1 = 6$$

Primer 4.2 Posmatra se *Analiza slučaja 3.2* u kojoj je dat problem politike zapošljavanja. Alternativni skup je činilo 5 kandidata $A_{alt} = \{x_1, x_2, \dots, x_5\}$. Ciljevi i ograničenja bili su:

$$\mathcal{G}_1 = \{(x_1, 0.8), (x_2, 0.6), (x_3, 0.3), (x_4, 0.7), (x_5, 0.5)\} - \text{iskustvo}$$

$$\mathcal{G}_2 = \{(x_1, 0.7), (x_2, 0.6), (x_3, 0.8), (x_4, 0.2), (x_5, 0.3)\} - \text{poznavanje računara}$$

$$\mathcal{G}_3 = \{(x_1, 0.7), (x_2, 0.8), (x_3, 0.5), (x_4, 0.5), (x_5, 0.4)\} - \text{mala starost}$$

$$\mathcal{C} = \{(x_1, 0.4), (x_2, 0.7), (x_3, 0.6), (x_4, 0.8), (x_5, 0.9)\} - \text{skromna plata}$$

U *Analizi 3.2* dobija se:

$$D_{T_M} = \{(x_1, 0.4), (x_2, 0.6), (x_3, 0.3), (x_4, 0.2), (x_5, 0.3)\}$$

A kada se primeni trougaona norma preseka sledi:

$$\begin{aligned} D_{T_P} &= \{(x_1, 0.8 \cdot 0.7 \cdot 0.7 \cdot 0.4), (x_2, 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.8 \cdot 0.7), (x_3, 0.3 \cdot 0.8 \cdot 0.5 \cdot 0.6), \\ &\quad (x_4, 0.7 \cdot 0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.8), (x_5, 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.4 \cdot 0.9)\} \\ &= \{(x_1, 0.1568), (x_2, 0.2016), (x_3, 0.072), (x_4, 0.056), (x_5, 0.054)\} \end{aligned}$$

Mogu se poređati po preferenciji da bi se videle sličnosti ili razlike u redosledu odabralih kandidata:

$$T_M \text{ daje } x_2 > x_1 > x_3 = x_5 > x_4$$

$$T_P \text{ daje } x_2 > x_1 > x_3 > x_4 > x_5$$

Zaključuje se da u oba slučaja, kandidat koji najbolje zadovoljava ciljeve i ograničenje, jeste kandidat x_2 . Sledеći prema stepenu pripadnosti je x_1 , pa x_3 . Kad se posmatra t-norma *minimuma* x_4 ima najmanji stepen pripadnosti, dok je stepen pripadnosti x_5 isti kao i za kandidata x_3 , a kad se posmatra t-norma *proizvoda*, x_5 ima najmanji stepen pripadnosti mada je pripadnost kandidata x_5 skupu odluke, u odnosu na x_4 manji za svega 0.002.

Primer 4.3 Sada se posmatra *Analiza slučaja 3.3* u kojoj je bilo reči o redosledu odabira izgradnje objekata i postojala su tri cilja i tri ograničenja:

$$\mathcal{G}_1 \triangleq \text{ne mnogo bitna zgrada} = \{(z_1, 0), (z_2, 0.4), (z_3, 0.3), (z_4, 0.8)\}$$

$$\mathcal{G}_2 \triangleq \text{veoma profitabilna zgrada} = \{(z_1, 0.5), (z_2, 0.6), (z_3, 0.7), (z_4, 0.3)\}$$

$$\mathcal{G}_3 \triangleq \text{dugo vreme izgradnje} = \{(z_1, 0.8), (z_2, 0.7), (z_3, 1), (z_4, 0.2)\}$$

$$\mathcal{C}_1 \triangleq \text{veoma bitna zgrada} = \{(z_1, 1), (z_2, 0.6), (z_3, 0.7), (z_4, 0.2)\}$$

$$\mathcal{C}_2 \triangleq \text{kratko vreme izgradnje} = \{(z_1, 0.3), (z_2, 0.4), (z_3, 0.5), (z_4, 0.7)\}$$

$$\mathcal{C}_3 \triangleq \text{razumni troškovi} = \{(z_1, 0.3), (z_2, 0.4), (z_3, 0.7), (z_4, 0.2)\}$$

Odluka je u skladu sa prethodnim formulama koje koriste t-normu minimuma, data sa:

$$\mathcal{D}_{T_M} = \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 \cap \mathcal{G}_3 \cap \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 = \{(z_1, 0), (z_2, 0.4), (z_3, 0.3), (z_4, 0.2)\}$$

Ukoliko se iskoristi t-norma proizvoda, odluka postaje:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{T_P} &= \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 \cap \mathcal{G}_3 \cap \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 \\ &= \{(z_1, 0 \cdot 0.5 \cdot 0.8 \cdot 1 \cdot 0.3 \cdot 0.3), (z_2, 0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.4), \\ &\quad (z_3, 0.3 \cdot 0.7 \cdot 1 \cdot 0.7 \cdot 0.5 \cdot 0.7), (z_4, 0.8 \cdot 0.3 \cdot 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.7 \cdot 0.2)\} \\ &= \{(z_1, 0), (z_2, 0.016128), (z_3, 0.05145), (z_4, 0.001344)\}\end{aligned}$$

Ako se predstavi preferencijom, T_M daje $z_2 > z_3 > z_4 > z_1$, a T_P daje $z_3 > z_2 > z_4 > z_1$. U ovom slučaju za razliku od prethodna dva, različite zgrade se preferiraju da budu prve izgrađene, u zavisnosti od toga na čemu se zasniva operacija preseka fazi skupova ciljeva i ograničenja.

Primer 4.4 Koristi se *Analiza slučaja 3.4* u kojoj se posmatra osoba kojoj su posao ponudile tri firme i one čine skup $A_{alt} = \{f_1, f_2, f_3\}$. U ovom primeru se desilo da cilj i ograničenja nisu bili u osnovi definisani nad istim skupom (u samoj analizi je prikazano kako se to prevazilazi), a ovde će se iskoristiti već definisani krajnji fazi skupovi iz *Analize slučaja 3.4*:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1 &= \{(f_1, 0.5), (f_2, 0.7), (f_3, 0.8)\} - \text{interesantan posao} \\ \mathcal{C}_2 &= \{(f_1, 0.3), (f_2, 0.8), (f_3, 1)\} - \text{mala razdaljina od kuće do posla} \\ \mathcal{C}_3 &= \{(f_1, 0.3), (f_2, 0.7), (f_3, 0.5)\} - \text{firma koja ima budućnost} \\ \mathcal{G}_{alt} &= \{(f_1, 0.75), (f_2, 0.5), (f_3, 0.25)\} - \text{visoka plata}\end{aligned}$$

Odluka je bila:

$$\mathcal{D}_{T_M} = \mathcal{G}_{alt} \cap \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 = \{(f_1, 0.3), (f_2, 0.5), (f_3, 0.25)\}$$

Sa t-normom proizvoda se dobija:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{T_P} &= \mathcal{G}_{alt} \cap \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 \\ &= \{(f_1, 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.75), (f_2, 0.7 \cdot 0.8 \cdot 0.7 \cdot 0.5), (f_3, 0.8 \cdot 1 \cdot 0.5 \cdot 0.25)\} \\ &= \{(f_1, 0.03375), (f_2, 0.196), (f_3, 0.1)\}\end{aligned}$$

Najveću pripadnost skupu \mathcal{D} , u oba slučaja ima druga firma, prema tome ona najbolje ispunjava zahteve i ograničenja budućeg zaposlenog. Pri korišćenju t-norme *minimuma* nju prati firma f_1 , a poslednja je f_3 , dok pri t-normi *proizvodu* druga po redu je f_3 , a poslednja f_1 , mada je razlika u stepenu pripadnosti pri korišćenju proizvoda među firmama f_1 i f_3 mala.

Primer 4.5 U ovom primeru će se analizirati pod lupom trougaone norme proizvoda, situacija data u *Analizi slučaja 3.5 – Procena uspešnosti učenja*. Kada se vrednosti stepena pripadanja upare sa odgovarajućim studentima (u skladu sa funkcijama pripadnosti datim detaljno u *Analizi slučaja 3.5*), dobijaju se sledeći fazi skupovi za odličan uspeh u prirodnim naukama i engleskom jeziku:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_1 &\triangleq \text{Odličan u matematici} = \{(x_1, 0.6), (x_2, 1), (x_3, 1), (x_4, 1), (x_5, 1)\} \\ \mathcal{G}_2 &\triangleq \text{Odličan u fizici} = \{(x_1, 1), (x_2, 0.9), (x_3, 1), (x_4, 1), (x_5, 0.7)\} \\ \mathcal{G}_3 &\triangleq \text{Odličan u hemiji} = \{(x_1, 1), (x_2, 1), (x_3, 1), (x_4, 0.8), (x_5, 1)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_4 &\triangleq \text{Odličan u engleskom jeziku} \\ &= \{(x_1, 0.87), (x_2, 0.67), (x_3, 0.53), (x_4, 0.60), (x_5, 0.93)\}\end{aligned}$$

Odluka zasnovana na primeni t-norma minimuma je:

$$\mathcal{D}_{T_M} = \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 \cap \mathcal{G}_3 \cap \mathcal{G}_4 = \{(x_1, 0.6), (x_2, 0.67), (x_3, 0.53), (x_4, 0.6), (x_5, 0.7)\}$$

A odluka zasnovana na primeni t-norme proizvoda je:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{T_P} &= \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 \cap \mathcal{G}_3 \cap \mathcal{G}_4 \\ &= \{(x_1, 0.6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0.87), (x_2, 1 \cdot 0.9 \cdot 1 \cdot 0.67), (x_3, 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0.53), (x_4, 1 \cdot 1 \cdot 0.8 \cdot 0.6), \\ &\quad (x_5, 1 \cdot 0.7 \cdot 1 \cdot 0.93)\} \\ &= \{(x_1, 0.522), (x_2, 0.603), (x_3, 0.53), (x_4, 0.48), (x_5, 0.651)\}\end{aligned}$$

Sledi da učenik x_5 ima najbolje performanse, ali pošto ima petoro učenika najpreglednije je predstaviti ih preferencijom, pa uporediti:

Za T_M se dobija $x_5 > x_2 > x_1 = x_4 > x_3$, a za T_P $x_5 > x_2 > x_3 > x_1 > x_4$. Učenici x_1 i x_4 pri primeni t-norme *minimuma* imaju iste vrednosti funkcije pripadnosti fazi skupu odluke, dok kod primene t-norme *proizvoda*, nemaju iste vrednosti, ali su veoma bliske. Zanimljivo je da je vrednost stepena pripadanja učenika x_3 ista u oba slučaja, ali da ne zauzima isto mesto po preferenciji. To je zato što su sve ostale vrednosti po predmetima kod njega imale vrednost pripadanja skupu odluke 1, a jedino je iz engleskog jezika vrednost 0.53.

5. Donošenje odluka putem fazi usrednjavanja koje je bazirano na t-normi drastičnog preseka: T_W

Pošto su se operacije korištene u modelima donošenja odluka putem fazi usrednjavanja zasnivale zapravo na t-normi *minimuma* (*poglavlje 3.2*), analiziraće se kako na krajni rezultat, tj. odluku utiče druga t-norma (*poglavlje 1.8*). U skladu sa tim, posmatraće se primeri koji su već analizirani u *poglavlju 3.2* koji se tiču fazi usrednjavanja, a koristiće se sabiranje zasnovano na trougaonoj normi T_W koje je definisano u *Tvrđenju 1.7*. Ova glava, poput prethodne, takođe predstavlja originalni deo rada.

Primer 5.1 – Posmatraće se problem koji je predstavljen u *Analizi slučaja 3.8* sa dividendama. Pretpostavka je da su atraktivna i skromna dividenda date istim trapezoidnim brojevima kao u pomenutoj analizi:

$$\mathbf{G} = (1, 5, 8, 8) \text{ i } \mathbf{C} = (0, 0, 2, 6)$$

Definicija 2.9 za trapezoidno usrednjavanje, kaže:

$$\mathbf{D}_{T_M} = A_{ave}^M = \frac{\mathbf{G} + \mathbf{C}}{2}$$

Ali sad da bi se iskoristilo *Tvrđenja 1.7* potrebno je zapisati ova dva trougaona broja u odgovarajućem L-R obliku (oni jesu u L-R obliku ali se iz trenutnog zapisa ne čita naočigled koliko iznosi udaljenost sa leve odnosno desne strane, tj. α i β). Oblik koji je potreban je:

$$\mathbf{A}_i = \langle l, r, \alpha, \beta \rangle_{L,R}$$

Trenutno je $\mathbf{G} = (1, 5, 8, 8) = (l - \alpha, l, r, r + \beta)$, pa onda sledi:

$$\mathbf{G} = \langle 5, 8, 4, 0 \rangle_{L,R}$$

Isto to se uradi i za $\mathbf{C} = (0, 0, 2, 6) = (l - \alpha, l, r, r + \beta)$, tj.

$$\mathbf{C} = \langle 0, 2, 0, 4 \rangle_{L,R}$$

Sada može da se uradi fazi usrednjavanje u skladu sa tim da je operacija sabiranja data po *Tvrđenju 1.8*:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{T_W} = A_{ave}^W &= \frac{\mathbf{G} \oplus_{T_W} \mathbf{C}}{2} = \frac{\langle 5, 10, \max(4, 0), \max(0, 4) \rangle_{L,R}}{2} = \frac{\langle 5, 10, 4, 4 \rangle_{L,R}}{2} \\ &= \langle 2.5, 5, 2, 2 \rangle_{L,R} \end{aligned}$$

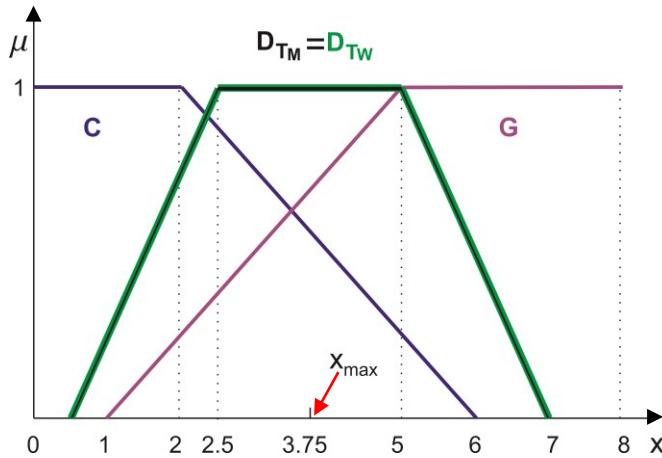
Odnosno u obliku koji je do sada korišćen radi lakšeg predstavljanja na grafiku:

$$\mathbf{D}_{T_W} = (0.5, 2.5, 5, 7)$$

Odluka je identična onoj dobijenoj u *Analizi slučaja 3.8*.

Maksimizirajuća vrednost ostaje ista:

$$x_{\max} = \frac{2.5 + 5}{2} = 3.75$$



Slika 5.1 – Odluka D_{TM} dobijena fazi usrednjavanjem zasnovanim na t-normi minimuma i odluka D_{TW} dobijena fazi usrednjavanjem zasnovanim na t-normi proizvoda ($x_{max} = 3.75$)

Primer 5.2 – Model postavljanja cena

Posmatraće se samo *Model 1* iz *Analize slučaja 3.10*. Pravila $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_3$ i \mathcal{R}_4 opisani su trougaonim brojevima koji se mogu zapisati na sledeći način

$$\mathbf{A}_1 = (10, 10, 40), \quad \mathbf{A}_2 = (20, 25, 30), \quad \mathbf{A}_3 = (25, 30, 35)$$

Pošto su trougaoni brojevi specijalan slučaj trapezoidnih, sledi:

$$\mathbf{A}_1 = (10, 10, 10, 40), \quad \mathbf{A}_2 = (20, 25, 25, 30), \quad \mathbf{A}_3 = (25, 30, 30, 35)$$

A odluka dobijena primenom t-norme minimuma je:

$$D_{TM} = \mathbf{A}_{ave}^M = (18.33, 21.67, 35)$$

Odnosno kad se prilagodi zapis:

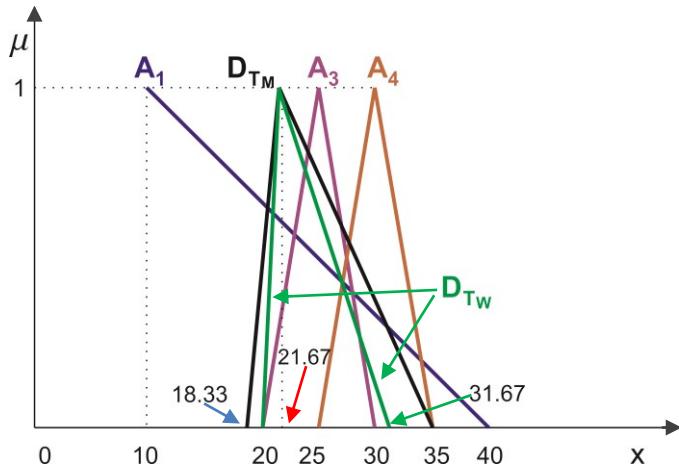
$$\mathbf{A}_1 = \langle 10, 10, 0, 30 \rangle_{L,R}, \quad \mathbf{A}_2 = \langle 25, 25, 5, 5 \rangle_{L,R}, \quad \mathbf{A}_3 = \langle 30, 30, 5, 5 \rangle_{L,R}$$

Sad se može koristiti *Tvrđenje 1.7*, a u skladu sa *Definicijom 2.7* dobija se:

$$\begin{aligned} D_{TW} = \mathbf{A}_{ave}^W &= \frac{\mathbf{A}_1 \oplus_{TW} \mathbf{A}_2 \oplus_{TW} \mathbf{A}_3}{3} = \frac{\langle 10 + 25 + 30, 10 + 25 + 30, 5, 30 \rangle_{L,R}}{3} \\ &= \frac{\langle 65, 65, 5, 30 \rangle_{L,R}}{3} = \langle 21.67, 21.67, 1.67, 10 \rangle_{L,R} \end{aligned}$$

Odnosno:

$$D_{TW} = (20, 21.67, 31.67)$$



Slika 5.2 – Odluka D_{T_M} dobijena fazi usrednjavanjem zasnovanim na t-normi minimuma i odluka D_{T_W} dobijena fazi usrednjavanjem zasnovanim na t-normi proizvoda ($x_{max} = 21.67$)

Maksimizirajuća odluka ostaje ista ali se odstupanja u levu i desnu stranu razlikuju u odnosu na rezultat dobijen u *Analizi slučaja 3.9*, a koji iznosi (18.33, 21.67, 35), naime, fazi skup odluke se suzio, i samim tim bi sve vrednosti iz tog skupa bile tačnije.

Primer 5.3 – Posmatra se investicioni model kada su mišljenja stručnjaka ista (*Analiza slučaja 3.10*)

Prepostavka je da kamatna stopa opada, i tri stručnjaka S_1, S_2 i S_3 , dele mišljenje da bi investiciona politika trebala biti agresivnija i to predstavljaju svojim levim trapezoidnim brojevima:

$$A_1 = (40, 70, 100, 100), \quad A_2 = (45, 80, 100, 100), \quad A_3 = (70, 85, 100, 100)$$

Odluka je u *Analizi slučaja 3.10*:

$$A_{ave}^M = (51.66, 78.33, 100, 100)$$

Sada se prilagodi zapis trapezoidnih brojeva:

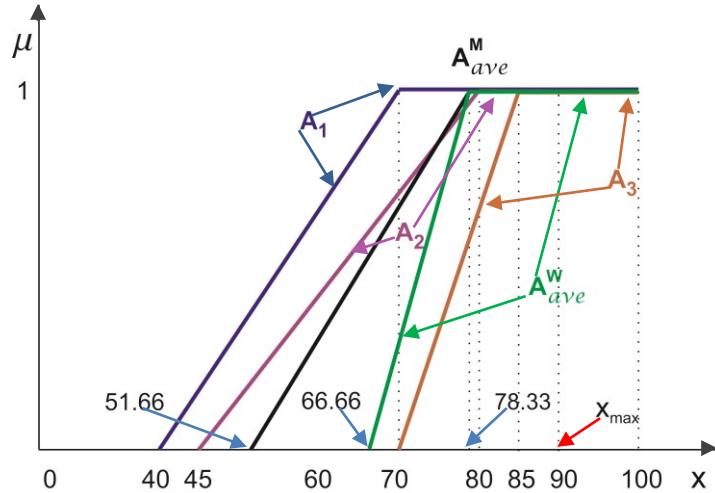
$$A_1 = \langle 70, 100, 30, 0 \rangle_{L,R}, \quad A_2 = \langle 80, 100, 35, 0 \rangle_{L,R}, \quad A_3 = \langle 85, 100, 15, 0 \rangle_{L,R}$$

I sledi usrednjavanje ovih mišljenja, a pošto su od iste važnosti, koristi se *Definicija 2.9* kao i *Tvrđenje 1.7* pa se tako dobija:

$$\begin{aligned} A_{ave}^W &= \frac{A_1 \oplus_{T_W} A_2 \oplus_{T_W} A_3}{3} = \frac{\langle 235, 300, \max(30, 35, 15), \max(0, 0, 0) \rangle_{L,R}}{3} \\ &= \frac{\langle 235, 300, 35, 0 \rangle_{L,R}}{3} = \langle 78.33, 100, 11.67, 0 \rangle_{L,R} \end{aligned}$$

Odnosno:

$$A_{ave}^W = (66.66, 78.33, 100, 100)$$



Slika 5.3 – Odluka D_{T_M} dobijena fazi usrednjavanjem zasnovanim na t-normi minimuma i odluka D_{T_W} dobijena fazi usrednjavanjem zasnovanim na t-normi proizvoda ($x_{max} = 90$)

Prema tome, kao i u prethodnom primeru, vidi se da je došlo do male promene izgleda odluke, ali je maksimizirajuća vrednost ostala ista.

Zaključak

U ovom radu, dat je koncept donošenja odluke koji se zasniva na fazi okruženju. S obzirom na to da je odlučivanje težak proces, jer se zasniva često na nepotpunim i nepreciznim informacijama koje su još i subjektivne, jedan od mogućih pristupa koji dozvoljava modelovanje neodređenosti je pristup baziran na fazi skupovima. Na taj način se problemi odlučivanja u različitim disciplinama, pa čak i oni bazirani na jezičkim promenljivama, mogu rešiti uz pomoć matematičkog alata.

Osnovna karakteristika fazi skupa, pojma na kojem je baziran rad u fazi okruženju, je mogućnost da element pripada skupu do određene mere, tj. fazi skup je dat funkcijom pripadnosti koja može uzeti vrednosti iz celog zatvorenog jediničnog intervala. To je uopštenje u odnosu na klasičnu logiku i skupove u kojima za svaki element važi da ili pripada nekom skupu ili ne (karakteristična funkcija uzima samo dve vrednosti: nulu ili jedinicu). Tradicionalno modeliranje složenih sistema u bilo kojoj oblasti često ne objašnjava dobro realnu situaciju upravo zbog ograničavajućeg „crno-belog“ pristupa, dok fazi skupovi i fazi logika daju verodostojnije informacije u savremenim problemima, iako se baziraju na subjektivnom mišljenju stručnjaka.

Prilikom donošenja odluke u fazi okruženju definisani su: fazi skupovi ciljeva koje treba postići i fazi skupovi ograničenja u kojima treba ostati. Svaki fazi skup ima svoju karakterističnu funkciju, tj. funkciju pripadnosti koja zavisi od elemenata „običnog“ skupa alternativa, ali uzima vrednosti iz celog intervala $[0,1]$. Odluka, pri ovako definisanim skupovima, jeste fazi skup koji se dobija u preseku fazi skupova ciljeva i fazi skupova ograničenja. Kako je fazi skup teško primenljiv u tom obliku, neophodno je izvršiti defazifikaciju rezultata, odnosno, bira se element alternativnog skupa koji ima najveću funkciju pripadnosti u fazi skupu odluke. Međutim u nekim situacijama, ovaj princip donošenja odluke nije zadovoljavajući, te se onda mogu primeniti i drugi principi od kojih je ovde detaljno objašnjen princip donošenja odluke koji se bazira na fazi usrednjavanju, gde sigurno svi aspekti problema daju svoj uticaj konačnoj odluci.

Kako su u radu su oba principa donošenja odluke bazirana na primeni $T_M(x,y) = \min(x,y)$, poslednje dve glave kroz primere posmatraju kako druge trougaone norme utiču na fazi skup, a samim tim i na krajnju odluku. Za princip donošenja odluke kao preseka fazi skupa ciljeva i ograničenja, razmotren je uticaj trougaone norme proizvoda $T_P(x,y) = x \cdot y$, dok se u poslednjoj glavi posmatra uticaj najslabije trougaone norme (trougaone norme drastičnog preseka) T_W uz primenu *Tvrđenja 1.7* na princip donošenja odluke koji je zasnovan na fazi usrednjavanju.

Sama tema rada je zanimljiva i ima veliku primenu u praksi, pre svega u poslovnom okruženju. Predstavljeni materijal je dobar za čitaoca koji želi da stekne osnovna znanja o fazi okruženju i fazi logici, kao i njihovoj primeni u donošenju odluka kada su u pitanju lingvističke promenljive i neodređenost (rasplinutost).

Literatura

- [1] Bellman R. E., Zadeh L. A.; *Decision-making in a fuzzy environment*, National Aeronautics and Space administration, Vol. 17, pp B141-B164, 1970.
- [2] Bojadziev G., Bojadziev M.; *Fuzzy logic for business, finance and management*, World Scientific 1999.
- [3] Bojadziev G., Bojadziev M.; *Fuzzy sets, Fuzzy logic, Applications*, World Scientific 1995.
- [4] De Baets Bernard, Marková – Stupňanová Andrea; *Analytical expressions for the addition of fuzzy intervals*, Fuzzy sets and systems, Vol. 91, pp 203-213, 1997.
- [5] Drucker P. F.; *Managing in a Time of Great Change*, New York, Truman Talley Books/Dutton, 1995.
- [6] Fogarty D. W., Hoffmann T. R.; *Production and inventory management*, South-Western Pub. Co. (Cincinnati), 1983.
- [7] Fullér R.; *Fuzzy reasoning and fuzzy optimization*, Turku Centre for Computer Science, Abo, 1998.
- [8] Haans M.; *Applied fuzzy arithmetic – an introduction with engineering applications*, Springer, 2005
- [9] Kaufmann A., Gupta M. M.; *Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science*, North-Holland, 1988.
- [10] Klement E. P., Mesiar R., Pap E.; *Triangular norms*, Kluwer Academic Publisher, 2000.
- [11] Lootsma F.A.; *Fuzzy logic for planning and decision making*, Springer, 1997.
- [12] Pap E.; *Fazi mere i njihova primena*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno matematički fakultet Novi Sad, 1999.
- [13] Schwizer B., Scalar A.; *Associative functions and abstract semigroups*, Publ. Math. Debrecen, Vol. 10, pp 69-81, 1963.
- [14] Torra V., Narukawa.; *Modeling Decisions: Information Fusion and Aggregation Operators*, Springer, 2007.
- [15] Zadeh L. A., Kacprzyk J.; *Fuzzy logic for the management of uncertainty*, Wiley, 1992.
- [16] Zadeh L. A.; *Fuzzy Sets, Fuzzy Logic and Fuzzy Systems: Selected Papers*, World Scientific, 1996.
- [17] Zimmermann H. -J.; *Fuzzy set theory and its applications*, Kluwer Academic Publisher, 2001.

Biografija



Živanović Katarina je rođena u Vrbasu 28.11.1988. U Srbobranu je završila i osnovnu školu "Jovan Jovanović Zmaj" 2003. godine i gimnaziju "Svetozar Miletić" (smer-opšti) 2007. kao nosilac Vukove diplome. Jula 2007. se upisala na osnovne akademske studije matematike finansija na departmanu za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu. Sve obavezne predviđene ispite položila je zaključno sa junskim ispitnim rokom 2011. godine, kada je odbranila i završni rad. Iste godine se upisala na master studije primenjene matematike, modul – matematika finansija i sve ispite predviđene planom i programom je položila zaključno sa oktobarskim rokom 2012. godine i time stekla uslov za odbranu master rada.

Ključna dokumentacija

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Diplomski master rad

VR

Autor: Katarina Živanović

AU

Mentor: Prof. dr Ivana Štajner-Papuga

ME

Naslov rada: Koncept donošenja odluka u fazi okruženju

NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: srpski / engleski

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2013.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, PMF, Trg Dositeja Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (5/81/17/13/46)

FOR (broj poglavља/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Primjenjena matematika

ND

Predmetne odrednice: fazi skup, fazi broj, princip proširenja, fazi usrednjavanje

Ključne reči: (**PO**, **UDK**)

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

ČS

Važna napomena: nema

VN

Izvod (**IZ**):

U ovom radu je dat opis principa donošenja odluka u fazi okruženju. Pre svega objašnjen je pristup u kojem se odluka dobija kao presek fazi skupa ciljeva i ograničenja, i pristup po kojem se do odluke dolazi preko fazi usrednjavanja. Na početku, radi uspešnog razumevanja rada u celini, objašnjeni su osnovni pojmovi fazi skupovi, fazi brojevi i fazi logika, a posebna pažnja je posvećena trougaonim fazi brojevima kao i trougaonim normama. Kako bi se sve što jasnije približilo čitaocu, dano je dosta primera koji su iz realnog života, na koje su primenjeni pomenuti principi.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 10.5.2012.

DP

Datum odbrane: decembar 2013.

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Zagorka Lozanov-Crvenković, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu,

Član: dr Tatjana Grbić, docent na Fakultetu tehničkih nauka u Novom sadu,

Mentor: dr Ivana Štajner-Papuga, vanredni profesor na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu.

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE KEY
WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification umber:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master's thesis

CC

Author: Katarina Živanović

AU

Mentor: prof. dr Ivana Štajner-Papuga

ME

Title: Decision Making in a Fuzzy Environment

TI

Language of text: Serbian (Latin)

LT

Language of abstract: s/en

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2013.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad

PP

Physical description: (5/81/17/13/46)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Applied mathematics

SD

Subject key words: fuzzy set, fuzzy number, the extension principle, fuzzy averaging

SKW

Holding data: In the Library of Department of Mathematics and Informatics

HD

Note:

N

Abstract (**AB**):

This paper presents description of the Decision Making process in a Fuzzy environment. Above all, the principle of Decision making by

Intersection of Fuzzy Goals and Constraints, and principle of Fuzzy Averaging for Decision Making are described. At the beginning, the basic concept of fuzzy sets, fuzzy numbers and fuzzy logic are explained, so that the paper can be understand, and special attention is directed to triangular fuzzy numbers and triangular norms. To make it clearer to the reader, a lot of examples from real life, that have been applied the mentioned principles, are given.

Accepted by the Scientific Board on: May 10th, 2011

AS

Defended: December, 2013

DE

Thesis defend board:

DB

President: PhD Zagorka Lozanov-Crvenković, Full Professor, Faculty of Natural Sciences,

Member: PhD Tatjana Grbić, Assistant Professor, Faculty of Technical Sciences,

Mentor: PhD Ivana Štajner-Papuga, Associate Professor, Faculty of Natural Sciences.