UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Jovana Vujičić

Uslovni heteroskedastični modeli vremenskih serija

-MASTER RAD-

Novi Sad, 2014.

Sadržaj

Uvod

Analiza vremenskih serija je statistička disciplina koja se veoma razvila u poslednjim decenijama. Vremenska serija predstavlja uređeni niz opservacija pri čemu se uređenje ostvaruje u odnosu na vreme. Vremenske serije prisutne su u raznim naučnim oblastima. Pored meteorologije i demografije u kojima se vremenskim serijama opisuju, na primer, temperatura vazduha odnosno kretanje stope nataliteta i mortaliteta, vremenske serije su u velikoj meri zastupljene i u ekonomskim naukama. Takve vremenske serije nazivaju se finansijske vremenske serije. Njima se opisuje kretanje cena na tržištu, godišnja proizvodnja, izvoz, ali i promena cene akcija na berzi i sl.

Analiza finansijskih vremenskih serija se odnosi na teoriju i praksu određivanja vrednosti finansijskih aktiva tokom vremena. Finansijske vremenske serije odlikuju dve karakteristike koje ih znatno razlikuju od ostalih vremenskih serija, a to su: varijacija i neodređenost. Upravo zbog postojanja neodređenosti, u analizi ovih vremenskih serija primenjuju se statistički metodi.

Mera neodređenosti finansijskih vremenskih serija je ***volatilnost***. Pomoću volatilnosti direktno opisujemo rizik promene vrednosti nekog finansijkog derivata. U matematičkom smislu, volatilnost predstavlja uslovnu standardnu devijaciju prinosa. Problem je taj što se volatilnost ne može registrovati, pa je zbog toga neophodno da je modeliramo. Osobina da se volatilnost menja tokom vremena naziva se heteroskedastičnost i karakteristična je za finansijske vremenske serije (periodi velikih promena cena smenjuju se sa periodima kada se cena malo menja). Kako je kod klasičnih ekonometrijskih modela jedna od osnovnih pretpostavki konstantna varijansa, R. Engle je 1982. godine uveo novu klasu stohastičkih procesa, pod nazivom ***autoregresioni uslovni heteroskedastični (ARCH) procesi***. Ovi procesi imaju očekivanje nula, serijski su nekorelisani sa varijansom koja nije konstantna i zavisi od prošlosti, ali imaju konstantnu bezuslovnu varijansu.

Tema ovog rada su uslovni heteroskedastični modeli vremenskih serija. U radu su date teorijske osnove i primene ARCH, GARCH i EGARCH modela vremenskih serija. Ovi modeli imaju za cilj da daju neku od mera volatilnosti koju je moguće koristiti pri donošenju bitnih finansijskih odluka.

U uvodnom delu biće dati osnovni pojmovi prinosa aktive i osobine njihove raspodele verovatnoća, kao i volatilnosti. Takođe biće izloženi i ključni pojmovi za slučajne procese kao što su stacionarnost, autokorelaciona i autokovarijaciona funkcija procesa. U drugom delu biće izloženi osnovni pojmovi analize linearnih vremenskih serija. Biće predstavljeni i neki od modela linearnih vremenskih serija kao što su: autoregresioni (AR) model, model pokretnih proseka (MA) i autoregresioni model pokretnih proseka (ARMA). Biće data kratka analiza ovih modela i predviđanje budućih vrednosti vremenskih serija na osnovu ovih modela.

Centralno mesto rada zauzimaju uslovni heteroskedastični modeli. Pre njihovog uvođenja, biće objašnjene osnovne karakteristike uslovne heteroskedastičnosti. Zatim će biti date strukture modela ovakvih vremenskih serija. Predstavićemo izgradnju ARCH, GARCH i eksponencijalnog GARCH (EGARCH) modela. Prikazaćemo prednosti i mane ovih modela kao i njihovu primenu na finansijskim tržištima.

U poslednjem delu ćemo kroz primer stvarnih vremenskih serija na tržištu prikazati primenu uslovnih heteroskedastičnih modela vremenskih serija pri donošenju odluka.

Novi Sad, 2014 Jovana Vujičić

1

Uvod u analizu vremenskih serija

1.1 Slučajni procesi i vremenske serije

Pre nego što počnemo da definišemo pojmove stohastičkog (slučajnog) procesa i vremenske serije, podsetićemo se nekih osnovnih pojmova i definicija iz verovatnoće i stohastike ([4],[5]).
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$ - skup elementarnih događaja, tj. skup svih ishoda nekog eksperimenta.

Definicija 1.1.1 *Neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}\ (\Omega)$. Ako važe sledeći uslovi:*
1.$\Omega \in \mathcal{F}$
2.$A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$
3.$\{A_i\}_{i \subseteq \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{i \subseteq \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$
*tada je $\mathcal{F}$ **σ-polje** (σ-algebra) nad Ω.*

Definicija 1.1.2 *Najmanje σ-polje koje sadrži sve otvorene podskupove od $\mathbb{R}^n$ zove se **Borelovo σ-polje** nad $\mathbb{R}^n$ i označavamo ga sa $\mathcal{B}\ (\mathbb{R}^n)$ ili $\mathcal{B}^n$.*

Definicija 1.1.3 *Preslikavanje (funkcija) $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ koje zadovoljava uslove:*
1.$P(\Omega) = 1$
2.$\{A_i\}_{i \subseteq \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ i $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j \Rightarrow P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
*zove se **verovatnoća** nad $(\Omega, \mathcal{F})$. Trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ naziva se **prostor verovatnoća**.*

Definicija 1.1.4 *Preslikavanje $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ zove se **n-dimenzionalna slučajna promenljiva** ako je zadovoljeno da za svako $S \in \mathcal{B}^n$ važi:*

$$X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$$

kažemo da je tada X $\mathcal{F}$ -merljivo.

Definicija 1.1.5 ***Slučajni (stohastički) proces** je familija slučajnih promenljivih $\{X_t(\omega) : t \in T, \omega \in \Omega\}$ definisanih nad istim prostorom verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ a gde je T indeksni skup.*

Ako fiksiramo $t \in T$, tada $X_t(\Omega)$ predstavlja slučajnu promeljivu definisanu na skupu elementarnih događaja Ω. Ukoliko, pak, fiksiramo $\omega \in \Omega$, tada skup vrednosti slučajnih promenljivih $X_t(\Omega)$ postaje funkcija skupa indeksa T.

Postoji više načina da definišemo indeksni skup T. U zavisnosti od toga kako definišemo ovaj skup, dobijamo različite slučajne procese. Naime, ako je $T = \mathbb{R}$ ili $T \subseteq \mathbb{R}$ onda je naš slučajni proces definisan na realnoj pravoj i naziva se slučajan proces sa neprekidnim parametrom (oznaka: $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$).
Sa druge strane, ako je skup T skup celih ili prirodnih brojeva, onda se slučajni proces naziva slučajan proces sa prekidnim (diskretnim) parametrom (za $T = \mathbb{N}$ oznaka je $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$).

Definicija 1.1.6 *Neka je skup* $\zeta = \{(t_1, t_2, ..., t_n) \in T^n, t_1 < t_2 < ... < t_n, n = 1, 2, ...\}$. *Funkcije* $\{F_t(\cdot), t \in \zeta\}$ *definisane sa:*

$$F_t(x) = P\{X_{t_1} < x_1, X_{t_2} < x_2, ..., X_{t_n} < x_n\}, (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

zovu se ***konačno dimenzionalne funkcije raspodele*** *stohastičkog procesa.*

Definicija 1.1.7 *Stohastički proces* X_t *je* ***Gausovski proces*** *ako sve njegove konacno dimenzionalne funkcije raspodele imaju višedimenzionalnu normalnu raspodelu.*

Neka svojstva stohastičkih procesa:
1. Srednja vrednost (očekivanje) procesa X_t:

$$E(X_t) = \mu_t, t \in T$$

2. Disperzija procesa X_t:

$$Var(X_t) = E(X_t^2) - E^2(X_t) = \sigma_t, t \in T$$

3. Kovarijansa procesa X_t:

$$cov(X_t, X_t) = E((X_t - E(X_t))(X_s - E(X_s))) = \gamma_X(t, s), t, s, \in T$$

4. Koeficijent korelacije:

$$\rho_X(t, s) = \frac{E(X_t X_s) - E(X_t)E((X_s)}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_s)}}, t, s \in T$$

Kako je tema rada vezana za finansijske vremenske serije, razmatraćemo niz slučajnih promenljivih uređenih u odnosu na skup prirodnih brojeva, tj. $T = \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$. U ovom slučaju će indeksni skup T predstavljati trenutke u vremenu.

Što se tiče definicije vremenske serije, autori nemaju jedinstven stav. U literaturi su najzastupljenije dve varijante. Prva kaže da je vremenska serija jedna realizacija slučajnog procesa, a druga da nema razlike između ova dva pojma.

Definicija 1.1.8 ***Vremenska serija*** *je familija slučajnih promenljivih uređenih u odnosu na vreme.*

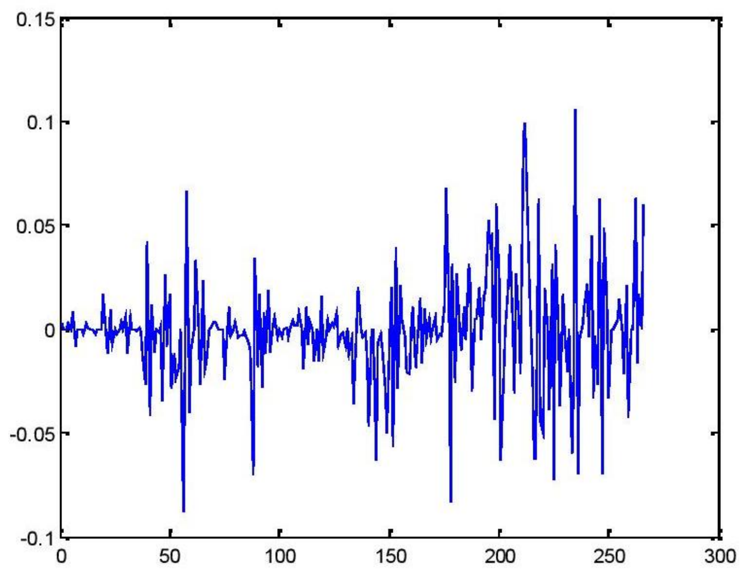
Definicija 1.1.9 *Vremenska serija X_t je* ***strogo stacionarna*** *ako za bilo koja dva prirodna broja n i k i bilo koju n-torku prirodnih brojeva $(t_1, t_2, ..., t_n)$ slučajni nizovi $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ i $(X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, ..., X_{t_n+k})$ imaju istu raspodelu verovatnoća.*

Dakle, stogo stacionarna vremenska serija je ona čija se svojstva ne menjaju transliranjem u vremenu.

Definicija 1.1.10 *Za vremensku seriju X_t kažemo da je* ***slabo stacionarna*** *ukoliko važe sledeći uslovi:*
1. $E(X_t) = \mu = const, t = 1, 2, ...$
2. $Var(X_t) = E(X_t - \mu)^2 = const, t = 1, 2, ...$
3. $cov(X_t, X_{t-k}) = E(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu) = \gamma(k) = \gamma_k, t = 1, 2, ..., k = 1, 2, ...$

Iz definicije zaključujemo da su srednja vrednosti i varijansna slabo stacionarnih serija konačne (tj. ne menjaju se tokom vremena), a da je kovarijansa invarijantna u odnosu na vreme. Lako je uočiti da iz stroge stacionarnosti sledi slaba stacionarnost, ali obrnuto ne mora da važi. Specijalan slučaj su Gausovski procesi kod kojih slaba stacionarnost implicira strogu.

Stacionarnost vremenskih serija je ključna pri njihovoj analizi. U zavisnosti od toga da li je vremenska serija stacionarna ili ne, biramo različite statističke metode za analizu. U tom smislu, vremenske serije delimo na stacionarne i nestacionarne. Ukoliko se svojstva vremenske serije tokom vremena ne menjaju onda je vremenska serija stacionarna. U suprotnom, odnosno ako su parametri kretanja vremenske serije funkcije vremena ona je nestacionarna. Pri analizi



Grafik 1.1: Primer stacionarne vremenske serije

finansijskih vremenskih serija najčešće se pretpostavlja da su slabo stacionarne.

Definicija 1.1.11 *Neka je X_t slabo stacionarna vremenska serija čije je očekivanje $E(X_t) = \mu$. Takva vremenska serija je* ***ergodična*** *u odnosu na srednju vrednost ako važi uslov:*

$$\bar{X} \xrightarrow{p} \mu, T \to \infty$$

gde je $\bar{X} = \dfrac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} (X_i)$.

Dakle, vremenska serija je ergodična u odnosu na srednju vrednost ako aritmetička sredina datog skupa konvergira u verovatnoći ka stvarnoj srednjoj vrednosti vremenske serije kako povećavamo obim uzorka.
Za vremenske serije ovo znači da sa povećanjem dužine vremenske serije momenti iz uzorka konvergiraju u srednje kvadratnom smislu ka odgovarajućim momentima populacije.([2])

Autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija

Korelacija između slučajne promenljive i njenih prošlih vrednosti je osnova linearne analize vremenskih serija. Za sagledavanje korelacione strukture vremenskih serija koristimo autokovarijacionu i autokorelacionu funkciju.
Posmatramo stacionarni proces X_t. Znamo da su za ovaj proces očekivanje $E(X_t) = \mu$ i varijansa $Var(X_t) = \sigma^2$ konstantne, a da je kovarijansa $cov(X_t, X_s)$ funkcija vremenskog intervala.
Zato je kovarijansa X_t i X_{t-k}

$$\gamma_k = cov(X_t, X_{t-k}) = E(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu) \tag{1.1}$$

a koeficijent korelacije

$$\rho_k = \frac{cov(X_t, X_{t-k})}{\sqrt{Var(X_t)}\sqrt{Var(X_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \tag{1.2}$$

gde je $Var(X_t) = Var(X_{t-k}) = \gamma_0$.
γ_k je funkcija od k i naziva se **autokovarijaciona funkcija**, a ρ_k je **autokorelaciona funkcija**.

Osobine autokovarijacione i autokorelacione funkcije:
1. Za $k = 0$ iz jednačina (1.1) i (1.2) sledi:

$$\gamma_0 = Var(X_t) \text{ a } \rho_0 = 1$$

2. Važi simetričnost:

$$\gamma_k = \gamma_{-k} \text{ i } \rho_k = \rho_{-k}$$

Dokaz: Na osnovu stacionarnosti vazi:

$$\gamma_k = cov(X_t, X_{t-k}) = cov(X_{t-k}, X_t) = cov(X_t, X_{t+k}) = \gamma_{-k}$$

Na sličan način, iz jednačine (1.2) dobijamo da je $\rho_k = \rho_{-k}$.
3. $|\gamma_k| \le \gamma_0$ i $|\rho_k| \le 1$
Dokaz: Slučajna promenljiva $Y = \lambda_1 X_t + \lambda_2 X_{t-k}$ ima nenegativnu varijansu, gde su λ_1 i λ_2 proizvoljne konstante. Varijansa od Y je:

$$Var(Y) = Var(\lambda_1 X_t + \lambda_2 X_{t-k}) = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\sigma^2 + 2\lambda_1\lambda_2\gamma_k$$

Za $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ je $-\gamma_k \le \sigma^2$ a $-\rho_k \le 1$.
Za $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = -1$ imamo da je $\gamma_k \le \sigma^2$ a $\rho_k \le 1$.
4. Autokovarijaciona matrica Γ_n je pozitivno semidefinitna.

$$\Gamma_n = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-2} \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-3} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-3} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{n-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{n-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{n-3} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \rho_{n-1} & \rho_{n-2} & \rho_{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 P_n$$

Drugim rečima, ova osobina kaze da su determinanta i svi glavni minori autokovarijansne matrice pozitivni ili jednaki nuli. Sa P_n označena je autokorelaciona matrica za koju vazi ista osobina.
Slično kao u dokazu prethodne osobine, koristi se činjenica da je varijansa slučajne promenljive $Y = \lambda_1 X_t + \lambda_2 X_{t-1} + \cdots + \lambda_n X_{t-h+1}$ nenegativna.

Beli šum

Slučajni proces ε_t naziva se **beli šum** i predstavlja niz nekorelisanih slučajnih promenljivih čija je srednja vrednost $E(\varepsilon_t) = 0, t = 1, 2, ...$, a varijansa $Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 = const, t = 1, 2, ...$
Važna osobina belog šuma je i ta da su svi autokovarijacioni koeficijenti jednaki 0 $\gamma_k = cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0$, za sve $k \neq 0$.
Dakle, beli šum je stacionaran proces čije su autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija:

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

respektivno.

Osim što je beli šum veoma pogodan za modeliranje vremenskih serija, on se koristi i za konstruisanje drugih procesa.

1.2 Finansijske vremenske serije i njihove osobine

Osnovni pojmovi prinosa aktive

Na samom početku rada biće dati neki osnovni pojmovi vezani za prinos aktive i osobine njihove raspodele verovatnoća ([1]). Razlog za korišćenje prinosa umesto cene aktive, dali su 1997. godine, Campbel, Lo i MacKinlay ([6]). Prvi razlog je taj što za prosečnog investitora, prinos aktive daje potpuni uvid u potencijalne investicije. Drugi razlog je više tehničke prirode i odnosi se na bolje statističke osobine u odnosu na iste za cenu aktive.
U nastavku su date neke od definicija prinosa aktive. Za početak pretpostavljamo da se za akcije ne isplaćuju dividende.
Neka je P_t cena neke akcije u vremenskom trenutku t.

Definicija 1.2.1 *Ako imamo aktivu jedan vremenski period, tj. od $t-1$ do t, tada je stopa ukupnog prinosa:*

$$\begin{aligned} 1 + R_t &= \frac{P_t}{P_{t-1}} \\ P_t &= P_{t-1}(1 + R_t) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Odgovarajuća stopa prinosa, takođe za jedan vremenski period je:

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \tag{1.4}$$

Definicija 1.2.2 *Ako neku aktivu imamo k perioda, tj. od perioda $t-k$ do perioda t, tada je stopa ukupnog prinosa:*

$$\begin{aligned} 1 + R_t[k] &= \frac{P_t}{P_{t-k}} \\ &= \frac{P_t}{P_{t-1}} \times \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \times \cdots \times \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}} \\ &= (1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \cdots (1 + R_{t-k+1}) \\ &= \prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{t-j}). \end{aligned}$$

Odavde uočavamo da je stopa ukupnog prinosa za k perioda zapravo jednaka proizvodu k stopa ukupnog prihoda za jedan period.
Stopa prinosa za k perioda je $R_r[k] = \frac{P_t - P_{t-+}}{P_{t-1}}$.

U praksi je veoma bitan stvarni vremenski interval (veoma je važno da li je mesečna ili godišnja stopa prinosa u pitanju). Ukoliko sam interval nije precizno dat, pretpostavljano da je to jedna godina. U nastavku definišemo stopu godišnjeg (prosečnog) prinosa:

$$\text{Godišnja } R_t[k] = \left[\prod_{j=0}^{k-1}(1+R_{t-j})\right]^{1/k} - 1.$$

Ovo je geometrijska sredina stope ukupnog prinosa za k perioda, a ona se može zapisati i na drugi način:

$$\text{Godišnja } R_t[k] = \exp\left[\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} ln(1+R_{t-j})\right] - 1,$$

Iz razloga što je za izračunavanje lakša aritmetička u odnosu na geometrijsku sredinu, pomoću Tejlorove formule aproksimiramo godišnju stopu prinosa i dobijamo:

$$GodR_t[k] \approx \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}(R_{t-j}) \tag{1.5}$$

Ipak, u nekim primenama ova aproksimacija nije dovoljno precizna.

Kontinualno kapitalisanje

Pretpostavimo da je godišnja kamatna stopa koju daje banka 10% i da je početni kapital 1€. Ako banka isplaćuje kamatu jednom godišnje tada je vrednost kapitala $1(1+0.1)$€ $= 1.1$€ godinu dana kasnije.

Ako banka, pak, isplaćuje kamatu dva puta godišnje, tada je polugodišnja kamatna stopa $\frac{10\%}{2} = 5\%$, pa je vrednost kapitala nakon prve godine
$1(1+\frac{0.1}{2})^2$€ $= 1.1025$€.

Generalno, ako banka isplaćuje kamatu m puta godišnje, tada je kamatna stopa za svaku isplatu $\frac{10\%}{m}$ a vrednost kapitala nakon jedne godine postaje ([1])
$1(1+\frac{0.1}{m})^m$€.

Neka je r godišnja kamatna stopa, C početni kapital i n broj godina. Neto vrednost imovine, A, dobijena kontinualnim kapitalisanjem je:

$$A = C\exp(r \times n). \tag{1.6}$$

Iz jednačine (1.6) imamo da je:

$$C = A\exp(-r \times n) \tag{1.7}$$

gde je C sadašnja vrednost imovine čija je cena A eura za n godina od sadašnjeg trenutka, pretpostavljajući da je godišnja kamatna stopa kontinualnog kapitalisanja r.

Definicija 1.2.3 *Prirodni logaritam stope prinosa akrtive zove se stopa prinosa kontinuiranog kapitalisanja ili logaritam stopa prinosa i računa se po formuli:*

$$r_t = ln(1 + R_t) = ln\frac{P_t}{P_{t-1}} = p_t - p_{t-1}, \tag{1.8}$$

gde je $p_t = ln(P_t)$.

Ovako definisana stopa prinosa ima mnogo prednosti u odnosu na stopu prinosa R_t.
1. Stopa prinosa kontinualnog kapitalisanja za k perioda je:

$$\begin{aligned} r_t[k] &= ln(1 + R_t[k]) = ln[(1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \cdots (1 + R_{t-k+1})] \\ &= ln(1 + R_t) + ln(1 + R_{t-1}) + \cdots + ln(1 + R_{t-k+1}) \\ &= r_t + r_{t-1} + \cdots + r_{t-k+1} \end{aligned}$$

Dakle, stopa prinosa kontinualnog kapitalisanja za više perioda je zapravo suma stopa kontinualnog kapitalisanja za jedan period.
2. Statističke osobine logaritam stope prinosa su pogodnije u analizi, pa ih samim tim i više koristimo.

Stopa prinosa portfolia

Definicija 1.2.4 *Portfolio hartija od vrednosti (aktiva) je skup svih hartija od vrednosti koje posedujemo ([12]).*

Neka su aktive koje posedujemo $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sa cenama $P_1, P_2, \cdots, P_n$ i količinama $k_1, k_2, \cdots, k_n$ tada je vrednost portfolija:

$$\Pi = \textstyle\sum_{i=1}^{n} k_i P_i$$

Težinski koeficijent i-te aktive predstavlja udeo i-te aktive u celom portfoliju. Težinske koeficijente dobijamo na osnovu formule:

$$\omega_i = \frac{k_i P_i}{\Pi}$$

Portfolio hartija od vrednosti zapisujemo na sledeći način:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} \omega_i P_i \tag{1.9}$$

Stopa prinosa portfolija Π, definisanog u prethodnoj jednačini, data je sa:

$$R_{\Pi t} = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \omega_i R_{it},$$

gde je R_{it} stopa prinosa aktive i.

Stopa prinosa portfolija pri kontinualnom kapisalisanju, nema prethodno navedeno svojstvo. Naime, ako su stope prinosa R_{it} male, onda je
$r_{\Pi t} \approx \sum_{i=1}^{n} \omega_i r_{it}$, pri čemu je r_{it} stopa prinosa kontinualnog kapitalisanja aktive i u portfoliju.

Važno je naglasiti da težinski koeficijenti ne moraju nužno biti pozitivni. Naime, ako je $\omega_i \geq 0$ to nazivamo dugačkom pozicijom, a u suprotnom, tj. kada je $\omega_i < 0$ to je kratka pozicija. U finansijskom smislu, to znači sledeće ([12]):
1. Dugačka pozicija znači da smo mi vlasnici aktive A_i.
2. Kratka pozicija da smo u portfolio uključili i aktivu čiji nismo vlasnik. To se dešava onda kada od nekog pozajmimo neku hartiju od vrednosti, prodamo je i taj novac uložimo u neku drugu hartiju od vrednosti. Na kraju tom ko nam je pozajmio hartiju od vrednostu treba da vratimo tu istu hartiju od vrednosti(a ne novac). U principu, od kratke pozicije možemo da ostvarimo prihod samo ako je vrednost pozajmljene hartije od vrednosti u trenutku $t = 1$ manja od vrednosti u trenutku $t = 0$.

Isplata dividendi

Sada pretpostavljamo da se za akciju isplaćuju dividende ([1]). Iz tog razloga, moramo malo modifikovati formulu za stopu prinosa aktive.
Neka je D_t vrednost isplaćene dividende za period od $t-1$ do t i neka je P_t cena aktive na kraju perioda t. Dakle, dividenda nije uključena u cenu P_t. U ovom slučaju su stopa prinosa aktive i logaritam stopa prinosa date sledećim formulama:

$$R_t = \frac{P_t + D_t}{P_{t-1}}$$
$$r_t = ln(P_t + D_t) - ln(P_{t-1}).$$

Definicije stope prinosa i logaritam stope prinosa možemo povezati na sledeći način:

$$r_t = ln(1 + R_t)$$
$$R_t = e^{r_t} - 1.$$

Ako posmatramo ove dve stope prinosa za duzi vremenski period, imamo:

$$1 + R_t[k] = (1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \cdots (1 + R_{t-k+1})$$
$$r_t[k] = r_t + r_{t-1} + \cdots + r_{t-k+1}.$$

Veza između sadašnje i buduće vrednosti aktive, pri kontinuiranom kapitalisanju (godišnja stopa prinosa r) je:

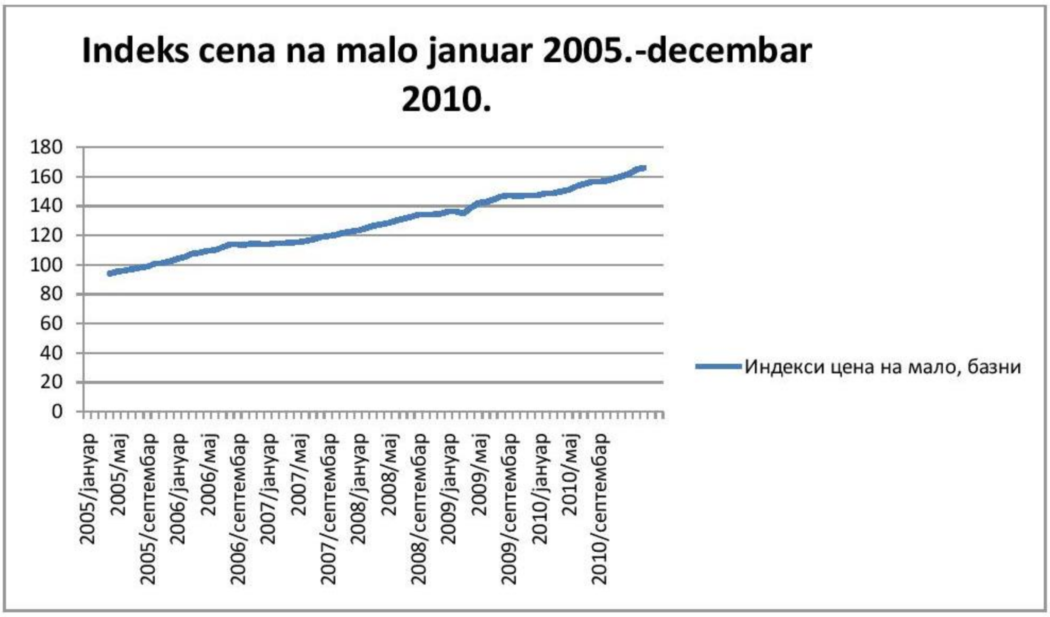
$$A = C \exp(r \times n)$$
$$C = A \exp(-r \times n).$$

Karakteristike finansijskih vremenskih serija

Finansijske vremenske serije u praksi najlakše možemo prepoznati ukoliko vremenska serija koja je predmet izučavanja, poseduje neku od sledećih osobina ([2]):

1. **Nestabilna varijansa**
   Najčešće cena finansijskog instrumenta nije stabilna. Do promena cena akcije na tržištu dolazi usled novih informacija koje stalno pristižu. Dakle, dolazak nove vesti utiče na rast varijabiliteta, koji se potom smiruje, pa ponovo može porasti ukoliko nova vest pristigne. Stepen promene cene akcije zavisi od toga kako na novopristiglu vest investitori gledaju. Ukoliko je vest negativna, varijabilitet raste. Ponovo naglašavamo da se u ovom slučaju razmatra uslovna varijansa tj. volatilnost ([1]), a promenu volatilnosti označavamo kao uslovnu heteroskedastičnost.

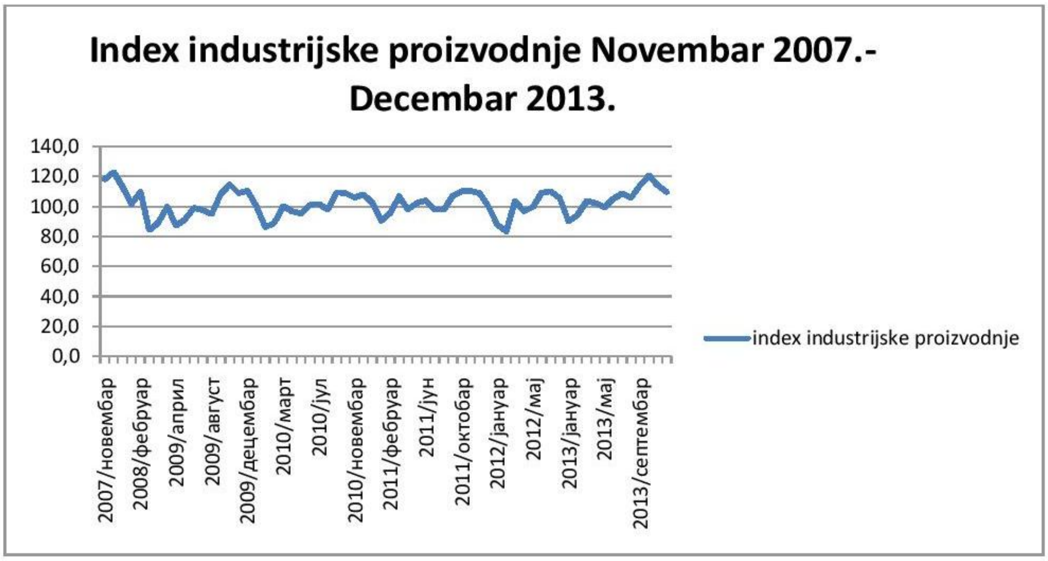
2. **Trend**
   Dugoročna komponenta u kretanju finansijske vremenske serije naziva se trend. Ukoliko serija sistemski raste ili opada tokom vremena, trend može biti rastući ili opadajući. Takođe, trend može biti deterministički ili stohastički u zavisnosti od toga da li se kretanje vremenske serije može predvideti na osnovu prošlih vrednosti ili ne.



Grafik 1.2: Primer serija koja ima stohastički trend rasta

3. **Sezonska komponenta**
   Ukoliko vremenska serija ispoljava pravilnosti u kretanju u toku jedne kalendarske godine

tada se ona naziva sezonska vremenska serija. Postojanje ove komponente utikazuje da postoji veći stepen korelacije između opservacija istih meseci u različitim godinama nego između susednih meseci.



Grafik 1.3: Primer serije koja ima sezonsku komponentu

4. **Strukturni lom**
   Strukturni lom predstavlja skup opservacija koje odstupaju od prethodnog toka vremenske serije. On je najčešće rezultat neke intervencije, u smislu događaja koji će uticati na kretanje vremenske serije.

Osobine raspodele verovatnoća stope prinosa

Da bismo mogli da izučavamo stope prinosa u smislu finansijskih vremenskih serija, potrebno je dobro razumeti osobine njihove raspodele verovatnoća. Razmatraćemo kolekciju od n aktiva koje posedujemo T vremenskih perioda. Proučavaćemo logaritam stope prinosa u oznaci $\{r_{it}; i = 1, \cdots, n; t = 1, \cdots, T\}$.
U nastavku dajemo pregled nekih značajnih raspodela i momenata ([4],[3]). Posmatramo slučajne promenljive $X = (X_1, \cdots, X_n)$ i $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$.
Funkcija raspodele

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x; Y \leq y)$$

Ponašanje slučajnih promenljivih X i Y opisano je funkcijom $F_{X,Y}(x, y)$. Ukoliko postoji funkcija gustine raspodele verovatnoća $f_{x,y}(x, y)$, onda je

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \cdots \int_{-\infty}^{y} f_{x,y}(w, z) dwdz$$

gde su X i Y apsolutno neprekidne slučajne promenljive.

Marginalna raspodela

Marginalna funkcija raspodele slučajne promenljive X data je sa:

$$F_X(x) = F_{X,Y}(x, \infty, \cdots, \infty).$$

Ovu formulu dobili smo tako što smo pustili da $y \to \infty$. Analogno se dobija i funkcija marginalne raspodele za slučajnu promenljivu Y.

Kada je slučajna promenljiva X jednodimenzionala slučajna promenljiva, tada je funkcija marginalne raspodele data sa:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

i zove se kumulativna funkcija raspodele (cumulative distribution function-CDF). Ova funkcija je neopadajuća, tj. $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ ako je $x_1 \leq x_2$. Sem toga, zadovoljava i sledeće dve osobine: $F_X(-\infty) = 0$ i $F_X(\infty) = 1$.
Za datu verovatnoću p, najmanje realni broj x_p za koji je $p \leq F_X(x_p)$ naziva se p-ti kvantil slučajne promenljive X.

$$x_p = \underset{x}{inf}\{x|p \leq F_X(x)\}.$$

Uslovna raspodela

Funkcija uslovne raspodele slučajne promenljive X u odnosu na događaj $Y = y$ data je sa:

$$F_{X|Y}(x|y) = P(X \leq x|Y = y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_y(y)} du.$$

U gornjoj formuli sa $f(x, y)$ označena je zajednička funkcija gustine slučajnih promenljivih X i Y, a sa $f_y(y)$ označena je marginalna funkcija gustine slučajne promenljive Y, a koja je data sa:

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x, y)dx. \tag{1.10}$$

Dakle, veza između zajedničke, marginalne i uslovne funkcije raspodele je:

$$f_{x,y}(x, y) = f_{x|y}(x) \times f_y(y). \tag{1.11}$$

Ova jednakost veoma često se koristi u analizi vremenskih serija.

Za slučajne promenljive X i Y kažemo da su nezavisne ako i samo ako je:

$$f_{x|y}(x) = f_x(x).$$

Za nezavisne slučajne promenljive je $f_{x,y}(x,y) = f_x(x)f_y(y)$.

Numeričke karakteristike slučajnih promenljivih

1. **Očekivanje** $E(X)$:
   Prvi momenat ili očekivanje slučajne promenljive X dato je sa:

   $$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

   gde je sa $f(x)$ označena funkcija gustine raspodele slučajne promenljive X. Očekivanje slučajne označavamo sa μ_x.

2. **Varijansa** σ_x^2:
   Drugi centralni momenat koji zapravo meri varijabilnost slučajne promenljive X naziva se varijansa od X, označava se sa σ_x^2 i definisan je na sledeći način:

   $$Var(X) = E[(X - \mu_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f(x)dx$$

   pod uslovom da dati integral postoji.
   Pozitivni kvadratni koren varijanse, σ_x, naziva se standardna devijacija slučajne promenljive X.
   Normalna raspodela na jedinstven način određuje prva dva momenta slučajne promenljive. Za neke druge raspodele, bitni su nam i momenti višeg reda.

3. **Koeficijent asimetrije**:
   Treći centralni momenat meri simetriju slučajne promenljive X u odnosu na srednju vrednost, odnosno u kojoj meri postoji koncentracija podataka oko tačke koja je veća ili manja od srednje vrednosti.([2])
   Raspodela je simetrična ako su podaci raspoređeni približno simetrično u odnosu na srednju vrednost. Ukoliko je desni rep raspodele duži od levog tada je raspodela asimetrična udesno, u suprotnom raspodela je asimetrična ulevo.
   Koeficijent asimetrije predstavlja normalizovani treći momenat i dat je sledećom formulom:

   $$S(x) = E\Big[\frac{(X - \mu_x)^3}{\sigma_x^3}\Big].$$

   U tabeli su date vrednosti ovog koeficijenta i značenje.

   Kod finansijskih vremenskih serija uočeno je da obično imaju empirijsku raspodelu asimetričnu udesno, tj. da ove vremenske serije najčešće sistemski rastu tokom vremena ([2]).

Koeficijent asimetrije
$S(x) = \dfrac{E(X-\mu_x)^3}{\sigma_x^3}$
1.$S(x) = 0$ Simetrična raspodela 2.$S(x) < 0$ Raspodela asimetrična ulevo 3.$S(x) > 0$ Raspodela asimetrična udesno

Tabela 1.1:

4. **Koeficijent spoljoštenosti**:
   Četvrti centralni momenat opisuje ponašanje repa slučajne promenljive X. Koeficijent spljoštenosti predstavlja normalizovani četvrti momenat i dat je sledećom formulom:

$$K(x) = E\Big[\frac{(X-\mu_x)^4}{\sigma_x^4}\Big].$$

   Spljoštenost se izražava u odnosu na spljoštenost normalne raspodele. Za normalnu raspodelu ovaj koeficijent ima vrednost 3. Ako je vrednost ovog koeficijenta manja od 3 znači da su repovi raspodele lakši od repova normalne raspodele. U suprotnom su repovi teži od repova normalne raspodele.U tabeli su date vrednosti ovog koeficijenta i odgovarajuće značenje:
   U ekonomskom smislu, ukoliko na tržištu postoje neki ekstremni događaji tada su repovi

Koeficijent spoljoštenosti
$K(x) = \dfrac{E(X-\mu_x)^4}{\sigma_x^4}$
1.$K(x) = 3$ Raspodela je normalno spljoštena 2.$K(x) < 3$ Repovi raspodele su lakši od repova normalne raspodele 3.$K(x) > 3$ Repovi raspodele su teži od repova normalne raspodele

Tabela 1.2:

   empirisjke raspodele teški.

Najopštiji model za logaritam stopu prinosa $\{r_{it}; i = 1, \cdots, n; t = 1, \cdots, T\}$ daje zajednička funkcija raspodele:

$$F_r(r_{11}, \cdots, r_{n1}; r_{12}, \cdots, r_{n2}; \cdots; r_{1T}, \cdots, r_{nT}; Y; \theta), \tag{1.12}$$

gde je Y vektor stanja koji sadrži promenljive koje opisuju prostor u kojem su stope prinosa definisane, a θ je vektor parametara koji na jedinstven način određuju funkciju raspodele $F_r(\cdot)$. Raspodela verovatnoća $F_r(\cdot)$ određuje stohastičko ponašanje stope prinosa r_{it} i Y. U mnogim ekonomskim istraživanjima, za vektor stanja Y pretpostavlja se da je poznat i glavni zadatak je odrediti uslovnu raspodelu $\{r_{it}\}$ ako je dato Y. Cilj empirijske analize stope prinosa je da oceni

nepoznati parametar θ i da izvuče neke statističke zaključke o ponašanju $\{r_{it}\}$ ako su date neke prošle vrednosti logaritam stope prinosa ([1]).
Važno je napomenuti i da se zajednička funkcija raspodele može zapisati i na sledeći način:

$$\begin{aligned} F(r_{i1},\ldots,r_{iT};\theta) &= F(r_{i1})F(r_{i2}|r_{1t})\cdots F(r_{iT}|r_{i,T-1},\ldots r_{i1}) \\ &= F(r_{i1})\prod_{t=2}^{T} F(r_{it}|r_{i,t-1},\ldots r_{i1}). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Ova formula izražava vremensku zavisnost logaritam stopa prinosa r_{it}.
Najčešće se stope prinosa aktive opisuju neprekidnim slučajnim promenljivim, a koristi se njihova funkcija gustine. Zbog toga se koristeći jednačinu (8)jednakost (10) zapisati kao:

$$f(r_{i1},\ldots,r_{iT};\theta) = f(r_{i1})\prod_{t=2}^{T} f(r_{it}|r_{i,t-1},\ldots r_{i1}). \tag{1.14}$$

Ova jednakost ukazuje na to da su uslovne raspodele upotrebljivije od marginalnih pri izučavanju stope prinosa aktive. Međutim, marginalne raspodele je lakše proceniti u odnosu na uslovne raspodele koristeći prošle stope. Osim toga, stope prinosa aktive često imaju veoma malu serijsku korelaciju pa je zbog toga marginalna raspodela veoma blizu uslovne.

U nastavku će biti date neke osnovne statističke raspodele koje se koriste za marginalne raspodele stope prinosa. To su normalna i lognormalna raspodela.

Normalna raspodela

Normalna (Gausova) raspodela je važna familija raspodela neprekidnih slučajnih promenljivih jer se primenjuje u raznim oblastima. Članovi familije normalne raspodele definisani su preko dva parametra, matematičkog očekivanja μ i varijanse (disperzije) σ^2 ([3]).

Definicija 1.2.5 *Slučajna promenljiva X ima **normalnu** $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ **raspodelu**, $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$, ako je njena funkcija gustine raspodele:*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcija raspodele slučajne promenljive X sa normalnom $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ raspodelom je:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\dfrac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, x \in \mathbb{R}.$$

Očekivanje slučajne promenljive koja ima normalnu raspodelu je $E(X) = \mu$, a disperzija (varijansa) $Var(X) = D(X) = \sigma^2$.

U finansijama se vrlo često pretpostavlja da su slučajne promenljive kojima opisujemo stope prinosa $\{R_{it}|t = 1, \ldots T\}$ nezavisne i da sve imaju istu, normalnu, raspodelu sa fiksnom sredinom i varijansom. Dobre strane ove pretpostavke su te što ona čini statističke osobine stope prinosa prilagodljivim. Međutim, postoji i dosta mana. Na primer, donja granica stope prinosa je -1, a za normalnu raspodelu možemo da pretpostavimo bilo koju vrednost sa realne prave pa samim tim i nemamo donju granicu. Dalje, ako stope prinosa R_{it} imaju normalnu raspodelu, tada stope prinosa za više perioda $R_{it}[k]$ nisu normalno raspoređene jer ih čini proizvod stopa prinosa za jedan period.

Lognormalna raspodela

Lognormalnu raspodelu dobijamo primenom normalne raspodele na logaritmovane podatke. Dakle, ako slučajna promenljiva $Y = logX$ prati normalnu raspodelu, tada slučajna promenljiva X ima lognormalnu raspodelu. Ova raspodelu ima dva parametra, srednju vrednost i varijansu logaritmovanog niza ([3]).
Funkcija gustine raspodele slučajne promenljive X, gde $lnX : \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, je:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(lnx-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Očekivanje slučajne promenljive koja prati lognormalnu raspodelu je $E(X) = e^{(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2)}$, a disperzija $Var(X) = D(X) = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$.

Još jedna vrlo česta pretpostavka u finansijskim istraživanjima je ta da su slučajne promenljive kojima opisujemo logaritam stope prinosa r_{it} nezavisne i normalno raspoređene (tj. da sve imaju normalnu raspodelu) sa očekivanjem μ i varijansom σ^2. Iz toga sledi da su stope prinosa R_{it} nezavisne slučajne promenljive sa lognormalnom raspodelom sa očekivanjem i varijansom datim na sledeći način ([1]):

$$E(R_t) = \exp(\mu + \frac{\sigma^2}{2}) - 1 \tag{1.15}$$

$$Var(R_t) = \exp(2\mu + \sigma^2)[\exp(\sigma^2) - 1] \tag{1.16}$$

Ove dve jednačine su veoma korisne za izučavanje stope prinosa, posebno kada je reč o predviđanju koristeći model za logaritam stope prinosa.
Sa druge strane, neka su m_1 i m_2 očekivanje i varijansa stope prinosa R_t koja ima lognormalnu raspodelu. Tada su očekivanje i varijansa odgovarajućih logaritam stopa prinosa r_t date

sledećim formulama:

$$E(r_t) = ln\left[\frac{m_1+1}{\sqrt{1+\frac{m_2}{(1+m_1)^2}}}\right]$$

$$Var(r_t) = ln\left[1+\frac{m_2}{(1+m_1)^2}\right].$$

S obzirom da je suma konačnog broja nezavisnih i normalno raspoređenih slučajnih promenljivih, takođe normalna, dobijamo da je $r_t[k]$ takođe normalno raspodeljena pri uslovu normalnosti za $\{r_t\}$. Uz to, nema donje granice za r_t, a donja granica za R_t je zadovoljena jer je $1 + R_t = \exp(r_t)$.

Volatilnost

U ekonomskom smislu, volatilnost finansijskog instrumenta govori o tome koliko se menja cena tog instrumenta u nekom proteklom periodu. Volatilnost najčešće računamo kao standardnu devijaciju promene cene. Jedan od pokazatelja rizika jeste volatilnost, i rizik je veći što je veća volatilnost određenog finansijskog instrumenta. Mnogi finansijski modeli uključuju nezavisno ocenjenu ili predviđenu volatilnost (npr. Black-Scholes formula). Za ocenjivanje volatilnosti najbolje je koristiti informacije o prošlim vrednostima stope prinosa.
Model volatilnosti:

$$\begin{aligned}
&y_t = \mu_t + \sigma_t\varepsilon_t\\
&\mu_t = E(y_{t+1}|\mathcal{F}_\sqcup)\\
&\sigma_t^2 = Var(y_{t+1}|\mathcal{F}_\sqcup)\\
&E(\varepsilon_t) = 0\\
&Var(\varepsilon_t) = 1
\end{aligned}$$

gde je y_t prinos u trenutku t, a ε_t je niz nezavisnih slučajnih promenljivih koje imaju istu raspodelu i predstavljaju grešku linearne regresije, a F_t predstavlja skup informacija poznatih do trenutka T.

U analizi volatilnosti cilj je objasni uzrok njenog nastanka. Kako volatilnost nastaje usled nekih prošlih događaja, objašnjava se pomoću uslovnih slučajnih promenljivih:

$$\sigma_t^2 = Var(y_{t+1}|\mathcal{F}_\sqcup)$$

Reakcija na neku neočekivanu novost može dovesti do nastanka volatilnosti. Ova cinjenica znatno otežava predviđanje, ali ako se u obzir uzme to da vreme nastanka te novosti ne mora da bude nepoznato, ipak postoje načini da se izvrši predviđanje. Još jedna od karakteristika volatilnosti je ta da volatilnost celog tržišta utiče na volatilnost svake pojedinačne akcije. U glavnom delu rada bavićemo se modelima koji služe za predviđanje volatilnosti, a to su *ARCH* i *GARCH* modeli.

2

Analiza linearnih vremenskih serija

Jedan od glavnih zadataka statističkog modeliranja je pronalaženje veze između ulaznih i izlaznih podataka. Najčešće se pretpostavlja da je ta veza linearna. U ovom poglavlju dajemo neke osnovne osobine linearnih vremenskih serija, a kasnije opisujemo i modele linearnih vremenskih serija koji se koriste za predviđanje finansijskih podataka kao što su, na primer, cene akcija na tržištu.
Najpre ćemo uvesti pojam linearne vremenske serije ([13]):

Definicija 2.0.6 *Vremenska serija r_t je* ***linearna*** *ako se može predstaviti na sledeći način:*

$$r_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i} \tag{2.1}$$

gde je μ očekivanje od r_t, $\psi_0 = 1$ i $\{\varepsilon_t\}$ je niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom, najčešće normalnom.

Na primer, $\{\varepsilon_t\}$ može da bude beli šum.

Pre same analize vremenskih serija bitno je napomenuti Voldovu teoremu razlaganja ([2]) koja kaže da se svaka slabo stacionarna vremenska serija moze predstaviti kao zbir dva međusobno nekorelisana procesa, gde je jedan stohastički, a drugi deterministički. Deterministička komponenta predviđa se na osnovu informacija iz prošlosti, dok slučajnu komponentu na ovaj način ne možemo predvideti. Voldova teorema govori o dekompoziciji procesa na deterministički i stohastički deo.

Teorema 2.0.7 (Voldova teorema razlaganja) *Stohastička komponenta slabo stacionarne vremenske serije r_t može se predstaviti u obliku linearnog procesa na sledeći način:*

$$r_t - \mu = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \psi_0 = 1 \tag{2.2}$$

Determinističku komponentu vremenske serije r_t čini srednja vrednost, tj. očekivanje $\mu = E(r_t)$. Sa ε_t označen je proces beli šum, kao niz nekorelisanih slučajnih promenljivih nulte srednje vrednosti i konstantne varijanse.

$$
\begin{aligned}
E(\varepsilon_t) &= 0 \\
\gamma_k &= \begin{cases} \sigma^2, k = 0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases} \\
\rho_k &= \begin{cases} 1, k = 0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Dinamička struktura linearne vremenske serije iz jednačine (2.1) opisana je pomoću koeficijenata ψ_i, koji se nazivaju ψ-ponderi.
Ako je r_t linearna vremenska serija veoma jednostavno dolazimo do formula za srednju vrednost i varijansu, koristeći nezavisnost $\{\varepsilon_t\}$.

1. *Očekivanje*:

$$E(r_t) = \mu$$

2. *Varijansa*:

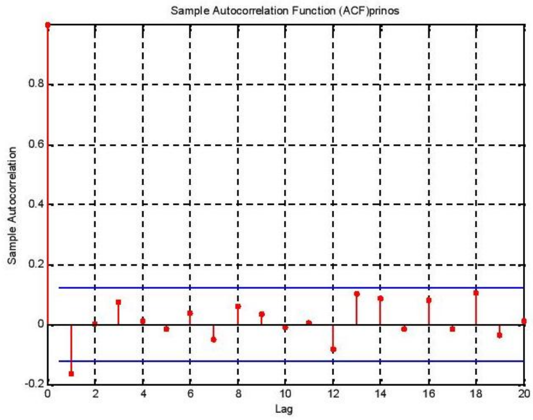
$$
\begin{aligned}
Var(r_t) &= E(r_t - \mu)^2 \\
&= E(\varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots)^2 \\
&= E(\varepsilon_t^2) + \psi_1^2 E(\varepsilon_{t-1}^2) + \psi_2^2 E(\varepsilon_{t-2}^2) + \cdots \\
&+ 2\psi_1 E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) + 2\psi_2 E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}) + \cdots \\
&= \sigma^2 (1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \cdots) \\
&= \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2
\end{aligned}
$$

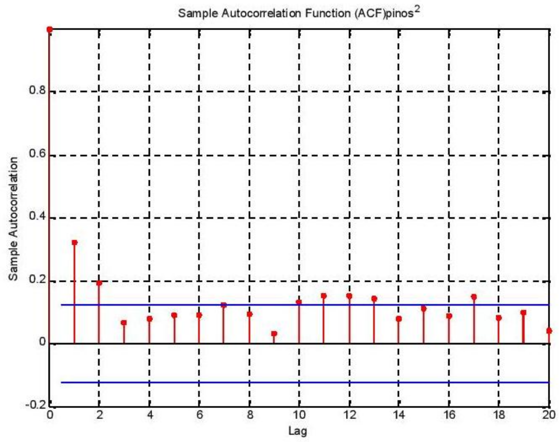
3. *Autokovarijaciona funkcija*:

$$
\begin{aligned}
\gamma_k &= cov(r_t, r_{t-k}) \\
&= E(r_t - \mu)(r_{t-k} - \mu) \\
&= E(\varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \psi_k \varepsilon_{t-k} + \psi_{k+1} \varepsilon_{t-k-1} + \psi_{k+2} \varepsilon_{t-k-2} +) \\
&(\varepsilon_{t-k} + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots) \\
&= \sigma^2 (\psi_k + \psi_1 \psi_{k+1} + \psi_2 \psi_{k+2} + \cdots) \\
&= \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{k+i}.
\end{aligned}
$$

4. *Autokorelaciona funkcija*:
$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{k+i}}{\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2}$$

Na sledećem grafiku predstavljene su dve autokorelacione funkcije vremenske serije prinosa.





Grafik 2.1: Autokorelaciona funkcija prinosa i kvadrata prinosa

Uslov stacionarnosti linearne vremenske serija izražavamo preko ψ-pondera. U opštem slučaju, ovih pondera imamo beskonačno, dakle za stacionarnost potrebno je pokazati da je γ_k konačno za svako k. Bez umanjenja opštosti pretpostavićemo da je $\mu = 0$, pa je:

$$|\gamma_k| = |E(r_t r_{t-k})| \leq (Var(r_t)Var(r_{t-k}))^{1/2} = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2.$$

Dakle, uslov stacionarnosti je: $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$.
Na osnovu ovih numeričkih karakteristika slučajne promenljive r_t dolazimo do sledećih zaključaka:

1. Varijansa linearnog procesa je izražena preko varijanse belog šuma i ψ-pondera i ona je konačna kada je $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$.

2. Autokovarijacioni koeficijent linearnog procesa izražen je preko varijanse belog šuma i ψ-pondera.

3. Autokorelacioni koeficijent linearnog procesa je funkcija samo ψ-pondera.([2])

Kada smo definisali linearnu vremensku seriju tj. linearni proces (jednačina (2.1)), u formuli smo koristili beskonačno mnogo pondera $\psi_1, \psi_2, \cdots$. S obzirom da želimo da ovakav proces bude dobar za opisivanje stacionarne vremenske serije, potrebno je da ponderi određuju apsolutno konvergentan red, tj. da važi: $\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| < \infty$.
Ovakvo ograničenje je u potpunosti opravdano i tačno ukoliko u obzir uzmemo da je varijansa linearnog procesa konačna, $\sum_{i-0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$. ([2])

Na osnovu linearnog procesa koji smo definisali na početku sa pogodnim odabirom ψ-pondera dobijamo modele sa konačnim brojem parametara kojima možemo opisati vremenske serije. Tri modela sa konačnim brojem parametara kojima se opisuju slabo stacionarne vremenske serije su:

1. Autoregresioni modeli
2. Modeli pokretnih proseka
3. Autoregresioni modeli pokretnih proseka

2.1 Autoregresioni AR modeli

Autoregresioni modeli vremenskih serija su oni modeli u kojima se zavisna promenljiva u trenutku t opisuje u funkciji od sopstvenih prethodnih vrednosti, tj. skup objašnjavajućih promenljivih su elementi iste vremenske serije samo u trenutcima $t-1, t-2, \ldots, t-p$. Dakle, autoregresioni model definišemo na sledeći način ([2]).

Definicija 2.1.1 *Autoregresivni model reda p definisan je na sledeći način:*

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \tag{2.3}$$

gde je ε_t beli šum, a $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ autoregresioni parametri.

Ovom modelu može da se pridruzi karakteristična jednačina sledećeg oblika:

$$g^p - \phi_1 g^{p-1} - \phi_2 g^{p-2} - \ldots - \phi_p = 0$$

gde su $g_1, g_2, \ldots, g_p$ rešenja (koreni) karakteristične jednačine. Ukoliko su svi koreni po modulu manji od 1, tada je odgovarajuća vremenska serija stacionarna.

Da bismo bolje razumeli autoregresioni model vremenskih serija, u nastavku ćemo detaljno opisati izgled i svojstva AR(1) i AR(2) modela, pa zaključke primeniti na autoregresioni model reda p.

2.1.1 Autoregresioni model prvog reda - AR(1)

Autoregresioni model prvog reda (u oznaci AR(1)) zapisujemo na sledeći način:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2.4}$$

gde je ϕ_1 autoregresioni parametar, a ε_t beli šum.

Stacionarnost AR(1) modela

Polazeći od jednačine (2.4), rekurzijom od nazad dobijamo:

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \phi_1(\phi_1 X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\ &= \phi_1^2(\phi_1 X_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} \\ &= \ldots \\ &= \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \phi_1^3 \varepsilon_{t-3} + \ldots \end{aligned}$$

Sada računamo varijansu od X_t:

$$\begin{aligned} Var(X_t) &= Var(\varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \phi_1^3 \varepsilon_{t-3} + \ldots) \\ &= \sigma^2(1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \phi_1^6 + \ldots) \end{aligned}$$

a znamo da je $Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t) = \sigma^2$.
Varijansa vremenske serije biće konačna, a samim tim vremenska serija slabo stacionarna, samo ako je $|\phi_1| < 1$. ([2])
Dakle, varijansa slabo stacionarne vremenske serije opisane AR(1) modelom je:

$$Var(X_t) = \sigma^2(1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \phi_1^6 + \dots) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2} \tag{2.5}$$

AR(1) je linearni proces

Pre nego što prikažemo da je AR model zaista specijalan slučaj linearnog modela, definisaćemo *operator kašnjenja*.
Operator L pomera nivo vremenske serije za jedan period unazad. Trenutak koji u sadašnjem vremenu kasni jedan period naziva se kašnjenje prvog reda.
Za operator L važe sledeće osobine:

1. $L^k X_t = X_{t-k}, k = 1, 2, \dots$
2. $L^{-k} X_t = X_{t+k}, k = 1, 2, \dots$
3. $L\delta = \delta$, gde je δ konstanta
4. $L^0 X_t = X_t$
5. $L^i(L^j X_t) = L^j(L^i X_t) = X_{t-i-j}$
6. $L(\beta X_t) = \beta(L X_t) = \beta X_{t-1}$, gde je β konstanta

Dakle, operator kašnjenja prvog reda L: $LX_t = X_{t-1}$.

Korišćenjem ovog operatora, AR(1) model možemo da zapišemo i kao:

$$(1 - \phi_1 L)X_t = \varepsilon_t \Rightarrow X_t = \frac{1}{(1 - \phi_1 L)}\varepsilon_t$$

Uz uslov da je $|\phi_1| < 1$, izraz $\frac{1}{(1-\phi_1 L)}$ je zbir članova geometrijske progresije, pa je:

$$\begin{aligned} X_t &= \frac{1}{(1 - \phi_1 L)}\varepsilon_t \\ &= (1 + \phi_1 L + \phi_1^2 L^2 + \phi_1^3 L^{3+\cdots})\varepsilon_t \\ &= \varepsilon_t + \underbrace{\phi_1}_{\psi_1} \varepsilon_{t-1} + \underbrace{\phi_1^2}_{\psi_2} \varepsilon_{t-2} + \dots \end{aligned}$$

Iz ove jednačine direktno vidimo da smo dobili linearni proces, tj. da je AR(1) model specijalan slučaj linearnog procesa.

Autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija

Kako je definisano u prethodnom poglavlju, autokovarijacioni koeficijent na rastojanju k definiše se kao:

$$\gamma_k = cov(\gamma_t, \gamma_{t-k}) = E(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu).$$

S obzirom da je očekivanje slabo stacionarne vremenske serije X_t jednako 0, ($E(X_t) = 0$), dobijamo da je koeficijent γ_k zapravo $E(X_t X_{t-k})$.
Dakle, kako je:

$$X_t = \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \phi_1^k \varepsilon_{t-k} + \phi_1^{k+1} \varepsilon_{t-k-1} + \ldots$$

sledi da je:

$$X_{t-k} = \varepsilon_{t-k} + \phi_1 \varepsilon_{t-k-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-k-2} + \ldots$$

pa dobijamo oblik autokovarijacionog koeficijenta na rastojanju k:

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= E(X_t X_{t-k}) \\
&= E(\varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \phi_1^k \varepsilon_{t-k} + \phi_1^{k+1} \varepsilon_{t-k-1} + \ldots) \\
&(\varepsilon_{t-k} + \phi_1 \varepsilon_{t-k-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-k-2} + \ldots) \\
&= \sigma^2 (\phi_1^k + \phi_1 \phi_1^{k+1} + \phi_1^2 \phi_1^{k+2} + \ldots) \\
&= \sigma^2 \phi_1^k (1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \ldots) \\
&= \frac{\sigma^2 \phi_1^k}{1 - \phi_1^k}
\end{aligned}$$

Dobijamo da autokovarijaciona funkcija AR(1) modela zavisi samo od varijanse belog šuma i od autoregresivnog parametra ϕ_1.

Autokorelaciona funkcija se definiše kao $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$, gde je $\gamma_0 = Var(X_t)$, pa je autokorelacioni koeficijent na rastojanju k definisan na sledeći način:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\dfrac{\sigma^2 \phi_1^k}{1 - \phi_1^2}}{\dfrac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2}} = \phi_1^k.$$

Zaključujemo da je autokorelaciona funkcija vremenske serije opisane AR(1) modelom $\rho_k = \phi_1^k, k = 1, 2, \ldots$.

2.1.2 Autoregresioni model drugog reda - AR(2)

Autoregresioni model drugog reda, tj. AR(2) model, definisan je na sledeći način:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t \tag{2.6}$$

gde su ϕ_1 i ϕ_2 autoregresioni parametri.

Stacionarnost AR(2) modela

Formula za AR(2) model je zapravo jedna stohastička diferencna jednačina drugog reda:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = \varepsilon_t$$

i njoj možemo da pridružimo karakterističnu jednačinu:

$$g^2 - \phi_1 g - \phi_2 = 0 \tag{2.7}$$

Rešenja ove jednačine su:

$$g_1 = \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}, \; g_2 = \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} \tag{2.8}$$

Ukoliko je:

1. $\phi_1^2 + 4\phi_2 \geq 0$ tada su rešenja karakterisitčne jednačine realna,

2. $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$ tada su rešenja kompleksna.

Kao što je već rečeno, da bismo modelom AR(2) mogli da opišemo slabo stacionarnu vremensku seriju, potrebno je da: $|g_1| < 1$ i $|g_2| < 1$.
Koristeći Vijetove formule i dobijene oblike karakterističnih rešenja jednačine, dobija se da je uslov za stacionarnost vremenske serije opisane AR(2) modelom data sledećim sistemom nejednakosti:

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 &< 1 \\ \phi_2 - \phi_2 &< 1 \\ -1 < \phi_2 &< 1 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija AR(2) modela

Ako jednačinu AR(2) modela pomnožimo sa X_{t-k} pa od toga uzmemo očekivanje, dobijamo:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= E(X_t X_{t-k}) \\ &= \phi_1 E(X_{t-1} X_{t-k}) + \phi_2 E(X_{t-2} X_{t-k}) + E(\varepsilon_t X_{t-k}) \\ &= \gamma_{k-1} + \gamma_{k-2} + E(\varepsilon_t X_{t-k}) \end{aligned} \tag{2.10}$$

s tim da opet pretpostavljamo da je $E(X_t) = 0$.
Dalje je:

$$E(\varepsilon_t X_{t-k}) = E(\varepsilon_t)(\varepsilon_{t-k} + \phi_1 \varepsilon_{t-k-1} + (\phi_1^2 + \phi_2)\varepsilon_{t-k-2} + \ldots) = \begin{cases} E(\varepsilon_t)^2 = \sigma^2 & , k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

pa jednačina (2.10) za autokovarijacionu funkciju vremenske serije opisane AR(2) modelom, postaje:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \sigma^2$$

za $k = 0$, a za $k > 0$ je

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}$$

Autokovarijacioni koeficijent za $k = 0$ tj. varijansa procesa može i drugačije da se zapiše:

$$\gamma_0 = var(X_t) = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + \sigma^2 = \phi_1\rho_1\gamma_0 + \phi_2\rho_2\gamma_0 + \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2}$$

Autokorelaciona funkcija vremenske serije opisane AR(2) modelom, data je sledećom formulom:

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2}, k = 1, 2, \dots \tag{2.11}$$

Da bismo dobili pravi oblik varijanse vremenske serije opisane AR(2) modelom, potrebno je da odredimo autokorelacione koeficijente na rastojanju 1 i 2.
Autokorelacioni koeficijent na rastojanju 1, ρ_1 dat je sa formulom:

$$\rho_1 = \phi_1\rho_0 + \phi_2\rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}$$

a autokorelacioni koeficijent na rastojanju 2 je:

$$\rho_2 = \phi_1\rho_1 + \phi_2\rho_0 = \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} + \phi_2$$

Sada možemo ove izraze da ubacimo nazad u formulu za autokovarijacioni koeficijent γ_0 i da dobijemo konačan izgled varijanse procesa:

$$\gamma_0 = Var(X_t) = \frac{(1 - \phi_2)\sigma^2}{(1 + \phi_2)\left[(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2\right]} \tag{2.12}$$

2.1.3 Autoregresioni model reda p - AR(p)

Rezultati i zaključci dobijeni za modele AR(1) i AR(2) mogu se primeniti na opšti autoregresioni model reda p - AR(p).
Ovaj model ima sledeći oblik:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \tag{2.13}$$

gde su $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ autoregresioni parametri modela, a sa ε_t ponovo je obeležen beli šum.

Stacionarnosti AR(p)modela

AR(p) modelu odgovara stohastička diferencna jednačina p-tog reda:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \dots - \phi_p X_{t-p} = \varepsilon_t$$

čija je karakteristična jednačina:

$$g^p - \phi_1 g^{p-1} - \phi_2 g^{p-2} - \dots - \phi_p = 0. \tag{2.14}$$

Ako su koreni ove jednačine svi po modulu manji od 1 onda je vremenska serija stacionarna.

Autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija AR(p) procesa
Ako uopštimo izvođenja autokovarijacione funkcije za modele AR(1) i AR(2) dobijamo kako izgleda autokovarijaciona funkcija autoregresionog modela reda p:

$$\gamma_k = \begin{cases} \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} + \ldots + \phi_p\gamma_{k-p} + \sigma^2, & k = 0 \\ \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} + \ldots + \phi_p\gamma_{k-p}, & k > 0 \end{cases}$$

Kao što je već rečeno, autokovarijacioni koeficijent na rastojanju 0 je varijansa vremenske serije, pa imamo:

$$\gamma_0 = Var(X_t) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2 - \ldots - \phi_p\rho_p} \tag{2.15}$$

Autokorelaciona funkcija vremenske serije opisane AR(p) modelom ima sledeći oblik:

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + \ldots + \phi_p\rho_{k-p}, k > 0 \tag{2.16}$$

Parcijalna autokorelaciona funkcija

U literaturi vremenskih serija od velikog značaja je red autoregresionih modela vremenskih serija ([2],[1]). Razlog tome jer što je red AR modela, p, nepoznat u praktičnoj primeni. Jedan od načina da se odredi red autoregresionih modela je pomoću *parcijalne autokorelacione funkcije*.

Kao što je ranije definisano, autokorelacioni koeficijent na rastojanju k, meri stepen korelacije između X_t i X_{t-k} i njega smo definisali na sledeći način:

$$\rho_k = \frac{cov(X_t, X_{t-k})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t-k})}}, k = 1, 2, \ldots$$

S obzirom da ρ_k može da bude pod uticajem korelisanosti X_t i X_{t-k} sa članovima vremenske serije na rastojanjima između trenutaka t i $t-k$, eliminacijom uticaja članova između t i $t-k$ dobija se parcijalni autokorelacioni koeficijenat.

Osim za određivanje reda AR modela, parcijalna autokorelaciona funkcija opisuje stepen korelisanosti između X_t i X_{t-k} kada se eliminišu uticaji članova vremenske serije na rastojanjima između t i $t-k$, tj. $(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-k+1})$.

U nastavku definišemo ovu funkciju i dajemo njene osobine za autoregresione modele.
Ako posmatramo autoregresioni model reda k oblika:

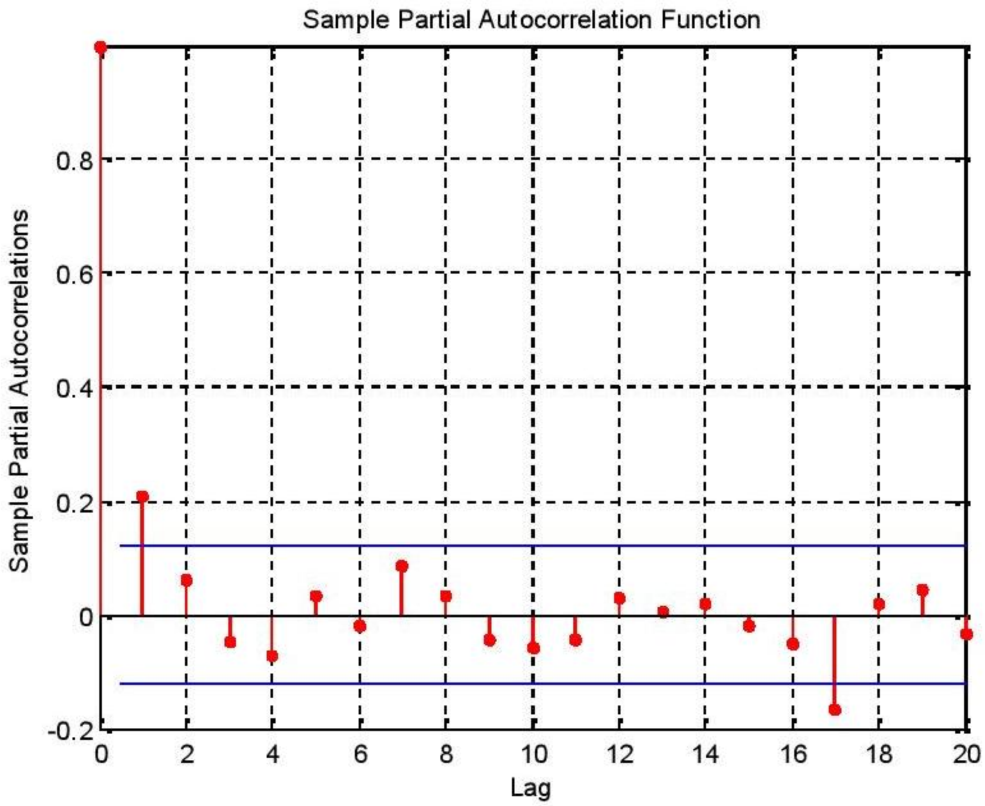
$$X_t = \phi_0 + \phi_{11}X_{t-1} + \phi_{22}X_{t-2} + \ldots + \phi_{kk}X_{t-k} + \varepsilon_t. \tag{2.17}$$

Parcijalni autokorelacioni koeficijent definiše se kao k-ti autoregresioni parametar u prethodnom modelu. (U model je uklјčen i parametar ϕ_0 da bismo mogli da interpretiramo ostale parametre na navedeni način).

Parcijalni autokorelacioni koeficijent ϕ_{kk} izvodi se kao poslednji autoregresioni parametar u modelu AR(k), pa uzimajući to u obzir dolazimo do reda modela.([2])

Uz neke dodatne uslove regularnosti moze se pokazati da važi sledeće:
Za AR(p)model: $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$, parcijalna autokorelaciona funkcija uzima sledeće vrednosti:

$$\phi_{kk} \neq 0, k = 1, 2, \ldots, p$$
$$\phi_{pp} = \phi_p, k = p$$
$$\phi_{kk} = 0, k > p$$



Grafik 2.2: Primer parcijalne autokorelacione funkcije vremenske serije

2.2 Modeli pokretnih proseka MA

Sledeća klasa modela koji imaju veliku primenu u modeliranju serija prinosa u finansijama su ***modeli pokretnih proseka***. Engleski naziv za ove modele je "Moving average models" odakle i potiče skraćenica koju koristimo, tj. ***MA modeli***, odnosno MA(q) za modele pokretnih proseka reda q ([1]). Jedna nova karakteristika javlja se kod ovih modela, a to je invertibilnost. Invertibilnost prikazuje vezu između formi AR i MA modela ([2]). U ovom radu ćemo iskoristiti invertibilnost i preko AR modela beskonačnog reda doći do formule za MA model prvog reda. Iako pretpostavaljamo, isključivo jednostavnosti radi, da je red AR modela konačan, u teoriji ipak možemo da pretpostavimo da posmatramo AR model beskonačnog reda:

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 + X_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t$$

Međutim, ovakav AR model nije praktičan ni realan, jer ima beskonačno mnogo parametara. Ipak, ukoliko pretpostavimo da koeficijenti ϕ_i zadovoljavaju neke uslove i ograničenja, postići ćemo to da ih određuje konačan broj parametara, pa će nam na taj način i AR model imati konačan red. Neka je, na primer:

$$X_t = \phi_0 - \theta_1 X_{t-1} - \theta_1^2 X_{t-2} - \theta_1^3 X_{t-3} - \ldots + \varepsilon_t \tag{2.18}$$

U ovom modelu svi koeficijenti zavise samo od jednog parametra θ_1, tako što je $\phi_i = -\theta_1^i$ za $i \geq 1$.

Da bi ovaj model bio stacionanran, parametar θ_1 mora da bude manji od 1 po apsolutnoj vrednosti. Iz uslova stacionarnosti $|\theta_1| < 1$, imamo da $\theta_1^i \to 0$ kako $i \to \infty$.

Prethodni model (2.18) može da se zapiše i na drugi način:

$$X_t + \theta_1 X_{t-1} + \theta_1^2 X_{t-2} + \ldots = \phi_0 + \varepsilon_t \tag{2.19}$$

Na osnovu ovog, znamo kako izgleda model za X_{t-1}:

$$X_{t-1} + \theta_1 X_{t-2} + \theta_1^2 X_{t-3} + \ldots = \phi_0 + \varepsilon_{t-1} \tag{2.20}$$

Množeći jednačinu (2.20) sa θ_1 i oduzimajći rezultat od jednačine (2.19), dobijamo:

$$X_t = \phi_0(1 - \theta_1) + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

što nam govori da je X_t, ako izuzmemo konstantu, ponderisani prosek šokova ε_t i ε_{t-1}. Iz ovog razloga je ovaj MA model, MA model reda 1.

- **Model pokretnih proseka reda 1**, tj. MA(1), u opštem slučaju ima sledeći oblik:

$$X_t = c_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \tag{2.21}$$

gde je c_0 konstanta, a $\{\varepsilon_t\}$ beli šum.

- **Model pokretnih MA(2)** ima oblik:

$$X_t = c_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} \tag{2.22}$$

- **MA(q) model** ima oblik:

$$X_t = c_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \ldots - \theta_q - \varepsilon_{t-q} \tag{2.23}$$

gde je $q > 0$.

2.2.1 Osobine MA modela

Kao i kod autoregresionih modeli, pokazaćemo osobine za modele MA(1) i MA(2), pa zaključke uopštiti na MA(q) modele.

Stacionarnost

MA modeli su uvek slabo stacionarni jer predstavljaju konačnu linearnu kombinaciju elemenata belog šuma za koji su prva dva momenta invarijante u odnosu na vreme. Ovo pokazujemo na najjednostavnijem modelu, MA(1), iz jednačine (2.21).

Podsetimo se samo:

1. Beli šum ima normalnu raspodelu, $\varepsilon_t : \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$.
2. c_0 je konstanta.

Očekivanje

Očekivanje MA(1) modela je:

$$E(X_t) = c_0$$

i ono je invarijanta u odnosu na vreme.

Varijansa

Varijansa MA(1)modela je:

$$Var(X_t) = \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 = (1 + \theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2 \tag{2.24}$$

pri čemu su ε_t i ε_{t-1} nekorelisani. Ponovo, i varijansa modela je invarijanta u odnosu na vreme. Kompletna priča je primenjljiva na MA(q) modele. Za ovo modele, zaključujemo sledeće:

1. Konstanta iz MA(q) modela je očekivanje serije $E(X_t) = c_0$,
2. Varijansa MA(q) modela je $Var(X_t) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_q^2)\sigma_\varepsilon^2$

Autokorelaciona funkcija MA modela

Posmatrajno ponovo MA(1) model u jednačini (2.21). Radi jednostavnosti pretpostavićemo da je $c_0 = 0$. Množenjem modela sa X_{t-l} dobijamo,

$$X_{t-l}X_t = X_{t-l}\varepsilon_t - \theta_1 X_{t-l}\varepsilon_{t-1}$$

Tražeći očekivanje od prethodnog izraza, imamo:

$$\gamma_1 = -\theta_1\sigma_\varepsilon^2$$

a za $l > 1$ je $\gamma_l = 0$.

Koristeći malopre izvedenu varijansu MA(1) procesa (jednačina 2.24), dobijamo autokorelacione koeficijente za MA(1) model:

$$\begin{aligned}\rho_0 &= 1\\ \rho_1 &= \frac{-\theta_1}{1-\theta_1^2}\\ \rho_l &= 0, l > 2\end{aligned} \tag{2.25}$$

Parcijalna autokorelaciona funkcija MA modela

S obzirom da MA modele karakteriše osobina invertibilnosti, tj. MA(1) modelu odgovara AR model beskonačnog reda, možemo da zaključimo da se parcijalna autokorelaciona funkcija kod ovih modela sastoji iz niza nenula vrednosti. Zapravo, parcijalni autokorelacioni koeficijenti opadaju sa rastom kašnjenja.

Za proizvoljno k oblik parcijalne autokorelacione funkcije MA modela dat je sa:

$$\phi_{kk} = -\frac{\theta_1^k(1-\theta_1^2)}{(1-\theta_1^{2(k+1)})}$$

za $k = 1, 2, \ldots$.

2.3 Autoregresioni modeli pokretnih proseka ARMA

Često se u praktičnom radu sa AR i MA modelima javlja potreba da model ima veoma veliki red da bi mogao adekvatno da opiše dinamičku strukturu podataka vremenske serije. Veliki broj parametara u modelu, znatno otežava rad i kao rešenje ovog problema uvedena je nova klasa modela za opisivanje vremenskih serija. To su ***autoregresioni modeli pokretnih proseka***, odnosno ARMA modeli (angl. autoregressive moving-average models) ([2],[1]). Dakle, ARMA modeli su osmišljeni tako da imaju relativno mali broj parametara i predstavljaju kombinaciju autoregresionih modela i modela pokretnih proseka, kao što i samo ime kaže.

Kada je reč o finansijskim vremenskim serijama,činjenica je da se ovi modeli izuzetno retko koriste za opisivanje i predviđanje finansijskim vremenskih serija. Međutim, u ovom radu ćemo se ipak osvrnuti i na ove modele iz razloga što je koncept ARMA modela od velikog značaja u modelima volatilnosti, koji su tema samog rada. Zapravo, GARCH model (model uopštene autoregresione heteroskedastičnosti) može se, na neki način, smatrati ARMA modelom.
U nastavku biće razmatran ARMA (1,1) model, pa zaključi uopšteni na ARMA(p,q) model.

2.3.1 ARMA (1,1) model i njegove osobine

Definicija 2.3.1 *Vremenska serija X_t prati ARMA(1,1) model, ako zadovoljava sledeći uslov:*

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} = \phi_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \tag{2.26}$$

gde je $\{\varepsilon_t\}$ beli šum, leva strana jednačine je AR komponenta modela, reda $p = 1$, a desna strana je MA komponenta reda $q = 1$ i ϕ_0 je konstanta.

Da bi ovaj model uopšte imao smisla, mora biti $\phi_1 \neq \theta_1$ jer bi se u suprotnom model sveo na beli šum.

Osobine modela

S obzirom da je ARMA(1,1) model kombinacija AR(1) i MA(1) modela, osobine ovog modela su veoma slične odgovarajućim osobinama AR modela, s tim da dolazi do manjih izmena zbog MA modela.

1. *Stacionarnost*:

Uzimajući očekivanje od jednačine (2.26), dobijamo:

$$E(X_t) - \phi_1 E(X_{t-1}) = \phi_0 + E(\varepsilon_t) - \theta_1 E(X_{t-1}).$$

S obzirom da je proces ε_t beli šum, $E(\varepsilon_t) = 0$, dobijamo da je očekivanje:

$$E(X_t) = \mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1}$$

pa je vremenska serija slabo stacionarna.

2. *Varijansa vremenske serije*:

Jednostavnosi radi, uzimamo da je $\phi_0 = 0$. Varijansu vremenske serije opisane ARMA(1,1) modelom, dobijamo na sledeći način: množeći jednačinu modela sa ε_t i uzimajući očekivanu vrednost dobijamo:

$$E(X_t\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) - \theta_1 E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) = E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2 \tag{2.27}$$

Da bismo dobili varijansu ovog modela, zapisaćemo ga prvo na malo drugačiji način:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}$$

dalje je varijansa:

$$Var(X_t) = \phi_1^2 Var(X_{t-1}) + \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2\sigma_\varepsilon^2 - 2\phi_1\theta_1 E(X_{t-1}\varepsilon_{t-1})$$

Kako su članovi vremenske serije i članovi belog šuma nekorelisani međusobno, dobijamo:

$$Var(X_t) - \phi_1^2 Var(X_{t-1}) = (1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2$$

Ako je serija X_t slabo stacionarna tada je $Var(X_t) = Var(X_{t-1})$, pa je varijansa modela:

$$Var(X_t) = \frac{(1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2} \tag{2.28}$$

Dakle, varijansa (autokovarijacioni koeficijent na rastojanju 0) vremenske serije koja se opisuje ARMA(1,1) modelom zavisi samo od parametara modela. Uzimajući u obzir da je varijansa pozitivna, treba da bude $\phi_1^2 < 1$ (odnosno $|\phi_1| < 1$), što je isti uslov za stacionarnost kao kod AR(1) modela.

3. ***Autokovarijaciona funkcija***:

Da bismo dobili autokovarijacionu funkciju ARMA(1,1) modela, množimo jednačinu (2.26) sa X_{t-l}:

$$X_t X_{t-l} - \phi_1 X_{t-1} X_{t-l} = \varepsilon_t X_{t-l} - \theta_1\varepsilon_{t-1} X_{t-l}$$

pa je oblik autokovarijacione funkcije dat sa:

$$\gamma_l - \phi_1\gamma_{l-1} = E(\varepsilon_t X_{t-l}) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1} X_{t-l})$$

Za $l = 1$ imamo:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \phi_1\gamma_0 + E(\varepsilon_t X_{t-1}) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1} X_{t-1}) \\
&= \phi_1\gamma_0 - \theta_1\sigma_\varepsilon^2 \\
&= \phi_1\left[\frac{(1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}\right] - \theta_1\sigma_\varepsilon^2 \\
&= \frac{\phi_1 - \phi_1^2\theta_1 + \phi_1\theta_1^2 - \theta_1}{1 - \phi_1^2}\sigma_\varepsilon^2 \\
&= \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1\theta_1)}{1 - \phi_1^2}\sigma_\varepsilon^2
\end{aligned}$$

Za $l > 1$ važi:

$$\gamma^l = \phi_1 \gamma_{l-1}$$

Znači, oblik autokovarijacione funkcije vremenske serije opisane ARMA(1,1) modelom je:

$$\gamma_l = \begin{cases} \dfrac{(1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2} & , l = 0 \\ \dfrac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1\theta_1)}{1 - \phi_1^2}\sigma_\varepsilon^2 & , l = 1 \\ \phi_1 \gamma_{l-1} & , l > 1 \end{cases} \tag{2.29}$$

4. ***Obična i parcijalna autokorelaciona funkcija***:
Na osnovu autokovarijacione funkcije lako se dolazi do oblika obične autokorelacione funkcije:

$$\rho_l = \frac{\gamma_l}{\gamma_0} = \begin{cases} 0 & , l = 0 \\ \dfrac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1\theta_1)}{1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2} & , l = 1 \\ \phi_1 \rho_{l-1} & , l > 1 \end{cases} \tag{2.30}$$

Vidi se da autokorelaciona funkcija vremenske serije opisane ARMA(1,1) modelom zavisi od parametara AR i MA modela na rastojanju 1. Za rastojanja veća od 1, oblik ove funkcije određuje se na isti način kao kod AR modela.

Što se tiče parcijalne autokorelacione funkcije vremense serije opisane ARMA(1,1) modelom, ona se ponaša manje-više isto kao ista funkcija kod MA modela, sa malim izmenama. Naime, od ranije znamo da je prvi parcijalni autokorelacioni koeficijent, ϕ_{11}, uvek jednak prvom običnom paricjalnom autokorelacionom koeficijentu. Dakle na vrednost ϕ_{11} utiču parametri oba modela, i AR i MA. Za rastojanja veća od 1, ova funkcija prati putanju parcijalne autokkorelacione funkcije MA modela.

2.3.2 Opšti ARMA modeli

Opšti oblik autoregresionih modela pokretnih proseka je dat sa:

$$X_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t - \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}, \tag{2.31}$$

gde je $\{\varepsilon_t\}$ beli šum, a p i q su nenegativni brojevi celi brojevi, koji predstavljaju red AR i MA modela, respektivno.([2])
Specijalni slučajevi ARMA(p,q) modela su:

1. AR(p)=ARMA(p,0) i

2. MA(q)=ARMA(0,q).

ARMA(p,q) model, možemo da zapišemo i na malo drugačiji način:

$$\underbrace{(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2-\ldots-\phi_p L^p)X_t}_{\Phi(L)}=\phi_0+\underbrace{(1-\theta_1 L-\theta_2 L^2-\ldots-\theta_p L^p)\varepsilon_t}_{\Theta(L)}$$

gde je L operator kašnjenja (docnje) koji smo definisali kod AR modela. Za polinome $\Phi(L)$ i $\Theta(L)$ zahteva se da nemaju zajedničkih faktora jer bi u suprotnom red modela (p,q) mogao biti redukovan. Sem toga, $\Phi(L)$ je polinom AR modela, a $\Theta(L)$ polinom MA modela.

Kao što je pokazano za ARMA(1,1) model, stacionarnost ARMA(p,q) modela određena je na osnovu stacionarnosti AR(p) komponente. U skladu sa tim, invertibilnost je određena pomoću komponente MA modela.

Očekivanje:

$$E(X_t)=\frac{\phi_0}{1-\phi_1-\phi_2-\ldots-\phi_p}=\mu$$

Autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija:

I ovde kao i u najjednostavnijem obliku ovog modela, pretpostavljamo, isključivo jednostavnosti radi, da je parametar $\phi_0=0$, pa je autokovarijaciona funkcija data sa $E(X_tX_{t-k})$.

$$\begin{aligned}\gamma_k &= \phi_1\gamma_{k-1}+\phi_2\gamma_{k-2}+\ldots+\phi_p\gamma_{k-p}\\ &\quad+E(\varepsilon_t X_{t-k})-\theta_1 E(\varepsilon_{t-1}X_{t-k})-\theta_2 E(\varepsilon_{t-2}X_{t-k})-\ldots-\theta_p E(\varepsilon_{t-p}X_{t-k})\end{aligned}$$

S obzirom da je vremenska serija linearni proces, važi sledeće:

$$\begin{aligned}E(X_{t-k}\varepsilon_{t-q}) &= 0, k>q\\ E(X_{t-k}\varepsilon_{t-q}) &= Var(\varepsilon_t)=\sigma_\varepsilon^2, k=q\end{aligned}$$

Prema tome, autokovarijaciona funkcija ARMA(p,q) modela je:

$$\gamma_k=\phi_1\gamma_{k-1}+\phi_2\gamma_{k-2}+\ldots+\phi_p\gamma_{k-p}$$

odakle dobijamo i autokorelacionu funkciju ovog modela:

$$\rho_k=\frac{\gamma_k}{\gamma_0}=\phi_1\rho_{k-1}+\phi_2\rho_{k-2}+\ldots+\phi_p\rho_{k-p}$$

Podsetimo se osobina autokorelacione funkcije za AR(p) i MA(q) modele koje smo definisali ranije. Vrednosti autokorelacionih koeficijenata opadaju sa povećanjem broja kašnjenja kod AR modela. Za MA model važi da ovi koeficijenti imaju nenula vrednosti samo za kašnjenja koja su manja ili jednaka redu modela, q. Uzimajući ove osobine u obzir dolazimo do osobina ove funkcije kod kombinovanih ARMA modela.([2])

Osobine autokorelacione funkcije:

1. Prvih q autokorelacionih koeficijenata vremenske serije opisane ARMA(p,q) modelom zavisi od parametara i AR i MA komponente.

2. Za kašnjenja veća od reda MA komponente, tj. za $q + 1, q + 2, \ldots$, autokorelaciona funkcija se ponoša kao kod AR modela.

Osobine parcijalnih autokorelacionih koeficijenata kod MA modela opadaju sa povećanjem broja kašnjenja, a kod AR modela imaju nenula vrednosti samo za ona kašnjenja koja su manja ili jednaka redu samog modela, p. Sada možemo da navedemo osobine ove funkcije kod ARMA modela.

1. Na kašnjenjima manjim ili jednakim redu AR komponente, p , parcijalni autokorelacioni koeficijenti zavise od svih parametara modela (dakle, i od AR i od MA komponente),

2. Za kašnjenja reda većeg od reda AR komponente, tj. za $p + 1, p + 2, \ldots$, ovi koeficijenti slede oblik i svojstva parcijalne autokorelacione funkcije MA modela.

2.4 Predviđanje budućih vrednosti vremenskih serija

Jedan od zadataka analize vremenskih serija je predviđanje budućeg kretanja vremenske serije. Vrlo često u poslovnom svetu, predviđene vrednosti vremenskih serija utiču na donošenje važnih finansijskih odluka. Zbog toga je veoma važno da predviđene vrednosti budu što tačnije. Iz tog razloga, izlažemo prvo predviđanje sa najmanjom srednje kvadratnom greškom. Prilikom izvođenja ovg predviđanja, polazimo od vremenske serije $X_t = (X_1, X_2, \ldots, X_T)$. Cilj predviđanja je odrediti buduću vrednost vremenske serije X_{T+h} za h koraka unapred. Prirodan broj h naziva se *horizont predviđanja*, a $\hat{X}_T(h)$ je *predviđena vrednost vremenske serije* za h koraka unapred ([13]).

Nakon toga,preći ćemo na predviđanje vrednosti vremenskih serija na osnovu najjednostavnijih modela, AR(1), MA(1) i ARMA(1,1).

2.4.1 Predviđanje sa minimalnom srednje-kvadratnom greškom

Dakle, kao što je već navedeno u uvodnoj priči ovog poglavlja, želimo da nam predviđene vrednosti imaju što je mnoguću manju grešku. Shodno tome, formiraćemo predviđanje koja ima mnimalnu srednje-kvadratnu grešku. ([13],[2])

Pretpostavljamo da je vremenska serija stacionarna, pa tada elementi vremenske serije imaju konstantnu srednju vrednost μ. Da bismo došli do što boljieg predviđanja budućih vrednosti, koristićemo opservacije vremenske serije koje su nam poznate. Pa umesto da koristimo funkciju gustine X_{T+h}, koristimo uslovnu funkciju gustine (uslovljenu poznatim opservacijama vremenske serije $X_1, X_2, \ldots, X_T$). Iz tog razloga ćemo i srednje-kvadratnu grešku dobiti kao uslovno očekivanje.

Prilikom izvođenja ovog predviđanja, polazimo od opšteg linearnog procesa:

$$X_t = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots$$

gde je ε_t kao i svaki put do sada, beli šum (sve promenljive su međusobno nekorelisane sa nultom srednjom vrednošću i varijansom σ_ε^2). Pretpostavljamo da nam je poznato T podataka na osnovu kojih treba da predvidimo h perioda unapred.

Stvarni nivo vremenske serije u trenutku $T + h$ koji prognoziramo dat je na sledeći način:

$$X_{T+h} = \varepsilon_{T+h} + \psi_1 \varepsilon_{T+h-1} + \psi_2 \varepsilon_{T+h-2} + \ldots$$

Predviđena vrednost vremenske serije data je na sledeći način:

$$\hat{X}_T(h) = \psi_h^* \varepsilon_T + \psi_{h+1}^* \varepsilon_{T-1} + \psi_{h+2}^* \varepsilon_{T-2} + \ldots$$

gde su ψ_i^* nepoznati parametri koje treba da odredimo. Njihovu vrednost dobijamo minimiziranjem srednje-kvadratne greške predviđanja. Da bismo to mogli da uradimo, povezaćemo stvarnu i predviđenu vrednost vremenske serije:

$$\begin{aligned}X_{T+h} &= \varepsilon_{T+h} + \psi_1\varepsilon_{T+h-1} + \psi_2\varepsilon_{T+h-2} + \ldots + \psi_{h-1}\varepsilon_{T+1} + \psi_h\varepsilon_T \\ &+ \psi_{h+1}\varepsilon_{T-1} + \psi_{h+2}\varepsilon_{T-2} + \ldots \\ &= \sum_{j=0}^{h-1}\psi_j\varepsilon_{T+h-j} + \sum_{j=0}^{\infty}\psi_{h+j}\varepsilon_{T-j}\end{aligned}$$

Dalje, greška predviđanja je razlika stvarne i predviđene vrednosti, tj.:

$$X_{T+h} - \hat{X}_T(h) = \big(\sum_{j=0}^{h-1}\psi_j\varepsilon_{T+h-j} + \sum_{j=0}^{\infty}\psi_{h+j}\varepsilon_{T-j}\big) - \sum_{j=0}^{\infty}\psi^*_{h+j}\varepsilon_{T-j}$$

Sada je srednje kvadratna greška predviđanja, kao što smo i naveli na početku, očekivana vrednost kvadrata razlike stvarnih i predviđenih vrednosti vremenske serije:

$$E\big[X_{T+h} - \hat{X}_T(h)\big]^2 = \sigma^2\sum_{j=0}^{h-1}\psi_j^2 + \sigma^2\sum_{j=0}^{\infty}(\psi_{h+j} - \psi^*_{h+j})^2 \tag{2.32}$$

Na osnovu ove jednačine, jasno je da je srednje-kvadratna greška najmanja kada je $\psi_{h+j} = \psi^*_{h+j}$. Prema tome, predviđena vrednost sa minimalnom srednje-kvadratnom greškom data je sa:

$$\hat{X}_T(h) = \psi_h\varepsilon_T + \psi_{h+1}\varepsilon_{T-1} + \psi_{h+2}\varepsilon_{T-2} + \ldots \tag{2.33}$$

pri čemu $\hat{X}_T$ nazivamo funkcija predviđanja i ona, kao što vidimo, predstavlja funkciju broja perioda h za koje pravimo predviđanje u odnosu na fiksni početak, T.
Uslovna očekivana vrednost šokova je:

$$E(\varepsilon_{T+j}|X_T, X_{T-1},\ldots) = \begin{cases}\varepsilon_{T+j}, & j \leq 0\\ 0, & j > 0\end{cases}$$

što je i logično jer su prošle vrednosti šokova ε_{h+j} poznate za $j \leq 0$,a buduće vrednosti ne znamo pa ih zamenjujemo uslovnim očekivanjem jenakim nuli.

$$E(X_{T+h}|X_T, X_{T-1},\ldots) = \psi_h\varepsilon_T + \psi_{h+1}\varepsilon_{T-1} + \ldots \tag{2.34}$$

Zapravo je predviđena vrednost za X_{T+h} sa minimalnom srednje-kvadratnom greškom jednaka njenoj uslovnoj ovcekivanoj vrednosti, tj. važi:

$$\hat{X}_T(h) = E(X_{T+h}|X_T, X_{T-1},\ldots) \tag{2.35}$$

Za ovo predviđanje sa minimalnom srednje-kvadratnom greškom, možemo izračunati i grešku koju pravimo prilikom predviđanja kao:

$$e_T(h) = X_{T+h} - \hat{X}_T(h) = \sum_{j=0}^{h-1}\psi_j\varepsilon_{T+h-j} \tag{2.36}$$

Srednja vrednost ove greške je $E(e_T(h)|X_t, t \leq T) = 0$, a njena varijansa je:

$$Var(e_T(h)) = Var(\hat{X_T}(h)) = \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2 = \sigma^2(1 + \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2) \tag{2.37}$$

Upravo na osnovu ove varijanse, izvodi se intervalna ocena predviđanja. Pod pretpostavkom da je vremenska serija normalno raspoređena, intervalna prognoza sa verovatnoćom od 95% je data sa:

$$\hat{X_T}(h) - 1.96\sqrt{Var(e_T(h))} \leq X_{T+h} \leq \hat{X_T}(h) + 1.96\sqrt{Var(e_T(h))}$$

2.4.2 Predviđanje na osnovu AR(1) modela

AR(1) model je oblika:

$$X_t - \mu = \phi_1(X_t - \mu) + \varepsilon_t$$

sa osobinama:

1. $|\phi_1| < 1$
2. $E(X_t) = \mu$

Za razliku od prethodno uvedenog AR(1) modela, ovde se u modelu javlja i parametar srednje vrednosti. S obzirom da je vremenska serija stacionarna, očekivana vrednost je i za X_t i za X_{t-1} μ.

Kod predviđanja budućih vrednosti uvek pretostavljamo da raspolažemo sa T podataka na osnovu kojih predviđamo h perioda unapred.
Stvarni nivo vremenske serije u trenutku $t = T + 1$ je:

$$X_{T+1} = \mu + \phi_1(X_T - \mu) + \varepsilon_{T+1}$$

Predviđena vrednost za jedan period u napred na osnovu uzorka od T podataka je:

$$\hat{X_T}(1) = \mu + \phi_1(X_T - \mu)$$

Greška predviđanja i varijansa greške za jedan period unapred su:

$$\hat{e}_t(1) = X_{T+1} - \hat{X_T}(1) = e_{T+1} \text{ i } Var(e_{T+1}) = \sigma_\varepsilon^2$$

Za $t = T + 2$ stvarni nivo vremenske serije je:

$$\begin{aligned} X_{T+2} &= \mu + \phi_1 X_{T+1} + \varepsilon_{T+2} \\ &= \mu + \phi_1[\mu + \phi_1(X_T - \mu) + \varepsilon_{T+1} - \mu] + \varepsilon_{T+2} \\ &= \mu + \phi_1^2(X_T - \mu) + \varepsilon_{T+2} + \phi_1\varepsilon_{T+1} \end{aligned}$$

a predviđena vrednost za dva perioda unapred je:

$$\hat{X_T}(2) = \mu + \phi_1^2(X_T - \mu)$$

Greška predviđanja i varijansa te greške su:

$$\hat{e_T}(2) = X_{T+2} - \hat{X_T}(2) = e_{T+2} + \phi_1 e_{T+1} \text{ i } Var(\hat{e_T}(2)) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{(1-\phi_1^4)}{(1-\phi_1^2)}$$

U opštem slučaju, odnosno za proizvoljni horizont predviđanja h, predviđena vrednost je:

$$\hat{X_T}(h) = \mu + \phi_1^h(X_T - \mu)$$

a greška predviđanja i njena varijansa su:

$$\hat{e_T}(h) = e_{T+h} + \phi_1 e_{T+h-1} + \phi_1^2 e_{T+h-2} + \ldots + \phi_1^{h-1} e_{T+1}$$
$$Var(\hat{e_T}(h)) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{1-\phi_1^{2h}}{1-\phi_1^2}$$

Zaključujemo da za dovoljnog dug horizont predviđanja $\phi_1^h \to 0$ pa se predviđena vrednost $\hat{X_T}(h)$ približava srednoj vrednosti vremenske serije, μ. Varijansa greške predviđanja postaje jednaka varijansi same serije koja je opisana stacionarnim AR(1) modelom, tj. $\frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2}$.

2.4.3 Predviđanje na osnovu MA(1) modela

Model pokretnih proseka reda 1, MA(1), ima sledeći oblik:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

i sledeće osobine:

1. $|\theta_1| < 1$ i
2. $E(X_t) = \mu$

Ponovo kao i kod predviđanja AR(1) modelom, imamo uzorak od T podtaka na osnovu kojih predviđamo buduće vrednosti vremenske serije.
Dakle, za $t = T + 1$ stvarni nivo serije je:

$$X_{T+1} = \mu + \varepsilon_{T+1} - \theta_1 \varepsilon_T$$

a predviđena vrednost za jedan period unapred je:

$$\hat{X_T}(1) = \mu - \theta_1 \varepsilon_T$$

pa su greška predviđanja i odgovarajuća varijansa:

$$\hat{e_T}(1) = X_{T+1} - \hat{X_T}(1) = \varepsilon_{T+1} \text{ i } Var(\hat{e_T}(1)) = Var(\varepsilon_{T+1}) = \sigma_\varepsilon^2$$

Za $t = T + 2$ stvarni nivo serije, predviđena vrednost za dva perioda unapred, greška prognoze i varijansa greške date su na sledeći način:

1. $X_{T+2} = \mu + \varepsilon_{T+2} - \theta_1 \varepsilon_{T+1}$
2. $\hat{X_T}(2) = \mu$
3. $\hat{e_T}(2) = X_{T+2} - \hat{X_T}(2) = \varepsilon_{T+2} - \theta_1 \varepsilon_{T+1}$
4. $Var(\hat{e_T}(2)) = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2)$

Zaključujemo da je predviđena vrednost vremenske serije opisane MA(1) modelom, za $h > 1$ vremenskih perioda unapred uvek ista i iznosi $\hat{X_T}(h) = \mu$. Greška ove predviđene vrednosti i varijansa te greške su:

$$\hat{e_T}(h) = \varepsilon_{T+h} - \theta_1 \varepsilon_{T+h-1} \text{ i } Var(\hat{e_T}(h)) = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2)$$

2.4.4 Predviđanje na osnovu ARMA(1,1) modela

Slično kao i ranije, polazimo od ARMA(1,1) modela:

$$X_t = \mu + \phi_1 (X_t - \mu) + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

koji ima sledeće osobine:

1. $|\phi_1| < 1$
2. $|\theta_1| < 1$
3. $E(X_t) = \mu$

Za $t = T + 1$ stvarna vrednost vremenske serije opisane ARMA(1,1) modelom može da se zapiše i kao:

$$X_{T+1} = \mu + \phi_1 (X_T - \mu) + \varepsilon_{T+1} - \theta_1 \varepsilon_T$$

Pa je predviđena vrednost za jedan period unapred na osnovu uzorka od T podataka:

$$\hat{X_T}(1) = \mu + \phi_1 (X_T - \mu) - \theta_1 \varepsilon_T$$

Greška predviđanja i varijansa greške dati su na sledeći način:

$$\hat{e_T}(1) = X_{T+1} - \hat{X_T}(1) = \varepsilon_{T+1} \text{ i } Var(\hat{e_T}(1)) = \sigma_\varepsilon^2$$

Za $t = T + 2$, imamo:

1. Stvarni nivo vremenske serije:

$$X_{T+2} = \mu + \phi_1^2(X_T - \mu) + \varepsilon_{T+2} + (\phi_1 - \theta_1)\varepsilon_{T+1} - \phi_1\theta_1\varepsilon_T$$

2. Predviđena vrednost dva perioda unapred je:

$$\hat{X_T}(2) = \mu + \phi_1^2(X_T - \mu) - \phi_1\theta_1\varepsilon_T$$

3. Greška predviđanja i varijansa greške su:

$$\hat{e_T}(2) = X_{T+2} - \hat{X_T}(2) = \varepsilon_{T+2} + (\phi_1 - \theta_1)\varepsilon_{T+1} \tag{2.38}$$

$$Var(\hat{e_T}(2)) = \sigma_\varepsilon^2\big(1 + \frac{(\phi_1 - \theta_1)^2(1 - \phi_1^2)}{1 - \phi_1^2}\big) \tag{2.39}$$

Dakle, za proizvoljno veliki horizont predviđanja, h, ARMA (1,1) model daje sledeće rezultate:

1. Predviđena vrednost: $\hat{X_T}(h) = \mu + \phi_1^h(X_T - \mu) - \phi_1^{h-1}\theta_1\varepsilon_T$
2. Greška predviđanja: $\hat{e_T}(h) = \varepsilon_{T+h} + (\phi_1 - \theta_1)\varepsilon_{T+h-1} + \ldots + \phi_1^{h-2}(\phi_1 - \theta_1)\varepsilon_{T+1}$
3. Varijansa greške: $Var(\hat{e_T}(h)) = \sigma_\varepsilon^2\big(1 + (\phi_1 - \theta_1)^2\frac{(1 - \phi_1^{2(h-1)})}{1 - \phi_1^2}\big)$

Na osnovu upravo izvedene analize zaključujemo da ukoliko $h \to \infty$ tada se predviđena vrednost $\hat{X_T}(h)$ približava srednjoj vrednosti μ. Varijansa greške predviđanja, u tom slučaju, postaje jednaka varijansi same vremenske serije opisane ARMA(1,1) modelom, tj, $\sigma_\varepsilon^2\big(1 + \frac{(\phi_1-\theta_1)^2}{1-\phi_1^2}\big)$.

3

Uslovni heteroskedastični modeli vremenskih serija

Najvažnija osobina finansijskih vremenskih serija je njihova nestabilna varijansa. U ovom poglavlju bavićemo se statističkim modelima pogodnim za opisivanje ovakvih vremenskih serija. Takvi modeli nazivaju se **uslovni heteroskedastični modeli vremenskih serija**.

Nestabilnost varijanse, odnosno volatilnost veoma je značajna u trgovanju opcijama. U tom slučaju volatilnost predstavlja uslovnu varijansu stope prinosa osnovne aktive (podloge).
Posmatrajmo cenu evropske kol opcije (engl. european call option). *Kol opcija* predstavlja ugovor koji imaocu opcije daje pravo ali ne i obavezu da kupi osnovnu aktivu po ceni izvršenja K (engl. strike price) na datum dospeća T, u slučaju evropske kol opcije, ili do datuma dospeća, ako se radi o američkoj kol opciji ([12]). Vreme do dospeća označavamo sa l. U finansijskoj matematici veoma poznata, Black-Scholes-ova formula, daje cenu Evropske kol opcije na sledeći način:

$$C_t = P_t\Phi(x) - Kr^{-l}\Phi(x - \sigma_t\sqrt{t})$$
$$x = \frac{ln(\dfrac{P_t}{Kr^{-l}})}{\sigma_t\sqrt{l}} + \frac{1}{2}\sigma_t\sqrt{l}$$

gde je P_t trenutna cena akcije, r je kamatna stopa bez rizika, σ_t uslovna standardna devijacija logaritam stope prinosa osnovne aktive (podloge), a $\Phi(\cdot)$ je funkcija raspodele standardne normalne slučajne promenljive.

Bitno naglastiti je važnost uslovne varijanse logaritam stope prinosa osnovne aktive tj. podloge. Upravo ova volatilnost se tokom vremena razvija, menja. Volatilnost ima upotrebu i van oblasti trgovanja opcijama, kao na primer u upravljanju rizicima, u izračunavanju VaR-a neke finansijske pozicije. Sem toga, modeliranje volatilnosti vremenskih serija znatno pospešuje efikasnost ocene parametara i tačnost prilikom predviđanja. ([1])
Modeli volatilnosti kojima se u ovom radu bavimo su:

1. modeli autoregresione uslovne heteroskedastičnosti - ARCH modeli (engl. AutoRegres-

sive Conditional Heteroscedastic model),

2. model uopštene autoregresione uslovne heteroskedastičnosti - GARCH model (engl. generalized ARCH),

3. eksponencijalni GARCH model,

4. uslovni heteroskedastični autoregresioni model pokretnih proseka - CHARMA model (engl. Conditional AutoRegressive Moving-Average model)

Na početku ovog poglavlja izložićemo neke karakteristike uslovne heteroskedastičnosti, a nakon toga detaljno objasniti strukturu, postupak izgradnje ARCH, GARCH i EGARCH modela kao i predviđanje pomoću njih. Nakon toga uporedićemo prednosti i mane ovih modela i govoriti o njihovoj primeni na finansijskim tržištima.

3.1 Osobine uslovne heteroskedastičnosti

Ono što odvaja finansijske vremenske serije od ostalih je to što ih odlikuje neodređenost. Meru te neodređenosti nazivamo volatilnošću. Važna osobina volatilnosti akcija je ta da je ne možemo registrovati. Često se deašava da dnevna volatilnost neke akcije na tržištu nije dostupna iz razloga što se merenja vrše samo jednom dnevno. Čak i onda kada postoji dovoljno podataka za procenu dnevne volatilnosti, tačnost tih procena potrebno je proveriti jer osim dnevne volatilnosti, na volatilnost akcije utiču i varijacije između dana trgovanja. ([1])

Dakle, za modeliranje volatilnosti finansijskih derivata koristimo uslovne heteroskedastične modele i na osnovu njih predviđamo buduće vrednosti vremensih serija. Međutim, činjenica da volatilnost ne možemo uvek da registrujemo otežava nam da procenimo koliko su dobre predviđene vrednosti dobijene na osnovu ovih modela.

Ako se na trenutak vratimo na trgovanje opcijama i pretpostavimo da su cene opcija dobijene na osnovu, već pomenute , Black-Scholes-ove formule, tada dobijenu cenu opcije koristimo za određivanje „podrazumevane (implicirane)" volatilnosti. U literaturi se ovaj postupak veoma često kritikuje iz razloga što je ovaj model baziran na nekim pretpostavkama koje u stvarnosti mogu da budu pogrešne, tj. mogu da ne opisuju stvarnost dovoljno dobro da daju realne rezultate. Na primer, na osnovu registrovanih cena evropskih kol opcija a pomoću Black-Scholes-ove formule može se dobiti uslovna standardna devijacija σ_t. Vrednost σ_t^2 je upravo ta „podrazumevana (implicirana)" volatilnost podloge (osnovne aktive). ([1])

Kao što je već naglašeno, pretpostavka koji BS model koristi, da serija stope prinosa aktive prati lognormalnu raspodelu, a na osnovu koje smo izveli impliciranu volatilnost, može da dovede do toga da ta implicirana volatilnost bude znatno veća od one dobijene GARCH modelom.

Volatilnost prinosa aktive ima i neke dobre osobine.([1]) Naime,

- volatilnost može biti visoka u nekim vremenskim periodima a niska u drugim,
- skokovi volatilnosti su veoma retki,
- volatilnost varira između nekih fiksiranih vrednosti, što sa stastističkog stanovišta znači da je volatilnost često stacionarna,
- volatilnost reaguje na različite načine na velika povećana cena i na velika smanjenja cena.

Pri razvoju modela volatilnosti vrlo su značajne ove osobine. Noviji modeli se prave tako da nadomeste nedostatke starih koji ne uspevaju da obuhvate sve karakteristike volatilnosti. Na primer, EGARCH model napravljen je tako da obuhvati asimetriju volatilnosti do koje dolazi usled velikih pozitivnih i negativnih stopa prinosa.

Uslovni heteroskedastični modeli vremenskih serija bave se razvojem σ_t^2 i način na koji se volatilnost razvija razvija deli ove modele na dve velike grupe:

1. Modeli koji koriste tačno određenu funkciju za opisivanje razvoja σ_t^2 i
2. Modeli koji koriste stohastičku jednačinu da opišu σ_t^2

Predstavnik prve grupe je, na primer, GARCH model, dok u drugu grupu spadaju modeli stohastičke volatilnosti (SV modeli).

Neka je r_t logaritam stopa prinosa u trenutku t. Vremenska serija $\{r_t\}$ je ili serijski nekorelisana ili postoji serijska korelacija nižeg reda, ali ono što je važno je to da su članovi vremenske serije zavisni. Uslovni heteroskedastični modeli vremenskih serija prinosa opisuju ovu zavisnost.([1])

Pre nego što prikažemo strukture ovih modela, osvrnućemo se na uslovno očekivanje i uslovnu varijansu od r_t ako je skup informacija dostupan u trenutku $t-1$, F_{t-1}, poznat.

$$\mu_t = E(r_t|F_{t-1}) \tag{3.1}$$

$$\sigma_t^2 = Var(r_t|F_{t-1}) = E\big[(r_t-\mu_t)^2|F_{t-1}\big] \tag{3.2}$$

Najčešće F_{t-1} predstavlja sve linearne funkcije prošlih stopa prinosa. Empirijska istraživanja su pokazala da je zavisnost serije stope prinosa r_t slaba ako uopšte postoji. Iz tog razloga jednačina za μ_t treba da bude jednostavna. Takođe pretpostavljamo i da je vremenska serija prinosa r_t generisana stacionarnim ARMA(p,q) modelom. Dakle, dobijamo sledeći model:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + a_t \\ \mu_t &= \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i r_{t-i} - \sum_{i=1}^{q} \theta_i a_{t-i} \end{aligned} \tag{3.3}$$

za vremensku seriju r_t, gde su p i q nenegativni prirodni borjevi. Red ARMA modela (p,q) zavisi od frekvencije vremenske serije prinosa.

Upravo dobijeni model predstavlja jednu od primena linearnih modela vremensih serija u finansijama.
Sada je, kombinacijom prethodne dve jednačine, dobijeno:

$$\sigma_t^2 = Var(r_t|F_{t-1}) = Var(a_t|F_{t-1}). \tag{3.4}$$

a_t predstavlja šok tj. korigovanu sredinu prinosa neke akcije u vremenu t, a σ_t je pozitivni koren od σ_t^2. Takođe, u modelu (3.3) jednačinu za μ_t nazivamo *jednačinom sredine*, a jednačinu za σ_t^2 *jednačinom volatilnosti* za seriju r_t. Dakle, modeliranje uslovne heteroskedastičnosti svodi se na pravljenje dinamičke jednačine koja opisuje razvoj uslovne varijanse šoka serije.
Pre nego što pređemo na definisanje uslovnih heteroskedastičnih modela, a jednostavnosi radi, pretostavljaćemo da je model uslovne sredine dat.

3.2 Model autoregresione uslovne heteroskedastičnosti-ARCH model

Model autoregresione uslovne heteroskedastičnosti (ARCH model) prvi je predstavio Robert F. Engle ([7]). Osnovna ideja ARCH modela je:

a. korigovana sredina prinosa akcije, a_t je serijski nekorelisana, ali zavisna.

b. zavisnost a_t može biti opisana kvadratnom funkcijom prethodnih vrednosti.

ARCH(m) model predstavljamo na sledeći način:

$$\begin{aligned} a_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_m a_{t-m}^2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

gde je $\{\varepsilon_t\}$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom, koje imaju srednju vrednost 0 i varijansu 1. Važi i da je $\alpha_0 > 0$ a $\alpha_i \geq 0$ za $i > 0$.
U praksi se najčešće pretpostavlja da ε_t ima standardnu normalnu ili standardizovanu studentovu raspodelu.
Na osnovu strukture modela može se zaključiti da kvadrati prošlih velikih šokova $\{a_{t-i}^2\}_{i=1}^m$ dovode do velike uslovne varijanse σ_t^2 za a_t.
U finanisjkom smislu, to znači da velike šokove obično prati još jedan veliki šok.

3.2.1 ARCH(1) model

Za $m = 1$, ARCH modela izgleda:

$$\begin{aligned} a_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

uz uslove:

1. $\alpha_0 > 0$
2. $\alpha_1 \geq 0$

Osobine ARCH(1) modela:

- Bezuslovno očekivanje od a_t

$$E(a_t) = E\big[E(a_t|F_{t-1})\big] = E(\sigma_t E(\varepsilon_t)) = 0$$

- Bezuslovna varijansa od a_t

$$Var(a_t) = E(a_t^2) = E\big[E(a_t^2|F_{t-1})\big] = E(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(a_{t-1}^2)$$

  Iz razloga što je a_t stacionaran proces sa očekivanjem $E(a_t) = 0$, znamo da je $Var(a_t) = Var(a_{t-1}) = E(a_{t-1}^2)$, pa je bezuslovna varijansa procesa data sa:

$$Var(a_t) = \alpha_0 + \alpha_1 Var(a_t) \Rightarrow Var(a_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$$

  Varijansa procesa je uvek pozitivna, pa nam ta činjenica postavlja novi uslov za parametar α_1, a to je da $0 \leq \alpha_1 < 1$.

- Treći i četvrti momenat od a_t

  Uslov koji treba da zadovoljava parametar α_1, dobijen na osnovu bezuslovne varijanse procesa, nije jedini uslov koji ovaj parametar mora da ispunjava. Naime, u nekim primenama, potrebno je da znamo i više momente procesa a_t, pa to povlači nova ograničenja za ovaj parametar.([1])
  Da bi smo ispitivali ponašanje repova raspodele, četvrti momenat od a_t mora biti konačan. Pretpostavićemo da $\varepsilon_t : \mathcal{N}(0, 1)$.

$$\begin{aligned} E(a_t^4|F_{t-1}) &= 3\big[E(a_t^2|F_{t-1})\big]^2 = 3(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2)^2 \\ E(a_t^4) &= E\big[E(a_t^4|F_{t-1})\big] = 3E(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2)^2 \\ &= 3E\big[\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 a_{t-1}^2 + \alpha_1^2 a_{t-1}^4\big] \end{aligned}$$

  Ako je serija a_t stacionarna četvrtog reda sa $m_4 = E(a_t^4)$ onda je:

$$\begin{aligned} m_4 &= 3\big[\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 Var(a_t) + \alpha_1^2 m_4\big] \\ &= 3\alpha_0^2\left(1 + 2\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\right) + 3\alpha_1^2 m_4 \\ m_4 &= \frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)} \end{aligned}$$

Dakle, novi ograničenje za parametar α_1 je $1 - 3\alpha_1 > 0$ jer je četvrti momenat pozitivan. Odnosno, $0 \leq \alpha_1 < \frac{1}{3}$.

Pored toga, koeficijent spoljoštenosti od a_t je

$$\begin{aligned}\frac{E(a_t^4)}{(Var(a_t))^2} &= 3\frac{\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)} \times \frac{(1-\alpha_1)^2}{\alpha_0^2} \\ &= 3\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2} > 3\end{aligned}$$

Vidimo da je koeficijent spoljoštenosti pozitivan i da su repovi raspodele teži od repova normalne raspodele.

Osobine ARCH(1) modela se u principu mogu uopštiti i na ARCH modele višeg reda, ali formule postaju znatno komplikovanjije jer zahtevaju veći broj parametara.

3.2.2 Izgradnja ARCH modela

Izgradnja ARCH modela izvodi se u tri koraka:

1. Izgradnja ekonometrijskog modela za seriju stope prinosa

2. Određivanje reda modela i ocena parametara

3. Provera adekvatnosti modela

Prvi korak obezbeđuje izgradnju nekog ekonometrijskog modela radi otklanjanja bilo kakve zavisnosti među podacima. On služi i da bi se testirao ARCH efekat, tj. da bi se utvrdilo da li vremenska serija ispoljava nestabilnost uslovne varijanse.

1. Korak

Da bi se uklonila sva serijska korelacija u podacima registrovane vremenske serije gradi se prvo ARMA model. Kada je reč o finansijskim vremenskih serijama, odnosno o serijama prinosa akcija, ovaj korak svodi se na uklanjanje uzoračke sredine iz podataka ukoliko se ona značajno razlikuje od 0. Ukoliko modeliramo seriju dnevnih stopa prinosa, tada za ovaj korak možemo koristiti i AR model.

Dalje, potrebno je utvrditi da li vremenska serija ima nestabilnu uslovnu varijansu, tj da li je prisutna heteroskedastičnost. To se postiže analizom reziduala ARMA modela: a_t^2, gde je $a_t = r_t - \mu_t$. Najčešće se za ovo koristi jedna od sledeće dve statistike:

1. Boks-Ljungova statistika za a_t^2 i

2. Engleova statistika postojanja ARCH efekta

Prvi test se primenjuje na kvadrirane vrednosti reziduala i tako se proverava da li postoji statistički značajna korelaciona struktura u njima, a oni predstavljaju baš meru varijabiliteta vremenske serije. Dakle, ukoliko je ova statistika značajna, to nam govori da je vremenska serija nestabilna u smislu da postoji autoregresiona heteroskedastičnost.

Što se tiče drugog testa, on je ekvivalentan F testu, gde se testira da li je $\alpha_i = 0(i = 1, \ldots, m)$ u linearnoj regresiji:

$$a_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_m a_{t-m}^2 + e_t, t = m+1, \ldots, T$$

gde je e_t greška, m je unapred poznat pozitivan ceo broj i T je veličina uzorka.

Nulta hipoteza definiše odsustvo autokorelacije u varijansi vremenske serije, dakle ukoliko je nulta hipoteza tačna, to nam govori da je varijansa serije stabilna. Ovu hipotezu definišemo kao:

$$H_0(\alpha_i = 0, i = 1, \ldots, m)$$

F-statistiku za proveru nulte hipoteze definišemo na sledeći način:

$$F = \frac{(SSR_0 - SSR_1)/m}{SSR_1/(T - 2m - 1)} \tag{3.7}$$

gde je $SSR_0 = \sum_{t=m+1}^{T}(a_t^2 - \bar{\omega})$, a sa $\bar{\omega}$ označena je uzoračka sredina od a_t^2 i $SSR_1 = \sum_{t=m+1}^{T} \hat{e_t}^2$, a $\hat{e_t}$ je rezidual dobijen metodom najmanjih kvadrata iz jednačine linearne regresije definisane gore.
Ova test statistika ima χ_m^2 raspodelu sa m stepeni slobode.

Ako je F-testom pokazano da postoji uslovna heteroskedastičnost, tada koristimo parcijalnu autokorelacionu funkciju šokova a_t^2 da bismo utvrdili kog reda je naš ARCH model. To radimo na sledeći način:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_m a_{t-m}^2$$

Za poznati uzorak, može se pokazati da je a_t^2 nepristrasna ocena σ_t^2. Iz tog razloga se očekuje da je a_t^2 u linearnoj zavisnosti sa $a_{t-1}^2, \ldots, a_{t-m}^2$ na sličan način kao što je to kod autoregresionog modela reda m.

2. Korak

Ocenjivanje parametara u ARCH modelu ostvaruje se primenom metoda maksimalne verodostojnosti. Dve funkcije verodostojnosti se najčešće koriste. Pretpostavimo prvo da ε_t : $\mathcal{N}(0, 1)$, tada je funkcija verodostojnosti data sa:

$$\begin{aligned}
f(a_1, \ldots, a_T|\Lambda) &= \\
&= f(a_T|F_{T-1})f(a_{T-1}|F_{T-2}) \cdot f(a_{m+1}|F_m)f(a_1, \ldots, a_m|\Lambda) \\
&= \prod_{t=m+1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left[-\frac{a_t^2}{2\sigma_t^2}\right] \times f(a_1, \ldots, a_m|\Lambda)
\end{aligned}$$

gde je Λ vektor parametara modela, a $f(a_1, \dots, a_m|\Lambda)$ je zajednička funkcija gustine za $a_1, \dots, a_m$. U praksi je veoma teško doći do tačnog izraza za ovu funkciju gustine, pa definišemo uslovnu funkciju verodostojnosti kao:

$$f(a_{m+1}, \dots, a_T|\Lambda, a_1, \dots, a_m) = \prod_{t=m+1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\Big[-\frac{a_t^2}{2\sigma_t^2}\Big]$$

a vrednost σ_t^2 može da se dobije rekurzivno.

Ocene parametara vremenske serije dobijamo maksimizacijom upravo definisane funkcije verodostojnosti.

S obzirom da je maksimizacija funkcije verodostojnosti ekvivalentna maksimizaciji logaritma te funkcije, što je tehnički lakše, dajemo i oblik logaritma uslovne funkcije verodostojnosti:

$$l(a_{m+1}, \dots, a_T|\Lambda, a_1, \dots, a_m) = -\sum_{t=m+1}^{T} \Big[\frac{1}{2} ln(\sigma_t^2) + \frac{1}{2}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\Big]$$

gde, ponovo, σ_t^2 može da se dobije rekurzivno.

Sada pretpostavljamo da ε_t ima standardizovanu Studentovu-t raspodelu, jer se u praksi pokazalo da je nekad ova opcija bolja. Označićemo sa x_v Studentovu-t raspodelu sa v stepeni slobode. Tada je varijansa $Var(x_v) = \frac{v}{v-2}$ za $v > 2$.

Mi uzimamo $\varepsilon_t = \frac{x_v}{\sqrt{\frac{v}{v-2}}}$. Tada je funkcija gustine za ε_t:

$$f(\varepsilon_t|v) = \frac{\Gamma((v+1)/2)}{\Gamma(v/2)\sqrt{(v-2)\pi}} \Big(1 + \frac{\varepsilon_t^2}{v-2}\Big)^{-(v-1)/2}, v > 2$$

gde je $\Gamma(x)$ gama funkcija.

Koristeći da je $a_t = \sigma_t \varepsilon_t$, dobijamo oblik uslovne funkcije verodostojnosti:

$$f(a_{m+1}, \dots, a_T|\Lambda, a_1, \dots, a_m) = \prod_{t=m+1}^{T} \frac{\Gamma((v+1)/2)}{\Gamma(v/2)\sqrt{(v-2)\pi}} \frac{1}{\sigma_t} \Big[1 + \frac{a_t^2}{(v-2)\sigma_t^2}\Big]^{-(v+1)/2}$$

gde je $v > 2$.

Maksimizacijom ove funkcije dobijamo ocene parametara ARCH modela.

3.Korak

Provera adekvatnosti ocenjenog ARCH modela vrši se pmoću standardizovanih reziduala. Njih dobijamo tako što obične reziduale deilmo sa odgovarajućim ocenama standardne devijacije koju dobijamo iz jednačine volatilnosti. Dakle,

$$\tilde{a}_t = \frac{a_t}{\sigma_t}$$

gde su $\tilde{a}_t$ nezavisne slučajne promenljive koje sve imaju ili standardnu normalnu ili standardizovanu Studentovu-t raspodelu.

Da bi se proverila adekvatnost jednačine sredine, tj da bi se proverilo da li je autokorelacija na nivou serije modelirana na odgovarajući način, koristi se Ljung-Boksova statistika za $\tilde{a}_t$, a Ljung-Boksova statistika za $\tilde{a_t^2}$ koristi se bi se utvrdilo da li je jednačina volatilnosti konzistentna sa korelacionom strukturom varijabiliteta modelirane vremenske serije.

3.2.3 Predviđanje pomoću ARCH modela

Pomoću ARCH modela možemo da predvidimo buduću vrednost volatilnosti. Na osnovu prvih T opservacija vremenske serije r_t želimo da odredimo buduće kretanje te vremenske serije i njen uslovni varijabilitet za h perioda unapred.
Uvodimo sledeće oznake:

1. r_{T+h} - Stvarni nivo vremenske serije h perioda unapred
2. $\hat{r_T}(h)$ - Predviđena vrednost h perioda unapred
3. σ^2_{T+h} - Stvarna buduća vrednost volatilnosti h perioda unapred
4. $\hat{\sigma^2_T}(h)$ - Predviđena buduća vrednost volatilnosti

Dakle, predviđena vrednost volatilnosti za jedan period unapred je:

$$\hat{\sigma^2_T}(1) = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\sigma^2_T} + \ldots + \alpha_m a_{T+1-m}$$

Za dva perioda unapred:

$$\hat{\sigma^2_T}(2) = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\sigma^2_T}(1) + \ldots + \alpha_m a_{T+2-m}$$

Za l koraka unapred:

$$\hat{\sigma^2_T}(l) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \hat{\sigma^2_T}(l-i), \tag{3.8}$$

gde je $\hat{\sigma^2_T}(l-i) = a^2_{T+l-1}$ ako je $l - i \leq 0$.

Mane ARCH modela

Iako je ARCH model ima osobine zbog kojih je izuzetno koristan za analiziranje i predviđanje finansijskih vremenskih serija, on ipak ima i neke nedostatke. Naime,

1. Ovaj model pretpostavlja da pozitivni i negativni šokovi imaju isti uticaj na volatilnosti, iz razloga što ona zavisi od kvadrata prošlih šokova. Problem je što se u praksi zna da cena finansijskog derivata različito reaguje na pozitivne i negativne šokove.

2. Kao što je već navedeno gore, da bi serija opisana ARCH(1) modelom imala konačan četvrti momenat, treba da bude $0 \leq \alpha_1^2 < 1/3$ što prilično ograničava sam model. Sem toga, za modele višeg reda, ovo ograničenje postaje komplikovano.

3. Korišćenjem ARCH modela možemo samo opisati varijacije finansijske vremenske serije, ali ovaj model nam ne daje nikakvo saznanje zbog čega je uopšte došlo do tih varijacija.

4. Veoma često se u praksi dešava da ARCH model predvidi veću volatilnost nego što je to u stvarnosti. ([1])

3.3 Model uopštene autoregresione uslovne heteroskedastičnosti-GARCH model

GARCH model (engl. generalized ARCH) uveden je da poboljša nedostatak ARCH modela koji zahteva veoma veliki broj parametara da bi adekvatno opisao volatilnost prinosa akcije. Uveo ga je Bollerslev 1986. godine ([8]).
Za seriju logaritam prinosa akcije pretpostavljamo da jednačinu sredine dobro opisuje ARMA model. Neka je $a_t = r_t - \mu_t$.
Tada kažemo da a_t prati GARCH(m,s) model ako je:

$$\begin{aligned} a_t &= \sigma_t \epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{aligned} \tag{3.9}$$

gde je, kao i kod ARCH modela ϵ_t niz nezavisnih promenljivih koje sve imaju istu raspodelu (standardnu normalnu ili standardizovanu Studentovu-t raspodelu) sa sredinom nula, a varijansom jedan, i važe sledeći uslovi:

1. $\alpha_0 > 0$ a $\alpha_i \geq 0$ za $i > 0$,
2. $\alpha_i = \beta_j = 0$ za $i > m$ i $j > s$
3. $\beta_j \geq 0$ i
4. $\sum_{i=1}^{max(m,s)} (\alpha_i + \beta_j) < 1$

Poslednji uslov govori o tome da je bezuslovna varijansa od a_t konačna, a da se uslovna varijansa σ_t^2 razvija tokom vremena.
Ukoliko u jednačini (3.9) GARCH(m,s) modela stavimo da je $s = 0$ dobijamo ARCH(m) model.
Pre nego što damo osobine GARCH modela, modifikovaćemo malo njegovu jednačinu. Neka je:

$$\begin{aligned} \eta_t &= a_t^2 - \sigma_t^2 \\ \sigma_t^2 &= a_t^2 - \eta_t \\ \sigma_{t-i}^2 &= a_{t-i}^2 - \eta_{t-i}, i = 0, 1 \ldots, s \end{aligned}$$

Kada poslednju jednačinu ubacimo u jednačinu GARCH modela, dobijamo:

$$a_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{max(m,s)} (\alpha_i + \beta_j) a_{t-i}^2 + \eta_t - \sum_{j=1}^{s} \beta_j \eta_{t-j}. \tag{3.10}$$

Nova slučajna greška η_t ima nultu srednju vrednost i svi autokovarijacioni koeficijenti su joj jednaki 0. Međutim, u opštem slučaju, η_t nije niz nezavisnih slučajnih pormenljivih sa istom raspodelom.

Primećuje se da je poslednja jednačina oblik ARMA modela, pa možemo reći da je GARCH model ekvivalentan ARMA modelu kvadrata slučajne greške a_t^2.
Na osnovu ARMA modela, dolazimo i do formule za bezuslovno očekivanje GARCH modela:

$$E(a_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{max(m,s)}(\alpha_i + \beta_i)}$$

Naravno, imenilac mora da bude pozitivan da bi formula imala smisla.
Kao i kod ARCH modela, definisaćemo GARCH(1,1) model da bismo prikazali osobine ovog modela.
GARCH(1,1) model predstavljen je na sledeći način:

$$\begin{aligned} &\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \\ &0 \leq \alpha_1, \beta_1 \leq 1 \\ &(\alpha_1 + \beta_1) < 1 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Osobine GARCH(1,1) modela

- Veliki slučajni šokovi a_{t-1}^2 ili veliki uslovni varijabilitet σ_{t-1}^2 dovode do povećanja volatilnosti σ_t^2, što ponovo oslikava prirodu finansijskih vremenskih serija, za koje znamo da su veliki šokovi uglavnom posledica prethodnih velikih šokova.
- Kao i kod ARCH modela, repovi raspodele GARCH modela teži su od repova normalne raspodele. Naime, ako je $1 - 2\alpha_1^2 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 > 0$, tada je koeficjent spoljoštenosti:

$$\frac{E(a_t^4)}{[E(a_t^2)]^2} = \frac{3(1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2)}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1^2} > 3$$

- GARCH model daje jednostavnu funkciju koja se koristi da opiše razvoj volatilnost.

Predviđanje GARCH modelom

Formule za predviđanje ovim modelom, dobijaju se na sličan način kao one kod ARMA modela. Ponovo ćemo sve formule za predviđanje buduće volatilnosti izvesti za GARCH(1,1) model.
Stvarna buduća vrednost 1 korak unapred data je sa:

$$\begin{aligned} \sigma_{T+1}^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 a_T^2 + \beta_1 \sigma_T^2 \\ &= \alpha_0 + \alpha_1(\sigma_T^2 \epsilon_T^2) + \beta_1 \sigma_T^2 + \alpha_1 \sigma_T^2 - \alpha_1 \sigma_T^2 \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_T^2 + \alpha_1(\epsilon_T^2 - 1)\sigma_T^2 \end{aligned}$$

gde su a_T^2 i σ_T^2 poznati u trenutku T.
Predviđena vrednost jedan korak unapred je:

$$\hat{\sigma_T}^1(1) = E(\sigma_{T+1}^2|F_T) = \alpha_0 + \alpha_1 a_T^2 + \beta_1 \sigma_T^2$$

gde je F_T skup poznatih informacija do trenutka T.
Stvarna buduća vrednost 2 korak unapred data je sa:

$$\begin{aligned}\sigma_{T+2}^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 a_{T+1}^2 + \beta_1 \sigma_{T+1}^2 \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_{T+1}^2 + \alpha_1(\epsilon_{T+1}^2 - 1)\sigma_{T+1}^2\end{aligned}$$

Uzimajući u obzir da je $E(\epsilon_{T+1}^2 - 1|F_T) = 0$, predviđena vrednost za dva koraka unapred je:

$$\hat{\sigma_T}^2(2) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\hat{\sigma_T^2}(1)$$

Uopšteno, predviđena vrednost za h koraka unapred data je sa:

$$\hat{\sigma_T}^2(h) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\hat{\sigma_T^2}(h-1)$$

gde je $h > 1$. Na osnovu ove jednačine, dobijamo da je formula za predviđanje h koraka unapred:

$$\hat{\sigma_T^2}(h) = \frac{\alpha_0(1 - (\alpha_1 + \beta_1)^{h-1})}{1 - \alpha_1 - \beta_1} + (\alpha_1 + \beta_1)^{h-1}\sigma_T^2(1)$$

pa možemo zaključiti da važi:

$$\sigma_T^2(h) \to \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}$$

kada $h \to \infty$, uz uslov da je $\alpha_1 + \beta_1 < 1$. Znači da prognoza buduće volatilnosti više koraka unapred konvergira ka bezuslovnoj varijansi šokova a_t za dovoljno dug horizont predviđanja, pod uslovom da $Var(a_t)$ postoji.

3.4 Modifikacije GARCH modela

Iako su ARCH i GARCH modeli pogodni za opisivanje finansijskih vremenskih serija, oni imaju mnogo nedostataka, u smislu da ne opisuju baš sve specifičnosti ovih serija. Iz tog razloga došlo je do razvoja drugih verzija ova dva modela koji nadomeštaju nedostatke.
Neki od modifikovanih modela koji se često sreću u praksi su:

1. GARCH-M model ([2]),
2. T-GARCH model([2]),

3. APARCH model ([2]),
4. CHARMA ([11]),
5. EGARCH ([9]),
6. SV model ([10]) i mnogi drugi.

U ovom radu, detaljnije ćemo objasniti EGARCH model i CHARMA model, a za ostale navedene modifikacije daćemo samo ideju.
Takođe, koristićemo GARCH(1,1) model, da bismo prikazali kakve modifikacije su uvedene.

GARCH-M model

GARCH-M je oznaka za modifikaciju koja menja samo jednačinu srednje vrednosti standardnog GARCH modela. Naziv potiče iz engleskog gde je GARCH-M oznaka za „GARCH in mean". Ovaj model uključuje novu promenljivu u jednačinu sredine GARCH modela i ona opisuje uslovnu varijansu ([2]).
GRCH(1,1)-M model, zapisuje se kao:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + c\sigma_t^2 + a_t \\ a_t &= \sigma_t \epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \end{aligned}$$

gde su μ i c konstante. Novi parametar c meri premiju rizika. Pozitivna vrednost parametra c govori o tome da veći rizik dovodi do većeg rasta nivoa prinosa.

T-GARCH model

T-GARCH model predstavlja GARCH model sa pragom (engl. threshold). Jedna od osobina finansijskih vremenskih serija je ta da volatilnost reaguje različito na pozitivne i negativne slučajne šokove. Upravo ova modifikacija GARCH modela uspeva da zabeleži tu asimetriju.

Takođe, negativan šok iz prošlosti više utiče na sadašnju volatilnost nego što to čini pozitivan šok. To je i logično, negativne informacije dovode do veće nestabilnosti u kretanju prinosa u odnosu na pozitivne informacije. ([2])

Modifikacija se u ovom slučaju odnosi na jednačinu volatilnosti GARCH modela, tako da T-GARCH model izgleda:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \alpha_1^* N_{t-1} a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \\ N_{t-1} &= \begin{cases} 1 & , a_{t-1} < 0 \\ 0 & , a_{t-1} \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Dakle, nova promenljiva u modelu opisuje asimetrične uticaje pozitivnih i negativnih šokova. Uticaj pozitivne informacije meri se parametrom α_1, a uticaj negativnog šoka na volatilnost opisuje se vrednošću $\alpha_1 + \alpha_1^*$.

APARCH model

APARCH model predstavlja verziju asimetričnog stepenog ARCH modela (engl. asymetric power ARCH model). I ovde se modifikacija sastoji u tome što se menja jednačina volatilnosti ne bi li se opisao različit uticaj pozitivnih i negativnih šokova na razvoj volatilnosti.([2]) APARCH(1,1) model ima oblik:

$$\sigma_t^{\varpi} = \alpha_0 + \alpha_1 \Big[|a_{t-1}| - \alpha_1^{**} a_{t-1} \Big]^{\varpi} + \beta_1 \sigma_{t-1}^{\varpi}$$

U ovom modelu imamo dva nova parametra: ϖ koji označava eksponent uslovne standardne devijacije i $-1 < \alpha_1^{**} < 1$ koji opisuje taj efekat asimetričnosti različitih šokova na volatilnost.

CHARMA model

CHARMA modela predstavlja uslovni heteroskedastični ARMA model (engl. conditional heteroscedastic ARMA model). Ovaj model nije napravljen na osnovu ARCH ili GARCH modela, kao ostale modifikacije navedene u ovom radu, već predstavlja modifikaciju ARMA modela u smislu da opisuje razvoj uslovne varijanse σ_t^2. CHARMA model ipak navodimo jer ima mnogo sličnosti sa ARCH modelom, ali i zbog toga što i on ima veliku primenu u analiziranju finansijkih vremenskih serija. Za vremensku seriju r_t kažemo da prati CHARMA model, ukoliko važi:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + a_t \\ a_t &= \delta_1 a_{t-1} + \delta_2 a_{t-2} + \ldots + \delta_{mt} a_{t-m} + \eta_t \end{aligned} \tag{3.12}$$

gde je

1. $\{\eta_t\}$ Gausov beli šum sa očekivanjem nula i varijansom σ_η^2
2. $\{\delta_t\} = \{(\delta_{1t}, \ldots, \delta_{mt})'\}$ je niz slučajnih vektora sa očekivanjem nula i određenom nenegativnom mkovarijansnom matricom Ω
3. $\{\delta_t\}$ i $\{\eta_t\}$ su nezavisni.

Za $m > 0$, CHARMA model izgleda:

$$a_t = a_{t-1}^{'} \delta_t + \eta_t$$

gde je $a_t = (a_{t-1}, \ldots, a_{t-m})'$ vektor čiji su elementi kašnjenja od a_t poznati do vremena $t-1$. Uslovna varijansa CHARMA modela u jednačini (3.12) je:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \sigma_\eta^2 + a_{t-1}^{'} cov(\delta_t) a_{t-1} \\ &= \sigma_\eta^2 + (a_{t-1}, \ldots, a_{t-m}) \Omega (a_{t-1}, \ldots, a_{t-m})'. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Označimo sa ω_{ij} (i,j)-ti element u matrici Ω i važi da je $\omega_{ij} = \omega_{ji}$ jer je matrica simetrična.
Za $m = 1$ jednačina (3.13) postaje:

$$\sigma_t^2 = \sigma_\eta^2 + \omega_{11} a_{t-1}^2$$

što je isto kao kod ARCH(1) modela. Međutim, do razlike između ARCH i CHARMA modela dolazi već red modela $m = 2$. Tada jednačina (3.13) postaje:

$$\sigma_t^2 = \sigma_\eta^2 + \omega_{11} a_{t-1}^2 + 2\omega_{12} a_{t-1} a_{t-2} + \omega_{22} a_{t-2}^2$$

što se znatno razlikuje od ARCH(2) modela zbog toga što sadrži i vektorski proizvod $a_{t-1}a_{t-2}$.

U principu, ARCH(m) model i CHARMA(m) se ne razlikuju, tj. imaju istu formulu za uslovnu varijansu samo kada je matrica Ω dijagonalna.
Još jedna osobina CHARMA modela je ta da on automatski podrazumeva da je σ_t^2 pozitivno. To važi jer je matrica Ω nenegativna kovarijansna matrica i σ_η^2 je varijansa pa je pozitivna, pa sledi da je $\sigma_t^2 \geq \sigma_\eta^2 > 0$ za sve t.

U nekim primenama CHARMA modeli, upravo zbog gore navedene razlike u odnosu na ARCH modele, mogu biti veoma korisni. Naime, prilikom modeliranja vremenskih serija stope prinosa finansijskih instrumenata, vektorski proizvod označava interakciju između prošlih stopa, a razumljivo je pretpostaviti da je volatilnost akcija uslovljena time. Mana ovih modela je u tome što se sa povećanjem reda modela značajno komplikuje izraz za uslovnu varijansu. Jedan od načina da se ovaj problem prevaziđe je da se postave ograničenja za vektorske proizvode. Ovo predstavlja još jednu razliku između ARCH i CHARMA modela. Mnogo je lakše baratati sa konstantnim koeficijentima nego sa slučajno izabranim koeficijentima.

EGARCH model

Još jedna modifikacija GARCH modela uvedena je da bi prevazišla nedostatak GARCH modela kada je u pitanju efekat pozitivnih i negativnih šokova. Nelson (1991. godine) je uveo eksponencijalni GARCH model tj. EGARCH, kako bi omogućio bolje modeliranje finansijskih vremenskih serija. Uveo je novu funkciju:

$$g(\epsilon_t) = \theta\epsilon_t + \gamma(|\epsilon_t| - E(|\epsilon_t|)) \tag{3.14}$$

gde su θ i γ realne konstante. Nizovi ϵ_t i $|\epsilon_t| - E(|\epsilon_t|)$ predstavljaju nizove nezavisnih slučajnih promenljivih sa nultim očekivanjem i sa neprekidom raspodelom. Zbog toga je $E(g(\epsilon_t)) = 0$. Različit uticaj pozitivnih i negativnih šokova na promenu volatilnosti, funkcija g opisuje na sledeći način:

$$g(\epsilon_t) = \begin{cases} (\theta+\gamma)\epsilon_t - \gamma E(|\epsilon_t|) & , \epsilon_t \geq 0 \\ (\theta-\gamma)\epsilon_t - \gamma E(|\epsilon_t|) & , \epsilon_t < 0 \end{cases}$$

Napomena:
U slučaju da je ϵ_t Gausova slučajna promenljiva, tada je $E(|\epsilon_t|) = \sqrt{2/\pi}$, a ako ϵ_t ima Studentovu-t raspodelu, tada je:

$$E(|\epsilon_t|) = \frac{2\sqrt{v-2}\Gamma((v-2)/2)}{(v-1)\Gamma(v/2)\sqrt{\pi}}$$

EGARCH(m,s) model može da se zapiše na sledeći način:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t \tag{3.15}$$

$$ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \frac{1 + \beta_1 L + \ldots + \beta_s L^2}{1 - \alpha_1 L - \ldots - \alpha_m L^m} g(\epsilon_{t-1}) \tag{3.16}$$

gde važe sledeći uslovi:

1. α_0 je konstanta,
2. L je operator kašnjenja i važi: $Lg(\epsilon_t) = g(\epsilon_{t-1})$.
3. Polinomi $1 + \beta_1 L + \ldots + \beta_s L^2$ i $1 - \alpha_1 L - \ldots - \alpha_m L^m$ nemaju zajedničkih faktora i sve apsolutne vrednosti nula polinoma su veće od 1.

Iz jednačina ovog modela vidimo da on koristi ARMA parametrizaciju da opiše uslovnu varijansu od a_t. Dakle, mnoge osobine EGARCH modela mogu se izvesti na slučan način kao kod GARCH modela, s tim da se ipak ovaj model u nekim stvarima dosta razlikuje od GARCH modela.
Slično je to što je i kod ovog modela bezuslovno očekivanje od $ln(\sigma_t^2) = \alpha_0$. A razlika je u tome što upotreba $g(\epsilon_t)$ omogućava da model asimetrično odgovori na pozitivne i negativne šokove.

Kao i u modelima opisanim do sada, da bismo bolje razumeli EGARCH model, njegove osobine pokazaćemo na EGARCH(1,0) modelu.
EGARCH(1,0) model ima sledeći oblik:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t \tag{3.17}$$

$$(1 - \alpha L)\ln(\sigma_t^2) = (1 - \alpha)\alpha_0 + g(\epsilon_{t-1}) \tag{3.18}$$

gde su ϵ_t nezavisne slučajne promenljive sa standardnom normalnom raspodelom.
Dakle, ovde je $E(|\epsilon_t|) = \sqrt{2/\pi}$, pa model za $ln(\sigma_t^2)$ postaje:

$$(a - \alpha L)ln(\sigma_t^2) = \begin{cases} \alpha_* + (\theta + \gamma)\epsilon_{t-1} & , \epsilon_{t-1} \geq 0 \\ \alpha_* + (\theta - \gamma)\epsilon_{t-1} & , \epsilon_{t-1} < 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

gde je $\alpha_* = (1 - \alpha)\alpha_0 - \sqrt{2/\pi}\gamma$.

Za EGARCH(1,0) model uslovna varijansa se razvija nelinearno u zavisnosti od znaka a_{t-1}. Naime, imamo

$$\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^{2\alpha} \exp(\alpha_*) \begin{cases} \exp\left[(\theta+\gamma)\dfrac{a_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}}\right] & , a_{t-1} \geq 0 \\ \exp\left[(\theta-\gamma)\dfrac{a_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}}\right] & , a_{t-1} < 0 \end{cases}$$

Koeficijenti $(\theta+\gamma)$ i $(\theta-\gamma)$ ukazuju na različito reagovanje modela na pozitivne i negativne šokove, a_{t-1}. Dakle, model je nelinearan ako je $\gamma \neq 0$, a za EGARCH modele višeg reda, ta uslov nelinearnosti postaje kompilikovan.

Predviđanje pomoću EGARCH modela:

Na EGARCH(1,0) modelu ilustrovaćemo predviđanje pomoću EGARCH modela. Pretpostavljamo da su parametri modela poznati i da je inovacija ϵ_t Gausova slučajna promenljiva. Takav model ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned} ln(\sigma_t^2) &= (1-\alpha_1)\alpha_0 + \alpha_1 ln(\sigma_{t-1}^2) + g(\epsilon_{t-1}) \\ g(\epsilon_{t-1}) &= \theta\epsilon_{t-1} + \gamma(|\epsilon_{t-1}| - \sqrt{2/\pi}). \end{aligned}$$

Model možemo da zapišemo i na sledeći način:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \sigma_{t-1}^{2\alpha_1} \exp[(1-\alpha_1)\alpha_0] \exp[g(\epsilon_{t-1})] \\ g(\epsilon_{t-1}) &= \theta\epsilon_{t-1} + \gamma(|\epsilon_{t-1}| - \sqrt{2/\pi}). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Pretpostavljamo da nam je poznato T vrednosti vremenske serije na osnovu kojih vršimo predviđanje h koraka unapred. Prvo izlažemo predviđanje jedan korak unapred. Dakle, stvarni nivo volatilnosti jedan korak unapred dat je sa:

$$\sigma_{T+1}^2 = \sigma_T^{2\alpha_1} \exp[(1-\alpha_1)\alpha_0] \exp[g(\epsilon_T)]$$

gde su sve vrednosti na desnoj strani jednačine poznate i zbog toga je predviđena vrednost volatilnosti jedan korak unapred data sa:

$$\hat{\sigma_T}^2(1) = \sigma_{T+1}^2.$$

Stvarni nivo volatilnosti dva koraka unapred je:

$$\sigma_{T+2}^2 = \sigma_{T+1}^{2\alpha_1} \exp[(1-\alpha_1)\alpha_0] \exp[g(\epsilon_{T+1})]$$

pa je predviđena vrednost volatilnosti dva koraka unapred:

$$\hat{\sigma_T}^2(2) = \hat{\sigma_T}^{2\alpha_1}(1) \exp[(1-\alpha_1)\alpha_0] E_T\{\exp[g(\epsilon_{T+1})]\}$$

gde je sa E_T označeno uslovno očekivanje u trenutku T, koje dobijamo na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
E\{\exp[g(\epsilon)]\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp[\theta\epsilon + \gamma(|\epsilon| - \sqrt{2/\pi})]f(\epsilon)d\epsilon \\
&= \exp(-\gamma\sqrt{2/\pi})\Big[\int_{0}^{\infty} e^{(\theta+\gamma)\epsilon}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\epsilon^2/2}d\epsilon \\
&+ \int_{-\infty}^{0} e^{(\theta-\gamma)\epsilon}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\epsilon^2/2}d\epsilon\Big] \\
&= \exp(-\gamma\sqrt{2/\pi})\big[e^{(\theta+\gamma)^2/2}\Phi(\theta+\gamma) + e^{(\theta-\gamma)^2/2}\Phi(\theta-\gamma)\big]
\end{aligned}
$$

gde su $f(\epsilon)$ i $\Phi(\cdot)$ funkcija gustine i funkcija raspodele standardne normalne slučajne promenljive. Sada možemo da definišemo i predviđenu vrednost volatilnosti dva koraka unapred:

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma_T}^2(2) = {} & \hat{\sigma_T}^{2\alpha_1}(1)\exp[(1-\alpha_1)\alpha_0 - \gamma\sqrt{2/\pi}] \\
& \times [\exp\{(\theta+\gamma)^2/2\}\Phi(\theta+\gamma) + \exp\{(\theta-\gamma)^2/2\}\Phi(\theta-\gamma)]
\end{aligned}
$$

Formula za predviđenu vrednost volatilnosti j koraka unapred je:

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma_T}^j(2) = {} & \hat{\sigma_T}^{2\alpha_1}(j-1)\exp[(1-\alpha_1)\alpha_0 - \gamma\sqrt{2/\pi}] \\
& \times [\exp\{(\theta+\gamma)^2/2\}\Phi(\theta+\gamma) + \exp\{(\theta-\gamma)^2/2\}\Phi(\theta-\gamma)]
\end{aligned}
$$

pri čemu vrednosti $\Phi(\theta+\gamma)$ i $\Phi(\theta-\gamma)$ čitamo iz statističkih tablica.

SV model

Model stohastičke volatilnosti je uslovni heteroskedastični model koji koristi stohastičku jednačinu da bi opisao uslovnu volatilnost. SV modeli, slično kao i EGARCH modeli, koriste $ln(\sigma_t^2)$ umesto σ_t^2 da bi osigurali da uslovna varijansa bude pozitivna.
SV model definisan je na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
& a_t = \sigma_t\epsilon_t \\
& (1 - \alpha_1 L - \ldots - \alpha_m L^m)ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \nu_t
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

gde su:

1. ϵ_t niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelom,
2. ν_t niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa $\mathcal{N}(0,\sigma_\nu^2)$ raspodelom koje su nezavisne,
3. α_0 je konstanta i
4. sve nule polinoma $1 - \sum_{i=1}^{m}\alpha_i L^i$ su po modulu veće od 1

Uvođenje modifikacije u obliku ν_t dovodi do povećanja fleksibilnosti modela pri opisivanju razvoja σ_t^2, ali istovremeno dolazi i do poteškoća pri oceni parametara.

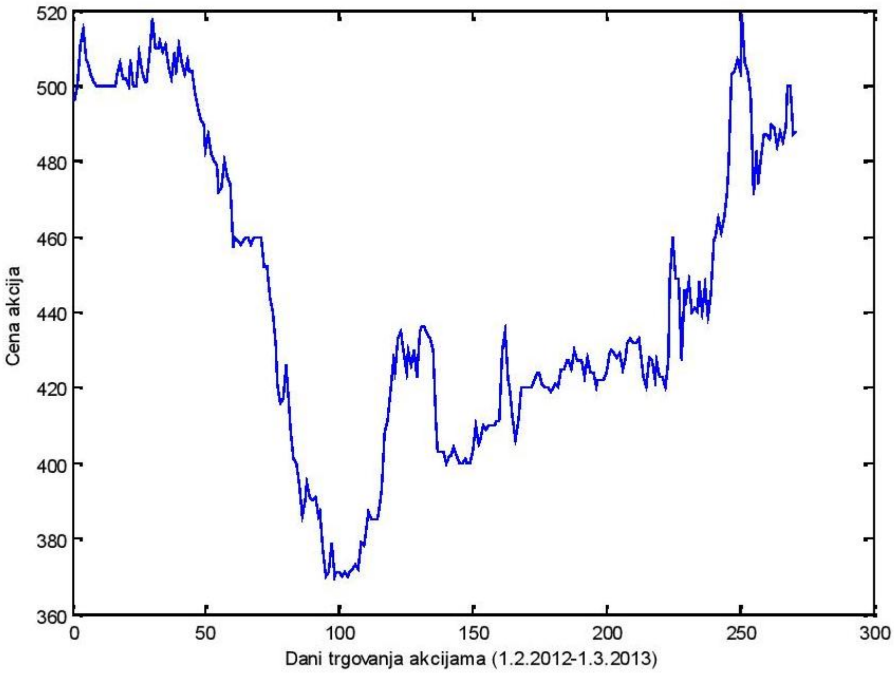
4

Primer

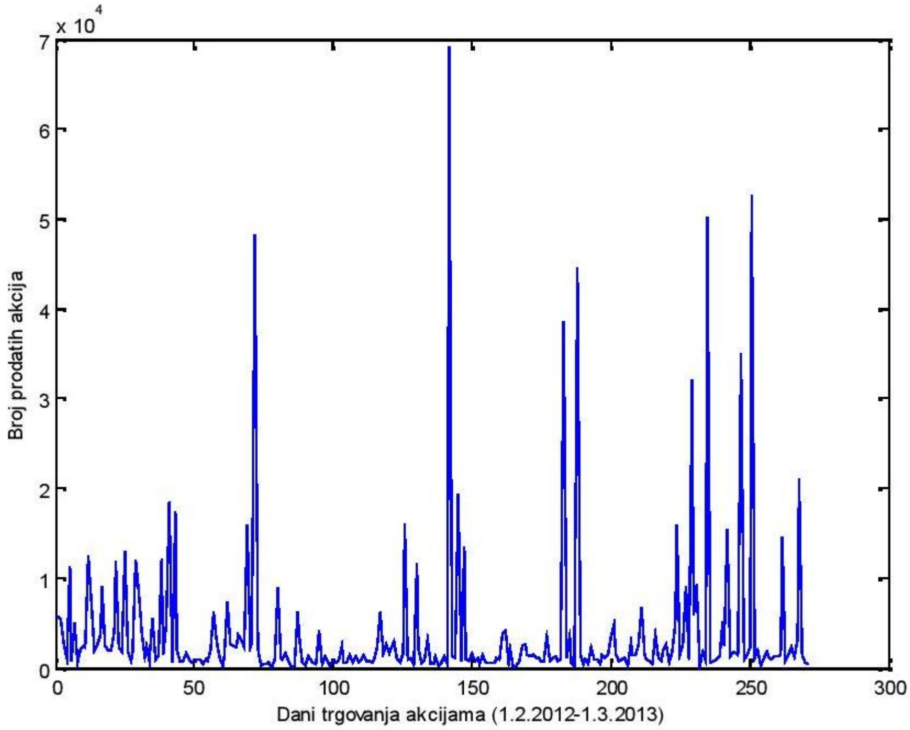
Ovo poglavlje posvećeno je primeni uslovnih heteroskedastičnih modela u finansijama. Iako u današnje vreme postoji mnogo statističkih programa specijalizovanih za analizu vremenskih serija, jedan od vrlo dobrih paketa za simulaciju GARCH modela je programski paket MATLAB iz razloga što sadrži ugrađene funkcije upravo za ovaj model.

GARCH(1,1) model predstavićemo na stvarnim podacima o cenama akcija beogradskog Aerodroma „Nikola Tesla” a.d.. Posmatraćemo podatke o cenama akcija u periodu od 1.2.2012. do 1.3.2013. godine. Taj period obuhvata 271 dan trgovanja akcijama.

Nakon unošenja podataka u MATLAB, prvi korak je nacrtati grafik cena akcija i grafik obima prodaje akcija u periodu koji smo izabrali. Cene akcija izražene su u dinarima.

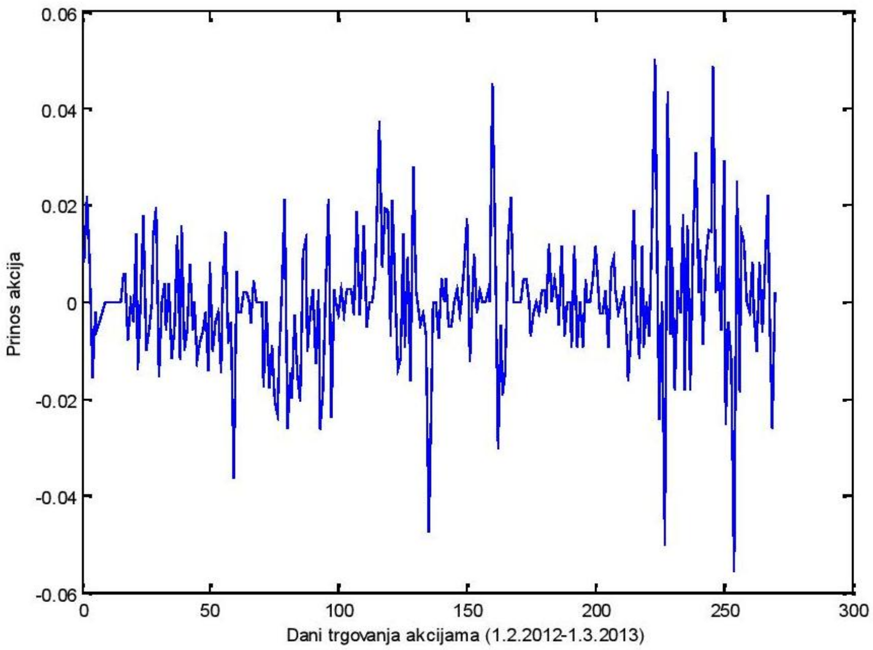


Grafik 4.1: Cene akcija Aerodroma „Nikola Tesla” a.d. po danima



Grafik 4.2: Broj kupljenih akcija po danima

Za nastavak analize potrebno je da cene akcija pretvorimo u prinose. Ugrađena funkcija *price2ret* u MATLABU, od unetih cena pravi prinose. Potrebno je naglasiti da je u pitanju logaritam stope prinosa, što nam je i potrebno. Dobijene prinose predstavljamo grafički.



Grafik 4.3: Prinos akcija po danima

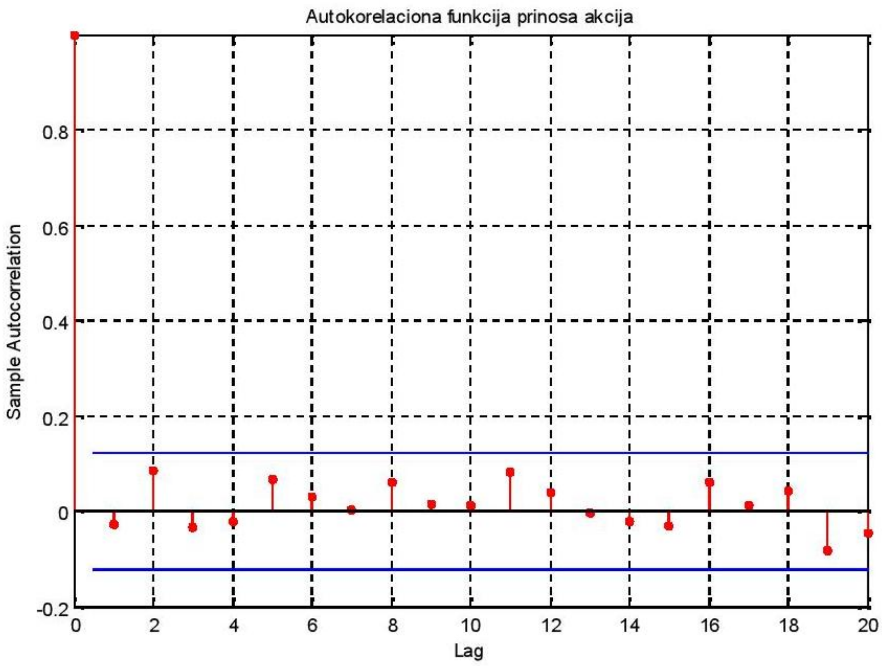
Vidimo je serija prinosa akcija stacionarna oko nule, a u radu smo već naveli da je osobina logaritam stope prinosa da je obično stacionarna. Sledeće što je potrebno uraditi je izračunati očekivanje, standardnu devijaciju, koeficijent asimetrije i spljoštenosti za seriju prinosa akcije. Ponovo, ugrađene funkcije u MATLABU direktno daju rešenja i ona su predstavljena u sledećoj tabeli.

Očekivanje (μ_t)	-6.0224e-005
Standardna devojacija (σ_t)	0.0138
Koeficijent asimetrije (S)	0.035
Koeficijent spljoštenosti (K)	5.9167

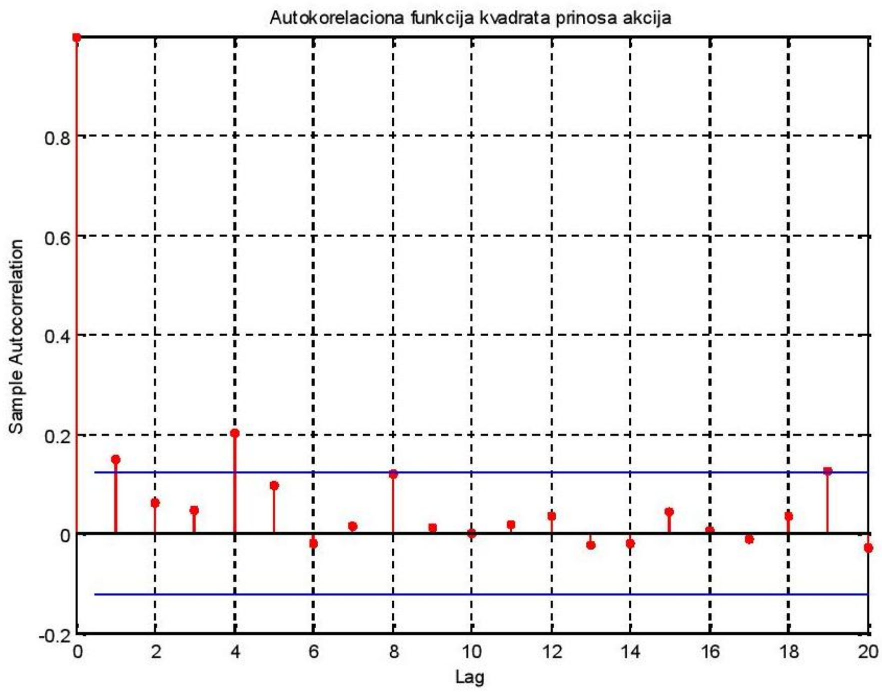
Tabela 4.1: Numeričke karakteristike serije stope prinosa

Iz tabele vidimo da je koeficijent spljoštenosti znatno veći od 3 što nam govori o tome da su repovi raspodele stope prinosa „deblji” od repova normalne raspodele.

Sledeće što treba uraditi je proveriti da li postoji značajna korelacija među prinosima. To možemo uraditi na dva načina: crtanjem autokorelacione funkcije i pomoću Ljung-Boksove statistike. Za oba ova načina postoje ugrađene funkcije u paketu MATLAB. U nastavku su dati grafik autokorelacione funkcije serije prinosa akcija i grafik autokorelacione funkcije kvadrata serije prinosa akcija prinosa.



Grafik 4.4: Autokorelaciona funkcija prinosa akcija



Grafik 4.5: Autokorelaciona funkcija kvadrata prinosa akcija

Dakle, autokorelacioni koeficijenti prinosa akcije su blizu nule, odnosno možemo da zaključimo da je korelacija među prinosima izuzetno mala, ako uopšte postoji. Međutim, posmatrajući autokorelacione koeficijente kvadrata stope prinosa, vidimo da postoji značajna korelacija. Dakle, vidimo da postoji heteroskedastičnost.

Drugi način da ovo proverimo je korišćenjem Ljung-Boksove statistike za koju postoji funkcija u matlabu koja vraća nulu ukoliko treba da prihvatimo nultu hipotezu koja kaze da ne postoji značajna korelacija među elementima serije prinosa, a u suprotnom vraća jedinicu i tada trebada odbacimo nultu hipotezu. Konkretno u našem slučaju, ispitujemo kvadrat stope prinosa i, na osnovu ovog testa, dobijamo da nultu hipotezu treba odbaciti, tj. zaključujemo da postoji korelaciona zavisnost, tj. prisutna je heteroskedastičnost.

Sada prelazimo na pravljenje GARCH(1,1) modela. Prvo računamo parametre GARCH(1,1) modela pomoću funkcije *ugarch*. U tabeli su date dobijene vrednosti parametara modela.

1. $c_0 = 3.2377e - 005$
2. $\alpha = 0.1887$
3. $\beta = 0.6557$

Tabela 4.2: Parametri GARCH(1,1) modela

S obzirom da je $\alpha + \beta = 0.8443 < 1$ znamo da je serija slabo stacionarna.

Sada je potrebno proceniti vrednosti dobijenih parametara, odrediti standardne greške za ocenu parametara i t-statistike. Pomoću funkcija *garchset, garchfit i garchdisp* dobijamo sledeće rezultate.

Parametri	Vrednost	Standardna greška	t-statistika
$\hat{\mu}$	-7.1965e-005	0.00093021	-0.0774
$\hat{c}_0$	3.2377e-005	1.1001e-005	2.8934
$\hat{\alpha}$	0.1887	0.062167	2.9789
$\hat{\beta}$	0.6557	0.095442	6.9286

Tabela 4.3: Ocena parametara

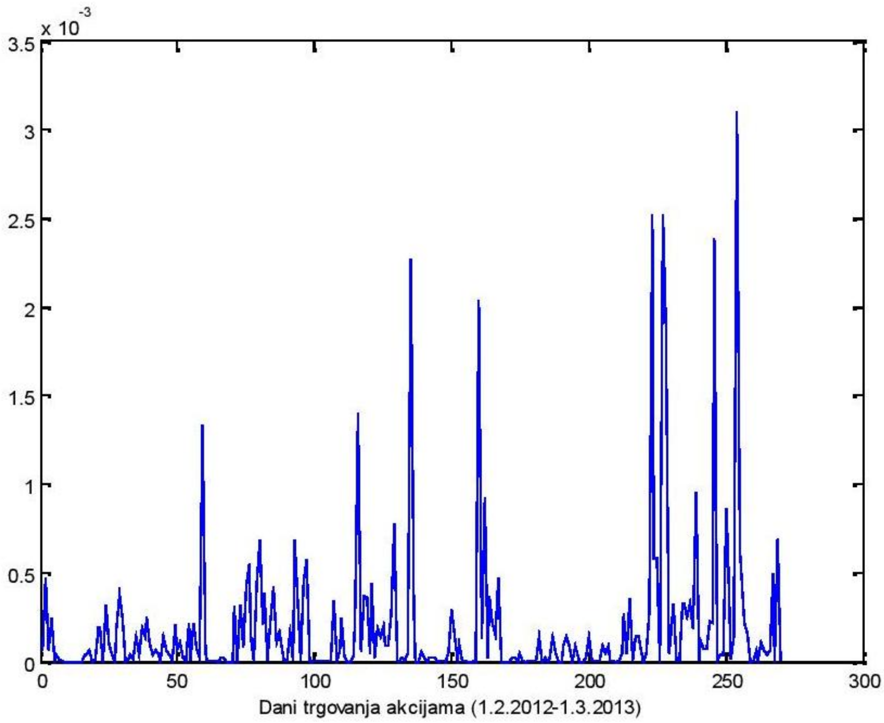
Podsetimo se, t-statistika predstavlja meru odstupanja procenjene vrednosti parametra od stvarne vrednosti parametra.([3]) Ukoliko je vrednost ove statistike manja od 2, tada parametar nije značajan pri opisivanju modela. Iz tabele vidimo da se to dešava sa parametrom $\hat{\mu}$.

Ostaje nam još da odredimo varijansu σ_t^2. Po formulama koje smo dali u poglavlju 3.3, imamo:

$$E(a_t^2) = Var(a_t^2) = \frac{\alpha_0}{(1 - \sum_{i=1}^{max(m,s)})\alpha_i + \beta_i} \tag{4.1}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_i a_{t-i}^2 + \beta_i \sigma_{t-1}^2 \tag{4.2}$$

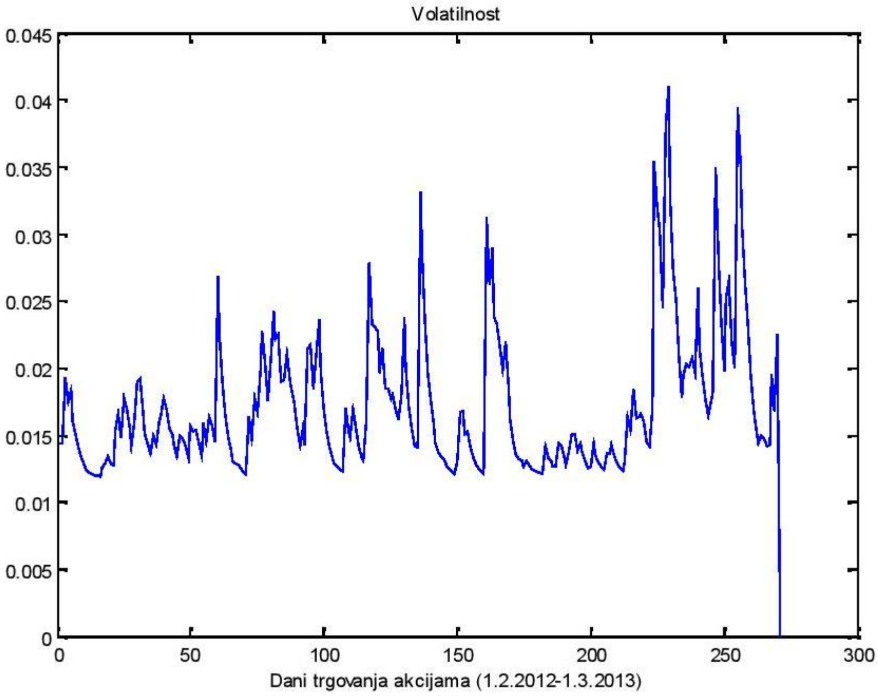
U našem primeru, šokove a_t^2 dobijamo u MATLABU kao *prinos.*prinos*, i možemo na grafiku videti da šokovi utiču na povećanje i smanjenje cena akcija.



Grafik 4.6: Šokovi prinosa akcija

Ranije u radu, naveli smo da je jedna od osobina finansijskih vremenskih serija to da veliki šokovi utiču dovode do velikih promena prinosa a samim tim i cena. Ako pogledamo grafik (4.1) vidimo da je najveća cena akcija bila oko 250 dana trgovanja, tj. da je nakon tog dana ynatno opala. To je u skladu sa grafikom (4.6) gde vidimo da se veliki šok desio baš oko 250. dana trgovanja akcijama. Isto tako, na grafiku (4.3) vidimo da je nakon 250 dana prinos naglo opao, što je opet posledica velikog šoka.

Početnu vrednost volatilnosti računamo na osnovu formule (4.1) i dobijamo da je $\sigma(1) = 0.0144$. A za ostale vrednosti volatilnosti pravimo funkciju u MATLABU. Vrednosti volatilnosti za sve dane date su u tabeli u prilogu, a kretanje volatilnsti po danima predstavljena je na sledećem grafiku.

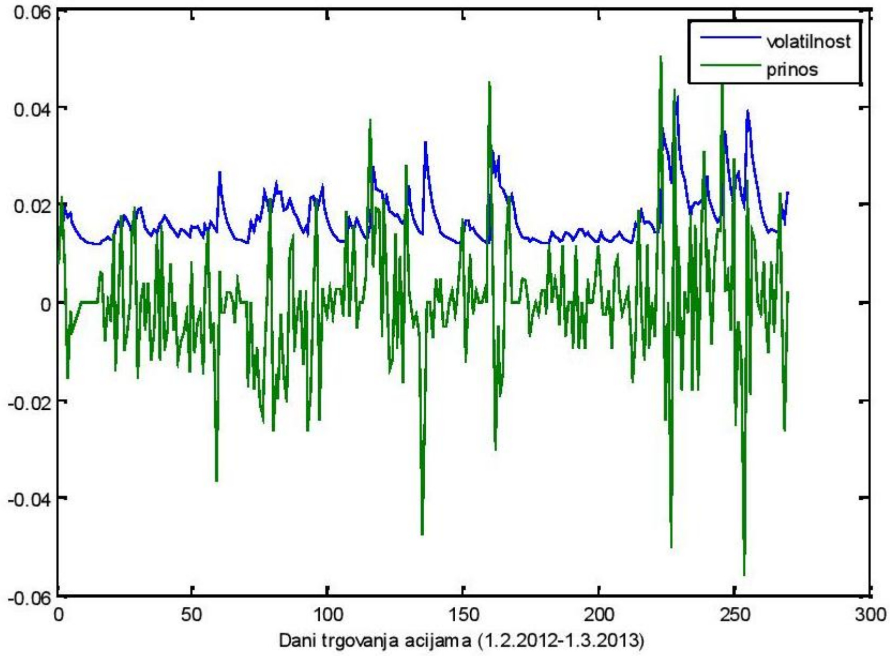


Grafik 4.7: Volatilnost po danima

Sada imamo sve podatke i možemo da predstavimo GARCH(1,1) model za vremensku seriju prinosa akcija Aerodroma „Nikola Tesla" a.d.

$$\boxed{\begin{gathered} r_t = -7.1965e - 005 + a_t \\ \sigma_t^2 = 3.183e - 005 + 0.18519 a_{t-1}^2 + 0.66128 \sigma_{t-1}^2 \end{gathered}}$$

Na sledećem grafiku prikazano je kretanje volatilnosti po danima i kretanje prinosa po danima. Možemo uočiti da veliki skokovi prinosa dovode do velikog skoka volatilnosti.



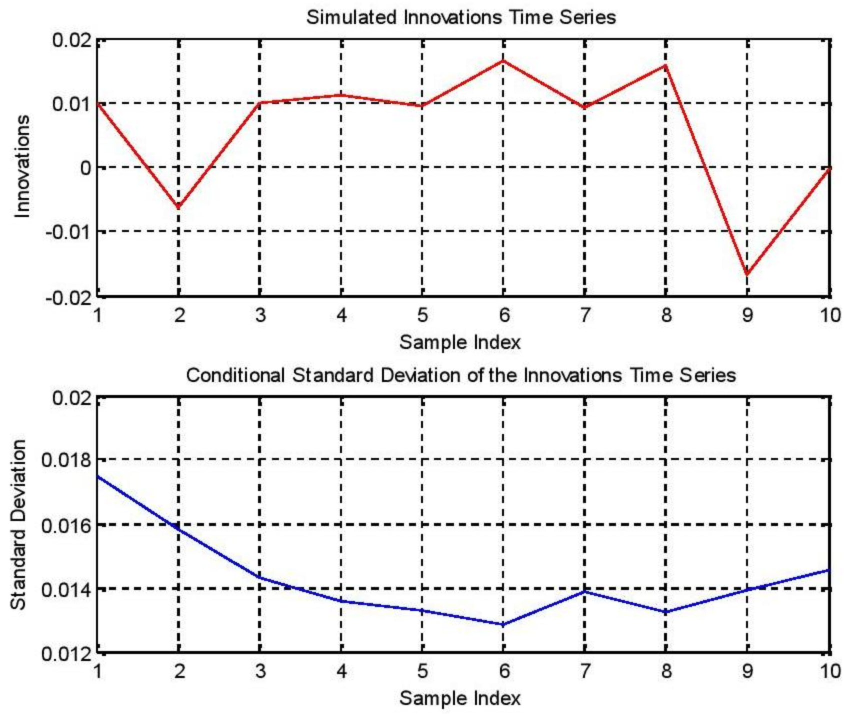
Grafik 4.8: Prinos serija i procenjena volatilnost

Drugi deo primer sastoji se u predviđanju budućih vrednosti volatilnosti serije prinosa akcija Aerodrom „Nikola Tesla" a.d. Programski paket MATLAB i u ovom slučaju na veoma jednostavan način predviđa vrednosti vremenskih serija. Naime, funkcija *ugarchsim* vrši simulaciju vrednosti šokova a_t^2 sledećih, na primer, 10 perioda i onda na osnovu GARCH(1,1) modela predviđa vrednosti buduće volatilnosti za 10 koraka unapred. Vrednosti buduće volatilnosti, date su u sledećoj tabeli.

Predviđena volatilnost	Predviđeni šokovi	Dani
0.000296361973249427	0.00983240169657849	1
0.000245860380358149	-0.00627018010515511	2
0.000201923827223965	0.00980485608273005	3
0.000183104611374671	0.0110366870054293	4
0.000175286701250662	0.00942537318838704	5
0.000164104610000396	0.0165285279275693	6
0.000190206854156813	0.00922103737090231	7
0.000173310970731111	0.0156771003803911	8
0.000191329119508292	-0.0166325996007782	9
0.000208897175637188	-0.000286023932480462	10

Tabela 4.4: Buduće vrednosti šokova i volatilnosti

Da bismo prikazali kretanje buduće volatilnosti, koristimo funkciju *ugarchplot* koja će nam sem buduće volatilnosti prikazati i kretanje budućih šokova.



Grafik 4.9: Predviđene buduće vrednosti

Prilog

U ovom delu prikazani su podaci o cenama akcija Aerodrom ,,Nikola Tesla" a.d. zajedno sa izračunatim prinosima, šokovima i volatilnošću za period od 1.2.2012. do 1.3.2013. godine.

Dani	Datum trgovanja	Cena	Obim	Prinos	Šokovi	Volatilnost
1	1.2.2012	496	5700	/	/	/
2	2.2.2012	500	5323	0.0080	0.0001	0.0144
3	3.2.2012	511	2666	0.0218	0.0005	0.0193
4	6.2.2012	515	1163	0.0078	0.0001	0.0174
5	7.2.2012	507	11367	-0.0157	0.0002	0.0184
6	8.2.2012	506	814	-0.0020	0.0000	0.0161
7	9.2.2012	503	4996	-0.0059	0.0000	0.0150
8	10.2.2012	501	645	-0.0040	0.0000	0.0141
9	13.2.2012	500	2179	-0.0020	0.0000	0.0133
10	14.2.2012	500	2466	0	0	0.0127
11	20.2.2012	500	2370	0	0	0.0124
12	21.2.2012	500	12459	0	0	0.0122
13	22.2.2012	500	7452	0	0	0.0121
14	23.2.2012	500	1874	0	0	0.0120
15	24.2.2012	500	2557	0	0	0.0119
16	27.2.2012	500	3607	0	0	0.0119
17	28.2.2012	503	9064	0.0060	0.0000	0.0125
18	29.2.2012	506	2537	0.0059	0.0000	0.0128
19	1.3.2012	502	2008	-0.0079	0.0001	0.0134
20	2.3.2012	502	1985	0	0	0.0128
21	5.3.2012	500	3944	-0.0040	0.0000	0.0127
22	6.3.2012	507	11884	0.0139	0.0002	0.0152
23	7.3.2012	500	2237	-0.0139	0.0002	0.0165
24	8.3.2012	500	1704	0	0	0.0148
25	9.3.2012	509	13113	0.0178	0.0003	0.0178
26	12.3.2012	504	1817	-0.0099	0.0001	0.0169

Dani	Datum trgovanja	Cena	Obim	Prinos	Šokovi	Volatilnost
27	13.3.2012	501	706	-0.0060	0.0000	0.0155
28	14.3.2012	501	1822	0	0	0.0142
29	15.3.2012	508	12082	0.0139	0.0002	0.0160
30	16.3.2012	518	8681	0.0195	0.0004	0.0190
31	19.3.2012	510	3927	-0.0156	0.0002	0.0193
32	20.3.2012	510	1321	0	0	0.0167
33	21.3.2012	512	2510	0.0039	0.0000	0.0151
34	22.3.2012	509	736	-0.0059	0.0000	0.0144
35	23.3.2012	511	5569	0.0039	0.0000	0.0137
36	26.3.2012	505	1005	-0.0118	0.0001	0.0150
37	27.3.2012	502	1516	-0.0060	0.0000	0.0143
38	28.3.2012	509	12178	0.0138	0.0002	0.0160
39	29.3.2012	503	1519	-0.0119	0.0001	0.0163
40	30.3.2012	511	4876	0.0158	0.0002	0.0178
41	2.4.2012	506	18422	-0.0098	0.0001	0.0169
42	3.4.2012	503	627	-0.0059	0.0000	0.0155
43	4.4.2012	507	17411	0.0079	0.0001	0.0150
44	5.4.2012	504	1955	-0.0059	0.0000	0.0143
45	6.4.2012	504	806	0	0	0.0134
46	9.4.2012	498	828	-0.0120	0.0001	0.0149
47	10.4.2012	494	1674	-0.0081	0.0001	0.0147
48	11.4.2012	491	959	-0.0061	0.0000	0.0142
49	12.4.2012	490	575	-0.0020	0.0000	0.0133
50	17.4.2012	483	722	-0.0144	0.0002	0.0157
51	18.4.2012	487	919	0.0082	0.0001	0.0152
52	19.4.2012	482	914	-0.0103	0.0001	0.0154
53	20.4.2012	480	372	-0.0042	0.0000	0.0143
54	23.4.2012	479	959	-0.0021	0.0000	0.0135
55	24.4.2012	472	840	-0.0147	0.0002	0.0159
56	25.4.2012	473	1957	0.0021	0.0000	0.0145
57	26.4.2012	480	6169	0.0147	0.0002	0.0164
58	27.4.2012	476	2957	-0.0084	0.0001	0.0157
59	30.4.2012	474	1094	-0.0042	0.0000	0.0145
60	3.5.2012	457	313	-0.0365	0.0013	0.0269
61	4.5.2012	460	1255	0.0065	0.0000	0.0225
62	7.5.2012	459	7467	-0.0022	0.0000	0.0189
63	8.5.2012	458	2588	-0.0022	0.0000	0.0165
64	9.5.2012	459	2460	0.0022	0.0000	0.0149

Dani	Datum trgovanja	Cena	Obim	Prinos	Šokovi	Volatilnost
65	10.5.2012	460	2315	0.0022	0.0000	0.0138
66	11.5.2012	460	3602	0	0	0.0131
67	14.5.2012	458	3139	-0.0044	0.0000	0.0129
68	15.5.2012	460	2307	0.0044	0.0000	0.0128
69	16.5.2012	460	15939	0	0	0.0124
70	17.5.2012	460	2251	0	0	0.0122
71	18.5.2012	460	2865	0	0	0.0121
72	21.5.2012	452	48305	-0.0175	0.0003	0.0164
73	22.5.2012	452	2082	0	0	0.0147
74	23.5.2012	444	175	-0.0179	0.0003	0.0178
75	24.5.2012	440	428	-0.0090	0.0001	0.0167
76	25.5.2012	431	469	-0.0207	0.0004	0.0199
77	28.5.2012	421	589	-0.0235	0.0006	0.0227
78	29.5.2012	416	111	-0.0119	0.0001	0.0205
79	30.5.2012	417	931	0.0024	0.0000	0.0176
80	31.5.2012	426	8908	0.0214	0.0005	0.0207
81	1.6.2012	415	1097	-0.0262	0.0007	0.0243
82	4.6.2012	409	883	-0.0146	0.0002	0.0222
83	5.6.2012	401	1564	-0.0198	0.0004	0.0226
84	6.6.2012	400	731	-0.0025	0.0000	0.0190
85	7.6.2012	394	123	-0.0151	0.0002	0.0191
86	8.6.2012	386	338	-0.0205	0.0004	0.0211
87	11.6.2012	390	6169	0.0103	0.0001	0.0191
88	12.6.2012	395	3499	0.0127	0.0002	0.0184
89	13.6.2012	391	645	-0.0102	0.0001	0.0174
90	14.6.2012	390	251	-0.0026	0.0000	0.0155
91	15.6.2012	391	1308	0.0026	0.0000	0.0142
92	18.6.2012	386	767	-0.0129	0.0002	0.0156
93	19.6.2012	387	565	0.0026	0.0000	0.0143
94	20.6.2012	377	465	-0.0262	0.0007	0.0214
95	21.6.2012	370	4150	-0.0187	0.0004	0.0217
96	22.6.2012	371	428	0.0027	0.0000	0.0184
97	25.6.2012	379	1226	0.0213	0.0005	0.0211
98	26.6.2012	370	536	-0.0240	0.0006	0.0236
99	27.6.2012	371	273	0.0027	0.0000	0.0198
100	28.6.2012	371	690	0	0	0.0170
101	29.6.2012	370	515	-0.0027	0.0000	0.0152
102	2.7.2012	371	895	0.0027	0.0000	0.0141

Dani	Datum trgovanja	Cena	Obim	Prinos	Šokovi	Volatilnost
103	3.7.2012	370	2402	-0.0027	0.0000	0.0133
104	4.7.2012	371	625	0.0027	0.0000	0.0129
105	5.7.2012	372	632	0.0027	0.0000	0.0126
106	6.7.2012	373	1368	0.0027	0.0000	0.0124
107	9.7.2012	372	541	-0.0027	0.0000	0.0123
108	10.7.2012	379	1273	0.0186	0.0003	0.0170
109	11.7.2012	378	614	-0.0026	0.0000	0.0152
110	12.7.2012	381	689	0.0079	0.0001	0.0148
111	13.7.2012	387	1444	0.0156	0.0002	0.0169
112	16.7.2012	385	765	-0.0052	0.0000	0.0155
113	17.7.2012	385	822	0	0	0.0141
114	18.7.2012	385	673	0	0	0.0132
115	19.7.2012	387	971	0.0052	0.0000	0.0131
116	20.7.2012	393	2322	0.0154	0.0002	0.0160
117	23.7.2012	408	6162	0.0375	0.0014	0.0279
118	24.7.2012	411	1693	0.0073	0.0001	0.0233
119	25.7.2012	419	2561	0.0193	0.0004	0.0230
120	26.7.2012	427	1533	0.0189	0.0004	0.0227
121	27.7.2012	424	2100	-0.0071	0.0000	0.0196
122	30.7.2012	433	2991	0.0210	0.0004	0.0216
123	31.7.2012	435	898	0.0046	0.0000	0.0185
124	1.8.2012	429	612	-0.0139	0.0002	0.0184
125	2.8.2012	424	1665	-0.0117	0.0001	0.0177
126	3.8.2012	430	16119	0.0141	0.0002	0.0180
127	6.8.2012	426	973	-0.0093	0.0001	0.0169
128	7.8.2012	430	1041	0.0093	0.0001	0.0162
129	8.8.2012	423	468	-0.0164	0.0003	0.0180
130	9.8.2012	435	11712	0.0280	0.0008	0.0238
131	10.8.2012	436	2070	0.0023	0.0000	0.0199
132	13.8.2012	436	628	0	0	0.0171
133	14.8.2012	434	994	-0.0046	0.0000	0.0155
134	15.8.2012	433	3184	-0.0023	0.0000	0.0142
135	16.8.2012	430	347	-0.0070	0.0000	0.0140
136	17.8.2012	410	475	-0.0476	0.0023	0.0331
137	20.8.2012	403	1330	-0.0172	0.0003	0.0288
138	21.8.2012	403	263	0	0	0.0234
139	22.8.2012	403	627	0	0	0.0196
140	23.8.2012	400	1249	-0.0075	0.0001	0.0175

Dani	Datum trgovanja	Cena	Obim	Prinos	Šokovi	Volatilnost
141	24.8.2012	402	498	0.0050	0.0000	0.0158
142	27.8.2012	402	69185	0	0	0.0143
143	28.8.2012	404	1360	0.0050	0.0000	0.0138
144	29.8.2012	402	1176	-0.0050	0.0000	0.0134
145	30.8.2012	400	19383	-0.0050	0.0000	0.0132
146	31.8.2012	400	754	0	0	0.0127
147	3.9.2012	401	13545	0.0025	0.0000	0.0125
148	4.9.2012	400	933	-0.0025	0.0000	0.0123
149	5.9.2012	400	806	0	0	0.0122
150	6.9.2012	403	1697	0.0075	0.0001	0.0129
151	7.9.2012	410	733	0.0172	0.0003	0.0167
152	10.9.2012	405	1090	-0.0123	0.0002	0.0168
153	11.9.2012	406	351	0.0025	0.0000	0.0151
154	12.9.2012	410	1483	0.0098	0.0001	0.0152
155	13.9.2012	409	643	-0.0024	0.0000	0.0140
156	14.9.2012	410	681	0.0024	0.0000	0.0133
157	17.9.2012	410	525	0	0	0.0127
158	18.9.2012	410	666	0	0	0.0124
159	19.9.2012	411	1031	0.0024	0.0000	0.0123
160	20.9.2012	411	970	0	0	0.0121
161	21.9.2012	430	3829	0.0452	0.0020	0.0312
162	24.9.2012	435	4255	0.0116	0.0001	0.0263
163	25.9.2012	422	664	-0.0303	0.0009	0.0290
164	26.9.2012	420	2125	-0.0048	0.0000	0.0238
165	27.9.2012	412	149	-0.0192	0.0004	0.0233
166	28.9.2012	406	244	-0.0147	0.0002	0.0216
167	1.10.2012	411	823	0.0122	0.0001	0.0199
168	2.10.2012	420	2451	0.0217	0.0005	0.0220
169	3.10.2012	420	2710	0	0	0.0185
170	4.10.2012	420	1517	0	0	0.0162
171	5.10.2012	420	1260	0	0	0.0146
172	8.10.2012	420	1506	0	0	0.0136
173	9.10.2012	422	1092	0.0048	0.0000	0.0132
174	10.10.2012	424	1034	0.0047	0.0000	0.0131
175	11.10.2012	424	716	0	0	0.0126
176	12.10.2012	421	783	-0.0071	0.0001	0.0131
177	15.10.2012	420	3515	-0.0024	0.0000	0.0127
178	16.10.2012	420	747	0	0	0.0124

Dani	Datum trgovanja	Cena	Obim	Prinos	Šokovi	Volatilnost
179	17.10.2012	419	1185	-0.0024	0.0000	0.0123
180	18.10.2012	420	1297	0.0024	0.0000	0.0122
181	19.10.2012	421	683	0.0024	0.0000	0.0122
182	22.10.2012	420	996	-0.0024	0.0000	0.0121
183	23.10.2012	425	38578	0.0118	0.0001	0.0142
184	24.10.2012	425	1124	0	0	0.0133
185	25.10.2012	427	3508	0.0047	0.0000	0.0131
186	26.10.2012	427	533	0	0	0.0126
187	29.10.2012	425	304	-0.0047	0.0000	0.0127
188	30.10.2012	430	44570	0.0117	0.0001	0.0144
189	31.10.2012	427	1453	-0.0070	0.0000	0.0142
190	1.11.2012	427	355	0	0	0.0133
191	2.11.2012	427	931	0	0	0.0127
192	5.11.2012	423	492	-0.0094	0.0001	0.0138
193	6.11.2012	428	2366	0.0118	0.0001	0.0150
194	7.11.2012	424	955	-0.0094	0.0001	0.0151
195	8.11.2012	424	958	0	0	0.0139
196	9.11.2012	420	446	-0.0095	0.0001	0.0144
197	13.11.2012	422	1488	0.0048	0.0000	0.0138
198	14.11.2012	422	1028	0	0	0.0130
199	15.11.2012	422	1376	0	0	0.0126
200	16.11.2012	424	3511	0.0047	0.0000	0.0127
201	19.11.2012	429	4847	0.0117	0.0001	0.0144
202	20.11.2012	430	1669	0.0023	0.0000	0.0135
203	21.11.2012	429	801	-0.0023	0.0000	0.0130
204	22.11.2012	428	1021	-0.0023	0.0000	0.0126
205	23.11.2012	429	1149	0.0023	0.0000	0.0124
206	26.11.2012	425	330	-0.0094	0.0001	0.0136
207	27.11.2012	428	2729	0.0070	0.0000	0.0137
208	28.11.2012	432	1388	0.0093	0.0001	0.0143
209	29.11.2012	433	1450	0.0023	0.0000	0.0134
210	30.11.2012	432	2658	-0.0023	0.0000	0.0129
211	3.12.2012	432	6647	0	0	0.0125
212	4.12.2012	433	1518	0.0023	0.0000	0.0123
213	5.12.2012	430	1000	-0.0070	0.0000	0.0129
214	6.12.2012	423	790	-0.0164	0.0003	0.0163
215	7.12.2012	420	378	-0.0071	0.0001	0.0154
216	10.12.2012	428	3612	0.0189	0.0004	0.0185

Dani	Datum trgovanja	Cena	Obim	Prinos	Šokovi	Volatilnost
217	11.12.2012	427	1046	-0.0023	0.0000	0.0162
218	12.12.2012	422	782	-0.0118	0.0001	0.0164
219	13.12.2012	427	2026	0.0118	0.0001	0.0165
220	14.12.2012	423	2612	-0.0094	0.0001	0.0160
221	17.12.2012	423	676	0	0	0.0145
222	18.12.2012	420	1799	-0.0071	0.0001	0.0142
223	19.12.2012	427	4838	0.0165	0.0003	0.0170
224	20.12.2012	449	15932	0.0502	0.0025	0.0354
225	21.12.2012	460	1497	0.0242	0.0006	0.0322
226	24.12.2012	449	2562	-0.0242	0.0006	0.0302
227	25.12.2012	449	9166	0	0	0.0245
228	26.12.2012	427	855	-0.0502	0.0025	0.0379
229	27.12.2012	446	32051	0.0435	0.0019	0.0410
230	28.12.2012	443	5926	-0.0067	0.0000	0.0328
231	31.12.2012	448	9304	0.0112	0.0001	0.0273
232	3.1.2013	440	315	-0.0180	0.0003	0.0251
233	4.1.2013	441	1787	0.0023	0.0000	0.0209
234	8.1.2013	440	747	-0.0023	0.0000	0.0178
235	9.1.2013	448	50231	0.0180	0.0003	0.0194
236	10.1.2013	440	533	-0.0180	0.0003	0.0203
237	11.1.2013	447	840	0.0158	0.0002	0.0201
238	14.1.2013	439	878	-0.0181	0.0003	0.0207
239	15.1.2013	445	1342	0.0136	0.0002	0.0197
240	16.1.2013	459	5185	0.0310	0.0010	0.0260
241	17.1.2013	460	2410	0.0022	0.0000	0.0215
242	18.1.2013	465	15458	0.0108	0.0001	0.0195
243	21.1.2013	461	1211	-0.0086	0.0001	0.0177
244	22.1.2013	465	1708	0.0086	0.0001	0.0165
245	23.1.2013	472	1562	0.0149	0.0002	0.0176
246	24.1.2013	479	1386	0.0147	0.0002	0.0182
247	25.1.2013	503	35030	0.0489	0.0024	0.0350
248	28.1.2013	504	978	0.0020	0.0000	0.0280
249	29.1.2013	507	1449	0.0059	0.0000	0.0232
250	30.1.2013	504	2293	-0.0059	0.0000	0.0198
251	31.1.2013	519	52699	0.0293	0.0009	0.0253
252	1.2.2013	506	1071	-0.0254	0.0006	0.0264
253	4.2.2013	504	1996	-0.0040	0.0000	0.0219
254	5.2.2013	498	280	-0.0120	0.0001	0.0200

Dani	Datum trgovanja	Cena	Obim	Prinos	Šokovi	Volatilnost
255	6.2.2013	471	1022	-0.0557	0.0031	0.0395
256	7.2.2013	483	1768	0.0252	0.0006	0.0352
257	8.2.2013	474	1197	-0.0188	0.0004	0.0306
258	11.2.2013	481	970	0.0147	0.0002	0.0265
259	12.2.2013	487	1193	0.0124	0.0002	0.0231
260	13.2.2013	487	1330	0	0	0.0194
261	14.2.2013	486	1381	-0.0021	0.0000	0.0168
262	18.2.2013	490	14586	0.0082	0.0001	0.0159
263	19.2.2013	489	700	-0.0020	0.0000	0.0144
264	20.2.2013	484	1425	-0.0103	0.0001	0.0150
265	21.2.2013	488	2331	0.0082	0.0001	0.0148
266	22.2.2013	485	1277	-0.0062	0.0000	0.0142
267	25.2.2013	489	3152	0.0082	0.0001	0.0143
268	26.2.2013	500	20961	0.0222	0.0005	0.0195
269	27.2.2013	500	1488	0	0	0.0168
270	28.2.2013	487	550	-0.0263	0.0007	0.0225
271	1.3.2013	488	505	0.0021	0.0000	0

Tabela 4.5: Podaci o akcijama Aerodrom „Nikola Tesla” a.d.

Zaključak

Vremenske serije prisutne su u raznim naučnim oblastima i modeli vremenskih serija predstavljaju veoma korisno i efikasno sredstvo za predviđanje budućih vrednosti i donošenje odluka u ekonomiji, industriji, medicini...

Finansijske vremenske serije uslovljene raznim uticajima na tržištu, poseduju karakteristike koje ih odvajaju od ostalih vremnskih serija. To su postojanje sezonske komponente, trenda rasta, odnosno trend pada i, ono najvažnije, postojanje nestabilnosti varijanse (volatilnosti). Ključni značaj pri donošenju finansijskih odluka imaju predviđene vrednosti vremenskih serija. Iz tog razloga je veoma bitno da te vrednosti budu što je moguće tačnije.

U ovom radu centralno mesto zauzimaju uslovni heteroskedastični modeli vremenskih serija, ARCH i GARCH model. Pre uvođenja ovih modela, detaljno je opisana analiza modela linearnih vremenskih serija, na osnovu kojih se grade ARCH i GARCH modeli. Sem toga, date su osobine prinosa aktive i volatilnosti kao preduslov za bolje razumevanje funkcionisanja i svrhe uslovnih heteroskedastičnih modela. Opisan je i postupak predviđanja budućih vrednosti finansijskih vremenskih serija, najpre modelima linearnih vremenskih serrija, a nakon toga i pomoću modela uslovne heteroskedastičnosti. Na samom kraju rada, na primeru stvarnih vremenskih serija prikazana je izgradnja GARCH modela u programskom paketu MATLAB za stvarne podatke vremenske serije cena akcija beogradskog Aerodroma „Nikola Tesla" a.d.

Ono što potvrđuje veliku upotrebljivost ovih modela je i to da se stalno razvijaju modifikacije osnovnih, ARCH i GARCH modela. Neki od novih modela predstavljeni su i u ovom radu. Uz to, objašnjeno je i kako su sa tim modifikacijama realnije i tačnije opisane finansijske vremenske serije. Na primer, jedna od modifikacija je eksponencijalni GARCH model, kod kog je inovacija omogućila da se zabeleži različito reagovanje modela na pozitivne i negativne šokove.

Naravno, kao i svi modeli, ni ovi ne predstavljaju stvarno stanje savršeno. S obzirom da prinos akcije nije simetrično distribuiran, standardna devijacija nije uvek najbolji izbor za merilo rizika. GARCH model koriguje ovaj nedostatak, međutim njegovo korišćenje donosi neke nove probleme, kao na primer, malopre pomenutu nemogućnost da različito odgovori na pozitivne i negativne šokove na tražištu.

Uprkos svim nedostatcima, ARCH, GARCH model i njihove modifikacije veoma dobro ocenjuju rizik na finansijskim tržištima i uz korišćenje nekih dobrih paketa definitivno jesu veoma efikasan alat u modernim finansijskim tokovima.

Literatura

[1] Ruey S. Tsay (2010), *Analysis of Financial Time Series*,3rd Edition, John Wiley Sons, inc.

[2] Z. Mladenović, A. Nojković (2012), *Primenjena analiza vremenskih serija*, Prvo izdanje, Centar za izdavačku delatnost Ekonomskog fakulteta u Beogradu

[3] Zagorka Lozanov-Crvenković (2011), *Statistika*, Novi Sad

[4] Danijela Rajter-Ćirić (2009), *Verovatnoća*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu

[5] Danijela Rajter-Ćirić (2012), *Beleške sa kursa Stohastička analiza*, Novi Sad

[6] Campbell, J. Y., Lo, A.W., and MacKinlay, A.C. (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press: New Jersey

[7] R. F. Engle (1982), *Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflations*, Econometrica, 50, 987-1007

[8] T. Bollerslev (1986), *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*, Journal of Econometrics, 31, 307-327

[9] D. B. Nelson (1991), *Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach*, Econometrica, 59, 347-370

[10] A. Melino and S.M. Turnbull (1990), *Pricing foreign currency options with stochastic volatility*, Journal of Econometrics 45, 239-265

[11] R. S. Tsay (1987), *Conditional heteroscedastic time series models*, Journal of the American Statistical Association, 82, 590-604

[12] Nataša Krejić (2013), *Beleške sa kursa Finansijska matematika 2*, Novi Sad

[13] Zlatko J. Kovačić (1995), *Analiza vremenskih serija*, Univerzitet u Beogradu, Ekonomski fakultet

[14] http://www.belex.rs/

Biografija

Jovana Vujičić je rođena 30.05.1990. godine u Novom Sadu. Osnovu školu „Sonja Marinković" završila je 2005. godine. Iste godine upisala je Gimnaziju „Isidora Sekulić" u Novom Sadu, prirodno-matematički smer, i završila je 2009. godine sa odličnim uspehom. Po završetku gimnazije upisuje Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer primenjena matematika, modul- matematika finansija. Osnovne studije završava 2012. godine sa prosekom 9,16. Potom je upisala master studije na istom fakultetu. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija u junskom ispitnom roku 2014. godine.

2011. godine kao jedan od studenata Prirodno-matematičkog fakulteta učestvuje u DAAD-ovoj letnjoj školi čija na temu „Application of the Calculus of Variation and Optimal Control" u Strugi, Makedoija.

2013. godine, u okviru TEMPUS projekta „Visuality and Mathematics", provela je mesec dana u Beču, Austrija. A 2014. godine, ponovo je odabrana da u okviru istog programa provede mesec dana u Jivaskuli, Finska.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Jovana Vujičić
AU

Mentor: prof. dr Zagorka Lozanov-Crvenković
MN

Naslov rada: Uslovni heteroskedastični modeli vremenskih serija
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / e
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2014.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (6, 91, 14, 5, 0, 14, 1)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Statističko modeliranje

ND

Predmetna odrednica / Ključne reči: statistika, vremenske serije, stohastički procesi, volatilnost

PO

UDK

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: Ovaj rad se bavi uslovnim heteroskedastičnim modelima vremenskih serija. U prvom delu dati su osnovni pojmovi prinosa aktive i osobine njihove raspodele verovatnoća, kao i volatilnosti. Takođe, izloženi su pojmovi ključni za slučajne procese kao što su stacionarnost, autokorelaciona i autokovarijansna funkcija procesa. U drugom delu predstavljeni su osnovni pojmovi analize linearne vremenske serije. Prikazani su i neki od modela linearnih vremenskih serija: autoregresioni model (AR), model pokretnih proseka (MA), autoregresioni model pokretnih proseka (ARMA). Data je kratka analiza ovih modela i predviđanje budućih vrednosti vremenskih serija na osnovu ovih modela. Centralno mesto u radu zauzimaju uslovni heteroskedastični modeli. Prvo su objašnjene osnovne karakteristike uslovne heteroskedastičnosti. Zatim su izložene strukture modela ovakvih vremenskih serija. Nakon toga predstavljena je izgradnja ARCH, GARCH i eksponencijalnog GARCH (EGARCH) modela. Prikazane su prednosti i slabosti ovih modela, kao i njihova primena na finansijskim tržištima. Na samom kraju rada je kroz primer stvarnih vremenskih serija prikazana upotreba uslovnih heteroskedastičnih modela u praksi.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 10.04.2014.

DP

Datum odbrane: Oktobar 2014.

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik:	dr Danijela Rajter-Ćirić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, predsednik
Član:	dr Zagorka Lozanov-Crvenković, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor
Član:	dr Ivana Štajner-Papuga, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, član

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORD DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph documentation
DT

Type of record: Textual printed material
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Jovana Vujičić
AU

Mentor: Zagorka Lozanov-Crvenković, Ph.D.
MN

Title: Conditional heteroscedastic time series models
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: en / s
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2014.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description: (6, 91, 14, 5, 0, 14, 1)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Statistical Modeling

SD

Subject / Key words: statistics, time series, stochastic processes, volatility

SKW

UC:

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract: This thesis deals with conditional heteroscedastic time series models. The first chapter provides a brief overview of asset returns, the characteristics of their probability distribution and properties of volatility. Also, some basic terms for stochastic processes, such as stationarity, correlation and autocorrelation function are defined in this part. Second chapter deals with linear time series analysis. Some basic linear models are presented here, such as: simple autoregressive models (AR), simple moving-average models (MA) and simple autoregressive moving-average models (ARMA). A brief analysis of these models is given and forecasting future values of time series is described. Central part of the thesis is reserved for conditional heteroscedastic time series models. First we describe characteristics of volatility (conditional heteroscedasticity). After that, the structure of these time series models are presented. The building of an ARCH, GARCH and exponential (EGARCH) models are given. Advantages and disadvantages of these models are presented and their application in financial markets. At the very end of the thesis an example of real time series describes application of conditional heteroscedastic models in practise.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 10.04.2014.

ASB

Defended: October 2014.

DE

Thesis defend board:

DB

President:	Danijela Rajter-Ćirić, Ph.D., full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, president
Member:	Zagorka Lozanov-Crvenković, Ph.D., full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, supervisor
Member:	Ivana Štajner-Papuga, Ph.D., associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, member