



Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku



Jovana Marković

Brza Furijeova transformacija sa primenom na određivanje cene opcija

Master rad

Mentor:
dr. Nenad Teofanov

2017, Novi Sad

Sadržaj

1	Uvod	3
2	Uopštene funkcije (distribucije)	4
2.1	Prostor test funkcija	4
2.2	Prostor distribucija	7
2.3	Izvod distribucije	10
2.4	Primeri distribucija	11
2.5	Temperirane funkcije (distribucije sporog rasta)	14
3	Konvolucija	16
3.1	Konvolucija funkcija	16
3.2	Konvolucija brzo opadajuće funkcije i temperirane distribucije	17
3.3	Konvolucija distribucija	18
3.4	Konvolucija temperiranih distribucija	22
3.5	Konvolucija nizova brojeva	25
4	Furijeova transformacija	33
4.1	Razvoj u Furijeov red	33
4.2	Furijeova transformacija	38
4.3	Furijeova transformacija uopštenih funkcija	41
4.4	Primeri Furijeovih transformacija	44
4.5	Brza Furijeova transformacija	46
5	Opcije	52
5.1	Finansijski derivati	52
5.2	Opcije	53
5.3	Postupci za određivanje cene opcije	55
6	Furijeova analiza i određivanje cene opcija	67
6.1	Kompleksni brojevi	67
6.2	Geometrija točka sa zupčanicima (Geometry of spoked wheel)	69
6.3	Diskretna Furijeova transformacija	72
6.4	Određivanje cene opcije na krugu	72
6.5	CM model	76
6.6	Matematički dokaz za CM-FFT model za određivanje cena	77
6.7	Paralelizacija FFT jednačine	80
6.8	FFT algoritam za premeštanje podataka	82
7	Rezultati	85
7.1	Analitički rezultati	85
7.2	Eksperimentalni rezultati	87
8	Zaključak	93
	Literatura	94
	Biografija ⁹⁵ Ključna dokumentacija ⁹⁶	

1 Uvod

Brza Furijeova transformacija (FFT) predstavlja algoritam koji se u velikoj meri koristi od 1965. godine i služi za „brzo” računanje vrednosti diskretne Furijeove transformacije (DFT) ili njene inverzne forme (IFFT). Ima veliku primenu u nauci, matematici i inženjerstvu. Metode FFT-a i IFFT-a se koriste za množenje velikih brojeva i polinoma, množenje vektor-matrica, za brze algoritme sa diskretnim sinusnim ili kosinusnim transformacijama, za rešavanje problema diferencijalnih jednačina a od nedavno i za praćenje dinamike tržišta i berze.

U ovom radu će se posmatrati njena povezanost sa finansijskim derivatima, kao i njena primena na rešavanje problema određivanja cene opcija, jer cena opcije koja je funkcija strajka cene može da se definiše preko modifikovane jednačine brze Furijeove transformacije.

U drugoj glavi rada uvodi se pojam uopštenih funkcija (distribucija), kao uopštenje klasičnog koncepta funkcije, zatim prostor test funkcija, prostor distribucija, izvodi distribucija kao i pojam temperiranih funkcija.

Treća glava je posvećena konvoluciji, koja ima veliku primenu u ovom radu, a pogotovo je značajna u određivanju cena opcija. Uveden je i pojam konvolucija nizova brojeva i njene primene na diskretnu Furijeovu transformaciju, konvolucije brzo opadajućih funkcija i temperiranih distribucija.

U četvroj glavi se uvodi teorija Furijeove transformacije, brze Furijeove transformacije kao i algoritmi koje koristi brza Furijeova transformacija.

Peta glava posvećena je finansijskim derivatima, jer opcije predstavljaju jednu vrstu finansijskih derivata, a zatim se daju postupci i različite vrste metoda za određivanje cene opcija.

U šestoj glavi prikazan je glavni cilj ovog rada, odnosno primena brze Furijeove transformacije u finansijama i određivanja cene opcija. Najpre se uvodi pojam kompleksnih brojeva i geometrija tačka sa zupcima, kao i pojam diskretne Furijeove transformacije, koji se koriste prilikom određivanja cene opcije na krugu. Zatim se uvodi CM model i njegov matematički dokaz koji predstavlja samu srž rada. Na kraju poglavlja je data paralelizacija jednačine za brzu Furijeovu transformaciju, kao i njena primena u FFT algoritmima za određivanje cena opcija.

U poslednjoj glavi izloženi su analitički i eksperimentalni rezultati za algoritme iz prethodnog poglavlja, kao i poređenje njihovih performansi i karakteristika prilikom određivanja cena opcija.

2 Uopštene funkcije (distribucije)

Uopštene funkcije ili distribucije predstavljaju uopštenje klasičnog koncepta funkcije. Da bi se dala definicija distribucija, najpre se mora uvesti pojam prostora test funkcija (funkcija na koje distribucije deluju).

Distribucije su linearne funkcionele koje deluju na prostor test funkcija. Standardne funkcije deluju integracijom na test funkciju i one se nazivaju uopštene funkcije. Postoji nekoliko izbora za prostor test funkcija, što daje različite prostore distribucija. Osnovni prostor test funkcija se sastoji od glatkih funkcija sa kompaktnim nosačem. Korišćenje glatkih, brzo opadajućih test funkcija dovodi do temperiranih distribucija, koje su važne jer je za njih dobro definisana Furijeova transformacija. Svaka temperirana distribucija je i distribucija ali obrnuto ne mora da važi.

Uopštene funkcije imaju praktičnu primenu u rešavanju različitih problema iz fizike (najčešće opisanih diferencijalnim jednačinama).

Na primer, posmatra se problem određivanje temperature u jednoj tački. Za njeno određivanje je potrebno da se odredi prosek temperatura koje su izmerene na vrhu termometra. Izmerene vrednosti imaju sledeći oblik

$$\int f(x)\phi(x)dx,$$

gde je sa $\phi(x)$ definisana težinska funkcija koja zavisi od osobina termometra. Na ovaj način su definisane uopštene funkcije.

Takođe, za opisivanje mnogih pojava koristi se funkcija čiji bi integral bio „koncentrisan“ u jednoj tački, a takvu funkciju je nemoguće definisati na klasičan način, dok se u teoriji uopštenih funkcija može naći veoma elegantno rešenje – Dirakova delta. Distribucije omogućavaju diferenciranje funkcija čiji izvodi ne postoje u klasičnom smislu. Svaka lokalno integrabilna funkcija ima svoj distributivni izvod. Distribucije se široko primenjuju u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina, gde se lakše utvrđuje postojanje distributivnih rešenja u odnosu na klasična ili gde ona uopšte i ne postoje.

(U ovom poglavlju korišćeno je [2], [3], [7], [9], [10] i [11] iz spiska literature.)

2.1 Prostor test funkcija

Neka je R^n n –dimenzionalni Euklidov prostor čiji su elementi uređene n –torke realnih brojeva $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, i pri tom je R^n snabdeven uobičajenom topologijom. Neka je sa Ω označen otvoren podskup od R^n . Na dalje će se posmatrati funkcije čiji je domen podskup od R^n , a kodomen C .

Neka je N_0^n podskup od R^n čiji su elementi vektori sa koordinatama koje uzimaju cele nenegativne vrednosti, a N_0^1 je skraćeni zapis za $N_0^n = \{0\} \cup N$. Za $k = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in N_0^n$ uzima se apsolutna vrednost $|k| = |k_1| + |k_2| + \dots + |k_n|$.

Definicija 1. Nosač neprekidne funkcije $\varphi : \Omega \subset R^n \rightarrow C$ je adherentan skup za skup $\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}$, što će se na dalje označavati sa $\text{supp}\varphi$.

Nosač neprekidne funkcije je dakle zatvaranje skupa tačaka u kojima je funkcija različita od nule.

Definicija 2. $C^m(\Omega)$, $m \in N_0$ ili $m = \infty$, je skup funkcija koje su definisane nad Ω i imaju sve neprekidne izvode do reda m na Ω . C_0^m je podskup od C^m onih funkcija čiji su nosači kompaktni u Ω . Funkcije iz $C^\infty(\Omega)$ se nazivaju glatke funkcije.

2.1 Prostor test funkcija

Ako se uvede obično sabiranje i množenje funkcije kompleksnim brojevima nad $C^\infty(\Omega)$ i $C_0^m(\Omega)$ tada su oni vektorski prostori nad poljem C .

Teorema 1. *Ako je K kompaktan podskup od Ω , tada postoji $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ sa osobinom $0 \leq \phi \leq 1$ i $\phi(x) = 1$ u nekoj okolini skupa K .*

Dokaz. Za dokaz ove teoreme se konstruiše funkcija ϕ i njena okolina K tako da u njoj važi $\phi(x) = 1$.

Skupovi K i $R^n \setminus \Omega$ su disjunktni. Kako u R^n važi da je rastojanje zatvorenog i kompaktnog skupa koji su disjunktni različito od nule, tada važi $d(K, R^n \setminus \Omega) = \delta > 0$. Sada treba odrediti ϵ i ϵ' tako da važi $0 < \epsilon' < \epsilon < \epsilon + \epsilon' < \delta$.

Neka je K_ϵ okolina od K , $K_\epsilon \equiv \{x \in \Omega; d(x, K) < \epsilon\}$. Sada se definiše funkcija

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x \in K_\epsilon, \\ 0 & x \notin K_\epsilon. \end{cases}$$

Neka je funkcija $\phi(x)$ definisana na sledeći način

$$\begin{aligned} \phi(x) &= (u * w_{\epsilon'})(x) = (\epsilon')^{-n} \int_{R^n} u(t) w\left(\frac{x-t}{\epsilon'}\right) dt \\ &= \int_{|t| \leq 1} u(x - \epsilon' t) w(t) dt, \quad x \in R^n. \end{aligned}$$

Kako u ima kompaktan nosač, a $w_\epsilon \in C_0^\infty$, sledi da $\phi \in C_0^\infty$. Još treba pokazati da je $\text{supp} \phi \subset K_{\epsilon+\epsilon'}$.

Ako važi pretpostavka da je $x \in R^n \setminus K_{\epsilon+\epsilon'}$, tada za $|t| \leq 1$, $x - \epsilon' t \in \Omega \setminus K_\epsilon$, pa je poslednji integral nula, to jest dobija se $\phi(x) = 0$, odnosno $\text{supp} \phi \subset K_{\epsilon+\epsilon'}$.

Ako je sada $x \in K_{\epsilon+\epsilon'}$ i $|t| \leq 1$, tada $x - \epsilon' t \in K_\epsilon$, tada se dobija da je

$$\phi(x) = \int_{|t| \leq 1} w(t) dt = 1,$$

za koju važi da $\phi(x) \in [0, 1]$. □

• Topologija prostora $D(K)$

Neka je $C_0^m(K)$ potprostor od $C_0^m(\Omega)$ čiji elementi imaju nosače sadržane u K ; pri čemu $m \in N_0$ ili je $m = \infty$ a K je kompaktan podskup od Ω .

Definicija 3. Vektorski prostor je lokalno konveksan prostor ako ima bazu okolina nule sastavljenu od konveksnih skupova.

Teorema 2. *Vektorski prostor je lokalno konveksan ako i samo ako je njegova topologija zadata familijom seminormi.*

Lokalno konveksan prostor može da se definiše nad prostorom $C_0^m(K)$ sa kompaktnim nosačem K koji je podskup od Ω i pri tom mora da se definiše niz normi $\{p_{K,m}; m \in N_0\}$ na sledeći način

$$p_{K,m}(\varphi) = \sum_{|j| \leq m} \sup_{x \in K} |\varphi^j(x)|.$$

2.1 Prostor test funkcija

Jednu bazu okolina nule čine skupovi

$$V_{K,m,v} \equiv \{\phi \in C_0^m(K); p_{K,m}(\phi) \leq \frac{1}{v}\}, \quad v \in N, \quad m \in N_0.$$

Definicija 4. Vektorski prostor $C_0^m(K)$ koji ima navedenu topologiju (lokalno konveksan prostor) je $D(K)$.

U ovoj topologiji niz (ϕ_k) iz $D(K)$ konvergira ka $\phi \in D(K)$ ako i samo ako $(\phi_k^{(\alpha)})$ uniformno konvergira nad K ka $\phi^{(\alpha)}$ za svako $\alpha \in N_0^n$.

Teorema 3. Ako je $f \in C^m(\Omega)$, $m \in N_0$ ili $m = \infty$, tada za svako kompaktan skup K koji je podskup od Ω postoji $f_K \in C_0^m(\Omega)$ tako da je $f(x) = f_K(x)$ u nekoj okolini od K koja leži u Ω .

Dokaz. Neka je za dato K , ϕ funkcija iz prethodne teoreme. Tada $f_K = f\phi$ ima traženu osobinu. $\square$

• Topologija prostora $D(\Omega)$

Za dva kompaktna skupa K_1 i K_2 koji imaju osobinu da $K_1 \subset K_2$ važi da $C_0^\infty(K_1) \subset C_0^\infty(K_2)$. Za otvoren neprazan skup $\Omega \subset R^n$ može da se konstruiše niz kompaktnih skupova (K_v) takve da važi

$$(K_v) \subset (K_{v+1}) \quad i \quad \bigcup_{v=1}^\infty K_v = \Omega.$$

Tada niz lokalno konveksnih prostora $((D(K_v)))$ u odnosu na idenrička preslikavanja $i_s^m : D(K_m) \rightarrow D(K_s)$, $m \leq s$ obrazuje striktni induktivni centar ili spektar. Za odgovarajući induktivni spektar se uvodi odgovarajuća topologija sa striktnim induktivnim granicama u odnosu na navedeni induktivni spektar (to je najfinija lokalno konveksna topologija u $C_0^\infty(\Omega)$ za koju su identička preslikavanja $i_s^m : D(K_m) \rightarrow C_0^\infty(\Omega)$ neprekidna).

Definicija 5. Vektorski prostor $C_0^\infty(\Omega)$ koji ima odgovarajuću topologiju striktno induktivne granice je prostor $D(\Omega)$. Ovaj prostor se još naziva i prostor osnovnih ili test funkcija.

Ako iz svakog prostora $D(K_v)$ izabere zaokružena konveksna okolina nule $U_v \subset B_v$, gde je B_v baza okolina nule u $D(K_v)$, $v \in N$, konveksna obvojnica U skupa $V = \bigcup_{v \in N} U_v$

$$U = \{\phi \in C_0^\infty; \phi = \sum_{j=1}^n \beta_j \varphi_j, \varphi_j \in U_{v_j}, \beta_j \leq 0, \beta_1 + \dots + \beta_n = 1\}$$

je konveksna zaokružena okolina nule u topologiji prostora $D(\Omega)$. Ako se menja U_v iz baze B_v prostora $D(K_v)$ i konačne skupove $\{v_1, \dots, v_n\}$, $n \in N$ dobijaju se skupovi U koji predstavljaju jednu bazu okolina nule u $D(\Omega)$.

Teorema 4. 1. Linearno prelikavanje T prostora $D(\Omega)$ u lokalno konveksni prostor E je neprekidno ako i samo ako je neprekidno nad $D(K)$ za svaki kompaktan skup $K \subset \Omega$.

2. Skup $A \subset D(\Omega)$ je ograničen ako i samo ako postoji kompaktan skup $K \subset \Omega$ tako da $A \subset D(K)$ i da je A ograničen u $D(K)$.

2.2 Prostor distribucija

3. Niz $(\phi_v) \subset D(\Omega)$ konvergira u $D(\Omega)$ ako i samo ako postoji kompaktan skup K tako da $(\phi_v) \subset D(K)$ i da konvergira u $D(K)$.
4. $D(\Omega)$ je nizovno kompletan.

Teorema 5. Zatvoren i ograničen skup u $D(\Omega)$ je kompaktan.

• Konvergencija na $D(\Omega)$

Definicija 6. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $\varphi_j \in D(\Omega)$, $j \in N$. Za niz test funkcija se kaže da konvergira ka nuli ako i samo ako važi:

1. Postoji kompaktan podskup K od Ω tako da $\text{supp} \varphi_j(x) \subset K$ za svako $j \in N$.
2. Za svako $\alpha \in N_0^n$ $\sup_{x \in N} |\partial^\alpha \varphi_k(x)| \rightarrow 0$, kada $k \rightarrow \infty$.
Sa $\alpha \in N_0^n$ se označava multiindeks niza $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in N \cup \{0\} = N_0$, $j = 1, \dots, n$.

Zahteva se dakle da konvergencija niza $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^\infty$ i niza svih njegovih izvoda bude uniformna. Prema tome, ako je $\varphi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x)$ u $D(\Omega)$ onda je $\varphi^\alpha(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k^\alpha(x)$.

2.2 Prostor distribucija

Definicija 7. Neprekidna linearna funkcionela nad $D(\Omega)$ naziva se distribucija ili uopštena funkcija. Prostor svih distribucija nad $D(\Omega)$ se označava sa $D'(\Omega)$.

$f \in D'$ je linearna distribucija ako

$$\forall \phi, \varphi \in D' \quad i \quad \forall \alpha, \beta \in C \quad \langle f, \alpha\varphi + \beta\phi \rangle = \alpha \langle f, \varphi \rangle + \beta \langle f, \phi \rangle.$$

$f \in D'$ je neprekidna distribucija ako svaki niz test funkcija $\{\varphi_k\}$ koji konvergira ka φ u $D(\Omega)$, važi da $\langle f, \varphi_k \rangle$ konvergira ka $\langle f, \varphi \rangle$.

Iz linearnosti $f \in D'$, može se dobiti pojednostavljena definicija:

$$\varphi_k \rightarrow 0 \Rightarrow \langle f, \varphi_k \rangle \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Na dalje, distribucija će biti označena sa f , a broj koji ona dodeljuje nekoj test funkciji sa $\langle f, \varphi \rangle$. $f : \varphi \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$, $\varphi \in D(\Omega)$.

Skup distribucija $D(\Omega)$ čini vektorski prostor, pri čemu su operacije sabiranja i množenja definisane nad poljem kompleksnih brojeva

$$\langle f + g, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle + \langle g, \varphi \rangle,$$

$$\langle cf, \varphi \rangle = c \langle f, \varphi \rangle.$$

Teorema 6. Linearna funkcionela $f : D(\Omega) \rightarrow C$ je iz $D'(\Omega)$ ako i samo ako za svaki niz $(\varphi_v) \subset D(\Omega)$ koji konvergira ka nuli u $D(\Omega)$ sledi da $\langle f, \phi_v \rangle$ konvergira ka nuli u skupu kompleksnih brojeva.

Dokaz. Na osnovu Teoreme 4 pod 1., sledi da $f \in D'(\Omega)$ ako i samo ako je $f \in D'(K)$ za svaki kompaktan skup $K \subset \Omega$. Pošto su prostori $D(K)$ sa prebrojivom bazom okolina nule, neprekidnost i nizovne neprekidnost su ekvivalentne. $\square$

2.2 Prostor distribucija

Teorema 7. *Potreban i dovoljan uslov da linearna funkcionala $f : D(\Omega) \rightarrow C$ bude distribucija je da za svaki kompaktan skup $K \subset \Omega$ postoje konstante $C > 0$ i $m \in N_0$ tako da za svako $\phi \in D(K)$ važi*

$$|\langle f, \phi \rangle| \leq Cp_{K,m}(\phi).$$

Dokaz. Ako niz $(\phi_v) \subset D(\Omega)$ konvergira ka nuli, tada iz $|\langle f, \phi \rangle| \leq Cp_{K,m}(\phi)$ sledi da niz $\langle f, \phi_v \rangle$ konvergira ka nuli u C , pa je uslov dat u teoremi dovoljan za neprekidnost od f .

Pretpostavimo da je f neprekidno, i da uslov koji je dat u teoremi ne važi. Tada je moguće konstruisati niz $(\phi_v) \subset D(K)$ za neki kompaktan skup K , tako da je

$$|\langle f, \phi \rangle| > j_{p_{K,j}}(\phi_j), \quad j \in N.$$

Uvodi se novi niz $\psi_j = \frac{\phi_j}{\langle f, \phi_j \rangle}$, $j \in N$. Iz prethodne nejednakosti se dobija

$$p_{K,j}(\psi_j) = \frac{p_{K,j}(\phi_j)}{\langle f, \phi_j \rangle} \leq \frac{1}{j}, \quad j \in N.$$

Niz (ψ_j) konvergira ka nuli u $D(K)$ jer za svako $m \in N$ važi

$$p_{K,j}(\psi_j) \leq p_{K,j}(\psi_j) \leq \frac{1}{j}, \quad j \geq m.$$

Sa druge strane $\langle f, \psi_j \rangle = 1$ za svako $j \in N$, pa niz $(\langle f, \psi_j \rangle)$ ne može da konvergira ka nuli, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je f neprekidna nad $D(\Omega)$. $\square$

Ova teorema se često uzima za definiciju distribucije.

Definicija 8. Funkcija je apsolutno integrabilna na C ako je $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$, to jest integral nad C od $|f(x)|$ postoji i konačan je.

Definicija 9. Neka je $f(x) : \Omega \rightarrow R$. Funkcija f je lokalno integrabilna ako je

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x)$$

apsolutno konvergentan za sve $\varphi \in D(\Omega)$.

Skup svih lokalno integrabilnih funkcija nad Ω se označava sa $L^1_{loc}(\Omega)$.

Da bi funkcija bila lokalno integrabilna, integral $\int_B |f(x)|dx$ mora biti konačan na svakom ograničenom skupu $B \subset \Omega$ koji ne preseca rub skupa Ω . Iz ovoga sledi da je svaka apsolutno integrabilna funkcija i lokalno integrabilna, ali obrnuto ne važi. Svaka lokalno integrabilna funkcija definiše distribuciju na sledeći način:

Neka je $f : \Omega \rightarrow C$, $\Omega \subseteq R^n$, lokalno integrabilna funkcija i neka $\varphi \in D(\Omega)$. Sad može da se definiše

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx.$$

Broj $\langle f, \varphi \rangle$ linearno i neprekidno zavisi od φ , pa f može da se posmatra kao linearna, neprekidna funkcionala na prostoru svih test funkcija, to jest $f \in D'(\Omega)$. Preciznije, svaka lokalno integrabilna funkcija definiše distribuciju. Takve distribucije su *regularne distribucije*.

2.2 Prostor distribucija

Ako dve neprekidne funkcije generišu istu regularnu distribuciju, onda su one identične. Dakle, svaka test funkcija iz $D(\Omega)$ jednostavno određuje regularnu distribuciju u $D'(\Omega)$, i obrnuto.

Ova osobina se može proširiti na funkcije koje su lokalno integrabilne, bez pretpostavki o neprekidnosti. U Lebegovom integralu se na skupu mere nula mogu izmeniti vrednosti funkcije $f(x)$, a da se pri tom ne menja odgovarajuća regularna distribucija.

Teorema 8. *Ako su $f(x)$ i $g(x)$ lokalno integrabilne funkcije sa istim regularnim distribucijama*

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D(\Omega),$$

tada se $f(x)$ i $g(x)$ razlikuju najviše na skupu mere nula.

Primer 1. *Funkcije $g \equiv 0$ i*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

generišu istu distribuciju, to jest važi

$$\int g(x)\varphi(x)dx = 0 \quad i \quad \int f(x)\varphi(x)dx = 0.$$

Primer 2. *Neka je μ mera verovatnoće na R^n . Takođe, ona je distribucija koja se definiše na sledeći način*

$$\langle \mu, \varphi \rangle = \int \varphi d\mu, \quad \varphi \in D(R^n).$$

Uslov $\mu(R^n) = 1$ može da se zapiše $\int 1d\mu = 1$, odnosno ako je $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = 1$ tada $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mu, \varphi_k \rangle = 1$.

Napomena Diferenciranje, integracija i neki drugi granični procesi se mogu proširiti na skup $D'(\Omega)$. Međutim, operacije kao što su množenje i kompozicija funkcija se ne mogu preneti na distribucije u opštem slučaju.

• Singularne distribucije

Definicija 10. Distribucije koje nisu regularne su singularne.

Najpoznatija singularna distribucija je Dirakova delta distribucija. Njena oznaka je $\delta(x)$ čiji je integral skoncentrisan u tački $x = 0$, odnosno, $\delta(x) = 0$ za sve $x \neq 0$, i važi da je $\int \delta(x)dx = 1$ za bilo koji interval koji sadrži tačku $x = 0$.

Dirakova delta distribucija zadovoljava sledeću jednakost

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \varphi \in D(R^n).$$

Neki bitni identiteti koji važe za Dirakovu delta distribuciju:

- $\delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{|\alpha|}$, za $\alpha \neq 0$.

Neka su sa $\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|}$, gde su x_i realne nule funkcije $g(x)$ i $g'(x) \neq 0$. Tada važi

2.3 Izvod distribucije

- $\delta(\alpha g(x)) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(g(x))$.
- Ako se gornji identitet zapiše u obliku integrala, dobija se

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(g(x)) dx = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}.$$

- **Nosač distribucije**

Definicija 11. Nosač distribucije $f \in D'(\Omega)$ je skup tačaka iz Ω koje imaju okolinu u kojoj je f nije jednaka sa distribucijom 0. Nosač distribucije se označava sa $\text{supp} f$.

Dakle, nosač distribucije $f \in D'(\Omega)$ je komplement unije svih otvorenih skupova u Ω nad kojim je $f = 0$. Iz definicije se može zaključiti da je nosač distribucije zatvoren u Ω , jer je njegov komplement otvoren skup.

2.3 Izvod distribucije

Prednost prostora distribucija u odnosu na klasičnu analizu je ta da svaka distribucija ima izvode bilo kog reda, pri čemu je diferenciranje neprekidna operacije. Izvod za diferencijabilnu i integrabilnu funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se definiše na sledeći način

$$\int_{\mathbb{R}} f' \varphi dx = - \int_{\mathbb{R}} f \varphi' dx,$$

gde je sa φ označena test funkcija. φ je jednaka nuli izvan nekog ograničenog skupa, pa granice integrala ne predstavljaju problem. Primenom parcijalne integracije se dobija izraz

$$\int_{\mathbb{R}} f' \varphi dx = f \varphi|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} f \varphi' dx,$$

a kako je $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$, dobija se gornja formula.

Definicija 12. Neka je S distribucija, njen izvod S' se definiše na sledeći način

$$\langle S', \varphi \rangle = -\langle S, \varphi' \rangle.$$

Iz definicije sledi da distribucija ima izvod ako ga ima test funkcija. Kako su test funkcije glatke funkcije, sledi da sve distribucije imaju izvode (opštije ovo važi za sve izvode bilo kog reda).

Ova definicija predstavlja proširenje definicije izvoda, ali osobine izvoda i dalje važe.

Na primer : za $S, V \in D'(\Omega)$ važi $(ST)' = S'T + ST'$.

Primer 3. U ovom primeru biće pokazano da je Dirakova delta distribucija izvod distribucije koju definiše Hevisajodva funkcija

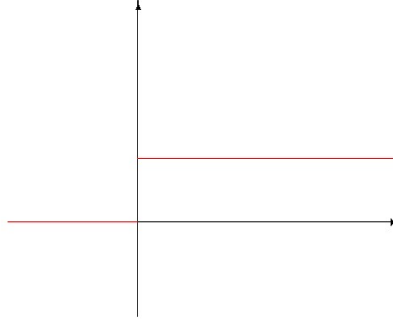
$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Direktnom primenom definicije dobija se

$$\langle \theta'(x), \varphi(x) \rangle = -\langle \theta(x), \varphi'(x) \rangle = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle,$$

gde je $\varphi(\infty) = 0$, jer φ je test funkcija koja ima kompaktan nosač.

2.4 Primeri distribucija



Slika 1: Hevisajdova funkcija

Prvi izvod Dirakove delte je dat sa

$$\langle \delta'(x), \varphi(x) \rangle = \langle \delta(x), \varphi'(x) \rangle = -\varphi'(0).$$

On može da se uopšti sa

$$\langle \delta^\alpha(x), \varphi(x) \rangle = (-1)^{|\alpha|} \varphi^\alpha(0).$$

U sledećoj teoremi su date nekoliko osnovnih operacija sa distribucijama.

Teorema 9. *Neka su $f_1, f_2 \in D'(\Omega)$, $\varphi \in D(\Omega)$, $s \in C^\infty(R^n)$ i $\alpha \neq 0$ tada važi*

- $\langle f_1 + f_2, \varphi \rangle = \langle f_1, \varphi \rangle + \langle f_2, \varphi \rangle$,
- $\langle fs, \varphi \rangle = \langle f, s\varphi \rangle$,
- $\langle f(x-y), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \varphi(x+y) \rangle$,
- $\langle f(\alpha x), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{\alpha} \langle f(x), \varphi(\frac{x}{\alpha}) \rangle$.

2.4 Primeri distribucija

Primeri koji će ovde biti navedeni će se koristiti kasnije kada se bude proučavala primena Furijeove analize u finansijama.

Najpre će se uvesti pojam Košijeve glavne vrednosti integrala.

Definicija 13. Funkcija $f(z)$ je holomorfna na nekom skupu Ω u C ako ima neprekidan prvi izvod u svakoj tački tog skupa. Njena restrikcija na $\Omega \cap R$ je realna analitička funkcija.

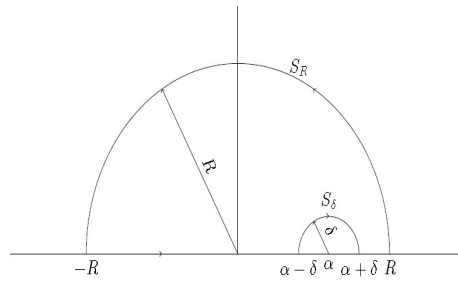
Funkcija je realna analitička ako i samo ako je jednaka razvoju u Tejlorov red. Svaka realna analitička funkcija je glatka.

Neka je $f(z)$ homomorfna funkcija na gornjoj polovini kompleksne ravni i važi $|f(z)| \rightarrow 0$, kada $|z| \rightarrow \infty$, takođe na gornjoj polovini kompleksne ravni.

Posmatra se sledeći krivolinijski integral

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - \alpha} dz,$$

2.4 Primeri distribucija



Slika 2: Kontura C

gde je C kriva data na slici 2, a α realan broj. Pošto je $f(z)$ analitička unutar oblasti ograničene krivom C i na njoj, onda to važi i za funkciju $\frac{f(z)}{z-\alpha}$, pa za dat krivolinijski integral važi

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = 0.$$

Ovo je posledica Koši-Gursatove teoreme.

Teorema 10 (Koši-Gursatova teorema). *Neka je U otvoren i povezan skupu u C i neka je $f : U \rightarrow C$ analitička funkcija, a $f'(z)$ neprekidna na U . Neka je C kriva na U čija se početna i krajnja tačka poklapaju. Tada je*

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

Krivolinijski integral $\oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha} dz$ se može raspisati na sledeći način

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = \int_{-R}^{\alpha-\delta} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz + \int_{S_\delta} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz + \int_{\alpha+\delta}^{R+} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz + \int_{S_R} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = 0,$$

gde je δ poluprečnik malog polukruga S_δ sa centrom u $x = \alpha$, a R je poluprečnik velikog polukruga S_R sa centrom u koordinatnom početku; δ je proizvoljno mali broj, a R proizvoljno veliki broj.

Kako se posmatraju beskonačno male vrednosti za δ , tada veličina

$$\int_{-R}^{\alpha-\delta} \frac{f(x)}{x-\alpha} dx + \int_{\alpha+\delta}^{R+} \frac{f(x)}{x-\alpha} dx$$

se naziva Košijeva vrednost integrala za funkciju $\frac{f(x)}{x-\alpha}$ i označava se sa

$$\int_{-R}^{R+} \frac{f(x)}{x-\alpha} dx$$

ili kraće sa $p.v.f(x)$. Može se pokazati da važi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-R}^{R+} \frac{f(x)}{x-\alpha} dx = - \lim_{\delta \rightarrow \infty} \int_{S_\delta} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = -(-i\pi)f(\alpha) = i\pi f(\alpha).$$

2.4 Primeri distribucija

Primer 4. Kao primer singularne distribucije posmatra se Košijeva glavna vrednost divergentnog integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n).$$

Može se primetiti da funkcija $\frac{1}{x}$ nije lokalno integrabilna u okolini nule. Iz definicije se dobija

$$\begin{aligned} \langle p.v. \frac{1}{x} \rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{1}{x} dx. \\ \langle p.v. \frac{1}{x} \rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0) + \varphi(0)}{x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \varphi(0) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{1}{x} dx. \end{aligned}$$

Kako je $\frac{1}{x}$ neparna funkcija drugi integral nestaje i dobija se

$$\langle p.v. \frac{1}{x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx.$$

Primer 5. Neka je definisana funkcija $g^+(x)$ na sledeći način

$$g^+(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x + i\epsilon}.$$

Direktnom primenom definicije, dobija se

$$\begin{aligned} \langle g^+(x), \varphi(x) \rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{\varphi(x)}{x + i\epsilon} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{\varphi(x) - \varphi(0) + \varphi(0)}{x + i\epsilon} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x + i\epsilon} dx + \varphi(0) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x + i\epsilon} \\ &= \langle p.v. \frac{1}{x}, \varphi(x) \rangle + \varphi(0) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x + i\epsilon}. \end{aligned}$$

Ako se sad posmatra integral

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x + i\epsilon}$$

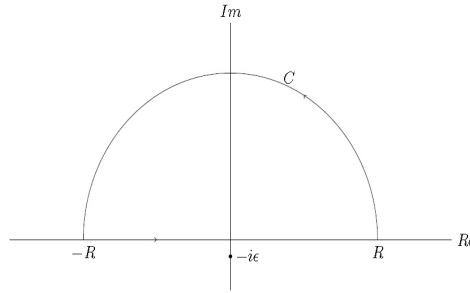
i sledeća slika dati integral se može posmatrati kao kompleksni integral nad krivom C sa centrom u $z = i\epsilon$.

$$\oint_C \frac{1}{x + i\epsilon} dz = \int_{-R}^R \frac{1}{x + i\epsilon} dx + i \int_0^\pi \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho e^{i\theta} + i\epsilon} d\theta,$$

gde je $z = \rho e^{i\theta}$ i $\rho = |R|$. Kada $\epsilon \rightarrow 0$ i $\rho \rightarrow \infty$ dobija se

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x + i\epsilon} dx = -i \int_0^\pi d\theta = -i\pi.$$

2.5 Temperirane funkcije (distribucije sporog rasta)



Dakle ,

$$\begin{aligned}\langle g^+(x), \varphi(x) \rangle &= \langle p.v. \frac{1}{x}, \varphi(x) \rangle - i\pi \varphi(0) \\ &= \langle p.v. \frac{1}{x}, \varphi(x) \rangle - i\pi \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle \\ &= \langle p.v. \frac{1}{x} - i\pi \delta(x), \varphi(x) \rangle.\end{aligned}$$

Prema tome:

$$g^+(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x + i\epsilon} = p.v. \frac{1}{x} - i\pi \delta(x).$$

2.5 Temperirane funkcije (distribucije sporog rasta)

Temperirane distribucije predstavljaju potprostor od $D'(R^n)$. One se definišu na skupu test funkcija koji je širi od $D(R^n)$. Ovo proširenje klase test funkcija se zove prostor brzo opadajućih funkcija. Za razliku od $D(R^n)$, prostor brzo opadajućih funkcija je invarijantan u odnosu na Furijeovu transformaciju.

• Prostor brzo opadajućih funkcija

Neka je $t \in R^n$ i neka je $|t| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2}$.

Definicija 14. Kompleksna funkcija $\varphi \in C^\infty(R^n)$ koja zadovoljava da za sve ne-negativne cele brojeve $m, k_1, k_2, \dots, k_n$ važi:

$$|t|^m \left| \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial t_1^{k_1} \partial t_2^{k_2} \dots \partial t_n^{k_n}} \varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) \right| \leq C_{m, k_1, k_2, \dots, k_n},$$

naziva se brzo opadajuća funkcija .

Nejednakost iz prethodne definicije može da se kraće zapiše sa

$$|t|^m \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} \varphi(t) \right| \leq C_{m, k}, \quad t \in R^n, \quad k \in N_0^n, \quad m \in N_0.$$

Funkcije $\varphi(t)$ iz gornje definicije su takve da kada $t \rightarrow \infty$, onda $\varphi(t)$ i svi njeni parcijalni izvodi opadaju ka nuli brzinom većom od $\frac{1}{|t|^m}$. Broj na desnoj strani jednačine je konstanta koja zavisi od $m, k_1, k_2, \dots, k_n$.

Skup brzo opadajućih funkcija se označava sa $S(R^n)$. U odnosu na uobičajene operacije $S(R^n)$ predstavlja vektorski prostor, i važi da ako je φ iz $S(R^n)$ onda su

2.5 Temperirane funkcije (distribucije sporog rasta)

i svi njeni parcijalni izvodi u $S(R^n)$.

Može se primetiti da važi $D(R^n) \subset S(R^n)$. sa druge strane, očigledno postoje funkcije u $S(R^n)$ koje nisu u $D(R^n)$, kao na primer $e^{-|t|^2}$, jer nema kompaktan nosač.

Takođe, u $S(R^n)$ je moguće uvesti topologiju, na primer uz pomoć konvergentnih nizova.

• Prostor temperiranih funkcija

Definicija 15. Prostor neprekidnih i linearnih funkcionala nad $S(R^n)$ se označava sa $S'(R^n)$. Elementi od $S'(R^n)$ se nazivaju temperirane distribucije ili distribucije sporog rasta.

Teorema 11. $S'(R^n)$ je potprostor od $D'(R^n)$.

Da bi lokalno integrabilna funkcija dodelila konačan broj $\langle f, \varphi \rangle$ funkciji $\varphi \in S(R^n)$ na sledeći način

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt,$$

ponašanje funkcije $f(t)$, kada $t \rightarrow \infty$ se mora ograničiti na takav način da integral konvergira za sve $\varphi \in S(R^n)$.

Definicija 16. Funkcija $f \in L^1_{loc}(R^n)$ se naziva sporo rastuća ako postoji $m \in \mathbb{Z}$ tako da

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |t|^m f(t) = 0.$$

Temperirana distribucija definisana lokalno integrabilnom sporo rastućom funkcijom preko $\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt$, se naziva regularna temperirana distribucija. Pošto sve funkcije iz $S(R^n)$ zadovoljavaju uslov $\lim_{t \rightarrow \infty} |t|^m f(t) = 0$ one generišu regularne temperirane distribucije.

Takođe se može pokazati da su sve distribucije iz $D'(R^n)$ sa ograničenim nosačem temperirane distribucije. Zato su delta funkcionala i njeni izvodi temperirane distribucije.

Kako je $S'(R^n)$ potprostor $D'(R^n)$, operacije koje se definišu na distribucijama iz $D'(R^n)$ se odnose i na distribucije iz $S'(R^n)$. Međutim, kada se neke primene na distribuciju iz $S'(R^n)$ rezultat ne mora biti u $S'(R^n)$, ali kada to važi, to jest kada na temperiranu distribuciju se primeni operacija i ponovo nastane temperirana distribucija, kaže se da je prostor $S'(R^n)$ zatvoren nad tom operacijom.

Operacije za koje to važi su :

- sabiranje distribucija,
- množenje distribucija konstantom,
- translacija distribucija,
- množenje nezavisne promenljive pozitivnom konstantom, to jest dilatacijama,
- diferenciranje distribucija.

3 Konvolucija

Kako nije moguće odrediti proizvod dve distribucije, kao na primer kod proizvoda Dirakove delta distribucije δ i distribucije $p.v.\frac{1}{x}$

$$(\delta \times x) \times p.v.\frac{1}{x} = 0,$$

ali, sa druge strane važi

$$\delta \times (x \times p.v.\frac{1}{x}) = \delta,$$

pri čemu $\phi \in S(n)$ i $p.v.\frac{1}{x}(\phi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\phi(x)}{x}$, uvodi se pojam konvolucije, koja kao rezultat daje treću funkciju. koja najčešće predstavlja modifikovanu verziju jedne od originalnih funkcija. Ona ima veliku primenu u nauci, inženjerstvu i matematici: obrada slika (digitalna obrada, optika (fotografija izvan fokusa je konvolucija oštne slike sa funkcijom objektiva), u programima za obradu slika (zamućenje slike)), digitalna obrada podataka (statistika i analitička hemija (kanaliza spektroskopskih podataka)), akustika (reverberacija predstavlja konvoluciju prvobitnog zvuka i ehoa koji okružuje izvor zvuka; u elektronskoj muzici prouzrokuje stvaranje spektralne ili ritmičke strukture zvuka), elektrotehnika (konvolucija ulaznog signala sa impulsivnim odzivom daje linearno-vremenski-invarijantni sistem (LTI)), teorija verovatnoće (raspodela verovatnoće sume od dve nezavisne slučajne promenljive je konvolucija njihovih pojedinačnih distribucija)...

Takođe, ona predstavlja ključni alat za izvođenje formule za određivanje hartije od vrednosti.

Konvolucija će se najpre definisati na funkcijama a zatim i na distribucijama i temperianim distribucijama.

(U ovom poglavlju korišćeno je [2], [7], [8], [15] i [16] iz spiska literature.)

3.1 Konvolucija funkcija

Definicija 17. Konvolucija dve funkcije f i g na konačnom intervalu $[0, t]$ se definiše na sledeći način

$$(f * g) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx,$$

pri čemu se pretpostavlja da je integral na desnoj strani jednakosti dobro definisan.

Konvolucija na beskonačnom intervalu $(-\infty, \infty)$ sa promeljivom t je data sa

$$(f * g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(t-x)dx.$$

Da bi nesvojstveni integral konvergirao, dovoljno je da su f i g apsolutno integrabilne funkcije.

Takođe, važno je napomenuti da je rezultat konvolucije dve Gausovske funkcije, takođe Gausovska funkcija:

$$f = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{\left(\frac{-(t-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)},$$

3.2 Konvolucija brzo opadajuće funkcije i temperirane distribucije

$$g = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{\left(\frac{-(t-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)},$$

gde su σ_1 , σ_2 , μ_1 i μ_2 unapred zadati brojevi, pa je

$$f * g = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} e^{\left(\frac{-(t-(\mu_1+\mu_2))^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right)}.$$

U teoriji verovatnoće važi da je raspodela verovatnoća zbira dve nezavisne slučajne promenljive konvolucija njihovih individualnih raspodela. Ako su X_1 i X_2 dve nezavisne slučajne promenljive sa gustinama $\varphi_{X_1}(x_1)$ i $\varphi_{X_2}(x_2)$ respektivno, onda je gustina slučajne promenljive $Y = X_1 + X_2$ data sa

$$\varphi_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{X_1}(y - x_2) \varphi_{X_2}(x_2) dx_2.$$

Neka su $f, g, h \in R$ proizvoljne funkcije, a a konstanta. Tada važe sledeće osobine operacije konvolucije

- Komutativnost: $f * g = g * f$,
- Asocijativnost: $f * (g * h) = (f * g) * h$,
- Distributivnost: $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$.
- $a(f * g) = (af) * g = f * (ag)$,
- $(f * g)' = f' * g = f * g'$.

3.2 Konvolucija brzo opadajuće funkcije i temperirane distribucije

U ovom delu će biti definisana konvolucija brzo opadajuće funkcije $\varphi \in S(\Omega)$ i temperirane distribucije $f \in S'(\Omega)$.

Neka je $\psi \in S(\Omega)$. Tada je

$$(\varphi * \psi)(x) = \int \varphi(x - y) \psi(y) dy.$$

Ovde će se proučiti kako $\varphi * f$ deluje na $\psi \in S(\Omega)$, ako $f \in S'(\Omega)$ i ako $\varphi \in S(\Omega)$. Integral

$$\int (\varphi * \psi)(x) \psi(x) dx$$

može da se zapiše i na sledeći način

$$\begin{aligned} \iint \varphi(x - y) f(y) \psi(x) dx dy &= \int \left[\int \varphi(x - y) \psi(x) dx \right] f(y) dy \\ &= \int (\tilde{\varphi} * \psi)(y) f(y) dy \end{aligned}$$

gde je $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$.

Dakle, konvolucija $\varphi * f$, $f \in S'(\Omega)$, $\varphi \in S(\Omega)$ se definiše kao distribucija $\varphi * f \in S'(\Omega)$ koja na test funkciju $\psi \in S(\Omega)$ deluje na sledeći način

$$\langle \varphi * f, \psi \rangle = \langle f, \tilde{\varphi} * \psi \rangle.$$

3.3 Konvolucija distribucija

3.3 Konvolucija distribucija

Da bi se uveo pojam konvolucije distribucije, najpre se mora uvesti pojam direktnog proizvoda distribucija.

• Direktan proizvod distribucija

Neka je sa R_t označen jednodimenzionalni Euklidski prostor koji se sastoji od svih realnih vrednosti za t ; $R_{x,y}$ je dvodimenzionalni realni prostor koji se sastoji od svih realnih parova (x, y) .

Neka je D_t prostor test funkcija definisanih na R_t , a $D_{t,\tau}$ prostor test funkcija definisanih nad $R_{t,\tau}$. Isto važi i za prostore D' , S , S' .

Definicija 18. Neka su date dve distribucije $f(t) \in D'_t$, $g(\tau) \in D'_\tau$ i $\varphi(t, \tau) \in D_{t,\tau}$. direktni proizvod se definiše izrazom

$$\langle f(t) \times g(\tau), \varphi(t, \tau) \rangle \equiv \langle f(t), \langle g(\tau), \varphi(t, \tau) \rangle \rangle.$$

Pri tome $\langle g(\tau), \varphi(t, \tau) \rangle$ je test funkcija iz D_t .

Može se primetiti da se direktni proizvod distribucija $f(t) \times g(\tau)$ može definisati kao funkcionala na prostoru $D_{t,\tau}$.

Teorema 12. Direktni proizvod dve distribucije $f(t)$ i $g(\tau)$ je distribucija $f(t) \times g(\tau)$ iz $D'_{t,\tau}$.

Dokaz. Treba pokazati da je $f(t) \times g(\tau)$ neprekidna linearna funkcionala na prostoru $D'_{t,\tau}$.

Očigledno je da važi linearnost, a da bi se pokazalo da je $f(t) \times g(\tau)$ neprekidna funkcionala, pokazuje se da niz brojeva

$$\{\langle f(t), \langle g(\tau), \varphi_n(t, \tau) \rangle \rangle\}_{n=1}^\infty$$

konvergira ka nuli kad god niz test funkcija $\{\varphi_n(t, \tau)\}$ konvergira ka nuli u $D_{t,\tau}$, odnosno $\{\varphi_n(t, \tau)\}_{n=1}^\infty \xrightarrow{D_{t,\tau}} 0 \Rightarrow \{\langle f(t), \langle g(\tau), \varphi_n(t, \tau) \rangle \rangle\} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$

Kako je $f(t)$ distribucija, ovo će biti tačno ako se pokaže da niz test funkcija

$$\psi_n(t) \equiv \langle g(\tau), \varphi(t, \tau) \rangle$$

konvergira ka nuli u D_t .

Sada će se pokazati da niz $\psi_n^{(k)}$ uniformno konvergira ka nuli u R_t za svako $k \in N$. Pretpostavimo suprotno, to jest da postoje $k, \epsilon > 0$ i niz tačaka $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ tako da $|\psi_n^{(k)}(t_n)| \geq \epsilon$, to jest

$$|\psi_n^{(k)}(t_n)| = |\langle g(\tau), \frac{\partial^k}{\partial t^k} \varphi_n(t, \tau)|_{t=t_n} \rangle| \geq \epsilon.$$

Sa druge strane niz $\{\varphi_n(t, \tau)\}_{n=1}^\infty$ konvergira ka nuli u $D_{t,\tau}$ pa i test funkcija iz $D_{t,\tau}$

$$\lambda_n(\tau) \equiv \partial t^k \varphi_n(t, \tau), \quad \text{za } t = t_n.$$

konvergira ka nuli u D_t .

Kako je $g(\tau)$ distribucija, tada

$$\psi_n^k(t_n) = \langle g(\tau), \lambda_n(\tau) \rangle \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

što je u kontradikciji sa $|\psi_n^{(k)}(t_n)| = |\langle g(\tau), \frac{\partial^k}{\partial t^k} \varphi_n(t, \tau) \rangle| \geq \epsilon, \quad \text{za } t = t_n.$

Time je teorema dokazana. $\square$

3.3 Konvolucija distribucija

Dokaz sledeće teoreme je analogan dokazu prethodne, pa će ona biti navedena bez dokaza.

Teorema 13. *Ako je $f(t) \in S'_t$ i $g(\tau) \in S'_\tau$, tada je $f(t) \times g(\tau) \in S'_{t,\tau}$, to jest direktan proizvod dve distribucije koje su temperirane je opet temperirana distribucija.*

Kada je funkcija $\varphi(t, \tau) \in D_{t,\tau}$ oblika $\psi(t)\theta(t)$, gde su $\psi(t) \in D_\tau$ i $\theta(t) \in D_\tau$ tada važi :

$$\begin{aligned}\langle f(t) \times g(\tau), \psi(t)\theta(t) \rangle &= \langle f(t), \langle g(\tau), \psi(t)\theta(t) \rangle \rangle \\ &= \langle f(t), \psi(t) \langle g(\tau), \theta(t) \rangle \rangle \\ &= \langle f(t), \psi(t) \rangle \langle g(\tau), \theta(t) \rangle, \\ \langle g(\tau) \times f(t), \psi(t)\theta(t) \rangle &= \langle g(\tau), \theta(t) \rangle \langle f(t), \psi(t) \rangle \\ &= \langle f(t) \times g(\tau), \psi(t)\theta(t) \rangle.\end{aligned}$$

Teorema 14. *Nosač direktnog proizvoda dve distribucije je Dekartov proizvod njihovih nosača, to jest ako je Ω_f nosač distribucije $f(t)$ u Ω_g nosač distribucije $g(\tau)$, tada je nosač distribucije $f(t) \times g(\tau)$ skup $\Omega_f \times \Omega_g$.*

Dokaz. Ako se pretpostavi da se tačka t_0 nalazi izvan nosača distribucije $f(t)$ i na dalje će se pokazati da bilo koja tačka (t_0, τ_0) leži izvan nosača distribucije $f(t) \times g(\tau)$ bez obzira na tačku τ_0 .

Za tačku t_0 postoji okolina Ω_{t_0} takva da je izraz $\langle f(t), \theta(t) \rangle$ identički jednak nuli, za svaku test funkciju $\theta(t)$ čiji je nosač sadržan u Ω_{t_0} .

Ako je $\phi(t, \tau)$ test funkcija čiji se nosač nalazi u $\Omega_{t_0} \times R_\tau$ ($\phi(t, \tau)$ je nula kad god t nije u Ω_{t_0}) tada je

$$\theta(t) \equiv \langle g(\tau), \phi(t, \tau) \rangle$$

test funkcija i njen nosač je sadržan u Ω_{t_0} . Zato važi

$$\langle f(t) \times g(\tau), \phi(t, \tau) \rangle = \langle f(t), \theta(t) \rangle = 0,$$

pa se tačka (t_0, τ_0) ne nalazi u nosaču distribucije $f(t) \times g(\tau)$.

Neka se tačke t_0 i τ_0 nalaze u nosačima distribucija $f(t)$ i $g(\tau)$, respektivno. Tada za bilo koju okolinu tačke (t_0, τ_0) iz $R_{t,\tau}$, se može izabrati test funkcija $\psi(t)\theta(\tau)$ čiji se nosač nalazi u ovoj okolini i $\langle f(t) \times g(\tau), \psi(t)\theta(\tau) \rangle$ je različito od nule, pa je zato nosač distribucije $f(t) \times g(\tau)$ skup $\Omega_f \times \Omega_g$. $\square$

Dalje će se pokazati da je direktan proizvod dve distribucije komutativna operacija.

Lema 1. *Prostor svih test funkcija oblika*

$$\phi(t, \tau) = \sum_n \psi_n(t)\theta_n(\tau),$$

gde je suma konačna i $\psi_n(t) \in D_t$, $\theta_n(\tau) \in D_\tau$ je gust u $D_{t,\tau}$.

Teorema 15. *Neka su $f(t) \in D'_t$ i $g(\tau) \in D'_\tau$ tada*

$$f(t) \times g(\tau) = g(\tau) \times f(t),$$

odnosno

$$\langle f(t), \langle g(\tau), \phi(t, \tau) \rangle \rangle = \langle g(\tau), \langle f(t), \phi(t, \tau) \rangle \rangle.$$

3.3 Konvolucija distribucija

Dokaz. Kako je pokazano da su $f(t) \times g(\tau)$ i $g(\tau) \times f(t)$ distribucije, pa su zato i neprekidne funkcionele na $D_{t,\tau}$, pa je dovoljno pokazati da jednakost

$$\langle f(t), \langle g(\tau), \phi(t, \tau) \rangle \rangle = \langle g(\tau), \langle f(t), \phi(t, \tau) \rangle \rangle$$

važi na test funkcijama oblika $\phi(t, \tau) = \sum_n \psi_n(t) \theta_n(\tau)$, pošto je prostor ovakvih test funkcija gust u $D_{t,\tau}$, pri čemu se koristi Han-Bahova teorema o neprekidnom proširenju linearne funkcionele sa gustog skupa na ceo prostor.

Primenom prethodne teoreme dobija se

$$\begin{aligned} \langle f(t) \times g(\tau), \sum_n \psi_n(t) \theta_n(\tau) \rangle &= \sum_n \langle f(t) \times g(\tau), \psi_n(t) \theta_n(\tau) \rangle \\ &= \sum_n \langle f(t), \psi_n(t) \rangle \langle g(\tau), \theta_n(\tau) \rangle. \end{aligned}$$

Slično za

$$\langle g(\tau) \times f(t), \sum_n \psi_n(t) \theta_n(\tau) \rangle = \sum_n \langle f(t), \psi_n(t) \rangle \langle g(\tau), \theta_n(\tau) \rangle.$$

□

Takođe važi da je direktan proizvod dve temperirane distribucije komutativna operacija.

• Konvolucija distribucija

Neka su $f(t)$ i $g(\tau)$ neprekidne funkcije sa ograničenim nosačima, i $\varphi \in D_\tau$. Neka je $h(t)$ regularna distribucija koja se definiše na sledeći nači

$$\langle h, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau.$$

Podintegralna funkcija je neprekidna i ima ograničen nosač u (t, τ) ravni.

Uvođenjem smene $x = \tau$, $t = x + y$ dobija se

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(y) \varphi(x + y) dx dy.$$

Konvolucija distribucija $f(t)$ i $g(\tau)$ se definiše

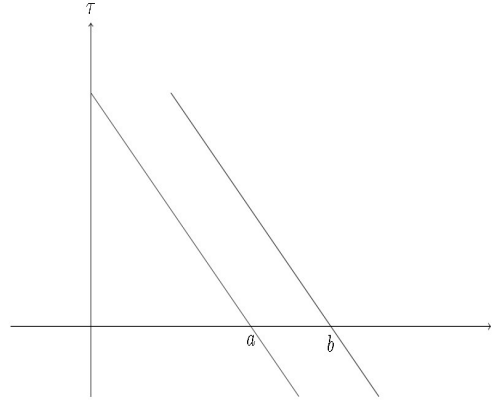
$$\langle f * g, \varphi \rangle \equiv \langle f(t) \times g(\tau), \varphi(t + \tau) \rangle \equiv \langle f(t), \langle g(\tau), \varphi(t + \tau) \rangle \rangle.$$

Iako je $\varphi(t + \tau)$ glatka funkcija, njen nosač nije ograničen u (t, τ) ravni, pa ona nije test funkcija. Preciznije, ako posmatra se funkcija $\varphi(x)$ koja je različita od nule samo na ograničenom skupu $[a, b]$. Ako se φ posmatra kao funkcija od $x + y$, gde su $x, y \in \mathbb{R}$, tada je nosač funkcije φ deo ravni koji zadovoljava nejednačinu $a < x + y < b$. Tačnije ovo je beskonačna traka konačne širine čije su ivice paralelne sa pravom $x + y = 0$. Ako nosač od $f(t) \times g(\tau)$ preseca nosač od $\varphi(t + \tau)$, na ograničenom skupu Ω tada važi

$$\langle f * g, \varphi \rangle \equiv \langle f(t) \times g(\tau), \lambda(t, \tau) \varphi(t + \tau) \rangle$$

gde je $\lambda(t, \tau)$ test funkcija iz $D_{t,\tau}$ koja je jednaka jedinici na nekoj okolini skupa Ω . Kako je $\lambda(t, \tau) \varphi(t + \tau)$ takođe test funkcija iz $D_{t,\tau}$, tada sa $\langle f * g, \varphi \rangle \equiv$

3.3 Konvolucija distribucija



Slika 3: Nosač funkcije $\varphi(t + \tau)$

$\langle f(t) \times g(\tau), \lambda(t, \tau) \varphi(t + \tau) \rangle$ može da se definiše funkcionala $f * g$ nad svim $\varphi \in D_{t, \tau}$. Bitno je napomenuti da se vrednost test funkcije izvan okoline nosača $f(t) \times g(\tau)$ može menjati bez uticaja na to koju vrednost $f(t) \times g(\tau)$ dodeljuje toj test funkciji. Sledeća teorema daje uslove pod kojim je presek nosača $f(t) \times g(\tau)$ i $\varphi(t + \tau)$ ograničen za sve $\varphi \in D$.

Teorema 16. *Neka su f i g distribucije iz R i neka je njihova konvolucija definisana sa*

$$\langle f * g, \varphi \rangle \equiv \langle f(t) \times g(\tau), \varphi(t + \tau) \rangle \equiv \langle f(t), \langle g(\tau), \varphi(t + \tau) \rangle \rangle.$$

*Tada je $f * g$ distribucija nad R ako je ispunjen bilo koji od sledećih uslova:*

1. *Ili f ili g ima ograničen nosač.*
2. *I f i g imaju nosač ograničen sa leve strane. item I f i g imaju nosač ograničen sa desne strane.*

Dokaz. Neka su Ω_f i Ω_g nosači za $f(t)$ i $g(\tau)$ respektivno.

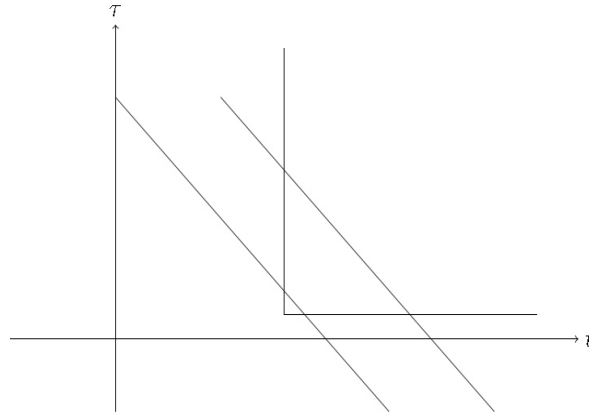
Sada će se posmatrati slučajevi definisani u teoremi:

1. $\Omega_f \times \Omega_g$ je sadržano ili u vertikalnoj ili u horizontalnoj traci konačne širine u ravni (t, τ) .
2. $\Omega_f \times \Omega_g$ se sadrži u četvrtini ravni (t, τ) ograničenoj sa donje strane horizontalnom linijom, i vertikalnom sa leve.
3. $\Omega_f \times \Omega_g$ se sadrži u četvrtini ravni (t, τ) ograničenoj sa gornje strane horizontalnom linijom, i vertikalnom sa desne.

U sva tri slučaja presek $\Omega_f \times \Omega_g$ sa nosačem $\varphi(t + \tau)$, $\varphi \in D$, biće ograničen skup. Zato, kao može se zaključiti da je konvolucija dobro definisana i određuje $f * g$ kao funkcionalu u $D_{t, \tau}$. $\square$

Lako se vidi da je konvolucija dve distribucije komutativna operacija.

3.4 Konvolucija temperiranih distribucija



Slika 4: Slučaj kada obe distribucije imaju ograničen nosač sa leve strane

Primer 6. Sledeće jednakosti važe u slučaju kada je konvolucija dobro definisana:

$$\langle f * g, \delta \rangle = \langle f, \varphi \rangle,$$

$$\langle \delta^m * f, \varphi \rangle = \langle f^m, \varphi \rangle.$$

Koristi se osobina komutativnosti konvolucija distribucija, to jest

$$\langle \delta * f, \varphi \rangle = \langle f * \delta, \varphi \rangle.$$

Pa se dobija

$$\langle f * \delta, \varphi \rangle = \langle f(t), \langle \delta(\tau), \varphi(t + \tau) \rangle \rangle = \langle f(t), \varphi(t) \rangle.$$

Odnosno $\delta * f = f$. Druga jednakost

$$\begin{aligned} \langle \delta^m * f, \varphi \rangle &= \langle f^m, \varphi \rangle = \langle f * \delta^m, \varphi \rangle \\ &= \langle f(t), \langle \delta^m(\tau), \varphi(t + \tau) \rangle \rangle \\ &= \langle f(t), (-1)^m \varphi^m(t) \rangle \\ &= \langle f^m, \varphi(t) \rangle. \end{aligned}$$

3.4 Konvolucija temperiranih distribucija

Neka su $f(x)$ i $g(y)$ dve distribucije iz S'_x i S'_y . Konvolucija ove dve funkcije, $f * g$ se definiše kao distribucija na $S_{x,y}$ preko direktnog proizvoda dve regularne distribucije

$$\begin{aligned} \langle f * g, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) \varphi(t) dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(y) \varphi(x + y) dx dy \end{aligned}$$

3.4 Konvolucija temperiranih distribucija

$$\langle f(x) \times g(y), \varphi(x+y) \rangle,$$

gde je u drugom redu uvedena smena $\tau = x$ i $t = x + y$.

Iako je funkcija φ iz S_x , funkcija $\varphi(x+y)$ nije funkcija u $S_{x,y}$. $\varphi(x+y)$ zadovoljava

$$|x+y|^m \left| \frac{\partial^{k_1} \partial^{k_2} \varphi(x+y)}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} \right| = |x+y|^m |\varphi^k(x+y)| \leq C_{mk}$$

za $k = k_1 + k_2$. Da bi $\varphi(x+y) \in S_{x,y}$ treba da važi

$$\sqrt{(x^2 + y^2)^m} \left| \frac{\partial^{k_1} \partial^{k_2} \varphi(x+y)}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} \right| \leq C_{mk_1 k_2}.$$

Zato se uvodi novi skup test funkcija koje su definisane na R^2 .

Neka je $\tilde{S}_{x,y}$ skup svih funkcija $\psi(x,y)$ čija je vrednost kompleksan broj koje zadovoljavaju jednakost

$$|x+y|^m \left| \frac{\partial^{k_1} \partial^{k_2} \varphi(x+y)}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} \right| \leq C_{mk_1 k_2},$$

za sve $(x,y) \in R^2$, gde je $C_{mk_1 k_2}$ konstanta koja zavisi od m, k_1, k_2 .

Ako se ova definicija uporedi sa definicijom brzo opadajućih funkcija na R^2 , može se uočiti da je norma $\sqrt{x^2 + y^2}$ zamenjena normom $|x+y|$, a kako je $|x+y| \leq \sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2}$ onda važi da je $S_{x,y} \subset \tilde{S}_{x,y}$.

Niz $\{\psi_n(x,y)\}_{n=1}^\infty$ konvergira u $\tilde{S}_{x,y}$ ako za svaku funkciju $\psi_n \in \tilde{S}_{x,y}$ i za sve nenegativne cele brojeve m, k_1, k_2 niz

$$\left\{ |x+y|^m \left| \frac{\partial^{k_1} \partial^{k_2} \varphi(x+y)}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} \right| \right\}_{n=1}^\infty$$

Uniformno konvergira na celom R^2 .

Iz konvergencije u $S_{x,y}$ sledi konvergencija u $\tilde{S}_{x,y}$.

Neka je skup svih distribucija $\tilde{S}_{x,y}$ označen sa $(\tilde{S}_{x,y})'$. Tada važi $(\tilde{S}_{x,y})' \in S'_{x,y}$.

Neka je $f: R \rightarrow R$ apsolutno integrabilna funkcija i $\theta(y) = I_1(0, \infty)(y)$ Hevisajdova funkcija. Važi da je $f \in S'_x$ i $\theta \in S'_y$.

Lema 2. Neka je $\psi_n \in \tilde{S}_{x,y}$. Tada

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty |f(x)\theta(y)\psi(x,y)| dy dx < \infty.$$

Dokaz. Kako je $\psi_n \in \tilde{S}_{x,y}$, tada na osnovu nejednakosti $|x+y|^m \left| \frac{\partial^{k_1} \partial^{k_2} \varphi(x+y)}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} \right| \leq C_{mk_1 k_2}$, postoji $C_{000} > 0$ tako da je

$$|\psi(x,y)| \leq C_{000}, \quad (x,y) \in R^2.$$

Tada je integral

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty |f(x)\theta(y)\psi(x,y)| dy dx &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \theta(y)|f(x)||\psi(x,y)| dy dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty |f(x)||\psi(x,y)| dy dx. \end{aligned}$$

3.4 Konvolucija temperiranih distribucija

Neka je $K > 0$:

$$D_K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, |x + y| \leq K\},$$

$$\overline{D_K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, |x + y| > K\}.$$

Pa dalje imamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |f(x)| |\psi(x, y)| dy dx = \iint_{D_K} |f(x)| |\psi(x, y)| dy dx + \iint_{\overline{D_K}} |f(x)| |\psi(x, y)| dy dx.$$

Sada se posmatra svaki integral pojedinačno

$$\begin{aligned} \iint_{D_K} |f(x)| |\psi(x, y)| dy dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \int_{\max\{-K-x, 0\}}^{\max\{K-x, 0\}} |\psi(x, y)| dy dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \int_{\max\{-K-x, 0\}}^{\max\{K-x, 0\}} C_{000} dy dx \\ &= C_{000} \int_{-\infty}^{\infty} (\max\{K-x, 0\} - \max\{-K-x, 0\}) |f(x)| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| (K-x - (-K-x)) dx \\ &= 2KC_{000} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty. \end{aligned}$$

Neka je $m > 1$.

$$\begin{aligned} \iint_{\overline{D_K}} |f(x)| |\psi(x, y)| dy dx &\leq \iint_{\overline{D_K}} |f(x)| dy dx \frac{C_{m00}}{|x+y|^m} \\ &= C_{m00} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \left(\int_0^{\max\{-K-x, 0\}} \frac{1}{|x+y|^m} dy + \int_{\max\{K-x, 0\}}^{\infty} \frac{1}{|x+y|^m} dy \right) dx. \end{aligned}$$

Za $x \leq -K$ se dobija:

$$\begin{aligned} \int_0^{\max\{-K-x, 0\}} \frac{1}{|x+y|^m} dy &= \int_0^{-x-K} \frac{1}{(-x-y)^m} dy \\ &= \frac{1}{m-1} \frac{1}{K^{m-1}} - \frac{1}{m-1} \frac{1}{(-x)^{m-1}} \end{aligned}$$

Za $x > -K$ se dobija:

$$\begin{aligned} \int_{\max\{K-x, 0\}}^{\infty} \frac{1}{|x+y|^m} dy &= \int_0^{\infty} \frac{1}{(x+y)^m} dy \\ &= \frac{1}{m-1} \frac{1}{x^{m-1}} \end{aligned}$$

Za $x \leq K$ se dobija

$$\int_{\max\{K-x, 0\}}^{\infty} \frac{1}{|x+y|^m} dy = \int_{K-x}^{\infty} \frac{1}{(x+y)^m} dy$$

3.5 Konvolucija nizova brojeva

$$= \frac{1}{m-1} \frac{1}{K^{m-1}}$$

Zamenom ovih vrednosti u početni integral, dobija se

$$\begin{aligned} & \iint_{D_K} |f(x)| |\psi(x, y)| dy dx \\ & \leq \frac{C_{m00}}{m-1} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \left[\left(\frac{1}{K^{m-1}} - \frac{1}{(-x)^{m-1}} \right) I_{\{x \leq K\}} + \frac{1}{x^{m-1}} I_{\{x > K\}} + \frac{1}{K^{m-1}} I_{\{-K < x \leq K\}} \right] dx \\ & \leq \frac{C_{m00}}{m-1} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \left[\left(\frac{1}{K^{m-1}} - \frac{1}{(K)^{m-1}} \right) I_{\{x \leq K\}} + \frac{1}{x^{m-1}} I_{\{x > K\}} + \frac{1}{K^{m-1}} I_{\{-K < x \leq K\}} \right] dx \\ & \leq \frac{C_{m00}}{m-1} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \left[\frac{2}{K^{m-1}} I_{\{x \leq K\}} + \frac{1}{K^{m-1}} I_{\{x > K\}} + \frac{1}{K^{m-1}} I_{\{-K < x \leq K\}} \right] dx \\ & \leq \frac{C_{m00}}{(m-1)K^{m-1}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty, \end{aligned}$$

pa je tvrđenje pokazano. $\square$

Ako je $\{\psi_n(x, y)\}_{n=1}^{\infty}$ iz $\tilde{S}_{x,y}$, koji konvergira ka nuli u $\tilde{S}_{x,y}$ i važi da $\psi_n(x, y)$ uniformno konvergira na R^2 onda važi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)\theta(y)\psi_n(x, y)| dy dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Dakle, važi da je $f(x)\theta(y) \in (\tilde{S}_{x,y})'$, pa konvolucija $f * \theta$ se može definisati kao distribucija na $S_{x,y}$.

Da bi se primenila Furijeova transformacija u računanju cena opcija, potrebno je još da se definiše konvolucija verovatnoće P i Hevisajdove funkcije.

Ako je f gustina raspodele verovatnoće, na osnovu upravo dokazanog se može definisati konvolucija verovatnoće P (čija je gustina f) i funkcije θ sa

$$P * \theta \equiv \theta * f.$$

Konvolucija između verovatnoće P i funkcije θ se može definisati i na sledeći način:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(d\tau) \theta(t - \tau) \varphi(t) dt \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(dx) \theta(y) \varphi(x + y) dy \end{aligned}$$

gde $\varphi \in \tilde{S}_{x,y}$.

3.5 Konvolucija nizova brojeva

U ovom delu rada uvodi se pojam linearne konvolucije niza brojeva, koji će nadalje omogućiti računanje diskretne Furijeove transformacije, a takođe i kružne konvolucije čiji principi se koriste prilikom formiranja algoritma za računanje DFT.

3.5 Konvolucija nizova brojeva

Definicija 19. Neka su $x_1(n)$ i $x_2(n)$ dva konačna niza čije su dužine L i P respektivno. Linearna konvolucija ova dva niza je niz $x_3(n)$ dat sa

$$x_3(n) = \sum_0^{L+P-1} x_1(m)x_2(n-m),$$

čija je dužina $L + P - 1$.

Linearna konvolucija dva niza čije su dužine N ekvivalentna je kružnoj konvoluciji dva konačna niza dužine L i P , pri čemu je $N \geq L + P - 1$, pa se nizovi dopunjuju nulama. Drugim rečima, razlika između kružne i linearne konvolucije je u tome što se linearna konvolucija može primeniti na bilo koje nizove, dok kružna konvolucija može da se primeni samo na nizove koji su konačni, neprekidni ili diskretni, pa se ona definiše na sledeći način

$$x_3(n) = \sum_0^{N-1} x_1(m)x_2(n-m).$$

Takođe, kružna konvolucija može da koristi kako bi se videlo koliko članova niza se poklapa sa članovima niza iz linearne konvolucije. Kada je $P < L$ i primeni se kružna konvolucija na L članova niza, u konvoluciji učestvuju prvih $P - 1$ član, odnosno u ovde $L - P + 1$ član ostaje isti kao u konvoluciji.

• Blok konvolucija

Kružna i linearna konvolucija imaju veliku primenu u FIR filtriranju za obradu signala, to jest u konačnom impulsivnom odzivu i to na sledeći način: ulazni signal, se najpre deli na L delova jednakih dužina, a zatim svaki deo kovoluirsa sa impulsivnim odzivom i pri tom primenjuje ili kružna ili linearna konvolucija, a zatim se vrši filtracija dobijenih rezultata. Primenom lienarne ili kružne kovolucije postupak računanja se ubrzava i dobijaju se efikasni rezultati. Način obrade signala se naziva **blok konvolucija**.

Ova konvolucija koristi dva metoda za filtriranje signala u konačnom impulsivnom odzivu :

- metod dodavanja preklapanja
- metod čuvanja preklapanja

Oba ova metoda funkcionišu na isti način i koriste osobinu da je konvolucija linearno-vremenska- invarijantna operacija, tako da važi

$$y(n) = x(n) * h(n),$$

gde je opšti član dat sa

$$y_r(n) = x_r(n) * h(n),$$

a $h(n)$ impulsivni odziv konačne dužine.

Međutim, oni se razlikuju samo u članu $x_r(n)$ koji se dobija nakon podele ulaznog signala na L jednakih delova:

$$x(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_r(n).$$

3.5 Konvolucija nizova brojeva

Kod prvog metoda član $x_r(n)$ se definiše sa

$$x_r(n) = \begin{cases} x(n + rL), & 0 \leq n \leq L - 1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

a kod drugog metoda on se definiše sa

$$x_r(n) = \begin{cases} x(n + r(L - P + 1) - P + 1), & 0 \leq n \leq L - 1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Primenom formule $y(n) = x(n) * h(n)$ za oba metoda dobijaju se sledeći rezultati:

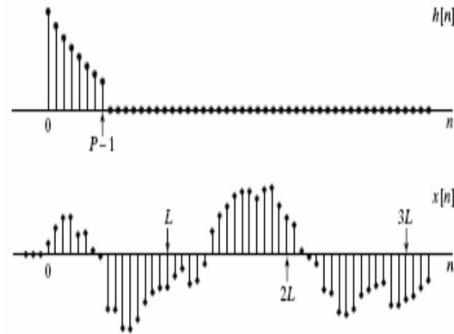
Metod dodavanja preklapanja

$$y(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y_r(n - rL)$$

Metod čuvanja podataka

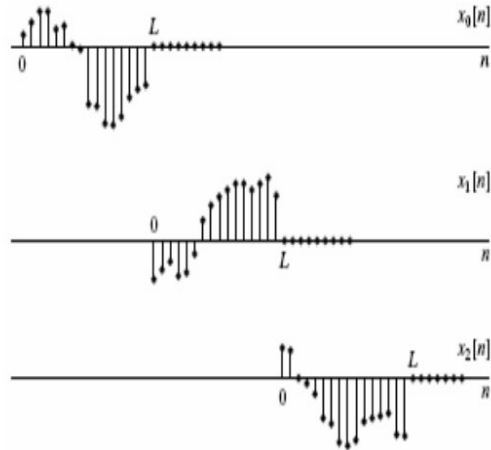
$$y(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y_r(n - r(L - P + 1) + P - 1).$$

Opisana blok konvolucija za oba metoda može da se prikaže sledećim slikama:

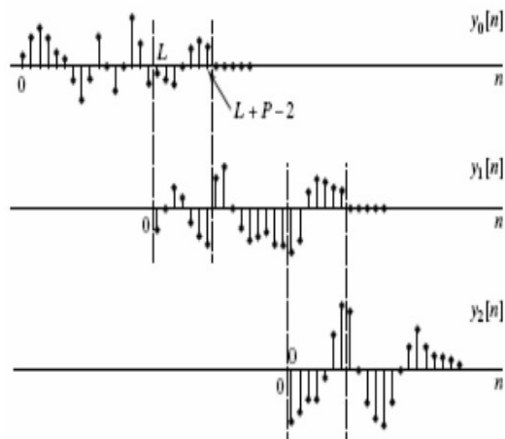


Slika 5: Nizovi koji se koriste za računanje blok konvolucije

3.5 Konvolucija nizova brojeva

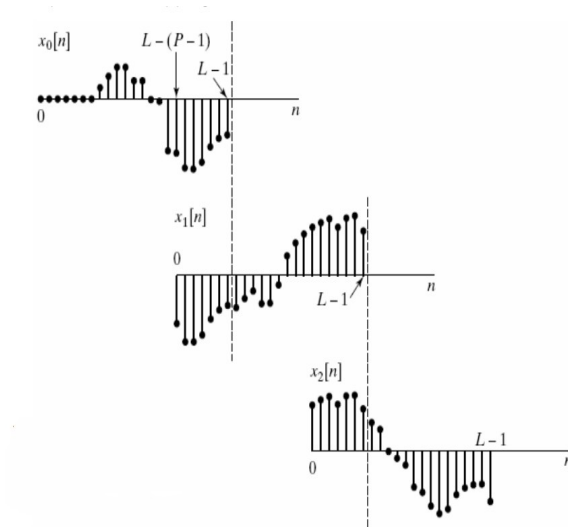


Slika 6: Podela niza $x(n)$ na L nizova jednakih dužina kod metoda preklapanja

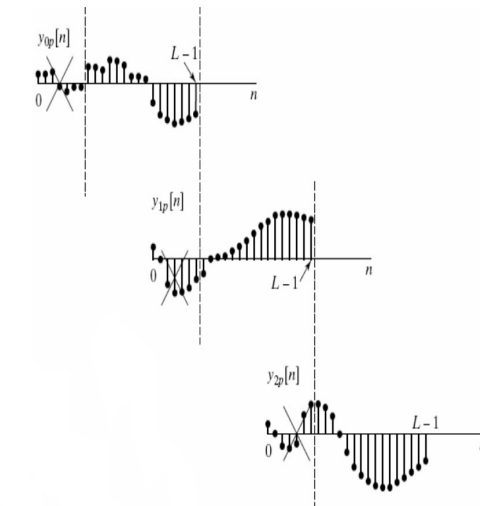


Slika 7: Primena metoda dodavanja preklapanja za FIR filtriranje

3.5 Konvolucija nizova brojeva



Slika 8: Podela niza $x(n)$ na L nizova jednakih dužina kod metoda čuvanja podataka



Slika 9: Primena metoda čuvanja preklapanja za FIR filtriranje

3.5 Konvolucija nizova brojeva

• Chirp algoritam za transformaciju

Chirp algoritam za transformaciju služi za računanje DTFT (diskretnu Furijeovu transformaciju u vremenu), pri čemu se on zasniva na blok konvoluciji i koristi se pretpostavka da je Chirp transformacija u suštini konvolucija DTFT frekvencije w_k za $k = 0, \dots, M-1$ na jediničnoj kružnici. Međutim, mana ovog algoritma je što nije optimalan za smanjenje kompleksnosti računanja. Ovaj algoritam ima veliku primenu u finansijskoj matematici jer predstavlja jedan od ključnih matematičkih aparata u određivanju cene opcije na krugu.

Pre nego što se uvede sam algoritam, najpre će se definisati diskretna Furijeova transformacija u vremenu.

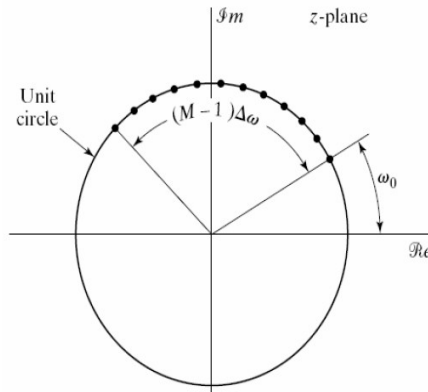
Definicija 20. Neka je $x(n)$ niz kompleksnih ili realnih brojeva, $n \in N$. Diskretna Furijeova transformacija za ovaj niz je periodična funkcija sa periodom 2π koja zavisi od frekvencije w :

$$X_{2\pi}(w) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)e^{-iwn}.$$

Neka je $x(n)$ niz dužine N i $X(e^{jw})$ njegova DTFT. Za izvođenje Chirp algoritma posmatra se podela niza $X(e^{jw})$ u M delova koji su jednako raspoređeni na jediničnoj kružnici sa frekvencijama

$$w_k = w_0 + k\Delta w, \quad k = 0, 1, \dots, M-1, \quad \Delta w = \frac{2\pi}{M}.$$

Kada je $w_0 = 0$ i $M = N$ tada se dobija specijalni slučaj DFT.



Slika 10: Podela jedinične kružnice na M jednakih delova

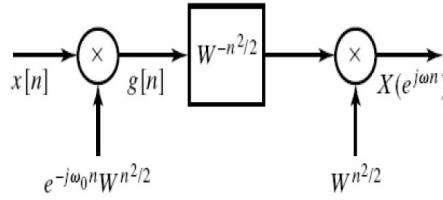
Vrednosti DTFT za w_k su date sa

$$X(e^{jw_k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jw_k n}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1.$$

Ako se W definiše sa

$$W = e^{-j\Delta w},$$

3.5 Konvolucija nizova brojeva



Slika 11: Blok diagram Chirp transformacije

tada gornja jednačina za DTFT postaje

$$X(e^{jw_k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jw_0 n} W^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1.$$

Na osnovu toga se može pokazati da je Chirp transformacija niza $X(e^{jw_k})$ predstavlja konvoluciju.

Onda, vrednost DTFT za w_k je data sa

$$X(e^{jw_k}) = \sum_0^{N-1} x(n) e^{-jw_0 n} W^{n^2/2} W^{k^2/2} W^{-(k-n)^2/2}.$$

Ako je $g(n) = x(n) e^{-jw_0 n} W^{n^2/2}$ tada gornja jednačina za DTFT može da se zapiše na sledeći način

$$X(e^{jw_k}) = W^{k^2/2} \left[\sum_0^{N-1} g(n) W^{-(k-n)^2/2} \right], \quad n = 0, 1, \dots, M-1.$$

Za interpretaciju gornje jednačine, može da se uvede poznatija formula, pri tom k i n menjaju mesta

$$X(e^{jw_k}) = W^{n^2/2} \left[\sum_{k=0}^{N-1} g(k) W^{-(k-n)^2/2} \right], \quad n = 0, 1, \dots, M-1,$$

pri čemu $X(e^{jw_k})$ odgovara konvoluciji nizova $g(n)$ i $W^{n^2/2}$. Impulsivni doziv se definiše sa

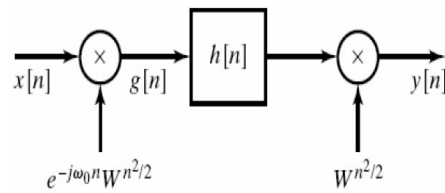
$$h(n) = \begin{cases} W^{-n^2/2}, & -(N-1) \geq n \leq M-1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

pa se DTFT može predstaviti kao konvolucija na sledeći način

$$X(e^{jw_k}) = W^{n^2/2} (g(n) * h(n)), \quad n = 0, 1, \dots, M-1.$$

Blok diagram Chirp algoritma za transformaciju koji se primenjuje na FIR filtriranje može da se prikaže sledećom slikom

3.5 Konvolucija nizova brojeva



Slika 12: Blok diagram Chirp transformacije primenjen na FIR

pa output $y(n)$ zadovoljava jednakost

$$X(e^{j\omega_k}) = y(n).$$

Izračunavanje frekvencijskog odziva primenom Chirp algoritma za transformaciju ima sledeće prednosti: ne postoji ograničenje za brojeve M i N ; uz to, konvolucija dobijena Chirp transformacijom može efikasno da se primeni za FFT algoritam, pri čemu veličina FFT ne sme da bude manja od $(M + N - 1)$ i najčešće se bira da bude stepen dvojke.

4 Furijeova transformacija

U ovom delu biće definisana Furijeova i brza Furijeova transformacija, kao i neke njihove karakteristike. Furijeova transformacija predstavlja generalizaciju kompleksnih Furijeovih redova, i najčešće je predstavljena u talasnom obliku preko sinusnih i kosinusnih funkcija. Ona pokazuje da se bilo koji oblik talasa može ponovo napisati kao zbir sinusoidnih funkcija. Ima velike primene u rešavanju parcijalnih diferencijalnih jednačina, spektroskopiji (pogotovo u nuklearnoj magnetnoj rezonanci), kvantnoj mehanici, spektralnoj analizi vremenskih serija, za kodiranje u kontroli grešaka, u finansijama za određivanje cene opcija . Ona pruža analizu orijentisanu na aplikacije, napisanu prvenstveno za elektrotehnike, inženjere za kontrolu, inženjere za obradu signala, medicinske istraživače i akademske istraživače. Pored toga, studenti je u velikoj meri koriste kao referencu za svoje istraživačke aktivnosti. Postoji nekoliko načina da se za funkciju $f : R \rightarrow C$ definiše Furijeova transformacija, od kojih je najzastupljeniji putem integrala.

Takođe , od velikog značaja je i brza Furijeova transformacija koja koristi prikupljene podatke za predviđanje budućih vrednosti. Zasniva se na algoritmima koji računaju diskretnu Furijeovu transformaciju za dati niz ili njegovu inverznu Furijeovu transformaciju, a najčešće oba. Jedna od njenih najvećih primena je za predviđanje cena finansijskih derivata i tom prilikom daje jako precizne rezultate.

(U ovom poglavlju korišćeno je [2], [3], [7], [9], [11] i [17] iz spiska literature; slike su preuzete iz [17] iz spiska literature.)

4.1 Razvoj u Furijeov red

Kako bi predstavila neka periodična funkcija preko beskonačnog zbira sinusnih i kosinusnih funkcija, najčešće se koristi Furijeov red. Ovde se predpostavlja da su i sinusne i kosinusne funkcije kvadratno - integrabilne nad zatvorenim intervalom $[-\pi, \pi]$, to jest, ove funkcije čine ortonormiran sistem u $L^2[-\pi, \pi]$. Neka je data funkcija f , takva da je njen osnovni period 2π :

$$f(x) = f(x + 2k\pi), x \in R, k \in Z$$

Funkcija f je definisana nad intervalom $[-\pi, \pi]$ i može da se razloži na proste periodične funkcije oblika $A \sin(\omega * x + \alpha)$ ili ekvivalentno:

$$a \cos nx + b \sin nx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

gde je A-amplituda , ω - ugaona frekvencija a α je početna faza harmonika $A \sin(\omega * x + \alpha)$. Ako važi pretpostavka da se funkcija f može rastaviti na uniformno konvergentan red, tada važi :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad k \in N.$$

Uniformna konvergencija dozvoljava razmenu graničnih procesa, odnosno red na desnoj strani može da se integrali sabirak po sabirak, pa se dobija:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx) = \pi a_0$$

4.1 Razvoj u Furijeov red

Ako se ova jednačinu pomnoži sa $\cos kx$ i izvrši integracija svakog sabirka pojedinačno, dobija se :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx) = \pi a_k.$$

Analogno, množenje iste jednačine sa $\sin kx$ i ponavljanjem postupka integracije se dobija:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \pi b_k$$

Pri tom se koriste sledeće jednakosti:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx &= 0, & \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx dx &= \pi \delta_{kn}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx &= \pi \delta_{kn} & \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx &= 0 & \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx &= 0, \end{aligned}$$

gde su $k, n \neq 0$ i δ_{kn} Kronekerov simbol:

$$\delta_{kn} = \begin{cases} 1, & k = n. \\ 0. & n \neq k \end{cases}$$

Sada može da se definiše trigonometrijski red Furijeja:

Definicija 21 (Furijeov red). Neka je $f(x)$ funkcija sa periodom 2π , koja na intervalu $[-\pi, \pi]$ ima konačan broj tačaka prekida prve vrste. Trigonometrijski red Furijeja funkcije f je dat sa

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx + b_n \cos kx),$$

pri čemu su koeficijenti definisani sa

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Na dalje će se posmatrati konvergencija Furijeovog reda ka odgovarajućoj funkciji f .

Neka je dat pred-Hilbertov prostor X (X je vektorski prostor, a $(\cdot, \cdot)$ skalarni proizvod) po delovima neprekidnih funkcija na intervalu $[-\pi, \pi]$ sa skalarnim proizvodom :

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx \quad f, g \in X$$

4.1 Razvoj u Furijeov red

Neka je X' skup za koji važi: $f \in X'$ ako i samo ako u svakoj tački $x \in [-\pi, \pi]$ postoje odgovarajući desni izvodi:

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x+h) - f_+(x)}{h}, \quad \forall x \in [-\pi, \pi)$$

gde je sa

$$f_+(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} f(x+\epsilon)$$

desna granična vrednost funkcije f u x i levi izvodi

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x-h) - f_-(x)}{h}, \quad \forall x \in (-\pi, \pi]$$

gde je sa

$$f_-(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} f(x-\epsilon)$$

definisana leva granična vrednost funkcije f u tački x .

Teorema 17 (Dirihleova teorema). *Neka je $f \in X'$. Tada za $\forall x \in (-\pi, \pi)$ Furijeov red funkcije f konvergira ka*

$$\frac{f_+(x) + f_-(x)}{2} \quad (1)$$

a u tačkama $x = \pi$ i $x = -\pi$ konvergira ka

$$\frac{f_+(\pi) + f_-(\pi)}{2} \quad (2)$$

Ova teorema je bila potrebna jer omogućava konvergenciju Furijeovog reda ka f u neprekidnim tačkama dok u tačkama prekida konvergira ka srednjoj vrednosti jednostranih limesa funkcije f u toj tački.

Funkcija sa periodom 2π predstavlja uopštenje funkcije sa proizvoljnim periodom $2l$. Ako je $f(x)$ funkcija sa proizvoljnim periodom $2l$ (gde je l poluperiod), smenom $x = at$, dobija se funkcija $f(at)$ čiji je period $2l/a$. Ako je $\frac{2l}{a} = 2\pi$ tj $a = \frac{l}{\pi}$ smenom $x = \frac{lt}{\pi}$ dobija se $f(\frac{lt}{\pi})$ funkcija perioda 2π , pa se analiza funkcija koje su $2l$ periodične se svodi na analizu 2π periodičnih funkcija.

Neka je f apsolutno integrabilna funkcija na $[-l, l]$ i da na tom intervalu f ima konačno mnogo tačaka prekida. Ako se f može razviti u uniformno konvergentan red i ako se pretpostavi da za zadato $t \in R$ važi jednakost:

$$f(\frac{lt}{\pi}) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_k \cos nt + b_k \sin nt)$$

onda je

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{lt}{\pi}) dt; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{lt}{\pi}) \cos ntdt; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{lt}{\pi}) \sin ntdt \quad n \in N$$

Furijeov red za funkciju f koja je $2l$ periodična dobija se tako što se uvodi smena promenljive $t = \frac{2\pi}{l}x$ u redu kao i u formulama za koeficijente:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos(\frac{n\pi x}{l}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{l})), \quad n \in N \quad i \quad x \in [-l, l]$$

4.1 Razvoj u Furijeov red

gde je

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx; \\a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx; \\b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad n \in N\end{aligned}$$

Vraćanjem smene $t = \frac{\pi x}{l}$ $dt = \frac{\pi}{l} dx$ dobija se Furijeov red funkcije f koja je $2l$ periodična. Ako je funkcija f definisana na intervalu $[0, 2l]$ tada su koeficijentima menjaju samo granice integracije, to jest :

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) dx; \\a_n &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx; \\b_n &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad n \in N\end{aligned}$$

Neka je data funkcija oblika :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{inx}$$

Ako se obe strane pomnože sa e^{-imx} i integrale po x , dobija se:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{inx} e^{-imx} dx \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(n-m)x] + i \sin[(n-m)x] dx \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n 2\pi \delta_{mn} \\&= A_m 2\pi\end{aligned}$$

pri čemu su dobijeni koeficijenti oblika:

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

ili

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos(nx) - i \sin(nx)) dx$$

4.1 Razvoj u Furijeov red

$$A_n = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos(nx) + i\sin(nx))dx, & \text{za } n < 0 \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos(nx) + i\sin(nx))dx, & \text{za } n > 0 \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx & \text{za } n = 0. \end{cases}$$

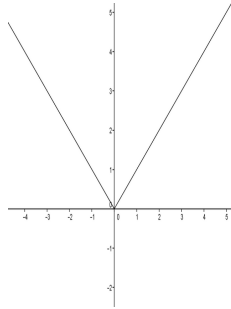
$$A_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n + ib_n) & \text{if } n < 0 \\ \frac{1}{2}a_0 & \text{if } n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & \text{if } n > 0 \end{cases}$$

Za funkciju koja je na zatvorenom intervalu $[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]$ periodična se dobija:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp(i(\frac{2nx\pi}{l}))$$

$$A_n = \frac{1}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(x) \exp(-i(\frac{2nx\pi}{l})) dx$$

Primer 7. Za $f(x) = |x|$ ćemo odrediti Furijeov red intervalu $[-\pi, \pi]$. Koeficijenti



Slika 13: Grafik funkcije $f(x) = |x|$

Furijeovog trigonometrijskog reda su a_0, a_n i b_n , $n \geq 1$ dati su sa ;

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx;$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{-4}{\pi n^2} & \text{Ako je } n \text{ paran broj} \\ 0 & \text{Ako je } n \text{ neparan broj} \end{cases}$$

Kako je zadata funkcija parna sledi da je $b_n = 0, n \in \mathbb{N}$, a Furijeov red je zadat sa

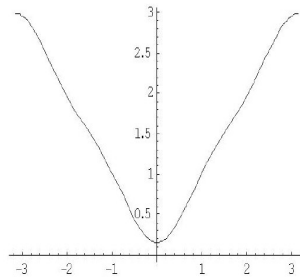
$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2} \cos(2n-1)^2 x$$

Za

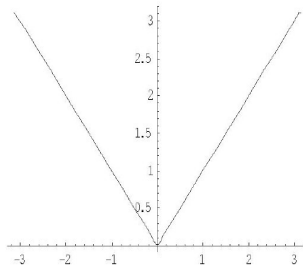
$$f = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^m \frac{4}{\pi(2n-1)^2} \cos(2n-1)^2 x$$

i različite vrednosti m se dobija:

4.2 Furijeova transformacija



Slika 14: m=2



Slika 15: m=20

4.2 Furijeova transformacija

Furijeov red se koristi u analizi funkcija definisanih na konačnom intervalu ili periodičnih funkcija definisanih na celom R , dok se Furijeova transformacija koristi za funkcije koje su definisane na celom R i nisu periodične. Furijeova i njena inverzna transformacija su generalizacije, to jest granični slučajevi Furijeovih redova i koeficijenata koji su definisani u prethodnom poglavlju.

Neka je $f : R \rightarrow C$. Formalno, može se definisati funkcija $F : R \rightarrow C$ sa:

$$F(\omega) = F(f)(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i \omega x} dx.$$

Nesvojstveni integral sa desne strane može da postoji ali i ne mora. Ukoliko postoji funkcija F se naziva Furijeova transformacija za funkciju f .

Neka je sa $G(R)$ označena familija svih po delovima neprekidnih i apsolutno integrabilnih funkcija $f : R \rightarrow C$. Funkcija je po delovima neprekidna na celom R ako je deo po deo neprekidna na svakom konačnom intervalu $[a, b]$. Funkcija f može imati beskonačan broj tačaka prekida na R , ali najviše konačan broj tačaka prekida na svakom konačnom pointervalu. Funkcija je apsolutno integrabilna na R ako integral od $|f(x)|$ postoji nad R i konačan je to jest važi: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$. Može se pokazati da je $G(R)$ vektorski prostor nad C , pa na osnovu definicije se dobija da je za svako $\omega \in R$ Furijeova transformacija za funkciju $f \in G(R)$ je dobro definisana.

Ako je poznata Furijeova transformacija neke funkcije, pod određenim uslovima,

4.2 Furijeova transformacija

može da se rekonstruiše „originalna” funkcija . Formula koja radi obrnuto se definiše na sledeći način:

$$f(x) = F^{-1}[F(\omega)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

Ovo je formula za inverznu Furijeovu transformaciju.

Definicija ove kao i formule za Furijeovu transformaciju nisu jedinstvene, pa u literaturi se može naći da se formulom Furijeove transformacije definiše inverzna i obrnuto.

Furijeova transformacija se takođe koristi kada se definišu ugaone frekvencije :

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iyt} dt, \quad (3)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{-iyt} dy \quad (4)$$

Ova definicija može da se da i sa proizvoljnim konstantama a i b :

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{|b|}{2\pi(1-a)}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ib\omega t} dt \quad (5)$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{|b|}{2\pi(1+a)}} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{-ib\omega t} d\omega \quad (6)$$

Uvođenje konstanti ne utiče na rezultate već samo na izgled formule.

Svaka funkcija može da se predstavi kao zbir parnog i neparnog dela:

$$f(x) = P(x) + N(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

pa Furijeova transformacija se može predstaviti kao zbir :

$$F(f(x))(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x) \cos(2\pi\omega x) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} N(x) \sin(2\pi\omega x) dx$$

Na dalje će se razmatrati da li se primenom inverzne Furijeove transformacije na Furijeovu dobija originalna funkcija.

Teorema 18 (o inverznoj Furijeovoj transformaciji). *Ako je $f \in G(R)$ onda za svaku tačku $x \in R$ u kojoj postoje jednostrani izvodi funkcije f važi :*

$$\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = p.v. \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-2\pi i \omega x} d\omega, \quad \forall x \in R \quad (7)$$

Teorema 19 (neke osobine Furijeove transformacije). *Neka su $f, g \in G(R)$ i neka su njihove Furijeove transformacije date sa F i G . Tada važe sledeće osobine :*

1. $F[af(x) + bg(x)](\omega) = aF(\omega) + bG(\omega)$ (linearnost)
2. $F[f * g] = F[f] * F[g]$,
3. $F[fg] = F[f] * F[g]$,

4.2 Furijeova transformacija

$$4. F^{-1}[F[f]F[g]] = f * g,$$

$$5. F^{-1}[F[f] * F[g]] = fg$$

Dokaz. Biće pokazane prve tri osobine.

1.

$$F[af(x) + bg(x)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [af(x) + bg(x)]e^{2\pi i\omega x} dx \quad (8)$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2\pi i\omega x} dx + b \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{2\pi i\omega x} dx \quad (9)$$

$$= aF(\omega) + bG(\omega) \quad (10)$$

2.

$$F[f * g] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i\omega x} f(y)g(x-y) dy dx \quad (11)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{2\pi i\omega y} f(y)dy)(e^{2\pi i\omega(x-y)} g(x-y)dx) \quad (12)$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i\omega y} f(y)dy \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i\omega y_1} g(y_1)dy_1 \right) \quad (13)$$

$$= F[f]F[g] \quad (14)$$

gde je $y_1 = x - y$ i $dy_1 = dx$.

3. Za dokaz treće osobine koristi se teorema Fubinija i formula inverzije : $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F[f](a)e^{-2\pi iax} da$.

$$\begin{aligned} F[fg](\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{2\pi i\omega x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F[f](a)e^{-2\pi iax} da \right) g(x)e^{2\pi i\omega x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F[f](a) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{2\pi i(\omega-a)x} dx da \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F[f](a)F[g](\omega-a)da = F[f](a) * F[g](a). \end{aligned}$$

□

Furijeova transformacija ima osobinu pomeranja, to jest važi sledeća osobina:

$$\begin{aligned} F[f(x-y)](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{2\pi i\omega x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{2\pi i\omega(x-y)} e^{2\pi i\omega y} d(x-y) \\ &= e^{2\pi i\omega y} F(\omega) \end{aligned}$$

4.3 Furijeova transformacija uopštenih funkcija

A važi i sledeća osobina:

$$F[f(ax)](\omega) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{k}{a}\right)$$

Koja se dobija direktnom primenom formule :

$$\begin{aligned} F[f(ax)](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{2\pi i \omega x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{2\pi i \omega \frac{u}{a}} \frac{1}{|a|} du \\ &= \frac{1}{|a|} F\left(\frac{k}{a}\right) \end{aligned}$$

Teorema 20 (Parsevalova jednakost). *Neka su date dve lokalno i apsolutno integrabilne funkcije $f(x)$ i $g(x)$ na $x \in (-\infty, \infty)$ tada važi:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) F[g(\omega)] dx = \int_{-\infty}^{\infty} F[f(x)] g(\omega) d\omega \quad (15)$$

Dokaz. Ako se pretpostavi da može da se menja granica integracije:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) F[g(\omega)] dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{2\pi i \omega x} d\omega \right) dx \quad (16)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(\omega) e^{2\pi i \omega x} d\omega dx \quad (17)$$

□

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i \omega x} dx \right) d\omega \quad (18)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) F[f(x)] d\omega \quad (19)$$

4.3 Furijeova transformacija uopštenih funkcija

U ovom delu najpre će biti izložene Furijeove transformacije brzo opadajućih funkcija a zatim i Furijeova transformacija na prostoru temperiranih funkcija definisana uz pomoć Parsevalove jednakosti.

• Furijeova transformacija brzo opadajućih funkcija

Teorema 21. *Furijeova transformacija je linearno i neprekidno preslikavanje $S(R^n)$ u $S(R^n)$.*

Teorema 22. *Inverzna Furijeova transformacija je linearno i neprekidno preslikavanje $S(R^n)$ u $S(R^n)$.*

4.3 Furijeova transformacija uopštenih funkcija

Funkcija $f(x)$	Furijeova transformacija $F[f](k)$
$f(x+y)$	$e^{-2\pi i y k} F(k)$
$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$	$-2\pi i k_j F(k)$
$f * g(x)$	$F[f](k) F[g](k)$
$f(x)g(x)$	$F[f] * F[g](k)$
$x_j f(x)$	$\frac{-i}{2\pi} \frac{\partial}{\partial k_j} F(k)$
$p(x)f(x)$	$p(-i \frac{\partial}{\partial k}) F(k)$

Neka su $f, g \in S(R^n)$ i neka je p proizvoljan polinom. Na primer $p(x) = a_0 + a_1 x_1 x_2 + a_2 x_1^2 x_3$, gde je $x = (x_1, x_2, x_3)$ i važi da je $p(\frac{\partial}{\partial x}) = a_0 + a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial}{\partial x_3}$. Na dalje će se koristiti skraćena oznaka za ovaj polinom $p(\frac{\partial}{\partial x})$.

Na osnovu rezultata ou prethodne glave može se zaključiti da važi Ako $\phi \in S(R^n)$ tada $F[\phi] \in S(R^n)$.

Najpre se pokazuje da važi

$$|F[\phi](k)| \leq \int |\phi(x)| dx$$

za sve funkcije ϕ koje su integrabilne.

$$\begin{aligned} |F[\phi](k)| &= \left| \int \phi(x) e^{2\pi i x k} dx \right| \\ &\leq \int |\phi(x) e^{2\pi i x k}| dx \end{aligned}$$

Još važi da je $|e^{2\pi i x k}| = 1$ pa se dobija tražena nejednakost.

Neka je $\phi \in S(R^n)$, sada treba pokazati da je njena Furijeova transformacija, $F[\phi]$ brzo opadajuća funkcija, to jest treba se pokazati da je $p(k)F[\phi](k)$ je ograničeno za bilo koji polinom p .

Na osnovu gornje tabele se dobija:

$$p(k)F[\phi](k) = F[p(i \frac{\partial}{\partial x})\phi(x)],$$

pa je

$$|p(k)F[\phi](k)| \leq \int |p(i \frac{\partial}{\partial x})\phi(x)| dx.$$

Kako važi da je $\phi \in S(R^n)$, $p(i \frac{\partial}{\partial x})\phi(x)$ je brzo opadajuća funkcija. Kako je gornji integral konačan, onda sledi da je $F[\phi](k)$ je brzo opadajuća funkcija.

Još treba pokazati da su svi izvodi bilo kog reda za $F[\phi](k)$ brzo opadajuće funkcije. Iz tabele važi

$$p(\frac{\partial}{\partial k}) F[\phi](k) = F[p(ix)\phi(k)]$$

4.3 Furijeova transformacija uopštenih funkcija

to jest, bilo koji izvod Furijeove transformacije ϕ je Furijeova transformacija proizvoda polinoma i te funkcije. Kako važi da je $g(x) = p(ix)\phi(x) \in S(R^n)$, pa je Furijeova transformacija funkcije g brzo opadajuća funkcija, pa na osnovu gornje jednakosti sledi da je $p(\frac{\partial}{\partial k}F[\phi])(k)$ brzo opadajuća funkcija.

• Furijeova transformacija temperiranih funkcija

Parsevalova jednakost

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)F[g(x)]dx = \int_{-\infty}^{\infty} F[f(x)]g(x)dx$$

može da se zapiše i u sledećoj oznaci $\langle f(x), F[g(x)] \rangle = \langle F[f(x)], g(x) \rangle$.

Definicija 22. Neka je $f \in S'(R^n)$ i $\phi \in S(R^n)$. Furijeova transformacije funkcije f , $F(f(x))$ definisana je sa

$$\langle f(x), F[\phi(x)] \rangle = \langle F[f(x)], \phi(x) \rangle$$

Furijeova transformacija temperirane funkcije, $F[f]$, se definiše kao funkcionelu na $S(R^n)$, koja svakoj test funkciji $\phi \in S(R^n)$ dodeljuje isti broj koji f dodeljuje $F[f]$.

Teorema 23. Ako je f temperirana distribucija, tada je i njena Furijeova transformacija, $F[f]$, temperirana funkcija.

Neka je $F[f] = g \in S'(R^n)$ i $F[\phi] = \psi \in S(R^n)$. Ako se iskoristi Parsevalova jednakost, može da se dobije definicija inverzne Furijeove transformacije temperiranih distribucija

$$\langle F^{-1}(g), \phi \rangle = \langle g, F^{-1}[\psi] \rangle.$$

Odnosno, dobija se da je $F^{-1}(g)$ temperirana distribucija.

Važi da je

$$\langle F^{-1}[F(f)], \phi \rangle = \langle F(f), F^{-1}(\phi) \rangle = \langle f, F[F^{-1}(\phi)] \rangle = \langle f, \phi \rangle$$

odnosno važi $F[F^{-1}(f)] = F^{-1}[f] = f$.

Furijeova transformacija i inverzna Furijeova transformacija predstavljaju injektivno preslikavanje $S'(R^n) \rightarrow S'(R^n)$.

Takođe, je $F(f) = 0$ ako i samo ako je $f = 0$.

Napomena Ako $\phi \in S(R^n)$ tada i $F[\phi] \in S(R^n)$. Međutim to ne važi i za test funkcije. Ako je $\varphi \in D(R^n)$, $F[\phi]$ ne mora biti u $D(R^n)$. Zbog toga je nemoguće definisati Furijeovu transformaciju za sve $f \in D(R^n)$ Zato su definicije date na prostoru brzo opadajućih funkcija.

Teorema 24. Furijeova transformacija i inverzna furijeova transformacija su neprekidna linearna preslikavanja $S'(R^n) \rightarrow S'(R^n)$.

Sada će biti navedene neke korisne osobine Furijeovih transformacija.

1. Posmatra se izraz

$$F^{-1}(F[f])(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(x-y)k} dk \right) dy,$$

4.4 Primeri Furijeovih transformacija

gde je $f \in S'(R^n)$. Takođe važi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x k} dk = F^{-1}[1] = \delta,$$

pa može da se zapiše da je

$$F^{-1}F[f] = f * \delta = f.$$

2. Ako red

$$\sum_{i=1}^{\infty} g_i$$

konvergira u $S'(R^n)$ ka g , tada se Furijeova transformacija može primeniti član po član, pa se dobija

$$F[g] = \sum_{i=1}^{\infty} F[g_i]$$

, odnosno, dobija se red koji opet konvergira u $S'(R^n)$.

3. Ako se mera verovatnoće μ , tretira kao temperirana distribucija, njena Furijeova transformacija se definiše na sledeći način

$$F[\mu](k) = \langle \mu, e^{2\pi i x k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x k} d\mu(x).$$

4.4 Primeri Furijeovih transformacija

Primer 8. Delta funkcije, δ .

$$\begin{aligned} \langle F[\delta], \phi \rangle &= \langle \delta, F[\phi] \rangle \\ &= F[\phi](0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x 0} \phi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 1 \phi(x) dx = \langle 1, \phi(x) \rangle. \end{aligned}$$

Pa je $F[\delta] = 1$.

Primer 9. Hevisajdova funkcija
Niz temperiranih distribucija

$$(\theta(x)e^{-2\pi x/n}), \quad n \in N$$

konvergira ka $S'(R^n)$ ka $\theta(x)$ kada $n \rightarrow \infty$. Ovo se dobija kada se majorira izraz

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |(\theta(x)e^{-2\pi x/n} - \theta(x))\phi(x)| dx &\leq \int_0^{\infty} |e^{-2\pi x/n} - 1| |\phi(x)| dx \\ &\leq \int_0^A |e^{-2\pi x/n} - 1| |\phi(x)| dx + 2 \int_A^{\infty} |\phi(x)| dx, \end{aligned}$$

4.4 Primeri Furijeovih transformacija

jer za svako $\phi \in S$ i $\epsilon > 0$ postoji $A = A(\epsilon, \phi) > 0$ tako da su sabirci u poslednjoj nejednakosti manji od $\frac{\epsilon}{2}$ za $n \leq n_0(\epsilon, A)$.

Za svako $n \in N$ važi

$$\begin{aligned} F[\theta(t)e^{-2\pi t/n}](x) &= \int_0^\infty e^{2\pi tx} e^{-2\pi t/n} dt \\ &= \int_0^\infty e^{2\pi t(x+i/n)} dt \\ &= \frac{i}{2\pi} \frac{1}{x+i/n}. \end{aligned}$$

Iz konvergenicije niza $(\theta(x)e^{-2\pi x/n})$, $n \in N$ sledi da niz $\frac{i}{2\pi} \frac{1}{x+i/n}$ konvergira ka S' ka $F[\theta(t)]$, odnosno

$$F[\theta(t)](x) = \frac{i}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+i\epsilon}.$$

Takođe važi

$$g^+(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+i\epsilon} = p.v. \frac{1}{x} - i\pi\delta(x),$$

pa je

$$F[\theta(t)] = \frac{i}{2\pi} (p.v. \frac{1}{x} - i\pi\delta(x)).$$

Primer 10. $f(x) = e^{-a|x|}$, za $a > 0$ i $-\infty < x < \infty$.

Furijeova transformacija ove funkcije se dobija direktnom primenom definicije i pret-hodnog primera

$$\begin{aligned} F[f(x)](k) &= \int_{-\infty}^\infty e^{-a|x|} e^{2\pi i k x} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{ax} e^{2\pi i k x} dx + \int_0^\infty e^{-ax} e^{2\pi i k x} dx \\ &= \int_0^\infty e^{-(a+2\pi i k)x} dx + \int_0^\infty e^{-(a-2\pi i k)x} dx \\ &= \frac{1}{a+2\pi i k} + \frac{1}{a-2\pi i k} = \frac{2a}{a^2+4\pi^2 k^2}. \end{aligned}$$

Primer 11. *Primena Furijeove transformacij na diferencijalne jednačine* Posmatra se problem pronalaženja funkcije f koja je Lebeg-merljiva nad skupom $(-\infty, \infty)$, to jest $f \in L^2(-\infty, \infty)$ i važi $\int_{-\infty}^\infty |f(x)|^2 dx < \infty$ za rešavanje sledeće diferencijalne jednačine

$$f''(x) - f(x) = -g(x), \quad -\infty < x < \infty$$

i $g \in L^2(-\infty, \infty)$.

Ova diferencijalna jednačina može da se reši direktnom primenom Furijeove transformacije na levu i desnu stranu jednačine i osobine

$$F[f^n(x)](k) = (-2\pi i k)^n F[f(x)](k)$$

pa se dobija

$$(-2\pi i k)^n F[f(x)] - F[f(x)] = -F[g(x)].$$

4.5 Brza Furijeova transformacija

Diferencijalna jednačina se primenom Furijeove transformacije i nekih njenih osobina svodi na algebarsku jednačinu.

Daljim rešavanjem se dobija

$$F[f(x)](-4\pi^2 k^2 - 1) = -F[g(x)],$$

$$F[f(x)] = \frac{F[g(x)]}{4\pi^2 k^2 + 1}.$$

Primenom prethodnog primera i nekih osobina Furijeove transformacije se dobija

$$\begin{aligned} f(x) &= F^{-1}F[f(x)] \\ &= F^{-1}\left[\frac{1}{4\pi^2 k^2 + 1}F[g(x)]\right] \\ &= F^{-1}\left[\frac{1}{4\pi^2 k^2 + 1}\right] * F^{-1}[F[g(x)]] \\ &= \frac{e^{-|x|}}{2} * g(x) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|} g(t) dt. \end{aligned}$$

4.5 Brza Furijeova transformacija

Brza Furijeova transformacija (FFT) je algoritam koji omogućava da se na mnogo brži način izračuna diskretna Furijeova transformacija (DFT) ili njena inverzna transformacija (IFFT) tako što se izbegava računanje izraza koji su međusobno inverzni. Ima veliku primenu u inženjerstvu, nauci i matematici. Prvi algoritam za ovu vrstu transformacije nastao je još 1805, ali se tek popularizovao 1965.

Postoji nekoliko različitih FFT algoritama za računanje diskretne Furijeove transformacije, koji obuhvataju širok spektar matematike od jednostavne aritmetike kompleksnih brojeva do teorija brojeva i grupa. DFT se dobija dekompozicijom niza vrednosti u komponente različitih frekvencija. Ova operacija je korisna u mnogim oblastima ali računanje koje se vrši direktno po definiciji je u praksi jako sporo. FFT daje isti rezultat ali računanje se vrši mnogo brže. U praksi, vreme računanja se smanjilo što je omogućilo primenu FFT u obradi digitalnih signala i rešavanju nekih složenijih parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Da bi se izračunala DFT za N proizvoljnih tačaka, primenom definicije, mora da se iskoriste $O(N^2)$ aritmetičke operacije, dok FFT može da izračuna istu DFT samo u $O(N \log N)$ operacija. Najpoznatiji FFT algoritam zavisi od faktORIZACIJE N proizvoljnih tačaka, i to su uglavnom FFT koji su kompleksnosti $O(N \log N)$.

• Definicija i brzina FFT-a

Cilj FFT je da proračuna DFT i da da tačno isti rezultat proračuna kao što bi dobili direktnom primenom definicije DFT. Jedna od najvažnijih razlika je ta da je FFT mnogo brži. (ako se posmatraju rezultati nakon primene DFT i FFT može se zaključiti da FFT daje mnogo preciznije i tačnije rezultate).

Neka je dat niz kompleksnih brojeva $x_0, \dots, x_{N-1}$. DFT se definiše sledećom formulom:

4.5 Brza Furijeova transformacija

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi kn/N} \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Proračun ove definicije direktno zahteva $O(N^2)$ operacija : broj X_k outputa je N , i svaki output zahteva sumu od N izraza. Svaki od ovih FFT metoda za računanje koristi $O(N \log N)$ operacija. Svi poznati FFT algoritmi zahtevaju $O(N \log N)$ operacija, iako ne postoji dokaz da je rezultat niže kompleksnosti nemoguć. Kako bi se ilustrovala FFT, razmotriće se određen broj kompleksnih množenja i sabiranja. Računanje direktnih DFT suma uključuje N^2 kompleksnih množenja i $N(N-1)$ kompleksnih sabiranja, od kojih $O(N)$ operacija može da se „uštedi“ tako što se eliminišu trivijalne operacije kao što su množenje jedinicom.

Cooley-Tukeyjev algoritam za N^2 daje isti rezultat sa $(N/2) \log_2(N)$ kompleksnih množenja i $N \log_2(N)$ kompleksnih sabiranja. U praktičnoj primeni dominiraju i drugi faktori osim brzine aritmetičkih operacija.

- **Algoritmi koji se koriste za FFT**

- Cooley–Tukey algoritam

Do sada najčešće korišćen algoritam za FFT je Cooley–Tukey algoritam. Ovaj algoritam se bazira na principu: „podeli-pa-vladaj“ (divide-and-conquer) i on svaku kompoziciju veličine $N = N_1 N_2$ rekurzivno deli na manje delove veličine N_1 i N_2 , zajedno da množenjem kompleksnih korena koji se nazivaju uzročnim faktorima. Ovaj metod (kao i uopštenu ideju FFT) su popularizovali J.W. Cooley i J.W. Tukey 1965. godine, ali je kasnije otkriveno da su ova dva autora nezavisno ponovo otkrila algoritam koji je već ranije bio poznat kao Gausovski (koji je otkrio Karl Fridrih Gaus, 1805.).

U daljem delu rada će se objasniti rekurzivni princip po kom ovaj algoritam deli kompoziciju veličine N na manje delove.

Pre uvođenja uopštene forme za Cooley-Tukey algoritam, uvodi se i objašnjava princip funkcionisanja vremenskog algoritma sa dve decimale, to jest radix - 2 algoritam (DIT), koji predstavlja jednu od najjednostavnijih i najkorišćenijih formi, koja je visoko optimizovana. (*Radix odnosno baza*, je broj koji sadrži jednostavne cifre i služi da bi predstavio poziciju nekog broja u numeričkom sistemu).

Ovaj algoritam deli diskretnu Furijeovu transformaciju veličine N na dve diskretne Furijeove transformacije veličine $\frac{N}{2}$. Neka je DFT definisana na sledeći način

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N} nk}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

U ovom algoritmu se najpre računa DFT za parne indekse ($x_{2m} = x_0, x_2, \dots, x_{N-2}$) a onda i za neparne ($x_{2m+1} = x_1, x_3, \dots, x_{N-1}$) i onda kombinuje oba ova rezultata, kako bi nastala DFT celog niza. Kako bi se računanje smanjilo na $O(N \log N)$ primenjuje se rekurzija.

U ovoj pojednostavljenoj formi Cooley-Tukey algoritma se predpostavlja da je N stepena 2, mada može da se proizvoljno odabere u zavisnosti od namene algoritma. Delovi koji se dobijaju nakon podele u ovom algoritmu su takođe DFT, pri čemu

4.5 Brza Furijeova transformacija

jedan sadrži parne a drugi neparne indekse:

$$X_k = \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m} e^{-\frac{2\pi i}{N} 2mk} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1} e^{-\frac{2\pi i}{N} (2m+1)k}.$$

Ako se se uvedu oznake : $E_k = \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m} e^{-\frac{2\pi i}{N} 2mk}$ i $U_k = \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1} e^{-\frac{2\pi i}{N} 2mk}$, tada gornji izraz može da se zapiše na sledeći način

$$X_k = E_k + e^{-\frac{2\pi i}{N} k} O_k.$$

Kako je diskretna Furijeova transformacija periodična, tada važi

$$E_{k+\frac{N}{2}} = E_k \quad i \quad O_{k+\frac{N}{2}} = O_k,$$

pa se gornja jednačina može zapisati na sledeći način

$$X_k = \begin{cases} E_k + e^{-\frac{2\pi i}{N} k} O_k, & 0 \leq k \leq \frac{N}{2} \\ E_{k-\frac{N}{2}} + e^{-\frac{2\pi i}{N} k} O_{k-\frac{N}{2}}, & \frac{N}{2} \leq k \leq N. \end{cases}$$

pri čemu se koristi periodičnost za O_k i E_k kako bi se pomerio indeks k . Izrazi eksponencijalnog oblika u izrazu za X_k se nazivaju *twiddle* faktori.

Za twiddle faktore važi sledeće

$$e^{-\frac{2\pi i}{N} (k+\frac{N}{2})} = e^{-\frac{2\pi i}{N} k} e^{-\pi i} = -e^{-\frac{2\pi i}{N} k}.$$

Pa izraz

$$X_k = E_k + e^{-\frac{2\pi i}{N} k} O_k$$

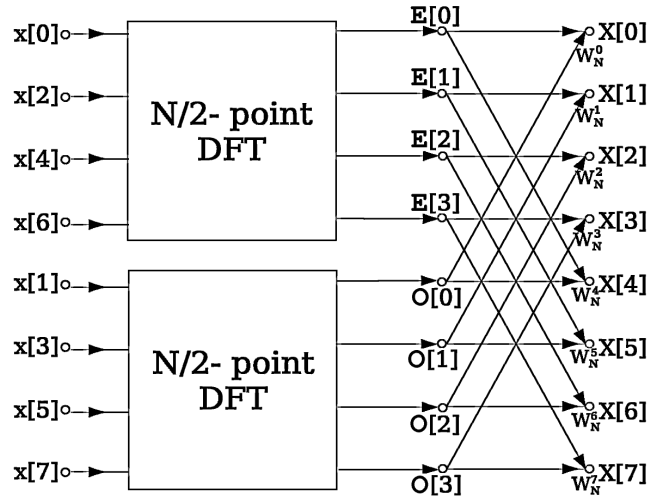
može ekvivalentno da se zapiše na sledeći način

$$X_{k+\frac{N}{2}} = E_k - e^{-\frac{2\pi i}{N} k} O_k.$$

Poslednji izraz prikazuje kako se na rekurzivan način zapisuje DFT dužine N kao zbir dve DFT čije su dužine $\frac{N}{2}$. Ovaj algoritam može da se ubrza, ako se koriste srednje vrednosti za dobijanje višestrukih DFT outputa. Krajnji rezultai se dobijaju kombinacijom sabiranja i oduzimanja E_k i $e^{-\frac{2\pi i}{N} k} O_k$, koje se najčešće naziva „butterfly” računanje i krajnji output je veličine dve DFT (ovo će se kasnije primeniti na računanje cene opcije).

Ovaj proces je primer uopštene tehnike na kojoj se zasniva Cooley-Tukey algoritam : conquer-and-divide. Bitno je napomenuti da se u mnogim tradicionalnim implementacijama metod eksplisitne rekurzije se najčešće izbegava.

4.5 Brza Furijeova transformacija



Slika 16: „Butterfly” računanje u DIT za $N = 8$

- Uopštena faktORIZACIJA Cooley-Tukey algoritma

Generalno, postupak koji koristi Cooley-Tukey algoritam za rekurzivno izražavanje veličine $N = N_1 N_2$ obuhvata sledeća tri koraka:

1. Iz DFT veličine N_2 se izvodi N_1
2. Dobijeni rezultat se množi kompleksnim korenima jedinične kružnice (twiddle faktorima)
3. Iz DFT veličine N_1 se izvodi N_2

Ovaj postupak se može prikazati slikom (17). Najčešće je ili N_1 ili N_2 malio faktor koji se naziva radix. U zavisnosti od toga koji deo DFT se uzima za radix, dobijaju se dve vrste algoritma. Ako se N_1 uzme za radix, tada je to decimalni vremenski algoritam (DIT), a ako je N_2 radix, tada je to decimalni frekvencijski algoritam (DIF). Uopštena Cooley-Tukey faktORIZACIJA omogućava da se indeksi za input podatke (n) i output podatke (k) faktORIZUJU na sledeći način:

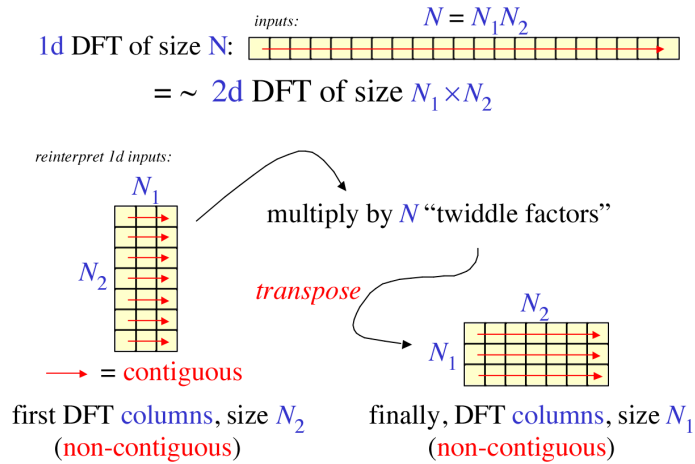
$$k = N_2 k_1 + k_2,$$

$$n = N_1 n_2 + n_1.$$

Na ovaj način je izvršeo reindexiranje inputa i outputa, a kao razlika ovog reindexiranja dobija se transpozicija. Kada se reindexiranje ubaci u DFT za nk , kao krajnji rezultat se dobija:

$$\begin{aligned} X_{N_2 k_1 + k_2} &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x_{N_1 n_2 + n_1} e^{-\frac{2\pi i}{N_1 N_2} (N_1 n_2 + n_1)(N_2 k_1 + k_2)} \\ &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} e^{-\frac{2\pi i n_1 k_2}{N}} \left(\sum_{n_2=0}^{N_2-1} x_{N_1 n_2 + n_1} e^{-\frac{2\pi i n_2 k_2}{N_2}} \right) e^{-\frac{2\pi i n_2 k_1}{N_1}}, \end{aligned}$$

4.5 Brza Furijeova transformacija



Slika 17: Uopšteni princip rada Cooley-Tukey algoritma

gde je spoljašnja suma veličine N_1 a unutrašnja veličine N_2 ; izraz $e^{-\frac{2\pi i n_1 k_2}{N}}$ se naziva twiddle faktorom.

Na ovaj način prikazana je uopštena faktORIZACIJA Cooley-Tukey algoritma koja može osim DFT da se primeni i u konvoluciji, inverznoj i Furijeovoj transformaciji unapred.

- FFT koji su specijalizovani za realne i/ili simetrične podatke

U mnogim primenama ulazni podaci(input) za DFT su realni, dok izlazni podaci(output) zadovoljavaju simetriju :

$$X_{N-k} = X_k^*$$

i za ovakve situacije, gde se obrađuju podaci su dizajnirani efikasni FFT algoritmi. Jedan od načina da se obrade ovi podaci primenjuje običan algoritma (npr. Cooley-Tukey) i tim putem se uklanjanju suvišni delovi tokom računanja, čuvajući i vreme i memoriju. Alternativno, moguće je izraziti čak i input realne dužine DFT kao kompleksnu DFT koja polovi dužine (čiji su realni i imaginarni delovi parni brojevi) i pri tom je praćena operacijama $O(N)$ procesa.

Nekada se pretpostavljalo da za realne inpute bi DFT bio mnogo efikasniji ako bi se koristila diskretna Hartley transformacije, ali naknadno je otkriven specijalizovani DFT algoritam za realne inpute koji zahteva manji broj operacija nego odgovarajući DHT algoritam za isti broj inputa. Bruunov algoritam je još jedan metod, ali se pokazao neuspešnim.

Postoje još neke specijalizovane FFT za slučajeve sa realnim podacima koje takođe imaju parnu simetriju, u čijem slučaju možemo dobiti jedan ili dva faktora u vremenu i memoriji, a i za njih DFT postaje diskretna sinusna/kosinusna transformacija/e (DST/DCT). Umesto direktnog modifikovanja FFT algoritma za ove slučajeve, DST/DCT mogu takođe da se računaju putem FFT-a sa realnim podacima u kombinaciji sa pre/post $O(N)$ procesom.

4.5 Brza Furijeova transformacija

- Drugi FFT algoritmi

Sem Cool-Tukey algoritma postoje i mnogi drugi FFT algoritmi, koji funkcionišu na sličan princip.

Za $N = N_1 N_2$ gde su N_1 i N_2 prosti brojevi, može se koristiti algoritam sa prostim faktorom (PFA), koji se zasniva na kineskoj teoremi o deljenju sa ostatkom, koji faktoriše DFT slično kao Cool-Tukey algoritam ali bez suvišnih faktora. Rader–Brennerov algoritam (1976.) funkcionise po principu Cool-Tukey faktORIZACIJE ali sa potpunim suvišnim imaginarnim faktorima, koji smanjuje množenje ali zato povećava sabiranja i smanjuje numeričke stabilnosti; kasnije je zamenjeno varijantom Cool-Tukey algoritma (koja ima isti broj množenja ali sa manje sabiranja i bez smanjenja tačnosti).

Algoritmi koji rekurzivno faktORIZUJU DFT na manje operacije, osim DFT uključuju Bruun i QFT algoritme. (Rader–Brenner i QFT algoritmi su izloženo za dva člana, ali je moguće ovo uopštiti za slučaj od n članova.) Bruunov algoritam se primenjuje na kompozicije proizvoljen veličine. Bruunov algoritam, se u suštini, zasniva na interpretaciju FFT kao rekurzivne faktORIZACIJE polinoma $z^N - 1$ na realne koeficijente polinoma koji su oblika $z^M - 1$ i $z^{2M} + az^M + 1$

Drugi metod za polinome je dat Winogradovim FFT algoritmom, koji faktoriše $z^N - 1$ u ciklotomične polinome koji najčešće imaju koeficijente 1,0 ili -1, i stoga zahtevaju nekoliko množenja, pa Winograd može da se koristi za dobijanje minimalnog umnoška FFT-a i često se koristi za pronalaženje efikasnih algoritma za male faktore.

Zaista, Winograd je pokazao da DFT može da se izračuna sa samo $O(N)$ iracionalnih množenja, dajući dokazanu granicu za množenje dve veličine. Na žalost ovo dovodi do mnogo više sabiranja, što ne ide u korist modernim procesorima sa hardverskim množenjem. U suštini, Winograd takođe koristi PFA, kao i algoritam Radera za jednostavne veličine.

Raderov algoritam, za postojanje rešenja generatora za multiplikativnu grupu čiji je moduo prost broj N , daje DFT čija je veličina prost broj n , kao cikličnu konvoluciju kompozicije veličine $N - 1$ koja bi onda mogla da se kao par obične FFT koristeći teoremu konvolucije (iako Winograd koristi druge metode za konvoluciju). Drugi FFT algoritam za proste brojeve je dao L.I. Bluestein, i ponekad se naziva čirpov-z algoritam; takođe pokazuje DFT kao konvoluciju, ali ovog puta za istu veličinu (koja može uzimati vrednosti od nula do stepena dvojke i može na primer da se izračuna Cool-Tukey FFT algoritmom sledećim izrazom:

$$nk = -\frac{(k-n)^2}{2} + \frac{n^2}{2} + \frac{k^2}{2}$$

5 Opcije

U posljednjih trideset i pet godina, u svetu se izuzetno popularizovala trgovina finansijskim derivatima, to jest hartijama od vrednosti čija je vrednost izvedena iz drugih hartija od vrednosti. Najpoznatiji oblik finansijskih derivata su opcije. Ideje o trgovini opcijama potiču još iz doba Feničana, a kasnije su ih koristili i Rimljani. Prve opcije su se pojavile u XVII veku, dok su se u Americi pojavile tek u XIX veku. Nalaženje modela koji opisuju kretanje cena akcija i njima odgovarajućih opcija, jedan je od najčešćih problema kojim se bave finansijski eksperti. Opcije koriste velike finansijske institucije koje žele da se zaštite od rizika ili drugih fluktuacija na tržištu.

U ovom poglavlju biće definisane opcije, kao i određivanje njihovih cena (navešće se nekoliko metoda i tehnika), ali najpre biće predstavljeni osnovni pojmovi finansijskih derivata, jer opcije predstavljaju jednu vrstu finansijskih derivata.

(U ovom poglavlju korišćeno je [2], [5], [6], [12], [14] i [18] iz spiska literature.)

5.1 Finansijski derivati

Finansijski derivati su finansijski instrumenti čija je vrednost izvedena iz podloge, to jest zavisi od nekogog drugog finansijskog instrumenta ili dobra (najčešće iz obveznica, deonica, valuta, kamatnih stopa, robe ili su čak utemeljeni na specifičnim događajima poput vremenskih promena). Najčešće imaju oblik ugovora sklopljenih na osnovu međusobnog dogovora ugovornih strana oko uslova plaćanja koji su određeni na osnovu vrednosti efekata ili drugih podataka u nekom određenom trenutku vremena. Osnovna svrha finansijskih instrumenata je smanjenje rizika za jednu stranu uz preuzimanje rizika za drugu.

Ovi instrumenti postoje već vekovima i prvo su se razvili kao instrumenti upravljanja rizicima, promene cena robe na robnim berzama i sve varijacije isključivo robnih derivata su ostale jedini derivatni instrumenti tri stotine godina, sve do pojave finansijskih derivata. U novije vreme je započet razvoj tržišta finansijskih derivata, od 1970-ih godina nadalje, pa je tržište finansijskih derivata jedno od najmlađih na celokupnom finansijskom tržištu.

Osnovne vrste finansijskih derivata su terminski ugovori: forvardi, fjučeri, opcije i svopovi, kojima se trguje na terminskim tržištima. Učesnike terminskih tržišta delimo u dve grupe:

- *hedžeri* (oni koji žele da se zaštite od rizika i promene cena)
- *špekulanti* (oni koji prihvataju rizik, radi ostvarivanja profita od promene cena). Cilj trgovanja finansijskim derivatima je zaštita od nepovoljnih kretanja cena sa jedna strane, i ostvarivanja profita sa druge.

Jako je bitno da se spomene da kada se aktiva kupuje zauzima se duga pozicija na tržištu, a kada se prodaje kratka, odnosno kupac zauzima dugu a prodavac kratku poziciju.

Forvard ugovor je ugovor koji se sklapa direktno između dve zainteresovane strane. Po ovoj vrsti ugovora se prodavac isto tako obavezuje da po unapred dogovorenoj ceni kupcu isporuči robu u budućnosti, ali za razliku od fjučersa, forvard ugovor je proizvod privatnih pregovora i nije standardizovan pa ne može biti predmet berzanske trgovine i stoga se njima trguje na vanberzanskim sastancima. Forvard

5.2 Opcije

ugovor je specifičan terminski ugovor u kome se u momentu sklapanja ugovora dogovara prodaja / kupovina nekog dobra u budućnosti, pri čemu se obaveze iz ovog posla realizuju na neki budući unapred ugovorom definisani datum. Kupac se ovim ugovorom obezbeđuje od eventualnog rasta cene dobra na tržištu, a prodavac po ovom poslu se obezbeđuje od pada cene. Ovaj tip ugovora nije standardizovan i stoga ne može biti predmet trgovine na berzi, već se njime trguje isključivo van berze.

Fjučers ugovor predstavlja obavezu da se kupi ili proda određeno dobro ili finansijska aktiva (neke hartije od vrednosti, zlato) određenog dana, po unapred određenoj ceni. Ova vrsta ugovora se razvila iz forvarda. Danas se najviše trguje finansijskim fjučersima koji mogu da glase na indekse akcija, kamatne hartije od vrednosti (kao što su to državne obveznice) i strane valute. Pri tom obe vrste učesnika ostvajuju svoj cilj: špekulanti-zaradu a hedžeri-zaštitu vrednosti imovine u budućnosti. Fjučersima se isključivo trguje na berzi kao redovnom i centralizovanom berzanskom tržištu. Odmah po njihovom zaključivanju mogu se relativno brzo pretvoriti u novac, pa ih stoga zovu i likvidni terminski ugovori. Ono što je važno jeste da se fjučersi isključivo utvrđuje veličinom ugovora, prihvatljivim kvalitetom isporuke robe, cenom i načinom plaćanja.

Svopovi su finansijski instrumenti koji omogućavaju zamenu jedne aktive za drugu. Oni omogućavaju korisnicima da se zaštite od različitih vrsta nepovoljnih događaja u budućnosti. S obzirom da se zaključuju neposrednom pogodbom veoma su fleksibilni i mogu da odgovore na različite potrebe ugovorenih strana. Trenutno to nisu hartije od vrednosti kojima se trguje na berzi, već se trgovina svopovima obavlja "vanberzanski" ("over the counter" – OTC), neposredno između partnera ili sa investicionim bankama koje nastupaju kao posrednici, pa su zato specijalno prilagođeni potrebama klijenata. Postoje nekoliko vrsta svopova od kojih su najznačajniji:

- *kamatni svopovi* (razmenjuju se kamatni tokovi, a pri tom se glavnice ne razmenjuju),
- *valutni svopovi* (kombinacija spot deviznih transakcija i terminskih deviznih transakcija sa istim partnerom),
- *robni svopovi* i
- *akcijski / indeksni svopovi*.

Opcije su nešto komplikovaniji finansijski instrumenti u odnosu na forvarde i fjučerse, pa će o njima kao i njihovom vrednovanju na finansijskom tržištu biti posvećena nekoliko naredna poglavlja.

5.2 Opcije

Opcije predstavljaju ugovore po kojima kupac stiče pravo ali ne i obavezu, da u budućnosti kupi/proda osnovnu podlogu(aktivu) po unapred određenoj ceni izvršenja K (strajk cena). Razlikuju se dve vrste opcija: call opciju gde kupac ove opcije poseduje pravo ali ne i obavezu da kupi aktivu od prodavca i put opciju gde kupac poseduje pravo ali ne i obavezu da proda osnovnu aktivu prodavcu. Ugovor opcije može da glasi na različite aktive: akcije, obveznice, strane valute, fjučerse, sirovine...

5.2 Opcije

Glavna uloga opcija je da zaštiti investitora od promene tržišnih cena između momenta sklapanja i momenta izvršenja ugovora.

Kada je cena aktive veća od cene izvršenja, call opcija je na dobitku (in-the-money), pa se može izvršiti. Ako je tržišna cena aktive manja od cene izvršenja, call opcija je na gubitku (out-of-the-money), pa se ona ne izvršava. Ovo matematički može da se predstavi sledećim formulama :

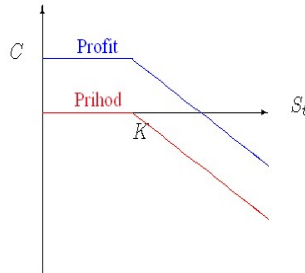
Vlasnik opcije

$$C(S_t, t) = \max\{S_t - K, 0\}; \quad \Pi(S_t, t) = \max\{S_t - K, 0\} - C$$

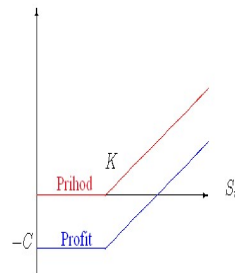
gde su : S_t - vrednost podloge u trenutku t ; $C(S_t, t)$ - vrednost(prihod) opcije u trenutku t ; C - premija koju plaća u trenutku sklapanja ugovora; K - strajk cena (cena izvršenja); $\Pi(S_t, t)$ - profit vlasnika opcije.

Pisac opcije

$$C(S_t, t) = \min\{K - S_t, 0\}; \quad \Pi(S_t, t) = \max\{K - S_t, 0\} + C$$



Slika 18: Prihod i profit pisca evropske call opcije



Slika 19: Prihod i profit vlasnika evropske call opcije

Analogno za put opcije:

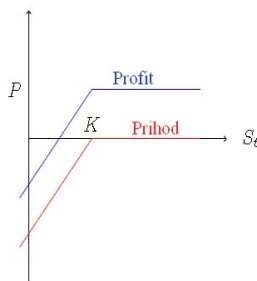
Vlasnik opcije :

$$P(S_t, t) = \max\{K - S_t, 0\}; \quad \Pi(S_t, t) = \max\{K - S_t, 0\} + P$$

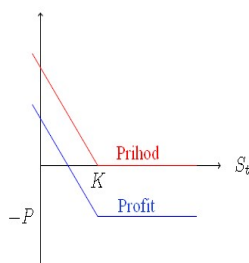
Pisac opcije :

$$P(S_t, t) = \min\{S_t - K, 0\}; \quad \Pi(S_t, t) = \min\{S_t - K, 0\} + P$$

5.3 Postupci za određivanje cene opcije



Slika 20: Prihod i profit pisca evropske put opcije



Slika 21: Prihod i profit vlasnika evropske put opcije

Intrinsična vrednost ($C(S_t, t)$) (intrinsic value) opcije predstavlja pozitivnu novčanu komponentu, odnosno efektivnu vrednost koja bi bil ostvarena u slučaju promptne realizacije opcijskog ugovora. (Primer: ako je $K = 150din$, $S_t = 160din$, intrinzična vrednost je 10din; međutim ako S_t padne onda je ova vrednost jednaka nuli)

Postoji još jedna podela opcija : opcije evropskog tipa i opcije američkog tipa. Američke opcije se mogu aktivirati u bilo kom trenutku do isteka roka dospeća, dok se evropske mogu realizovati samo na datum dospeća. Ove opcije nemaju geografsko ograničenje, to jest na oba kontinenta (kao i na ostalim) se trguje sa oba tipa.

Kupci opcija su najčešće firme iz realnog sektora ili neke finansijske institucije čiji je cilj da se zaštite od tržišnog rizika (ostvaruje se hedžing). Prodavci (emitenti) opcija preuzimaju na sebe tržišne rizike tako što naplaćuju premiju opcije. Tu uglavnom spadaju velike finansijske institucije (komercijalne i investicione banke) koje poseduju velike kapitalne rezerve koji služe za pokrivanje gubitka koji mogu da nastanu usled derivatnih transakcija.

5.3 Postupci za određivanje cene opcije

Iz prethodnog poglavlja se može zaključiti da su osnovni elementi svake opcije: broj jedinica osnovne aktive koji je pokriven opcijskim ugovorom, cena izvršenja

5.3 Postupci za određivanje cene opcije

opcije, rok isteka opcije i opsijska premija (cena opcije). U daljem delu rada će se proučavati određivanje cene opcije.

Na visinu opsijske premije utiči brojni faktori od kojih su najznačajniji:

- tekuća cena aktive,
- cena izvršenja opcije,
- očekivana volativnost cene osnovne aktive u periodu važenja opcije,
- vreme do isteka opcije,
- nivo kratkoročnih kamatnih stopa u periodu važenja opcije.

Postoje više različitih numeričkih tehnika za određivanje cene opcije od kojih su najpoznatije model binomnog stabla, Monte Carlo i tehnike konačne razlike. Među njima je i tehnika FFT koja je relativno nova i za nju je literatura poprilično siromašna. Zato direktnim poređenjem rezultata koji su dobijeni korišćenjem FFT u kombinaciji sa bilo kojom od ovih tehnika nije izvodljivo.

Finansijski stručnjaci najviše koriste Monte Carlo i model binomnog stabla, dok se upotreba tehnika konačne razlike polako povećava. Kroz zastupljenost svih ovih tehnika se međutim izdvaja jedno sadašnje istraživanje i zato samo odabrani radovi imaju značajnost u paralelnim proračunima o kojima se govori u ovom poglavlju. Svaki od ovih metoda biće objašnjen u narednim poglavljima.

Generalno, koriste se dve vrste tehnike za određivanje cene opcije:

- i) tehnike koje direktno aproksimiraju osnovni stohastički proces (ove tehnike su uglavnom intuitivne)
- ii) tehnike koje aproksimiraju rezultujuće parcijalne diferencijalne jednačine
Prvi pristup uključuje Monte Carlo simulacije i različite pristupe binomnom modelu koristeći Cox-Rubinstein (CRR) model. Drugi pristup uključuje numeričku integraciju i konačne diferencne šeme i to oba tipa: i eksplicitne i implicitne (metod konačne razlike). U ovom poglavlju biće objašnjen pojam binomnog stabla, zatim Monte Carlo simulacije i metod konačne razlike.

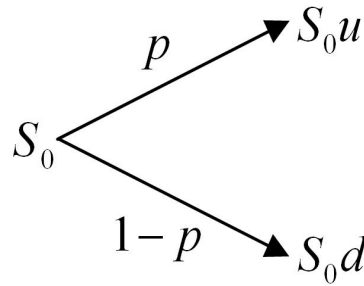
• Određivanje cene opcije korišćenjem binomnog stabla

Binomno stablo su 1979. popularizovali Cox-Rubinstein. Kretanje cene akcija sa datom podlogom može da se opiše multiplikativnim binomnim procesom putem sukcesivnih perioda: neka je cena akcije S na početku perioda (ponekad se ova cena označava i sa S_0), koja može da se poveća (sa faktorom rasta u) do uS i verovatnoćom p može i da opadne sa faktorom d do dS sa verovatnoćom koja je komplementarna q to jest iznosi $1 - p$. Ovamo su sa u i d označene kamatne stope, kada cena akcije rasta ili opada, respektivno, pa stoga vazi $d = 1/u$. Kada se cena aktive poveća sa S na uS isplata ove vrednosti je f_u (ili C_u) gde je f cena derivata (negde se označava i sa C). Kada cena opada sa S na dS njena isplata je f_d (negde se označava i sa C_d). Takođe, bitno je napomenuti da se u binomno stablu prilikom određivanja cene opcije koristi i *volativnost*, koja se definiše kao mera promene cene finansijskih instrumenata u nekom proteklom periodu i najčešće se računa kao standardna devijacija promene cene u tom vremenskom intervalu. Najčešće se označava sa σ .

5.3 Postupci za određivanje cene opcije

Binomno stablo može da se koristi za određivanje promene cene imovine direktno. Da bi se približno odredilo kretanje cene, neophodni su veliki brojevi srednjih perioda između početka i dospeća ugovora. Međutim, u cilju pojednostavljenja i intuitivnosti, ovaj metod je postao primer kako se u teoriji određuje cene opcija. Ovo je intuitivna tehnika i stoga veoma korisna za razumevanje problema i određivanje cene opcija, u opštem slučaju. Kako je jedna od prednosti kompjutera brži proračun ovaj metod dobija nov oblik u industriji generišući aproksimativna rešenja za dat problem koji se onda koriste kao početni uslovi u mnogo komplikovanijim numeričkim tehnikama. Mnogi algoritmi su nastali primenom ove tehnike za određivanje cene opcija. Njena prednost je u tome što je intuitivna metoda dok je glavna mana je netačnost rezultata.

Početni binomni model za jedan korak za određivanje cene opcija daje portofolio od akcija i opcija tako da nema neizvesnosti oko vrednosti portofolija na kraju ugovorenog perioda. Za ovo se pretpostavlja da je opcija bez rizika. Kako portofolio nema rizik, zarada koja se vraća biće jednaka rizik neutralnoj kamatnoj stopi. Ova pretpostavka se uzima kao početni korak za računanje cene opcije sa troškovima izrade portofolija. Ovo se može prikazati slikom (22).



Slika 22: Binomno stablo za jedan korak

Najpre se konstruiše portofolio sa dugom pozicijom (kao potvrdu o vlasništvu, ugovor, roba) i kratkom pozicijom (u budućem ugovoru ovo bi značilo sigurnost da će se prodati fiksna količina dobara po određenoj ceni u budućnosti) u jednoj call opciji, zatim računamo vrednost Δ (Δ upoređuje promenu cene akcija sa odgovarajućom promenom derivata) i na taj način umanjujemo rizik kod portfolija. Prva približna formula za Δ biće definisana korišćenjem uopštenih pojmova. Ako se cena akcije poveća od S na uS , vrednost portfolija na kraju perioda izvođenja biće: $Su\Delta$ i ako cena akcije opadne vrednost portfolija biće $Sd\Delta - f_d$. Portofolio je rizik-neutralan ako važe sledeće jednakosti:

$$Su\Delta - f_u = Sd\Delta - f_d$$

$$S(u - d)\Delta = f_u - f_d$$

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S(u - d)} \quad (*)$$

Ovako dobijeno Δ je odnos promene izvedene cene akcije u vremenu T . Neka je r rizik neutralna kamatna stopa. Isplatom krajnje vrednosti portfolija ($Su\Delta - f_u$)

5.3 Postupci za određivanje cene opcije

i koristeći formulu za rast možemo da nađemo sadašnju vrednost portofolija koja iznosi: $(Su\Delta - f_u)e^{-r\Delta t}$. Kako je trošak konstruisanja portofolija $S\Delta - f$ za rizik-neutralan portfolio:

$$S\Delta - f = (Su\Delta - f_u)e^{-r\Delta t}$$

Zamenom (*) u ovu jednačinu dobija se:

$$f = e^{-r\Delta t}(pf_u + (1-p)f_d)$$

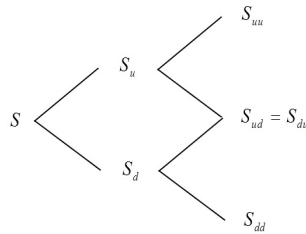
gde je :

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

Izrazi koji su dobijeni za f i p omogućavaju računanje cene opcije za jedan korak u binomnom modelu. Vrednost p može da se tretira kao verovatnoća rasta za cenu akcije. Funkcija $(pf_u + (1-p)f_d)$ izračunava očekivanu isplatu derivata.

• Binomno stablo za dva koraka

Binomni model za dva perioda funkcioniše po istom principu kao binomni model za jedan period. Radi pojednostavljenja, uvodi se pretpostavka da rast i opadanje cene akcije su isti. Uopšteni binomni model za dva perioda prikazan je na slici ispod. U svakom koraku stabla, cena raste od početne vrednosti S (može da se označi i sa S_0) sa faktorom u ili opada sa faktorom d do početne vrednosti.



Slika 23: Binomno stablo za dva koraka

Koristeći stalno formulu za f koja je dobijena iz binomnog modela za jedan korak, mogu da se izvedu sledeće tri jednačine:

$$f_u = e^{-r\Delta t}(pf_{uu} + (1-p)f_{ud})$$

$$f_d = e^{-r\Delta t}(pf_{ud} + (1-p)f_{dd})$$

$$f = e^{-r\Delta t}(pf_u + (1-p)f_d)$$

Zamenom prvog izraza za f_u u drugi i treći, dobija se:

$$f = e^{-2r\Delta t}(p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}).$$

5.3 Postupci za određivanje cene opcije

Često u literaturi može da se nađe i zapis oblika

$$C = \frac{1}{R^2}(p^2 C_{uu} + 2p(1-p)C_{ud} + (1-p)^2 C_{dd}),$$

gde je sa R označena verovatnoća za ukupan broj perioda koji se računa, to jest $R = \frac{r}{\text{ukupan broj koraka}}$, C_{uu} , C_{dd} i C_{ud} su cene opcije u trenutku $t = 2$. U sledećem primeru biće pokazano kako se određuje cena evropske call opcije primenom metoda binomnog stabla za dva koraka sa zadatom strajk cenom i kamatnom stopom za određen vremenski period.

Primer 12. Posmatra se akcija čija je volatnost $\sigma = 0.2$ i trenutnom cenom $S_0 = 62\$$. Evropska kupovna opcija na ovu akciju ima dospeće za pet meseci i strajk cenu $K = 60$. Kamatna stopa na godišnjem nivou iznosi $r = 0.1$ i obračunava se mesečno. Odrediti cenu ove opcije.

Rešenje. Kako se kamatna stopa obračunava mesečno, tada važi da je kamatna stopa za jedan mesec

$$R = \frac{r}{\text{broj perioda za koji se obračunava}} = \frac{0.1}{12} = 0.00833.$$

Dužina jednog perioda je

$$\Delta t = \frac{1}{12},$$

pa se stope rasta i opadanja, u i d računaju na sledeći način

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.05943,$$

a d se dobija iz odnosa $ud = 1$, odnosno

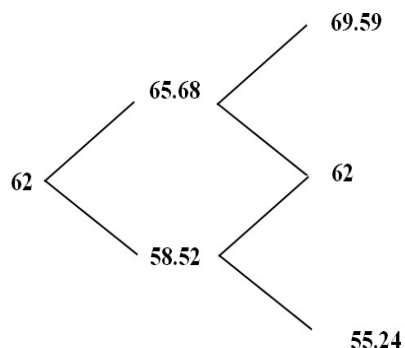
$$d = \frac{1}{u} = 0.9439.$$

Rizik - neutralna verovatnoća q se dobija iz formule

$$q = \frac{R - d}{u - d} = 0.5517.$$

Kretanje cene akcije na tržištu za dva perioda može da se prikaže sledećom slikom

5.3 Postupci za određivanje cene opcije

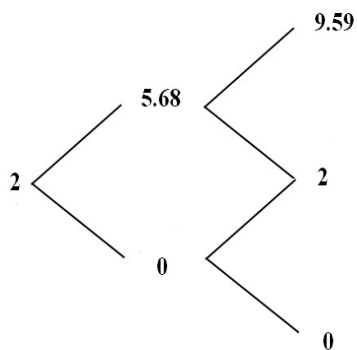


Slika 24: Kretanje cene akcije za dva perioda

Cena opcije se za svaki period računa po formuli

$$C(S_t, t) = \max\{S_t - K, 0\}, \quad \text{gde } t = 1, 2.$$

pa se izračunate vrednosti mogu prikazati sledećom slikom



Slika 25: Kretanje cene opcije za dva perioda

Krajnja cena za opciju dobija se primenom formule

$$C = \frac{1}{R^2}(q^2 C_{uu} + 2q(1-q)C_{ud} + (1-q)^2 C_{dd}),$$

gde je $C_{uu} = 9.59$. $C_{ud} = 2$ i $C_{dd} = 0$, i iznosi

$$C = 3.902.$$

5.3 Postupci za određivanje cene opcije

- **Monte Carlo tehnika za određivanje cene opcije**

Naziv „Monte Karlo metod“ se odnosi na širok spektar matematičkih modela i algoritama čija je glavna karakteristika stohastički pristup, odnosno upotreba slučajnih brojeva u rešavanju različitih problema. Najčešće se radi o matematičkim problemima čija se rešenja ne mogu odrediti analitički ili za to ne postoje efikasni numerički algoritmi. Ovaj metod se zasniva na simulacijama i korišćenju slučajnih brojeva koji daju jako dobre aproksimacije nekih kompleksnih problema. Konkretno, u problemu određivanja cene opcije, slučajni hod simulira kretanje cene aktive i pri tom se koristi činjenica da su simulacije međusobno nezavisne. Krajnji cilj je da se dobije što tačnije rešenje za dati problem i ograniči greška vrednovanja opcije. Ovu tehniku finansijski stručnjaci koriste u velikoj meri jer je intuitivne prirode, jer se zasniva na aproksimaciji očekivane vrednosti slučajne promenljive aritmetičkom sredinom rezultata velikog broja nezavisnih slučajnih promenljivih koje imaju istu raspodelu kao ta slučajna promenljiva i zakonu velikih brojeva.

Monte Carlov pristup se zasniva na numeričkom metodu za rešavanje izvoda uključujući potpuno slučajno odabrane parametre. Za veći broj tačaka, se dobijaju tačniji rezultati i njihov broj zavisi od dostupnosti računarskih podataka.

Osnovna stavka u teoriji izvođenja cene opcije je slučajan hod cene aktive. Jedna takva teorija data je Black-Scholes formulom koja daje vezu između cena opcija i očekivanja. Monte Carlo tehnika koristi ovu vezu da bi našla cenu opcije iz simulacija cena aktive. Ukratko, vrednost opcije je očekivana sadašnja vrednost isplate na datum isteka sa rizik-neutralnim verovatnoćom slučajnog hoda. Rizik - neutralni slučajni hod za cenu aktive S je dat jednačinom:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX$$

gde je μ prosečna stopa rasta cene podloge i naziva se drift (deterministički deo kod promene cene) i σ je volativnost (stohastički deo u promeni cene), to jest mera standardnog odstupanja i t je vreme. Ako se pretpostavi da se ovo ne dešava slučajno, tada važi: $dS = rS dt$. Izraz dX koji je glavna odlika cene aktive je poznat kao Vinerov proces i ima sledeća svojstva:

- dX je slučajna promenljiva sa normalnom raspodelom
- sredina za dX je 0
- varijansa za dX je dt

Vrednost opcije može da se dobije iz sledeće jednačine:

$$vrednostopcije = e^{-r(T-t)} E[isplata f(S)]$$

gde je očekivana vrednost u skladu sa rizik-neutralnim slučajnim hodom. Gornja jednačina daje procenu za opciju prateći sledeći pristup: Simulacija rizik - neutralnog slučajnog hoda tokom ugovorenog perioda, počinje na današnju vrednost aktive. Ovo daje jedan korak u realizaciji cene aktive. Za ovu realizaciju isplata opcije se računa kao $\max(S - X, 0)$, gde je X strajk cena. Ovaj proračun se vrši više puta u toku jednog perioda a onda se računa prosečna isplata. Onda se sadašnja prosečna vrednost koja je dobijena uzima kao vrednost opcije.

5.3 Postupci za određivanje cene opcije

Prvi korak ovog algoritma zahteva generisanje slučajnih brojeva iz standardne normalne raspodele. Cena aktive se uvek računa za period unapred a njena promena tokom vremena može da se prikaže sledećom formulom:

$$\delta S = \mu S \delta t + \sigma S \phi \sqrt{\delta t}$$

gde je sa δt označeno povećanje vremena za svaki period i ϕ je standardna normalna raspodela.

Sada može da nađe jednostavan vremenski algoritam, gde su rizik-neutralne stohastičke diferencijalne jednačine za S date formulom:

$$d(\log S) = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dx$$

Integracijom ovog izraza se dobija:

$$S(t) = S(0)e^{[r - \frac{1}{2}\sigma^2]t + \sigma \int_0^t dx}$$

Nakon vremenskog koraka δt :

$$S(t + \delta t) = S(t) + \delta S = S(t)e^{[(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}\phi]}$$

Kako je izraz tačan i jednostavan, ovo je najbolji vremenski algoritam koji se koristi. Osim toga, ako isplata samo zavisi od konačne vrednosti aktive (na primer evropska opcija) konačna cena aktive može da se simulira sa velikim skokom i vremenskim korakom T .

Monte Carlov pristup za određivanje cene opcije je bolji od drugih metoda jer ne zahteva mnogo matematike. Takođe, mnoge simulacije koje se koriste mogu da se pojednostave kako bi dale bolju tačnost dobijenog rezultata.

• Metod konačne razlike

Ovo je jedna od najjednostavnijih tehnika za određivanje cene opcija. U ovom metodu, cena derivata se računa rešavanjem diferencijalnih jednačina koje se odnose na derivate koji se proučavaju. Diferencijalne jednačine se transformišu u nekoliko različitih jednačina i skup tih diferencijalnih jednačina se rešava iterativno. Cena opcije $c(S, t)$ može da se dobije rešavanjem poznate parcijalne diferencijalne jednačine, poznate kao Black - Scholes:

$$\frac{\partial c(S_t, t)}{\partial S_t} + \frac{\partial c(S_t, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c(S_t, t)}{\partial S_t^2} S_t^2 \sigma^2 = rc(S_t, t)$$

Numeričko rešavanje jednostavnog Black-Scholes modela za određivanje cene opcije je uzaludno jer je numerička analiza nepoznata većini finansijskih stručnjaka. Ovaj model prikazuje problem određivanja cene opcije kao stohastičke parcijalne diferencijalne jednačine i rešavanje ove jednačine analitički je težak zadatak. CFD tehnike (tehnika izračunavanja dinamike fluida), kao što je konačna diferencijacija i tehnike konačnih elemenata, su zadužene da numerički reše model Black - Scholes. Ove tehnike dele prostor rešenja u red pravougaonih/trougaoanih mreža kako bi reprezentovali vreme i cenu aktiva osnovne opcije. Prolazeći kroz proračune velikih brojeva dobija se prinos opcije tokom vremena. Tačnost zavisi od veličine mreže i broja vremenskih koraka. Za veoma precizno rešenje, do desetog mesta na decimali, milioni vremenskih koraka su poznati. Ova tehnika podstiče konceptualizaciju

5.3 Postupci za određivanje cene opcije

i razvijanje paralelnog algoritma. Računarska mreža treba da bude podeljena i dodeljena različitim procesorima u paralelnom sistemu što utiče na podsticanje korišćenja kompjutera i komunikacije.

Za standardne evropske opcije, oblik rešenja za Black- Scholes jednačinu nije u skladu sa očekivanim rešenjem. Za evropske call opcije , granični uslov za Black-Scholes jednačinu je $c(S, T) = \max\{S_T - X, 0\}$, gde je X poznata cena. Metod binomnog stabla može takođe da se koristo ovde, međutim metod konačnih razlika je mnogo efikasniji. Takođe, matematički gledano, metod binomnog stabla je specijalni slučaj tehnike konačne diferencijacije.

Dalje će biti opisan metod logaritamske transformacije koju su dali Brennan i Švarc kako bi izveli formulu za određivanje cene evropske call opcije. Neka je $y = \ln S$ i $w(y, t) = c(S, t)$ kao oznaka za cenu call opcije u trenutku t . Cena se u ovom slučaju definiše kao logaritam cene aktive u trenutku t . Ako se zanemare oznake za y i t dobija se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial S} &= \frac{\partial w}{\partial y} e^{-y} \\ \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} &= \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial w}{\partial y} \right] e^{-2y} \\ \frac{\partial c}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial t}\end{aligned}$$

Zamenom ovih izraza u jednačinu Black-Scholes dobija se:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right] \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial t} - rw = 0$$

Gornja jednačina može i da se prikaže kao:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} + \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right] \frac{\Delta w}{\Delta y} + \frac{\Delta w}{\Delta t} - rw = 0$$

Ovde raspon cena aktiva može da se podeli na konačan broj intervala gde je minimalna cena aktive nula a maksimalna je neograničena. Vrednost cene podloge biće: $0, \Delta y, 2\Delta y, \dots$ gde je za Δy poželjno da bude što je manje moguće i maksimalna cena podloge je tada konačna. Kako vrednost $\ln 0$ nije definisana, minimalna vrednost za $\ln S$ je približno nula. Neka je $\tau = T - t$ ukupan raspon vremena trajanja opcija i podeljen je u jednake diskretne intervale $\tau, \tau - \Delta t, \tau - 2\Delta t, \dots, 2\Delta t, \Delta t, 0$. Ove gradacije vremena i cene podloge mogu da se prikažu pomoću mreže. Svaka tačka na mreži predstavlja cenu opcije u odgovarajućoj logaritamskoj ceni aktive datu u redu i odgovarajućem datumom isteka koji je dat u koloni, što može da se prikaže donjom slikom.

Ako je cena aktive nula, vrednost calla nije vredna da se posmatra na datum dospeća i zato je jedan od graničnih uslova u prostoru:

$$c(0, t) = 0, \quad \text{za svako } t.$$

Za kolonu $\ln S = \epsilon$, gde je ϵ veoma mali broj i važi:

$$w(\epsilon, t) = 0 \quad \text{za svako } t.$$

5.3 Postupci za određivanje cene opcije

$\ln S$	Vreme trajanja						
	τ	$\tau - \Delta t$	$\tau - 2\Delta t$	$\bullet$	$2\Delta t$	Δt	0
∞	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
$y + 2\Delta y$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
$y + \Delta y$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
y	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
$y - \Delta y$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
$y - 2\Delta y$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
$2\Delta y$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
Δy	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
ε	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$

Slika 26: Zavisnost cene aktive od vremena trajanja

Kada $S \rightarrow \infty$, prvi izvod cene call opcije (što je jednako ceni aktive) u odnosu na cenu aktive je 1:

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{\partial c(S, t)}{\partial S} = 1 \quad \text{za svako } t.$$

Kako je $\frac{\partial c(S, t)}{\partial S} = (\frac{\partial w}{\partial y})e^{-y}$ dobijamo da je:

$$\frac{\partial w(y, t)}{\partial y} = \frac{\partial c(S, t)}{\partial S} e^y = e^y = S \quad \text{za svako } t \quad S \rightarrow \infty.$$

Ovo znači da je druga najveća cena call opcije poznata, dok najviša vrednost može da se odredi dodavanjem $\Delta y e^y$. Intrinzična vrednost (vrednost opcije ako bi ona istekla sa cenom aktive po sadašnjoj vrednosti) na datum dospeća je data sa:

$$c(S, 0) = \max(0, S - X) \quad \text{za svako } S.$$

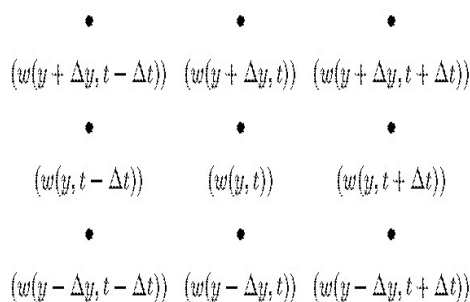
uzimajući u obzir kolonu za y iz tabele, ovo će biti:

$$w(y, 0) = \max(0, e^y - X) \quad \text{za svako } y.$$

Sada može da se popuni desna kolona. Svaki izraz ispod tačaka na grafiku označava cenu pojedinačne opcije sa logaritamskom aktivom na nivou koji je ukazan i vremenom dospeća što je pokazano na mreži:

Proračuni mogu da se nastave ili eksplicitno ili implicitno. Implicitni metod daje veću tačnost cene opcije, ali je i trošak računanja veći. Ova dva metoda biće objašnjena u nastavku rada. Kao što može da se vidi sa slike 27 domen računanja mogao bi da se jednostavno podeli na nekoliko procesora za konkurentne proračune, pa zato obračun vrednosti opcije bi mogao da se ubrza.

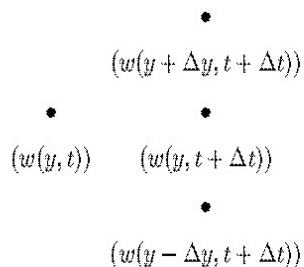
5.3 Postupci za određivanje cene opcije



Slika 27: Šablon za mrežu zavisnosti

- **EksPLICITNI METOD KONAČNIH RAZLIKA**

Kao sa metodom binomnog stabla, prihvataju se vrednosti iz prethodnog perioda, u odnosu na sadašnji datum do datuma isteka opcije (dospeća). Ova tehnika računa $w(y, t)$ u odnosu na vrednost $w(y + \Delta y, t + \Delta t)$, $w(y, t + \Delta t)$. Na sledećoj su pokazane cene opcija za jedan korak unapred i porast i pad trenutne cene aktive. Tri cene za korak unapred su poznate zbog vremenskog koraka unazad :

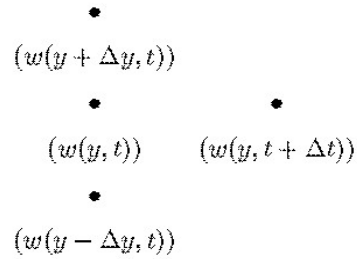


Slika 28: Šablon za formulaciju eksPLICITNOG metoda konačnih razlika

5.3 Postupci za određivanje cene opcije

- Implicitni metod konačnih razlika

Ova vrsta tehnike izračunava cene opcija sa mreže ali na drugačiji način. Na sledećoj slici prikazano je kako se računa $w(y, t)$ iz cena opcija $w(y + \Delta y, t)$, $w(y - \Delta y, t)$ iz iste kolone. Računanje cene opcije se dobija istovremenim određivanjem cene opcija iz prethodnog i budućeg perioda, što daje veliku tačnost rešenja, ali zahteva istovremeno rešavanje više jednačina i stoga veći trošak računanja.



Slika 29: Šablon za formulaciju implicitnog metoda konačnih razlika

6 Furijeova analiza i određivanje cene opcija

U ovoj glavi biće objašnjeno kako se koristi Furijeova transformacija za određivanje cene opcije, kao i određivanje cene opcije na krugu.

Mnogi autori su pokušavali da dobiju analitičko rešenje za određivanje cene opcije sa jednom ili više aktiva koristeći brzu Furijeovu transformaciju (FFT). Za vrednost opcije koja se ovde dobija koristi se pretpostavka da je opcija rizik-neutralna. Nedostatak gore pomenutog pristupa je taj što ne koristi prednost proračuna FFT. Osim toga matematički model za određivanje cene opcije putem FFT koji su dali mnogi autori ima nedostatke kao što su numerička rešenja u paralelnoj računskoj perspektivi. Car i Madan su izneli dva metoda za numeričko određivanje cene opcije koristeći FFT i inverznu Furijeovu transformaciju. Ako se vrednost za call opciju posmatra sa logaritamskom strajk cenom, Furijeova transformacija call vrednosti ne može da se definiše kao funkcija koja nije kvadratno integrabilna (za funkciju $f(x)$ kažemo da je kvadratno integrabilna ako je integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$ konačan). U njihovom prvom pristupu, funkcija za određivanje cene opcije se množi sa eksponencijalnim faktorom kako bi postala kvadratno integrabilna i u drugom pristupu intrinzična vrednost se oduzima od funkcije za cenu call opcije da bi se dobila vremenska vrednost. Modifikovana funkcija za cenu call opcije sada postaje kvadratno integrabilna i tada Furijeova transformacija za tu funkciju može da se dobije numerički kada je karakteristična funkcija sa rizik-neutralnom verovatnoćom poznata analitički. FFT se numerički primenjuje za invertovanje modifikovane funkcije koja služi za određivanje cene call opcije i željene vrednosti za call opciju.

Prvi pristup je bolji od drugog. On zahteva pažljiv izbor koeficijenta, dok drugi pristup je trajniji i koristi se u slučaju stabilnosti. U sledećem poglavlju biće prezentovan način na koji se Furijeova analiza koristi prilikom određivanja cene opcije. Tako će se poboljšati prvi pristup kako bi se unapredio za paralelno računanje. Onda će se diskutovati poboljšani model za Carov i Madanov prvi pristup za korišćenje FFT u paralelnom proračunu vrednosti opcija.

(U ovom poglavlju korišćeno je [1], [4] i [13] iz spiska literature; slike su preuzete iz [1] i [4] iz spiska literature.)

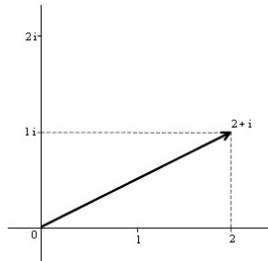
6.1 Kompleksni brojevi

U ovom delu rada će se proučiti kako i zašto cene opcija u binomnom modelu mogu biti izračunate putem diskretne Furijeove transformacije. Kako je diskretna Furijeova transformacija niz brojeva koji se definiše preko kompleksnih brojeva, najpre će se uvesti njihov pojam i operacije sa njima kao i diskusija sa njihovim geometrijskim svojstvima, posebno ako se posmatraju preko jediničnog kruga jer je cilj da se prikaže binomna cena opcije na jediničnom krugu i dobije Furijeova formula za određivanje cene opcije.

Diskretna Furijeova transformacija se odnosi na podjednako raspoređene tačke na krugu. Sa matematičke tačke gledišta podjednako raspoređene tačke na krugu su najjednostavnije za opisivanje kompleksnih brojeva. U ovom poglavlju posmatraju se oni brojevi na osnovu kojih je moguće utvrditi osobine Furijeove transformacije. Kompleksni brojevi su pogodni za prikazivanje vektora u dvodimenzionalnom prostoru. Na sledećoj slici prikazan je vektor $z = 2 + i$ što je tačka u prostoru koja je pomerena za dve jedinice na horizontalnoj (realnoj) osi i jednu na vertikalnoj (imaginarnoj) osi. Terminologija koja se pri tom najčešće koristi nije baš najpogodnija i adekvatna; jer imaginarna osa nije ništa drugo nego realna osa. Mnogo je

6.1 Kompleksni brojevi

bolje koristiti samo termine horizontalna i vertikalna osa.



Slika 30: Grafički prikaz kompleksnog broja

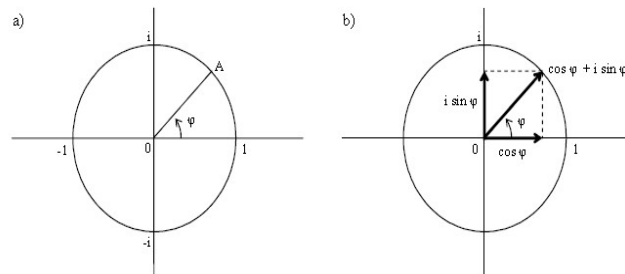
Pravilo za sabiranje kompleksnih brojeva je isto kao i pravilo za sabiranje vektora:

$$(2 + i) + (3 - 4i) = 5 - 3i$$

Množenje skalarom:

$$-3(2 + i) = -6 - 3i$$

Kompleksni brojevi su dobri za opisivanje kretanja oko jedinične kružnice. Kao što je prikazano na slici 31 jedinični krug preseca imaginarnu i realnu osu u tačkama -1 i 1 , i realnu u -1 i 1 . Tačku A na jediničnom krugu karakteriše argumenat ϕ



Slika 31: Kretanje tačke po jediničnoj kružnici

- ugao između realne ose i linije OA. Na slici 31 b je tačka A može prikazana kao trigonometrijski zapis kompleksnog broja : $\cos(\phi) + i \sin(\phi)$. Neke bitne karakteristike kompleksnih brojeva:

1. množenje kompleksnih brojeva na jediničnom krugu znači sabiranje uglova. Ugao za i je 90° , ugao za $i \times i = -1$ je onda $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.
2. Ako gornje sabiranje za kompleksne brojeve i generalizujemo na množenje dva prava kompleksna broja dobijamo:

$$(a_1 + ib_1) \times (a_2 + ib_2) = a_1a_2 + i(b_1a_2 + a_1b_2) + b_1b_2i^2 = \\ a_1a_2 - b_1b_2 + i(b_1a_2 + a_1b_2).$$

6.2 Geometrija točka sa zupčanicima (Geometry of spoked wheel)

3. To dalje znači da je množenje „sabiranje uglova” i može da se uopšti na jediničnoj kružnici i to sledećom formulom:

$$(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \times (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

4. Za prikaz jedne tačke na jediničnoj kružnici može da se koristi i Ojlerova formula:

$$\cos(\phi) + i \sin(\phi) = e^{i\phi},$$

gde $(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$ možemo da zapišemo kao:

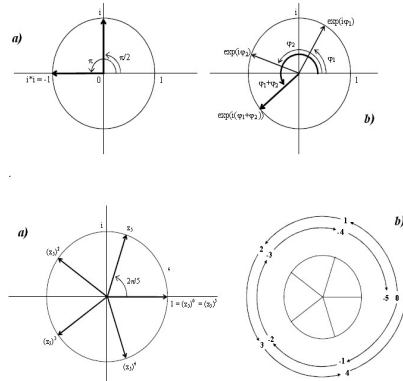
$$e^{i\varphi_1} \times e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

6.2 Geometrija točka sa zupčanicima (Geometry of spoked wheel)

Veoma je lako konstruisati jednako raspoređene zupčanike koristeći kompleksne brojeve. Ako se prepostavi da treba se podjednako rasporede pet tačaka unutar jedinične kružnice, tada jedna petina celog kruga se karakteriše uglom od $\frac{2\pi}{5}$, pa zato prvi zupčanik se postavlja na $e^{i\frac{2\pi}{5}}$. Taj broj može da se označi sa z_5 i da se zapiše na sledeći način:

$$z_5 \equiv e^{i\frac{2\pi}{5}}.$$

Kako množenje sa z_5 pruzrokuje rotaciju suprotnu smeru kretanja kazaljke na satu za jednu petinu, onda drugi zupčanik se postavlja na z_5^2 , pa treći na z_5^3 , što se može prikazati na slici 32a.



Slika 32: Geometry of spoked wheel-jedinična kružnica

Ovo obezbeđuje da broj zupčanika pripada prirodnom skupu brojeva, što je utvrđeno na osnovu broja elementarnih rotacija koje je potrebno izvršiti da bi se došlo do određenog zupčanika. Treba se napomenuti da kako se kretanje vrši unutar kruga povratak u početnu tačku nastupa posle pet rotacija u smeru suprotnom od smera kazaljke na satu:

$$(z_5)^0 = (z_5)^5 = (z_5)^{10} = (z_5)^{15} = \dots$$

$$(z_5)^1 = (z_5)^6 = (z_5)^{11} = (z_5)^{16} = \dots itd$$

6.2 Geometrija točka sa zupčanicima (Geometry of spoked wheel)

a takođe i nakon pet rotacija u smeru kretanja kazaljka na satu:

$$\begin{aligned}(z_5)^0 &= (z_5)^{-5} = (z_5)^{-10} = (z_5)^{-15} = \dots \\ (z_5)^1 &= (z_5)^{-4} = (z_5)^{-9} = (z_5)^{-14} = \dots\end{aligned}$$

Pa zato brojenje zupčanika ima dva smisla; na primer indeksi 0, 5, -5 se odnose na isti zupčanik što se vidi na slici 32b.

Slede nekoliko važnih svojstva za jednako raspoređene zupce unutar kruga. Ova svojstva su neophodna za razumevanje diskretne Furijeove transformacije:

- Neka je z_n rotacija za n -ti deo kruga:

$$z_n \equiv e^{i\frac{2\pi}{n}}$$

Onda je :

$$(z_n)^0 + (z_n)^1 + \dots + (z_n)^{n-1} = 0,$$

za svako n . Ovo važi jer su tačke $(z_n)^0, (z_n)^1, \dots, (z_n)^{n-1}$ podjednako raspoređene unutar kruga i zato rezultat zbira ne sme da se menja ako zarotiramo skup tačaka za n -ti deo kruga. Jedini vektor koji ostaje nepromenjen posle ove rotacije je nula vektor.

- Ovaj rezultat možemo dalje da generalizujemo. Neka je k ceo broj izmedju 1 i $n - 1$. Onda je :

$$(z_n^k)^0 + (z_n^k)^1 + \dots + (z_n^k)^{n-1} = 0,$$

za svako n . Razlog zbog ovakvog rezultata je rotaciona simetrija za tačke $(z_n^k)^0, (z_n^k)^1, \dots, (z_n^k)^{n-1}$. Razlika u odnosu na izraz

$$(z_n)^0 + (z_n)^1 + \dots + (z_n)^{n-1} = 0$$

je u tome što se u nizu $(z_n)^0, (z_n)^1, \dots, (z_n)^{n-1}$ svaki član (zupčanik) pojavljuje tačno jednom gde su $(z_n^k)^0, (z_n^k)^1, \dots, (z_n^k)^{n-1}$ isti zupčanici koji se pojavljuju nekoliko puta (na primer: $n = 4, n = 2$).

- U slučaju da je $k = 0$ potrebna je posebna pažnja. Kako je $(z_n^0)^j = 1$ za sve j se dobija sledeći zbir:

$$(z_n^k)^0 + (z_n^k)^1 + \dots + (z_n^k)^{n-1} = n.$$

Kada se rezimira, dobija se :

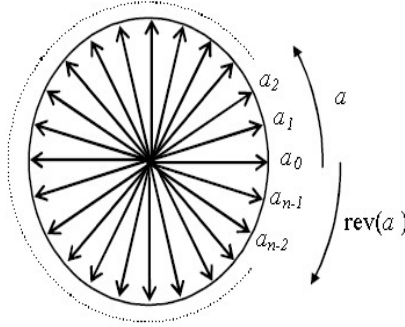
$$(z_n^k)^0 + (z_n^k)^1 + \dots + (z_n^k)^{n-1} = n. \quad k = 0, \pm n, \pm 2n \dots (8)$$

$$(z_n^k)^0 + (z_n^k)^1 + \dots + (z_n^k)^{n-1} = 0. \quad k \neq 0, \pm n, \pm 2n \dots (9)$$

Uvešće se još i pojam obrnutog poretka na krugu. Neka je dat niz od n brojeva zapisan u vektorskom obliku $a = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$. Obrnuti poredak elemenata vektora a se definiše sa $rev(a)$ na sledeći način:

$$rev(a) = [a_0, a_{n-1}, \dots, a_1]$$

6.2 Geometrija točka sa zupčanicima (Geometry of spoked wheel)



Slika 33: Obrnut poredak vektora a na krugu

Ako je a upisano oko kruga u smeru suprotnom smeru kretanja kazaljki na satu, onda se $rev(a)$ dobija čitanjem iz smera kretanja kazaljki na satu, počevši od a_0 . Treba se uočiti da $rev(a)$ nije isto što i $[a_{n-1}, \dots, a_1, a_0]$.

Svaki niz brojeva oblika $(z_n^k)^0, (z_n^k)^1, \dots, (z_n^k)^{n-1}$ je isti kao niz $(z_n^{-k})^0, (z_n^{-k})^1, \dots, (z_n^{-k})^{n-1}$ samo što je u inverznom redu:

$$rev((z_n^{-k})^0, (z_n^{-k})^1, \dots, (z_n^{-k})^{n-1}) = (z_n^k)^0, (z_n^k)^1, \dots, (z_n^k)^{n-1} \quad (10)$$

Ovo važi jer je $(z_n^{-k})^{n-j} = (z_n)^{-kn+kj} = z_n^{kj} = (z_n^k)^j$ za svako j .

6.3 Diskretna Furijeova transformacija

Neka je $z_n \equiv e^{\frac{2\pi i}{n}}$ (ovaj broj se naziva n -ti koren jedinične kružnice). Neka je $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ niz od n kompleksnih brojeva. Diskretna Furijeova transformacija ovog niza brojeva je niz $b_0, b_1, \dots, b_n$ takav da se opšti član niza može zapisati:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{(a_0(z_n^k)^0 + a_1(z_n^k)^1 + \dots + a_{n-1}(z_n^k)^{n-1})}{\sqrt{n}} \quad (11) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} a_j z_n^{jk} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} a_j e^{i \frac{2\pi}{n} jk} \end{aligned}$$

Ovo može da se drugačije zapiše na sledeći način:

$$F(a) = b.$$

Jednakost za b_k predstavlja Furijeovu transformaciju unapred. Inverzna transformacija je:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_l &= \frac{\tilde{b}_0(z_n^{-l})^0 + \tilde{b}_1(z_n^{-l})^1 + \dots + \tilde{b}_{n-1}(z_n^{-l})^{n-1}}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{b}_k z_n^{-kl} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{b}_k e^{-i \frac{2\pi}{n} kl}, \end{aligned}$$

što može da se zapiše sa

$$\tilde{a} = F^{-1}(\tilde{b}).$$

Neke bitne karakteristike inverzne diskretne Furijeove transformacije:

- Inverzna diskretna Furijeova transformacija za niz: $\tilde{b}_0, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{n-1}$ je isto što i Furijeova transformacija unapred za isti niz samo u obrnutom poredku:

$$F^{-1} = F(\text{rev}(\tilde{b}))$$

i obrnuto:

$$F^{-1}(\text{rev}(\tilde{b})) = F(\tilde{b}).$$

- F^{-1} je u stvari inverzna Furijeova transformacija za F i važi:

$$F^{-1}(F(a)) = F(F^{-1}(a)) = a.$$

6.4 Određivanje cene opcije na krugu

Za bilo koja dva n -dimezionalna vektora $a = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ i $b = [b_0, b_1, \dots, b_n]$ može da se definiše kružna(ciklična) konvolucija od a i b što daje nov vektor c :

$$c = a * b$$

tako da je :

$$c_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_{j-k} b_k.$$

6.4 Određivanje cene opcije na krugu

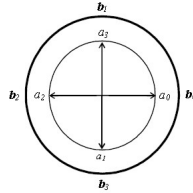
Odmah može da se zapazi da indeks $j - k$ može da bude negativan. U slučaju da se ovo javi, tada se jednostavno da dodaje n kako bi se dobio rezultat između 0 i $n - 1$; ovo je praktično isto što i brojanje zupčanika koji su definisani u prethodnim poglavljima i to se samo odnosi na kretanje u krugu.

Grafički, jednu kružna konvolucija može da se predstavi na sledeći način:

1. Postavimo dva koncentrična kruga podeljena u n jednakih delova. Vektor a se zapiše oko unutrašnjeg kruga u smeru kretanja kazaljke na satu i vektor b izvan spoljašnjeg kruga u smeru suprotnom kretanju kazaljke na sat. (na slici 34 je dat primer za $n = 4$)
2. Ako se primeni skalarno množenje između ova dva kruga dobija se sledeći izraz :

$$a_0b_0 + a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3$$

Rezultat je c_0

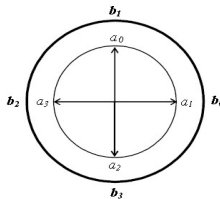


Slika 34:

3. Zatim se okrene unutrašnji krug u smeru suprotnom od smera kretanja kazaljke na satu za n -ti deo punog kruga i ponovi se skalarno množenje između krugova. Rezultat je c_1 :

$$c_1 = a_1b_0 + a_0b_1 + a_3b_2 + a_2b_3$$

Ovo se može prikazati na slici 35:



Slika 35: Skalarno množenje između krugova

4. Ova procedura se ponavlja za računanje $c_2, \dots, c_{n-1}$ tako što se svaki put unutrašnji krug okrene za $1/n$ -ti deo u smeru suprotnom od smera kretanju kazaljke na satu.

6.4 Određivanje cene opcije na krugu

U daljem delu rada će se proučiti kako može da se koristi kružna konvolucija za određivanje cene opcije. Ako se umesto vektora a i b u definiciju kružne konvolucije uvrste isplata opcije i stohastički diskontni faktor koji omogućava prilagođavanje riziku (the pricing kernel) tako da the pricing kernel se kreće u smeru kretanja kazaljke na satu, a isplata opcije se rotira u smeru suprotnom kretanju kazaljke na satu, kao rezultat se dobija cene opcija u rastućem poretku, od najviših do najnižih.

Da bi se dobili precizniji rezultati, koristi se binomni model za određivanje cene opcije, koji je definisan u prethodnom poglavlju.

(Sledeći primer je preuzet iz [1] iz spiska literature.)

Na datum dospeća opcija može imati sledeće četiri vrednosti:

$$C(3) = [599.64 \quad 102.00 \quad 0.00 \quad 0.00].$$

Neka vektor q sadrži uslovne rizik-neutralne verovatnoće za jedan period: $q_u = 0.435235$ i $q_d = 0.56477$. Kako su data samo prva dva člana za vektor q to znači da su preostala dva nule:

$$q = [q_u \quad q_d \quad 0 \quad 0].$$

Neka je $R_f = 1.0033$ rizik-neutralna verovatnoća. Da bi se izračunala cena opcije u trenutku $t = 2$, potrebno je da se odredi vrednost c :

$$c = C(3) * rev(q/R_i).$$

Ova operacija može da se prikaže grafički na slici 36, gde su isplate opcija $C(3)$ na unutrašnjem krugu i cene za $\frac{q}{R_i}$ su na spoljašnjem krugu, obe zapisane u smeru kretanja kazaljke na satu. Numerički rezultat koji se dobija na ovaj način je sledeći:

$$C(3) * rev(q/R_i) = [317.54 \quad 44.25 \quad 0 \quad 337.54].$$

Prve tri vrednosti iz ovog rezultata su bitne, dok je poslednja vrednost je besmislena - jer odgovara isplati bez arbitraže.

Ako se posmatra binomni model gde je $C(j)$ vektor cena opcija na datum $j = 0, 1, \dots, N$ i sa q je označen vektor koji sadrži rizik-neutralne verovatnoće q_u i q_d , koji se dopunjuje nulama kako bi se dobio vektor iste dimenzije kao vektor $C(N)$. Ako se ovo ubaci u prethodni izraz, to jest, uopšti se, dobija se sledeće:

$$C(N-1) = C(N) * rev(q/R_f),$$

$$C(N-2) = C(N) * rev(q) * \frac{rev(q)}{R_f^2},$$

$$C(j) = C(N) * rev(q) * \dots * \frac{rev(q)}{R_f^j}.$$

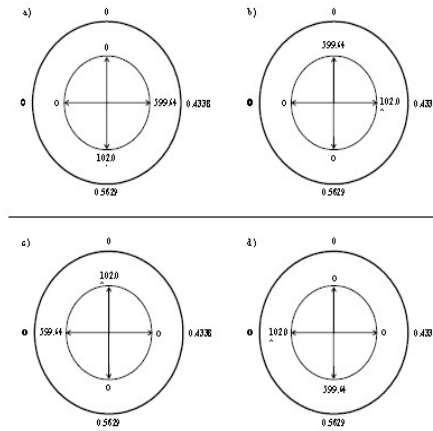
Formulu za određivanje cene opcijama na krugu, $C(j)$, može da se preformuliše. Iako je ova formula dobijena mehanički, biće navedena njena intuitivnija interpretacija sa stanovišta verovatnoće.

Diskretna Furijeova transformacija ima jedno veoma korisno svojstvo - pretvara kružnu konvoluciju u proizvod:

$$F(a * b) = \sqrt{n} F(a) * F(b),$$

$$F^{-1}(a * b) = \sqrt{n} F^{-1}(a) F^{-1}(b),$$

6.4 Određivanje cene opcije na krugu



Slika 36: Određivanje cene opcije primenom kružne konvolucije

gde je n dimenzija za a .

Ovo se može iskoristiti kao velika prednost u određivanju cene opcije. Ako se primeni na uopštena jednačina za određivanje cene opcije na krugu $C(j)$, i ubaci se da je $j = N$ dobija se:

$$C(N) = C(N) * rev(q) * \dots * \frac{rev(q)}{R_f^N},$$

gde je N broj perioda do dospeća. Sada, ako se primeni inverzna Furijeova transformacija na obe strane, F^{-1} , i primeni i koristi svojstvo pretvaranja kružne konvolucije u proizvod na desnu stranu dobija se:

$$F^{-1}(C_0) = F^{-1}(C_N) \times (\sqrt{\text{dimenzija vektora } C_N} F^{-1}(rev(q))/R_f)^N.$$

U binomnom modelu dimezija za C_N je $N + 1$. Primenom osobine inverzne Furijeove transformacije, dobija se: $F^{-1}(rev(q)) = F(q)$ na gornju jednačinu, dobijamo:

$$F^{-1}(C_0) = F^{-1}(C_N) \times (\sqrt{N + 1} F(q)/R_f)^N.$$

Konačno, primenjujući Furijeovu transformaciju unapred na obe strane i koristeći osobinu inverzne Furijeove transformacije, $F^{-1}(F(a)) = F(F^{-1}(a)) = a$ na levoj strani, dobija se:

$$C_0 = F(F^{-1}(C_N) \times (\sqrt{N + 1} F(q)/R_f)^N).$$

Neka važi pretpostavka da model ima IID stopu vraćanja i konstantnu kamatnu stopu, koje su predstavljene preko kombinacije binomnog stabla sa N perioda i $N + 1$ datumom trgovanja. Neka je C_N vektor isplata opcije na datum dospeća, čija je dimenzija $N + 1$. Neka vektor q sadrži rizik-neutralne verovatnoće na prva dva mesta za jedan korak, dok su preostalih $N - 1$ mesta nule. Onda prvi element $(N + 1)$ dimenzionalnog vektora C_0 datog formulom:

$$C_0 = F(F^{-1}(C_N) \times (\sqrt{N + 1} F(q)/R_f)^N),$$

6.5 CM model

je cena opcije bez arbitraže, u trenutku 0. Uloga napredne i inverzne Furijeove transformacije je simetrična, pa se takođe dobija:

$$C_0 = F^{-1}(F(C_N) \times (\sqrt{N+1}F^{-1}(q)/R_f)^N).$$

6.5 CM model

Jedan od glavnih ciljeva CM modela je nalaženje optimalnog rešenja za problem određivanja cene opcije koje se najčešće dobija numerički, i obično zahteva dosta računanja. Za određivanje cene američke opcije se u velikoj meri koristi metod binomnog stabla. Od nedavno, problem određivanja cene opcije se proučava korišćenjem FFT. Uvođenjem Furijeove analize na domenu računanja Cool-Tukey FFT algoritma, istražena je upotreba računara za ovaj problem. Druga istraživanja pokazala su da FFT daje mnogo bolje performanse u poređenju sa binomnim modelom. Zato su od velikog značaja sledeće dve stvari: da se matematički dokaže CM-FFT model i dizajnira novi paralelni FFT algoritam kako bi poboljšale performanse ocene.

U ovom delu će se posmatrati i objasniti fundamentalna ideja korišćenja FFT za određivanje cene opcije. Ovu, kao i još neke osnovne ideje o upotrebi FFT za probleme određivanja cena je opisao Cerny. Finansijski stručnjaci koriste Furijeovu analizu kako bi uočili ciklične šablone po kojima se menja cena podloge. Ovi procesi bi mogli da se opišu vremenskim intervalom h , sa zadatom funkcijom vremena $h(t)$, ili frekvencijskim intervalom gde je proces određen sa amplitudom H , što predstavlja funkciju frekvencije f , u oznaci $H = H(f)$, $-\infty < f < \infty$. Za praćenje kretanja (napred i nazad) koriste se neprekidne jednačine Furijeove transformacije: $H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{2\pi ift} dt$ i $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{-2\pi ift} df$ ili njihove diskretne forme date sa

$$H(f) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} h(t)e^{2\pi ift/N} \quad (20)$$

i

$$h(t) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} H(f)e^{-2\pi ift/N} \quad (21)$$

Kako je vrednost call opcije funkcija strajk cene, ako se aproksimiraju vrednosti za call i strajk cenu u gornjim jednačinama, onda se može primeniti Furijeova transformacija na problem određivanja cene opcije.

Cena call opcije može da se zapiše kao funkciju, koju su definisali Carr i Madan:

$$C_T(k) = \frac{exp(-\alpha k)}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ivk} \psi_T(v) dv \quad (22)$$

gde je $\psi_T(v)$ Furijeova transformacija call cene

$$\psi_T(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivk} c_T(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivk} e^{-rT} \int_k^{\infty} e^{\alpha k} (e^s - e^k) q_T(s) ds dk \quad (23)$$

$$\psi_T(v) = \frac{e^{-rT} \phi_T(v - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + \alpha - v^2 + i(2\alpha + 1)v}. \quad (24)$$

Sa k je označen logaritam strajk cene K , to jest važi: $k = \log(K)$ i identički je jednak sa t u izrazu za diskretan oblik neprekidne Furijeove transformacije, (22).

6.6 Matematički dokaz za CM-FFT model za određivanje cena

Takođe, potrebno je izračunati vrednost call opcije za različite vrednosti strajk cena za date podloge koje su date ugovorom. Takođe, v odgovara za f , $\psi_T(v)$ je Furijeova transformacija cenu opcije $C_T(k)$ i $q_T(s)$ je rizik-neutralna funkcija raspodele za model koji određuje cenu opcije. Integral desne strane izraza za $C_T(k)$ je diskretna Furijeova transformacija, koja se primenjuje za FFT u obliku zbira datu jednačinama za $H(f)$ i $h(t)$.

Ako je $M = e^{-\alpha k} / \pi$ i $\omega = e^{-i}$ onda

$$C_T(k) = M \int_0^\infty \omega^{vk} \psi_T(v) dv \quad (25)$$

Ako je $v_j = \eta(j-1)$ i primeni se trapezoidna formula na desnu stranu integrala iz gornje jednačine, onda $C_T(k)$ može da se zapiše kao

$$C_T(k) \approx M \sum_{j=1}^N \psi_T(v_j) \omega^{v_j k} \eta, \quad k = 1, \dots, N, \quad (26)$$

gde efikasne granice integracije $N\eta$ i v_j , odgovaraju različitim cenama koje se razlikuju za η .

Stoga, u skladu sa Carr I Madanom, može se rešiti problem određivanja cene opcije korišćenjem Furijeove analize.

• Nedostatak CM modela

Da bi izračunali vrednosti call opcije, jednačina za $C_T(k)$ mora da se reši analitički. Njen diskretni oblik dat jednačinom (26) nije pogodan za izlazne FFT algoritme kao što je Cool-Tukey algoritam. Zato CM model u svojoj sadašnjoj formi ne može da se koristi za brže određivanje cene opcija. Ovo je glavni nedostatak korišćenja CM modela u praktične svrhe.

Da bi se dobilo numeričko rešenje i iskoristila prednost paralelnog kompjuterskog računanja prilikom određivanja cene u stvarnosti, ovaj model treba da se matematički dokaže. Bez gubljenja opštosti, neki parametarski uslovi se oslabljuju i uvodi se modifikacija, tako da će dokazani matematički model generisati izvodljive i prilagodljive input vrednosti za FFT algoritam koji će računati tačne call vrednosti. Zatim se algoritam paralelizuje.

Ovo dovodi do glavnih ciljeva ovog rada kao što su

- matematički dokaz modela koji će obezbediti tačna rešenja koja će biti prilagodljiva za paralelni kompjuterski proračun,
- kreiranje efikasnog paralelnog algoritma koji može da uključi matematiku na računskom domenu iz dokazanog modela i implementira algoritam na distribuiranoj memorijskoj arhitekturi i prouči performanse. U paralelnom algoritmu se kriju dve stvari: sinhronizacija i povezivanje. FFT je u suštini sinhroni algoritam. Zato mora da se dizajnira (osmisli) novi paralelni FFT algoritam koji će iskoristiti lokalne podatke, tako što će ih približiti lokalnom procesoru pre računanja, i na taj način će se smanjiti povezivanje.

6.6 Matematički dokaz za CM-FFT model za određivanje cena

Najskorije istraživanje na vrednovanje opcija je uspešno primenilo Furijeovu analizu kako bi se izračunale cene opcija.

6.6 Matematički dokaz za CM-FFT model za određivanje cena

Kao što je pokazano ranije u izrazu $C_T(k) = \frac{\exp(-\alpha k)}{\pi} \int_0^\infty e^{-ivk} \psi_T(v) dv$ da bi se dobila Furijeova transformacija koja može da se analitički reši, funkcija cene call opcije treba da se pomnoži eksponencijalnim faktorom $e^{\alpha k}(C_T(k)) = e^{\alpha k}(C_T(k))$. Vrednost $\psi_T(v)$ u jednačini (25) zavisi od faktora $\phi_T(u)$, gde je $u = v - (\alpha + 1)i$. Izračunavanje intermedijarne funkcije $\phi_T(u)$ zahteva specifikaciju rizik-neutralne funkcije gustine, $q_T(s)$. Granice integrala moraju da se izaberu tako da se dobiju realne vrednosti za FFT inpute. Kako bi se dobio izraz zatvorenog oblika integrala mora da se odabere pogodna podintegralna funkcija, posebno $q_T(s)$ koja je rizik-neutralna funkcija gustine sa krajnjom logaritamskom cenom s_T . Bez uticaja na opštost, koristi se uniformna raspodela za $q_T(s)$. Ovo implicira da se sa jednakim verovatnoćama javljaju različite vrednosti za krajnje logaritamske cene, što bi moglo da se oslabi i normalizuje ili može da se koristi finija raspodela. Pošto se pretpostavlja da je volativnost mala, onda se očekuje da promene u driftu koje se javljaju kao posledica, prouzrokuju nelastičnost sistema. Međutim, kako je pretpostavljeno da $q_T(s)$ ima uniformnu rasodelu, varijacija u driftu se eliminiše i tako se izbegava neelastičnost u sistemu.

Za ciljeve numeričkih proračuna, za gornju granicu jednačine (26) se pretpostavlja da je konstantna vrednost a za donju granicu da je nula. Gornju granicu će diktirati krajnja spot cena. Drugim rečima, da bi se izvršila in-the-money call opcija, gornja granica će trebati da bude manja od krajnje cene podloge. Na osnovu ovoga se dobija jednačina:

$$\phi_T(u) = \int_0^\lambda e^{ivk} q_T(s) ds = \int_0^\lambda (\cos(vk) + i \sin(vk)) q_T(s) ds \quad (27)$$

Bez gubljenja opštosti, u donjem izrazu se izvršavaju modifikacije da bi se olakšao prelaz iz Furijeovog prostora u domen računanja FFT. Cilj ovih modifikacija je da se iz njih dobije ostvarljiv i prilagođen početni input uslov za FFT. Ove modifikacije olakšavaju implementaciju. Iz jednačine (24) dobija se:

$$\psi_T(u) = \int_{-\alpha}^\alpha e^{uvk} e^{-rT} \int_k^\alpha e^{\alpha k} (e^s - e^k) q_T(s) ds dk \quad (28)$$

$$= \frac{e^{-rT} \phi_T(v) - (\alpha + 1)i}{\alpha^2 + \alpha - v^2 + i(2\alpha + 1)v} \quad (29)$$

$$= \frac{e^{-rT} \phi_T(v) - (\alpha + 1)i(\alpha^2 + \alpha - v^2 - i(2\alpha + 1)v)}{(\alpha^2 + \alpha - v^2 + i(2\alpha + 1)v)(\alpha^2 + \alpha - v^2 - i(2\alpha + 1)v)} \quad (30)$$

$$= \frac{e^{-rT} \phi_T(v - (\alpha + 1)i)((\alpha^2 + \alpha - v^2 - i(2\alpha + 1)v))}{((\alpha^2 + \alpha - v^2)^2 + (2\alpha + 1)^2 v^2)}. \quad (31)$$

$$\phi_T(u) = \int_0^\lambda e^{ius} q_T(s) ds \quad (32)$$

gde je λ logaritam krajnje spot cene i integracija se vrši samo na pozitivnoj osi. Ako se u gornju jednačinu ubaci smena za u , dobija se

$$\phi_T(v - (\alpha + 1)i) = \int_0^\lambda e^{i(v - (\alpha + 1))s} q_T(s) ds. \quad (33)$$

6.6 Matematički dokaz za CM-FFT model za određivanje cena

Predpostavljajući da $q_T(s)$ ima uniformnu funkciju raspodele sa krajnjom logaritamskom cenom, izraz za $\phi_T(v - (\alpha + 1)i)$ može da se zapiše i kao

$$\phi_T(v - (\alpha + 1)i) = q_T(s) \frac{e^{(iv + \alpha + 1)s}}{iv + \alpha + 1} \quad s \in (0, \lambda) \quad (34)$$

$$= \frac{q_T(s)}{iv + \alpha + 1} (e^{iv\lambda} e^{(\alpha + 1)\lambda} - 1) \quad (35)$$

$$= \frac{q_T(s)(\alpha + 1 - iv)}{(\alpha + 1)^2 + v^2} (e^{(\alpha + 1)\lambda} \{(\alpha + 1)(\cos(\lambda v) + i \sin(\lambda v)) - 1\}) \quad (36)$$

$$= \frac{q_T(s)}{(\alpha + 1)^2 + v^2} [e^{(\alpha + 1)\lambda} \{(\alpha + 1)\cos(\lambda v) + v\} \sin(\lambda v) - (\alpha + 1)] \quad (37)$$

$$+ i[e^{(\alpha + 1)\lambda} \{(\alpha + 1)\sin(\lambda v) - v\} \cos(\lambda v) + v]. \quad (38)$$

ako se uvede oznaka da je $e^{(\alpha + 1)\lambda} \{(\alpha + 1)\cos(\lambda v) + v\} \sin(\lambda v) - (\alpha + 1) = \Delta$ i $e^{(\alpha + 1)\lambda} \{(\alpha + 1)\sin(\lambda v) - v\} \cos(\lambda v) + v = \Delta_x$ onda poslednji red može da se zapiše

$$\phi_T(v - (\alpha + 1)i) = \frac{q_T(s)(\alpha + 1 - iv)}{(\alpha + 1)^2 + v^2} (\Delta + i\Delta_x). \quad (39)$$

Ako se ova jednačina zameni u jednačinu za $\psi_T(v)$ dobija se

$$\psi_T(v) = \frac{e^{-rT} q_T(s)}{[(\alpha + 1)^2 + v^2][(\alpha^2 + \alpha - v^2)^2 + (2\alpha + 1)^2 v^2]} \times \quad (40)$$

$$[[((\alpha + 1)^2 + v^2)\Delta + (2\alpha + 1)v\Delta_x] + i[((\alpha + 1)^2 + v^2)\Delta_x - (2\alpha + 1)v\Delta]]. \quad (41)$$

Gornji izraz se koristi za novi paralelni FFT algoritam da bi se izračunala funkcija cene call opcije. Finansijski input podaci za paralelni FFT algoritam se računaju kao vrednost podataka u funkciji $\psi_T(v)$ a za različite vrednosti v gornja jednačina za $\psi_T(v)$ se naziva BTT-CM jednačina ili BTT-CM model.

Zatim se računaju različite call vrednosti za različite strajk vrednosti v_j gde $j = 1, \dots, N$. Donja granica za strajk cenu je nula a gornja je $(N - 1)\eta$, gde je η razmak u liniji integracije. Manje vrednosti za η daju finiju mrežu integracije i glatku karakterističnu funkciju strajk cene i odgovarajuću izračunatu call vrednost. Vrednost za k ne levoj strani jednačine

$$C_t(k) \approx \sum_{j=1}^N \psi_T(v_j) \omega^{v_j k \eta}, \quad k = 1, \dots, N,$$

predstavlja logaritam odnosa strajk cena i krajnje spot cene. Implementacija matematičkog modela FFT daje N vrednosti za k sa razmakom veličine γ i ove vrednosti se ubacuju u paralelni algoritam kako bi se izračunale N vrednosti za $C_T(k)$. Ovde se posmatraju slučajevi u opsegu od in-the-money do at-the-money vrednosti za call. Vrednost za k će biti nula za at-the-money call gde su strajk cena i cena premije jednake. Neka su data N prinosa iz FFT sa regularnim razmakom veličine γ . Vrednosti za k mogu da se dobiju iz sledeće jednačine

$$k_u = -p + \gamma(u - 1), \quad za \quad u = 1, \dots, N. \quad (42)$$

6.7 Paralelizacija FFT jednačine

Kako logaritamski odnos strajk cene i premije uzima vrednosti od $-p$ do p , gde je $p = N\gamma/2$. Zamenom izraza za k_u umesto k u jednačinu za $C_T(k)$ se dobija

$$C_T(k_u) \approx \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-iv_j(-p+\gamma(u-1))} \psi_T(v_j)\eta, \quad za \quad u = 1, \dots, N. \quad (43)$$

Ako umesto v_j se ubaci $(j-1)\eta$ dobija se

$$C_T(k_u) \approx \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i\gamma\eta(j-1)(u-1)} e^{ip\eta_j} \psi_T(v_j)\eta, \quad za \quad u = 1, \dots, N. \quad (44)$$

Osnovna jednačina za FFT je

$$Y(k) = \sum_{j=1}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(k-1)} x(j), \quad za \quad k = 1, \dots, N. \quad (45)$$

Ako se poredi jednačina za $C_T(k_u)$ sa osnovnom FFT jednačinom, slobodno se može reći da je jednačina za $C_T(k_u)$ takođe jednačina za FFT. Da bi se primenila FFT, takođe treba da se uvede oznaka: $\gamma\eta = 2\pi/N$. Manje vrednosti za η će obezbediti finiju mrežu integracije. Ali call cene za relativno veliki strajk razmak γ , će se nalaziti u željenom regionu blizu cene akcije. Ako se povećaju vrednosti za N , dobiće se više srednjih vrednosti za izračunate call cene ($C_T(k_u)$) koje odgovaraju različitim strajkm cenama (v_j). Ovo pomaže investitoru da prati kretanje call cene opcije za različite strajk cene na tržištu. U eksperimentalnom istraživanju sa 1024 (N) vrednosti calla, i ako se uzme da je $\eta = 0.25$, gde se intuitivno pretpostavlja fina mreža integracije, dobija se vrednost za $\gamma = 0.02454$. Slično osnovnoj FFT jednačini, jednačina za $C_T(k_u)$ može takođe da se paralelizuje. Efikasan FFT algoritam daje brže i tačnije rešenje za nju.

Dokaz CM modela opisan u ovom delu i dat krajnjom formulom za $\psi_T(v)$ (izraz 41) ispunjava prvi cilj ovog rada, jer je pokazano da je cena opcije takođe jedna jednačina za FFT. Ovaj poboljšani model obrađuje input podatke tako što kasnije koristi algoritme za FFT iz kojih kako bi se dobile call vrednosti.

6.7 Paralelizacija FFT jednačine

Najpre će se uvesti paralelizacija osnovne jednačine brze Furijeove transformacija, koje predstavlja ključni alat u algoritmu koji se koristi za određivanje cene opcije. Neka je dat niz X dužine n $X = \langle X[0], X[1], \dots, X[n-1] \rangle$. Diskretna Furijeova transformacija za dat niz X je niz $Y = \langle Y[0], Y[1], \dots, Y[n-1] \rangle$ koji je iste dužine, taka da je opšti član niza dat formulom

$$Y[i] = \sum_{k=1}^{n-1} X[k] \omega^{ki}, \quad 0 \leq i < n. \quad (46)$$

gde je ω n -ti koren jedinične kružnice u kompleksnoj ravni i važi: $\omega = e^{-2\pi\sqrt{-1/n}}$. U FFT proračunima, stepeni ω se nazivaju twiddle faktori. Za svako računanje $Y[i]$ je potrebno n množenja kompleksnih brojeva i n sabiranja. Zato, kompleksnost korišćenja pravolinijskog algoritma za računanje n vrednosti za Y , u nizu je $O(n^2)$.

6.7 Paralelizacija FFT jednačine

Algoritam za brzu Furijeovu transformaciju koji je dole opisan smanjuje kompleksnost na $O(n \log n)$.

Sledećim jednačinama definisane su osnove FFT algoritma. Ako se pretpostavi da je n stepena 2, tada za računanje DFT za n tačaka može da se primeni Cooley-Tukey algoritam, koji je već ranije spomenut i koji je prikazuje kao zbir dve diskretne Furijeove transformacije za $n/2$ tačaka, što je dato sledećim jednačinama

$$Y[i] = \sum_{k=0}^{(n/2)-1} X[2k] \omega^{2ki} + \sum_{k=0}^{(n/2)-1} X[2k+1] \omega^{(2k+1)i}$$

$$Y[i] = \sum_{k=0}^{(n/2)-1} X[2k] e^{2ki(-2\pi\sqrt{-1/n})} + \sum_{k=0}^{(n/2)-1} X[2k+1] \omega^i e^{2ki(-2\pi\sqrt{-1/n})} \quad (47)$$

$$Y[i] = \sum_{k=0}^{(n/2)-1} X[2k] e^{2ki(-2\pi\sqrt{-1/n})} + \omega^i \sum_{k=0}^{(n/2)-1} X[2k+1] e^{-2\pi ki(\sqrt{-1}(n/2))}. \quad (48)$$

Neka je $\tilde{\omega} = e^{-2\pi ki(\sqrt{-1}(n/2))} = \omega^2$; gde je $\tilde{\omega}$ $(n/2)$ -ti koren jedinične kružnice. Onda poslednja jednačina za $Y[i]$ može da se zapiše

$$Y[i] = \sum_{k=0}^{(n/2)-1} X[2k] \tilde{\omega}^{ki} + \omega^i \sum_{k=0}^{(n/2)-1} X[2k+1] \tilde{\omega}^{ki}. \quad (49)$$

Za svaki nivo, svako računanje DFT može da se podeli na dva manja računanja na rekurzivan način, i na taj način uprosti. Ovo omogućava razvoj FFT algoritma. FFT algoritam koristi prednosti specijalnih svojstva jedinstvenih kompleksnih korena i koristi se „divide - and- conquer” strategija. Ako je n broj predstavljen u obliku stepena dvojke, maksimalni broj nivoa računanja FFT za niz X koji je dužine n je $\log n$. Na svakom nivou će se izvršiti $O(n)$ operacija. Pa zato, ukupna kompleksnost računanja za dat niz smanjiti i biće $O(n \log n)$. Ovaj metod za smanjivanje vremena za obradu podataka tako što se ulazni broj podataka najpre podeli i na dva jednaka dela rekurzivno i na svaki od njih primeni neki od FFT algoritama, pokazao se veoma uspešnim u smanjenju vremena obrade tih podataka.

Bitno je napomenuti, da su kod paralelizovanog FFT algoritma stručnjaci su više obratili pažnju na ograničenu raspodelu podataka (što će se kasnije biti jedna od značajnih pretpostavki prilikom primene Cooley-Tukey algoritma i swap algoritma za dobijanje cene opcije) u odnosu na način na koji algoritmi implementiraju ili na načine na koje se ostvaruje povezanost među procesorima prilikom obrade unetih podataka.

Algoritmi koji se najviše koriste za računanje FFT su Cool-Tukey i Gentleman-Sande algoritam. Ova dva algoritma se razlikuju samo u načinima na kojima povezuju podatke. Paralelizacija jednačine za brzu Furijeovu transformaciju se uvodi kako bi se dali osnovni koraci algoritma FFT-a koji će se kasnije primeniti u novom, swap algoritmu za obradu input podataka, a u ovom slučaju za obradu input podataka dobijenih uz funkcije za cenu opcije $C_T(k)$.

Ovaj algoritam je značajan jer predstavlja jedan od glavnih načina po kome procesori u kompjuteru obrađuju unete podatke. Ovaj algoritam koristi i iterativne i rekurzivne postupke za obradu, tako da procesor implementira rekurzivni na podeljenoj

6.8 FFT algoritam za premeštanje podataka

a iterativni na distribuiranoj memoriskoj arhitekturi, gde svaki procesor ima svoju lokalnu memoriju za smeštanje podataka a njihova razmena se vrši putem poruka. Rezultati FFT paralelizacije mogu da se primene i na drugim oblastima. Matematički model za računanje FFT može da se primeni i u algebarskim funkcijama koje koriste podatke u vektorskom obliku.

6.8 FFT algoritam za premeštanje podataka

U prethodnom poglavlju uveden je pojam paralelizacije FFT algoritma, koji će se u ovom delu iskoristiti kako bi se uveo novi algoritam za premeštanje podataka, i objasnio način po kom on funkcioniše.

Do sada se za obradu input podataka, koji se dobijaju prilikom ubacivanja različitih vrednosti u funkciju za cenu call opcije, koristio Cooley-Tukey algoritam. Mana ovog algoritma se ogleda u tome što se podaci prilikom kompjuterske obrade međusobno povezuju u svakoj iteraciji i svakom procesoru, pa je na taj način vreme obrade podataka povećano.

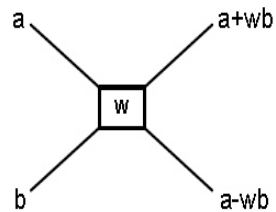
Iz prethodnog poglavlja se može uočiti da je funkcija cene call opcije takođe jedna jednačina FFT koja je malo modifikovana (što se dobija iz matematičkog dokaza za CM-FFT model, pa to daje mogućnost za izvršenje njene paralelizacije i kreiranje novog algoritma.

U ovom delu će se posmatrati način na koji se obrađuju podaci za oba algoritma, na osnovu čega će se utvrditi njihova efikasnost. Tom prilikom važe sledeće pretpostavke za oba algoritma:

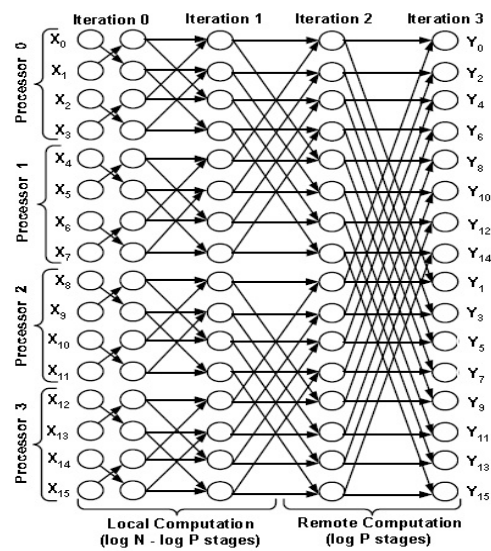
1. Ukupan broj podataka $N = 2^m > 2^p = P$ gde je P ukupan broj procesora na kojima se vrši obrada podataka.
2. za obradu podataka koristi se „butterfly” računanje, koje je prikazano na slici (37) koje se vrši na svakom nivou i u svakom procesoru, što daje sinhronost za oba algoritma (u isto vreme se na svakom procesoru vrši i sabiranje i oduzimanje za unete podatke, što znači da su oba ova algoritma lokalne prirode)
3. U svakom od procesora se obrađuju po 4 inputa i dobijaju 4 outputa
4. Broj podataka na svakom procesoru je ograničen sa N/P .

Na osnovu načina na koji se povezuju podaci unutar svakog procesora, i da li se procesori povezuju u svakoj iteraciji, utvrđeno je da je swap algoritam efikasniji (povezivanje među podacima se odvija samo unutar procesora) u odnosu na Cooley-Tukey (gde se podaci povezuju u svakoj iteraciji i na svakom procesoru, pa se vreme koje je potrebno da se obrade podaci povećava), što je prikazano na slikama 38 i 39. Bitno je i napomenuti da se za isti broj ulaznih podataka dobija isti broj izlaznih za oba algoritma i iste su konzistentnosti.

6.8 FFT algoritam za premeštanje podataka

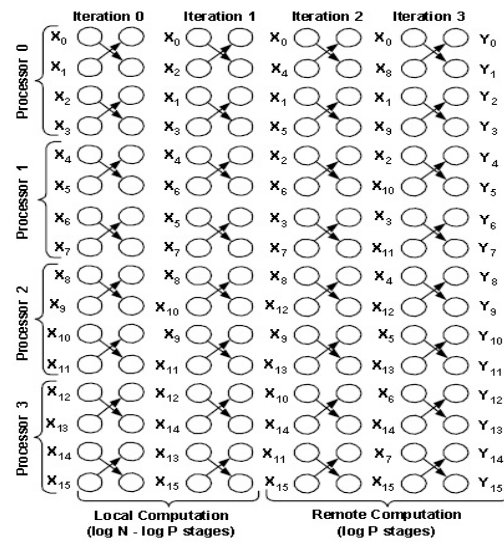


Slika 37: „Butterfly” računanje za brojeve a i b



Slika 38: Cooley-Tukey algoritam

6.8 FFT algoritam za premeštanje podataka



Slika 39: Swap algoritam

7 Rezultati

U ovom delu biće predstavljeni analitički i eksperimentalni rezultati iz rada [1] koji su dobijeni poređenjem efikasnosti, performansi, ubrzanja i vremena obrade određenog broja ulaznih podataka i određenog broja iteracija u BTT-CM jednačini, za Cool-Tukey i swap algoritam. Takođe, za oba algoritma u [1] je izvedena formula za ubrzanje, vreme računanja i efikasnost. Na osnovu toga se posmatra promena cene opcije u zavisnosti od promene strajk cene, a takođe i primena rezultata ovih algoritma na kompjuterskim sistemima.

7.1 Analitički rezultati

Najpre će se paralelno razmotriti vreme trajanja algoritma, odnosno vreme koje je potrebno da oba algoritma obrade unete podatke, a zatim će se izvesti i formula za njihovo izračunavanje. Ovo izvođenje će se kasnije iskoristiti kako bi se uporedila ubrzanja i efikasnost za oba algoritma.

Kako bi se olakšalo računanje, broj nivoa i broj iteracija biće dati u logaritamskom obliku.

Za dobijanje analitičkih rezultata koristi se princip rada za oba algoritma koje je opisan u u prethodnoj glavi i polazi se od pretpostavke da u prvih nekoliko iteracija (na primer $\log N - \log P$) nije potrebno da se nivoi međusobno povezuju, odnosno podaci se u svakom procesoru obrađuju na lokalnom nivou, pri čemu se u svakom procesoru vrši „butterfly” računanje za N/P podataka. Međutim, u narednih $\log P$ iteracija je potrebno da se ostvari povezanost među procesorima. U određenoj i-toj iteraciji iz ukupnog broja iteracija ($\log P$), N/P podataka se povezuju u Cool-Tukey algoritmu (slika 38) i $N/2P$ podataka se povezuju u algoritmu za premeštanje podataka (swap algoritam) na svakom procesoru.

Neka je sa t_s označeno početno vreme koje je potrebno procesoru da pripremi podatke za obradu. Tada, je za $\log P$ iteracija neophodno vreme za obradu podataka $t_s \log P$. Pretpostavimo da su početna vremena za Cool-Tukey algoritam i FFT algoritam za premeštanje podataka t'_s i t''_s respektivno, pri čemu je $t''_s > t'_s$, jer se u svakom procesoru u Cool-Tukey algoritmu razmenjuje duplo više podataka nego u swap algoritmu. Ako je opseg protoka podataka po sekundi r , onda je ukupno vreme za koje podatak treba da prođe među procesorima, $t_w = 1/r$. Ukupno vreme protoka za $\log P$ veza među procesorima kod Cool-Tukey algoritma je $t_w N/P \log P$ a kod swap algoritma $t_w N/2P \log P$. Kada se premeste podaci, kod svakog procesora se vrši i gornje i donje „butterfly” računanje na lokalnim podacima. Predpostavimo da je za svako „butterfly” računanje potrebno vreme t_c . Onda ukupan „trošak” računanja (ignorišući „trošak” povezivanja) za ceo FFT algoritam je $t_c N/P \log N$. Paralelno vreme trajanja je $T_{Cool-Tukey}$ i T_{swap} za Cool-Tukey i swap algoritam, respektivno i T_{comp} je vreme računanja a T_{comm} vreme povezivanja

$$T_{Cool-Tukey} = T_{comp} + T_{comm}$$

$$t_c N/P \log N + t'_s \log P + t_w N/P \log P \quad (50)$$

za Cool-Tukey algoritam.

$$T_{Swap} = T_{comp} + T_{comm}$$

7.1 Analitički rezultati

$$t_c N / P \log N + t_s'' \log P + t_w N / 2P \log P \quad (51)$$

za swap algoritam. Korišćenje $T_{Cool-Tukey}$ i T_{swap} omogućava da se izračuna ubrzanje i efikasnost za oba algoritma.

• Poređenje ubrzanja

Izrazi za ubrzanje za oba algoritma su

$$S_{Cooley-Tukey} = \frac{T_{serial(Cooley-Tukey)}}{T_{parallel(Cooley-Tukey)}} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{t_c N \log N}{t_c N / P \log N + t_s' \log P + t_w N / P \log P} \\ &= \frac{P t_c N \log N}{t_c N \log N + t_s' \log P t_w N \log P} \\ &= \frac{P T_c}{t_c N \log N + (\log P)(P t_s' + t_w N)} \quad \text{gde } T_c = t_c N \log N \\ &= \frac{P T_c}{T_c + (\log P) C_b} \quad \text{gde je } C_b = P t_s' + t_w N \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} S_{Swap} &= \frac{T_{serial(Swap)}}{T_{parallel(Swap)}} \quad (54) \\ &= \frac{t_c N \log N}{t_c (N/P) \log N + t_s'' \log P + t_w (N/2P) \log P} \\ &= \frac{P t_c N \log N}{t_c N \log N + t_s'' \log P t_w (N/2) \log P} \\ &= \frac{P T_c}{t_c N \log N + (\log P)(P t_s'' + t_w (N/2))} \quad \text{gde } T_c = t_c N \log N \\ &= \frac{P T_c}{T_c + (\log P) C_s} \quad \text{gde je } C_s = P t_s'' + t_w N / 2 \\ & \quad C_b = P t_s' + t_w N \\ &= P(t_s'' + \delta) + t_w \frac{N}{2} + t_w \frac{N}{2} \quad \text{gde je } t_s' > t_s'' \\ &= P t_s'' + t_w \frac{N}{2} + P \delta + t_w \frac{N}{2} \\ &= C_s + P \delta + t_w \frac{N}{2}. \end{aligned} \quad (55)$$

Pa zato važi

$$C_b > C_s \quad (56)$$

Ako se iskoristi da je $C_b > C_s$ u izraze krajnje za ubrzanje za oba algoritma dobija se da je

$$S_{Cooley-Tukey} < S_{Swap} \quad (57)$$

Zato, swap algoritam ima bolje performanse za ubrzanje u poređenju sa Cooley-Tukey algoritmom što će biti prikazano u eksperimentalnim rezultatima.

7.2 Eksperimentalni rezultati

- **Poređenje efikasnosti**

Izrazi za efikasnost za oba algoritma su

$$E_{Cooley-Tukey} = \frac{S_{Cooley-Tukey}}{P}$$
$$= \frac{T_c}{T_c + (\log P)C_b} \quad (58)$$

$$E_{Swap} = \frac{S_{Swap}}{P}$$
$$= \frac{T_c}{T_c + (\log P)C_s}. \quad (59)$$

Koristeći uslove da je $C_b > C_s$ i $S_{Cooley-Tukey} < S_{swap}$ dobija se sledeća nejednakost

$$E_{Cooley-Tukey} < E_{Swap}. \quad (60)$$

7.2 Eksperimentalni rezultati

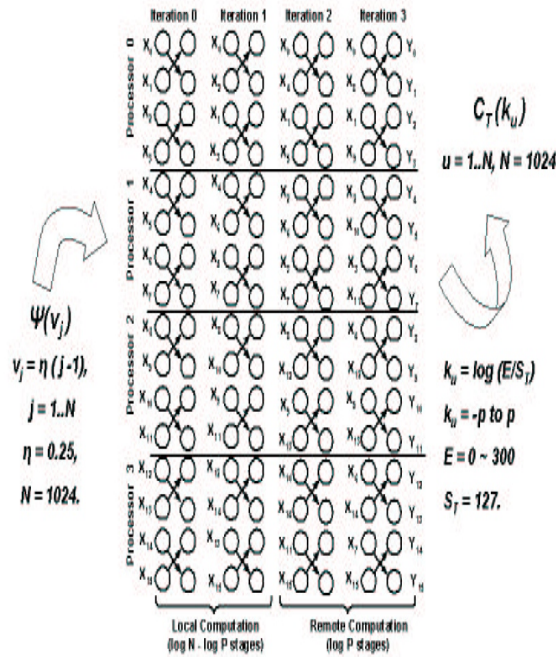
U ovom delu rada biće prikazane vrednosti opcije koje se dobijaju primenom swap algoritma, a zatim bie prikazan način rada u poređenju sa Cooley-Tukey algoritmom.

- **Vrednost call opcije**

Kako je u prethodnom poglavlju matematički dokazano da je swap algoritam efikasniji, na ulazne podatke iz BTT-CM jednačine koji se dobijaju primenom formule $\psi_T(v_j)$ za različite vrednosti strajk cena v_j tako da $j = 1, \dots, N$ će se primeniti ovaj algoritam, pri čemu važi pretpostavka da je interval njihovih vrednosti fiksiran (na primer: $v_j \in (0, \dots, 300)$). η je razmak integracije u formuli za $\psi_T(v_j)$, koji ima osobinu da za jako velike vrednosti N , se smanjuje što za swap algoritam znači da se za fiksirani interval strajk cena dobijaju više srednjih vrednosti call opcije u određenom intervalu. Na taj način se pokazuje kako se menja cena call opcije ako se malo promeni strajk cena. Ovo je prikazano na slici 40.

Na dalje će se posmatrati poređenje performansi za swap algoritam i Cooley-Tukey algoritam kada se broj podataka veličine N povećava. Kako je swap algoritam može da brže prati promenu call cene u odnosu na Cooley-Tukey algoritam. Swap algoritam daje N vrednosti za call opcije ($C_T(k_u)$) gde je k_u je logaritam odnosa strajk cene E i krajnje spot cene S_T (tržišna cena podloge). Vrednosti call opcije dobijene iz swap algoritma su normalizovane vrednosti u odnosu na krajnju spot cenu. Drugim rečima, vrednosti call opcije za datu strajk cenu, koja predstavlja logaritam odnosa strajk i krajnje spot cene, se normalizuju sa krajnjom spot cenom. Kada je *strajk cena* < *spot cene* k_u je negativno (in-the-money slučaj) a kada su spot i strajk cene jednake k_u je nula (at-the-money slučaj) . k_u je pozitivno ako je *strajk cena* > *spot cene* (out-the-money slučaj). U in-the-money slučaju investitor bi preferirao da izvrši opciju (kupovina opcije) po strajk ceni i odmah proda podlogu na tržištu po krajnjoj spot ceni. Tako onaj koji poseduje opciju može da profitira. U at-the-money slučaju ne bi preferirao da izvrši opciju jer je na gubitku ili je profit nula. U out-of-the-money slučaju spot cena podloge na tržištu je manja od strajk cene koja je ugovorena, pa i u ovom slučaju investitor ne preferira da izvrši

7.2 Eksperimentalni rezultati



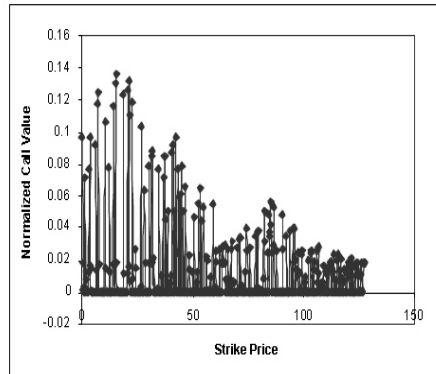
Slika 40: Input i output podaci za Swap algoritam

opciju.

Na slici (41) predstavljene su vrednosti call opcije dobijene za in-the-money slučaj korišćenjem swap algoritma za različite strajk cene. Prilikom eksperimentalnog računanja vrednosti call opcije, strajk cena uzima bilo koju vrednost od 0 do 300. Swap algoritam može da izračuna vrednosti opcije za in-the-money, at-the-money i out-of-the-money slučajeve. Razmatraćemo in-the-money slučaj gde je krajnja spot cena uvek veća od strajk cene.

Na slici 41, prikazan je deo dobijenih call vrednosti u swap algoritmu za in-the-money slučaj. Posebno u ovom eksperimentu, (gde je $\eta = 0.25$, $\gamma = 0.02454$ i $N = 1024$) krajnja spot cena je 127 i da bi se izračunala vrednost call opcije u in-the-money slučaju, strajk cena će uzimati vrednosti u opsegu od 0 do 150. Grafik pokazuje da normalizovana vrednost opcije opada sa povećanjem strajk cene. Ako je X strajk cena i S_T krajnja cena podloge, cena evropske call opcije je $\max\{S_t - X, 0\}$. Ako strajk cena raste od 0 do 127, za $S_T - X$ se očekuje da opadne, što može da se vidi na slici (42). Za veće vrednosti N dobijamo više vrednosti za call opciju, pri čemu strajk cena uzima vrednosti od 0 do 127 i grafik postaje neprekidna funkcija.

7.2 Eksperimentalni rezultati

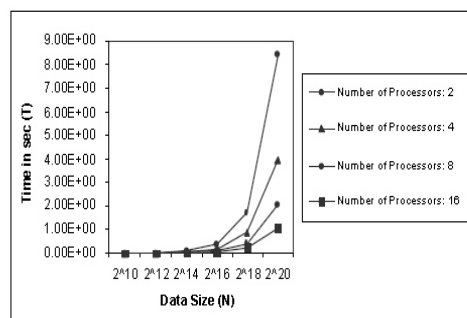


Slika 41: Dobijene call vrednosti u in-the-money slučaju

• Rezultati rada

Eksperimenti rada swap algoritma su primenjeni na kompjuterskom sistemu SunFire 6800 sa MPI(standardizovan sistem za paralelno proračunavanje) na univerzitetu u Manitobi.

Na slici (42) i tabeli 1 (slika 43) je prikazano vreme izvršenja, za različit broj procesora Cooley-Tukey algoritma. Ako se broj podataka povećava, vreme izvršenja se smanjuje. Za podatke veličine 2^{20} , pri čemu 16 procesora obrađuju te podatke, potrebno je $\log 2^{20} - \log 2^4 = 16$ lokalnih proračuna i 4 povezivanja među procesorima. U svakoj iteraciji se razmenjuju $\frac{N}{2P} = \frac{2^{20}}{2^5} = 2^{15}$ podataka na 16 procesora. Ovo se pripisuje činjenici da MPI, pakuje i raspakuje, to jest obrađuje $\frac{N}{2P} = 2^{18}$ podataka na dva procesora što zahteva značajnu količinu vremena. Ako upore-



Slika 42: Vreme izvršenja swap algoritma za različitu količinu podataka

dimo Cooley-Tukey algoritam sa swap algoritmom (slika 45) na 16 procesora sa 2^{20} podataka, na osnovu tabele se uočava da swap algoritam brži za 15 procenata. Ovo

7.2 Eksperimentalni rezultati

Data Size \ Number of Processors	2	4	8	16
2^{10}	3.16E-03	1.95E-03	1.33E-03	4.40E-03
2^{12}	1.86E-02	1.00E-02	8.53E-03	6.80E-03
2^{14}	7.74E-02	3.83E-02	2.33E-02	1.53E-02
2^{16}	3.69E-01	1.84E-01	9.42E-02	5.44E-02
2^{18}	1.74E+00	8.60E-01	4.38E-01	2.53E-01
2^{20}	8.40E+00	4.01E+00	2.02E+00	1.08E+00

Slika 43: Tabelarni prikaz izvršenja swap algoritma za različitu količinu podataka

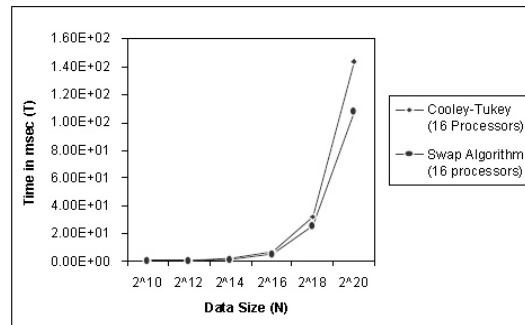
se potvrđuje jednačinama

$$T_{Cooley-Tukey} = t_c \frac{N}{P} \log N + t'_s \log P + t_w \frac{N}{P} \log P$$

i

$$T_{Swap} = t_c \frac{N}{P} \log N + t''_s \log P + t_w \frac{N}{2P} \log P$$

gde je $T_{Cooley-Tukey} > T_{Swap}$. Na slici (44) je prikazano poređenje za ubrzanje za



Slika 44: Poređenje vremena izvršenja swap i Cooley-Tukey algoritma za različitu količinu podataka

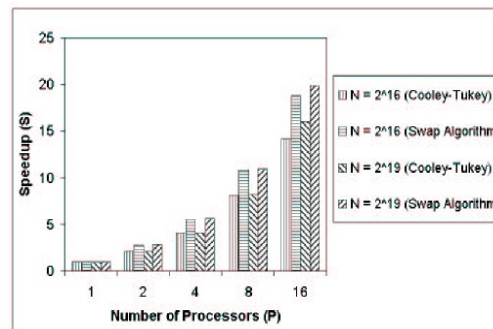
oba ova algoritma. Ubrzanje swap algoritma za podatke veličine 2^{16} i 2^{19} za veliki broj procesora daje bolje rezultate nego Cooley-Tukey algoritam. Rezultati dobijeni iz eksperimenta se vezuju za analitičke rezultate iz uslova $S_{Cooley-Tukey} < S_{Swap}$. Kompjuterski sistem SunFire na univerzitetu u Manitobi, je izgrađen na sistemu MPI koji se zasniva na brzom povezivanju među podacima. U Cooley-Tukey algoritmu, broj povezivanja je veći nego u swap algoritmu, pa zato vreme koje je potrebno da se obrade uneti podaci manje za swap algoritam, pa je princip njegovog rada iskorišćen u ovom sistemu.

7.2 Eksperimentalni rezultati

16 Processors \ Data Size	2^{10}	2^{12}	2^{14}	2^{16}	2^{18}	2^{20}
Cooly-Tukey	5.13E-01	6.86E-01	2.54E+00	7.20E+00	3.22E+01	1.44E+02
Swap	4.40E-01	6.80E-01	1.53E+00	5.44E+00	2.53E+01	1.08E+02

Slika 45: Tabelarni prikaz poređenja izvršenja swap i Cool-Tukey algoritma za različitu količinu podataka

Takođe je eksperiment za oba algoritma sproveden na grupi u kojoj povezivanje među podacima nije obavezno (grupa na departmanu za informatiku na univerzitetu u Manitobi, poznatoj kao „galeb” grupa(“gull” cluster)), i pri tom je uočeno da usled nedostatka unutrašnje povezanosti, broj veza povećava ukupno vreme neophodno povezivanje u Cool-Tukey algoritmu, te se ovaj algoritam i u ovom slučaju pokazao manje efikasnim. Zato u grupi u kojoj povezivanje nije obavezno, brzina se povećava korišćenjem swap algoritma u poređenju sa Cooley-Tukey algoritmom i mnogo je izraženija nego u SunFire sistemu i zato rezultati iz „gull” grupe neće biti prikazani.



Slika 46: Poređenje ubrzanja za Cooley-Tukey i swap algoritam

7.2 Eksperimentalni rezultati

Number of Processors Data Size	Cooley-Tukey 2^{16}	Swap 2^{16}	Cooley-Tukey 2^{19}	Swap 2^{19}
1	1	1	1	1
2	2.05E+00	2.77E+00	2.06E+00	2.79E+00
4	4.11E+00	5.54E+00	4.14E+00	5.60E+00
8	8.09E+00	1.08E+01	8.23E+00	1.09E+01
16	1.42E+01	1.88E+01	1.60E+01	1.98E+01

Slika 47: Tabelarni prikaz poređenja ubrzanja swap i Cooley-Tukey algoritma

8 Zaključak

U poslednjih nekoliko godina u svetu se u velikoj meri popularizovala trgovina finansijskih derivata, jer velike finansijske institucije i investitori žele da se zaštite na finansijskom tržištu od mogućih rizika. Zato jedan od najčešćih problema kojim se bave finansijski stručnjaci je pronalaženje adekvatnog modela koji bi dao optimalno i efikasno rešenje koje bi opisalo kretanje cena akcija i opcija na finansijskim tržištima i na taj način smanjio moguće rizike i unapredio trenutne standarde.

U ovom radu je objašnjeno kako se koriste Furijeova i brza Furijeova transformacija za određivanje cena opcija. Stoga osnov ovog rada predstavljaju teorija distribucija, konvolucija, teorija Furijeove transformacije kao i algoritmi koje koristi brza Furijeova transformacija (Cool-Tukey, swap algoritam,...), a sve to u cilju praćenja promene cene podloge opcije kao i utvrđivanja određenog šablona po kome se ona menja. Takođe, opisan je i metod određivanja cene opcije na krugu, koji određuje cenu opcije primenom kružne konvolucije na isplatu i stohastički diskotni faktor (pricing kernel). Uveden je i CM model koji prati kretanje cene opcije (njen rast i pad) na tržištu, koristeći jednačine Furijeove transformacije. Matematički dokaz ovog modela indirektno obezbeđuje tačna i optimalna rešenja za problem koji se posmatra, jer se koristi za kreiranje paralelnog efikasnog algoritma koji služi za kompjutersku obradu unetih podataka i na taj način daje tražene cene opcija. U ovom radu su proučena dva takva algoritma - Cool-Tukey i swap algoritam, pri čemu oba ova algoritma koriste „butterfly” metod za računanje, što ukazuje na to da su oba algoritma sinhrona, to jest u isto vreme na svakom procesoru u računaru i svakoj iteraciji se vrše obe operacije na podacima - i sabiranje i oduzimanje. Na kraju rada upoređeni su analitički i eksperimentalni rezultati za oba algoritma. Na osnovu upoređivanja vremena za obradu ulaznih podataka u BTT-CM jednačini za različite vrednosti strajk cena, upoređivanja ubrzanja i efikasnosti za oba algoritma, utvrđeno je da je za rešavanje datog problema efikasniji swap algoritam. Kako je on efikasniji, jer za veću količinu podataka vreme izvršenja se smanjuje, primenjen je na kompjuterskom sistemu SunFire 6800 u Manitobi.

Literatura

- [1] Sajib Barua, Fast Fourier Transform for Option Pricing: Improved mathematical Modeling and Design of an Efficient Parallel Algorithm, Winnipeg, Manitoba, Canada, 2004.
- [2] Umberto Cherubini, Giovanni Della Lunga, Sabrina Mulinacci, Pietro Rossi Fast Fourier Transform Fourier Transform methods in finance. John Wiley and sons, 2010.
- [3] Nenad Teofanov, Predavanja iz primenjene analize, Zavod za udžbenike Beograd, 2011.
- [4] A.Cerny, Introduction to fast Fourier transform in finance, Tanaka Business School, London , 2004.
- [5] Dr Zoran Ćirović, Analiza finansijskih tržišta, Zavod za udžbenike, Beograd, 2009.
- [6] Nataša Krejić, Finansijska matematika II, beleške sa predavanja, 2015.
- [7] Stevan Pilipović, Bogoljub Stanković, Prostori distribucija, Srpska akademija nauka i umetnosti, Ogranak u Novom Sadu, 2000.
- [8] A.H. Zemanian, Distribution theory and transform analysis, Dover publications, New York, 1987.
- [9] Robert S. Strichartz, A guide to distribution theory and Fourier transforms, World scientific publishing, 2013.
- [10] Olga Hadžić, Stevan Pilipović, Uvod u funkcionalnu analizu, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, 1966.
- [11] Stevan G. Johnson, When function have no value(s): Delta functions and distributions, MIT course 18.303 notes, 2011.
- [12] <http://studenti.rs/skripte/finansijski-derivati-forwardi-fjucersi-opcije-svopovivarianti/>
- [13] Pierre Gareau Research Seminar ub Financial Mathematics, Departments of Mathematics, Florida State University, 2010.
- [14] <http://www.link-university.com/lekcija/Izvedene-hartije-od-vrednosti/3703>
- [15] Zölzer Udo, DAFX: Digital Audio Effects, 2002.
- [16] <http://www.cmlab.csie.ntu.edu.tw/~dsp/dsp2010/slides/Lecture09>
- [17] Gauss Carl Friedrich, Theoria interpolationis methodo nova tractata, Werke, Band 3, 265–327 (Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen), 1866.
- [18] Bojana Popović, Master rad, Master rad ,Furijeova transformacija i neke primene u finansijama, Novi Sad, 2012.

LITERATURA

*Biografija



Jovana Marković je rođena 22.05.1993 godine u Pirotu. Nakon završene osnovne škole u Pirotu, upisala je prirodno-matematički smer Gimnaziji u Pirotu. 2012. godine upisala je osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer primenjena matematika(matematika finansija). Studiranje na master studijama na istom fakultetu je nastavila u oktobru 2015. godine. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom zaključno sa julskim ispitnim rokom 2017. godine. Time je stekla uslov za odbranu ovog master rada.

LITERATURA

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Jovana Marković

AU

Mentor: dr Nenad Teofanov

ME

Naslov rada: Brza Furijeova transformacija sa primenom na određivanje cene opcija

NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s / en

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2017

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (6/80/15/3/17/15/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)

FO:

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Matematička analiza

ND

Ključne reči: Furijeova transformacija, brza Furijeova transformacija, distribucije, konvolucija, finansijski derivati, opcije, vrednovanje finansijskih derivata, kompleksni brojevi, CM model, diskretna Furijeova transformacija, Cool-Tukey algoritam, swap algoritam

LITERATURA

PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: Ovaj rad se bavi određivanjem cena opcija primenom brze Furijeove transformacije. Najpre je uveden osnovni matematički aparat, uopštene funkcije, operacije konvolucije, a onda i Furijeova transformacija, neke njene bitne karakteristike kao i brza Furijeova transformacija i algoritmi koji se najčešće koriste za njeno računanje. Zatim je uveden pojam opcija i finansijskih derivata, kao i posrupci za njihovo određivanje. U nastavku rada je prikazan metod određivanja cene opcije na krugu, uvodi se CM model za određivanje cene kao i njegov matematičko dokaz i njegova primena u algoritmima za brzu Furijeovu transformaciju. Na kraju rada su dati uporedni rezultati za algoritme iz prethodnog poglavlja i njihova primena.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 08.09.2017.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

ČK

Predsednik: dr Marko Nedeljkov, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Ivana Štajner-Papuga, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Mentor: dr Nenad Teofanov, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

LITERATURA

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master's thesis

CC Author: Jovana Marković

AU

Mentor: dr Nenad Teofanov

MN

Title: Fast Fourier transform with an application to option pricing

TI

Language of text: Serbian (Latin)

LT

Language of abstract: s / en

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2017

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4

PP

Physical description: (6/80/15/3/17/15/0)(chapters/ pages/ quotations/
tables/ pictures/ graphics/ enclosures)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Mathematical analysis

SD

Subject/Key words: Fourier transformation, Fast Fourier transformation, distributions, convoluton, financial derivatives, options, pricing contingenr claims, complex numbers, CM model, discrete Fourier transform, Cool- Tukey algorithm, swap algorithm

SKW Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

LITERATURA

HD

Note:

N

Abstract: This thesis deals with determining option pricing by applying the fast Fourier transformation. Firstly, the basic mathematical apparatus is introduced, together with generalised functions, convolution operations and then Fourier transformation with some of its important characteristics as well as the fast Fourier transformation and the algorithms most frequently used for its calculations. Next, the concept of options and financial derivatives is introduced, as are the procedures for their determining. Furthermore, the thesis shows the method of determining option pricing on circle, and introduces the CM model of determining pricing with its mathematical proof and its use in the fast Fourier transformation algorithms. Finally, the parallel results for the algorithms from the previous chapters and their use are given.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 8.09.2017.

ASB Defended:

DE

Thesis defend board:

DB President: dr Marko Nedeljkov, full professor at Faculty of Science in Novi Sad

Member: dr Ivana Štajner-Papuga, full professor at Faculty of Science in Novi Sad

Mentor: dr Nenad Teofanov, full professor at Faculty of Science in Novi Sad