UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

NEKI PRISTUPI PROBLEMU INTEGRACIJE

-MASTER RAD-

Mentor: Prof. dr Ivana Štajner-Papuga

Student: Jovana Vojnović 125m/12

Novi Sad, 2016.

Sadržaj

Predgovor

Integral je jedan od najvažnijih pojmova matematičke analize. Prvi susret sa integralima dešava se već u srednjoj školi. Uz pomoć integrala računa se: površina figure, dužina luka krive i zapremina obrtnog tela. Integral nalazi široku primenu, kako u prirodnim tako i u društvenim naukama. U prirodnim naukama, ako se izuzme matematika, najveću primenu imaju u fizici, a u društvenim naukama, najveću primenu imaju u ekonomiji. Kao što je poznato, integrali imaju značajnu ulogu pri rešavanju diferencijalnih jednačina, dok, s druge strane, diferencijalne jednačine se često koriste pri modelovanju ekomskih procesa.

Tokom godina mnogi matematičari istraživali su kako se računa površina i zapremina nekog tela. Arhimed[1] spada u prve matematičare koji je pronašao formulu za računanje površine i zapremine oblih geometrijskih tela. Kasnije, Lajbnic[2] i Njutn[3] otkrivaju račun kojim se uspostavlja veza između diferenciranja i integracije.

Jednu od prvih rigoroznih matematičkih definicija integrala dao je Riman[4] u XIX veku. Rimanov pristup zasniva se na podeli x - ose (domena) i računanju odgovarajućih suma. Međutim, Rimanov integral imao je brojne nedostatke, pa se javlja potreba za preciznijim matematičkim analizama i nameću se nova pitanja u vezi merenja. U XX veku, shvatanje integrala je prošireno. U početku, integracija se odnosila na elementarnu ideju merenja (merenje dužina, površina, zapremina) sa neprekidnim funkcijama. Sa pojavom teorije skupova, pojavilo se i opštije i apstraktnije shvatanje mere. Lebeg[5] je 1904. godine predstavio pristup integracije zasnovan na Lebegovoj meri skupa, tj. definiše Lebegov integral, što daje osnov za dalje izučavanje problema integracije.

Tema ovog rada su različiti pristupi problemu integracije, te analiza, kako njihovih različitosti tako i njihovih sličnosti.

U prvom poglavlju definisana je primitivna funkcija, neodređen integral i mera skupa. Definisana su dva uobičajna integrala: Rimanov i Lebegov integral. Literatura korišćena za izradu ovog poglavlja je: [1], [2], [3], [4], [5], [6], [9], [11], [14], [15], [16], [19].

U drugom poglavlju navedene su neke katekteristike realnih funkcija. Literatura korišćena za izradu ovog poglavlja je: [1], [4], [9], [12], [18], [20].

U trećem poglavlju definisan je Denojev integral, a zatim su objašnjene razlike izmedju Denojeve integrabilne funkcije i Lebegove integrabilne funkcije. Iako su razlike veoma izražene, ova dva integrala imaju dosta i sličnosti, koje se takođe navode u radu. Navedena su svojstva Denojevog integrala koji ga izdvajaju od Lebegovog intgrala, tj. svojstva koja ne važe za Lebegov integral. Pokazano je kako se vrednost

---

[1] Arhimed (oko 287.-212. pne.) grčki matematičar, fizičar i astronom
[2] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646. – 1716.), nemački filozof, matematičar i fizičar
[3] Isaac Newton (1642. – 1727.), engleski fizičar, matematičar i astronom
[4] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866)-nemački matematičar
[5] Henri Léon Lebesgue (1875 - 1941) - francuski matematičar

Denojevog integrala nalazi uz pomoć Lebegove integracije i kada je to moguće. Dat je pregled osobina Denojevih integrabilnih funkcija. Literatura korišćena za izradu ovog poglavlja je: [1], [10], [13].

U četvrtom poglavlju definisan je Peronov integral. Navedeni su uslovi koji su potrebni funkciji da bi bila Peronov integrabilna na određenom intervalu. Dat je prikaz osobina Peronovih integrabilnih funkcija. Objašnjeno je kada je funkcija Peronov integrabilna. Literatura korišćena za izradu ovog poglavlja je: [1], [7], [8].

Peto poglavlje je posvećeno Henstokovom integralu. Navedene su osobine Henstok integrabilnih funkcija, te uslovi kada funkcija jeste Henstok integrabilna na određenom intervalu. Pokazano je kako je Henstokov integral generalizacija Riemanovog integrala. Literatura korišćena za izradu ovog poglavlja je: [1].

Fokus poslednjeg dela rada je na analizi ekvivalencije Denojevog, Peronovog i Henstokovog integrala. Pokazano je da se sva tri integrala poklapaju, iako su osnovne definicije ovih integrala različite. Literatura korišćena za izradu ovog poglavlja je: [1], [17], [19].

***

Izuzetnu zahvalnost dugujem svom mentoru, prof. dr Ivani Štajner-Papuga, na ukazanom poverenju, pruženom znanju, požrtvovanosti, velikom strpljenju i pomoći, kao i na korisnim sugestijama i primedbama bez kojih ne bih uspela da završim ovaj rad. Takođe, zahvaljujem se prof. dr Zagorki Lozanov-Crvenković i prof. dr Ljiljani Gajić na podršci i znanju koje su mi pružile tokom osnovnih studija.

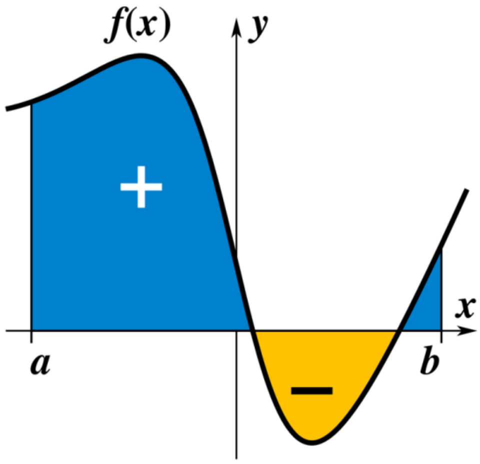
Posebnu zahvalnost dugujem i svojoj porodici, naročito sestri i prijateljima koji su mi bili podrška tokom čitavih studija.

Jovana Vojnović *mart 2016.,Novi Sad*

1. Uvod-klasični pristupi

Izvodi i integrali su jedno od najjačih oruđa matematike. O primeni integrala i izvoda može se govoriti veoma mnogo. Već u srednjoj školi većina učenika susreće se sa integralima, uz pomoć kojih se računa površina figure, dužina luka krive, zapremina obrtnog tela. Sa druge strane, pomoću integrala dobija se funkcija čiji je izvod poznat. Dakle, operacije diferenciranja i integriranja jedna drugoj su inverzne.

Integracija vuče korene iz potreba za odredjivanjem površine pod grafom neke funkcije. Za datu nenegativnu funkciju f realne promenjive x i interval $[a, b]$, integral $\int_a^b f(x)dx$ predstavlja površinu područja u xy - ravni ograničenu grafikom funkcije f, sa x - osom i vertikalnim crtama $x = a$ i $x = b$. U opštem slučaju problem izračunavanja odgovarajuće površine je nešto kompleksnija što se i vidi na slici 1.1.



Slika 1.1.

Kao što znamo, drugi pojam koji je tesno vezan sa pojmom integral je izvod. Kada se govori o izvodima često se spominje reč – diferenciranje. Diferenciranje nije ništa drugo do granični proces kojim se dolazi do izvoda f' funkcije f. Za funkciju f koja ima izvod u tački x, kaže se da je diferencijabilna u toj tački. Funkcija f je direfencijabilna na intervalu (a, b), ako je diferencijabilna u svakoj tački tog intervala. Kažemo da je funkcija f direfencijabilna na zatvorenom intervalu $[a, b]$, ako je diferencijabilna na otvorenom intervalu (a, b) i ako postoje sledeće dve granične vrednosti:

$$\lim_{h \to 0_+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad i \quad \lim_{h \to 0_-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

(videti [9]).

Funkcija F je primitivna funkcija za funkciju $f: (a, b) \to R$ na intervalu (a, b), ako važi:

$$F'(x) = f(x) \ \ \forall x \in (a, b).$$

Skup svih primitivnih funkcija za funkciju f na intervalu (a, b), naziva se neodređen integral funkcije $f:(a,b) \to R$ na intervalu (a, b) i označava se: $\int f(x)dx$. Izraz "dx" označava diferencijal promenjive x. Funkcija f je podintegralna funkcija. Ako je F bilo koja primitivna funkcija za f na intervalu (a, b) tada je:

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C : C \in R\}.$$

Uopšte, kod neodredjenog integrala C označava proizvoljnu konstantu pa je:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \ i \ \int f'(x)dx = f(x) + C$$

(videti [9]).

Prethodna priča je veoma kompleksna i u cilju što boljeg sagledavnja svih relevantnih aspekta neophodno je navesti par istorijskih smernica.

Pre više od 2000 godina, Arhimed je pronašao formulu za računanje površine i zapremine oblih geometrijskih tela. Njegova metoda integracije je izuzetno moderna, iako nije imao saznanja o pojmu algebre, pojmu funkcije, ili čak decimalnog prikaza brojeva. Lajbnic i Njutn otkrivaju račun koji dovodi do uspostavljanja veze između diferenciranja i integracije. Njihova ključna ideja je da se diferencijacija i integracija poništavaju. Koristeći ovu simboličku vezu oni su bili u mogućnosti da reše ogroman broj važnih problema u matematici, fizici i astronomiji. Gaus[6] je napravio prvu tablicu integrala, koje primenjuje u matematičkim i fizičkim naukama. Koši[7] izučava integrale kompleksnog područja. Hermit[8] je pronašao algoritam za integriranje racionalnih funkcija. Godine 1940. Ostrovski[9] je produžio ovaj algoritam na racionalnim izrazima, uključujući logaritam. Prva polovina XIX veka obeležena je postepenim ali stalnim povećanjem pre ciznosti sa kojom matematičari postavljaju razna pitanja koja se tiču teorije funkcija ([14]). Rieman i Lebeg imaju veoma važnu ulogu u matematičkoj analizi, te sledi prikaz Lebega i Rimana, tj. klasičnog slučaja.

Pri izračunavanju Rimanovog integrala pravi se particija intervala $[a, b]$ na podintervale, te se računa granična vrednost za gornje i donje integralne sume. Određuje se integralna suma, te se računa odgovarajuća granična vrednost. Ako granična vrednost postoji i ako odgovara vrednosti Rimanovog integrala, kažemo da je funkcija Riman integrabilna.

Lebeg integral definiše pomoću merljivih funkcija (funkcija koja ima konačno mnogo vrednosti). Integral merljive nenegativne funkcije f definisan je kao supremum integrala prostih merljivih funkcija koje su manje ili jednake od f. Taj pristup može da se shvati kao pravljenje podele po y - osi (kodomenu).

[6] Jochann Karl Friedrich Gauss (1777 - 1855) - nemački matematičar
[7] Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) - francuski matematičar
[8] Charles Hermite (1822 - 1901) - francuski matematičar
[9] Alexander Markowich Ostrowski (1893 – 1986) - ruski matematičar

Klasa funkcija integrabilnih u Rimanovom smislu okarakterisana je sa dva uslova: to su ograničene funkcije koje imaju najviše prebrojivo mnogo prekida. Ovaj drugi uslov u terminima teorije mere upravo znači da skup tačaka prekida, ima Lebegovu meru nula. Prvobitne ideje o Lebegovom integralu istorijski su nastale čak i pre samog aksiomatskog zasnivanja teorije mera. Ideja da se umesto particionisanja (podele) na domenu funkcije i integralnih suma napravi particionisanje na kodomenu i aproksimacija stepenastim funkcijama, te da se izmeri koji deo domena se preslikava u određenu particiju na kodomenu (vrši se aproksimacija stepenastim funkcijama), može postati vrlo zahtevno ali daje mnogo bolje rezultate ([6]).
Sledi primer, u kom se računa ukupna i prosečna ocena razreda iz jednog predmeta po Rimanovoj i Lebegovoj konstrukciji.

Primer 1.1. Neka u jednom razredu ima 26 učenika, od kojih je ocene 1, 2, 3, 4, 5 iz matematike dobilo redom 3, 4, 10, 4 i 5 učenika.

- Po Rimanovoj konstrukciji, ukupna ocena razreda računa se kao zbir ocena po abecednom redu imena učenika:
  5 + 4 + 4 + 3 + 5 + 2 + 3 +…= 82

- Po Lebegovoj konstrukciji, broje se učenici A_i koji su dobili ocenu i, pa je ukupna oceana:
  1*3+2*4+3*10+4*5+5*4=82

Rešenje je naravno isto i dovodi do prosečne ocene: 3,15.

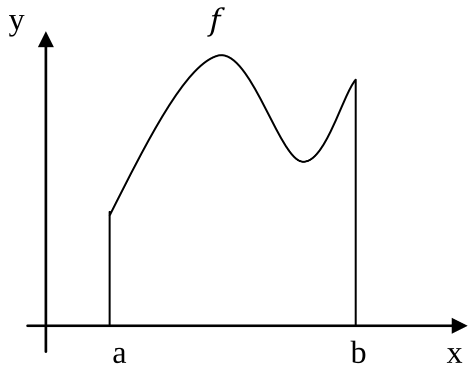
1.1. Rimanov integral

Bernhard Riemann

Jednu od prvih rigoroznih matematičkih definicija određenog integrala, dao je Riman. Zasnovana je na postupku graničnih vrednosti pravougaonih površina, kojima se aproksimira površina između krivulje i x-ose, njenim deljenjem u vertikalne pravougaone odsečke. Pri tome se posmatraju dve aproksimacije:
1. aproksimacija površinama većim od tražene površine
2. aproksimacija površinama manjim od tražene površine.
Te aproksimacije se nazivaju gornjom i donjom integralnom sumom. Ako se smanjivanjem širine intervala, nad kojima su konstruisane aproksimativne površine, dobije konačna granična vrednost, te ako je ta granična vrednost jednaka za gornju i donju integralnu sumu, kaže se da određen integral postoji i poprima vrednost tog graničnog izraza.

Sledeće što se prestavlja u radu jeste određen integral tj. Rimanov integral.

Neka je funkcija f pozitivna na intervalu $[a, b]$. Ravna figura ograničena intervalom $[a, b]$ na x-osi, pravama $x = a, x = b$ i grafikom funkcije f nad intervalom $[a, b]$, naziva se krivolinijski trapez nad $[a, b]$. Problem određivanja površine krivolinijskog trapeza, doveo je do definicije određenog integrala ([9]).



Slika 1.2. Figura ograničena intervalom $[a, b]$ na x-osi i grafikom funkcije f nad $[a, b]$.

Neka je dat interval $[a, b]$, $a < b$, $a, b \in R$. Konačni skup tačaka $T = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ takav da je $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ naziva se podela intervala $[a, b]$. Dužina intervala $[x_{i-1}, x_i], i = 1,2, \dots, n$ je $(x_i - x_{i-1})$. Neka je sa δ_T označena maksimalna dužina intervala podele T (tj. $\delta_T = \max_{1 \le i \le n} |x_i - x_{i-1}|$).

Neka je $f: [a, b] \to R$, a $T = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ proizvoljna podela intervala $[a, b]$. Neka su, dalje, tačke $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2, \dots, n$, fiksne i proizvoljno izabrane. Suma:

$$\sigma_T = \sigma_T(f, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})$$

naziva se Rimanova integralna suma funkcije f na intervalu $[a, b]$.
(videti [11]).

Definicija 1.1. [11] Realan broj I je granična vrednost integralnih suma σ_T funkcije $f: [a, b] \to R$ kad $\delta_T \to 0$, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svaku podelu T intervala $[a, b]$ za koju je $\delta_T < \delta$ i svaki izbor tačaka $\{\xi_i\}_{i=1}^{n}$, važi nejednakost

$$|\sigma_T(f, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) - I| < \varepsilon.$$

Ako granična vrednost I postoji $\lim_{\delta_T \to 0} \sigma_T = I$, tada je funkcija f integrabilna u Rimanovom smislu (Riman integrabilna) na intervalu $[a, b]$. Broj I naziva se određeni integral funkcije f na $[a, b]$ što pišemo:

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

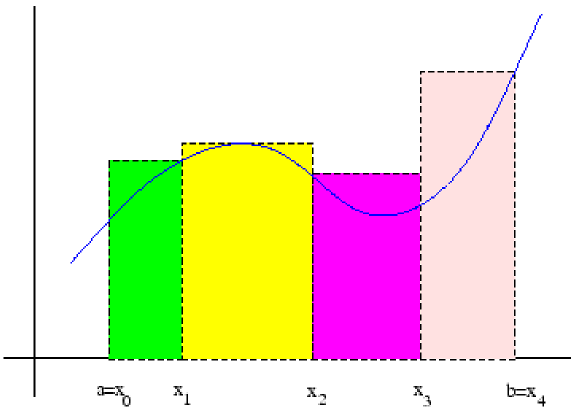
Pri tome se a i b nazivaju donja i gornja granica integracije, a funkcija f podintegralna funkcija ([11]).

Kako je poznato da iz integrabilnosti funkcije na nekom intervalu $[a, b]$ sledi njena ograničenost na tom intervalu, pa se određeni integral, bez umanjenja opštosti, može definisati samo za klasu ograničenih funkcija.

Neka je funkcija f definisana i ograničena na intervalu $[a, b]$ i neka je $T = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ proizvoljna podela za $[a, b]$.

Gornja Darbuova[10] suma je:

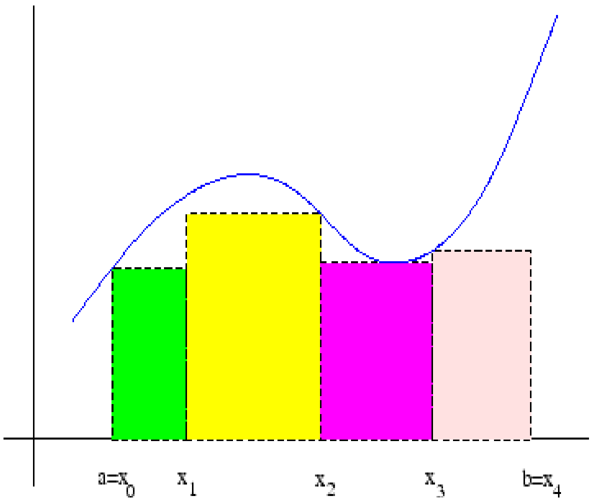
$g(f, T) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$ gdje je $M_i = sup\{f(x): x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.



Slika 1.3. [15] Gornja Darbuova suma

Donja Darbuova suma je:

$d(f, T) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$ gdje je $m_i = inf\{f(x): x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.



Slika 1.4. [15] Donja Darbuova suma

(videti [15]).

[10] Jean-Gaston Darboux (1842-1917) - francuski matematičar

Stav 1. [11] Za proizvoljnu Rimanovu integrabilnu sumu

$$\sigma_T(f, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

važi da je:

$$d(f,T) = inf_{\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\}}\sigma_T \leq \sigma_T \leq sup_{\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\}}\sigma_T = g(f,T).$$

Stav 2. [11] Funkcija f definisana i ograničena na intervalu $[a,b]$ je integrabilna na $[a,b]$ ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svaku podelu T tog intervala, za koju je $\delta_T < \delta$, važi da je:

$$g(f,T) - d(f,T) < \varepsilon.$$

Tada je

$$\int_a^b f(x)dx = sup\{d(f,D)\} = inf\{g(f,D)\}.$$

$inf\{g(f,D)\}$ i $sup\{d(f,D)\}$ sigurno postoje, zbog ograničenosti funkcije f. Funkcija f je Riman integrabilna na intervalu $[a,b]$, ako je $inf\{g(f,D)\}$=$sup\{d(f,D)\}$. Rimanov integral ili određeni integral funkcije f od a do b je broj I i označava sa sa:

$$I = \int_a^b f(x)dx. \quad (1)$$

(videti [15] i [9]).

Neka je $R[a,b]$ skup svih funkcija integrabilnih u Rimanovom smislu na $[a,b]$.

Stav 3. [11] Ako je funkcija f neprekidna na $[a,b]$ onda je $f \in R[a,b]$.

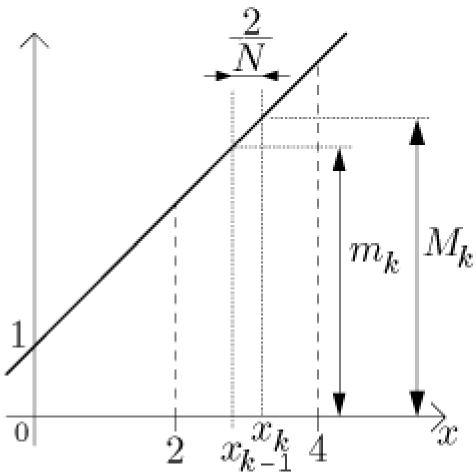
Stav 4. [11] Ako je funkcija f monotona na $[a,b]$ onda je $f \in R[a,b]$.

Sledi primer u kom se računa vrednost Rimanovog integrala. Računa se gornja i donja Darbuova suma, zatim se računaju $inf\{g(f,D)\}$ i $sup\{d(f,D)\}$. Poređenjem ove dve vrednosti dolazi se do zaključka da li je funkcija Riman integrabilna. U slučaju da se ove dve vrednosti poklope, dobija se vrednost Rimanovog integrala i funkcija je Riman integrabilna.

Primer 1.2. [16] U ovom primeru računa se vrednost Rimanovog integrala $\int_2^4 (x+1)dx$ na osnovu (1). Za integral $\int_2^4 (x+1)dx$, određuje se particija intervala [2,4], koja uključuje sve manje i manje intervale, u nadi da će se odgovarajuće gornje i donje Darbuove sume približiti. Interval [2,4] deli se u N jednakih delova, pa postoji podela:

$$D_N : x_k = 2 + \frac{k}{N}(4-2) = 2 + \frac{2k}{N}, \qquad k = 0,1,\dots,N$$

Supremum i infimum za $f(x) = x+1, x \in [x_{k-1}, x_k]$, određuje se uz pomoć slike 1.5.



Slika 1.5. [16] Grafik funkcije $x+1$ na intervalu [2,4]

$$M_k = sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = f(x_k),$$

$$m_k = inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_i]\} = f(x_{k-1}).$$

Dalje se računa gornja Darbuova suma:

$$\begin{aligned} g(f, D_N) &= \sum_{k=1}^{N} M_k (x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{N} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \left(2 + \frac{2k}{N} + 1\right)(2 + \frac{2k}{N} - \left(2 + \frac{2(k-1)}{N}\right)) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \left(3 + \frac{2k}{N}\right)\left(2 - 2 + \frac{2k - 2k + 2}{N}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \left(3 + \frac{2k}{N}\right)\left(\frac{2}{N}\right) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{6}{N} + \frac{4k}{N^2}\right) \\ &= \frac{6}{N}\sum_{k=1}^{N} 1 + \frac{4}{N^2}\sum_{k=1}^{N} k = \frac{6}{N} \cdot N + \frac{4}{N^2} \cdot \frac{N(N+1)}{2} = 6 + 2\frac{N+1}{N}. \end{aligned}$$

Dalje se računa donja Darbuova suma:

$$\begin{aligned}
d(f, D_N) &= \sum_{k=1}^{N} m_k(x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{N} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(2 + \frac{2(k-1)}{N} + 1\right)\left(2 + \frac{2k}{N} - \left(2 + \frac{2(k-1)}{N}\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(3 + \frac{2k-2}{N}\right)\left(2 - 2 + \frac{2k - 2k + 2}{N}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(3 + \frac{2k-2}{N}\right)\left(\frac{2}{N}\right) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{6}{N} + \frac{4k-4}{N^2}\right) \\
&= \frac{6}{N}\sum_{k=1}^{N} 1 + \frac{4}{N^2}\sum_{k=1}^{N} k - \frac{4}{N^2}\sum_{k=1}^{N} 1 = \frac{6}{N} \cdot N + \frac{4}{N^2} \cdot \frac{N(N+1)}{2} - \frac{4}{N^2} \cdot N \\
&= 6 + \frac{2N + 2 - 4}{N} \\
&= 6 + 2\frac{N-1}{N}.
\end{aligned}$$

Infimum gornje i supremum donje Darbuove sume je:

$$inf\{g(f, D)\} \leq \lim_{N\to\infty} g(f, D_N) = \lim_{N\to\infty} \left(6 + 2\frac{N+1}{N}\right) = 8,$$

$$sup\{d(f, D)\} \geq \lim_{N\to\infty} d(f, D_N) = \lim_{N\to\infty} \left(6 + 2\frac{N-1}{N}\right) = 8.$$

Dalje se porede ove dve vrednosti:

$$8 \leq sup\{d(f, D)\} \leq inf\{g(f, D)\} \leq 8.$$

Kako su ove dve vrednosti jednake, zaključuje da je funkcija: $f\,(x) = x + 1$ Riman integrabilna na [2,4].

Vrednost integrala je: $\int_2^4 (x+1)dx = 8$.

1.2. Lebegov integral

Kao uopštenje pojmova dužine, površine i zapremine u Euklidskom prostoru, apstraktna teorja mera, nastala je na prelazu iz XIX u XX vek. Među začetnicima ove teorije, nalaze se: Borel[11], Lebeg, Radon[12], Karateodori[13] i mnogi drugi matematičari. Veoma važan pojam koji se javlja u teoriji mere, jeste prebrojivost skupova. Topologija i topološka struktura, defnisane su na sličan način kao i familije merljivih skupova, u topologiji se radi sa proizvoljnim skupovima indeksa (koji mogu biti i neprebrojivi), dok se u teoriji mere radi sa najviše prebrojivim skupovima. Aditivnost mere se tako uopštava na tzv. σ-aditivnost, odnosno zahteva se da je:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

za proizvoljnu prebrojivu disjunktnu familiju skupova A_i. Time se stiže do pitanja: koji skupovi se uopšte mogu meriti, odnosno šta čini familiju merljivih skupova ([6]). Slede definicije u kojima je dat pregled pojmova: topološki prostor, σ-algeba, merljiva funkcija i mera.

Definicija 1.2. [2] Neka je X neprazan skup i neka je $P(X)$ partitivni skup od X. Ako familija $\tau \subseteq P(X)$ zadovoljava sledeće uslove:

1. $X, \emptyset \in \tau$,
2. ako $A, B \in \tau$ tada je $A \cap B \in \tau$,
3. ako je I proizvoljan (indeksni) skup, i ako je $(A_i)_{i\in I}$ familija skupova sa svojstvom $A_i \in \tau$ za svako $i \in I$ tada je $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$,

tada je τ topologija na skupu X, a uređen par (X, τ) je topološki prostor.

Definicija 1.3. [6] σ-algebra na X je familija skupova $\mathcal{M} \subseteq P(X)$ sa osobinama:

1. $X \in \mathcal{M}$,
2. $A \in \mathcal{M} => X - A \in \mathcal{M}$,
3. $A_n \in \mathcal{M}$ za svako $n \in N$ => $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

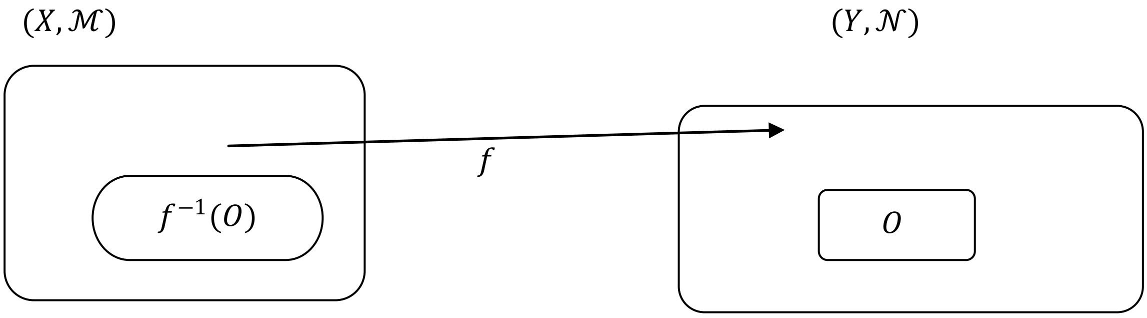
Skup X sa σ-algebrom $\mathcal{M}$ naziva se prostor sa σ-algebrom, a označava se: $(X, \mathcal{M})$. Elementi σ-algebre $\mathcal{M}$ nazivaju se merljivim skupovima.

Treba primetiti da svaka σ-algebra ima ili konačno mnogo ili neprebrojivo mnogo elemenata.

[11] Emile Borel (1871 - 1956) - francuski matematičar
[12] Johan Radon (1887 - 1956) - austrijski matematičar
[13] Constantinos Karatheodori (1873 – 1950) – grčki matematičar

Definicija 1.4. [6] Neka je $(X, \mathcal{M})$ prostor sa σ-algebrom, (Y, τ) topološki prostor. Funkcija $f: X \rightarrow Y$ (može se označiti i sa: $f: (X, \mathcal{M}) \rightarrow (Y, \tau)$) je merljiva ako $f^{-1}(w) \in \mathcal{M}$ za svako $w \in \tau$.

Definicija 1.5. [6] Funkcija $f: (X, \mathcal{M}) \rightarrow (Y, \mathcal{N})$ ($(Y, \mathcal{N})$ prostor sa σ-algebrom $\mathcal{N}$), je merljiva ako $f^{-1}(O) \in \mathcal{M}$ za svako $O \in \mathcal{N}$.



Slika 1.6. Merljiva funkcija prema definiciji 1.5

Definicija 1.6. [6] Neka je $(X, \mathcal{M})$ prostor sa σ-algebrom. Mera μ na $\mathcal{M}$ je funkcija $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$, za koju važi:

- ako $A_i \in \mathcal{M}$, $i \in N$, disjunktna familija skupova, tada je:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Trojka $(X, \mathcal{M}, \mu)$ se naziva merljiv prostor ili prostor sa merom.
Lako se vidi da je mera praznog skupa nula.

Dalje se uvodi pojam dužine intervala. Dužina intervala koristi se često u diferenciranju i integraciji. Ovaj pojam je veoma značajan za Lebegovu meru. Mera Lebega, je standardan način za dodeljivanje dužine, površine ili zapremine podskupovima Euklidskog prostora. Dobila je ime po francuskom matematičaru Lebegu. Koristi se u realnoj analizi, u definisanju Lebegove integracije.

Za interval I (otvoreni, zatvoreni, poluotvoren), s krajnjim točkama a i b, $a < b$, dužina intervala I definisana je: $l(I) = b - a$. Dužina neograničenog intervala defnše se beskonačno, tj. $l(I) = \infty$ ako je interval I: $(a, +\infty), (-\infty, b)$ ili $(-\infty, +\infty)$. [1]
Dalje se pomoću dužine intervala uvodi pojam Lebegove mere.

Ako je skup E proizvoljan podskup skupa realnih brojeva, sa $\mu(E)$ je u daljem radu označena Lebegova mera skupa E. U praksi, od Lebegove mere se traži sledeće:

1) Ako je I interval, tada je $\mu(I)$ isto što i $l(I)$.

2) Ako je A podskup od B, tada je $\mu(A)$ manja ili jednaka od $\mu(B)$.

3) Ako je $A \subseteq R$ i $x_0 \in R$; definiše se: $A + x_0 = \{x + x_0 : x \in A\}$. Tada je $\mu(A + x_0) = \mu(A)$.

4) Ako su A i B dva disjunktna skupa, tada je: $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Ako je $\{A_i\}$ niz disjunktnih skupova, tada je $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ ([10], [1]).

Sledi primer koji ilustruje prethodno uvedene pojmove.

Primer 1.3. [5]

- Ako je A zatvoren interval $[a, b]$, onda je njegova mera Lebega jednaka dužini $b - a$. Otvoreni interval (a, b) ima istu meru, jer razlika između ova dva skupa ima meru nula.
- Ako je A Dekartov proizvod intervala $[a, b]$ i $[c, d]$, onda se radi o pravougaoniku i njegova mera Lebega je: $(b - a)(d - c)$.
- Prebrojiv skup realnih brojeva ima Lebeg meru 0.

Formalna definicija Lebegove mere proizvoljnog skupa E sledi iz naredne dve definicije.

Definicija 1.7. [1] Neka je E podskup od R. Lebegova spoljašnja mera od E, označava se sa $\mu^*(\mathrm{E})$ i definisana je sa:

$$inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : \{I_k\} \text{ je niz otvorenih intervala takvih da je } \mathrm{E} \subseteq \bigcup_{\mathrm{k}=1}^{\infty} I_k\right\}.$$

Očigledno je da je $0 \leq \mu^*(\mathrm{E}) \leq \infty$.

Definicija 1.8. [1] Skup $E \subseteq R$ je Lebeg merljiv ako za svaki skup $A \subseteq R$ važi jednakost: $\mu^*(A) = \mu^*(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}) + \mu^*(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}^c)$. Ako je E Lebeg merljiv skup, onda je Lebegova mera od E Lebeg-ova spoljašnja mera i piše se: $\mu(E)$.

Iscrpan prikaz konstrukcije Lebegove mere se može naći u [6].

Primer 1.4. [1] Ako skup E ima meru nula, tada skup $\{x^2 : x \in E\}$ ima meru nula.

Bez gubitka opštosti, može se pretpostaviti da 0 ne pripada skupu E. Neka je: $A = \{x^2 : x \in E\}$. Za svaki pozitivan ceo broj n, neka je: $A_n = A \cap (0, n^2)$ i neka je: $E_n = E \cap (-n, n)$. Kako je $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ dovoljno je dokazati da je: $\mu(A_n) = 0$ za svako n.

Neka se fiksira n i neka je $\epsilon > 0$. Kako je: $\mu(E_n) = 0$ postoji niz $\{I_k\}$ otvorenih intervala, takvih da je $E_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) < \frac{\epsilon}{2n}$. Neka se pretpostavi da $0 \notin I_k$ i $I_k \subseteq (-n, n)$ za svako k. Neka je $I_k = (a_k, b_k)$. Za svako k neka je $J_k = (a_k^2, b_k^2)$ ako je $a_k > 0$ i $J_k = (b_k^2, a_k^2)$ ako je $b_k < 0$. Sada je $\{J_k\}$ niz otvorenih intervala takvih da je $A_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$ i

$\sum_{k=1}^{\infty} l(J_k) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} (\mathrm{b_k} - \mathrm{a_k})\, |a_k + b_k| \leq 2\mathrm{n} \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) < \epsilon$.

Odatle sledi da je $\mu(A_n) = 0$.

Slede tvrđenja koja su ekvivalentna, a dokaz može da se vidi u [6].

Lema 1.1. [6] Neka je $(X, \mathcal{M})$ prostor sa σ-algebrom i $f: X \to R$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

- f je merljiva.
- Za svako $a \in R$ je $\{x \in X: f(x) > a\} \in \mathcal{M}$.
- Za svako $a \in R$ je $\{x \in X: f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}$.
- Za svako $a \in R$ je $\{x \in X: f(x) < a\} \in \mathcal{M}$.
- Za svako $a \in R$ je $\{x \in X: f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}$.

Primedba 1.1. [4] Ako je f merljiva funkcija, tada je i $|f|$ merljiva funkcija, obrnuto ne važi.

Neka je E merljiv skup sa pozitivnom merom i neka je $A \subseteq E$. Funkcija χ_A je karakteristična funkcija na skupu A ako je:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A, \\ 0, x \notin A. \end{cases}$$

Kako je skup $\{x \in E: \chi_A(x) \geq r, r \in R\}$ $\emptyset$, A ili E, te je χ_A merljiva funkcija, ako i samo ako je A merljiv skup ([12]).

Dalje se uvodi pojam jednostavne funkcije (funkcija koja ima konačan broj vrednosti na određenom intervalu), zatim se navodi definicija Lebegovog integrala.

Definicija 1.9. [3] Merljiva funkcija s definisana na R je jednostavna merljiva funkcija, ako uzima konačno mnogo različitih vrednosti na određenom intervalu.

Neka su a_k međusobno različite vrednosti jednostavne merljive funkcije i neka je: $E_k = \{x: s(x) = a_k, k = 1,2, \ldots n\}$. Pravolinijski se proverava:

$$s(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(x), x \in R.$$

Definicija 1.10. [1] Neka je $s: [a, b] \to R$ jednostavna merljiva funkcija i neka je $s = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}$. Lebegov integral od s na $[a, b]$ definisan je:

$$\int_a^b s = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k).$$

Ako je A merljiv podskup od $[a, b]$ tada je: $\int_A s = \int_a^b s\, \chi_A = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k \cap A)$.

Definicija 1.11. [3] Neka je $f:[a,b]\to R$ nenegativna merljiva funkcija. Lebegov integral funkcije f na $[a,b]$ definisan je:

$$\int_a^b f = sup\int_a^b s$$

gde se supremum uzima preko svih jednostavnih merljivih funkcija s za koje je: $0 < s(x) < f(x)\ x\in[a,b]$. Ako je ovaj integral konačan, kaže se da je funkcija (Lebeg) integrabilna na $[a,b]$. Integral $\int_a^b s$ računa se na osnovu prethodne definicije: $\int_a^b s = \sum_{k=1}^n a_k\mu(E_k)$.

Funkcija f je Lebeg integrabilna na mjerljivom skupu $A\subseteq[a,b]$, ako je funkcija $f\chi_A$ Lebeg integrabilna na $[a,b]$ i ako važi: $\int_A f = \int_a^b f\chi_A$ ([3]).

Sledi definicija koja pokazuje potreban uslov da bi funkcija bila Lebeg integrabilna na određenom intervalu.

Definicija 1.12. [1]

- Pozitivna[14], merljiva funkcija $f:[a,b]\to R$ je Lebeg integrabilna na $[a,b]$, ako je $\int_a^b f<\infty$.
- Proizvoljna, merljiva funkcija $f:[a,b]\to R$ je Lebeg integrabilna na $[a,b]$, ako je $|f|$ Lebeg integrabilna na $[a,b]$.
- Ako su funkcije $f^+(x)=\max\{f(x),0\}$ i $f^-(x)=\max\{-f(x),0\}$ Lebeg integrabilne na $[a,b]$, tada je Lebeg-ov integral od f na $[a,b]$ definisan sa:

$$\int_a^b f = \int_a^b f^+ - \int_a^b f^-.$$

Sledi primer koji pokazuje kako se računa vrednost integrala, ako je funkcija Lebeg integrabilna.

Primer 1.5. [19] Neka je funkcija $f(x)$ definisana na $[0,1]$, tako da je:

$$f(x)=\begin{cases}1, x\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\\ 2, x\in\left(\frac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

Funkcija $f(x)$ ima konačno mnogo vrednosti (dve vrednosti), pa se vrednost integrala određuje tako što se sumiraju proizvodi vrednosti funkcije i mere skupa na kome ima tu vrednost. U ovom slučaju $f(x)$ ima vrednost:

[14] Funkcija $f(x)$ je pozitivna na intervalu $[a,b]$ ako za svako $x\in[a,b]$ važi da je $f(x)>0$. [5]

- 1 na skupu $[0,\frac{1}{2}]$, mera skupa $[0,\frac{1}{2}]$ je: $\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$,

- 2 na skupu $(\frac{1}{2},1]$, mera skupa $(\frac{1}{2},1]$ je: $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Vrednost integrala je: $\int_0^1 f(x)dx = 1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

Sledi primer u kom se pokazuje da je pozitivna funkcija Lebeg integrabilna.

Primer 1.6. [1] Funkcija $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ za $x>0$ i $f(x)=0$ za $x=0$ je Lebeg integrabilna na $[0,1]$. Za svaki pozitivan broj n neka je:

$$f_n(x)=\begin{cases} 0, ako\ je\ 0\le x<\dfrac{1}{n^2}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}, ako\ je\ \dfrac{1}{n^2}\le x\le 1. \end{cases}$$

Svaka funkcija f_n je Lebeg integrabilna na $[0,1]$ i niz $\{f_n\}$ je neopadajući niz nenegativnih funkcija koji konvergira ka f na $[0,1]$.
Kako je: $\int_0^1 f_n = 2\sqrt{1}-2\sqrt{\frac{1}{n^2}}=2-\frac{2}{n}$ za svako n, sledi da granična vrednost $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n$ postoji. Po teoremi monotone konvergencije [15], funkcija f je Lebeg integrabilna na $[a,b]$ i važi:

$$\int_0^1 f=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n=2.$$

Primer 1.7. [6] U ovom primeru uz pomoć Lebegove teoreme može da se izračuna:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{dx}{x^n+2}.$$

Posmatra se niz $f_n(x)=\frac{1}{x^n+2}, x\in[0,\infty)$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, x\in[0,1), \\ \frac{1}{3}, \quad x=1, \\ 0, \quad x>1.\end{cases}$$

Neka je $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, x\in[0,1], \\ \frac{1}{x^2+2}, x>1.\end{cases}$

$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx<\infty$, važi: $f_n(x)\le g(x), za\ n=2,3,\ldots$.

[15] (Teorema monotone konvergencije). Neka je $\{f_n\}$ neopadajući niz nenegativnih merljivih funkcija definisanih na $[a,b]$. Ako $\{f_n\}$ konvergira tačkasto ka f na $[a,b]$, tada je: $\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$. [1]

Prema Lebegovoj teoremi o dominantnoj kovergenciji[16] je:

$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{x^n+2} = \int_0^\infty f(x)dx = \frac{1}{2} \cdot m\big([0,1)\big) + \frac{1}{3} \cdot m(\{1\}) + 0 \cdot m\big((1,\infty)\big) = \frac{1}{2}.$

U ovom odeljku posmatra se skup R, sa Lebegovom σ-algebrom L i Lebegovom merom m. Ako je $f: [a,b] \to R$ ograničena (sa $A > 0$) merljiva funkcija, ona je i Lebeg integrabilna, što sledi iz $\int_{[a,b]} f dm \leq A \int_{[a,b]} dm = A(b-a)$. Sledeća teorema tvrdi da realna ograničena funkcija f na $[a,b]$ koja je i Riman integrabilna je merljiva i Lebeg integrabilna na $[a,b]$.

Teorema 1.1. [6] Neka je f ograničena realna funkcija na $[a,b]$.

1) Ako je f Riman integrabilna, tada je f Lebeg integrabilna i važi: $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f dm.$
2) Funkcija f je Riman integrabilna, ako i samo ako je skup prekida funkcije f mere 0.

Sledi primer koji pokazuje postojanje skupa koji ima Lebegovu meru nula, a koji nije prebrojiv.

Primer 1.8. [6] Geometrijski, Kantorov skup K se formira tako što se u prvom koraku iz intervala $[0,1]$ podeljenog na tri jednaka intervala izostavlja srednji $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, u drugom koraku se preostala dva intervala dele na po tri jednaka intervala i u svakoj trisekciji izostavlja se srednji interval (intervali $(\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2})$ i $(\frac{2}{3}+\frac{1}{3^2},\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2})$, u četvrtom koraku svaki od preostalih intervala deli se na po tri jednaka dela, od kojih se u svakoj trisekciji izostavlja srednji itd. Kako se K dobija uklanjanjem jednog intervala dužine $\frac{1}{3}$, dva intervala dužine $\frac{1}{9}$, itd. Iz intervala $[0,1]$ sledi da je:

$$m(K) = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{3^{j+1}} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 0.$$

[16] (Lebegova teorema o dominantnoj kovergenciji).
Neka je $\{f_n\}$ niz kompleksnih merljivih funkcija na $(X, \mathcal{M}, \mu)$ i neka je: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in X$. Ako postoji $g \in L^1(\mu)$ tako da je: $|f_n(x)| \leq g(x), n \in N, x \in X$, tada $f \in L^1(\mu)$ i važi: $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$; $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

2. Neke katekteristike realnih funkcija

Pojam funkcija je fundamentalan u matematici. Reč funkcija, generalno izražava ideju da poznavanje jedne činjenice daje informaciju o drugoj. Na primer: brzina automobila je funkcija jačine motora, temperatura je funkcija godišnjeg doba. U matematici pojam funkcija koristi se za predstavljanje zavisnosti jedne veličine od druge. Funkcija je pravilo po kome se uzimaju neki brojevi kao ulazne veličine i svakom od njih dodeljuje se određen izlazni broj. Funkcija ili preslikavanje je jedan od najvažnijih matematičkih pojmova i predstavlja preslikavanje članova jednog skupa (domena) u drugi (kodomena). [18]

Funkcije koje preslikavaju skup realnih brojeva R u skup realnih brojeva R nazivaju se realnim funkcijama jedne realne nezavisne promenljive. Ovakve funkcije mogu biti zadate na različite načine. Na primer: funkcije mogu biti zadate tabelarno, grafički, mada se najčešće zadaju analitički, i to eksplicitno u obliku $y = f(x)$ odnosno implicitno kao $F(x, y) = 0$. Takođe, funkcije mogu da se zadaju i parametarski tj. sa $x = \phi(t)$ i $y = \psi(t)$ definiše se jedna funkcija između promenljivih x i y, ali posredstvom parametra $t \in R$.

Realna funkcija jedne realne promenljive na skupu X je pridruživanje koje svakom elementu skupa X dodeljuje tačno jedan elemet iz R, što pišemo na sledeći način:
$f: X \to R,\ \ X \subset R \quad y = f(x)$.

Neprekidne funkcije predstavljaju jednu od najvažnijih klasa funkcija koje se proučavaju u različitim matematičkim disciplinama. Za funkciju f kaže se da je neprekidna u tački x_0 ako funkcija poseduje vrednost u toj tački i ako se njena vrednost kada se sa leva ili desna približava posmatranoj tački takođe približava njenoj vrednosti u posmatranoj tački. Ako se posmatra grafik funkcije gde je domen interval, onda se može reći da je funkcija neprekidna ako se njen grafik može nacrtati "neprekidno bez odvajanja olovke od papira". Za funkciju koja nije neprekidna u nekoj tački kaže se da je prekidna u toj tački, odnosno da ima prekid u posmatranoj tački. Ovo poglavlje započeće definisanjem neprekidne funkcije u određenoj tački zatim se objašnjava značenje funkcija ograničene varijacije koja ima veoma važnu ulogu u matematičkoj analizi.

Definicija 2.1. [9] Funkciju $f: A \to R$ je neprekidna u tački $x_0 \in A$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji broj $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tako da važi implikacija:

$$(\forall x \in A)|x - x_0| < \delta => |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Jednu u analizi vrlo važnu klasu funkcija čine funkcije ograničene varijacije. Funkcije ograničene varijacije mogu se predstaviti kao razlika dve monotono neopadajuće funkcije i generišu naboj (meru sa predznakom). Takve funkcije obično se koriste za definisanje dužine krivulje. Naredna definicija govori kada funkcija ima konačnu varijaciju na određenom intervalu.

Definicija 2.2. [4] Neka je $f:[a,b] \to R$. Neka se interval $[a,b]$ podeli na k delova tačkama: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots x_k = b$. Ako postoji realan broj M takav da je:

$$\sum_{i=0}^{k-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \le M < +\infty$$

za svaku podelu intervala $[a,b]$, tada se kaže da funkcija f ima konačnu varijaciju na $[a,b]$ (ograničenu varijaciju).

Definicija 2.3. [1] Varijacija F na $[a,b]$ definisana je na sledeći način:

$$V(F,[a,b]) = sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |F(d_i) - F(c_i)|\right\},$$

gde je $\{[c_i, d_i]: 1 \le i \le n\}$ konačna kolekcija nepreklapajućih intervala koji imaju krajnje tačke u $[a,b]$.
Funkcija F je ograničene varijacije na $[a,b]$ ako je $V(F,[a,b])$ konačan.

Postoji neprekidna funkcija koja nije ograničene varijacije na $[a,b]$. Sledeći primer pokazuje slučaj kada je funkcija neprekidna na određenom intervalu, ali nema konačnu varijaciju na tom intervalu.

Primer 2.1. [4] Funkcija:

$$f(x) = \begin{cases} xcos\dfrac{\pi}{2x}, x \ne 0, \\ \quad 0, \qquad x = 0. \end{cases}$$

je neprekidna na R. Za svaku podelu $0 < \frac{1}{2k} < \frac{1}{2k-1} < \frac{1}{2k-2} \ldots < \frac{1}{2} < 1,\ k = 1,2,\ldots$ intervala $[0,1]$ dobija se:

$$\sum_{i=0}^{k-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

$$= \left|\frac{1}{2k} cos\frac{2k\pi}{2} - 0\right| + \left|\frac{1}{2k-1} cos\frac{(2k-1)\pi}{2} - \frac{1}{2k} cos\frac{2k\pi}{2}\right| + \cdots$$

$$+ \left|\frac{1}{2} cos\frac{2\pi}{2} - \frac{1}{3} cos\frac{3\pi}{2}\right| + \left|cos\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} cos\frac{2\pi}{2}\right|$$

$$= \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k-2} + \frac{1}{2k-2} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \cdots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1.$$

Kada $k \to \infty$, harmonijski red $\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ divergira u beskonačnost, pa sledi da f nije ograničene varijacije na $[0,1]$.

Slika 2.1. Grafik funkcije $f(x) = xcos\frac{\pi}{2x}$

Postoji veliki broj kretanja koji se posle određenog vremenskog perioda ponavlja na isti ili približno isti način, kao što su: kretanje planete, oscilovanje klatna zidnog časovnika, ljuljanje deteta na ljuljašci i slično. Periodično kretanje se nakon određenog vremenskog intervala ponavlja na isti način ili približno isti način. Oscilatno kretenje je periodično kretanje koje se ponavlja duž jedne putanje. [20]

Klasičan primer oscilatnog kretanja u matematici jeste funkcija $sinx$, ova funkcija je periodična i njena vrednost se ponavlja za period 2π, tj. važi jednakost: $\sin(x+2\pi) = sinx$. Sledeća definicija služi da se definiše oscilovanje funkcije na nekom intervalu.

Definicija 2.4. [1] Oscilovanje funkcije F na intervalu $[a,b]$ je:

$$w(F,[a,b]) = \sup\{|F(y) - F(x)|: a \leq x < y \leq b\}.$$

Za $c \in [a,b]$ važi: $w(F,[a,b]) \leq w(F,[a,c]) + w(F,[c,b])$.

Totalna varijacija funkcije F na intervalu $[a,b]$ može da se shvatiti kao ukupna vertikalna dužina putanje tačke koja se kreće po grafiku funkcije od $(a,F(a))$ do $(b,F(b))$. Ako F ima neprekidan prvi izvod tada je totalna varijacija integral $\int_a^b |F'(x)|\, dx$. Međutim, ako F nije dovoljno glatka funkcija totalna varijacija se definiše pomoću particionisanja intervala $[a,b]$ na podintervale $[x_{j-1},x_j]$, aproksimirajući funkciju F na svakom podintervalu sa linearnom funkcijom čiji grafik spaja tačku $(x_{j-1},F(x_{j-1}))$ sa tačkom $(x_j,F(x_j))$ uzimajući supremum nad ukupnim dužinama, kako se particije profinjuju ([6]). Dalje se uvodi pojam slabe i jake varijacije. Pitanje varijacije na intervalu je neophodno proširiti i na proizvoljan skup, što je i uradjeno narednom definicijom.

Definicija 2.5. [1] Neka je $F: [a,b] \to R$ i neka je $E \subseteq [a,b]$.

a) Slaba varijacija F na E i jaka (jača) varijacija F na E definišu se sa:

$$V(F,E) = sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |F(d_i) - F(c_i)|\right\},$$

$$V_*(F,E) = sup\left\{\sum_{i=1}^{n} w(F,[c_i,d_i])\right\},$$

gde je $\{[c_i, d_i]: 1 \leq i \leq n\}$ konačna kolekcija nepreklapajućih intervala koji imaju krajnje tačke u E.

b) Funkcija F je ogranične varijacije na E (F je BV na E) ako je $V(F, E)$ konačan. Funkcija F je ogranične varijacije u ograničenom smislu na E (F je BV_* na E) ako je $V_*(F, E)$ konačan.

c) Funkcija F je generalizovane ograničene varijacije na E (F je BVG na E) ako se E može zapisati kao prebrojiva unija skupova na kojim je F BV.

Funkcija F je generalizovane granične varijacije u ograničenom smislu na E (F je BVG_* na E) ako se E može zapisati kao prebrojiva unija skupova na kojim je F BV_*

d) Funkcija F je apsolutno neprekidna na E (F je AC na E) ako:
$\forall \varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $\sum_{i=1}^{n} |F(d_i) - F(c_i)| < \varepsilon$
gde je $\{[c_i, d_i]: 1 \leq i \leq n\}$ konačna kolekcija nepreklapajućih intervala, koji imaju krajnje tačke u E i zadovoljvaju $\sum_{i=1}^{n} (d_i - c_i) < \delta$.

Funkcija F je apsolutno neprekidna u ograničenom smislu na E (F je AC_* na E) ako je F ograničena na intervalu koji sadrži E i ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $\sum_{i=1}^{n} w(F, [c_i, d_i]) < \varepsilon$ kada je $\{[c_i, d_i]: 1 \leq i \leq n\}$ konačna kolekcija nepreklapajućih intervala, koji imaju krajnje tačke u E i zadovoljvaju $\sum_{i=1}^{n} (d_i - c_i) < \delta$.

e) Funkcija F je generalizovano apsolutno neprekidna na E (F je ACG na E) ako je $F|_E$ neprekidna na E i tada se E može zapisati kao prebrojiva unija skupova i na svakom skupu je F AC.

Funkcija F je generalizovano apsolutno neprekidna u ograničenom smislu na E (F je ACG_* na E) ako je $F|_E$ neprekidna na E i tada se E može zapisati kao prebrojiva unija skupova i na svakom skupu je F AC_*.

Svaka apsolutno neprekidna funkcija je neprekidna funkcija na $[a, b]$, obrnuto ne važi što će se videti u sledećem primeru.

Primer 2.2. [4] Funkcija: $f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{\pi}{2x}, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

je neprekidna, ali nije ograničene varijacije na $[0,1]$. Takva funkcija ne može biti apsolutno neprekidna.

Teorema 2.1. [1] Neka je $F: [a, b] \to R$ i neka je $E \subseteq [a, b]$.

a) Ako je F AC (ACG) na E, tada je F BV (BVG) na E.
b) Ako je F $AC_*(ACG_*)$ na E, tada je F BV_* (BVG_*) na E.
c) Ako je F BV_* na E, tada je F BV_* na $\overline{E}$[17].

---

[17] $\overline{E}$ zatvaranje skupa E.

d) Ako se pretpostavi da je $F|_{\overline{E}}$ neprekidna na $\overline{E}$. Ako je F BV (AC, AC_*) na E, tada je F BV (AC, AC_*) na $\overline{E}$.

e) Neka se pretpostavi da je E zatvoren $a, b \in E$ i neka je G linearno proširenje od F na $[a, b]$. Ako je F BV (AC) na E, tada je G BV (AC) na $[a, b]$.

Dokaz. c) Neka je $c = \inf E$ i $d = supE$. F je BV_* na E, te je ograničena na $[c, d]$ sa M. Neka je $\{[c_i, d_i]: 1 \leq i \leq n\}$ konačna kolekcija nepreklapajućih intervala koji imaju krajnje tačke u $\overline{E}$ i neka je $\bigcup_{i=1}^{n}[c_i, d_i] = [c, d]$. Neka je $\{I_k: 1 \leq k \leq p\}$ kolekcija intervala $[c_i, d_i]$ u rastućem redosledu i neka se seku u E, neka su $\{K_j: 1 \leq j \leq q\}$ preostali intervali takođe u rastućem redosledu. Za svako k postoji tačka v_k u $E \cap I_k$. Za svako j postoji jedinstven ceo broj k_j, takav da je $K_j \subseteq \left[v_{k_j}, v_{k_j+1}\right]$. Neka se pretpostavi da je $I_k = [\alpha, \beta]$ za svako k u $\{2,3, \ldots, p-1\}$ i sada je:

$$w(F, I_k) \leq w(F, [\alpha, v_k]) + w(F, [v_k, \beta]) \leq w(F, [v_{k-1}, v_k]) + w(F, [v_k, v_{k+1}]).$$

Dalje je:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} w(F, [c_i, d_i]) &= \sum_{j=1}^{q} w(F, K_j) + \sum_{i=1}^{p} w(F, I_k) \\ &\leq \sum_{j=1}^{q} w(F, \left[v_{k_j}, v_{k_j+1}\right]) + w(F, I_1) + w(F, I_p) + w(F, [v_1, v_2]) \\ &+ 2\sum_{k=2}^{p-2} w(F, [v_k, v_{k+1}]) + w\left(F, \left[v_{p-1}, v_p\right]\right) \\ &\leq V_*(F, E) + 2w(F, [c, d]) + 2V_*(F, E) \leq 3V_*(F, E) + 4M.\end{aligned}$$

Otuda je $V_*\left(F, \overline{E}\right)$ konačna i funkcija F je BV_* na $\overline{E}$.

d) pokazaće se rezultat za AC.
Neka je $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ takav da je: $\sum_{i=1}^{n}|F(d_i) - F(c_i)| < \varepsilon/2$, kada je $\{[c_i, d_i]: 1 \leq i \leq n\}$ konačna kolekcija nepreklapajućih intervala koji imaju krajnje tačke u E i zadovoljvaju $\sum_{i=1}^{n}(d_i - c_i) < \delta$. Neka je $\{[u_i, v_i]: 1 \leq i \leq n\}$ konačna kolekcija nepreklapajućih intervala koji imaju krajnje tačke u $\overline{E}$ i $\sum_{i=1}^{n}(v_i - u_i) < \delta/2$. Pošto je E gust u $\overline{E}$ i $F|_{\overline{E}}$ je neprekidna na $\overline{E}$, postoji konačna kolekcija:
$\{[c_i, d_i]: 1 \leq i \leq n\}$ nepreklapajućih intervala koji imaju krajnje tačke u E i tada je:
$\sum_{i=1}^{n}(d_i - c_i) < \delta$, $\sum_{i=1}^{n}|F(u_i) - F(c_i)| < \frac{\varepsilon}{4}$ i $\sum_{i=1}^{n}|F(v_i) - F(d_i)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Dalje je:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}|F(v_i) - F(u_i)| \\ &\qquad < \sum_{i=1}^{n}|F(v_i) - F(d_i)| \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{n}|F(d_i) - F(c_i)| + \sum_{i=1}^{n}|F(c_i) - F(u_i)| + < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Otuda je F AC na $\overline{E}$.

Teorema 2.2. [1] Neka je E ograničen, zatvoren skup sa granicama a i b i neka je $F: [a, b] \rightarrow R$. Tada je F $AC_*(ACG_*)$ na E ako i samo ako je F BV_* i AC (BVG_* i ACG) na E.

Teorema 2.3. [1] Neka je $F: [a, b] \rightarrow R$ i neka je $E \subseteq [a, b]$ zatvoren skup, neka se pretpostavi da je $F|_E$ neprekidna na E. Tada je F BVG (ACG, BVG_*, ACG_*) na E ako i samo ako svaki neprazni savršen podskup od E sadrži deo na koji je F BV (AC, BV_*, AC_*).

Definicija 2.6. [1] Funkcija $F: E \rightarrow R$ zadovoljava uslov (N) na E ako je:
$\mu^*\big(F(A)\big) = 0$, za svaki skup $A \subseteq E$ mera je 0.

Teorema 2.4. [1] Neka je E zatvoren skup sa granicama a i b i neka je $F: [a, b] \rightarrow R$, neka se pretpostavi da je $F|_E$ neprekidna na E. Tada je F ACG (ACG_*) na E ako i samo ako je F BVG (BVG_*) na E i zadovoljava uslov (N) na E.

Posledica 2.1. [12] Neka je $F: [a, b] \rightarrow R$ neprekidna na $[a, b]$. Ako je F diferencijabilna skoro svuda na $[a, b]$, tada je F ACG_* na $[a, b]$.

Posledica 2.2. [12] Neka je $F: [a, b] \rightarrow R$ ACG na $[a, b]$. Ako je $F' = 0$ skoro svuda na $[a, b]$, tada je F konstanta na $[a, b]$.

3. Denojev integral

Arnaud Denoj[18] (1884 – 1974) bio je francuski matematičar. Radio je na univerzitetu u Parizu od 1922. do 1955. godine. Denoj proučava funkcije realnih promenljivi, kombinuje topološke i metričke metode pri rešenju problema realne analize (bavi se analitičkim svojstvima realnih funkcija i nizova, uključujući konvergenciju limese nizova realnih brojeva, neprekidnost, diferencijabilnost i srodna svojstva realnih funkcija). Njegov rad u analizi svakako je upamćen kroz Denojev integral ([13]).

Arnaud Denjoy[19]

Denojev integral je prosto uopštenje Lebegovog integrala.

[18] Arnaud Denjoy
[19] Slika preuzeta sa internet stranice http://biblio.mat.uc.pt/bbsoft/woc_ucma/matematicos/January10EN.pdf

Motivacija za konstrukciju Denojevog integrala, kao i integrala koji će biti obrađeni u narednim poglavljima, je slična motivaciji za konstrukciju Lebegovog intgrala. Kao što znamo jedan od glavnih razloga za razvoj Lebegovog integrala jeste činjenica da Rimanov integral ima neke nedostatke. Lebegov integral nudi sledeće prednosti u odnosu na Rimanov integral:

1. Ako je $\{f_n\}$ niz uniformno ograničenih Lebeg integrabilnih funkcija koje konvergiraju ka f na $[a,b]$, tada je f Lebeg integrabilna na $[a,b]$ i važi:

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n.$$

2. Ako F ima ograničen izvod na $[a,b]$, tada je F' Lebeg integrabilna na $[a,b]$ i važi:

$$\int_a^x F' = F(x) - F(a)\ \forall x \in [a,b].$$

3. Neka je F neprekidna funkcija definisana na $[a,b]$. Ako je F diferencijabilna skoro svuda na $[a,b]$ i neka je F' Lebeg integrabilna na $[a,b]$, tada važi:

$$\int_a^x F' = F(x) - F(a)\ \forall x \in [a,b].$$

Uslov integrabilnosti za F' u prethodnom tvrđenju je zaista neizostavan što i ilustruje naredni primer.

Primer 3.1. [1] Neka je data funkcija:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 cos\dfrac{\pi}{x^2}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ova funkcija ima izvod u svakoj tački na intervalu $[0,1]$, ali nije apsolutno neprekidna na $[0,1]$, pa F' nije Lebeg integrabilna na $[0,1]$. Neka se pretpostavi da je F' Lebeg integrabilna na $[0,1]$ i neka je: $G(x) = \int_0^x F'$, $\forall x \in [0,1]$. Funkcije F (na osnovu posledice 2.1.) i G su ACG_* na $[0,1]$ i njihovi izvodi su jednaki skoro svuda na $[0,1]$. Na osnovu posledice 2.2. i $F(0) = G(0)$ funkcije F i G su jednake na $[0,1]$, te je F AC (apsolutno neprekidna) na $[0,1]$, što dovodi do kontradikcije. [1]

Postavlja se pitanje da li je moguće definisati integral za koji važi: neka je $F{:}\,[a,b] \to R$ neprekidna funkcija, ako je F diferencijabilna skoro svuda na $[a,b]$, tada je F' integrabilna na $[a,b]$ i $\int_a^x F' = F(x) - F(a)\ \forall x \in [a,b]$.
Integral sa ovakvim svojstvima može da povrati funkciju iz njenih izvoda. Svaki integral koji ima ovo svojstvo treba da uključi i Lebeg-ov integral, tj. svaka funkcija koja je Lebeg integrabilna treba da je integrabilna u novom smislu, a integrali trebaju da budu jednaki. (Koristeći ovu terminologiju Lebegov integral uključuje Rimanov integral). Dalje se u radu predstavljaju tri različita rešenja za ovaj problem Denojev, Peronov i Henstokov integral. [1]

Funkcija $f: [a, b] \to R$ je Lebeg integrabilna na $[a, b]$ ako i samo ako postoji apsolutno neprekidna funkcija (AC) $F: [a, b] \to R$ takva da je $F^{'} = f$ skoro svuda na $[a, b]$. Denojev integral je prosto uopštenje ove karakterizacije Lebegovog integrala.[1]

Definicija 3.1. [1] Funkcija $f: [a, b] \to R$ je Denoj integralna na $[a, b]$, ako postoji generalizovano neprekidna funkcija (ACG_*) $F: [a, b] \to R$ takva da je $F^{'} = f$ skoro svuda na $[a, b]$.

Funkcija f je Denoj integrabilna na mjerljivom skupu $E \subseteq [a, b]$, ako je $f\chi_E$ Denoj integrabilna na $[a, b]$.

Na osnovu posledice 1.1. Denojev integral funkcije je jedinstveno određen do na konstantu. Ako se doda uslov da je $F(a) = 0$, tada je funkcija F jedinstvena. Ova funkcija se označava sa $\int_a^x f$ i koristi se prefiks (D) ako je potrebno da se ovaj integral razlikuje od Lebegovog integrala. [1]

Sledeća teorema govori da Denojev integral može da oporavi, tj. povrati prvobitnu funkciju od svojih izvoda.

Teorema 3.1. [1] Neka je $F: [a, b] \to R$ neprekidna funkcija i neka je F diferencijabilna skoro svuda na $[a, b]$. Tada je $F^{'}$ Denoj integrabilna na $[a, b]$ i važi: $\int_a^x F^{'} = F(x) - F(a)$ za svako $x \epsilon [a, b]$.

Denojev integral ima sva uobičajna svojstva integrala, koja se navode u sledećim teoremama.

Teorema 3.2. [1] Neka je $f: [a, b] \to R$ i neka $c \in (a, b)$.

a) Ako je f Denoj integrabilna na $[a, b]$, tada je f Denoj integrabilna na svakom podintervalu od $[a, b]$.

b) Ako je f Denoj integrabilna na intervalima $[a, c]$ i $[c, b]$, tada je f Denoj integrabilna na $[a, b]$ i tada je: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Teorema 3.3. [1] Ako se pretpostavi da su f i g Denoj integrabilne na $[a, b]$. Tada:

a) je kf Denoj integrabilna na $[a, b]$ i $\int_a^b kf = k \int_a^b f$ za svako $k \in R$;

b) $f + g$ je Denoj integrabilna na $[a, b]$ i $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$;

c) ako je $f \leq g$ skoro svuda na $[a, b]$, tada je $\int_a^b f \leq \int_a^b g$;

d) ako je $f = g$ skoro svuda na $[a, b]$, tada je $\int_a^b f = \int_a^b g$.

Teorema 3.4. [1] Neka je $f: [a, b] \rightarrow R$ Denoj integrabilna na $[a, b]$. Ako je $f = g$ svuda na $[a, b]$, tada je g Denoj integrabilna na $[a, b]$ i važi jednakost: $\int_a^b g = \int_a^b f$.

Teorema 3.5. [1] Neka je $f: [a, b] \rightarrow R$ Denoj integrabilna na $[a, b]$ i neka je: $F(x) = \int_a^x f$ za svako $x \in [a, b]$. Tada je:

a) funkcija F neprekidna na $[a, b]$,

b) funkcija F diferencijabilna svuda na $[a, b]$ i $F^{'} = f$ svuda na $[a, b]$,

c) funkcija f merljiva na $[a, b]$.

Teorema 3.6. [1] Neka je $f: [a, b] \rightarrow R$ Denoj integrabilna na $[a, b]$.

a) Ako je f ograničena na $[a, b]$, tada je f Lebeg integrabilna na $[a, b]$.

b) Ako je f nenegativna na $[a, b]$, tada je f Lebeg integrabilna na $[a, b]$.

c) Ako je f Denoj integrabilna na svakom merljivom podskupu od $[a, b]$, tada je f Lebeg integrabilna na $[a, b]$.

Dokaz.

a) Ako je f ograničena na $[a, b]$, tada je f Lebeg integrabilna na $[a, b]$, jer je ograničena i merljiva.

b) Ako je f nenegativna na $[a, b]$, tada je funkcija $F(x) = \int_a^x f$ neopadajuća[20] na $[a, b]$. Pošto je F nesmanjujuća njeni izvodi su Lebeg integrabilni na $[a, b]$. Kako je $F^{'} = f$ svuda u odnosu na $[a, b]$, tada je i funkcija f Lebeg integrabilna na $[a, b]$.

c) Ako je f Denoj integrabilna na skup $\{x \in [a, b]: f(x) \geq 0\}$ tada je f^+ Denoj integrabilna i otuda je Lebeg integrabilna na $[a, b]$.
Slično tome f^- je Lebeg integrabilna na $[a, b]$, ako je f Denoj integrabilna na skup $\{x \in [a, b]: f(x) \leq 0\}$. Zato je $f = f^+ - f^-$ Lebeg integrabilna na $[a, b]$, ako je f Denoj integrabilna na svaki merljivi podskup od $[a, b]$.

[20] Funkcija f je neopadajuća na (a, b) ako je za svako x iz intervala (a, b) $f^{'}(x) \geq 0$.

3.1. Razlike i sličnosti Denojeve integrabilne funkcije i Lebegove integrabilne funkcije

U ovom delu navode se razlike Denojeve integrabilne funkcije i Lebegove integrabilne funkcije. Neodređeni Denojev integral više je ACG_* nego što je AC. Ove razlike su bitne, jer omogućavaju da Denojev integral poseduje svojstva koja Lebegov integral ne poseduje. Postavlja se pitanje: Da li je moguće prepoznati razliku između Lebegove integrabilne funkcije i Denojeve integrabilne funkcije? Nude se sledeće dve primedbe.

Merljiva funkcija f je Lebeg integrabilna na $[a, b]$ ako i samo ako je $|f|$ Lebeg integrabilna na $[a, b]$. Ako se pretpostavi da je f Denoj integrabilna na $[a, b]$, ali da nije Lebeg integrabilna na $[a, b]$, tada $|f|$ nije Denoj integrabilna na $[a, b]$. Neka se pretpostavi da je $|f|$ Denoj integrabilna na $[a, b]$, tada je po teoremi 3.6.(b) funkcija f Lebeg integrabilna na $[a, b]$ i to dovodi do kontradikcije. Iz ovog razloga Denojev integral je poznat kao neapsolutni integral. Odnosno, ako je f Denoj integrabilna na $[a, b]$ ne sledi da je $|f|$ Denoj integrabilna na $[a, b]$. [1]

Po definiciji ako je funkcija f Lebeg integrabilna na $[a, b]$, tada je Lebeg integrabilna na svaki merljiv podskup od $[a, b]$. Neka se pretpostavimo da je f Denoj integrabilna na $[a, b]$, ali da nije Lebeg integrabilna na $[a, b]$. Tada po teoremi 3.6.(c) postoji merljiv podskup od $[a, b]$ na koji f nije Denoj integrabilna. [1]

Ove razlike su veoma bitne jer omogućavaju da Denojev integral poseduje svojstva koja Lebegov integral ne poseduje. Međutim, Denojev integral ne odstupa tako daleko od Lebegovog integrala. Sledeće dve teoreme će pokazati tu činjenicu.

Definicija 3.2. [10] Skup A je savršen (perfektan), ako mu pripadaju sve njegove tačke nagomilavanja (označava se sa $\boldsymbol{A'}$), tj. ako je svaka njegova tačka istovremeno i njegova tačka nagomilavanja. Tačka $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{R}$ je tačka nagomilavanja skupa $\boldsymbol{A}$ ako za svaku okolinu $\boldsymbol{x_0}$ postoji bar jedna tačka iz skupa $\boldsymbol{A}$ različita od $\boldsymbol{x_0}$.

Primer 3.2. Za skupove:

a) $A = [0,1]$,
b) $B = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}\right\}$,
c) $C = \left\{\frac{1}{2^n} | n \in N\right\}$.

Tačke nagomilavanja su: $A' = [0,1]$, $B' = \{0\}$, $C' = \{0\}$. Pa se može zaključiti da je skup A savršen skup.

Sledi teorema koja pokazuje vezu između Denojevog i Lebegovog integrala. U teoremi se navode uslovi koji su potrebni za postojanje veze između Denojeve i Lebegove integrabilne funkcije.

Teorema 3.7. [1] Neka je $f:[a,b]\to R$ Denoj integrabilna na $[a,b]$. Ako je E savršen (perfektan) skup na $[a,b]$, tada postoji savršeni deo $E\cap[c,d]$ od E takav da je f Lebeg integrabilna na $E\cap[c,d]$. Osim toga, niz $\sum_{k=1}^{\infty} w\left(\int_{c_k}^{x} f,[c_{k,}d_k]\right)$ konvergira gde je $[c,d]-E=\bigcup_{k=1}^{\infty}(c_k,d_k)$.

Dokaz. Funkcija $F(x)=\int_a^x f$ je ACG_* na $[a,b]$ i $F^{'}=f$ svuda na $[a,b]$. Na osnovu teoreme 2.3. postoji savršeni deo $E\cap[c,d]$ od E, takav da je $F\ AC_*$ na $E\cap[c,d]$. Neka je $G:[c,d]\to R$ linearno proširenje od F na $[c,d]$. G je AC na $[c,d]$ po teoremi 2.1.(e), funkcija $G^{'}$ postoji skoro svuda i ona je Lebeg integrabilna na $[c,d]$. Kako je: $G^{'}=F^{'}=f$ skoro svuda na $E\cap[c,d]$, funkcija f je Lebeg integrabilna na $E\cap[c,d]$. Kako je $F\ BV_*$ na $E\cap[c,d]$, niz oscilacija F konvergira u E pa konvergira i u $[c,d]$. Dakle, niz $\sum_{k=1}^{\infty} w\left(\int_{c_k}^{x} f,[c_{k,}d_k]\right)$ konvergira.

Prosta posledica na prethodnu teoremu je: Ako je f Denoj integrabilna na $[a,b]$, tada svaki interval sadrži podinterval na kojem je f Lebeg integrabilna. Skup koji se sastoji od svih završnih tačaka intervala na kojem je f Lebeg integrabilna, formira gust skup od $[a,b]$.

Tvrđenje 3.1. [1] Neka je $f:[a,b]\to R$ Denoj integrabilna na $[a,b]$, tada je $[a,b]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$, E_n je zatvoren skup i f je Lebeg integrabilna na svako E_n.

Dokaz. Neka je $F(x)=\int_a^x f$ za svako $x\epsilon[a,b]$. F je ACG_* na $[a,b]$, pa se može zapisati $[a,b]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ gde je $F\ AC_*$ na svako E_n i E_n je zatvoren skup. Kao u dokazu teoreme 3.7. funkcija f je Lebeg integrabilna na svako E_n.

Lema 3.1. [1] Neka je $f:[a,b]\to R$ merljiva funkcija i neka su A i B merljivi podskupovi od $[a,b]$, $A\subseteq B$. Ako se pretpostavi da je f Lebeg integrabilna na B i da je L broj između $\int_A f$ i $\int_B f$, tada postoji merljiv skup C takav da je $A\subseteq C\subseteq B$ i $\int_C f=L$.

Teorema 3.8. [1] Neka je $f:[a,b]\to R$ Denoj integrabilna na $[a,b]$. Tada za svako $\varepsilon>0$ postoji merljiv skup $E\subseteq[a,b]$, takav da je $\mu([a,b]-E)<\varepsilon$ i tada je f Lebeg integrabilna na E i pri tom važi: $\int_E f=\int_a^b f$.

Dokaz. Neka se pretpostavi da f nije Lebeg integrabilna na $[a,b]$. Za svaki pozitivan broj n definišu se skupovi:

$$A_n=\{x\in[a,b]:n-1\le f(x)<n\}$$

$$B_n=\{x\in[a,b]:-n\le f(x)<-n+1\}$$

neka je: $a_n=\int_{A_n} f$ i $b_n=\int_{B_n} f$. Kako je $[a,b]=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cup B_n)$ postoji ceo broj N, takav da je skup: $X=\bigcup_{n=1}^{N}(A_n\cup B_n)$. Skup X zadovoljava $\mu([a,b]-X)<\varepsilon$. Pošto je f ograničena na X tada je i Lebeg integrabilna na X. Pretpostavlja se da je: $\int_X f<\int_a^b f$. Pošto f nije Lebeg integrabilna na $[a,b]$, niz $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ divergira, pa se može izabrati indeks (indikator) $M>N$ takav da je:

$$\int_X f + a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_M > \int_a^b f,$$

neka je $Y = X \cup A_{N+1} \cup A_{N+2} \cup \ldots \cup A_M$. Sada je f Lebeg integrabilna na Y i

$$\int_X f < \int_a^b f < \int_Y f.$$

Po prethodnoj lemi postoji merljiv skup $X \subseteq E \subseteq Y$ takav da je: $\int_E f = \int_a^b f$.

Pažljivo čitanje prethodnog dokaza otkriva sledeće: Ako je f Denoj integrabilna na $[a, b]$, tada postoji niz $\{f_n\}$ od Lebegove integrabilne funkcije, gde $\{f_n\}$ konvergira ka f na intervalu $[a, b]$ i važi jednakost:

$$\int_a^b f = lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

3.2. Svojstva Denojevog integrala koja ne važe za Lebegov integral

Sledeće dve teoreme predstavljaju svojstva Denojevog integrala koji ga izdvajaju od Lebegovog intgrala, tj. svojstva koja ne važe za Lebegov integral.

Teorema 3.9. [1] Neka se pretpostavi da je $f: [a, b] \to R$ Denoj integrabilna na svaki interval $[c, d] \subseteq (a, b)$. Ako $\int_c^d f$ konvergira do konačne granice kada $c \to a^+$ i $d \to b^-$, tada je f Denoj integrabilna na $[a, b]$ i važi:

$$\int_a^b f = lim_{c\to a^+, d\to b^-} \int_c^d f.$$

Teorema 3.10. [1] Neka je E ograničen zatvoren skup čije su granice a i b i neka je $\{(a_k, b_k)\}$ niz intervala koji konvergira ka E u $[a, b]$. Ako se pretpostavi da je $f: [a, b] \to R$ Denoj integrabilna na E i na svakom intervalu $[a_k, b_k]$ i ako niz $\sum_{k=1}^{\infty} w(\int_{a_k}^{x} f, [a_{k,} b_k])$ konvergira, tada je f Denoj integrabilna na $[a, b]$ i tada je:

$$\int_a^b f = \int_a^b f\chi_E + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} f.$$

Sledeći primer će primeniti dve stvari odjednom i to postojanje funkcije F koja je diferencijabilna (beskonačne vrednosti su dozvoljenje) u bilo kojoj tački iz $[a,b]$ i to tako da je $F^{'}$ Lebeg integrabilna na $[a,b]$ (samim tim i Denoj integrabilna), ali F nije neodređen integral od $F^{'}$ s jedne strane i postojanje funkcija F i G takvih da je $F^{'} = G^{'}$ (beskonačne vrednosti su dozvoljenje) u bilo kojoj tački iz $[a,b]$, ali funkcija $F - G$ nije konstanta na $[a,b]$ s druge strane.

Primer 3.3. [1] Neka je E neprazan savršen skup merljive nule sa granicom a i b i neka je:

$$[a,b] - E = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n).$$

Neka je za svako n

$$c_n = \frac{1}{b-a}\sum_{k=n}^{\infty}(b_k - a_k), \qquad d_n = \sqrt{c_n} - \sqrt{c_{n+1}}.$$

Tada je $lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{b_n - a_n} = \infty$ i $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = 1$. Definiše se funkcija $g\colon [a,b] \to R$ pomoću

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{d_n}{\sqrt{x-a_n}\sqrt{b_n - x}}, & ako\ je\ \ a_n < x < b_n, \\ \infty, & ako\ x \in E. \end{cases}$$

Pošto je $\int_{a_n}^{b_n} g = \pi d_n$ za svako n,

$$\int_a^b g = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{b_n} g = \sum_{n=1}^{\infty} \pi d_n = \pi.$$

Funkcija g je Lebeg integrabilna na $[a,b]$. Neka je $G(x) = \int_a^x g$ za svako $x \in [a,b]$. Sada je $G^{'}(x) = g(x)$ za svako $x \notin E$ jer je g neprekidna u svakoj tački na (a_n, b_n). Isti rezultat važi i kada $x \in E$. Zaključak je da je funkcija G diferencijabilna u svakoj tački (beskonačne vrednosti su dozvoljene) na $[a,b]$ i $G^{'} = g$ na $[a,b]$.

Neka je $H\colon [a,b] \to R$ neprekidna nesmanjujuća funkcija, takva da je H konstanta na svakom intervalu (a_n, b_n). Neka je $F = G + H$. Dalje je $H^{'}(x) = 0$ za $x \notin E$ jer H nema nenegativne različite količnike, funkcija F je diferencijabilna (beskonačne vrednosti su dozvoljene) u svakoj tački na $[a,b]$ i $F^{'} = g$ na $[a,b]$. F nije AC na $[a,b]$ (jer nije H) pa nije neodređen integral od $F^{'}$.

Definicija Denojevog integrala koja je ovde data, ne govori kako da se nađe vrednost $F(b) - F(a)$, zato se definicija Denojevog integrala odnosi na oblik opisne definicije Denojevog integrala. Ona govori da F mora da bude ACG_*, tj. opisuje karakteristike od F bez obezbeđivanja pravog metoda za pronalazak rešenja $F(b) - F(a)$. Originalna definicija Denoja je konstruktivna definicija kroz proces od Lebegovog integrala i graničnih operacija. Da bi se ilustrovao ovaj proces računanja: $F(b) - F(a)$ od f, sagledaće se prvo prostiji slučajevi. Neka se pretpostavi da je f Lebeg integrabilna na $[a, c]$ za svako $c \in (a, b)$. Tada se može izračunati $F(c) - F(a)$, koristeći definiciju Lebegovog integrala i iz toga sledi da je:

$$F(b) - F(a) = lim_{c \to b^-} F(c) - F(a).$$

F je neprekidna. Iz ovog sledi da se $F(b) - F(a)$ može izračunati iz f u ovom specijalnom slučaju. Pojavom Lebegovog integrala govorilo se da je Lebegova funkcija sumirajuća, pa se tačka b u ovom slučaju odnosi kao tačka nesumiranja.

Definicija 3.3. [1] Neka je $f: [a, b] \to R$ merljiva funkcija i $E \subseteq [a, b]$ zatvoren skup.

a) Tačka $x \in [a, b]$ se naziva tačka nesumirajuće sposobnosti od f ako f nije Lebeg integrabilna na $[a, b] \cap I$, gde je I interval koji u sebi sadrži tačku x kao unutrašnju tačku. Skup od ovakvih tačaka je zatvoren.

b) Tačka $x \in E$ se naziva tačka nesumirajuće sposobnosti od f u odnosu na E, ako f nije Lebeg integrabilna na $E \cap I$, gde je I interval koji u sebi sadrži tačku x kao unutrašnju tačku.

Ako funkcija f ima samo jednu tačku nesumirajuće sposobnosti ili konačan broj tačaka tada se može izračunati $F(b) - F(a)$. Ako je skup brojčano beskonačan (i zatvoren) i tada je moguće izračunati $F(b) - F(a)$. Neka se sa D označi skup svih tačaka nesumirajućih sposobnosti od f i neka je $(a, b) - D = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$. Tada svaki $F(b_n) - F(a_n)$ može da se ponađe kao konačan slučaj. [1]

Teorema 3.11. [1] Neka je $f: [a, b] \to R$ izvod neprekidne funkcije F na $[a, b]$, neka je E zatvoren skup unutar $[a, b]$ i neka je $(a, b) - E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$. Ako je f Lebeg integrabilna na E i ako niz $\sum_{n=1}^{\infty} |F(b_n) - F(a_n)|$ konvergira, tada je:

$$F(b) - F(a) = \int_E f + \sum_{n=1}^{\infty} \big(F(b_n) - F(a_n)\big).$$

Ova teorema omogućava da se izračuna $F(b) - F(a)$ u mnogim slučajevima, uključujući najčešće primere izvoda koji nisu Lebeg integrabilni.

Tvrđenje 3.2. [1] Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ neapsolutno konvergentni niz realnih brojeva i neka je: $I_n = (2^{-n}, 2^{-n+1})$ za svako n. Funkcija $f: [0,1] \to R$ definisana sa $f(x) = 2^n c_n$, za $x \in I_n$ i $f(x) = 0$ za $x \notin I_n$. Funkcija f je Denoj integrabilna, ali ne i Lebeg integrabilna na $[0,1]$.

Dokaz. Funkcija f nije Lebeg integrabilna na $[0,1]$ jer:

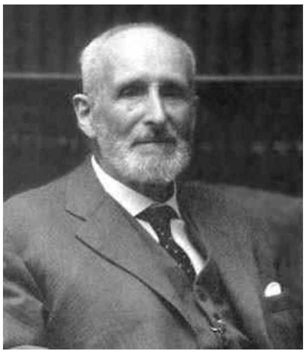
$$\int_0^1 |f| = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{I_n} |f| = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = +\infty.$$

Za svako $0 < a < 1$, funkcija f je ograničena na $[a, 1]$ i Lebeg integrabilna na $[a, 1]$. Neka je $F(x) = \int_x^1 f$ za svako $x \in (0, 1]$. Po teoremi 3.9. dovoljno je dokazati da $\lim_{x \to 0^+} F(x)$ postoji. Funkcija F je linearna na svakom I_n. Sledi da je $F(x)$ između $F(2^{-n})$ i $F(2^{-n+1})$ za svako $x \in I_n$. Sada je:

$F(2^{-n}) = \sum_{k=1}^{n} c_k$ i $\lim_{n \to \infty} F(2^{-n}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k$.

Dakle $\lim_{x \to 0^+} F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ i dokaz je završen.

4. Peronov integral



Oskar Peron[22] (1880 - 1975) je bio nemački matematičar. Bio je profesor na Univerzitetu u Hajdelbergu od 1914. do 1922. i na Univerzitetu u Minhenu od 1922. do 1951. godine. Dao je brojne doprinose u razvoju diferencijalnih jednačina i parcijalnih diferencijalnih jednačina. Peronov rad u analizi svakako je upamćen kroz Peronov integral.

Oskar Perron[21]

Godine 1914. Peron razvija još jednu ekstenziju Lebegovog integrala. Peronov integral ima svojstvo da svaki izvod bude integrabilan. Peronov rad je nezavisan od Denojevog rada i prema tome, ima drugačiji pristup. U ovom poglavlju uvodi se pojam glavnih i pomoćnih funkcija, a ove funkcije se određuju uz korišćenje gornjh i donjih izvoda koje se navode u sledećoj definiciji. [1]

[21] Slika preuzeta sa internet stranice http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Perron.html

[22] Oskar Perron

Definicija 4.1. [7] Neka je data funkcija $F: [a, b] \to R$. Gornji desni i donji desni izvodi od F za $x \in [a, b)$ definisani su na sledeći način:

$$D^+F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} sup \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : x < y < x + \delta \right\};$$

$$D_+F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} inf \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : x < y < x + \delta \right\}.$$

Gornji levi i donji levi izvodi od F za $x \in (a, b]$ definisani su na sledeći način:

$$D^-F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} sup \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : x - \delta < y < x \right\};$$

$$D\_F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} inf \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : x - \delta < y < x \right\}.$$

Naravno, izvodi funkcija mogu biti beskonačani. Funkcija F je diferencijabilna na $x \in (a, b)$, ako su sva četiri izvoda ograničena i jednaka. Gornji i donji izvodi funkcije F na $x \in [a, b]$ su:

$$\overline{D}F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} sup \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : 0 < |y - x| < \delta \right\} = \max\{D^+F(x), D^-F(x)\};$$

$$\underline{D}F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} inf \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : 0 < |y - x| < \delta \right\} = min\{D_+F(x), D\_F(x)\}.$$

Teorema 4.1. [1] Neka je $F: [a, b] \to R$ i $E \subseteq [a, b]$. Ako je $\overline{D}F < +\infty$ ili $\underline{D}F > -\infty$ skoro svuda na E, tada je F BVG_* na E.

U sledećem primeru, vidi se kako se nalazi gornji izvod uz pomoć gornjeg desnog i gornjeg levog izvoda.

Primer 4.1. [7] Data je funkcija:

$$F(x) = \begin{cases} x sin\left(\frac{1}{x}\right), & ako\ je\ x \neq 0, \\ 0, & inače\ (x = 0). \end{cases}$$

Iz ove funkcije mogu da se izračunaju gornji desni izvod i gornji levi izvod, na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
D^{+}F(0) &= \lim_{\delta\to 0^{+}} sup\left\{\frac{F(y)-0}{y-0}: 0<y<0+\delta\right\}\\
&= \lim_{\delta\to 0^{+}} sup\left\{\frac{ysin\left(\frac{1}{y}\right)-0}{y-0}: 0<y<\delta\right\}\\
&= \lim_{\delta\to 0^{+}} sup\left\{sin\left(\frac{1}{y}\right): 0<y<\delta\right\}=1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D^{-}F(0) &= \lim_{\delta\to 0^{+}} sup\left\{\frac{F(y)-0}{y-0}: 0-\delta<y<0\right\}\\
&= \lim_{\delta\to 0^{+}} sup\left\{\frac{ysin\left(\frac{1}{y}\right)-0}{y-0}: -\delta<y<0\right\}\\
&= \lim_{\delta\to 0^{+}} sup\left\{sin\left(\frac{1}{y}\right): -\delta<y<0\right\}=-1.
\end{aligned}
$$

Gornji izvod je:

$$\overline{D}F(0)=\max\{D^{+}F(0), D^{-}F(0)\}=\max\{1,-1\}=1.$$

Peronov integral je određen u terminima glavnih i pomoćnih funkcija, koje se navode u narednoj definiciji.

Definicija 4.2. [1] Neka je $f:[a,b]\to R_e,\ R_e=[-\infty,+\infty]$.

a) Funkcija $U:[a,b]\to R$ je glavna funkcija od f na $[a,b]$, ako je $\underline{D}U(x)>-\infty$ i $\underline{D}U(x)\geq f(x),\ \forall x\in[a,b]$.

b) Funkcija $V:[a,b]\to R$ je pomoćna funkcija od f na $[a,b]$, ako je $\overline{D}V(x)<+\infty$ i $\overline{D}V(x)\leq f(x),\ \forall x\in[a,b]$. Funkcije U i V su BVG_{*} na $[a,b]$, funkcije U i V su merljive i diferencijabilne skoro svuda na $[a,b]$.

Koristi se oznaka: U_a^b umesto $U(b)-U(a)$.

Teorema 4.2. [8] Merljiva funkcija $f:[a,b]\to R_e$ je Lebeg integrabilna na $[a,b]$, ako i samo ako za svako $\epsilon>0$ postoji apsolutno neprekidna glavna i pomoćna funkcija U i V od f na $[a,b]$ i pri tome je: $U_a^b-V_a^b<\epsilon$.

Gornji i donji izvodi imaju važnu ulogu u razvoju Peronovog integrala, pa su neki od njegovih osobina zabeleženi u narednoj teoremi.

Teorema 4.3. [1] Neka su U i V funkcije definisane na $[a, b]$ i neka $c \in [a, b]$. Tada je:

a) $\underline{D}U(c) \leq \overline{D}U(c)$;

b) $\underline{D}(-U)(c) = -\overline{D}U(c)$;

c) $\overline{D}(U + V)(c) \leq \overline{D}U(c) + \overline{D}V(c)$;

d) $\underline{D}(U + V)(c) \leq \underline{D}U(c) + \underline{D}V(c)$;

e) Ako je $\underline{D}U(c) > -\infty$ i $\overline{D}V(c) < +\infty$ tada je:

$\underline{D}(U - V)(c) \geq \underline{D}U(c) - \overline{D}V(c)$.

Teorema 4.4. [1] Neka je $F: [a, b] \to R$. Ako je $\underline{D}F \geq 0$ na $[a, b]$, tada je F neopadajuća na $[a, b]$.

Neka je U glavna i V pomoćna funkcija od f na $[a, b]$. Po teoremi 4.3.e) i 4.4. funkcija $U - V$ je nesmanjujuća na $[a, b]$, pa je: $V_a^b \leq U_a^b$ i važi:

$$0 \leq U_c^d - V_c^d \leq U_a^b - V_a^b,$$

$[c, d]$ je podinterval od $[a, b]$.

Važi i:

$$-\infty < sup\{V_a^b\} \leq inf\{U_a^b\} < \infty,$$

gde supremum (najmanje gornje ograničenje nekog skupa) preuzima sve manje funkcije od f, a infimum (najmanje donje ograničenje nekog skupa) preuzima sve veće funkcije od f ([1]).

Definicija 4.3. [1] Funkcija $f: [a, b] \to R_e$ je Peron integralna na $[a, b]$, ako f ima najmanje jednu glavnu i jednu pomoćnu funkciju na $[a, b]$ i ako su:

$inf\{U_a^b : U\ je\ glavna\ funkcija\ od\ f\ na\ [a, b]\}$ i

$sup\{V_a^b : V\ je\ pomoćna\ funkcija\ od\ f\ na\ [a, b]\}$ jednaki.

Kao i obično, prefiks (P) se koristiti ukoliko je potrebno da se ovaj integral razlikuje od drugih, tj. da se istakne. Funkcija f je Peron integralna na merljivom skupu $E \subseteq [a, b]$, ako je $f\chi_E$ Peron integrabilna na $[a, b]$.

Teorema 4.5. [1] Funkcija $f: [a, b] \to R_e$ je Peron integrabilna na $[a, b]$ ako i samo ako za svako $\epsilon > 0$ postoji glavna funkcija U i pomoćna funkcija V od f na $[a, b]$ i ako važi: $U_a^b - V_a^b < \epsilon$.

Teorema 4.6. [1] Neka je $F: [a, b] \to R$ neprekidna na $[a, b]$. Ako je F diferencijabilna na $[a, b]$, tada je F' Peron integrabilna na $[a, b]$ i $\int_a^x F' = F(x) - F(a)$ za svako $x \in [a, b]$.

Naredna teorema pokazuje vezu između Peron integrabilne funkcije na određenom intervalu i podintervalu.

Teorema 4.7. [1] Neka je $f: [a, b] \to R_e$ i neka $c \in (a, b)$.

a) Ako je f Peron integrabilna na $[a, b]$, tada je f Peron integrabilna na svaki podinterval od $[a, b]$.

b) Ako je f Peron integrabilna na $[a, c]$ i $[c, b]$, tada je f Peron integrabilna na $[a, b]$ i pritom je: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Dokaz.

a) Neka su U i V glavna i pomoćna funkcija od f na $[a, b]$. Jasno je da su U i V glavna i pomoćna funkcija od f na svakom podintervalu od $[a, b]$, pa se dolazi do zaključka da ako je f Peron integrabilna na $[a, b]$, tada je f Peron integrabilna na svakom podintervalu od $[a, b]$.

b) Neka je $\epsilon > 0$. Neka je:

- ${}_1U$ glavna funkcija i ${}_1V$ pomoćna funkcija od f na $[a, c]$, tako da je:

$$ {}_1U_a^c - {}_1V_a^c < \epsilon. $$

- ${}_2U$ glavna funkcija i ${}_2V$ pomoćna funkcija od f na $[c, b]$, tako da je:

$$ {}_2U(c) = {}_1U(c),\ {}_2V(c) = {}_1V(c) \text{ i } {}_2U_c^b - {}_2V_c^b < \epsilon. $$

Neka je:

$$ U(x) = \begin{cases} {}_1U(x), ako\ je\ a \le x \le c, \\ {}_2U(x), ako\ je\ c < x \le b. \end{cases} \quad \text{i} \quad V(x) = \begin{cases} {}_1V(x), ako\ je\ a \le x \le c, \\ {}_2V(x), ako\ je\ c < x \le b. \end{cases} $$

Sada je U glavna a V pomoćna funkcija od f na $[a, b]$ i važi:

$$ U_a^b - V_a^b = ({}_2U_c^b - {}_2V_c^b) + ({}_1U_a^c - {}_1V_a^c) < 2\epsilon. $$

Funkcija f je Peron integrabilna na $[a, b]$ na osnovu teoreme 3.5. Dalje je:

$$ \int_a^b f < V_a^b + 2\epsilon = {}_1V_a^c + {}_2V_c^b + 2\epsilon \le \int_a^c f + \int_c^b f + 4\epsilon, $$

$$ \int_a^b f > U_a^b - 2\epsilon = {}_1U_a^c + {}_2U_c^b - 2\epsilon \ge \int_a^c f + \int_c^b f - 4\epsilon. $$

Sledi da je: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Teorema 4.8. [1] Neka je $f: [a, b] \to R_e$ Peron integrabilna na $[a, b]$. Ako je $g = f$ skoro svuda na $[a, b]$, tada je g Peron integrabilna na $[a, b]$ i važi: $\int_a^b g = \int_a^b f$.

Dokaz. Neka je $E = \{x \in [a, b]: g(x) \neq f(x)\}$ i neka su m i M funkcije na $[a, b]$, takve da je $m(x) = M(x) = 0$ za $x \notin E$ i $m(x) = -\infty$ i $M(x) = \infty$ za $x \in E$. Neka je $\epsilon > 0$. Funkcija f je Peron integrabilna na $[a, b]$, pa postoji glavna funkcija ${}_1U$ od f na $[a, b]$, tako da je:

$$0 \leq {}_1U_a^b - \int_a^b f < \epsilon.$$

M je Lebeg integrabilna na $[a, b]$ i ima integral 0, pa postoji glavna funkcija ${}_2U$ od M na $[a, b]$, tako da je: $0 \leq {}_2U_a^b < \epsilon$. Funkcija:

$U = {}_1U + {}_2U$ je glavna funkcija od g na $[a, b]$ i $0 \leq U_a^b - \int_a^b f < 2\epsilon$.

Slično ovome, postoji pomoćna funkcija V od g na $[a, b]$, takva da je:

$$-2\epsilon \leq V_a^b - \int_a^b f \leq 0.$$

Zaključuje se da funkcija g jeste Peron integrabilna na $[a, b]$ i da je: $\int_a^b g = \int_a^b f$.

Neka je $f: [a, b] \to R_e$ Peron integrabilna na $[a, b]$ i neka je definisana funkcija:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & ako\ je\ |f(x)| < \infty, \\ 0, & ako\ je\ |f(x)| = \infty. \end{cases}$$

Funkcija g je konačne vrednosti na $[a, b]$ i $g = f$ na $[a, b]$. Po prethodnoj teoremi g je Peron integrabilna na $[a, b]$ i važi jednakost: $\int_a^x g = \int_a^x f$, $x \in [a, b]$. Pa se u mnogim slučajevima može pretpostaviti da je Peron integrabilna funkcija konačne vrednosti. [1]

Peronov integral ima sva uobičajna svojstva integrala, pa se dalje u radu navode linearna svojstva Peronovog integrala, a posle se sagledaju svojstva beskonačnog Peronovog integrala.

Teorema 4.9. [1] Neka se pretpostavi da su f i g Peron integrabilne na $[a, b]$. Tada:

a) je kf Peron integrabilna na $[a, b]$ i $\int_a^b kf = k\int_a^b f$ za svako $k \in R$;

b) $f + g$ je Peron integrabilna na $[a, b]$ i $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$;

c) ako je $f \leq g$ skoro svuda na $[a, b]$, tada je $\int_a^b f \leq \int_a^b g$;

d) ako je $f = g$ skoro svuda na $[a, b]$, tada je $\int_a^b f = \int_a^b g$.

Lema 4.1. [1] Neka je $f: [a, b] \to R$ Peron integrabilna na $[a, b]$ i neka je $F(x) = \int_a^x f$, za svako $x \in [a, b]$. Ako je U glavna i V pomoćna funkcija od f na $[a, b]$, tada su funkcije $U - F$ i $F - V$ neopadajuće na $[a, b]$.

Teorema 4.10. [1] Neka je $f: [a, b] \to R$ Peron integrabilna skoro svuda na $[a, b]$ i neka je: $F(x) = \int_a^x f$, za svako $x \in [a, b]$. Tada je:

a) funkcija F neprekidna na $[a, b]$,

b) funkcija F diferencijabilna svuda na $[a, b]$ i $F' = f$ svuda na $[a, b]$,

c) funkcija f merljiva na $[a, b]$.

Teorema 4.11. [1] Neka je $f: [a, b] \to R$ Peron integrabilna na $[a, b]$.

a) Ako je f ograničena na $[a, b]$, tada je f Lebeg integrabilna na $[a, b]$.

b) Ako je f nenegativna na $[a, b]$, tada je f Lebeg integrabilna na $[a, b]$.

c) Ako je f Peron integrabilna na svaki merljivi podskup od $[a, b]$, tada je f Lebeg integrabilna na $[a, b]$.

4.1. Peronov P_C i P_X integral

U ovom poglavlju navode se promene u Peronovom integralu do kojih dolazi pri modifikovanju glavne i pomoćne funkcije. Nekoliko modifikacija u definiciji glavne i pomoćne funkcije ne menja vrednost integrala, niti integrabilnost funkcija. Međutim, u nekim slučajevima velika je prednost da se koristi neka od ovakvih modifikacija.

Prva promena dešava se kada su glavna i pomoćna funkcija neprekidne, a druga promena povezana je sa izvodima nejednakosti koji su zadovoljeni skoro svuda. Naredna definicija uključuje prvu promenu Peronovog integral, tj. neprekidnost glavne i pomoćne funkcije.

Definicija 4.4. [1] Funkcija $f: [a, b] \to R_e$ je P_C integrabilna na $[a, b]$ ako f ima najmanje jednu neprekidnu glavnu i jednu neprekidnu pomoćnu funkciju na $[a, b]$ i ako su:

$inf\{U_a^b : U\ je\ neprekidna\ glavna\ funkcija\ od\ f\ na\ [a, b]\}$ i

$sup\{V_a^b : V\ je\ neprekidna\ pomoćna\ funkcija\ od\ f\ na\ [a, b]\}$ jednaki.

Simbol P_C, predstavlja Peronovu neprekidnost, tj. predstavlja Peronov integral sa neprekidnom glavnom i pomoćnom funkcijom.

Lema 4.2. [1] Neka je W neprekidna funkcija na $[a, b]$. Tada za svako $\epsilon > 0$ postoji neprekidna funkcija U na $[a, b]$, takva da je $\underline{D}U \geq \underline{D}W$ na $[a, b]$, $\underline{D}U(b) = +\infty$ i $U_a^b < W_a^b + \epsilon$.

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$ i neka je $\eta < \frac{\epsilon}{1+\sqrt[3]{b-a}}$. Pošto je W neprekidna funkcija, tada postoji $c \in (a,b)$ tako da je: $w(W,[c,b]) < \eta$. Funkcija $U:[a,b] \to R$ definiše se na sledeći način:

$$U(x) = \begin{cases} W(x) - w(W,[c,b]) + \eta\sqrt[3]{x-b}, & ako\ je\ a \le x \le c, \\ W(x) - w(W,[x,b]) + \eta\sqrt[3]{x-b}, & ako\ je\ c < x \le b. \end{cases}$$

U je nepekidna na $[a,b]$. Kako su $\eta\sqrt[3]{x-b}$ i $-w(W,[x,b])$ neopadajuće funkcije na $[a,b]$, sledi da je: $\underline{D}U \ge \underline{D}W$ na $[a,b]$. Za svako $x \in (c,b)$ važi:

$$\frac{U(b)-U(x)}{b-x} = \frac{W(b)-W(x)+w(W,[x,b])-\eta\sqrt[3]{x-b}}{b-x} \ge \frac{\eta\sqrt[3]{b-x}}{b-x} = \frac{\eta}{\sqrt[3]{(b-x)^2}}.$$

Ovo pokazuje da je $\underline{D}U(b) = +\infty$ i konačno:

$$U_a^b = W_a^b + w(W,[c,b]) - \eta\sqrt[3]{a-b} < W_a^b + \eta + \eta\sqrt[3]{b-a} = W_a^b + \epsilon.$$

I ovim se završava dokaz.

Dalje se navode dve teoreme za P_C integral koje su analogne teoremama i za Denojev integral.

Teorema 4.12. [1] Neka je $f:[a,b] \to R$ P_C integrabilna na svaki podinterval $[c,d] \subseteq (a,b)$. Ako $\int_c^d f$ konvergira do konačne granice kada $c \to a^+$ i $d \to b^-$, tada je f P_C integrabilna na $[a,b]$ i

$$\int_a^b f = lim_{c\to a^+, d\to b^-} \int_c^d f.$$

Teorema 4.13. [1] Neka je E ograničen, zatvoren skup sa ograničenjima a i b i neka je $\{(a_k,b_k)\}$ niz intervala koji konvergira ka E u $[a,b]$. Neka se pretpostavi da je $f:[a,b] \to R$ P_C integrabilna na E i na svaki interval $[a_k,b_k]$. Ako red $\sum_{k=1}^{\infty} w(\int_{a_k}^{x} f, [a_k,b_k])$ konvergira, tada je f P_C integrabilna na $[a,b]$ i tada je:

$$\int_a^b f = \int_a^b f\chi_E + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{a_k}^{b_k} f.$$

Dalje se posmatra druga promena u definiciji glavne i pomoćne funkcije. Promena uključuje nejednakosti koje važe skoro svuda.

Definicija 4.5. [1] Neka je $f: [a,b] \rightarrow R_e$.

a) Neprekidna funkcija $U: [a,b] \rightarrow R$ je proširena glavna funkcija od f na $[a,b]$, ako je $\underline{D}U(x) > -\infty$ približno svuda na $[a,b]$ i $\underline{D}U(x) \geq f(x)$ skoro svuda na $[a,b]$.

b) Neprekidna funkcija $V: [a,b] \rightarrow R$ je proširena pomoćna funkcija od f na $[a,b]$, ako je $\overline{D}V(x) < +\infty$ približno svuda na $[a,b]$ i $\overline{D}V(x) \leq f(x)$ skoro svuda na $[a,b]$.

Koristeći proširenu glavnu i pomoćnu funkciju, definiše se integral koji se zove P_X integral (kao Peronov integral).

Svaka P_X integrabilna funkcija je P_C integrabilna, važi i obrnuto. Da bi se ovo dokazalo moraju se navesti sledeće leme koje su potrebne za dokaz ove jednakosti.

Lema 4.3. [1] Neka je $W: [a,b] \rightarrow R$ neprekidna funkcija na $[a,b]$, neka $c \in [a,b]$ i neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji neopadajuća neprekidna funkcija $\psi: [a,b] \rightarrow R$ i pozitivan broj δ, tako da je $\psi(a) = 0, \psi(b) \leq \epsilon$ i

$$\frac{W(x) - W(c) + \psi(x) - \psi(c)}{x - c} \geq 0,$$

za sve $x \in [a,b]$, koji zadovoljava $0 < |x - c| < \delta$.

Dokaz. Neka: $c \in (a,b)$. Funkcija W je neprekidna na c, pa postoji $\delta > 0$ tako da je $[c-\delta, c+\delta] \subseteq (a,b)$ i $|W(x) - W(c)| < \frac{\epsilon}{4}$, za sve $x \in [c-\delta, c+\delta]$. Definiše se funkcija: $\psi: [a,b] \rightarrow R$ pomoću:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & ako\ a \leq x \leq c - \delta, \\ w(W, [c-\delta, c]) - w(W, [x, c]), & ako\ c - \delta \leq x \leq c, \\ w(W, [c-\delta, c]) + w(W, [c, x]), & ako\ c < x \leq c + \delta, \\ w(W, [c-\delta, c]) + w(W, [c, c+\delta]), & ako\ c + \delta < x \leq b. \end{cases}$$

ψ je neopadajuća neprekidna funkcija i $\psi(a) = 0, \psi(b) \leq \epsilon$. Neka $x \in (c, c+\delta)$, dalje se računanjem dobija:

$$\frac{W(x) - W(c) + \psi(x) - \psi(c)}{x - c} = \frac{W(x) - W(c) + w(W, [c, x])}{x - c} \geq 0\,.$$

Za $x \in (c - \delta, c)$ se dobija isti rezultat.

Lema 4.4. [1] Neka je $W: [a,b] \rightarrow R$ neprekidna funkcija i neka je $\epsilon > 0$. Neka je $\underline{D}W > -\infty$ skoro svuda na $[a,b]$. Tada postoji neprekidna funkcija $Y: [a,b] \rightarrow R$, takva da je $\underline{D}Y \geq \underline{D}W$ i $\underline{D}Y > -\infty$ na $[a,b]$ i $Y_a^b < W_a^b + \epsilon$.

Dokaz. Neka je $\{c_n\}$ niz tačaka unutar $[a,b]$ za koje je $\underline{D}W = -\infty$, neka je $\{\epsilon_n\}$ niz pozitivnih brojeva takvih da je $\sum_{n=1}^{\infty}\epsilon_n < \frac{\epsilon}{2}$ i neka je $\{\alpha_n\}$ niz pozitivnih brojeva takvih da je $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n < \frac{\epsilon}{4\sqrt[3]{b-a}}$. Za svako n koristi se prethodna lema da se izabere ψ_n i δ_n koji odgovaraju c_n i ϵ_n. Definiše se $Y: [a,b] \to R$ pomoću:

$$Y(x) = W(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sqrt[3]{x-c_n}.$$

Funkcija Y je neprekidna funkcija i $\underline{D}Y \geq \underline{D}W$, jer oba reda predstavljaju neopadajuće funkcije. Ako se odredi indeks j, tako da je $0 < |x - c_j| < \delta_j$, (x>c_j) dobija se:

$$\frac{Y(x)-Y(c_j)}{x-c_j} = \frac{W(x)-W(c_j)}{x-c_j} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(x)-\psi_n(c_j)}{x-c_j} + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\frac{\sqrt[3]{x-c_n}-\sqrt[3]{c_j-c_n}}{x-c_j}$$
$$\geq \frac{W(x)-W(c_j)+\psi_j(x)-\psi_j(c_j)}{x-c_j} + \alpha_j\frac{\sqrt[3]{x-c_j}}{x-c_j} \geq \frac{\alpha_j}{\sqrt[3]{(x-c_j)^2}}.$$

Dalje, sledi da je $\underline{D}Y(c_j) = \infty$.

$$Y_a^b = W_a^b + \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(b) + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(\sqrt[3]{b-c_n} - \sqrt[3]{a-c_n})$$
$$\leq W_a^b + \sum_{n=1}^{\infty}\epsilon_n + \sum_{n=1}^{\infty}2\alpha_n\sqrt[3]{b-a} < W_a^b + \epsilon.$$

Lema 4.5. [1] Neka je $f: [a,b] \to R_e$. Ako je W proširena glavna funkcija od f na $[a,b]$ i $\epsilon > 0$, tada postoji neprekidna glavna funkcija U od f na $[a,b]$ i važi:
$U_a^b < W_a^b + \epsilon$.

Teorema 4.14. [1] Funkcija $f: [a,b] \to R_e$ je P_C integrabilna na $[a,b]$ ako i samo ako je P_X integrabilna na $[a,b]$.

Dokaz. Neka je f P_X integrabilna na $[a,b]$. Neka je $\epsilon > 0$ po definiciji postoji proširena glavna funkcija W i proširena pomoćna funkcija X od f na $[a,b]$ i važi nejednakost: $W_a^b - X_a^b < \epsilon$. Po prethodnoj lemi, postoji neprekidna glavna funkcija U od f na $[a,b]$, takva da je $U_a^b < W_a^b + \epsilon$. Primenjujući prethodnu lemu na $-f$ i $-Z$ postoji neprekidna pomoćna funkcija V od f na $[a,b]$ i važi: $V_a^b > X_a^b - \epsilon$. Sada je:

$$U_a^b - V_a^b < (W_a^b + \epsilon) - (X_a^b - \epsilon) = W_a^b - X_a^b + 2\epsilon < 3\epsilon.$$

Po Košijevom[23] kriterijumu funkcija f je P_C integrabilna na $[a,b]$.

[23] A. L. Cauchy (1789 – 1857), francuski matematičar. Da bi nesvojsveni integral $\int_a^b f(x)dx$ konvergirao, neophodno je i dovoljno da za $\forall\varepsilon > 0$ postoji b_0, $a < b_0 < b$, tako da za svaki par b_1, b_2, $b_0 < b_1 < b_2 < b$ važi: $\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$.

Tvrđenje 4.1. [1] Ako je $f:[a,b] \rightarrow R$ Peron integrabilna na $[a,b]$, tada je funkcija $F(x) = \int_a^x f$, $x \epsilon [a,b]$ BVG_* na $[a,b]$.

Dokaz. Neka je U glavna funkcija od f na $[a,b]$. Funkcija U je BVG_* na $[a,b]$, po lemi 4.1. funkcija $U - F$ je neopadajuća na $[a,b]$. Otuda je funkcija $F = U - (U - F)$ BVG_* na $[a,b]$.

Tvrđenje 4.2. [1] Ako je $f:[a,b] \rightarrow R$ Peron integrabilna na $[a,b]$, tada je $[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, E_n je zatvoren skup i f je Lebeg integrabilna na svako E_n.

Dokaz. Neka je $F(x) = \int_a^x f$ za svako $x \epsilon [a,b]$. F je BVG_* na $[a,b]$, pa se može zapisati $[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, F je BV_* na svako E_n i svaki E_n je zatvoren. Kao u dokazu teoreme 3.7. funkcija f je Lebeg integrabilna na svako E_n.

5. Henstokov integral

Ralf Henstok[24] (1923-2007) je bio engleski matematičar i autor. Većina Henstokovog rada bavi se integracijom. Henstok je objavio četiri knjige o analizi (Teorija integracije 1963; Linearna analiza 1967; Predavanja o teoriji integracije 1988, Opšta teorija integracije 1991). Njegovi postupci doveli su do integrala koji su po izgradnji i jednostavnosti vrlo slični Rimanovom integralu. U prethodna dva poglavlja definisani su Denojev i Peronov integral koji su generalizacije Lebegovog integral. Dok se u ovom poglavlju daje prikaz generalizacije Rimanovog integrala.

Ovo poglavlje počinje definisanjem zavisnog intervala od pozitivne funkcije na određenom intervalu, koja je potrebna za definisanje Henstokovog integrala.

Definicija 5.1. [1] Neka je $\delta(\cdot)$ pozitivna funkcija određena na intervalu $[a,b]$. Interval $(x,[c,d])$ se sadrži od intervala $[c,d] \subseteq [a,b]$ i tačke $x \in [c,d]$. Ovaj interval je zavisan od δ ako je $[c,d] \subseteq (x - \delta(x), x + \delta(x))$.

[24] Ralph Henstock

Primer 5.1. Neka je $f(x) = -x^2 + 4$ pozitivna funkcija na intervalu $[-2,2]$. Interval $(x, [-1,1])$ se sadrži od intervala $[-1,1] \subseteq [-2,2]$ i tačke $x \in [-1,1]$. Ovaj interval je zavisan od f jer je $[-1,1] \subseteq (x - f(x), x + f(x))$. Proverava se vrednost za sledeće promenjive: $x = -1, x = -0.5,\ x = 0.5\ i\ \ x = 1$.

- $za\ x = -1, f(-1) = -(-1)^2 + 4 = -1 + 4 = 3,$

$$\big(-1 - f(-1), -1 + f(-1)\big) = (-1 - 3, -1 + 3) = (-4,4), \qquad [-1,1] \subseteq (-4,4).$$

- $za\ x = -0.5, f(-0.5) = -(-0.5)^2 + 4 = -0.25 + 4 = 3.75,$

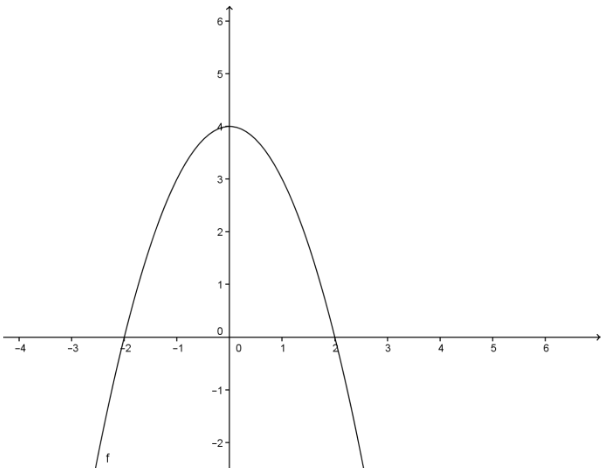
$$\big(-0.5 - f(-0.5), -0.5 + f(-0.5)\big) = (-0.5 - 3.75, -0.5 + 3.75) = (-4.25,3.25),$$
$$[-1,1] \subseteq (-4.25,3.25).$$

- $za\ x = 0.5, f(0.5) = -0.5^2 + 4 = -0.25 + 4 = 3.75,$

$$\big(0.5 - f(0.5), 0.5 + f(0.5)\big) = (0.5 - 3.75, 0.5 + 3.75) = (-3.25,4.25),$$
$$[-1,1] \subseteq (-3.25,4.25).$$

- $za\ x = 1, f(1) = -1^2 + 4 = -1 + 4 = 3,$

$$\big(1 - f(1), 1 + f(1)\big) = (1 - 3, 1 + 3) = (-2,4), \qquad [-1,1] \subseteq (-2,4).$$



Slika 5.1. Grafik funkcije $f(x) = -x^2 + 4$

Slovo P se koristi da se odredi konačna kolekcija ne-preklapanja označenih intervala. Neka je $P = \{(x_i, [c_i, d_i]) : 1 \leq i \leq n\}$ kolekcija intervala unutar $[a, b]$. Uvode se termini:

a) Tačke $\{x_i\}$ su oznake od P i intervala $\{[c_i, d_i]\}$ (intervali od P).

b) Ako je $\{(x_i, [c_i, d_i]) : 1 \leq i \leq n\}$ zavisan od δ za svako i, tada je P zavisan od δ.

c) Neka je $E \subseteq [a, b]$. Ako je P zavisan od δ i svako $x_i \in E$, tada je $P\ E$ zavisan od δ.

d) Ako je P zavisan od δ i $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{n}[c_i, d_i]$, tada je sa P označena podela od $[a,b]$ koja je zavisna od δ.

Označene podele uvek sadrže konačan broj intervala, a oznaka celog intervala su tačke u intervalu ([1]).

Sledeća lema garantuje postojanje označenih podela od $[a,b]$, koje su zavisne od δ za svaku pozitivnu funkciju δ na $[a,b]$. Dokaz može da se vidi u [1].

Lema 5.1. [1] Ako je δ pozitivna funkcija određena na $[a,b]$, tada postoji podela od $[a,b]$ koja je zavisna od δ.

Neka je $P = \{(x_i, [c_i, d_i]) : 1 \leq i \leq n\}$ konačna kolekcija nepreklapanja označenih intervala unutar $[a,b]$. Neka je $f: [a,b] \to R$ i neka je F funkcija definisana na osnovu podintervala od $[a,b]$. Uvode se oznake:

$$f(P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(d_i - c_i)\,, \qquad F(P) = \sum_{i=1}^{n} F([c_i, d_i]) \quad i \quad \mu(P) = \sum_{i=1}^{n} (d_i - c_i)$$

$f(P)$ - oznaka za Rimmanovu sumu, $F(P)$ - funkcija intervala, $\mu(P)$-mera intervala

Ako je $F: [a,b] \to R$, tada se prema F odnosi kao prema funkciji intervala:

$$F([c,d]) = F(d) - F(c).$$

Za takvu funkciju je: $F(P) = F(b) - F(a)$, ako je sa P označena podela od $[a,b]$. Beskonačni interval se uvek tretira kao funkcija intervala koja je označena na određene podele. Uopšteno kada se oznaka f ili g primeni na P tada je ona namenjena za Rimanovu sumu, a kada se F ili G primeni na P, tada su F i G tretirane kao funkcije intervala ([1]).

Neka je δ pozitivna funkcija na $[a,b]$, interval $(x, [c,d])$ je zavisan od δ ako i samo ako je: $\{(x, [c,x]), (x, [x,d])\}$ zavisan od δ i ako je:

$$f(x)(d-c) = f(x)(x-c) + f(x)(d-x),$$

$$F(d) - F(c) = F(x) - F(c) + F(d) - F(x).$$

Dakle, ako je P zavisan od δ vrednosti $f(P)$ i $F(P)$ ostaju ne promenjene ([1]).

Iz gore navedene diskusije zaključuje se da je svaka Riman integrabilna funkcija Henstok integrabilna. Dalje se navodi definicija Henstokovog integrala.

Definicija 5.2. [1] Funkcija $f: [a,b] \to R$ je Henstok inegrabilna na $[a,b]$ ako postoji realan broj L sa sledećim svojstvima: za svako $\epsilon > 0$ postoji pozitivna funkcija δ na $[a,b]$ takva da je $|f(P) - L| < \epsilon$, sa P je označena podela od $[a,b]$ koja je zavisna od δ. Funkcija f je Henstok inegrailna na merljivom skupu $E \subseteq [a,b]$, ako je $f\chi_E$ Henstok integrabilna na $[a,b]$.

Teorema 5.1. [1] Neka je $f:[a,b] \to R$. Ako je $f = 0$ skoro svuda na $[a,b]$, tada je f Henstok integrabilna na $[a,b]$ i $\int_a^b f = 0$.

Dokaz. Neka je $\{a_n: n \in Z^+\} = \{x \in [a,b]: f(x) \neq 0\}$ (Z^+- celi brojevi) i neka je $\epsilon > 0$. Definiše se pozitivna funkcija δ na $[a,b]$ pomoću:

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & ako\ x \in [a,b] - \{a_n: n \in Z^+\}, \\ \dfrac{\epsilon 2^{-n-1}}{|f(a_n)|}, & ako\ je\ x = a_n. \end{cases}$$

Neka je sa $P = \{(x_i, [c_i, d_i]): 1 \leq i \leq q\}$ označena podela $[a,b]$ koja je zavisna od δ i neka se svaka oznaka dešava samo jednom. Neka je π skup svih index-a i takvih da je $x_i \in \{a_n: n \in Z^+\}$ i za svaki $i \in \pi$ neka se izabere n_i, tako da je $x_i = a_{n_i}$. Tada je:

$$|f(P)| = \left|\sum_{i\in\pi} f(x_i)(d_i - c_i)\right| < \sum_{i\in\pi} 2\left|f\left(a_{n_i}\right)\right|\delta(a_{n_i}) = \sum_{i\in\pi} \epsilon 2^{-n_i} < \epsilon.$$

Otuda je funkcija f Henstok integrabilna na $[a,b]$ i $\int_a^b f = 0$. Teorema pokazuje da je ova funkcija Henstok integrabilna i da integral ima vrednost nula.

Teorema 5.2. [1] Neka je funkcija $F:[a,b] \to R$ neprekidna na $[a,b]$ i neka je F diferencijabilna skoro svuda na $[a,b]$. Tada je F' Henstok integrabilna na $[a,b]$ i važi: $\int_a^x F' = F(x) - F(a)$, za svako $x\epsilon[a,b]$.

Dokaz. Neka je $C = \{c_n: n \in Z^+\}$ skup svih tačaka $x \in [a,b]$ za koje $F'(x)$ ne postoji. (F' je definisana na $[a,b]$ i $F'(x) = 0$ za $x \in C$). Neka je $\epsilon > 0$, definiše se funkcija δ na $[a,b]$:

- ako $x \in [a,b] - C$, koristi se postojanje $F'(x)$ da se izabere $\delta(x) > 0$, tako da je: $u \in [a,b] \cap \left(x - \delta(x), x + \delta(x)\right) => \left|F(u) - F(x) - F'(x)(u - x)\right| \leq \epsilon|u - x|$,

- ako $x = c_n$, koristi se neprekidnost od F na x da se izabere $\delta(x) > 0$, tako da je $u, v \in [a,b] \cap \left(x - \delta(x), x + \delta(x)\right) => |F(v) - F(u)| < \epsilon 2^{-n}$.

Sa P je označena podela od $[a,b]$ koja je zavisana od δ i svaka oznaka se dešava samo jednom. Neka je P_C podskup od P koji ima oznake od C i neka je $P_1 = P - P_C$.

Ako $(x,[u,v]) \in P_1$ tada je:

$$\begin{aligned} &\left|F(v) - F(u) - F'(x)(v - u)\right| \\ &\qquad \leq \left|F(v) - F(x) - F'(x)(v - x)\right| + \left|F(x) - F(u) - F'(x)(x - u)\right| \\ &\qquad \leq \epsilon(v - x) + \epsilon(x - u) = \epsilon(v - u). \end{aligned}$$

Ako je $(c_n, [u,v]) \in P_C$ tada $|F(v) - F(u)| < \epsilon 2^{-n}$. Neka je π skup celih brojeva n, takav da je c_n oznaka od P, a F je interval funkcije. Pošto je:
$F(b) - F(a) = F(P) = F(P_C) + F(P_1)$,

$$\left|F'(P) - (F(b) - F(a))\right| = \left|F'(P_C) + F'(P_1) - F(P_C) - F(P_1)\right|$$
$$\leq \left|F(P_1) - F'(P_1)\right| + |F(P_C)| \leq \epsilon\mu(P_1) + \sum_{n\in\pi} \epsilon 2^{-n} < (b-a+1)\epsilon.$$

Otuda funkcija F' je Henstok integrabilna na $[a,b]$ i $\int_a^b F' = F(b) - F(a)$.

Poslednje dve teoreme pokazuju da ova blaga modifikacija Rimanovog integrala ima daleko dosežne posledice, a dokazi otkrivaju kako upotrebiti promenjivu δ kao prednost.

5.1. Osobine Henstokovog integrala

U ovom poglavlju navode se osnovna svojstva Henstokovog integrala. Kao i kod Rimanovog integrala postoji Košijev kriterijum da bi funkcija bila Henstok integrabilna. Dalje se pokazuje odnos između Henstokove integracije i podintervala i linearna svojstva Henstokovog integrala.

Teorema 5.3. [1] Funkcija $f: [a,b] \to R$ je Henstok integrabilna na $[a,b]$ ako i samo ako za svako $\epsilon > 0$ postoji pozitivna funkcija δ na $[a,b]$, takva da je: $|f(P_1) - f(P_2)| \leq \epsilon$, gde su sa P_1 i P_2 označene podele od $[a,b]$ koje su zavisne od δ.

Teorema 5.4. [1] Neka je $f: [a,b] \to R$ i neka $c \in (a,b)$.

a) Ako je f Henstok integrabilna na $[a,b]$, tada je f Henstok integrabilna na svaki podinterval od $[a,b]$.

b) Ako je f Henstok integrabilna na intervalima $[a,c]$ i $[c,b]$, tada je f Henstok integrabilna na $[a,b]$ i $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Dokaz.

a) Neka je $[c,d] \subseteq [a,b]$ i neka je $\epsilon > 0$. Bira se pozitivna funkcija δ na $[a,b]$, takva da je: $|f(P_1) - f(P_2)| < \epsilon$, gde su sa P_1 i P_2 označene podele od $[a,b]$ koje su zavisne od δ. Fiksira se P_a podela od $[a,c]$ i P_b podela od $[d,b]$ koje su zavisne od δ. Neka su sa P_1' i P_2' označene podele od $[c,d]$ koje su zavisne od δ, defineše se: $P_1 = P_a \cup P_1' \cup P_b$ i $P_2 = P_a \cup P_2' \cup P_b$, gde je sa P_1 i P_2 označene podele od $[a,b]$ koje su zavisne od δ i važi:

$$|f(P_1') - f(P_2')| = |f(P_1) - f(P_2)| < \epsilon.$$

Funkcija f je Henstok integrabilna na $[c,d]$ po Košijevom kriterijumu.

b) Neka $\epsilon > 0$. Postoji pozitivna funkcija δ_1 na $[a,c]$ takva da je:

$\left|f(P) - \int_a^c f\right| < \frac{\epsilon}{2}$, sa P je označena podela od $[a,c]$ koja je zavisna od δ_1.

Postoji pozitivna funkcija δ_2 na $[c,b]$, takva da je:

$\left|f(P) - \int_c^b f\right| < \frac{\epsilon}{2}$, sa P je označena podela od $[c,b]$ koja je zavisna od δ_2.

Definiše se δ na $[a,b]$ na sledeći način:

$$\delta(x) = \begin{cases} min\{\delta_1(x), c - x\}, & za\ a \leq x < c, \\ min\{\delta_1(c), \delta_2(c)\}, & za\ x = c, \\ min\{\delta_2(x), x - c\}, & za\ c < x \leq b. \end{cases}$$

sa P je označena podela od $[a,b]$ koja je zavisna od δ. Neka je P forme $P_a \cup (c,[u,v]) \cup P_b$, oznake od P_a su manje od c, a oznake od P_b su veće od c. Neka je: $P_1 = P_a \cup (c,[u,c])$ i $P_2 = P_b \cup (c,[c,v])$, sa P_1 je označena podela od $[a,c]$ koja je zavisna od δ_1, a sa P_2 je označena podela od $[c,b]$ koja je zavisna od δ_2. Kako je: $f(P) = f(P_1) + f(P_2)$, sledi da je:

$$\left|f(P) - \int_a^c f - \int_c^b f\right| \leq \left|f(P_1) - \int_a^c f\right| + \left|f(P_2) - \int_c^b f\right| < \epsilon.$$

Funkcija f je Henstok integrabilna na $[a,b]$ i $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Sledeća teorema se ogleda u linearnom svojstvu Henstokovog integrala.

Teorema 5.5. [1] Neka su f i g Henstok integrabilne na $[a,b]$. Tada:

a) je kf Henstok integrabilna na $[a,b]$ i $\int_a^b kf = k\int_a^b f$ za svako $k \in R$;

b) $f + g$ je Henstok integrabilna na $[a,b]$ i $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$;

c) ako je $f \leq g$ skoro svuda na $[a,b]$, tada je $\int_a^b f \leq \int_a^b g$;

d) ako je $f = g$ skoro svuda na $[a,b]$, tada je $\int_a^b f = \int_a^b g$.

Teorema 5.6. [1] Neka je $f: [a,b] \to R$ Henstok integrabilna na $[a,b]$. Ako je $f = g$ skoro svuda na $[a,b]$, tada je g Henstok integrabilna na $[a,b]$ i važi jednakost: $\int_a^b g = \int_a^b f$.

Dokaz. Na osnovu teoreme 5.1. funkcija $g - f$ je Henstok integrabilna na $[a,b]$ i $\int_a^b (g-f) = 0$. Na osnovu teoreme 5.5. funkcija $g = f + (g - f)$ je Henstok integrabilna na $[a,b]$ i dalje je:

$$\int_a^b g = \int_a^b f + \int_a^b (g-f) = \int_a^b f.$$

Dalje se razmatra svojstvo beskonačnog Henstokovog integrala. Ova diskusija počinje sa jednostavnom, ali moćnom lemom koja se često koristi u teoriji Henstokovog integrala. Svaki glavni (veliki) rezultat koji uključuje Henstokov integral koristi narednu lemu u dokazivanju. Temu je prvi zabeležio Henstok u svom prvobitnom računu ovog integrala, ali se obraća Saksu[25] za ideju koja stoji iza leme. Pa se zbog toga ovaj rezultat naziva Saks-Henstokova lema. Lema tvrdi da su Rimanovi iznosi (sume) ne samo približni integralima preko celog intervala, već i preko unije podintervala ([1]).

Lema 5.2. [1] **(**Saks-Henstokova lema) Neka je $f:[a,b]\to R$ Henstok integrabilna na $[a,b]$ i neka je: $F(x)=\int_a^x f$, za svako $x\in[a,b]$ i $\epsilon>0$. Neka se pretpostavi da je δ pozitivna funkcija na $[a,b]$, takva da je: $|f(P)-F(P)|<\epsilon$, sa P je označena podela $[a,b]$ koja je zavisna od δ. Ako je: $P_0=\{(x_i,[c_i,d_i]) : 1\le i\le n\}$ zavisna od δ, tada je:

$$|f(P_0)-F(P_0)|\le\epsilon \text{ i } \sum_{i=1}^{n}|f(x_i)(d_i-c_i)-(F(d_i)-F(c_i))|\le 2\epsilon.$$

Dokaz. Neka je $\{K_j : 1\le j\le m\}$ kolekcija zatvorenih intervala unutar $[a,b]$. Neka je $\eta>0$, za svako j neka je P_j označena podela od K_j koja je zavisna od δ i zadovoljava: $\left|f(P_j)-F(K_j)\right|<\frac{\eta}{m}$. Neka je $P=\bigcup_{j=0}^{m}P_j$. Sa P je označena podela na $[a,b]$ koja je zavisna od δ i važi:

$$\begin{aligned}|f(P_0)-F(P_0)| &= \left|f(P_0)+\sum_{j=1}^{m}f(P_j)-F(P_0)-\sum_{j=1}^{m}F(K_j)+\sum_{j=1}^{m}(F(K_j)-f(P_j))\right|\\ &\le |f(P)-F(P)|+\sum_{j=1}^{m}\left|f(P_j)-F(K_j)\right|<\epsilon+\eta.\end{aligned}$$

Kako je $\eta>0$ prva nejednakost je proverena.

Neka je P_0^+ podskup od P_0 za koji je:

$$f(x_i)(d_i-c_i)-(F(d_i)-F(c_i))\ge 0,$$

neka je $P_0^-=P_0-P_0^+$. Dalje se koristi prvi deo Saks-Henstokove leme i dobija se:

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)(d_i-c_i)-(F(d_i)-F(c_i))|=|f(P_0^+)-F(P_0^+)|+|f(P_0^-)-F(P_0^-)|\le 2\epsilon.$$

Teorema 5.7. [1] Neka je $f:[a,b]\to R$ Henstok integrabilna na $[a,b]$ i neka je: $F(x)=\int_a^x f$, za svako $x\in[a,b]$. Tada je:

a) funkcija F neprekidna na $[a,b]$,
b) funkcija F diferencijabilna skoro svuda na $[a,b]$ i $F'=f$ skoro svuda na $[a,b]$,
c) funkcija f merljiva na $[a,b]$.

[25] Stanislav Saks (1897-1942) – poljski matematičar

Teorema 5.8. [1] Neka je $f: [a,b] \to R$ Henstok integrabilna na $[a,b]$.

a) Ako je f ograničena na $[a,b]$, tada je f Lebeg integrabilna na $[a,b]$.

b) Ako je f nenegativna na $[a,b]$, tada je f Lebeg integrabilna na $[a,b]$.

c) Ako je f Henstok integrabilna na svaki merljivi podskup od $[a,b]$, tada je f Lebeg integrabilna na $[a,b]$.

Dalje se navodi opisna karakterizacija Henstokovog integrala koja je slična definiciji Denojevog integrala. Drugim rečima, postoji neophodni i dovoljni uslovi za funkciju F da bude beskonačan Henstokov integral. Funkcija F je beskonačan Lebegov integaral na $[a,b]$ ako i samo ako je F AC na $[a,b]$, funkcija F je beskonačan Denojev integaral na $[a,b]$ ako i samo ako je F ACG_* na $[a,b]$. Kao što je za očekivati opisna karakterizacija Henstokovog integrala uključuje uslove o apsolutnoj neprekidnosti.

Definicija 5.3. [1] Neka je $F: [a,b] \to R$, $E \subseteq [a,b]$ i neka je F funkcija intervala. Funkcija F je AC_δ na E ako za svako $\epsilon > 0$ postoji pozitivan broj η i pozitivna funkcija δ na E, takva da je $|F(P)| < \epsilon$ gde je P E-zavisan od δ i $\mu(P) < \eta$. Funkcija F je ACG_δ na E ako se E može zapisati kao unija skupova i na svakom skupu je F AC_δ.

Lema 5.3. [1] Ako je $f: [a,b] \to R$, $E \subseteq [a,b]$ i ako je $\mu(E) = 0$, tada za svako $\epsilon > 0$ postoji pozitivna funkcija δ na E i tada je: $|f(P)| < \epsilon$, P je E-zavisan od δ.

Lema 5.4. [1] Ako je $F: [a,b] \to R$ ACG_δ na $[a,b]$, $E \subseteq [a,b]$ i ako je $\mu(E) = 0$, tada za svako $\epsilon > 0$ postoji pozitivna funkcija δ na E i tada je: $|F(P)| < \epsilon$, P je E-zavisan od δ.

Teorema 5.9. [1] Funkcija $f: [a,b] \to R$ je Henstok integrabilna na $[a,b]$ ako i samo ako postoji ACG_δ funkcija F na $[a,b]$, takva da je $F' = f$ skoro svuda na $[a,b]$.

Dokaz. Neka je f Henstok integrabilna na $[a,b]$ i neka je:

$$F(x) = \int_a^x f \ \ \forall x \in [a,b].$$

Po teoremi 5.7. $F' = f$ skoro svuda na $[a,b]$. Za svaki pozitivan ceo broj n neka je:

$$E_n = \{x \in [a,b]: n-1 \leq |f(x)| < n\}.$$

Neka je $\epsilon > 0$. Kako je f Henstok integrabilna na $[a,b]$ postoji pozitivna funkcija δ na $[a,b]$ i važi: $\left|f(P) - \int_a^b f\right| < \epsilon$, sa P je označena podela od $[a,b]$ koja je zavisna od δ. Neka je $\eta = \frac{\epsilon}{n}$. Neka se pretpostavi da je P E_n zavisna od δ i $\mu(P) < \eta$. Dalje se koristi Saks-Henstokova lema:

$$|F(P)| \leq |F(P) - f(P)| + |f(P)| < \epsilon + n\mu(P) < 2\epsilon.$$

Pa je funkcija F AC_δ na E_n jer je $[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, te sledi da je F ACG_δ na $[a,b]$.

Sada se pretpostavlja da postoji ACG_δ funkcija F na $[a,b]$, takva da je: $F' = f$ skoro svuda na $[a,b]$. Neka je: $E = \{x \in [a,b]: F'(x) \neq f(x)\}$ i neka je $\epsilon > 0$. Za svako $x \in [a,b] - E$ bira se $\delta(x) > 0$ tako da je:

$$|F(y) - F(x) - f(x)(y - x)| < \epsilon|y - x|,$$

kada je $|y - x| < \delta(x)$ i $y \in [a,b]$. Po lemi 4.3 i lemi 4.4. može da se definiše: $\delta(x) > 0$ na E tako da je: $|f(P)| < \epsilon$ i $|F(P)| < \epsilon$, P je E zavisna od δ. Ovo definiše pozitivnu funkciju δ na $[a,b]$. Dalje se pretpostavlja da je P zavisan od δ na $[a,b]$. Neka je P_E podskup od P koji ima oznake unutar E i neka je: $P_d = P - P_E$. Dalje je:

$$|f(P) - F(P)| \leq |f(P_d) - F(P_d)| + |f(P_E)| + |F(P_E)| < \epsilon(b - a) + \epsilon + \epsilon.$$

Zato je f Henstok integrabilna na $[a,b]$ i $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Teorema 5.10. [1] Neka je $f: [a,b] \to R$ Henstok integrabilna na intervalu $[a,b]$, tada postoji niz $\{E_i\}$ od zatvorenih skupova takvih da je $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ i f je Lebeg integrabilna na svaki E_i.

Posledica 5.1. [1] Ako je $f: [a,b] \to R$ Henstok integrabilna na intervalu $[a,b]$, tada svaki savršen skup na $[a,b]$ sadrži deo na kojem je f Lebeg integrabilna. Svaki interval $[a,b]$ sadrži podinterval na kojem je f Lebeg integrabilna.

Teorema 5.11. [1] Neka je $f: [a,b] \to R$ Henstok integrabilna na svaki interval $[c,d] \subseteq (a,b)$. Ako $\int_c^d f$ konvergira ka konačnoj granici kada $c \to a^+$ i $d \to b^+$, tada je f Henstok integrabilna na $[a,b]$ i $\int_a^b f = \lim_{\substack{c \to a^+ \\ d \to b^+}} \int_c^d f$.

Primer 5.2. [1] Neka je $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, za $x \neq 0$ i neka je $f(x) = 0$, za $x = 0$. Može se pokazati da je f Henstok integrabilna, tj. moguće je odrediti funkciju δ.

Ovom prilikom oslanjamo se na pristup iz dokaza teoreme 5.2., kao i na činjenicu da je $2\sqrt{x}$ izvod od $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Neka je $\epsilon > 0$, neka se pretpostavi da je $\epsilon < \frac{3}{4}$, definiše se pozitivna funkcija δ na $[0,1]$ na sledeći način:

$$\delta(x) = \begin{cases} \epsilon x^2, & za\ 0 < x \leq 1, \\ \epsilon^2, & za\ x = 0. \end{cases}$$

Neka je sa P označena podela od $[0,1]$ koja je zavisna od δ. Mora se napomenuti da 0 mora da bude oznaka od $x - \epsilon x^2 > 0$, za svako $x > 0$. Neka $(x, [c,d]) \in P$, za $x > 0$. Kako je $c > x - \epsilon x^2 \geq x - \epsilon x > \frac{x}{4}$,

$$\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{c})^2 > \sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{x}{4}})^2 = 9x\frac{\sqrt{x}}{4} > x\sqrt{x} \geq x^2,$$

sledi da je:

$$\left|\frac{2\sqrt{x}-2\sqrt{c}}{x-c}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right| = \left|\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right| = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{c}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{c})} = \frac{x-c}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{c})^2} < \frac{\epsilon x^2}{x^2} = \epsilon.$$

Na isti način može da se pokaže da je:

$$\left|\frac{2\sqrt{d}-2\sqrt{x}}{d-x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right| < \epsilon.$$

Kombinacijom ove dve nejednakosti dobija se:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{\sqrt{x}}(d-c)-\left(2\sqrt{d}-2\sqrt{c}\right)\right| \\
&\qquad \le \left|\frac{1}{\sqrt{x}}(d-x)-\left(2\sqrt{d}-2\sqrt{x}\right)\right| + \left|\frac{1}{\sqrt{x}}(x-c)-\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{c}\right)\right| \\
&\qquad = \left|\frac{2\sqrt{d}-2\sqrt{x}}{d-x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right|(d-x) + \left|\frac{2\sqrt{x}-2\sqrt{c}}{x-c}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right|(x-c) \\
&\qquad < \epsilon(d-x)+\epsilon(x-c)=\epsilon(d-c).
\end{aligned}$$

Neka je $P = (0,[c_0,d_0]) \cup \{(x_i,[c_i,d_i]) : 1 \le i \le q\}$, dalje se dobija:

$$\begin{aligned}
|f(P)-2| &= \left|\sum_{i=1}^{q} f(x_i)(d_i-c_i) - \sum_{i=0}^{q}(2\sqrt{d_i}-2\sqrt{c_i})\right| \\
&\le 2\sqrt{d_0} + \sum_{i=1}^{q}\left|\frac{1}{\sqrt{x_i}}(d_i-c_i)-(2\sqrt{d_i}-2\sqrt{c_i})\right| \\
&< 2\,\epsilon + \sum_{i=1}^{q}\epsilon(d_i-c_i) < 3\,\epsilon.
\end{aligned}$$

Ovim se završava dokaz.

6. Ekvivalencija integrala

U ovom poglavlju pokazuje se da su Denojev, Peronov i Henstokov integrali ekvivalentni. To znači da funkcija koja je integrabilna u jednom smislu je integrabilna u druga dva smisla i da su integrali jednaki. Ovo je značajan rezultat jer su osnovne definicije ovih integrala vrlo različite. Svrha ovog poglavlja je da se ustanovi ekvivalencija ova tri integrala. Najlakše je dokazati ekvivalenciju Denojevog i Henstokovog integrala i Peronovog i Henstokovog integrala.

Kako su Denojev, Peronov i Henstokov integrali generalizacija Rimanovog i Lebegovog integrala, na početku ovog poglavlja se navodi razlika između Rimanovog i Lebegovog integrala. Razlika između Rimanovog i Lebegovog integrala je u pristupu problema. Rimanov pristup se zasniva na podeli x-ose (domena), pa računanja integralnih suma, a Lebeg integral defiše pomoću prostih funkcija, pa je integral merljive nenegativne funkcije f definisan kao supremum integrala prostih merljivih funkcija koje su manje ili jednake od f. Taj pristup može da se shvati kao pravljenje podele po y-osi (kodomenu). Sledeći primer pokazuje da je Dirihleova funkcija integrabilna po Lebegu, ali ne i po Rimanu. [19]

Primer 6.1. [17] Neka postoji karakteristična funkcija racionalnih brojeva u $[0,1]$,

$$1_Q(x) = \begin{cases} 1, ako\ je\ x\ racionalan\ broj, \\ 0, inače. \end{cases}$$

Ova funkcija, poznata kao funkcija Dirihlea, nije Riman integrabilna. Da bi se ovo videlo, uzima se proizvoljna podela intervala $[0,1]$. Supremum od 1_Q na bilo kom intervalu je 1, dok je infimum 0. Dakle, gornja suma od 1_Q je 1, dok je donja suma 0. Gornja i donja suma se spajaju na 1 i 0, očigledno je da granice nisu iste. Funkcija je Riman integrabilna ako i samo ako se gornja i donja suma približavavaju na isti broj, pa Rimanov integral od 1_Q ne postoji.

S druge strane, 1_Q jeste Lebeg integrabilna. Neka se interval $[0,1]$ podeli tačkama $\{g_0, g_1, ...\}$. Za svako g_i otvoren skup O_i je veličine $\frac{\epsilon}{2^i}$. Dakle, skup $\{g_0, g_1, ...\}$ je sadržan u skupu $G_\epsilon = \bigcup_{i=0}^{\infty} O_i$. Sada je poznato da svaka prebrojiva unija otvorenih skupova formira Lebeg merljiv skup. Dakle, G_ϵ je takođe Lebeg merljiv skup. Shodno tome, Lebegova karakteristična funkcija ovog skupa je:

$$1_{G_\epsilon}(x) = \begin{cases} 1, ako\ je\ x \in O, \\ 0, inače. \end{cases}$$

Integral 1_{G_ϵ} je manji ili jednak od $\epsilon \sum_{i=0}^{\infty} 2^i = \epsilon$, ukupna dužina unije skupova O_i je manji ili jednak od ϵ. (Možda postoji preklapanja između O_i). Sada, uzimajući ograničenje $\epsilon \to 0$, sledi da je za sve ϵ:

$$\int 1_Q dx < \int 1_{G_\epsilon} dx < \epsilon.$$

S obzirom da je $\epsilon > 0$ na levoj strani mora biti 0.

Dalje se pokazuje ekvivalencija Denojevog integrala i P_C (Peronovog integrala). Denoj integrabilna funkcija je P_C integrabilna ako zadovoljava četiri uslova sledeće leme.

Lema 6.1. [1] (Rimanovski lema) Neka je $\mathcal{F}$ kolekcija otvorenih intervala u (a, b). Ako $\mathcal{F}$ ima sledeće karakteristike:

1) Ako (α, β) i (β, γ) pripadaju $\mathcal{F}$, tada (α, γ) pripada $\mathcal{F}$.
2) Ako (α, β) pripada $\mathcal{F}$, tada svaki otvoreni interval u (α, β) pripada $\mathcal{F}$.
3) Ako (α, β) pripada $\mathcal{F}$ za svaki interval $[\alpha, \beta] \subseteq (c, d)$, tada (c, d) pripada $\mathcal{F}$.
4) Ako svi intervali perfektnog skupa $E \subseteq [a, b]$ pripadaju $\mathcal{F}$, onda postoji interval I u $\mathcal{F}$ tako da je $I \cap E \neq \emptyset$.

Tada $\mathcal{F}$ sadrži interval (a, b).

Teorema 6.1. [1] Ako je $f: [a, b] \to R$ Denoj integrabilna na $[a, b]$, tada je f P_C integrabilna na $[a, b]$ i integrali su jednaki.

Dokaz. Neka je $F(x) = (D)\int_a^x f$ za svako $x \in [a, b]$. Neka je $\mathcal{F}$ kolekcija svih otvorenih intervala (c, d) u (a, b), takvih da je f P_C integrabilna na $[c, d]$ i $F(x) - F(c) = (P_C)\int_c^x f$, za $x \in [c, d]$. Dovoljno je pokazati da $\mathcal{F}$ zadovoljava četiri uslova Rimanovski leme (leme 6.1.).

Po teoremi 4.7. (za P_C integral) $\mathcal{F}$ zadovoljava uslove 1) i 2). Neka se dalje pretpostavi da (α, β) pripada $\mathcal{F}$ za svaki interval $[\alpha, \beta] \subseteq (c, d)$. Kako je F neprekidna, $(P_C)\int_\alpha^\beta f = (D)\int_\alpha^\beta f$ konvergira ka $F(d) - F(c)$ za $\alpha \to c^+$ i $\beta \to d^-$. Po teoremi 4.12. funkcija f je P_C integrabilna na $[c, d]$ i važi:

$$F(d) - F(c) = \lim_{\alpha \to c^+,\ \beta \to d^-} (D)\int_\alpha^\beta f = \lim_{\alpha \to c^+,\ \beta \to d^-} (P_C)\int_\alpha^\beta f = (P_C)\int_c^d f.$$

Zatim sledi da (c, d) pripada $\mathcal{F}$, čime se zadovoljava uslov 3).

Neka je E savršen skup u $[a, b]$, tako da se svaki interval graniči sa E u $[a, b]$ koji pripada $\mathcal{F}$. Po teoremi 3.7. postoji savršen deo $E \cap [c, d]$ od E, takav da je f Lebeg integrabilna na $F \cap [c, d]$ i nizovi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} w\left((D)\int_{c_n}^{x} f, [c_n, d_n]\right) = \sum_{n=1}^{\infty} w\left((P_C)\int_{c_n}^{x} f, [c_n, d_n]\right)$$

konvergiraju, gde je $[c, d] - E = \bigcup_{n=1}^{\infty}(c_n, d_n)$. Po teoremi 4.13. funkcija f je P_C integrabilna na $[c, d]$ i važi:

$$(P_C)\int_c^d f = (L)\int_c^d f\chi_E + \sum_{n=1}^{\infty}(P_C)\int_{c_n}^{d_n} f = (L)\int_c^d f\chi_E + \sum_{n=1}^{\infty}(D)\int_{c_n}^{d_n} f = (D)\int_c^d f$$
$$= F(d) - F(c).$$

Sličan razlog je validan i za druge intervale $[c, x]$, gde $x \in (c, d)$, pa sledi da interval (c, d) pripada $\mathcal{F}$, čime se zadovoljava uslov 4).

Sledi teorema u kojoj se pokazuje da je Peron integrabilna funkcija Denoj integrabilna.

Teorema 6.2. [1] Ako je $f: [a, b] \to R$ Peron integrabilna na $[a, b]$, tada je f Denoj integrabilna na $[a, b]$.

Dokaz. Funkcija $F(x) = (P)\int_a^x f$ je neprekidna na $[a, b]$ i $F' = f$ skoro svuda na $[a, b]$ po teoremi 4.10. treba pokazati da je f Denoj integrabilna na $[a, b]$, dovoljno je da se dokaže da je F ACG_* na $[a, b]$. Neka je U glavna funkcija od f na $[a, b]$. Kako je $\underline{D}U > -\infty$ na $[a, b]$, funkcija U je BVG_* na $[a, b]$ po teoremi 4.1. $U - F$ je neopadajuća na $[a, b]$, funkcija F je takođe BVG_* na $[a, b]$. Pokazaće se da je F ACG_* na $[a, b]$, odnosno da svaki neprazni savršen skup u $[a, b]$ sadrži deo na kojem je F AC_* i primeniće se teorema 2.3.

Neka je E savršen skup u $[a, b]$. F je neprekidna i BVG_* na $[a, b]$, pa postoji savršen deo $E \cap [c, d]$ od E, takav da je F BV_* na $E \cap [c, d]$. Neka je G funkcija koja je jednaka F na $E \cap [c, d]$ i linearna je na susedne intervale ka E u $[c, d]$. Funkcija G je BV na $[c, d]$ po teoremi 2.1. i zbog toga je njen izvod G' Lebeg integrabilan na $[c, d]$. Da bi se završio dokaz treba se pokazati da je: $G_c^x = (L)\int_c^x G'$, za svako $x \in [c, d]$. Jer je tada G AC na $[c, d]$ i $F = G$ je AC na $E \cap [c, d]$. Kako je F AC i BV_* na $E \cap [c, d]$, onda je i AC_* na $E \cap [c, d]$ po teoremi 2.2.

Neka je $\epsilon > 0$ i neka je funkcija U glavna funkcija od f na $[c, d]$, takva da je: $0 \leq U_c^d - F_c^d < \epsilon$. Neka je W funkcija koja je jednaka U na $E \cap [c, d]$ i linearna je na susedne intervale ka E u $[c, d]$. Pošto je $\underline{D}U > -\infty$ na $[c, d]$ i $U - F$ je neopadajuća na $[c, d]$, $\underline{D}W > -\infty$ na $[c, d]$ i $W - G$ je neopadajuća na $[c, d]$. Sada je $\underline{D}W \geq \underline{D}G$ na $[c, d]$ jer je: $W = G + (W - G)$ i $W - G$ neopadajuća. Odatle je $\underline{D}W$ glavna funkcija od $\underline{D}G$ na $[c, d]$ i to implicira da je:

$$(L)\int_c^x G' = (L)\int_c^x \underline{D}G \leq W_c^x,$$

za sve $x \in [c, d]$. Zato je:

$$G_c^x - (L)\int_c^x G' \geq G_c^x - W_c^x \geq G_c^d - W_c^d = F_c^d - U_c^d > -\epsilon,$$

za sve $x \in [c, d]$. Ako se uzme u obzir pomoćna funkcija od f na $[c, d]$, koristeći isti argument, dobija se:

$$G_c^x - (L)\int_c^x G' < \epsilon,$$

za sve $x \in [c, d]$. Čime se završava dokaz.

Dalje se pokazuje ekvivalencija Denoj i Henstok integrala. Prvo se pokazuje da je Denoj integrabilna funkcija Henstok integrabilna.

Teorema 6.3. [1] Ako je $f: [a, b] \to R$ Denoj integrabilna na $[a, b]$, tada je f Henstok integrabilna na $[a, b]$ i integrali su jednaki.

Dokaz. Funkcija $F(x) = (D)\int_a^x f$ je ACG_* na $[a, b]$ i $F' = f$ skoro svuda na $[a, b]$. Neka je D skup svih tačaka $x \in [a, b]$ takvi da $F'(x)$ postoji i neka je $E = [a, b] - D$ i $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, F je AC_* na svako E_n. Za svako n neka je $E_n = B_n \cup C_n$, B_n je sastavljen od svih tačaka iz E_n koje su obostrane granične tačke u E_n, i neka je $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, skup C je prebrojiv.

Neka je $\epsilon_1 > 0$ i neka je: $\epsilon = \epsilon_1(b - a + 4)^{-1}$. Posto je F AC_* na E_n postoji $\eta_n > 0$ tako da je $\sum_{j=1}^{q} w(F, [u_j, v_j]) < \epsilon 2^{-n}$, gde je $\{[u_j, v_j]: 1 \le j \le q\}$ konačna kolekicija nepreklapajućih intervala koji imaju krajnje tačke u E_n i zadovoljavaju: $\sum_{j=1}^{q}(v_j - u_j) < \eta_n$. Kako je $\mu(E_n) = 0$, postoji otvoren skup O_n, takav da je $E_n \subseteq O_n$ i $\mu(O_n) < \eta_n$. Za svako $x \in B_n$ bira se $c_n^x, d_n^x \in E_n$, tako da je $c_n^x < x < d_n^x$ i $[c_n^x, d_n^x] \subseteq O_n$. Kako je F diferencijabilna u svakoj tački od D, postoji pozitivna funkcija δ_d na D, takva da je $|f(P) - F(P)| < \epsilon\mu(P)$, gde je sa P označena podela da je D zavisan od δ_d. Kako je F neprekidna na $[a, b]$ i C je prebrojiv, postoji pozitivna funkcija δ_c na C takva da je $|f(P)| < \epsilon$, sa P je označena podela da je C zavisan od δ_c. Po lemi 5.3., postoji pozitivna funkcija δ_e na E takva da je $|f(P)| < \epsilon$, sa P je označena podela da je E zavisan od δ_e. Sada se definiše pozitivna funkcija δ na $[a, b]$ pomoću:

$$\delta(x) = \begin{cases} \delta_d(x), & ako\ x \in D, \\ min\{\delta_e(x), x - c_n^x, d_n^x - x\}, & ako\ x \in B_n, \\ min\{\delta_e(x), \delta_c(x)\}, & ako\ x \in C. \end{cases}$$

Neka je P označena podela od $[a, b]$ koja je zavisna od δ. Neka je P_d podskup od P koji ima oznake u D, neka je P_e podskup od P koji ima oznake u E, neka je P_c podskup od P_e koji ima oznake u C, neka je P_n podskup od P_e koji ima oznake u B_n. Kako je $|F(P_n)| < 2\epsilon 2^{-n}$, za svako n nalazi se da je:

$$|f(P) - F(P)| \le |f(P_d) - F(P_d)| + |f(P_e)| + |F(P_e)|$$
$$< \epsilon(b - a) + \epsilon + |F(P_c)| + \sum_{n=1}^{\infty} |F(P_n)| < \epsilon(b - a) + \epsilon + \epsilon + 2\epsilon = \epsilon_1.$$

Dakle funkcija f je Henstok integrabilna na $[a, b]$ i $\int_a^b f = (D)\int_a^b f$.

Da bi se pokazalo $|F(P_n)| < 2\epsilon 2^{-n}$ za svako n, fiksira se n za koje je $P_n \neq \emptyset$, svaka oznaka se dešava samo jednom. Neka je $P_n = \{(s_j, [u_j, v_j]: 1 \leq j \leq m\}$ i s_j-ovi su u rastućem redosledu. Neka je:

$$u_1^{'} = c_n^{s_1} \; i \; u_j^{'} = \max\{s_{j-1}, c_n^{s_j}\} \; za \; 2 \leq j \leq m,$$

$$v_m^{'} = d_n^{s_m} \; i \; v_j^{'} = \max\{s_{j+1}, d_n^{s_j}\} \; za \; 1 \leq j \leq m-1.$$

Dalje se $\{[u_j^{'}, s_j]: 1 \leq j \leq m\}$ i $\{[s_j, v_j^{'}]: 1 \leq j \leq m\}$, sastoji od nepreklapajućih označenih intervala koji imaju krajnje tačke u E_n. Kako su ovi intervali unutar O_n sume, nizovi: $\sum_{j=1}^{m}(s_j - u_j^{'})$ i $\sum_{j=1}^{m}(v_j^{'} - s_j)$ su manje od η_n. Dalje se dobija:

$$\begin{aligned}|F(P_n)| &\leq \sum_{j=1}^{m} |F(v_j) - F(u_j)| \leq \sum_{j=1}^{m} (|F(v_j) - F(s_j)| + |F(s_j) - F(u_j)|) \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} (w(F, [s_j, v_j]) + w(F, [u_j, s_j])) \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} w(F, [s_j, v_j^{'}]) + w(F, [u_j^{'}, s_j]) < 2\epsilon 2^{-n}.\end{aligned}$$

Teorema 6.4. [1] Ako je $f: [a,b] \to R$ Henstok integrabilna na $[a,b]$, tada je funkcija $F(x) = \int_a^x f \;\; BVG_*$ na $[a,b]$.

Dokaz. Za $\epsilon = 1$ bira se pozitivna funkcija δ na $[a,b]$, tako da je $\left|F(P) - \int_a^b f\right| < 1$, sa P je obeležena podela od $[a,b]$ koja je zavisna od δ. Za svaki pozitivan ceo broj n, definiše se:

$$E_n = \left\{x \in [a,b] : \; |f(x)| \leq n \; i \; \delta(x) \geq \frac{1}{n}\right\}.$$

Jasno je da je: $[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Treba pokazati da je F BVG_* na svako E_n.

Neka se fiksira n i neka je: $E_n^k = E_n \cap \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ za svaki ceo broj k. Neka je k svaki ceo broj za koji je: $E_n^k \neq \emptyset$ i $\{[c_i, d_i]: 1 \leq i \leq q\}$ konačan skup intervala koji se ne preklapaju i imaju krajnje tačke u E_n^k. Pošto je F neprekidna na $[a,b]$, postoji $u_i, v_i \in [c_i, d_i]$ tako da je $u_i < v_i$ i $|F(v_i) - F(u_i)| = w(F, [c_i, d_i])$. Za svako i postoje intervali: $(c_i, [c_i, u_i])$, $(d_i, [v_i, d_i])$ i $(c_i, [c_i, d_i])$ zavisni od δ. Dalje, koristeći Saks-Henstokovu lemu dobija se:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{q} w(F,[c_i,d_i]) &= \sum_{i=1}^{q} |F(u_i)-F(v_i)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{q} (|F(u_i)-F(c_i)-f(c_i)(u_i-c_i)| + |f(c_i)(u_i-c_i)| \\
&+ |F(c_i)-F(d_i)+f(c_i)(d_i-c_i)| + |f(c_i)(d_i-c_i)| \\
&+ |F(d_i)-F(v_i)-f(d_i)(d_i-v_i)| + |f(d_i)(d_i-v_i)|) \\
&= \sum_{i=1}^{q} |F(d_i)-F(c_i)-f(c_i)(d_i-c_i)| \\
&+ \sum_{i=1}^{q} (|F(u_i)-F(c_i)-f(c_i)(u_i-c_i)| \\
&+ |F(d_i)-F(v_i)-f(d_i)(d_i-v_i)|) \\
&+ \sum_{i=1}^{q} (|f(c_i)|(u_i-c_i)+|f(d_i)|(d_i-v_i)) + \sum_{i=1}^{q} |f(c_i)|(d_i-c_i) \\
&\leq 2+2+1+1=6.
\end{aligned}
$$

Zaključuje se da je F BV_* na E_n^k, odnosno da je F BVG_* na svako E_n i ovim se završava dokaz.

Naredna teorema pokazuje da je Henstok integrabilna funkcija Denoj integrabilna.

Teorema 6.5. [1] Ako je $f:[a,b] \to R$ Henstok integrabilna na $[a,b]$, tada je f Denoj integrabilna na $[a,b]$ i integrali su jednaki.

Dokaz. Neka je $F(x) = (H)\int_a^x f$, za svako $x \in [a,b]$. Po teoremi 5.9. funkcija f je ACG_δ na $[a,b]$ i $F^{'} = f$ skoro svuda na $[a,b]$. Potrebno je dokazati da je F ACG_* na $[a,b]$. Po teoremi 2.4. dovoljno je dokazati da je F BVG_* na $[a,b]$ i da zadovoljava uslov (N) na $[a,b]$. U prethodnoj teoremi dokazano je da je F BVG_* na $[a,b]$, tako da je potrebno dokazati da F zadovoljava uslov (N) na $[a,b]$.

Neka se pretpostavi da $E \subseteq [a,b]$ ima meru 0 i $\epsilon > 0$. Po lemi 4.4. postoji pozitivna funkcija δ na E takva da je $|F(P)| < \epsilon$, P je E zavisna od δ. Za svaki pozitivan ceo broj n, neka je: $E_n = \left\{x \in E : \delta(x) > \frac{1}{n}\right\}$. Fiksira se n i bira ceo pozitivan broj q takav da je: $\beta = \frac{(b-a)}{q} < \frac{1}{n}$. Neka je:

$$I_k = [a+(k-1)\beta, a+k\beta],$$

za $k = 1,2,\dots,q$ i neka je π skup celih brojeva k za koje je: $E_n \cap I_k \neq \emptyset$. Za svako $k \in \pi$ skup $F(E_n \cap I_k)$ je ograničen jer je F neprekidna na $[a,b]$. Dalje, postoje tačke $x_k, y_k \in E_k \cap I_k$ takve da je $x_k < y_k$ i

$$\mu^*(F(E_n \cap I_k)) \leq sup\{F(E_n \cap I_k)\} - inf\{F(E_n \cap I_k)\} \leq |F(y_k) - F(x_k)| + \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Neka je $P_n = \{(x_k, [x_k, y_k]) : k \in \pi\}$, neka je P_n^+ podskup od P_n koji sadrži interval za koji je $F(y_k) - F(x_k) \geq 0$, i neka je $P_n^- = P_n - P_n^+$. Oba P_n^- i P_n^+su E zavisna od δ.

$$\mu^*(F(E_n)) \leq \sum_{k\in\pi} \mu^*(F(E_n \cap I_k)) \leq \sum_{k\in\pi} (|F(y_k) - F(x_k)| + \frac{\epsilon}{2^k})$$
$$\leq |F(P_n^+)| + |F(P_n^-)| + \epsilon < 3\epsilon.$$

Kako je nejednakost važeća za svako n sledi da je:

$$\mu^*\big(F(E)\big) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(F(E_n)) \leq 2\epsilon.$$

Sada je $\mu^*\big(F(E)\big) = 0$ kao što je i $\epsilon > 0$ birano proizvoljno i ovim se završava dokaz.

Poslednji par integrala koji se razmatra su Peron i Henstok integrali. Dokaz ekvivalentnosti ova dva integrala je najlakši. Ekvivalencija ova dva integrala je priznata skoro odmah nakon razvoja Henstokovog integrala. Direktan dokaz ekvivalentnosti Henstokovog i Denojevog integrala nije otkriven sve do 1980-tih, direktan razvoj može da se vidi u časopisu "Real Analysis Exchange".

Prvo se pokazuje da je Peron integrabilna funkcija Henstok integrabilna.

Teorema 6.6. [1] Ako je $f: [a, b] \to R$ Peron integrabilna na $[a, b]$, tada je f Henstok integrabilna na $[a, b]$ i integrali su jednaki.

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Po definiciji postoji glavna funkcija U i pomoćna funkcija V od f na $[a, b]$ i važi:

$$-\epsilon < V_a^b - (P)\int_a^b f \leq 0 \leq U_a^b - (P)\int_a^b f < \epsilon.$$

Kako je $\overline{D}V \leq f \leq \underline{D}U$ na $[a, b]$, za svako $x \in [a, b]$, postoji $\delta(x) > 0$ tako da je:

$$\frac{U(y) - U(x)}{y - x} \geq f(x) - \epsilon \ \ i \ \ \frac{V(y) - V(x)}{y - x} \leq f(x) + \epsilon,$$

za svako $0 < |y - x| < \delta(x)$ i $y \in [a, b]$. Dalje se pretpostalja da je :

$$P = \{(x_i, [c_i, d_i]) : 1 \leq i \leq q\}$$

označena podela od $[a, b]$ koja je zavisna od δ i važi:

$$\sum_{i=1}^{q} f(x_i)(d_i - c_i) - (P)\int_a^b f = \sum_{i=1}^{q}\big(f(x_i)(d_i - c_i) - U_{c_i}^{d_i}\big) + U_a^b - (P)\int_a^b f$$
$$< \sum_{i=1}^{q}\big(f(x_i)(d_i - x_i) - U_{x_i}^{d_i}\big)$$
$$+ \sum_{i=1}^{q}\big(f(x_i)(x_i - c_i) - U_{c_i}^{x_i}\big) + \epsilon \leq \sum_{i=1}^{q} \epsilon\,(d_i - x_i) + \sum_{i=1}^{q} \epsilon\,(x_i - c_i) + \epsilon$$
$$= \epsilon(b - a + 1).$$

Na sličan način za pomoćnu funkciju V se dobija:

$$\sum_{i=1}^{q} f(x_i)(d_i - c_i) - (P)\int_a^b f > -\epsilon(b-a+1).$$

Sledi da je f Henstok integrabilna na $[a,b]$ i važi: $(H)\int_a^b f = (P)\int_a^b f.$

Naredna teorema pokazuje da je Henstok integrabilna funkcija Peron integrabilna.

Teorema 6.7. [1] Ako je $f:[a,b] \to R$ Henstok integrabilna na $[a,b]$, tada je f Peron integrabilna na $[a,b]$.

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Po definiciji postoji pozitivna funkcija δ na $[a,b]$, takva da je: $\left|f(P) - (H)\int_a^b f\right| < \epsilon$, sa P je označena podela od $[a,b]$ koja je zavisna od δ. Za svako $x \in (a,b]$ neka je

$$U(x) = sup\{f(P): P\ je \text{ označena podela od } [a,x] \text{ koja je zavisna od } \delta\},$$

$$V(x) = inf\{f(P): P\ je \text{ označena podela od } [a,x] \text{ koja je zavisna od } \delta\},$$

neka je $U(a) = 0 = V(a)$. Po Saks-Henstokovoj lemi, funkcije U i V su konačne vrednosti na $[a,b]$.

Neka se fiksira tačka $c \in [a,b]$. Za $x \in (c, c+\delta(c)) \cap [a,b]$ i za označenu podelu P od $[a,x]$ koja je zavisna od δ, nalazi se da je:

$$U(x) \geq f(P) + f(c)(x-c).$$

Sledi da je: $U(x) \geq U(c) + f(c)(x-c)$.

Za $x \in (c, c+\delta(c)) \cap [a,b]$ i za označenu podelu P od $[c,d]$ koja je zavisna od δ, nalazi se da je:

$$U(c) \geq f(P) + f(c)(c-x),$$

sledi da je: $U(c) \geq U(x) + f(c)(c-x)$.

Ovo pokazuje da je:

$$\frac{U(x)-U(c)}{x-c} \geq f(c),$$

za $x \in (c-\delta(x), c+\delta(c)) \cap [a,b]$ kada je $x \neq c$, $\underline{D}U(c) \geq f(c) > -\infty$. Zaključuje se da je funkcija U glavna funkcija od f na $[a,b]$. Dokaz da je funkcija V pomoćna funkcija od f na $[a,b]$ je dosta sličan.

Kako je: $|f(P_1) - f(P_2)| < 2\epsilon$ za bilo koje dve označene podele P_1 i P_2 od $[a,b]$ koje su zavisne od δ, sledi da je $U_a^b - V_a^b \leq 2\epsilon$, pa je po Košijevom kriterijumu za Peronov integral funkcija f Peron integrabilna na $[a,b]$.

Zaključak

Teoma ovog rada su različiti pristupi problemu integracije, te analiza, kako njihovih različitosti, tako i njihovih sličnosti. Dva klasična integrala koja se koriste u matematici su: Rimanov i Lebegov integral. Kroz rad pored ova dva integrala predstavljeni su i Denojev, Peronov i Henstokov integral.

Navedene su razlike između Denojeve integrabilne funkcije i Lebegove integrabilne funkcije. Pokazano je da je Lebegov integral poznat kao neapsolutni, dok to za Denojev integral ne važi. Funkcija koja je Lebeg integrabilna na $[a, b]$ je Lebeg integrabilna na svakom merljivom podskupu od $[a, b]$, dok to za Denojev integral ne važi. Ove razlike su bitne jer omogućavaju da Denojev integral poseduje svojstva koja Lebegov integral ne poseduje. Međutim, sličnosti između ova dva integrala pokazala su da: funkcija koja je Denoj integrabilna na intervalu $[a, b]$ sadrži podinterval na kojem je funkcija Lebeg integrabilna. Svojstva Denojevog integrala koja ne važe za Lebegov integral otkrivaju da je Denojev integral moćniji u odnosu na Lebegov integral.

Peronov integral je određen u terminima glavnih i pomoćnih funkcija. Pokazano je da funkcija koja je Peron integrabilna na određenom intervalu je Peron integrabilna i na podintervalu. Određene promene u Peronovom integralu definisale su P_C i P_X integral. Pokazano je da je svaka P_X integrabilna funkcija P_C integrabilna.

Definisan je pojam pozitivne funkcije δ koja se koristi pri konstrukciji Henstokovog integrala. Pokazano je da ova blaga modifikacija Rimanovog integrala ima dosežne posledice i dokazi otkrivaju kako upotrebiti funkciju δ kao prednost. Navedena je Saks-Henstokova lema koja tvrdi da su Rimanovi iznosi (sume) ne samo približni integralima preko celog intervala, već i preko unije podintervala. Pokazano je da je funkcija koja je Henstok integrabilna na intervalu istovremeno i Henstok integrabilna na podintervalu.

Denojev, Peronov i Henstokov integral ima sva uobičajna svojstva integrala. Pokazano je da su Denojev, Peronov i Henstokov integrali ekvivalentni, tj. funkcija koja je integrabilna u jednom smislu je integrabilna u druga dva smisla i integrali su jednaki. Ovo je značajan rezultat, jer su osnovne definicije ovih integrala vrlo različite, a dokazi pokazuju da se sva tri integrala poklapaju.

Predstavljena materija je dovoljna da bi se savladali osnovni pojmovi različitih pristupa integracije, te se može iskoristiti za dalja istraživanja.

Literatura

[1] Bartle R. G., A Modern Theory of Integration. Graduate Studies in Mathematics 32. American Mathematical Society, 2001.

[2] Đorđević D., Mera, integral i izvod (http://nasport.pmf.ni.ac.rs/materijali/219/mera-integral-izvod.pdf)

[3] Mateljević M., Realna, kompleksna analiza i Hilbertovi prostori (http://poincare.matf.bg.ac.rs/~miodrag/realna_R.pdf)

[4] Mirković B., Teorija mera integrala, Beograd, 1990.

[5] Halmos P. R., Measure Theory, Springer–Verlag New York · Heidelberg · Berlin, 1970.

[6] Pilipović S., Seleši D., Mera i integral - fundamenti teorije verovatnoće, Zavod za udžbenike, Beograd, 2012.

[7] Russell A. G., The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock, Graduate Studies in Mathematics, 4. American Mathematical Society, 1994.

[8] Saks S., Theory of the Integral, Dover publications, inc. Mineola, New York, 1964.

[9] Takači Đ., Hadžić O., Matematika za studente prirodnih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno – matematički fakultet, 1998.

[10] Takači Đ., Takači A., Zbirka zadataka iz analize I, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno – matematički fakultet, 1997.

[11] Teofanov N., Gajić Lj., Pilipović S., Zbirka zadataka iz analize I, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno – matematički fakultet, 1995.

[12] Čelidze V. G., Džvaršeišvili A. G., The theory of the Denjoy integral and some applications, 1978.

[13] http://biblio.mat.uc.pt/bbsoft/woc_ucma/matematicos/January10EN.pdf

[14] http://integrals.wolfram.com/about/history/

[15] http://lavica.fesb.hr/mat2/predavanja/node26.html

[16] http://math.feld.cvut.cz/mt/txtd/1/txe3da1a.htm

[17] http://planetmath.org/sites/default/files/texpdf/37343.pdf

[18] http://www.dms.rs/DMS/data/seminari/seminar2010/Lj.Petkovic.pdf

[19] http://www.elitesecurity.org/t265330-0

[20] http://www.znanje.org/knjige/fizika/pdf/oscilacije.pdf

Kratka biografija

Jovana Vojnović rođena je 15.07.1988. godine u Somboru. Osnovnu školu "Laza Kostić" završila je u Gakovu 2003. godine. Srednju Tehničku školu završila je 2007. godine u Somboru i iste godine upisuje Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu. Osnovne studije završila je 2012. godine i potom upisala master studije primenjene matematike na istom fakultetu. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom zajedno sa predmetom Osnovi geometrije i grupom pedagoško–psihološko–metodičkih predmeta zaključno sa februarskim ispitnim rokom 2015. godine i time stekla uslov za odbranu master rada. Od 2014. godine radi u osnovnoj školi: "Dositej Obradović" u Somboru kao nastavnik matematike.

Ključna dokumentacija

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: *Monografska dokumentacija*
TD

Tip zapisa: *Tekstualni štampani materijal*
TZ

Vrsta rada: *Master rad*
VR

Autor: *Jovana Vojnović*
AU

Mentor: *Dr Ivana Štajner Papuga*
MN

Naslov rada: *Neki pristupi problemu integracije*
NR

Jezik publikacije: *Srpski (latinica)*
JP

Jezik izvoda: *Srpski/Engleski*
JI

Zemlja publikovanja: *Srbija*
ZP

Uže geografsko područje: *Vojvodina*
UGP

Godina: *2016.*
GO

Izdavač: *Autorski reprint*
IZ

Mesto i adresa: *Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*
MA

Fizički opis rada: (6/69/0/0/8/0/)
FO (broj poglavlja/strana/lit.citata/tabela/slika/grafikona/priloga)

Naučna oblast: *Matematika*
NO

Naučna disciplina: *Primenjena matematika*
ND

Predmetne odrednice, ključne reči: *primitivna funkcija, integrabilna funkcija, neopadajuća funkcija, pozitivna funkcija, neprekidna funkcija, merljiva funkcija, glavna i pomoćna funkcija, mera skupa, podela intervala*
UKR

Čuva se: *U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku*
ČU

Važna napomena: *Nema*
VN

Izvod: *U ovom radu su izloženi različiti pristupi problemu integracije, te analiza, kako njihovih različitosti, tako i njihovih sličnosti. Definisani su: Denojev, Peronov i Henstokov integrali. Denojev i Peronov integrali su generalizacije Lebegovog integrala, dok je Henstokov integral generalizacija Rimanovog integrala, pa su u radu definisani i Lebegov i Rimanov integral. Data je opisna definicija Denojevog integrala, koja opisuje karakteristiku funkcije. Peronov integral je definisan u terminima glavnih i pomoćnih funkcija. Dodavanjem uslova kod glavnih i pomoćnih funkcija, definisan je Peronov* P_X *i Peronov* P_c *integral. Kod Henstokovog integrala, definisana je pozitivna funkcija i podela određenog intervala. Integrabilne funkcije Denojevog, Peronovog i Henstokovog integrala imaju iste osobine. Pokazano je da se Denojev, Peronov i Henstokov integral poklapaju iako su osnovne definicije ovih integrala različite, tj. pokazana je ekvivalentnost ova tri integrala.*
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: *21.04.2015.*
DP

Datum odbrane: *2016.*
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik: *Dr Ljiljana Gajić, redovni professor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu*

Član: *Dr Zagorka Lozanov Crvenković, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu*

Mentor: *Dr Ivana Štajner Papuga, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu*

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Dokument type: *Monograph documentation*
DT

Type of record: *Textual printed material*
TR

Contents code: *Master thesis*
CC

Author: *Jovana Vojnović*
AU

Mentor: *Dr Ivana Štajner Papuga*
MN

Title: *Some appoaches to the problem of integration*
TI

Language of text: *Serbian (latin)*
LT

Language of abstract: *Serbian/ English*
LA

Country of publication: *Serbia*
CP

Locality of publication: *Vojvodina*
LP

Publication year: *2016.*
PY

Publisher: *Author's reprint*
PU

Publ. place: *Faculty of Natural Science and Mathematics, Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*
PP

Physical deskription: (6/69/0/0/8/0/)
PD

Scientific field: *Mathematics*
SF

Scientific discipline: *Applied Mathematics*
SD

Subject Key words: *primitive functions, integrable functions, nondecreasing function, positive function, continuous functions, measurable functions, major end minor function, the set of measures, partition interval*
SKW
UC

Holding data: *Library of the Department of Mathematics and Computer Sciences*
HD

Note: *None*
N

Abstract*:* *Different approaches to the problem of integration, and analysis of both, their diversities and similarities, are exposed in this work. They are defined as Denjoy, Perron and Henstock integrals. Denjoy and Perron integrals are generalizations of Lebesgue integrals, while Henstock integrals are generalization of Riemann integrals, so both, Lebesgue and Riemann integrals, are defined in the work. Descriptive definition of Denjoy integrals is given, which describes the characteristic functions. Perron integrals are defined in terms of the main and auxiliary functions. Perron PX and Perron Pc integrals are defined by adding conditions on main and auxiliary functions. At Henstock integrals, positive function and division of certain integrals is defined. Integrable functions of Denjoy, Perron and Henstock integrals have the same characteristics. It is shown that Denjoy, Perron and Henstock integrals overlap even though the basic definitions of these integrals are different, ie. the equivalence of these three integrals is demonstrated.*
AB

Accepted on the Scientific board on: *21.04.2015.*
AS

Defended: *2016.*
DE

Thesis Defend board:
D

President:	*Dr Ljiljana Gajić, full professor, Faculty of Science, University of Novi Sad*
Member:	*Dr Zagorka Lozanov Crvenković, full professor, Faculty of Science, University of Novi Sad*
Mentor:	*Dr Ivana Štajner* Papuga, *full professor, Faculty of Science, University of Novi Sad*