UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Kamelija Ivetić

# Vodeni talasi i talasna jednačina

-master rad-

Novi Sad, 2013.

# Sadržaj


**Predgovor** **3**

**1 Talasna jednačina** **6**
1.1 Rešavanje talasne jednačine . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10
1.2 Dalamberova formula . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 22
1.3 Energetske metode . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23
1.3.1 Domen zavisnosti . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23
1.3.2 Energetski metod i Domen zavisnosti . . . . . . . . . . . 23
1.3.3 Talasi sa izvorom . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26
1.4 Reflekcioni talasi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28
1.4.1 Talasna jednačina na poluosi . . . . . . . . . . . . . . . . 28

**2 Vodeni talasi** **31**
2.1 Talasno kretanje . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31
2.1.1 Uopštenje jednačine talasa . . . . . . . . . . . . . . . . . 34
2.2 Jednačina talasa . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38
2.3 Rešavanje fundamentalne jednačine . . . . . . . . . . . . . . . . 42
2.4 Fizičko tumačenje rešenja . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 45
2.5 Putujući talasi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49
2.5.1 Putujući talasi u dubokoj vodi . . . . . . . . . . . . . . . . 49
2.6 Talasi na vodi konačne dubine : disperzija i nelinearnost . . . . . 53

**Zaključak** **55**

**Literatura** **57**

# Predgovor

*Tema ovog master rada je Vodeni talasi i talasna jednačina. Talasna jednačina je jedna veoma važna parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda za opis talasa. Oni se javljaju u fizici kao zvučni, svetlosni i vodeni talasi. Talasi se javljaju u oblastima fizike kao što je akustika, dinamika fluida i elektromagnetika. Sa istoriskog pogleda talasne jednačine su se počele proučavati sa problemom vibrirajuće strune kod muzičkih instrumenata i sa tim problemom su se počeli baviti Dalamber, Ojler, Bernuli i Langranž. Tipičan predstavnik hiperboličnih parcijalnih diferencijalnih jednačina je talasna jednačina.*

*Stojeći na plaži i posmatrajući talase vidi se da se oni kotrljaju u pauzama i moglo bi se reći da se talasi kreću ka plaži. Ali ne postoji voda koja se gomila na plaži. Kada gledamo kako se otpad kreće možemo videti da se kreće po vrhovima talasa i da se pomera isto kako se i talas pomera.*

*Rad se sastoji iz dva poglavlja. Na početku je opisano uopsteno šta će se raditi. Na krajevima su prikazane neke teoreme i primeri.*

*U prvom delu rada smo izveli kako se dolazi do talasne jednačine kada se posmatra žica preko Njutnovog zakona. Zatim smo opisali kako se rešavaju talasne jednačine, pa smo izveli Dalamberovu formulu, objasnili energetski metod i objasnili reflekcione talase.*

*U drugom delu rada smo opisali šta je talasno kretanje i opisali glavne pojmove kao što su: oscilovanje, talasni front, period talasa, talasna dužina. Zatim smo opisali jednačinu talasa, opisano je i šta se dešava kada se posmatra voda u kanalu pod uticajem trenja i kada nema uticaja trenja iz toga smo izveli fundamentalnu jednačinu pa smo opisali rešenja fundamentalne jednačine i dali smo fizičko tumačenje rešenja. Zatim smo opisali putujuće talase.*

*Najveću zahvalnost za izradu master rada i odabir ovako izazovne teme dugujem svom mentoru- dr Marku Nedeljkovu. Hvala mu na izdvojenom vremenu, kao i na korisnim sugestijama i primedbama bez kojih rad ne bi primio sadašnji oblik. Takođe, želela bih da se zahvalim i prof. dr Nataši Krejić i dr Sanji Konjik, članovima komisije za odbranu ovog master rada.*

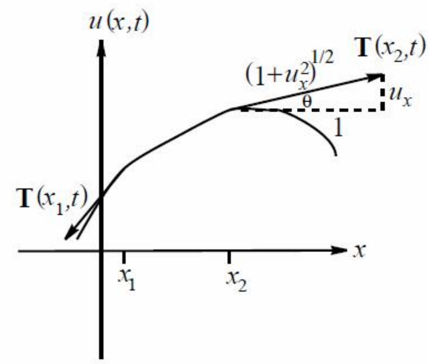
*Posebnu zahvalnost dugujem svojim roditeljima Marku i Ljiljani, braći Iliji i Dušanu i prijateljima. Hvala im na ukazanom poverenju, razumevanju i bezuslovnoj podršci koju su mi pružali tokom celokupnog školovanja.*

*Novi Sad, septembar 2013. godine* *Kamelija Ivetiić*

# Glava 1

# Talasna jednačina

Posmatrajući homogenu žicu dužine $l$ i gustine $\rho = \rho(x)$. Prepostavimo da se žica kreće poprečnim pravcem ali ne i uzdužnim pravcem. Neka $u(x,t)$ označava pomeranje žice iz ravnotežnog položaja u trenutku $t$ i poziciji $x$. Dakle nagib žice u trenutku $t$ i poziciji $x$ dat je sa $u_x(x,t)$. Neka je $T(x,t)$ tangentna sila žice u vremenu $t$ i poziciji $x$.




Slika 1.1: *Slika 1*

Posmatrajući deo žice između dve tačke $x_1$ i $x_2$. Sila koja deluje na tetivu u uzdužnom pravcu ($x$) u oznaci $F_1$ između tačaka $x_1$ i $x_2$ data je sa:

$$
\begin{aligned}
F_1|_{x_1}^{x_2} &= T(x,t)\cos\theta|_{x_1}^{x_2} \\
&= T(x,t)\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}}\Bigg|_{x_1}^{x_2} \\
&= T(x_2,t)\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2(x_2,t)}} - T(x_1,t)\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2(x_1,t)}}.
\end{aligned}
$$

Ali po pretpostavci žica se ne kreće po uzdužnom pravcu pa je zbog toga ubrzanje u uzdužnom pravcu jednako nuli. Ako iskoristimo Njutnov zakon $F = ma$ onda dobijamo da je:

$$
F_1(x,t)|_{x_1}^{x_2} = T(x_2,t)\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2(x_2,t)}} - T(x_1,t)\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2(x_1,t)}} = 0 \quad (1.1)
$$

Ako posmatramo poprečni presek sila koja deluje na tetivu između tačaka $x_1$ i $x_2$ u trenutku $t$ u oznaci $F_2$ data je sa:

$$
\begin{aligned}
F_2|_{x_1}^{x_2} &= T(x,t)\sin\theta|_{x_1}^{x_2} \\
&= T(x,t)\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\Bigg|_{x_1}^{x_2} \\
&= T(x_2,t)\frac{u_x(x_2,t)}{\sqrt{1+u_x^2(x_2,t)}} - T(x_1,t)\frac{u_x(x_1,t)}{\sqrt{1+u_x^2(x_1,t)}}.
\end{aligned}
$$

Ponovo na osnovu pretpostavke da su sva pomeranja žice u poprečnom pravcu čista tada je na osnovu Njutnovog zakona $F = ma$ podrazumeva $F_2(x,t) = ma_2(x,t)$ gde $a_2(x,t)$ označava komponentu ubrzavanja žice u poprečnom pravcu na poziciji $x$ i vremenu $t$. Zbog toga između tačaka $x_1$ i $x_2$ ,

$$
F_2(x,t)|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \rho u_{tt}(x,t)dx.
$$

Zbog toga imamo

$$
T(x_2,t)\frac{u_x(x_2,t)}{\sqrt{1+u_x^2(x_2,t)}} - T(x_1,t)\frac{u_x(x_1,t)}{\sqrt{1+u_x^2(x_1,t)}} = \int_{x_1}^{x_2} \rho u_{tt}(x,t)dx. \quad (1.2)
$$

Sada ako pretpostavimo da je $u_x$ malo onda je:

$$
\sqrt{1+u_x^2} \approx 1.
$$

Ovo možemo napisati preko Tejlorovog razvoja,

$$\sqrt{1+u_x^2} \;=\; 1+\frac{1}{2}u_x^2+...$$

Stoga kada ubacimo da je $u_x$ malo u (1.2) dobijamo

$$T(x_2,t)u_x(x_2,t)-T(x_1,t)u_x(x_1,t) \;\approx\; \int_{x_1}^{x_2}\rho u_{tt}(x,t)dx.$$

Kada ovu jednačinu pomnožimo sa $\frac{1}{x_2-x_1}$ i kada pustimo da $\lim_{x_2\to x_1}$ tada imamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x_2\to x_1}\frac{1}{x_2-x_1}\left[T(x_2,t)u_x(x_2,t)-T(x_1,t)u_x(x_1,t)\right]\\
&\qquad\approx \lim_{x_2\to x_1}\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}\rho u_{tt}(x,t)dx.\\
&\qquad\Longrightarrow (T(x,t)u_x(x,t))_x \approx \rho u_{tt}
\end{aligned}$$

Stoga, imamo jednačinu

$$(Tu_x)_x \;=\; \rho u_{tt} \tag{1.3}$$

dobili smo najednostavniji model za kretanje žice.

Pretpostavimo da je $u_x$ malo i to ubacimo u (1.1) , imamo

$$T(x_2,t) \;\approx\; T(x_1,t)$$

što znači da je $T$ nezavisna od $x$ i samim tim je i napetost konstanta duž žica. Ako pretpostavimo da $T$ zavisi od $t$ i $\rho$ je konstanta tada duž žice , jednačinu (1.3) možemo jednostavnije napisati:

$$u_{tt} \;=\; \frac{T}{\rho}u_{xx}.$$

Generalno $T$ i $\rho$ su nenegativni. Stoga izvodimo

$$c \;=\; \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

naša jednačina postaje

$$u_{tt} \;=\; c^2u_{xx}.$$

Ovo je poznata talasna jednačina. Kasnije ćemo videti da $c$ predstavlja brzinu talasa.

Kada bismo posmatrali drugi član tj. da je $\sqrt{1+u_x^2} \approx \frac{1}{2}u_x^2$ .Kada to ubacimo u (1.2) dobijamo

$$T(x_2,t)\frac{2}{u_x(x_2,t)} - T(x_1,t)\frac{2}{u_x(x_1,t)} \quad \approx \quad \int_{x_1}^{x_2} \rho u_{tt}(x,t)dx$$

a kada ubacimo da je $\sqrt{1+u_x^2} \approx \frac{1}{2}u_x^2$ u (1.1) dobijamo

$$T(x_2,t)\frac{2}{u_x(x_2,t)} - T(x_1,t)\frac{2}{u_x(x_1,t)} \approx 0$$

Kada prethodnu jednačinu pomnožimo sa $\frac{1}{x_2-x_1}$ i kad pustimo da $\lim_{x_2\to x_1}$ tada imamo

$$\begin{aligned}\lim_{x_2\to x_1} \frac{1}{x_2-x_1}\left[T(x_2,t)\frac{2}{u_x(x_2,t)} - T(x_1,t)\frac{2}{u_x(x_1,t)}\right] \\ \approx \lim_{x_2\to x_1} \frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} \rho u_{tt}(x,t)dx. \\ \Longrightarrow 0 \approx \rho u_{tt}\end{aligned}$$

Stoga imamo jednačinu

$$u_{tt} \quad = \quad 0.$$

## 1.1 Rešavanje talasne jednačine

Posmatrajmo jednačinu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \quad \text{za} \quad 0 < x < l \quad \text{i} \quad t > 0 \tag{1.4}$$

Čiji su granični uslovi:

$$u(0,t) = 0 \quad \text{za} \quad \text{svako} \quad t > 0 \tag{1.5}$$

$$u(l,t) = 0 \quad \text{za} \quad \text{svako} \quad t > 0 \tag{1.6}$$

Početni uslovi su:

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{za} \quad \text{svako} \quad 0 < x < l \tag{1.7}$$

$$u_t(x,0) = g(x) \quad \text{za} \quad \text{svako} \quad 0 < x < l \tag{1.8}$$

su zadovoljeni. Naš problem je da odredimo $u(x,t)$ za svako $x$ i $t$. Rešavaćemo ovaj problem u tri koraka:

*Prvi korak:* U prvom koraku možemo naći sva rešenja jednačine (1.4) u obliku $u(x,t) = X(x)T(t)$ za neku funkciju $X(x)$ koja zavisi od $x$ ali ne i od $t$ i neku funkciju $T(t)$ koja zavisi od $t$ ali ne i od $x$. Očekujemo da su sva rešenja (1.4) u ovom obliku. Ali ako nađemo rešenja oblika $X_i(x)T_i(t)$ i ako je (1.4) linearna jednačina, u tom slučaju rešenje se dobija izborom konstante $a_i$, pošto je rešenje oblika $\sum_i a_i X_i(x)T_i(t)$.

*Drugi korak:* U drugom koraku treba da nametnemo granične uslove (1.5) i (1.6)

*Treći korak:* U trećem koraku treba da nametnemo početne uslove (1.7) i (1.8)

**Prvi korak:** $u(x,t) = X(x)T(t)$ je rešenje talasne jednačine (1.4) ako i samo ako je:

$$X(x)T''(t) = c^2X''(x)T(t) \Longleftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

Leva strana je nezavisna od $t$. Dakle desna strana koja je jednaka levoj strani takođe mora biti nezavisna od $t$. Desna strana je nezavisna od $x$, takođe i leva strana mora biti nezavisna od $x$. Dakle obe strane moraju biti nezavisne i od $x$ i od $t$. Dakle obe strane moraju biti konstante. Neka je $\sigma$ konstanta. Dakle imamo:

$$\begin{aligned} \tfrac{X''(x)}{X(x)} &= \sigma & \qquad \tfrac{1}{c^2}\tfrac{T''(t)}{T(t)} &= \sigma \\ \Longleftrightarrow X''(x) - \sigma X(x) &= 0 & \qquad T''(t) - c^2\sigma T(t) &= 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Sada imamo dve obične diferencijalne jednačine koje rešavamo na uobičajan način. Rešavanjem jednačina dobijamo da je rešenje $X(x) = e^{rx}$ i $T(t) = e^{st}$ za neke konstante $r$ i $s$ koje trebaju da se pronađu. To je rešenje ako i samo ako je:

$$\begin{aligned} & \tfrac{d^2}{dx^2}e^{rx} - \sigma e^{rx} = 0 & \qquad & \tfrac{d^2}{dt^2}e^{st} - c^2\sigma e^{st} = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & (r^2 - \sigma)e^{rx} = 0 & & (s^2 - c^2\sigma)e^{st} = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & r^2 - \sigma = 0 & & s^2 - c^2\sigma = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & r = \pm\sqrt{\sigma} & & s = \pm c\sqrt{\sigma} \end{aligned}$$

Ako je $\sigma \neq 0$ u tom slučaju imamo dva nezavisna rešenja $e^{\sqrt{\sigma}x}$ i $e^{-\sqrt{\sigma}x}$ za $X(x)$ i isto tako dva nezavisna rešenja $e^{c\sqrt{\sigma}t}$ i $e^{-c\sqrt{\sigma}t}$ za $T(t)$ . U slučaju kada je $\sigma \neq 0$ tada rešenja za (1.9) izgledaju:

$$X(x) = d_1e^{\sqrt{\sigma}x} + d_2e^{-\sqrt{\sigma}x} \qquad T(t) = d_3e^{c\sqrt{\sigma}t} + d_4e^{-c\sqrt{\sigma}t}$$

za proizvoljne konstante $d_1$ , $d_2$, $d_3$ , $d_4$ . U slučaju kada je $\sigma = 0$ tada je jednačina (1.9) pojednostavljena

$$X''(x) = 0 \qquad T''(t) = 0$$

i rešenja izgledaju:

$$X(x) = d_1 + d_2x \qquad T(t) = d_3 + d_4t$$

za proizvoljne konstante $d_1$ , $d_2$, $d_3$ , $d_4$ .

Sada smo pronašli veliki broj rešenja za talasnu jednačinu (1.4) . Naime

$$u(x,t) \;=\; (d_1e^{\sqrt{\sigma}x} + d_2e^{-\sqrt{\sigma}x})(d_3e^{c\sqrt{\sigma}t} + d_4e^{-c\sqrt{\sigma}t})$$

$$\text{za} \quad \sigma \neq 0 \quad \text{i} \quad \text{proizvoljne} \quad d_1, d_2, d_3, d_4$$

$$u(x,t) \;=\; (d_1 + d_2x)(d_3 + d_4t) \quad \text{za} \quad \text{proizvoljne} \quad d_1, d_2, d_3, d_4$$

**Drugi korak:** Ako rešimo jednačinu (1.4) u obliku $X_i(x)T_i(t)$, $i = 1, 2, 3, ...$ , ond je $\sum_i a_iX_i(x)T_i(t)$ takođe rešenje za izbor jedne konstante $a_i$. Ovo rešenje zadovoljava granične uslove ako i samo ako je

$$\sum_i a_iX_i(0)T_i(t) \;=\; 0 \qquad \text{za} \quad \text{svako} \quad t > 0$$

Ovo će sigurno biti slučaj ako je $X_i(0) = 0$ za svako $i$. Ako su $a_i$ - ovi nenule i $T_i(t)$ - ovi su nezavisni , tada je (1.5) zadovoljena ako i samo ako su $X_i(0)$ - ovi nule. Isto tako $u(x,t) = \sum_i a_iX_i(x)T_i(t)$ zadovoljava granične uslove (1.6) ako i samo ako je

$$\sum_i a_iX_i(l)T_i(t) \;=\; 0 \qquad \text{za} \quad \text{svako} \quad t > 0$$

i to će sigurno važiti ako je $X_i(l) = 0$ za svako $i$. Sada ćemo proći kroz rešenja koja smo dobili u prvom koraku i izbaciti ona koja ne zadovoljavaju $X(0) = X(l) = 0$.

Prvo posmatrajmo slučaj kada je $\sigma = 0$ tada je $X(x) = d_1 + d_2x$. Uslov $X(0) = 0$ je zadovoljen ako i samo ako je $d_1 = 0$ . Uslov $X(l) = 0$ je zadovoljen ako i samo ako je $d_1 + d_2l = 0$. Dakle uslovi $X(0) = X(l) = 0$ su zadovoljeni samo ako su $d_1 = d_2 = 0$, u tom slučaju $X(x)$ je identicčki jednak nuli. Ne postoji vrednost za koju ćemo dobiti da je $X(x)$ identički jednako nuli, pa odbacujemo slučaj kada je $\sigma = 0$ .

Posmatrajmo drugi slučaj kada je $\sigma \neq 0$ , tada je $X(x) = d_1e^{\sqrt{\sigma}x} + d_2e^{-\sqrt{\sigma}x}$.Uslov $X(0) = 0$ je ispunjen ako i samo ako je $d_1 + d_2 = 0$ . Dakle potrebno je da je $d_2 = -d_1$ . Uslov $X(l) = 0$ ispunjen je ako i samo ako je

$$0 \;=\; d_1e^{\sqrt{\sigma}l} + d_2e^{-\sqrt{\sigma}l} = d_1(e^{\sqrt{\sigma}l} - e^{-\sqrt{\sigma}l})$$

Posmatrajmo dva slučaja kada je $d_1 = 0$ i kada je $e^{\sqrt{\sigma}l} - e^{-\sqrt{\sigma}l} = 0$.

Ako je $d_1$ jednako nuli, onda će $X(x)$ ponovo biti indentički jednako nuli a to nam je beskorisno.

Posmatrajmo drugi slučaj kada je:

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{\sigma}l} - e^{-\sqrt{\sigma}l} &= 0 \\ \Longleftrightarrow \quad e^{\sqrt{\sigma}l} &= e^{-\sqrt{\sigma}l} \\ \Longleftrightarrow \quad e^{2\sqrt{\sigma}l} &= 1 \end{aligned}$$

U poslednjem koraku smo obe strane pomnožili sa $e^{\sqrt{\sigma}l} = e^{-\sqrt{\sigma}l}$. $e^{2\sqrt{\sigma}l} = 1$ važiće kada je $\sigma = 0$ . Ali mi sada razmatramo slučaj samo kada je $\sigma \neq 0$. Srećom postoji beskonačno mnogo kompleksnih brojeva. $e^{2\sqrt{\sigma}l} = 1$ ako i samo ako postoji ceo broj $k$ takav da je

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\sigma}l &= 2k\pi i \\ \Longleftrightarrow \quad \sqrt{\sigma} &= k\tfrac{\pi}{l}i \\ \Longleftrightarrow \quad \sigma &= -k^2\tfrac{\pi^2}{l^2} \end{aligned}$$

Sa $\sqrt{\sigma} = k\frac{\pi}{l}i$ i $d_2 = -d_1$ ,

$$\begin{aligned} X(x)T(t) &= d_1(e^{i\frac{k\pi}{l}x} - e^{-i\frac{k\pi}{l}x})(d_3e^{i\frac{ck\pi}{l}t} + d_4e^{-i\frac{ck\pi}{l}t}) \\ &= 2id_1\sin(\tfrac{k\pi}{l}x)\left[(d_3+d_4)\cos(\tfrac{ck\pi}{l}t) + i(d_3-d_4)\sin(\tfrac{ck\pi}{l}t)\right] \\ &= \sin(\tfrac{k\pi}{l}x)\left[\alpha_k\cos(\tfrac{ck\pi}{l}t) + \beta_k\sin(\tfrac{ck\pi}{l}t)\right] \end{aligned}$$

gde je $\alpha_k = 2id_1(d_3+d_4)$ i $\beta_k = -2d_1(d_3-d_4)$. Treba zapamtiti da su sada $d_1, d_3, d_4$ dozvoljeni za bilo koji kompleksni broj, tako da i $\alpha_k$ i $\beta_k$ mogu biti neki kompleksni brojevi.

**Treći korak:** Sada znamo da je

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sin(\frac{k\pi}{l}x)\left[\alpha_k\cos(\frac{ck\pi}{l}t) + \beta_k\sin(\frac{ck\pi}{l}t)\right]$$

rešenje talasne jednačine (1.4) i da važe granični uslovi (1.5) i (1.6), za neke izabrane konstante $\alpha_k$ i $\beta_k$. Ostaje nam još da izaberemo $\alpha_k$ i $\beta_k$ tako da zadovoljavaju početne uslove

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \tag{1.10}$$

$$g(x) = u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\frac{ck\pi}{l}\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \tag{1.11}$$

Svaka funkcija $h(x)$ definisana na intervalu $0 < x < l$ , jedinstveno se prikazuje

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \tag{1.12}$$

kao linearna kombinacija $\sin\frac{k\pi x}{l}$ -a , i takođe znamo formulu

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l h(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

za koeficijente. Možemo napraviti (1.12) koje odgovara (1.10) ako izaberemo da je $h(x) = f(x)$ i $b_k = \alpha_k$. To nam govori da je $\alpha_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin(\frac{k\pi x}{l})dx$. Isto možemo napraviti (1.12) koje odgovara (1.11) ako izaberemo $h(x) = g(x)$ i $b_k = \beta_k\frac{ck\pi}{l}$. To nam govori da je
$\frac{ck\pi}{l}\beta_k = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$. Dakle imamo rešenje

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sin(\frac{k\pi}{l}x)\left[\alpha_k\cos(\frac{ck\pi}{l}t) + \beta_k\sin(\frac{ck\pi}{l}t)\right] \tag{1.13}$$

gde su

$$\alpha_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx \qquad \beta_k = \frac{2}{ck\pi}\int_0^l g(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

Dok sama suma (1.13) može biti komplikovana, svaki izraz pod sumom nazivamo "režim" je prilično jednostavan.

Za svako fiksno $t$ režim $sin(\frac{k\pi}{l}x)\left[\alpha_k\cos(\frac{ck\pi}{l}t) + \beta_k\sin(\frac{ck\pi}{l}t)\right]$ je samo konstanta puta $\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$. Pošto $x$ ide od 0 do $l$ tada će i argument $\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$ ići od 0 do $k\pi$ , $k$ je poluperiod od sin.

Za svako fiksno $x$ $\sin(\frac{k\pi}{l}x)\left[\alpha_k\cos(\frac{ck\pi}{l}t) + \beta_k\sin(\frac{ck\pi}{l}t)\right]$ je samo konstanta puta $\cos(\frac{kc\pi}{l}t)$ plus konstanta vremena $\sin(\frac{kc\pi}{l}t)$. Ako povećamo $t$ za jednu sekundu argumenta $\frac{kc\pi}{l}t$ , tada se i oba režima $\cos(\frac{kc\pi}{l}t)$ i $\sin(\frac{kc\pi}{l}t)$ povećavaju za $\frac{kc\pi}{l}$ , gde je $\frac{kc}{2l}$ ciklus.

Ako ima gustinu $\rho$ i tenziju $T$ tada smo videli da je $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$. Dakle ako se povećava frekvencija oscilovanja niza tada se povećava tenzija i / ili smanjenje gustine i / ili skraćuje niz.

Sada ćemo dati teoremu o konvergenciji Furijeovih redova

**Teorema 1.1.1** *Neka je $f$ neprekidna periodična funkcija čiji je period $2\pi$. Ako je funkcija $f$ diferencijabilna u tački $x$, onda Furijeov red od $f$ u tački $x$ konvergira ka vrednosti $f(x)$ .Gde je $f(x)$*

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\cos(kx) + \beta_k\sin(kx))$$

**Dokaz:** Neka je

$$S_N(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{N} (\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx))$$

N-ta parcijalna suma. Furijeovg reda funkcije $f$ , tj. neka su $\alpha_k$ i $\beta_k$ Furijeovi koeficijenti zadate funkcije $f$. Naš je cilj pokazati da $S_N(x) \to f(x)$ kada $N \to \infty$. Da bismo to pokazali, moraćemo parcijalnu sumu $S_N(x)$ prikazati u drugom obliku. Taj se postupak sastoji od nekoliko koraka.

**Korak 1.** Uvrštavanjem Furijeovih koeficijenata $\alpha_k$ i $\beta_k$ koji izgledaju

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\
\alpha_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)dx \\
\beta_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)dx
\end{aligned}$$

dobijamo

$$\begin{aligned}
S_N(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) \cos(kx)dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) \sin(kx)dt \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} (\cos(kt) \cos(kx) + \sin(kt) \sin(kx)) \right] dt,
\end{aligned}$$

odakle ćemo primeniti adicione formule za kosinus odakle sledi relacija

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \cos k(t-x) \right] dt. \tag{1.14}$$

Da bismo izračunali sumu na desnoj strani jednakosti (1.14) iskoristi ćemo sledeću lemu.

**Korak 2.**

**Lema 1.1.2** *Neka je u realan broj takav da je $-\pi \leq u \leq \pi$. Tada važi jednakost*

$$\frac{1}{2} + \cos(u) + \cos(2u) + \cdots + \cos(Nu) = \begin{cases} \frac{\sin[(N+1/2)u]}{2\sin(u/2)}, & u \neq 0 \\ N + 1/2, & u = 0 \end{cases}$$

**Dokaz:** Očito jednakost važi kada je $u = 0$. Pretpostavimo da je $u \neq 0$. Zbog definicije kompleksne eksponencijalne funkcije važi jednakost

$$\left(e^{iu}\right)^n \;=\; e^{inu} = \cos(nu) + i\sin(nu),$$

pa je $\cos(nu) = Re\{\left(e^{iu}\right)^n\}$ . Sada, kako je

$$\frac{1}{2} + \cos(u) + \cos(2u) + \cdots + \cos(Nu)$$
$$= -\frac{1}{2} + (1 + \cos(u) + \cos(2u) + \cdots + \cos(Nu))$$

dobijamo identitet

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \cos(ku) \;=\; -\frac{1}{2} + Re\{\sum_{k=0}^{N} \left(e^{iu}\right)^k\}. \tag{1.15}$$

Uočimo kako se na desnoj strani prethodne relacije pojavljuje konačni geometrijski red. Primenimo poznatu formulu

$$\textstyle\sum_{k=0}^{N} z^k = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}, \qquad z \in C, z \neq 1,$$

za sumu tog reda, relacija (1.15) dobija oblik

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \cos(ku) \;=\; -\frac{1}{2} + Re\{\frac{1 - e^{i(N+1)u}}{1 - e^{iu}}\}. \tag{1.16}$$

Dalje, pomnožimo brojilac i imenilac razlomka

$$\frac{1 - e^{i(N+1)u}}{1 - e^{iu}}$$

sa $e^{-\frac{iu}{2}}$, dobijamo da je

$$Re\{\frac{1 - e^{i(N+1)u}}{1 - e^{iu}}\} = Re\{\frac{e^{-\frac{iu}{2}} - e^{i(N+\frac{1}{2})u}}{e^{-\frac{iu}{2}} - e^{\frac{iu}{2}}}\} = \frac{\sin(\frac{u}{2}) + \sin[(N+\frac{1}{2})u]}{2\sin(\frac{u}{2})},$$

Konačno, uvrštavamo poslednje relacije u (1.16) i dobijamo identitet

$$\tfrac{1}{2} + \textstyle\sum_{k=1}^{N} \cos(ku) \;=\; \frac{\sin[(N+\frac{1}{2})u]}{2\sin(\frac{u}{2})}, \qquad u \neq 0$$

što smo i trebali pokazati. Time je lema dokazana.

**Korak 3.** Iskoristimo lemu 1.1.2 , parcijalna suma Furijeovog reda postaje

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{N}\cos k(t-x)\right]dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{\sin((N+\frac{1}{2})(t-x))}{\sin(\frac{t-x}{2})}\right]dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)P_N(t-x)dt, \end{aligned}$$

gde je

$$P_N(u) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin((N+\frac{1}{2})u)}{\sin(\frac{u}{2})} \tag{1.17}$$

takozvano Furijeovo jezgro. Sada uz smenu(supstituciju) $u = t - x$, prethodni integral postaje

$$S_N(x) = \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(u+x)P_N(u)du.$$

Kako je $f(u+x)P_N(u)$ periodična funkcija sa periodom $2\pi$, granice integracije možemo pomeriti za $x$ bez promene vrednosti integrala. Zbog toga je

$$S_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)P_N(u)du. \tag{1.18}$$

U nastavku će nam trebati još jedna lema.
**Korak 4.**

**Lema 1.1.3** *Neka je $P_N(u)$ Furijeova jezgra definisana formulom (1.17). Tada je*

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_N(u)du = 1$$

**Dokaz:** Zbog leme 1.1.2 važi jednakost

$$\begin{aligned} P_N(u) &= \frac{1}{\pi}\frac{\sin((N+\frac{1}{2})u)}{\sin(\frac{u}{2})} \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\cos(u)+\cos(2u)+\cdots+\cos(Nu)\right). \end{aligned}$$

Zbog toga je

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} P_N(u)du &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} du + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(u)+\cos(2u)+\cdots+\cos(Nu))du \\ &= 1,\end{aligned}$$

zato jer su integrali svih kosinus funkcija jednaki nuli.

**Korak 5.** Kao što smo naveli na počeku dokaza, moramo pokazati da $S_N(x) \to f(x)$ kada $N \to \infty$. Iskoristimo integralni prikaz (1.18), Furijeove parcijalne sume, trebamo pokazati da

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)P_N(u)du \quad \to \quad f(x), \tag{1.19}$$

kada $N$ teži u beskonačnost. Zbog leme 1.1.3 važi relacija $f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)P_N(u)du$, pa trebamo dokazati da

$$\textstyle\int_{-\pi}^{\pi}[f(u+x)-f(x)]P_N(u)du \quad \to \quad 0, \qquad \text{kada} \quad N \to \infty.$$

Iskoristimo definiciju Furijeovog jezgra $P_N(u)$, prethodni limes postaje

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(u+x)-f(x)}{\sin(\frac{u}{2})}\sin[\left(N+\frac{1}{2}\right)u]du \quad \to \quad 0. \tag{1.20}$$

Limes (1.20) ćemo pokazati korišćenjem Lebegove leme. Posmatrajmo funkciju

$$g(u) = \frac{f(u+x)-f(x)}{\sin(\frac{u}{2})}.$$

Funkcija $g$ nije definisana u tački $u = 0$, ali se u toj tački može proširiti do neprekidne funkcije. Po pretpostavci teoreme, funkcija $f$ je diferencijabilna u tački $x$ tj. postoji $f^{'}(x) = \lim_{u\to 0}\frac{f(u+x)-f(x)}{u}$. Koristeći tu činjenicu imamo da je

$$\begin{aligned}\lim_{u\to 0} g(u) &= \lim_{u\to 0}\frac{f(u+x)-f(x)}{\sin(\frac{u}{2})} \\ &= \lim_{u\to 0}\frac{f(u+x)-f(x)}{u}\frac{u}{\sin(\frac{u}{2})} \\ &= 2f^{'}(x).\end{aligned}$$

Pri tome smo još iskoristili poznati limes $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$. Dakle, stavimo $g(0) = 2f^{'}(x)$, funkcija $g$ se proširuje do neprekidne funkcije na intervalu $[-\pi,\pi]$, pa na relaciju (1.20) možemo primeniti Lebegovu lemu. Prema tome, relacija (1.20) važi zbog Lebegove leme i time je dokaz teoreme završen.

**Primer 1** Posmatrajmo konkrektan primer, pretpostavimo

$$\begin{array}{rcccl}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) & = & c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) & & \text{za svako } 0 < x < 1 \quad t > 0 \\
u(0,t) & = & u(1,t) & = 0 & \text{za svako } \quad t > 0 \\
u(x,0) & = & x(1-x) & & \text{za svako } 0 < x < 1 \\
u_t(x,0) & = & 0 & & \text{za savako } 0 < x < 1
\end{array}$$

Ovo je specilani slučaj jednačine (1.4 - 1.8) kada je $l = 1$ , $f(x) = x(1-x)$ i $g(x) = 0$. Dakle od (1.13),

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi x)\left[\alpha_k \cos(ck\pi t) + \beta_k \sin(ck\pi t)\right]$$

sa

$$\alpha_k = 2\int_0^1 x(1-x)\sin(k\pi x)dx$$

$$\beta_k = 2\int_0^1 0 \sin(k\pi x)dx = 0$$

Koristimo

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\sin(k\pi x)dx &= \int_0^1 -\frac{1}{\pi}\frac{d}{dk}\cos(k\pi x)dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\frac{d}{dk}\int_0^1 \cos(k\pi x)dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\frac{d}{dk}\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi x)\Big|_0^1 \\
&= -\cos(k\pi)\frac{1}{k\pi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2\sin(k\pi x)dx &= \int_0^1 -\frac{1}{\pi^2}\frac{d^2}{dk^2}\sin(k\pi x)dx \\
&= -\frac{1}{\pi^2}\frac{d^2}{dk^2}\int_0^1 \sin(k\pi x)dx \\
&= \frac{1}{\pi^2}\frac{d^2}{dk^2}\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi x)\Big|_0^1 \\
&= \cos(k\pi)\frac{2-k^2\pi^2}{k^3\pi^3} - \frac{2}{k^3\pi^3}
\end{aligned}$$

imamo,

$$
\begin{aligned}
\alpha_k &= 2\int_0^1 x(1-x)\sin(k\pi x)dx \\
&= 2\left[-\cos(k\pi)\frac{1}{k\pi} - \cos(k\pi)\frac{2-k^2\pi^2}{k^3\pi^3} + \frac{2}{k^3\pi^3}\right] \\
&= \frac{4}{k^3\pi^3}\left[1-\cos(k\pi)\right] \\
&= \begin{cases} \frac{8}{k^3\pi^3}, & \text{za } k \text{ neparno} \\ 0, & \text{za } k \text{ parno} \end{cases}
\end{aligned}
$$

i

$$
u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{k^3\pi^3}\sin(k\pi x)\cos(ck\pi t)
$$

**Teorema 1.1.4** *Rešenje jednačine*

$$
u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad x \in \Re \tag{1.21}
$$

*dato je*

$$
u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct) \tag{1.22}
$$

*za glatke funkcije* $f$ *i* $g$ *.*

**Dokaz:** Uvodimo smene

$$
\begin{aligned}
\xi &= x+t \\
\eta &= x-t
\end{aligned}
$$

Sada tražimo parcijalne izvode

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} \\
&= -\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right)(-1) + \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} +\right)(1) \\
&= -2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} +\right) \\ &= 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\end{aligned}$$

Sada kada u $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ ubacimo šta smo dobili. Dobijamo

$$-4c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Prema tome

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

što implicira

$$\begin{aligned}u &= f(\xi) + g(\eta) \\ &= f(x + ct) + g(x - ct)\end{aligned}$$

■

## 1.2 Dalamberova formula

Posmatrajmo sledeći početni problem

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, \qquad -\infty < x < \infty \\ u(x,0) &= \phi(x) \\ u_t(x,0) &= \psi(x) \end{cases} \tag{1.23}$$

Sada smo pokazali da se rešenje ovakvog problema nalazi u obliku

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

Mi tražimo rešenje ovakvog oblika koje će zadovoljiti početne probleme. To znači da nam je potrebno

$$\begin{aligned} u(x,0) = f(x) + g(x) &= \phi(x) \\ u_t(x,0) = cf'(x) - cg'(x) &= \psi(x) \end{aligned}$$

Rešenjem ovog sistema dobijamo

$$\begin{aligned} f' &= \frac{1}{2}\left(\phi' + \frac{\psi}{c}\right) \\ g' &= \frac{1}{2}\left(\phi' - \frac{\psi}{c}\right) \end{aligned}$$

što implicira

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{2}\phi(s) + \frac{1}{2c}\int_0^s \psi + C_1 \\ g(s) &= \frac{1}{2}\phi(s) - \frac{1}{2c}\int_0^s \psi + C_2 \end{aligned}$$

Koristimo da je

$$\phi(x) = f(x) + g(x),$$

vidimo da je $C_1 + C_2 = 0$. Dakle zaključujemo da je

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f(x+ct) + g(x-ct) \\ &= \left[\frac{1}{2}\phi(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} \psi\right] + \left[\frac{1}{2}\phi(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} \psi\right], \end{aligned}$$

što se može pojednostaviti

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi(x+ct) + \phi(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)ds. \tag{1.24}$$

Ovo rešenje formule (1.24) poznato je kao Dalamberova formula za jedinstveno rešenje početnog problema (1.23) za talasnu jednačinu na $\Re$

## 1.3 Energetske metode

### 1.3.1 Domen zavisnosti

Na osnovu Dalamberove formule (1.24) za rešavanje talasne jednačine, vidimo da je vrednost $u$ u svakom trenutku $(x_0, t_0) \in \Re^2$ zavisi samo od vrednosti početnih podataka u intervalu $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$. To znači da se u domenu zavisnosti za tačku $(x_0, t_0)$ dobija konus
$\{(x,t) : x_0 - c(t_0 - t) \leq x \leq x_0 + c(t_0 - t)\}$ .

Slično tome početni uslovi u tački $(x_0, 0)$ utiču samo na deo rešenja u konusu $\{(x,t) : t \geq 0, x_0 - ct \leq x \leq x_0 + ct\}$. Ovaj region je poznat kao domen uticaja tačke $(x_0, 0)$.

Dakle ako su početni podaci podržani u intervalu
$\{x : |x - x_0)| \leq R\}$ onda je i rešenje $u$ podržano u regionu
$\{(x,t) : t \geq 0, x_0 - R - ct \leq x \leq x_0 + R + ct\}$ .

Dakle za početne probleme sa kompaktnim nosačem, rešenje $u(x,t)$ će imati u $\Re$ u bilo kom trenutku $t$. Ova pojava je poznata kao konačna brzina prostiranja za talasne jednačine.

### 1.3.2 Energetski metod i Domen zavisnosti

Sada ćemo koristiti energiju da bi dokazali konačnu brzinu prostiranja za talasnu jednačinu. Pomoću Dalamberove formule je isto dokazana konačna brzina prostiranja. Međutim energetski metod je koristan zato što se njegova tehnika može primeniti i na druge jednačine.

Sada ćemo definisati pojam energije koji je povezan sa rešenjima talasne jednačine. Za rešenje talasne jednačine $u$ na $\Re$ definišemo energiju u trenutku $t$ kao

$$E(t) \equiv \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[u_t^2(x,t) + c^2 u_x^2(x,t)\right] dx. \tag{1.25}$$

Sada ćemo dati definiciju energije u trenutku $t$ za talasnu jednačinu koju smo definisali na početku preko žice

$$E(t) \equiv \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[u_t^2(x,t) + \frac{T}{\rho} u_x^2(x,t)\right] dx.$$

U stvarnosti $u_t^2(x,t)$ predstavlja kinetičku energiju a $\frac{T}{\rho} u_x^2(x,t)$ predstavlja potencijalnu energiju.

Sada se vratimo definiciji energije koja je povezana sa rešenjima za talasnu jednačinu.

Posmatrajmo početni problem talasne jednačine

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= & 0, & \text{na} \quad \Re \times (0, \infty) \\ u(x,0) &= & \phi(x) \\ u_t(x,0) &= & \psi(x) \end{cases}$$

Neka je

$$B(x_0, t_0) \quad \equiv \quad \{x : |x - x_0| \leq ct_0\}.$$

Neka je

$$C(x_0, t_0) \quad \equiv \quad \{(x,t) : 0 \leq t \leq t_0, |x - x_0| \leq c|t - t_0|\}.$$

**Teorema 1.3.1** *(Konačna brzina prostiranja) :* Ako je $\phi \equiv 0 \equiv \psi$ na $B(x_0, t_0)$ onda je $u \equiv 0$ na $C(x_0, t_0)$

**Dokaz:** Neka je

$$E(t) \quad \equiv \quad \tfrac{1}{2} \int_{B(x_0, t_0 - t)} u_t^2(x,t) + c^2 u_x^2(x,t) dx \qquad 0 \leq t \leq t_0$$

Vidimo de je $E(t)$ energija $u$ u trenutku $t$ za $x \in [x_0 - c(t_0 - t), x_0 + c(t_0 - t)]$. Dakle $E(0)$ je enrgija $u$ u trenutku $t = 0$ za $x \in [x_0 - ct_0, x_0 + ct_0] = B(x_0, t_0)$ . Ako $\phi \equiv 0 \equiv \psi \in B(x_0, t_0)$ onda je $E(0) \equiv 0$. Sada tvrdimo da je $E(t) \leq E(0)$ za svako $t \in [0, t_0]$, i ,prema tome je $E(t) \equiv 0$. Prema tome je $u \equiv 0$ na $C(x_0, t_0)$. Dakle ostaje samo da se pokaže da je $E(t) \leq E(0)$, drugim rečima da je $E^{'}(t) \leq 0$.

Za $E(t)$ kao što je gore definisano

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \int_{x_0 - c(t_0 - t)}^{x_0 + c(t_0 - t)} \left[u_t^2(x,t) + c^2 u_x^2(x,t)\right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{x_0 + c(t_0 - t)} \left[u_t^2(x,t) + c^2 u_x^2(x,t)\right] dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_0 - c(t_0 - t)}^0 \left[u_t^2(x,t) + c^2 u_x^2(x,t)\right] dx \right] \end{aligned}$$

što implicira

$$\begin{aligned}
E^{'}(t) &= \int_0^{x_0+c(t_0-t)} (u_t u_{tt} + c^2 u_x u_{xt}) dx - \frac{c}{2}(u_t^2(x,t) + c^2 u_x^2(x,t))|_{x=x_0+c(t_0-t)} \\
&+ \int_{x_0-c(t_0-t)}^{0} (u_t u_{tt} + c^2 u_x u_{xt}) dx - \frac{c}{2}(u_t^2(x,t) + c^2 u_x^2(x,t))|_{x=x_0-c(t_0-t)} \\
&= \int_{x_0-c(t-t_0)}^{x_0+c(t-t_0)} (u_t u_{tt} + c^2 u_x u_{xt}) dx - \frac{c}{2}(u_t^2(x,t) + c^2 u_x^2(x,t))|_{x=x_0+c(t-t_0)} \\
&- \frac{c}{2}(u_t^2(x,t) + c^2 u_x^2(x,t))|_{x=x_0-c(t-t_0)} \\
&= \int_{x_0-c(t-t_0)}^{x_0+c(t-t_0)} u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx}) dx + c^2 u_x u_t|_{x_0-c(t_0-t)}^{x_0+c(t_0-t)} \\
&- \frac{c}{2}(u_t^2(x,t) + c^2 u_x^2(x,t))|_{x=x_0+c(t-t_0)} - \frac{c}{2}(u_t^2(x,t) + c^2 u_x^2(x,t))|_{x=x_0-c(t-t_0)} \\
&= 0 + \left[-\frac{c}{2}u_t^2(x,t) + c^2 u_x u_t - \frac{c}{2}c^2 u_x^2(x,t)\right]|_{x_0+c(t-t_0)} \\
&+ \left[-\frac{c}{2}u_t^2(x,t) - c^2 u_x u_t - \frac{c}{2}c^2 u_x^2(x,t)\right]|_{x_0-c(t-t_0)} \\
&= -\frac{c}{2}[u_t^2 - 2cu_x u_t + c^2 u_x^2]|_{x_0+c(t-t_0)} - \frac{c}{2}[u_t^2 + 2cu_x u_t + c^2 u_x^2]|_{x_0-c(t-t_0)} \\
&= -\frac{c}{2}[u_t - cu_x]^2|_{x_0+c(t-t_0)} - \frac{c}{2}[u_t + cu_x]^2|_{x_0-c(t-t_0)} \\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

kao što je i tvrđeno. Dakle, $E(t) \leq E(0) = 0$. Ali, $E(t) \geq 0$. Dakle $E(t) = 0$ što podrazumeva da je $u_t = u_x = 0$ na $C(x_0, t_0)$. Prema tome $u$ mora biti konstanta. Ali, $u = 0$ na $t = 0$. Dakle $u = 0$ na $C(x_0, t_0)$.

### 1.3.3 Talasi sa izvorom

Posmatrajmo početni problem za nehomogenu talasnu jednačinu na $\Re$

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= f(x,t) \\ u(x,0) &= \phi(x) \\ u_t(x,0) &= \psi(x) \end{cases} \tag{1.26}$$

**Teorema 1.3.2** *Jedinstveno rešenje za (1.26) je*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}[\phi(x+ct)+\phi(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds \\ &+ \frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y,s)dyds. \end{aligned} \tag{1.27}$$

**Dokaz:**

Fiksiramo tačku $(x_0,t_0)$. Neka je domen zavisnosti $\triangle$ =$\{(x,t) : 0 \le t \le t_0; |x-x_0| \le c|t-t_0|\}$ za fiksirano $(x_0,t_0)$. Integralimo talasnu jednačinu

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$$

na $\triangle$. Imamo

$$\int\int_{\triangle} u_{tt} - c^2 u_{xx} dxdt = \int\int_{\triangle} f(x,t)dxdt. \tag{1.28}$$

Na osnovu teoreme Grina znamo

$$\int\int_{\triangle}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}\right)dxdt = \int_{\partial\triangle} Pdt + Qdx$$

gde je $\partial\triangle$ granica $\triangle$ prešla u suprotni smer.

Dakle, imamo

$$\begin{aligned} -\int\int_{\triangle}((c^2u_x)_x - (u_t)_t)dxdt &= -\int_{\partial\triangle}(c^2u_xdt + u_tdx) \\ &= -\sum_{i=0}^{2}\int_{L_i}(c^2u_xdt + u_tdx). \end{aligned}$$

Sada, prvo uradimo

$$
\begin{aligned}
-\int_{L_0}(c^2u_xdt+u_tdx) &= -\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0}u_t(x,0)dx \\
&= -\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0}\psi(x)dx
\end{aligned} \tag{1.29}
$$

Sledeće, na $L_1$, $\frac{dx}{dt}=-c$. Dakle,

$$
\begin{aligned}
-\int_{L_1}(c^2u_xdt+u_tdx) &= c\int_{L_1}(u_xdx+u_tdt) \\
&= c\int_{L_1}du \\
&= c[u(x_0,t_0)-u(x_0+ct_0,0)] \\
&= c[u(x_0,t_0)-\phi(x_0+ct_0)],
\end{aligned} \tag{1.30}
$$

dok je na $L_2$, $\frac{dx}{dt}=c$. Dakle

$$
\begin{aligned}
-\int_{L_2}(c^2u_xdt+u_tdx) &= -c\int_{L_2}(u_xdx+u_tdt) \\
&= -c\int_{L_2}du \\
&= -c[u(x_0-ct_0,0)-u(x_0,t_0)] \\
&= -c[\phi(x_0-ct_0)-u(x_0,t_0)],
\end{aligned} \tag{1.31}
$$

Dakle kombinovanjem (1.29), (1.30) i (1.31) sa (1.28) možemo zaključiti da

$$
2cu(x_0,t_0)-c\phi(x_0+ct_0)-c\phi(x_0-ct_0)-\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0}\psi(x)dx = \int\int_{\triangle}f(x,t)dxdt.
$$

Prema tome, možemo zaključiti

$$
\begin{aligned}
u(x_0,t_0) &= \frac{1}{2}[\phi(x_0+ct_0)+\phi(x_0-ct_0)] \\
&+ \frac{1}{2c}\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0}\psi(x)dx+\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x_0-c(t_0-t)}^{x_0+c(t_0-t)}f(x,t)dxdt.
\end{aligned}
$$

## 1.4 Reflekcioni talasi

### 1.4.1 Talasna jednačina na poluosi

Razmotrimo sledeći Dirihleov problem na poluosi:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= & 0, & 0 < x < +\infty \\ u(x,0) &= & \phi(x), & x > 0 \\ u_t(x,0) &= & \psi(x), & x > 0 \\ u(0,t) &= & 0, & t \geq 0. \end{cases} \tag{1.32}$$

Tražimo rešenja ovoga problema produženjem funkcija $\phi(x)$ i $\psi(x)$ na $\Re$ za neparnu refleksiju. Neka je

$$\phi_{neparno}(x) \;=\; \begin{cases} \phi(x) & x \geq 0 \\ -\phi(-x) & x \leq 0 \end{cases}$$

i slično tome , neka je

$$\psi_{neparno}(x) \;=\; \begin{cases} \psi(x) & x \geq 0 \\ -\psi(-x) & x \leq 0 \end{cases}$$

Neka je $\tilde{u}$ rešenje početnog problema na celoj realnoj liniji sa početnim podacima $\phi_{neparno}(x)$ i $\psi_{neparno}(x)$,

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - c^2 \tilde{u}_{xx} &= & 0, & -\infty < x < +\infty \\ \tilde{u}(x,0) &= & \phi_{neparno}(x) \\ \tilde{u}_t(x,0) &= & \psi_{neparno}(x) \end{cases}$$

Neka je $u(x,t) \equiv \tilde{u}(x,t)$ za $0 < x < \infty$. Tvrđenje: $u(x,t)$ je rešenje Dirihleovog problema na poluosi (1.32).

Jasno, $u$ zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednačinu za $0 < x < \infty$ , kako je $u = \tilde{u}$ i $\tilde{u}$ zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednačinu na celoj liniji. Često samo ostaje da se proveri da li $u$ zadovoljava početne uslove. Ali, za $x > 0$, $u(x,0) = \tilde{u}(x,0) = \phi_{neparno}(x) = \phi(x)$ i
$u_t(x,0) = \tilde{u}_t(x,0) = \psi_{neparno}(x) = \psi(x)$. Dakle $u(x,t) \equiv \tilde{u}(x,t)$ za $x > 0$ je rešenje od (1.32). U slučaju kada je $x > 0$ tada je $u(x,t) \equiv \tilde{u}(x,t)$ je rešenje jednačine (1.32 )

Sada,tražimo sličnu formulu Dalamberovoj za rešavanje ovoga problema. Iz Dalamberove formule znamo da je $\tilde{u}$ dato sa

$$\tilde{u}(x,t) \;=\; \frac{1}{2}[\phi_{neparno}(x+ct) + \phi_{neparno}(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi_{neparno}(y)dy.$$

Za $t > 0$, ako je $x > ct$, onda je $\phi_{neparno}(x-ct) = \phi(x-ct)$ i $\phi_{neparno}(x+ct) = \phi(x+ct)$, rešenje je dato sa

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \tfrac{1}{2}[\phi(x+ct)+\phi(x-ct)] \\ & +\tfrac{1}{2c}\textstyle\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(y)dy, \qquad \text{za} \quad t>0, \quad x>ct. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Sada posmatrajmo slučaj kada je $t > 0$, $x < ct$, onda je $\phi_{neparno}(x-ct) = -\phi(ct-x)$ i $\psi_{neparno}(y) = -\psi(-y)$ za $y < 0$. Dakle,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi_{neparno}(y)dy &= \frac{1}{2c}\int_{0}^{x+ct}\psi(y)dy + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{0}\psi(y)dy \\ &= \frac{1}{2c}\int_{0}^{x+ct}\psi(y)dy - \frac{1}{2c}\int_{0}^{ct-x}\psi(y)dy \\ &= \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{ct+x}\psi(y)dy \end{aligned}$$

Dakle, za $t > 0$, $x < ct$, formula postaje,

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}[\phi(x+ct)-\phi(ct-x)] + \tfrac{1}{2c}\textstyle\int_{ct-x}^{ct+x}\psi(y)dy, \qquad \text{za} \quad t>0, \quad x<ct. \tag{1.34}$$

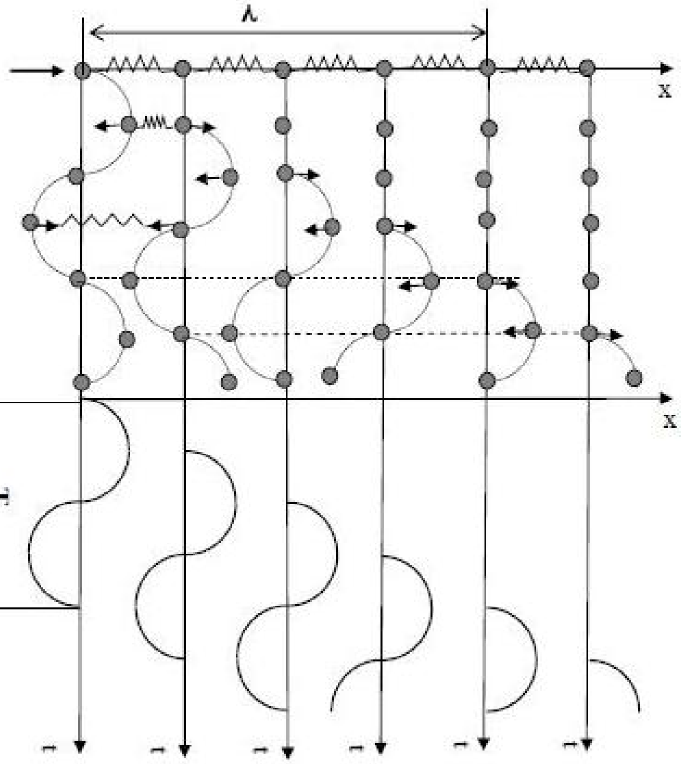
# Glava 2

# Vodeni talasi

## 2.1 Talasno kretanje

Proces prostiranja oscilacija kroz prostor naziva se talas. Oscilacija predstavlja promenu neke veličine koja se na isti način ponavlja posle nekog određenog vremenskog perioda. Oscilacije najčešće povezujemo sa oscilatornim kretanjem čestica ili tela, tj. kretanjem koje se periodično ponavlja i telo se posle određenog vremena vraća u prvobitan položaj i zatim ponavlja svoje kretanje. Ako se oscilacija koja se javlja u nekoj tački prostora i u nekom trenutku, prenosi na druge tačke u prostoru tada govorimo o prenošenju oscilacija kroz prostor, odnosno o talasu. Talasi za čije prostiranje je potrebna materijalna sredina nazivaju se mehanički talasi, i za materijalnu sredinu potrebno je da postoje elastične i inercijalne sile. Inercijalne sile su sile koje deluju na telo kada ono prelazi iz stanja mirovanja ili ravnomernog pravolinijskog kretanja u stanje ubrzanog ili usporenog kretanja i one teže da spreče promenu stanja kretanja.

Radi proučavanja prostiranja talasa u materijalnoj sredini posmatraćemo niz čestica na konstantnom rastojanju koje miruju pre nailaska talasa. Čestice možemo da zamislimo da su povezane malim oprugama kao na slici 1. Kada prva čestica počne da osciluje, pod dejstvom neke spoljašnje sile, ona se približava sledećoj i između njih se javljaju odbojne elastične sile. Pod dejstvom tih sila prva čestica se vraća u prvobitni položaj, a druga počinje kretanje iz ravnotežnog položaja. Prva čestica se ne zaustavlja u ravnotežnom položaju već zbog inercije prolazi i odaljuje se od ravnotežnog položaja na drugu stranu. Tada se između udaljene prve i druge čestice javljaju privlačne elastične sile i one ih vraćaju ka ravnotežnom položaju. Kada se druga čestica posle početka kretanja približila trećoj između njih su se javile odbojne elastične sile, pa je tako druga čestica krenula ka ravnotežnom položaju, a treća je započela oscilovanje. Proces se nastavlja. Na vertikalnim




Slika 2.1: *Slika 1*

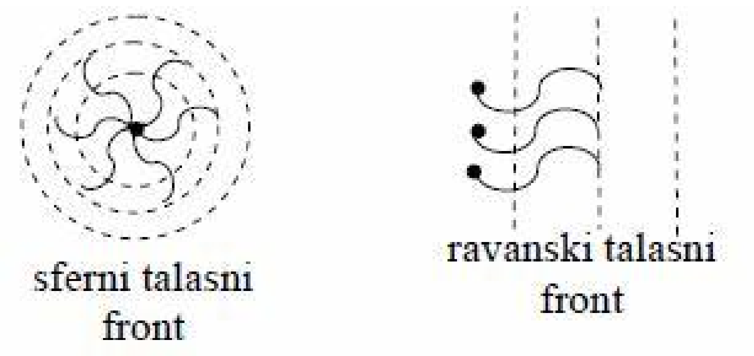
osama prikazana je vremenska zavisnost rastojanja svake čestice od rtavnotežnog položaja. Uočava se da sve čestice osciluju na isti način, ali sa malim vremenskim zakašnjenjem jedne u odnosu na drugu. U toku prenošenja oscilacija sa čestice na česticu svaka čestica osciluje oko svog ravnotežnog položaja.

Rastojanje oscilujuće čestice od ravnotežnog položaja naziva se elongacija i obeležava se sa $\xi$. Elongacija zavisi od trenutka $t$ i od položaja čestice duž $x$ - ose, za slučaj prikazan na slici 1. Ako se talas ne kreće samo duž $x$ - ose već u opštem slučaju u prostoru tada elongacija zavisi od vremena $t$ i od položaja čestica određenog prostornim kordinatama (na primer $x$,$y$,$z$ ili drugima), pa se može napisati da je u opštem slučaju elongacija funkcija tri prostorne kordinate i vremena tj. $\xi = f(x, y, z, t)$. Ako se talasi kreću u jednom pravcu tada je ona funkcija jedne kordinate i vremena na primer $\xi = f(x, t)$.

Period talasa je vreme za koje oscilujuća čestica izvrši jednu punu oscilaciju i period talasa se obeležava sa $T$. Ako se posmatraju čestice na slici 1, one započinju oscilovanje sa zakašnjenjem jedne u odnosu na drugu, odnosno sa sve većim zakašnjenjem u odnosu na prvu tako da na jednom mestu čestice počinju da osciluju baš u trenutku kada i prva i druga započinju nove oscilacije( na slici 1 to je peta čestica). Prva i peta čestica u isto vreme kreću iz ravnotežnog stanja, dostižu maksimalno rastojanje, vraćaju se u ravnotežu itd. Na isti način se prema slici 1 ponašaju druga i šesta čestica.

Rastojanje između dve najbliže čestice koje osciluju u fazi naziva se talasna dužina $\lambda$. Talasna dužina $\lambda$ je obeležena na $x$ - osi na slici 1. Kada se posmatra prostiranje talasa u prostoru u svakom trenutku postoje čestice koje su zahvaćene talasom i one koje nisu.

Talasni front je geometrijsko mesto tačaka u prostoru koje razdvajaju prostor na dva dela, onaj koji je zahvaćen talasnim procesom i onaj koji nije zahvaćen talasnim procesom. Talasni frontovi mogu biti različitog oblika, a najednostavniji su sferni i ravanski (slika 2).




Slika 2.2: *Slika 2*

Brzina prostiranja talasnog fronta je brzina prostiranja talasa i obeležava se sa $c$. Ako posmatramo oscilovanje na slici 1, očigledno je da talas pređe put od jedne talasne dužine $\lambda$ za vreme jednog perioda talasa $T$.

Postoji više podela talasa na mehaničke, elektromagnetske i materijalne.

Mehanički talasi prenose čestice neke sredine koja je ili u čvrstom ili tečnom ili gasovitom stanju, pri čemu te čestice osciluju oko svog ravnotežnog položaja. Primer ovakvih talasa su: zvuk, talasi na vodi, trusni talasi , talasi u zategnutoj žici i slično.

Elektromagnetski talasi predstavljaju prenošenje oscilacija električnog i magnetnog polja ili kroz neku sredinu preko naelektrisanih čestica ili kroz vakum. U ovu vrstu talasa spadaju: svetlosni talasi, radio talasi, i slično.

Materijalnim talasima pridružujemo subatomske čestice da bi opisali njihovo ponašanje.

Prema pravcu prostiranja talasi se dele na: linijske ili jednodimenzionalne (primer zategnuta žica), površinske ili dvodimenzionalne (primer talasi na vodi) i zapreminski ili trodimenzionalni (zvučni talasi u tečnim i gasovitim telima).

### 2.1.1 Uopštenje jednačine talasa

Jednačina talasa predstavlja izraz koji daje zavisnost rastojanja oscilajuće čestice od ravnotežnog položaja tj. elongacije, od vremena i od prostornih kordinata. Radićemo uopštenje za jednodimenzionalne talase .

Posmatrajmo jednodimenzionalni talas $\xi = f(x,t)$.
Ova jednačina mora biti periodična i u odnosu na vreme $t$ i u odnosu na kordinatu $x$. Periodičnost u vremenu je posledica oscilatarnog kretanja čestica, a periodičnost u prostoru potiče od činjenice da čestice koje su na rastojanju $\lambda$ jedna od druge osciluju na isti način.
Ako posmatramo oscilovanje čestice na mestu $x = 0$ ono se može predstaviti izrazom

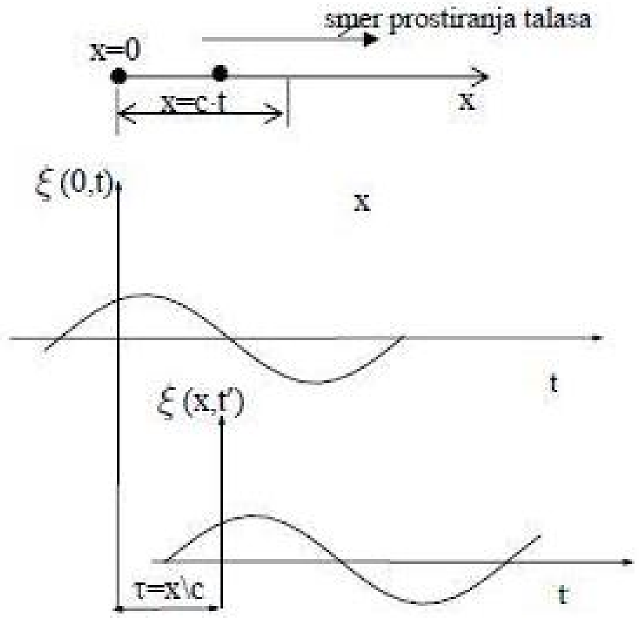
$$\xi(0,t) \;=\; \xi_0 \sin(\omega t + \alpha) \tag{2.1}$$

gde je $\omega = 2\pi f$. Oscilovanje čestice pogođene istim talasom na nekom mestu $x$ se može u odnosu na vreme $t^{'}$ proteklo od početka ooscilovanja te čestice predstaviti u obliku:

$$\xi(x,t^{'}) \;=\; \xi_0 \sin(\omega t^{'} + \alpha) \tag{2.2}$$

Ove čestice su prikazane na slici 3.

Na slici 3 je prikazan međusobni položaj čestica kao i vremenska zavisnost elongacije obe čestice. Kako je do početka oscilovanja čestice na mestu $x$ došlo posle proteklog vremena $\tau = \frac{x}{c}$ u odnosu na početak oscilovanja čestice u $x = 0$ , vreme $t$ i $t^{'}$ su povezani na sledeći način, $t = t^{'} + \frac{x}{c}$, odnosno $t^{'} = t - \frac{x}{c}$ . Ako se $t^{'}$ napiše preko $t$ u izrazu (2.2) dobija se izraz za elongaciju talasa na mestu $x$ i u nekom trenutku $t$ kao:




Slika 2.3: *Slika 3*

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(\omega(t - \frac{x}{c}) + \alpha) = \xi_0 \sin(\omega t - \frac{2\pi f x}{c} + \alpha) = \xi_0 \sin(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \alpha) \tag{2.3}$$

$$\xi_0 \sin(\omega t - kx + \alpha) = \xi_0 \sin\varphi \tag{2.4}$$

I izrazi (2.3), (2.4) predstavljaju jednačinu jednodimenzionalnog talasa. Ove jednačine se mogu napisati i u sledećem obliku:

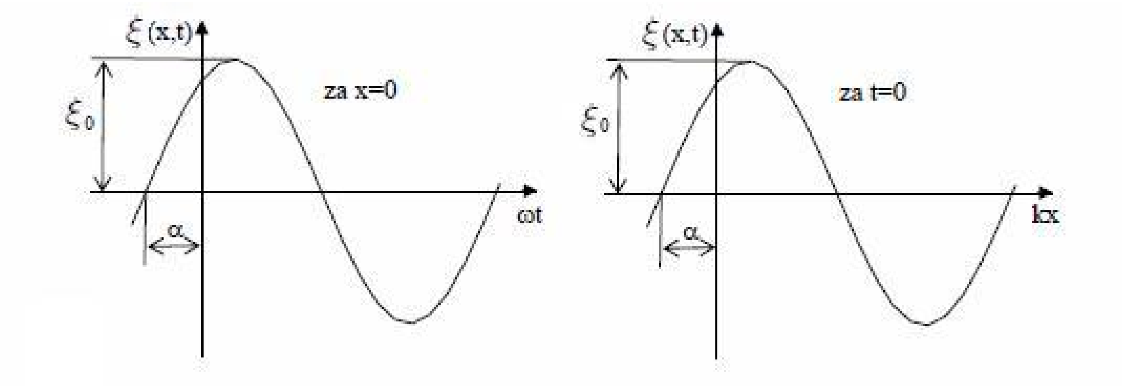
$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(\omega(t - \frac{x}{c}) + \alpha) = \xi_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{2\pi f x}{\omega c}\right) + \alpha\right] \tag{2.5}$$

$$\xi_0 \, sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \alpha\right] \;\; = \;\; \xi_0 \sin\varphi \tag{2.6}$$

U jednačini talasa datim izrazima (2.4), (2.6)

- $\xi$ je elongacija ili rastojanje čestice od ravnotežnog položaja
- $\xi_0$ je amplituda ili najveće rastojanje čestice od ravnotežnog položaja
- $\omega = 2\pi f$ predstavlja promenu faze talasa
- $f$ je frekvencija talasa
- $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ talasni broj i predstavlja promenu faze talasa po jedinici dužine
- $\lambda$ talasna dužina
- $c$ brzina talasa
- $\varphi = \omega t - kx + \alpha$ je faza talasa i ona predstavlja argument funkcije u jednačini talasa

Na slici 4 su prikazane vremenska i prostorna zavisnost elongacije




Slika 2.4: *Slika 4*

Relacija

$$\varphi \;\; = \;\; \omega t - kx + \alpha = const \tag{2.7}$$

povezuje vremenske trenutke $t$ i odgovarajući položaj čestice $x$ na kojima osciluje u istojj faz. Ako se izraz (2.7) napiše za dve čestice $x_1$ i $x_2$ pri čemu je $x_2 > x_1$ tj. dobija se

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \omega t_1 - kx_1 + \alpha \\
&= \omega t_2 - kx_2 + \alpha \\
&= const.
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Na osnovu izraza (2.8) se zaključuje da je proteklo vreme $t_2$ potrebno da druga čestica ima istu fazu kao prva u trenutku $t_1$ tj. da talas kasnije dolazi do druge čestice.

## 2.2 Jednačina talasa

Posmatrajmo poprečni presek kanala koji je konstantan u slučaju kada nema trenja i pod uticajem trenja. Pretpostavimo da je u kanalu voda svuda ista. Označimo dubinu vode sa $h$.

Prvo posmatrajmo slučaj kada nema trenja. Ako nema trenja tada nema premeštanja vode pa je u tom slučaju poprečni presek vode u vremenu $t$ i apcisi $x$ zadovoljava poznatu talasnu jednačinu :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gh\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{2.9}$$

Sada ćemo izavesti kako se dolazi uopšteno do talasne jednačine:

Neka je $\xi$ izduženje talasa, $x$ abcisa i $t$ vreme, posebno se vrši diferenciranje po $x$ i posebno po $t$ tj. rade se parcijalni izvodi po $x$ i po $t$. Sada ćemo pokazati kako se preko jednačine talasa dolazi do talasne jednačine. Ako pođemo od jednačine talsa u obliku:

$$\begin{aligned} \xi(x,t) &= \xi_0 \sin(\omega t - kx) \\ &= \xi_0 \sin\varphi \end{aligned} \tag{2.10}$$

dobija se da je:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(\xi_0 \sin\varphi) \\ &= \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (\xi_0 \cos\varphi)(-k) \\ &= -k\xi_0 \cos\varphi \\ &= -k\xi_0 \cos(\omega t - kx) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Sada ćemo da uradimo drugi izvod tj. vršimo parcijalno diferenciranje (2.11) po $x$ na isti nači tj. :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(-k\xi_0 \cos\varphi\right) \\
&= -k\xi_0(-\sin\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\
&= \left(k\xi_0 \sin\varphi\right)(-k) \\
&= -k^2\xi_0 \sin\varphi \\
&= -k^2\xi_0 \sin(\omega t - kx)
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Na sličan način se vrši diferenciranje po vremenu $t$. Parcijalni izvod po $t$ se obeležava sa $\frac{\partial \xi}{\partial t}$.

Ako pođemo od jednačine (2.10) dobija se da je :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\xi_0 \sin\varphi\right) \\
&= \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial t} \\
&= \left(\xi_0 \cos\varphi\right)(\omega) \\
&= \omega\xi_0 \cos\varphi \\
&= \omega\xi_0 \cos\left(\omega t - kx\right)
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Sada ćemo da uradimo drugi izvod tj. vršimo parcijalno diferenciranje (2.13) po $t$ na isti način tj. :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\omega\xi_0 \cos\varphi\right) \\
&= \omega\xi_0(-\sin\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial t} \\
&= \left(-\omega\xi_0 \sin\varphi\right)(\omega) \\
&= -\omega^2\xi_0 \sin\varphi \\
&= -\omega^2\xi_0 \sin(\omega t - kx)
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Kada jednačinu (2.12) podelimo sa $k^2$ , a jednačinu (2.14) sa $\omega^2$ , dobijaju se izrazi

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} &= -\xi_0 \sin\varphi \\
&= -\xi_0 \sin(\omega t - kx)
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= -\xi_0 \sin\varphi \\
&= -\xi_0 \sin(\omega t - kx)
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

$$
\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \tag{2.17}
$$

tj.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= \frac{\omega^2}{k^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \\
&= \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

Kako je $\omega/k = p$ jednačina (2.18) postaje

$$
\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = p^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \tag{2.19}
$$

Sada se vratimo našem problemu.

Ako sada uvedemo brzinu širenja talasa i to označimo sa $c = \sqrt{gh}$.
I ako povećamo visinu nivoa vode koju ćemo označiti sa $\eta$ dobijamo da je $\eta$ jednako:

$$
\eta = -h\frac{\partial\xi}{\partial x} \tag{2.20}
$$

Tada se isto zadovoljava ista diferencijalna jednačina:

$$
\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = gh\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} \tag{2.21}
$$

Ako pretpostavimo da se voda pokreće trenjem otpor pokretanja je srazmeran kvadratu brzine $\frac{\partial\xi}{\partial t}$, novi termin ulazi u jednačinu ona postaje hiperbolična kvadratna jednačina.

Definišemo koeficijent trenja $c_f$, tako da je sila trenja po jedinici površine je:

$$c_f \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 .$$

Onda je ukupna sila trenja u poprečnom preseku ploče za vodu debljine $dx$ i širina jedinice je

$$-c_f \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 dx$$

gde je $\rho$ specifična masa vode.

Jednačina pokretanja vode je:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{c_f}{2h} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 .$$

Sada se (2.20) u ovom slučaju menja u :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -gh \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{c_f}{2h} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2$$

Uzmimo sada da je $s = ct$ i da je $c = \sqrt{gh}$ u tom slučaju jednačina postaje:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{c_f}{2h} \left( \frac{\partial \xi}{\partial s} \right)^2 \tag{2.22}$$

Ovo je fundamentalna jednačina ovoga problema. U ovom slučaju ova jednačina je suštinski povezana sa promenljivom $\xi$. Nadmorska visina $\eta$ ne zadovoljava sličnu jednačinu.

## 2.3 Rešavanje fundamentalne jednačine

U ovom delu ćemo se baviti rešavanjem naše fundamentalne jednačine ovoga problema tj. jednačine (2.22) .

Kako imamo nelinearnost u jednačini (2.22) i ne možemo tražiti opšte rešenje na neki od standardnih načina potražićemo rešenje u obliku $\xi = \varphi(\zeta)$, gde funkcija $\varphi$ predstavlja pomeranje vode i gde je $\zeta = \frac{s+x}{s-x}$, .

Sada tražimo :

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} = \varphi'(\zeta)\frac{1-\zeta}{s-x} \qquad \varphi'(\zeta) = \frac{d}{d\zeta}\varphi(\zeta)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} &= \varphi''(\zeta)\left(\frac{1-\zeta}{s-x}\right)^2 - 2\varphi'(\zeta)\frac{1-\zeta}{(s-x)^2} \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= \varphi''(\zeta)\left(\frac{1+\zeta}{s-x}\right)^2 + 2\varphi'(\zeta)\frac{1+\zeta}{(s-x)^2} \end{aligned}$$

Zamenom ovih vrednosti u jednačinu (2.22) dobijamo:

$$\zeta\varphi''(\zeta) + \varphi'(\zeta) = \frac{c_f}{8h}(1-\zeta)^2\varphi'^2(\zeta). \tag{2.23}$$

Ovako dobijena jednačina je obična diferencijalna jednačina po $\varphi(\zeta)$. Možemo je napisati kao:

$$\frac{\varphi''}{\varphi'^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{1}{\varphi'(\zeta)} = \frac{c_f}{8h}\left(\frac{1}{\zeta} - 2 + \zeta\right).$$

Ako uvedemo smenu:

$$y = -\frac{1}{\varphi'(\zeta)} \qquad y' = \frac{\varphi''(\zeta)}{\varphi'^2(\zeta)}$$

Ova jednačina postaje linearna po $y$ :

$$y' - \frac{1}{\zeta}y = \frac{c_f}{8h}\left(\frac{1}{\zeta} - 2 + \zeta\right).$$

Uzmimo da je $y = v\zeta$, sa novom nepoznatom promenljivom $v$ dobijamo jednačinu :

$$v' = \frac{c_f}{8h}\left(\frac{1}{\zeta^2} - \frac{2}{\zeta} + 1\right).$$

Integracijom dobijemo novu jednacinu po $v$:

$$v = \frac{c_f}{8h}\left(-\frac{1}{\zeta} - 2\log\zeta + \zeta\right) + C$$

gde je $C$ konstanta integracije .

Vratimo pomoćnu promenljivu koju smo definisali i konačno dobijamo da je :

$$\begin{aligned}\varphi'(\zeta) &= -\frac{1}{y} \\ &= -\frac{1}{v\zeta}\end{aligned}$$

$$\varphi'(\zeta) = -\frac{1}{C\zeta + \frac{c_f}{8h}\left(\zeta^2 - 2\zeta\log\zeta - 1\right)}.$$

Znamo da je:

$$\zeta = \frac{s+x}{s-x}$$

ili

$$\zeta = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \qquad \alpha = \frac{x}{s} = \frac{x}{t\sqrt{gh}}$$

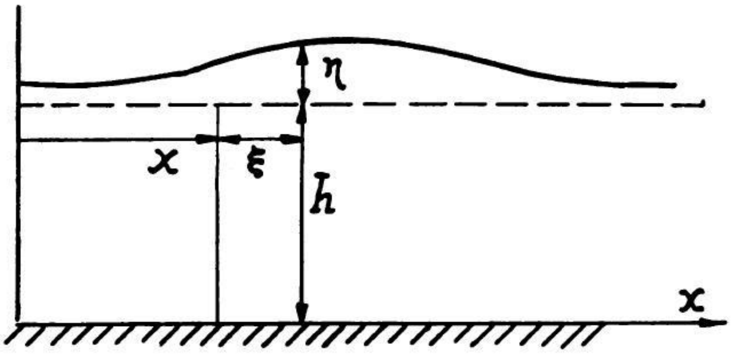
$$\varphi'(\alpha) = -\frac{1}{C\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{c_f}{8h}\left[\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^2 - 2\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\log\frac{1+\alpha}{1-\alpha} - 1\right]} \tag{2.24}$$

Sada stavimo da je

$$k = \frac{2}{Ch}$$

$$\varphi'(\alpha) = -\frac{kh}{2\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{c_f k}{8}\left[\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^2 - 2\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\log\frac{1+\alpha}{1-\alpha} - 1\right]}$$

Vrednost $\varphi'(\alpha)$ je regularna i definisana je između dve vrednosti $\alpha = 0$ i $\alpha = 1$ . To međutim nije jedino rešenje jednačine (2.23) , što takođe zadovoljava i singularno rešenje $\varphi'(\alpha) = 0$




Slika 2.5: *Slika 5*

Stoga možemo uzeti kao rešenje jednačine (2.23) isprekidnu f-ju koja je:

$$\varphi'(\alpha) = -\frac{kh}{2\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{c_f k}{8}\left[\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^2 - 2\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\log\frac{1+\alpha}{1-\alpha} - 1\right]} \tag{2.25}$$

$$\text{za } 0 \leq \alpha \leq 1$$

i $\varphi'(\alpha) = 0$ za $\alpha > 1$

Da bi mogli da izračunamo $\xi$ tj. pomeranje vode, potrebna nam je sama f-ja $\varphi(\zeta)$. Kao što ćemo videti ovo nam nije neophodno da znamo da bi analizirali rešenje sa fizičke tačke gledišta.

## 2.4 Fizičko tumačenje rešenja

Uzmimo da je visina vode $\eta$ data sa:

$$\begin{aligned}\eta &= -h\frac{\partial \xi}{\partial x} \\ &= -h\varphi'(\zeta)\frac{\partial \zeta}{\partial x}.\end{aligned}$$

Korišćenjem vrednosti (2.25) od $\varphi'(\zeta)$, napominjući da je:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{2}{s(1-\alpha)^2}$$

dobijamo da je relativna nadmorska visina vode između $\alpha = 0$ i $\alpha = 1$

$$\frac{\eta}{h} = \frac{h}{s}\frac{k}{(1-\alpha^2) + \frac{c_f k}{4}[\alpha - \frac{1}{2}(1-\alpha^2)\log\frac{1+\alpha}{1-\alpha}]} \tag{2.26}$$

za $\alpha > 1$ dobijamo prema (2.25)

$$\frac{\eta}{h} = 0$$

Vrednost $\eta$ predstavlja amplitudu talasa kao što je prikazano na slici 6. Na primer za $k = 1$ i $\frac{c_f k}{4} = 0.5$, oblik talasa će biti kriva ABCD. U tački B imamo vertikalni nagib. Dužina BC predstavlja nadmorsku visinu talasa, njegova relativna vrednost dobijena je iz opšte formule (2.26) za $\alpha = 1$

$$\frac{\eta}{h} = \frac{4}{c_f}\cdot\frac{h}{s}$$

odnosno pošto je $s = t\sqrt{gh}$,

$$\frac{\eta}{h} = \frac{4}{c_f}\cdot\frac{h}{t\sqrt{gh}}.$$

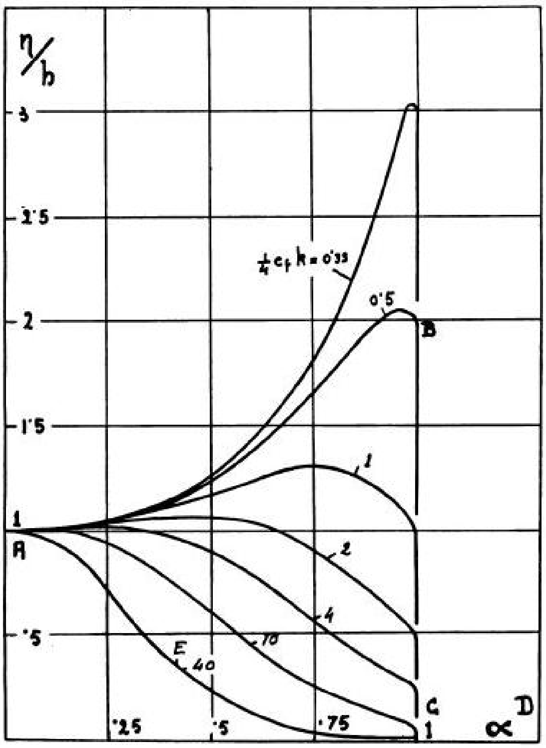
To je obrnuto proporcionalno vremenu i koeficijentu trenja $c_f$. Talasni front uvek se poklapa sa $\alpha = 1$ ili $\frac{x}{t\sqrt{gh}} = 1$, što znači da se talasni front pokreće brzinom koja je data sa :

$$c = \sqrt{gh}.$$

Na početku $\alpha = 0$ ili $x = 0$, realativna brzina talasa je :

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{h} &= k\frac{h}{s} \\ &= k\frac{h}{t\sqrt{gh}} \end{aligned} \tag{2.27}$$

Takođe treba napomenuti da je oblast talasne krive nezavisna od vremena. Dužina varira $s = t\sqrt{gh}$ a visina je proporcionalna $\frac{1}{s} = \frac{1}{t\sqrt{gh}}$.
Na primer oblik talasa je ABCD (za $k = 1$ i $\frac{c_f k}{4} = 0.5$) može se prikazati u različitim trenucima kako što je ilustrovano slikom 7.

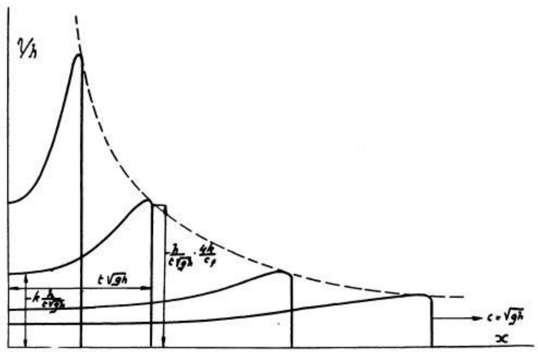



Slika 2.6: *Slika 6*

### Razni oblici talasa– (odnos koeficijenata $\frac{c_f k}{4}$)

Na slici 6 su iscrtane krive $\frac{\eta}{h}$ za vrednosti $k = 1$ i za različite vrednosti $\frac{c_f k}{4}$.

Velike vrednosti za $\frac{c_f k}{4}$ prouzrokovaće ili velike vrednosti za amplitude ili velike vrednosti za koeficijente trenja. Ovakvi talasni frontovi se šire napred i dalje se šire istom brzinom $c = \sqrt{gh}$, ali vrednost njihovih amplituda je mala u odnosu na promenu nadmorske visine talsa. Kod talasnih frontova energija talasa se ne širi tako brzo već se širi samo za deo talasne brzine .
Na primer ako je $\frac{c_f k}{4} = 40$, u tom smo slučaju kod tačke E, nadmorska visina je $0.38\frac{h}{t\sqrt{gh}}$ i ona se rasprostire brzinom $c' = 0.4\sqrt{gh}$.
Za male vrednosti trenja ili amplitude tada je i koeficijent $\frac{c_f k}{4}$ mali. U tom slučaju kao što se vidi na slici 6. najveći deo energije čuva se u talasnim frontovima.



Slika 2.7: *Slika 7*

Dobijamo izrazito dve vrste talasa. Talasi koji imaju strmiji talasni front za vrednosti $\frac{c_f k}{4} < 1$ i prigušene talase koji imaju niži talasni front za vrednosti $\frac{c_f k}{4} > 1$. Ovaj koeficijent $\frac{c_f k}{4}$ može se nazvati i "oblik faktora" i on određuje oblik talasa. Važno je napomenuti da se ukaže na činjenicu da je ovaj "oblik faktor" proizvod trenja sa faktorom $k$ od kojih zavisi oblik ili prosečna nadmorska visina talasa. Fizički smisao ovoga je jasan kada se setimo da mi ovde imamo kvadratni zakon trenja koji glasi:" Što su veće amplitude talasa i brzina ,time je veće i ukupno trenje". Zakon trenja je u potpunosti sa našim priorodnim intuicijama, kadvratni zakon trenja ukazuje na porast snage kod prigušenih talasa kada se visina talasa povećava. Ovo je nova karakteristika u teoriji talasa, uveden je nelinearni karakter u teoriji talasne jednačine.

**Određivanje k (Faktor zapremine)** - Koeficijent trenja $c_f$ je trebalo da se dobije preko fizičkih uslova kanala. U tom slučaju vrednost $k$ će u potpunosti zavisiti od prosečne visine talasa. Beskonačan broj talasa se može pojaviti u kanalu, osim u onima koje smo mi proučavali ili istraživali u zavisnosti od početne brzine i uzvišenja. Međutim ako počnemo istraživati od lokalnog oticanja ono će u početku mirovati a kasnije će se širiti i deformisati u talase iste prosečne visine koje smo gore istraživali. Vreme zavisi od visine talasnog fronta kako što pokazuje jednačina (2.27). Prosečna visina ili zapremina je određena koeficijentom $k$ i on se koristi za određivanje teoretske krive. Vrste početnog stanja mogu biti grubo indetifikovani sa uslovima koji se izvode iz nagle količne vode u datoj tački reke ili kanala i propragira se kao poplavni talas.

## 2.5 Putujući talasi

### 2.5.1 Putujući talasi u dubokoj vodi

Prvo objasnimo šta su to putujući talasi: jednostavni talasi ili putujući talasi često se nazivaju progresivnim talasima čiji poremećaj varira sa vremenom $t$ i rastojanjem $x$. Možemo ih prikazati na primer na sledeći način:

$$\begin{aligned} \xi(x,t) &= \xi_0(x,t)\cos(kx-\omega t+\varphi_0) \\ &= \xi_0(x,t)\sin(kx-\omega t+\underbrace{\varphi_0 \pm \frac{\pi}{2}}_{\tilde{\varphi}_0}) \end{aligned}$$

gde je $\xi_0$ - amplituda , $\omega$ i $k$ - ugao frekvencije i talasni broj ,
$\varphi_0$ ili ($\tilde{\varphi}_0$) - početna faza .

Amplituda $\xi_0$ označava maksimalno rastojanje od najviše tačke grebena do ravnoteže.

Faza $\varphi = kx - \omega t + \varphi_0$ , gde je $\varphi_0$ početna faza koju često nazivaju samo faza.

Posmatrajmo dvodimenzionalne vodene talase $\chi = [\xi(x,y,t), v(x,y,t), 0]$ Posmatrajmo kako voda protiče: pretpostavićemo da nema viskoznosti ($\nu = 0$), da je bezvrtležno ($\delta = 0$), nestišljiva $\bigtriangledown \cdot \xi = 0$ , $2D$ (po $x$ i $y$, nezavisno po $z$). Sada ćemo da objasnimo pretpostavke. Šta znači da je $\delta = 0$

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\xi = \tfrac{\partial \phi}{\partial x} \quad , \quad v = \tfrac{\partial \phi}{\partial y} \qquad \text{tj.} \qquad \chi = \bigtriangledown \phi$$

gde je $\phi$ brzina potencijala.

Onda se dobija iz $\bigtriangledown \xi = 0 \Longrightarrow$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

to je Laplasova jednačina .

A $\bigtriangledown \xi = 0$ se dobija kada je:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

uzmimo da je

$$\xi = \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad \text{i} \quad v = -\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

Stavimo $\chi = \bigtriangledown\phi$, tako da je

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0. \tag{2.28}$$

Vodena površina nasteaje iz deformisanja glatkih pokreta. Jednačinu takvih površine označavamo sa $y = \eta(x,t)$ . Čestice tečnosti na slobodnoj površini moraju ostati na površini.

Kinematički uslov podrazumeva da je $F(x,y,t) = y - \eta(x,t)$ to i dalje konstanta (ustvari to je jednako nuli) za bilo koju česticu na slobodnoj površini što znači da je:

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\xi \cdot \nabla)F = 0 \quad \text{na} \quad y = \eta(x,t)$$

i ovo je ekvivalentno

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \xi\frac{\partial\eta}{\partial x} = v \quad \text{na} \quad y = \eta(x,t)$$

Tečnost je viskozna tako da je kod stanja na slobodnooj površini pritisak $p$ jednak atmosferskom pritisku $p_0$.

$$p = p_0 \quad \text{na} \quad y = \eta(x,t)$$

Sada ćemo da opisujemo kako se dolazi do Bernulijeve jednačine za nestacionarni tok bezvrtležnosti:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\xi|^2 + \frac{p}{\rho} + gy = G(t).$$

gde je $G(t)$ proizvoljna funkcija vremena.
Sada ćemo izbrati da je $G(t) = \frac{p}{\rho}$ , onda možemo da napišemo uslov pritiska:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\xi^2 + v^2) + g\eta = 0 \quad \text{na} \quad y = \eta(x,t)$$

Zapremina slobodne površine $\eta(x,t)$ , i brzina tečnosti $\xi$ i $v$ su mali

- Linearni kinetički uslov

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{\partial\eta}{\partial t} + \underbrace{\xi\frac{\partial\eta}{\partial x}}_{mali} \longrightarrow v(x,\eta,t) \\
&= \frac{\partial\eta}{\partial t} \overset{Tejlor}{\longrightarrow} v(x,o,t) + \underbrace{\eta\frac{\partial y}{\partial y}(x,0,t)+\ldots}_{mali} \\
&= \frac{\partial\eta}{\partial t} \\
\longrightarrow v(x,o,t) &= \frac{\partial\eta}{\partial t} \overset{v=\frac{\partial\phi}{\partial y}}{\longrightarrow} \frac{\partial\phi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial\eta}{\partial t}
\end{aligned}
$$

na $y = 0$

- Linearni uslov pritiska

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \underbrace{\frac{1}{2} + (\xi^2 + v^2)}_{mali} + g\eta = 0 \longrightarrow \frac{\partial\phi}{\partial t} + g\eta = 0 \qquad \text{na} \qquad y = 0$$

gde je $\eta(x,t) = \xi_0 \cos(kx - \omega t)$.

Odgovarajuća brzina potencijal :

$$\phi = f(y)\sin(kx - \omega t)$$

koja zadovoljava Laplasovu jednačinu $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$

Dakle $f(y)$ mora da zadovoljava $f" - k^2 f = 0$ , čije je opšte rešenje:

$$f = Ce^{ky} + De^{-ky}$$

Za duboke vodene talase $D = 0$ (ako je $k > 0$ što se može pretpostaviti bez gubitka opštosti ) kako bi brzina bila ograničena kada $y \longrightarrow \infty$.

Posmatrajmo brzinu potencijala (za duboke vodene talase) koja izgleda

$$\phi = Ce^{ky}\sin(kx - \omega t)$$

Sada ćemo na osnovu kinetičkog uslova $\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial t}$ na $y = 0$

$$Ck = \xi_0\omega \qquad \phi = \tfrac{\xi_0\omega}{k} e^{ky}\sin(kx - \omega t),$$

uslov pritiska $\frac{\partial\phi}{\partial t} + g\eta = 0$ na $y = 0$

$$-C\omega + g\xi_0 = 0 \longrightarrow \omega^2 = gk$$

gde je $\omega^2$ relacija disperzije.

Možemo izračunati putanju fluidnih mrlja ('čestica'):

$$\chi = \nabla\phi = \left(\frac{\partial X}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial t}, 0\right),$$

$\Longrightarrow (X, Y, 0)$ : pomeranje iz srednje pozicije .

To su krugovi sa poluprečnicima $\infty\ e^{ky}$ , koji od propadanja faktor $e$ u dubinu $1/k = \lambda/2\pi$ , gde je $\lambda-$ horizontalna dužina talasa (pa dubina vode mora biti $\gg \lambda/2\pi$) .

Iz odnosa disperzije dobijamo faznu brzinu:

$$\begin{aligned} c_p &= \frac{\omega}{k} \\ &= \sqrt{\frac{g}{k}} \\ &= \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \end{aligned}$$

to zavisi od $k$, $\Longrightarrow$ talasi su disperzivni : različite talasne dužine imaju različite fazne brzine ( )

Grupna brzina:

$$\begin{aligned} c_g &= \frac{d\omega}{dk} \\ &= \frac{1}{2}c_p \end{aligned}$$

Energija se pokreće na grupnoj brzini $c_g$: npr. pad kamena u ribnjak : nakon izvesnog vremena dobili smo širi model: Vrhovi i korita se pomeraju na $c_p$, paket se pomera na $\frac{1}{2}c_p$, tako da vrhovi napadaju kroz paket.

Ako postoje različite talasne dužine tada duži talasi
(kada je veći $c_p$) se pojavljuju ka spoljnoj ivicu.

## 2.6 Talasi na vodi konačne dubine : disperzija i nelinearnost

Sada smo posmatrali talase koji su opisani u (2.5.1) i bili su u dubokoj vodi ( dubina je bila $\gg \lambda/2\pi$ ) . Sada pretpostavljamo da dubina nije $\gg \lambda/2\pi$ :

Sada je vertikalna brzina $v = \partial\phi/\partial y = 0$ na $y = -h$. Ponovo uzimamo da je:

$$\eta(x,t) = \xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

i

$$\phi = f(y) \sin(kx - \omega t).$$

Ponovo dobijamo $f(y) = Ce^{ky} + De^{-ky}$. Da bi se zadovoljilo sve od pre mora biti da je $f = E \cosh k(y + h)$.

Sada je odnos disperzije

$$\omega^2 = gk \tanh kh.$$

Takođe

$$\begin{aligned} c_p &= \frac{\omega}{k} \\ &= \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh}. \end{aligned}$$

Ako je voda plitka ($h \ll \lambda/2\pi$) , $kh \ll 1$, $\tanh kh \approx kh$, tada je

$$c_p \approx c_0 \equiv \sqrt{gh}, \qquad \text{nezavisna} \quad \text{po} \quad k.$$

To su ne disperzivni "dugi talasi" ($\lambda \gg 2\pi h$), sa

$$\begin{aligned} c_g &= \frac{d}{dk}(c_0 k) \\ &= c_p \end{aligned}$$

na primer cunami na otvorenom okeanu .

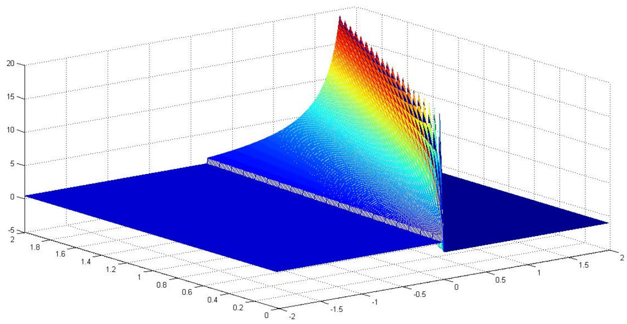
Ako su talasi prilično dugi , na primer

$$\tanh kh \approx kh - k^3h^3/3,$$

$$
\begin{aligned}
c_p &\approx \sqrt{gh - \frac{g}{3}k^2h^3} \\
&= c_0\sqrt{1 - \frac{k^2h^2}{3}} \qquad (2.29)\\
&\approx c_0\left(1 - \frac{k^2h^2}{6}\right).
\end{aligned}
$$

Ovi talasi su ”malo disperzivni” .

$$
\begin{aligned}
c_g &= \frac{d}{dk}(kc_p) \\
&= c_0(1 - \frac{1}{2}k^2h^2) \qquad (2.30)\\
&\neq c_p.
\end{aligned}
$$




Slika 2.8: *Talas*

# Zaključak

U ovom master radu dat je pregled osnovnih pojmova i osobina vodenih talasa i talasnih jednačina.

Kao što smo videli, talasna jednačina je jedna veoma bitna parcijalna diferencijalna jednačina.

Tačno rešenje jednačine prostiranja talasa sa kvadratnim prigušenjem je pronadjeno. To pokazuje da se talasi sa visokim amplitudama više prigušeni i kako ovaj efekat prigušenja zavisi i od zapremine talasa i od kpeficijenta trenja kanala. Rešenje se može tumačiti predstavljeno preko fizičkih određivanja poplavnih vrsta talasa.

Što se tiče primene vodenih talasa oni se koriste u energetici za dobijanje energije, a što se tiče primene talasnih jednačina njihova primena je jako velika u poljima mehanike i elektromagnetike

Sama tema rada za mene je bila veoma interesantna i inspirativna. Budući da je tema savremena, gotovo da nema literature na srpskom jeziku o njoj. Stoga prezentovani materijal predstavlja dobru osnovu čitaocu za upoznavanje sa osnovnim pojmovima o vodenim talasima i talasnim jednačinama i ujedno pruža smernice za dalje istraživanje i produbljivanje.

# Literatura


[1] M.A.Biot, Quadratic Wave Equation-Flood Waves in a Channel With Quadratic Friction, Graduates School Of Engineering, Harvard University, 1935.

[2] W.Strauss, Partial Different Equations An Introduction, Wiley, 2008.

[3] G.B.Whitham, Linear and Nonlinear Waves, Wiley, 1974.

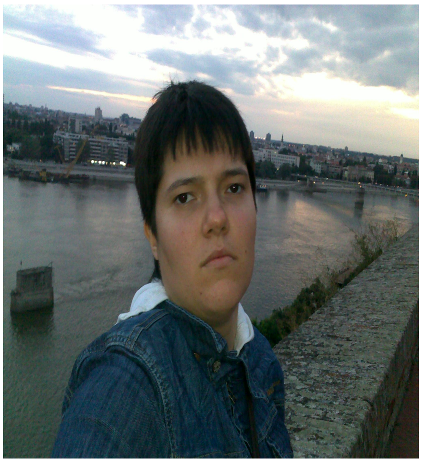
[4] M.F.Mahmood, Diane Henderson, Harvey Segur, Water Waves Theory and Experiment, World Scientific, 2010

[5] D.J.Acheson's, Elementary Fluid Dynamics, Oxford University Press, 1990

[6] D.J.Tritton, Physical Fluid Dynamics, Oxford University Press, 1977

[7] Hilary Ockendon, John R. Ockendon, Waves and Compressible Flow, Springer - Verlag New York, 2004

# Kratka biografija



Kamelija Ivetić je rođena 28. jula 1988. godine u Livnu. Završila je Osnovnu školu "Danilo Zelenović" u Sirigu 2004. godine. Potom upisuje Gimnaziju "Svetozar Miletić" u Srbobranu, opšti smer, koju završava 2008. godine,kao odličan učenik. Iste godine upisuje Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer matematika finansija. Zaključno sa junskim ispitnim rokom 2011. godine položila je sve predviđene ispite. Potom upisuje master studije na istom fakultetu, smer primenjena matematika. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom zaključno sa junskim ispitnim rokom 2013. godine i time stekla uslov za odbranu master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
**RBR**

Identifikacioni broj:
**IBR**

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
**TD**

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
**TZ**

Vrsta rada: Master rad
**VR**

Autor: Kamelija Ivetić
**AU**

Mentor: dr Marko Nedeljkov
**MN**

Naslov rada: Vodeni talasi i talasna jednačina
**NR**

Jezik publikacije: srpski (latinica)
**JP**

Jezik izvoda: s / e
**JI**

Zemlja publikovanja: Srbija
**ZP**

Uže geografsko područje: Vojvodina
**UGP**

Godina: 2013.
**GO**

Izdavač: Autorski reprint
**IZ**

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
**MA**

Fizički opis rada: (3, 63, 18, 0, 4, 0, 0)
**FO**

Naučna oblast: Matematika
**NO**

Naučna disciplina:Analiza i verovatnoća
**ND**

Predmetna odrednica / Ključne reči: Talasna jednačina, talasi i PDJ drugog reda
**PO**

**UDK**

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
**ČU**

Važna napomena:
**VN**

Izvod: U prvom delu rada smo izveli kako se dolazi do talasne jednačine kada se posmatra žica preko njutnovog zakona . Zatim smo opisali kako se rešavaju talasne jednačine , pa smo izveli Dalamberovu formuli , objasnili energetski metod i objasnili reflekcione talase.U drugom delu rada smo opisali šta je talasno kretanje i opisali glavne pojmove kao što su: oscilovanje , talasni front , period talasa , talasna dužina. Zatim smo opisivali jednačinu talasa , opisano je i šta se dešava kada se posmatra voda u kanalu pod uticajem trenja i kada nema uticaja trenja iz toga smo izveli fundamentalnu jednačinu pa smo opisali rešavanje fundamentalne jednačine i dali smo fizičko tumačenje rešenja. Zatim smo opisivali putujuće talase.
**IZ**

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 11.06.2013.
**DP**

Datum odbrane: Septembar 2013.
**DO**

Članovi komisije:
**KO**

| | |
|---|---|
| Predsednik: | dr Nataša Krejić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu |
| Član: | dr Marko Nedeljkov, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor |
| Član: | dr Sanja Konjik, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu |

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
**ANO**

Identification number:
**INO**

Document type: Monograph type
**DT**

Type of record: Printed text
**TR**

Contents Code: Master's thesis
**CC**

Author:Kamelija Ivetić
**AU**

Mentor: Marko Nedeljkov, Ph.D.
**MN**

Title: Water wave and the wave equation
**TI**

Language of text: Serbian
**LT**

Language of abstract: English
**LA**

Country of publication: Serbia
**CP**

Locality of publication: Vojvodina
**LP**

Publication year: 2013.
**PY**

Publisher: Author's reprint
**PU**

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
**PP**

Physical description: (3, 63, 18, 0, 4, 0, 0)
**PD**

Scientific field: Mathematics
**SF**

Scientific discipline:Analysis and probability
**SD**

Subject / Key words:Wave equations, waves and the second order PDE
**SKW**

**UC:**

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
**HD**

Note:
**N**

Abstract: In the first part we took to get to the wave equation when looking at strings through Newton's laws. We then describe how to solve the wave equation, so we did Dalamberovu formula, the energy method is explained and explained reflections of waves.In the second section we describe what the wave motion and describe the main concepts such as: the oscillation, wave front, wave time, wave length. We then describe the wave equation is described and what happens when we observe the water in the channel under the influence of friction and friction when there is no impact from that we derived a fundamental equation and we describe the fundamental solution of the equation and we give a physical interpretation of the solution. We then describe traveling waves.
**AB**

Accepted by the Scientific Board on: 11.06.2013.
**ASB**

Defended: September 2013.
**DE**

Thesis defend board:
**DB**

| | |
|---|---|
| President: | Dr Nataša Krejić, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad |
| Member: | Dr Marko Nedeljkov, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, supervisor |
| Member: | Dr Sanja Konjik, assistant professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad |