UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Jovana Kokić

Dinamički skoring i smanjenja poreza

- master rad -

Novi Sad, 2010.

Sadržaj

1.Uvod

Poreski sistem jedne zemlje čini ukupnost svih oblika poreza, odnosno javnih prihoda. Javni prihodi se javljaju u raznim oblicima: porezi, doprinosi, takse, naknade i sl. Opšte karakteristike poreza su da u njegovoj osnovi leži prinuda, da porez predstavlja davanje bez direktne protivnadoknade, to je takav prihod kod kojeg nije unapred utvrđena svrha za koju će se upotrebiti i naplaćuje se isključivo u novcu (samo izuzetno u naturi).
Teorija optimalne kontrole (upravljanja) je ono čime rad počinje, da bi se nakon nekoliko primera, Herod-Domarovog i Solouovog modela rasta došlo do Remzijevog modela rasta, koji je ustvari osnova ovog rada o poreskim sniženjima. Poreska sniženja (olakšice) čine sastavni deo poreskog sistema i predstavljaju jedan od instrumenata poreske politike. Poreska sniženja predstavljaju ustupak koji država čini obveznicima kroz umanjenje poreske osnovice, umanjenje obračunatog poreza i kroz odlaganje poreskih obaveza. Cilj je stimulisanje privrednog rasta, ulaganje stranog kapitala, poboljšanje ekonomske situacije i dr. Ovaj rad o smanjenju poreza i dinamičkom skoringu se najvećim delom oslanja na radove Gregori Mankiva[1]. Ono što se ovde pokušava otkriti jeste da li smanjenja poreza mogu sama da se otplate kroz ekonomski rast ili ne. Kroz moguće realne primere dolazimo do zaključka da smanjenja poreza jednim svojim delom mogu da se otplate kroz ekonomski rast. Cilj rada je da sistematski predstavi i obradi datu temu.

[1] Gregory Mankiw (1958-), američki ekonomista

1.1 Teorija optimalne kontrole

U makroekonomskoj analizi osnovne institucije su privreda, stanovništvo, finansijske institucije (bankarski sektor, osiguranje, finansijsko tržište i sl.) i država.
Ekonomski problemi koji se posmatraju u datom trenutku spadaju u probleme *statičke optimizacije*. Tehnike koje se koriste u statičkoj optimizaciji su, na primer, klasično programiranje, linearno programiranje, nelinearno programiranje i teorija igara. Navedene tehnike se primenjuju u problemima raspodele kod stanovništva i preduzeća, problemima opšte ravnoteže i socijalnoj ekonomiji.
Problemi definisani u nekom vremenskom intervalu rešavaju se tehnikama *dinamičke optimizacije*. Posebno, pri rešavanju problema optimalne kontrole koristi se varijacioni račun, dinamičko programiranje i princip maksimuma. Problem optimalnog ekonomskog rasta spada u dinamičke probleme.

O optimalnoj kontroli

Dinamički proces se odvija u nekom *sistemu* čije stanje se u svakom vremenskom trenutku opisuje nekom funkcijom stanja. Osnovni zadatak optimalne kontrole je ispunjavanje određenog *kriterijuma optimalnosti* za dati sistem. Matematički model dinamičkog procesa je najčešće sistem običnih diferencijalnih jednačina. Od modela se zahteva da odgovori na pitanje ponašanja dinamičkog sistema pri promeni parametara koji karakterišu njegovo stanje.
Osnovni paramatri dinamičkog sistema su: *vreme, promenljive stanja, promenljive kontrole i slučajni parametri.*
Vreme t uvek je nezavisna promenljiva i važi $t \in [t_0, t_1]$. Sa t_0 je označen *početni trenutak* u kome počinje da se odvija posmatrani proces, a t_1 označava *finalni (krajnji) trenutak* u kom se proces završava. Početni trenutak je uvek zadat, na primer $t_0 = 0$, a krajnji trenutak $t_1 = T$ je često nepoznat.
Stanje sistema u zadatom vremenskom intervalu karakteriše n funkcija stanja $x_1(t), x_2(t), ...x_n(t)$, koje se nazivaju promenljive stanja i koje su neprekidne funkcije vremena. Vektor $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ zove se vektor stanja i može imati različit fizički smisao. $x(t)$ predstavlja *trajektoriju stanja* sistema, koja ima početak u početnom stanju sistema $x(t_0) = \alpha$, gde je α unapred zadat vektor.
Parametri kontrole $u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t), m \in N$, su takođe funkcije vremena, kojima je moguće uticati na sistem u skladu sa određenim zahtevima. Ove funkcije mogu biti neprekidne, ali i po delovima neprekidne funkcije. Vektor kontrole je dat sa $u(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t))$. Zadaci optimalne kontrole mogu se podeliti na one u kojima vektor kontrole nije podvrgnut nikakvim ograničenjima i one kod kojih se na komponente vektora kontrole nameću izvesna ograničenja. Na primer, zahteva se da jedna ili više funkcija budu ograničene. Vektori kontrole koji u svakom vremenskom

trenutku ispunjavaju date uslove pripadaju dopustivom skupu vektora koji je najčešće kompaktan i konveksan. Takve vektore zovemo dopustivim (odgovarajućim) vektorima i oni pripadaju kontrolnom skupu U.

Kontrola sistema koja zavisi i od informacija o trenutnom stanju sistema, odnosno $u_j = u_j\left(t, x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)\right), j = 1, 2, \ldots m,$ naziva se *poziciona* kontrola, a u slučaju da vektor kontrole zavisi samo od vremena, kontrola je *programska*. Primer programske kontrole je automatsko sušenje odeće sa unapred podešenim vremenom rada. Primer pozicione kontrole je kućni sistem zagrevanja koji se uključuje i isključuje od zavisnosti temperature u prostorijama. U ekonomiji, primer pozicione kontrole je izdvajanje iz budžeta za nezaposlene, s obzirom na broj nezaposlenih, dok je primer programske kontrole u ekonomiji izdvajanje iz budžeta za razvoj nauke.

Svaki dinamički sistem zavisi i od slučajnih parametara $s_1(t), s_2(t), \ldots s_p(t), p \in N,$ koji se menjaju slučajno pri promeni vremena i koji se, po pravilu, ne mogu meriti. Procesi kod kojih se dejstvo slučajnih paramatara može zanemariti nazivaju se *deterministički* dinamički procesi, a procesi kod kojih ovi parametri igraju značajnu ulogu zovu se *stohastički* procesi. U ovom radu se bavimo samo determinističkim procesima.

Ponašanje parametara stanja se karakteriše sistemom od n diferencijalnih jednačina prvog reda koje izražavaju promenu parametara stanja u zavisnosti od vremena, paramatara stanja i parametara kontrole

$$x'_j(t) = f_j(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots u_m), \ j = 1, \ldots n. \tag{1}$$

pri čemu su funkcije $f_j, j = 1, \ldots n$ zadate i neprekidno diferencijabilne. Ako one ne zavise eksplicitno od vremena, kažemo da je sistem autonoman. Ove jednačine zovu se i jednačine kretanja.

Važan specijalan slučaj je linearni sistem diferencijalnih jednačina, koji se može napisti u obliku

$$x' = Ax + Bu,$$

gde je $A \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, a $B \in \boldsymbol{R}^{n\times m}$.

Početni uslov za posmatrani sistem je dat sa $x(t_0) = \alpha$, $\alpha \in \boldsymbol{R}^n$.

Kriterijum optimalnosti za posmatrani sistem je oblika

$$I = I(u) = \int_{t_0}^{t_1} V(t, x, u)\, dt + F\left(t_1, x(t_1)\right), \tag{2}$$

gde su F i podintegralna funkcija V zadate i neprekidno diferencijabilne. Navedeni oblik kriterijuma optimalnosti se zove Bolcin problem. U slučaju da je $F \equiv 0$, problem je Lagranžovog tipa, a ako je $V \equiv 0$, problem je Majerovog tipa. Može se pokazati da su sva tri navedena kriterijuma optimalnosti međusobno ekvivalentna.

Dakle, zadatak problema optimalne kontrole je određivanje promenljivih stanja i promenljivih kontrole tako da budu zadovoljene diferencijalne jednačine dinamičkog procesa (1) uz zadate početne uslove, a da kriterijum optimalnosti (2) dostiže minimalnu ili maksimalnu vrednost. Pri tome na vektor stanja i vektor kontrole mogu biti nametnuta razna ograničenja. [1]

Primer 1 [2]:

Posmatramo ribe u jezeru. One imaju svoju prirodnu stopu rasta (kao populacija) i posmatramo ulov. Previše ulova može da ugrozi opstanak riba, no ukoliko je ulov ribe mali, izostaje nam zarada. Naravno, ulov i rast populacije riba u jezeru je tokom vremena. Nameće se očigledno pitanje: koja je najbolja tj. optimalna stopa ulova (da ne ugrozimo opstanak riba, a da pri tome imamo maksimalnu dobit)?
Odgovor zahteva da se identifikuje optimalna putanja ili trajektorija. Optimalna ili najbolja trajektorija treba da se izabere iz skupa mogućih. Ako sa $x(t)$ označimo okolnosti tj. stanje situacije u jezeru u vremenu *t*, a sa $u(t)$ kontrolu u vremenu *t*, tada je PROBLEM OPTIMALNE KONTROLE naći trajektoriju $\{x(t)\}$ birajući iz kontrolnog skupa $\{u(t)\}$, tako da odgovarajuća funkcija cilja dostiže maksimalnu ili minimalnu vrednost. Jedan od načina da se reši ovaj problem je Pontriaginov princip maksimuma, koji je inače najzastupljeniji u ekonomiji.

Pretpostavke za dalji rad u problemima optimalne kontrole:

1. Pošto je minimizacija neke funkcije cilja isto što i maksimizacija njene negativne vrednosti, posmatraćemo samo problem maksimuma.
2. Problem optimalne kontrole može da se posmatra u **neprekidnom** i **diskretnom** vremenu. Ukoliko se problem posmatra u neprekidnom vremenu koriste se diferencijalne jednačine da opišu model, inače, kod diskretnih modela su diferencne jednačine, rekurzije te koje opisuju model.
3. Svi problemi koje posmatramo su autonomni.
4. Problem je vremenski zavistan, odnosno radi se o dinamičkom problemu.
5. U većini modela granična vrednost $F(x^T)$ je nula, što znači da je kriterijum optimalnosti Lagranžovog tipa.

Tabela 1

<table>
<tr><th>Neprekidni slučaj</th><th>Diskretni slučaj</th></tr>
<tr><td>$\max\limits_{\{u(t)\}} J = \int_{t_0}^{t_1} V(x,u,t)\,dt + F(x^1,t)$
$\dot{x} = f(x,u,t)$
$x(t_0) = x^0$
$x(t_1) = x^1$
$\{u(t)\} \in U$</td><td>$\max\limits_{\{u_t\}} J = \sum_{t=0}^{T-1} V(x_t,u_t,t)\,dt + F(x^T,t)$
$x_{t+1} - x_t = f(x_t,u_t,t)$
$x_t = x^0$ kada $t = 0$
$x_t = x^T$ kada $t = T$
$\{u_t\} \in U$</td></tr>
<tr><td colspan="2">t_0 (ili $t = 0$) je početno vreme
t_1 (ili T) je krajnje vreme
$x(t) = \{x_1(t),....x_n(t)\}$ ili $x_t = \{x_{1t},....x_{nt}\}$ je n promenljivih stanja
$x(t_0) = x^0$ ili $x_t = x^0$ za $t = 0$ je početno stanje
$x(t_1) = x^1$ ili $x_t = x^T$ za $t = T$ je krajnje stanje
$u(t) = \{u_1(t),....u_m(t)\}$ ili $u_t = \{u_{1t},....u_{mt}\}$ je $m-$kontrolnih promenljivih
$\{u(t)\}$ je neprekidna kontrolna trajektorija $t_0 \le t \le t_1$
$\{u_t\}$ je diskretna kontrolna trajektorija $0 \le t \le T$
U je skup svih dopustivih kontrolnih trajektorija
$\dot{x}(t) = f(x,u,t)$ ili $x_{t+1} - x_t = f(x_t,u_t,t)$ označava jednačinu kretanja
J je funkcija cilja
$V(x(t),u(t),t)$ ili $V(x_t,u_t,t)$ je pomoćna funkcija
$F(x^1,t)$ ili $F(x^T,t)$ je granična funkcija</td></tr>
</table>

U *tabeli 1* je prikazan opšti oblik neprekidnog i diskretnog problema optimalne kontrole za čije rešavanje ćemo koristiti princip maksimuma, i *tabela 1* navodi oznake koje ću ubuduće koristiti za promenljive stanja, promenljive kontrole, pomoćnu i graničnu funkciju, funkciju cilja i jednačine kretanja.

Primer 2 [2]:

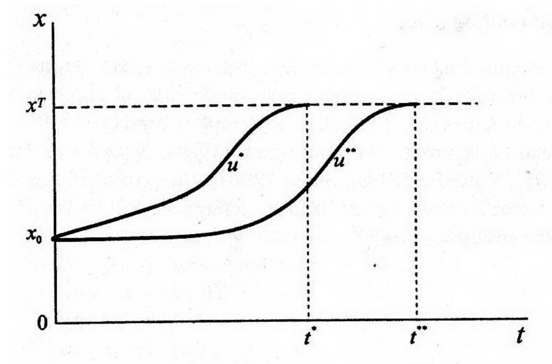
Tipičan neprekidni model optimalne kontrole sa sledećim pretpostavkama:

1. konačan je
2. sve jednačine su autonomne
3. funkcija je nula u krajnjem stanju
4. postoji jedna promenljiva stanja i jedna kontrolna promenljiva

jeste

$$
\begin{aligned}
&\max_{\{u(t)\}} J = \int_{t_0}^{t_1} V(x,u)\,dt \\
&\dot{x} = f(x,u) \\
&x(t_0) = x^0 \\
&x(t_1) = x^1
\end{aligned}
\quad , \tag{3}
$$

gde je *x* promenljiva stanja, *u* je kontrolna promenljiva, a obe zavise od vremena *t*. Grafički prikaz je dat na *slici 1*.



Slika 1.

Trajektorije u^* *i* u^{**} *su rešenja jednačine* $\dot{x} = f(x,u)$*. Problem je izabrati putanju koja maksimizira J i zadovoljava granični uslov* $x(t^*) = x^T$ *i* $x(t^{**}) = x^T$.

1.2 Pontriaginov princip maksimuma

Ojlerova jednačina

Posmatrajmo problem nalaženja neprekidno diferencijabilne funkcije koja daje ekstremnu vrednost funkcionele $J(x) = \int_a^b f(t, x(t), x'(t))dt$, pri čemu su unapred zadati granični uslovi $x(a) = A$ i $x(b) = B$.

Da bi priraštaj $x(t) + h(t)$ nezavisno promenljive $x(t)$ ispunjavao navedene granične uslove, pretpostavićemo da važi $h(a) = h(b) = 0$.

Neka je, sada, $J(x) = \int_a^b f(t, x(t), x'(t))dt$. Važi

$$\Delta J(x) = \int_a^b \left[f\left(t, (x+h)(t), (x+h)'(t)\right) - f\left(t, x(t), x'(t)\right) \right] dt,$$

$$f(t, x+h, x'+h') - f(t, x, x') = \left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial x'} h' \right) + r(t, x, x', h, h'),$$

gde je $r(t, x, x', h, h') = o(\|h\|_1)$ kada $\|h\|_1 \to 0$, pa je

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial x'} h' \right) dt. \tag{4}$$

Prema tome, potreban uslov za ekstrem funkcionele J je dat sa

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial x'} h' \right) dt = 0 .$$

<u>*Teorema 1*</u>: Neka je data funkcija $f \in C[a,b]$ i neka važi $\int_a^b f(t)x(t)\,dt = 0$, za sve $x \in C^1[a,b]$ sa osobinom $x(a) = x(b) = 0$. Dokazati da je tada $f \equiv 0$.

Dokaz : Pretpostavimo da postoji $t_0 \in (a,b)$ u kojoj je $f(t_0) \neq 0.$ Neka je, na primer, $f(t_0) > 0$. Iz neprekidnosti funkcije f sledi da postoji interval $(c,d) \subset (a,b)$ koji sadrži tačku t_0 tako da važi $f(t) > 0$, za sve $t \in (c,d)$. Neka je $x(t) := (c-t)^2 (d-t)^2, t \in (c,d),$ a $x(t) = 0$ za $t \in (a,b) \setminus (c,d)$. Kako x ispunjava uslove teoreme 1, vidi se da je $\int_a^b f(t)x(t)\,dt > 0$, što je u kontradikciji sa uslovom teoreme ⊠

<u>*Teorema 2*</u>: Neka je data funkcija $g \in C[a,b]$ i neka važi $\int_a^b g(t)x'(t)\,dt = 0$, za sve $x \in C^1[a,b]$ sa osobinom $x(a) = x(b) = 0$. Dokazati da je $g(t) = const.$

Dokaz: Iz teoreme o srednjoj vrednosti za integral sledi da postoji $c \in \mathbf{R}$ tako da važi

$$\int_a^b (g(t) - c)\,dt = 0.$$

Pokažimo da za proizvoljnu neprekidnu funkciju $f(t), t \in [a,b],$ važi

$$\int_a^b (g(t) - c) f(t)\,dt = 0.$$

Jasno, f možemo napisati u obliku $f(t) = \lambda(t) + \alpha,$ pri čemu je $\int_a^b \lambda(t)dt = 0$, a α je odgovarajuća konstanta $\left(\alpha = \int_a^b f(t)\,dt\right)$.

Primetimo da je funkcija $x(t) = \int_a^b \lambda(\tau)d\tau$ ispunjava uslove zadatka $(x'(t) = \lambda(t))$.

Dakle,

$$\int_a^b (g(t) - c) f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\lambda(t)\,dt - c\int_a^b \lambda(t)\,dt + \alpha\int_a^b (g(t) - c)\,dt = 0,$$

Za proizvoljnu funkciju $f \in C[a,b]$. Ako stavimo $f(t) = g(t) - c$, dobijamo

$$\int_a^b \left(g(t)-c\right)^2 dt = 0,$$

odnosno $g(t)\equiv c$ ⊠

Teorema 3 (Dibua Rejmonda[2]): Neka su date funkcije $f, g \in C[a,b]$ i neka važi

$$\int_a^b \left[f(t)x(t) + g(t)x'(t) \right] dt = 0,$$

za sve $x \in C^1[a,b]$ sa osobinom $x(a) = x(b) = 0$. Tada je g diferencijabilna i važi $f(t) - g'(t) = 0$.

Dokaz: Neka je $F(t) = \int_a^t f(\tau)d\tau$. Parcijalnom integracijom dobijamo

$$\int_a^b f(t)x(t)\,dt = -\int_a^b F(t)x'(t)\,dt.$$

Na osnovu prethodne teoreme dobijamo $g(t) = F(t) + c$, za neko $c \in \boldsymbol{R}$. S obzirom da je desna strana ove nejednakosti diferencijabilna $F'(t) = f(t)$, sledi $g \in C^1[a,b]$ i $g'(t) = f(t)$ ⊠

Na osnovu teoreme Dibua Rejmonda, iz (4) sledi

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'} = 0. \tag{5}$$

Jednačina (5) zove se *Ojlerova jednačina*.

Teorema 4: Potreban uslov da funkcionela $J(x) = \int_a^b f(t, x(t), x'(t))dt$, definisana na klasi neprekidno diferencijabilnih funkcija $x \in C^1([a,b])$, koje ispunjavaju uslove $x(a) = A$ i $x(b) = B$, ima ekstrem u funkciji x_0 je da je ta funkcija rešenje Ojlerove jednačine

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'} = 0$$

Dokaz: Sledi na osnovu prethodnih razmatranja⊠

[2] Dubois Reimond (1831-1889), nemački matematičar

Hamiltonijan[3]

Kako je potreban uslov za ekstrem funkcionele

$$J(x)=\int_a^b f\left(t,x(t),x'(t)\right)dt$$

dat sistemom *n* diferencijalnih jednačina drugog reda

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x_k'}=0,\qquad k=1,...n, \tag{6}$$

Hamilton je predložio da se navedeni sistem na odgovarajući način zameni sa *2n* diferencijalnih jednačina prvog reda. Osim *n* promenljivih funkcija $x_k, k=1,...n$, Hamilton je uveo *n* konjugovanih promenljivih $\lambda_1(t),\lambda_2(t),...,\lambda_n(t)$. To su međusobno nezavisne funkcije definisane relacijom

$$\lambda_k=\frac{\partial f}{\partial x_k'}, k=1,...,n. \tag{7}$$

Pretpostavlja se da je ispunjen uslov $\det\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right|\neq 0,\ j,k=1,...,n.$ Tada se, na osnovu teoreme o implicitnim funkcijama, iz jednačine (7) može izraziti $x_k{}'=x_k{}'(t,x,\lambda)$, gde je $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$. Zajedno sa funkcijama λ_k uvodi se i Hamiltonova funkcija ili Hamiltonijan

$$H(t,x,\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k-f(t,x,x'). \tag{8}$$

Diferenciranjem dobijamo

$$dH=\sum_{k=1}^{n}x_k{}'d\lambda_k+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k dx_k'-\frac{\partial f}{\partial t}dt-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}dx_k-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k{}'}dx_k{}',$$

odnosno koristeći (6) i (7)

$$dH=\sum_{k=1}^{n}x_k{}'d\lambda_k-\frac{\partial f}{\partial t}dt-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k' dx_k.$$

[3] W. R. Hamilton (1805-1865), britanski matematičar

Odavde sledi da je $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial t}$, kao i (izjednačavanjem članova uz iste diferencijale) sledeći sistem *2n* jednačina

$$x_k' = \frac{\partial H}{\partial \lambda_k}, \lambda_k' = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, k = 1, \dots n. \tag{9}$$

To je traženi sistem kanonskih ili Hamiltonovih diferencijalnih jednačina.
Integracijom kanonskog sistema (9) dobija se rešenje

$$x_k = x_k\left(t, C_1, \dots, C_{2n}\right), \qquad \lambda_k = \lambda_k\left(t, C_1, \dots, C_{2n}\right),$$

gde se konstante $C_1, \dots, C_{2n}$ određuju iz unapred zadatih početnih uslova. Na primer $x_k(0) = \alpha_k, \lambda_k(0) = b_k, k = 1, \dots, n.$

Dakle, sistem Ojler-Lagranžovih jednačina (6) ekvivalentan je sistemu (9). Interesantno je uočiti da se kanonske jednačine mogu izvesti iz uslova stacionarnosti sledećeg integrala

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k' - H\left(t, x, \lambda\right) \right) dt, \tag{10}$$

pri čemu se x i λ tretiraju kao nezavisne promenljive. Zbog toga se (10) naziva kanonski integral dejstva dinamičkog sistema.

Osnovna ideja principa maksimuma

Posmatrajmo najpre slučaj kada na komponente vektora kontrole nisu nametnuta nikakva ograničenja. Rešavanje ovakvog problema moguće je sprovesti u okviru varijacionog računa. Ograničićemo se takođe na jednodimenzionalan slučaj i Lagranžov problem. Posmatra se, dakle, problem određivanja ekstremne vrednosti funkcionele

$$J = \int_0^T V\left(t, x, u\right) dt,$$

gde je T zadato, proces je opisan jednačinom

$$x'(t) = f\left(t, x, u\right),$$

a stanje sistema u trenutku $t = 0$ je dato sa $x(0) = \alpha$.

Uvodimo Lagranžov množitelj $\lambda = \lambda(t)$ i posmatramo novu funkcionelu

$$\tilde{J} = \int_0^T \left(V\left(t, x, u\right) - \lambda(t)\left(x' - f\left(t, x, u\right)\right) \right) dt.$$

Diferenciranjem nezavisnih promenljivih x, u i λ dobijamo

$$d\tilde{J} = \int_0^T \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial u} du - d\lambda \left(x' - f\left(t, x, u\right)\right) - \lambda \left(dx' - \frac{\partial f}{\partial x} dx - \frac{\partial f}{\partial u} du \right)\right) dt,$$

koristeći $dx' = \left(dx\right)'$, a zatim parcijalnu integraciju integrala od $\lambda dx'$ dobijamo

$$d\tilde{J} = -\lambda(T)\,dx(T) + \lambda(0)\,dx(0) + \int_0^T \left(dx\left(\lambda' + \frac{\partial V}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \right) - d\lambda\left(x' - f\left(t, x, u\right)\right) + du\left(\frac{\partial V}{\partial u} + \lambda \frac{\partial f}{\partial u} \right)\right) dt$$

Odavde, iz uslova stacionarnosti $d\tilde{J} = 0$ dobijamo sistem

$$x' = f\left(t, x, u\right), \qquad \lambda' = -\frac{\partial V}{\partial x} - \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial V}{\partial u} + \lambda \frac{\partial f}{\partial u} = 0, \tag{12}$$

kao i $-\lambda(T)\,dx(T) + \lambda(0)\,dx(0) = 0.$ Kako je $dx(0) = 0$ sledi da mora biti ispunjen prirodni granični uslov $\lambda(T) = 0$, kojeg nameće sama varijaciona formulacija. Iz jednačine (12) određuje se funkcija kontrole $u = u\left(t, x, \lambda\right)$. Na osnovu konstrukcije sledi da je ta kontrola $u_0 = \phi\left(t, x, \lambda\right)$ optimalna. Uvrštavanjem ove relacije u (11) dobijamo $x' = \varphi\left(t, x, \lambda\right)$ i $\lambda' = \nu\left(t, x, \lambda\right)$. Opšte rešenje ovog sistema zavisi od dve proizvoljne konstante koje se određuju iz zadatog uslova $x(0) = \alpha$ i prirodnog uslova $\lambda(T) = 0$.

Posmatrajmo sada slučaj više promenljivih, odnosno $\mathbf{x} = \left(x_1, ..., x_n\right)$ i $\mathbf{u} = \left(u_1, ..., u_m\right)$. Ovo uopštenje ćemo izložiti u duhu principa maksimuma, koji je formulisao Pontrijagin[4]. Dakle, tražimo maksimum ili minimum funkcionele

$$J = \int_0^T V\left(t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_m\right) dt \tag{13}$$

pri čemu je ponašanje sistema određeno sa

$$x_k{}' = f_k\left(t, x_1, ... x_n, u_1, ..., u_m\right), k = 1, ..., n, \tag{14}$$

a početno stanje sistema je poznato

$$x_k\left(0\right) = 0, k = 1, ..., n \tag{15}$$

[4] Lev Pontryagin (1908-1988), ruski matematičar

Napomenimo da je T poznato, kao i da komponente vektora kontrole nisu podvrgnute nikakvim dodatnim uslovima (izuzev da su po delovima neprekidne funkcije).
Pontrijaginova ideja je da se uvede nova funkcija, u vezi sa (13) i (14), koja će imati relativno jednostavnu strukturu. Pokazalo se da se takva funkcija može konstruisati. Štaviše, njen oblik je identičan obliku Hamiltonove funkcije. S obzirom na fizički smisao Hamiltonijana koji predstavlja ukupnu energiju dinamičkog sistema, postavlja se sledeće pitanje: da li se optimalna svojstva Hamiltonijana po vektoru kontrole **u** mogu uzeti kao kriterijum za nalaženje optimalnih svojstava problema optimalne kontrole (13), (14), (15)? Odgovor je potvrdan, a upravo ta činjenica naziva se Ponrijaginov princip maksimuma.

Polazimo od funkcionele

$$\tilde{J} = \int_0^T \left(V(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t) \left(x_k' - f_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \right) \right) dt, \tag{16}$$

gde su funkcije λ_k Lagranžovi množitelji, koje ćemo nazvati dualne promenljive. U skladu sa kanonskim integralom dejstva dinamičkog sistema (10) uvodimo Hamiltonijan

$$H = H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = V(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}).$$

Diferenciranjem integrala (16), po analogiji sa računom izvedenim u jednodimenzionalnom slučaju dobijamo sledeći sistem jednačina

$$\begin{aligned} x_k' &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_k} \\ \lambda_k' &= -\frac{\partial H}{\partial x_k}, k = 1, \dots, n \\ \frac{\partial H}{\partial u_k} &= 0, k = 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{17}$$

kao i $\lambda_k(T) = 0, k = 1, \dots, n.$ Jednačine (17) sa $2n+m$ nepoznatih nazivaju se kanonske diferencijalne jednačine i one ostaju nepromenjene u čitavoj teoriji optimalne kontrole. Posmatrajmo sada m algebarskih jednačina

$$\frac{\partial H}{\partial u_k} = \frac{\partial V}{\partial u_k} + \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial u_k} = 0, k = 1, \dots, m. \tag{18}$$

One daju potreban uslov optimalnosti Hamiltonijana s obzirom na komponente vektora kontrole. Ova tvrdnja je suština principa maksimuma (podrazumeva se da je nazivom „princip maksimuma“ obuhvaćen i problem određivanja minimuma). Princip maksimuma glasi: *Ako je vektor kontrole* **u** *optimalan, to jest, ako je za vrednost* **u** *kriterijum*

optimalnosti J maksimalan, onda je Hamiltonijan H maksimalan u odnosu na komponente vektora kontrole **u** *u dozvoljenom skupu kontrole.*
U primenama principa maksimuma, iz jednačine (18) određujemo $\mathbf{u}_o$, optimalna kontrola, a zatim iz sistema kanonskih jednačina (17) određujemo **x** i $\boldsymbol{\lambda}$, kako je već opisano u jednodimanzionalnom slučaju.
Dovoljan uslov za minimum je pozitivna definitnost matrice drugog izvoda funkcije H po **u**, to jest $\frac{\partial^2}{\partial u^2} H > 0$.
Sledi ilustracija ovog problema kroz primer.

<u>Primer 3</u> [2]:

Problem kontrole je

$$\begin{aligned}
&\max_{\{u\}} - \int_0^1 \tfrac{1}{4}\left(x^2 + u^2\right) dt \\
&\dot{x} = x + u \\
&x(0) = 2 \\
&x(1) = 0.
\end{aligned}$$

Pokazujem kako naći optimalnu trajektoriju $x^*(t)$.

Hamiltonijan za ovaj problem je

$$H(x,u) = V(x,u) + \lambda f(x,u) = \frac{-\left(x^2 + u^2\right)}{4} + \lambda (x+u).$$

Uslovi prvog reda su

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{u}{2} + \lambda = 0 \text{, odakle sledi } u = 2\lambda,$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\left(\frac{-x}{2} + \lambda\right) = \frac{1}{2}x - \lambda$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$$

$$\dot{x} = x + u \quad \text{odakle sledi} \quad \dot{x} = x + 2\lambda$$

Zamenjujući i eliminišući *u*, stižemo do dve linearne diferencijalne jednačine po *x*, i po *λ*,

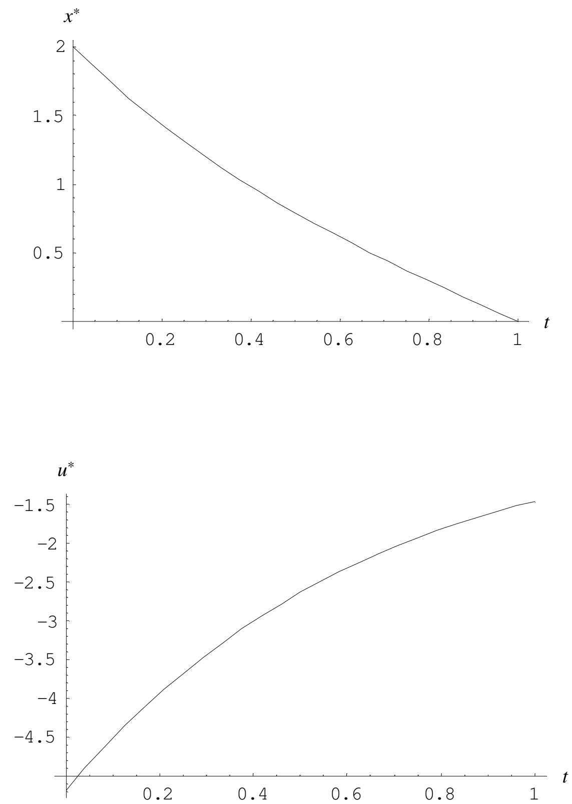
$$\begin{aligned}
\dot{x} &= x + 2\lambda \\
\dot{\lambda} &= \frac{1}{2}x - \lambda
\end{aligned},$$

čija su rešenja:

$$x(t) = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t}$$

$$\lambda(t) = \frac{c_1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)e^{\sqrt{2}t} - \frac{c_2}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)e^{-\sqrt{2}t}.$$

c_1 i c_2 se dobijaju koristeći uslove $x(0)=2$ i $x(1)=0$, i dobija se $c_1 = -0.1256$ i $c_2 = 2.1256$.



Slika 2.
Na slici su prikazne trajektorija koju opisuje promenljiva stanja i trajektorija koju opisuje promenljiva kontrole

Optimalna kontrola sa diskontovanjem

Primetili smo da je suština kontrolnog problema maksimizovati funkciju cilja $V(x,u)$. Za mnoge ekonomske probleme $V(x,u)$ predstavlja profit ili neto dobit. Ekonomisti neće maksimizovati prihod pre nego što ga diskontuju u sadašnjost. Stoga ako ρ označava diskontnu stopu cilj problema optimalne kontrole je

$$\max_{\{u(t)\}} J = \int_0^T e^{-\rho t} V(x,u)\, dt \tag{19}$$

u odnosu na ograničenja na koja diskontovanje ne utiče. Tipičan problem maksimizacije u neprekidnom vremenu je

$$\begin{aligned} &\max_{\{u(t)\}} J = \int_0^T e^{-\rho t} V(x,u)\,dt \\ &\dot{x} = f(x,u) \\ &x(0) = x^0 \\ &x(T) = x^T \end{aligned} \quad . \tag{20}$$

Lagranžijan je

$$L = \int_0^T \left[e^{-\rho t} V(x,u) + \lambda f(x,u) - \lambda \dot{x} \right] dt \,, \tag{21}$$

a Hamiltonijan za ovaj problem je

$$H(x,u) = e^{-\rho t} V(x,u) + \lambda f(x,u) \,. \tag{22}$$

Definišimo sada *trenutni Hamiltonijan,* H_c, kao

$$H_c(x,u) = V(x,u) + \mu f(x,u) \,, \tag{23}$$

gde je

$$\begin{aligned} &H_c = He^{\rho t} \qquad \text{ili} \qquad H = H_c e^{-\rho t} \\ &\mu = \lambda e^{\rho t} \qquad \text{ili} \qquad \lambda = \mu e^{-\rho t} \end{aligned} \quad . \tag{24}$$

Sada razmatramo uslove za optimalnost . Pošto je $e^{\rho t}$ konstanta u odnosu na promenu kontrolne promenljive, onda dobijamo jednostavno uslov $\frac{\partial H_c}{\partial u} = 0$ za $0 \le t \le T$. Sledeći uslov ćemo dobiti iz

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial H_c}{\partial x} e^{-\rho t} \,,$$

sada iz $\lambda = \mu e^{-\rho t}$ dobijamo

$$\dot{\lambda} = \dot{\mu} e^{-\rho t} - \rho \mu e^{-\rho t} \,,$$

odnosno

$$-\frac{\partial H_c}{\partial x} e^{-\rho t} = \dot{\mu} e^{-\rho t} - \rho \mu e^{-\rho t} \,,$$

ili

$$\dot{\mu} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \rho\mu ,$$

pri čemu je

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \frac{\partial H_c}{\partial \lambda} e^{-\rho t} = \frac{\partial H_c}{\partial \mu} = f\left(x,u\right),$$

i važi

$$\lambda\left(T\right) = \mu\left(T\right) e^{-\rho t} = 0 \quad .$$

Dakle, prvo smo definisali trenutni Hamiltonijan H_c tj.

$$H_c\left(x,u\right) = H\left(x,u\right) e^{\rho t} = V\left(x,u\right) + \mu f\left(x,u\right)$$

a uslovi optimalnosti su

$$\frac{\partial H_c}{\partial u} = 0, \qquad \text{za } 0 \le t \le T \text{ ,} \tag{25}$$

$$\dot{\mu} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \rho\mu, \qquad \text{za } 0 \le t \le T \text{ ,} \tag{26}$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H_c}{\partial \mu} = f\left(x,u\right) \quad , \tag{27}$$

$$x\left(0\right) = x^0 \quad , \tag{28}$$

$$\mu\left(T\right) e^{-\rho t} = 0 \qquad \left(\text{ili } x\left(T\right) = x^T\right). \tag{29}$$

Ovi uslovi optimalnosti nam dozvoljavaju da eliminišemo kontrolnu promenljivu u koristeći uslov (25), i da posmatramo sistem dve diferencijalne jednačine: jedna po promenljivoj stanja x, a druga jednačina po promenljivoj μ.

Primer 4 [2]:

$$\max_{\{u\}} J = \int_0^{10} u^2 e^{-0.1t} dt$$

$$\dot{x} = u$$

$$x\left(0\right) = 0$$

$$x\left(10\right) = 1000$$

Pokazujem kako naći optimalnu trajektoriju $x^*\left(t\right)$.

Trenutni Hamiltonijan je

$$H_c = -u^2 + \mu u ,$$

a uslovi optimalnosti su

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H_c}{\partial u} = -2u + \mu = 0 \\ &\dot{\mu} = 0 + 0.1\mu \\ &\dot{x} = u \end{aligned} .$$

Iz prvog uslova dobijamo jednačinu $u = 0.5\mu$, koju kad zamenimo u treću dobijamo $\dot{x} = 0.5\mu$. Zato imamo dve diferencijalne jednačine

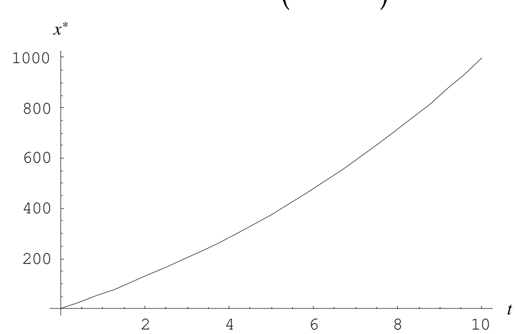
$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0.5\mu \\ \dot{\mu} &= 0.1\mu \end{aligned} .$$

Rešavanjem istih dobijamo

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 + c_2 e^{0.1t} \\ \mu(t) &= 0.2 c_2 e^{0.1t} \end{aligned} .$$

Ukoliko iskoristimo početne uslove dobijamo $c_1 = -581.1256$ i $c_2 = 581.9767$ i zato je konačno rešenje

$$x^*(t) = -581.9767 + 581.9767 e^{0.1t} = 581.9767\left(e^{0.1t} - 1\right).$$



Slika 3.

Na slici je prikazana trajektorija koju opisuje promenljiva stanja

Fazni dijagrami za neprekidne modele optimalne kontrole

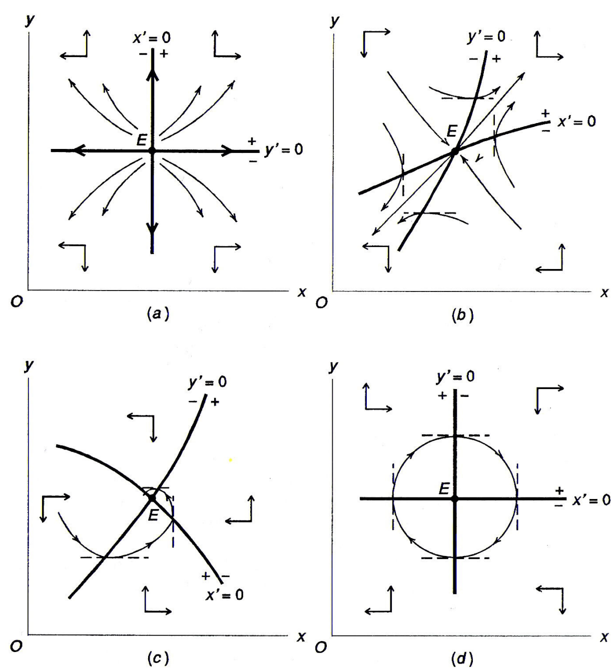
Rad sadrži kvalitativnografičku analizu sistema nelinearnih jednačina pomoću faznih dijagrama. Za primenu te tehnike osnovni preduslov je da radimo sa autonomnim sistemima diferencijalnih jednačina. Fazni dijagram, kao tehnika, ograničen je time što može odgovoriti samo na kvalitativna pitanja - ona koja se odnose na lokaciju i dinamičku stabilnost ravnoteže. U slučaju da imamo zadat autonomni sistem diferencijalnih jednačina na ovaj način

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y) \end{aligned},$$

uočavamo dve *linije razgraničenja* koje dobijamo za

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned},$$

i one dele fazni prostor na četiri dela. Presek te dve linije razgraničenja predstavlja *ravnotežnu* tačku sistema, označimo je sa $E(\overline{x},\overline{y})$. *Fazne trajektorije* predstavljaju *linije toka* i služe za crtanje dinamičkog kretanja sistema iz bilo koje moguće početne tačke. U zavisnosti od linija toka u okolini ravnotežne, moguće je razlikovati kategorije: čvor, sedlasta tačka, fokus i centar (vrtlog).



Slika 4.

Čvor je takva ravnoteža gde sve linije toka koje su s njom povezane ili se kreću neciklično prema njoj (stabilni čvor) ili se neciklički udaljavaju od nje (nestabilni čvor) što je prikazano na *slici 4 (a).*
Sedlasta tačka je prikazana na *slici 4 (b)*, i ima linije toka koje nazivamo stabilnim granama sedlaste tačke koji se konzistentno kreću prema ravnoteži i linije toka, nestabilne grane, koje se konzistentno udaljavaju od ravnoteže. Sedlasta tačka se klasifikuje kao nestabilna ravnoteža.
Fokus je vrsta ravnotežne tačke koju karakterišu vrtložni putevi od kojih svaki ciklički vodi prema ravnoteži (stabilni fokus), prikazan na *slici 4 (c)*, ili se ciklički udaljava od nje (nestabilni fokus).
Centar (vrtlog) je ravnotežna tačka prikazana na *slici 4 (d)*, to je ravnoteža sa vrtložnim linijama toka, gde te linije čine skup prstenova (koncentričnih krugova) koji kruže oko ravnoteže u neprekidnom kretanju. Centar je nestabilan.
Sve ilustracije na *slici 4* pokazuju jednu jedinu ravnotežu. Međutim, kada postoji dovoljno nelinearnosti, dve krive razgraničenja mogu da se seku više od jednog puta i tako dovesti do višestruke ravnoteže.
Jedna tehnika za kvalitativnu analizu sistema nelinearnih diferencijalnih jednačina je izvođenje zaključka iz linearne aproksimacije tog sistema na osnovu Tejlorove formule zadatog sistema oko njegove ravnoteže. U tački ravnoteže $E(\bar{x},\bar{y})$, linearna aproksimacija može dostići upravo istu ravnotežu kao početni sistem nelinearnih jednačina. I u dovoljno bliskom okruženju $E(\bar{x},\bar{y})$, linearna aproksimacija treba da ima opšti položaj linije toka kao i početni sistem. Navedena analiza je ustvari analiza lokalne stabilnosti.

Za zadati nelinearni sistem $\begin{array}{l} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{array}$ linearizaciju oko tačke razvoja (x_0, y_0) možemo pisati kao

$$\begin{aligned} x' &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ y' &= g(x_0,y_0) + g_x(x_0,y_0)(x-x_0) + g_y(x_0,y_0)(y-y_0) \end{aligned} \qquad (30)$$

Radi analize lokalne stabilnosti, prethodna linearizacija se može dovesti na jednostavniji oblik koji se zove *redukovana linearizacija*. Pošto je tačka ravnoteže $(\bar{x},\bar{y})$, treba (x_0, y_0) zameniti sa (x,y). A pošto je u ravnotežnoj tački $x' = y' = 0$ po definiciji sledi da je i $f(\bar{x},\bar{y}) = g(\bar{x},\bar{y}) = 0$, zatim transformišući (30) dobijamo

$$\begin{aligned} x' - f_x(\bar{x},\bar{y})x - f_y(\bar{x},\bar{y})y &= -f_x(\bar{x},\bar{y})\bar{x} - f_y(\bar{x},\bar{y})\bar{y} \\ y' - g_x(\bar{x},\bar{y})x - g_y(\bar{x},\bar{y})y &= -g_x(\bar{x},\bar{y})\bar{x} - g_y(\bar{x},\bar{y})\bar{y} \end{aligned} \qquad (31)$$

Prethodni sistem možemo u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix}_{(\bar{x},\bar{y})} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Može se primetiti da jedino karakteristično svojstvo redukovane linearizacije leži u matrici parcijalnih izvoda, tj. Jakobijevoj matrici nelinearnog sistema izračunatih u tački ravnoteže $(\bar{x},\bar{y})$. Stoga je, u konačnoj analizi, lokalna stabilnost ili nestabilnost ravnoteže utvrđena isključivo na strukturi navedene Jakobijeve matrice.

<u>Primer 3</u> *(nastavak):*

Iz *primera 3* gde smo izveli sistem od dve diferencijalne jednačine

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 2\lambda \\ \dot{\lambda} &= \frac{1}{2}x - \lambda \end{aligned}.$$

Kada je $\dot{x}=0$ sledi da je $\lambda = -\frac{1}{2}x$ i $\dot{\lambda}=0$ sledi da je $\lambda = \frac{1}{2}x$. Imamo dve različite izokline[5] za ovaj problem. Još,

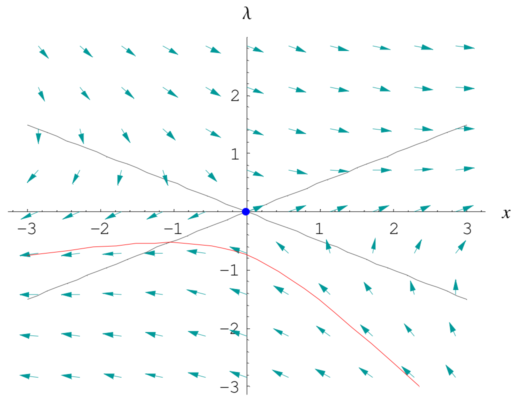
ako $\dot{x}>0$ tada je $x+2\lambda>0$ što implicira $\lambda > -\frac{1}{2}x$
Stoga, iznad *x*-izokline, *x* raste dok ispod opada. Slično,
ako $\dot{\lambda}>0$ tada je $\frac{1}{2}x-\lambda>0$ što implicira $\lambda < \frac{1}{2}x$
Stoga, ispod λ-izokline, λ raste dok iznad opada. Ovo znači da je rešenje sedlasta tačka.
Jakobijan za ovaj sistem je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični koreni su $r=\sqrt{2}$ i $s=-\sqrt{2}$. Pošto su realni i različitog znaka, rešenje je sedlasta tačka.
Iz početnih uslova dobijamo početnu tačku $(x(0),\lambda(0))=(2,-2.6)$, što znači da trajektorija počinje ispod *x*-izokline, i vektori sile su usmereni gore i levo. Prikazano je na slici 5.

---

[5] Data je difrencijalna jednačina $y' = f(x,y)$, gde je *f* definisana na nekoj oblasti $D \subset R^2$ i neka je $\langle x_0, y_0 \rangle \in D$. Tada je $f(x_0,y_0)$ tanges ugla koji tangenta zaklapa sa *x*-osom. Uređenu trojku $\langle x_0, y_0, f(x_0,y_0) \rangle$ nazivamo *linijski element*. Skup svih linijskih elemenata zovemo *polje pravaca*. Krivu na kojoj svi linijski elementi imaju jednak nagib zovemo *izoklina*.



Slika 5.
Slika predstavlja fazni dijagram i prikazuje optimalnu trajektoriju za sistem jednačina iz primera 3

1.3 Ekonomski pojmovi

U ovom delu ću navesti i objasniti pojmove i pojave iz ekonomije koje ću koristiti u daljem radu.

Makroekonomija

Makroekonomija potiče od grčkih reči macros (veliki) i oikonomia (privreda), što znači da proučava ekonomske agregatne veličine. U tom smislu makroekonomija se bavi izučavanjem pojava, procesa i problema, kao što su: bruto proizvod, društveni proizvod, nacionalni dohodak, potrošnja, štednja, investicije, ekonomski rast, spoljnotrgovinska razmena, društvena reprodukcija, platni bilans, ciklična kretanja privrede, budžet, fiskalna i monetarna politika, agregatna tražnja i ponuda, zaposlenost, inflacija itd. Prema tome, makroekonomija proučava funkcionisanje i upravljanje ekonomijom u celini.
Makroekonomija dobija na značaju posle velike ekonomske krize (1929-1933. godine), kada su obelodanjeni ekonomski problemi sa nesagledivim posledicama, koji se nisu mogli razrešiti putem mehanizma Smitove "nevidljive ruke". Među ekonomistima je to najbolje uočio Džon Majnord Kejnz (1883-1946. godine), te se nastanak makroekonomske teorije i politike vezuje za njegovo ime.

GDP

Za merenje ekonomskog rasta ekonomisti koriste podatke o bruto domaćem proizvodu (GDP), kojim se meri ukupan dohodak svih u ekonomiji jedne države. Mada se realni GDP tokom godina povećava, taj rast nije stalan. Postoje periodi u kojima GDP stagnira i oni u kojima GDP pada. Takvi periodi se nazivaju recesije, ako su srednje jačine, ili depresije ako su velike jačine.

Stokovi i tokovi

Mnoge ekonomske promenljive mere količinu nečega: količinu novca, količinu roba i slično. Ekonomisti razlikuju dve vrste kvantitativnih promenljivih: **stokove i tokove**. **Stok** je količina merena u datom trenutku, dok je **tok** količina merena u jedinici vremena. Ukupan bruto proizvod (GDP) je verovatno najvažnija promenljiva toka u ekonomiji: ona govori koliko evra teče u ekonomskom kružnom toku u jedinici vremena. Stokovi i tokovi su često vrlo povezani. Kada se postavljaju teorije za objašnjenje ekonomskih promenljivih, korisno je odrediti da li su te promenljive stokovi ili tokovi, i da li su povezane nekim odnosima. Npr, lično bogatstvo je stok,dohodak i troškovi su tokovi; Broj nezaposlenih radnika je stok, broj ljudi koji gube posao je tok;
Veličina kapitala u ekonomiji je stok, veličina investicija je tok; Javni dug je stok; državni budžetki deficit je tok.

Neoklasična politička ekonomija

Neoklasična politička ekonomija predstavlja značajan pravac u savremenoj ekonomsoj misli 19. veka. Glavni predstavnici su Karl Menger, Leon Valras, Vilfredo Pareto, Alfred Maršal, Gustav Kasel i dr. Ova teorija ekonomije u prvi plan ističe pojedinca koji ima svoje potrebe i nastoji da maksimizuje svoje korisnosti i preferencije. Najznačajniji doprinos ove ekonomske analize su marginalne veličine, odnosno ukupne, prosečne i marginalne (granične) veličine kod svih ekonomskih pojava .

Kob-Daglasova funkcija proizvodnje

Pol Daglas je bio predsednik Ilinoisa od 1949. do 1966. godine. On je još 1927. godine, kada je bio profesor ekonomije, zapazio izneneđujuću činjenicu: podela nacionalnog dohotka između kapitala i rada bila je skoro konstantna u dugom vremenskom periodu. Drugim rečima, kako je ekonomija uspešno rasla, ukupan dohodak radnika i ukupan dohodak vlasnika kapitala povećavao se po skoro istoj stopi. Ovo zapažanje je navelo Daglasa da se zapita koji to uslovi dovode do ovih konstantnih udela faktora. Daglas je pitao Čarls Koba, matematičara, koja bi funkcija proizvodnje, ako uopšte takva postoji, proizvodila konstantne udele faktora, ako bi faktori uvek zarađivali svoj marginalni proizvod.

Ova funkcija proizvodnje ima osobine:

$$\text{Dohodak od kapitala} = MPK \times K = \alpha Y$$

$$\text{Dohodak od rada} = MPN \times N = (1-\alpha)Y$$

Y je količina autputa, jednaka je MPN-marginalni proizvod rada je dodatna količina autputa preduzeća koju preduzeće dobije od dodatne jedinice rada. MPK-marginalni proizvod kapitala je dodatna količina autputa preduzeća koju preduzeće dobije od dodatne jedinice kapitala. α je konstanta između nula i jedan, koja meri udeo kapitala u dohotku. Naime, α određuje koji udeo dohotka se odnosi na kapital, a koji na rad. Kob je pokazao da je funkcija sa ovom osobinom sledeća

$$Y = F(K, N) = AK^{\alpha} N^{1-\alpha},$$

gde je A parametar veći od nule i meri produktivnost raspoložive tehnologije. Ova funkcija je postala poznata kao *Kob-Daglasova funkcija proizvodnje*. Funkcija ima osobinu da je homogena stepena jedan, odnosno da ima konstantne povraćaje u srazmeri. $F(zK, zN) = zF(K, N)$, gde je $z \in \boldsymbol{R}$.

Egzogene i endogene veličine

Ekonomski modeli sadrže dve vrste promenljivih: endogene i egzogene promenljive. Endogene promenljive su one koje model pokušava da objasni. Egzogene promenljive su one koje model prihvata kao date. Svrha modela je da pokaže kako egzogene promenljive deluju na endogene promenljive. Egzogene i endogene veličine predstavljaju nezavisne i zavisne veličine.

Neoklasični model rasta

Neoklasični model rasta je makroekonomski model u kome je stopa rasta autputa po radniku na dug rok određena egzogenom stopom tehnološkog napretka, kao što se može sresti kod Remzija (1928) i Soloua (1956).

Izoelastična funkcija korisnosti

Izoelastična funkcija korisnosti ima sledeću formu:

$$U(c) = \begin{Bmatrix} \dfrac{c^{\gamma}-1}{\gamma}, & \text{za} \quad \gamma < 1, \gamma \neq 0 \\ \log c, & \text{za } \gamma = 0 \end{Bmatrix}, \text{ gde je } c \text{ potrošnja.}$$

Ukoliko umnožavamo bogatstvo po nekoj konstantnoj veličini *k*, dobijamo istu funkciju korisnosti. Formalno, za sve $k > 0$ dobijamo

$$U(ck) = f(k)U(c) + g(k),$$

za neke $f(k) > 0$ i $g(k)$ koji su nezavisi od *c*. Možemo ovo i proveriti u dva slučaja:

1. Za $\gamma \neq 0$

$$U(kc) = \frac{(kc)^{\gamma} - 1}{\gamma} = k^{\gamma}\left(\frac{c^{\gamma}-1}{\gamma}\right) + \frac{k^{\gamma}-1}{\gamma} = k^{\gamma} U(c) + \frac{k^{\gamma}-1}{\gamma}.$$

2. Za $\gamma = 0$

$$U(kc) = \log kc = \log k + \log c = U(c) + \log k.$$

Ova osobina izoelastičnosti funkcije ima veoma važnu posledicu kod optimizacije portfolia. Iz nje sledi da ako je dati procenat raspodele resursa optimalan za neki trenutni nivo bogatstva, isti procenat raspodele resursa je takođe optimalan za sve druge nivoe bogatstva.

2. Modeli rasta

2.1 Herod-Domarov model rasta

Evsey Domar (1914-1997), američki ekonomista poljskog porekla, je dao veliki doprinos za tri važne oblasti ekonomije: ekonomski rast, komparativu ekonomiju i istoriju ekonomije. Njegov rad na ekonomskom rastu počinje 1944. godine tako što proučava zaduženost države i pokušava da napravi model u kome ekonomski rast treba da utiče na dug tako što će ga smanjiti. U tome i uspeva 1946. godine. Parelelno sa njim, Roy Harrod (1900-1978), britanski ekonomista, je razvio isti model rasta ekonomije, tako da se taj model danas naziva Herod-Domarov model rasta. Roj Herod u svojoj knjizi „Towards a Dynamic Economics“ iz 1948, kao i u seriji eseja iz 1960, 1963, i 1975. razvija ovaj model i rasvetljava njegove nedostatke, zatim predstavlja ceo program istraživanja postratnog privrednog rasta i oživljava teoriju privrednog ciklusa. Ovaj model je preteča modelima rasta u modernoj teoriji ekonomskog rasta. Suština modela je u tome da pokazuje kako štednja deluje na nivo ekonomskog autputa i njegov rast tokom vremena, pri čemu je stopa štednje egzogena.

U ovom modelu se pretpostavlja da je štednja, S, proporcionalna prihodu, Y; investicije, I, jednake promeni kapitalnog stoka, a proporcionalne promeni prihoda tokom vremena. U ravnoteži su investicije jednake štednji. Ako sa s označimo prosečnu sklonost ka štednji, a sa v koeficijent za investicije, model može da se posmatra na sledeći način

$$\begin{aligned} S &= sY \\ I &= \dot{K} = v\dot{Y} \\ I &= S \end{aligned} \quad , \tag{33}$$

zamenjujući sledi

$$\begin{aligned} v\dot{Y} &= sY \\ \dot{Y} - \left(\frac{s}{v}\right)Y &= 0 \end{aligned} \quad , \tag{34}$$

uz početni uslov $I_0 = S_0 = sY_0$.

Rešenje je putanja koja zadovoljava početne uslove i izgleda ovako

$$Y = Y_0 e^{\left(s/v\right)t} \quad , \tag{35}$$

gde se $\frac{s}{v}$ naziva „garantovana stopa rasta“.

Model ima mnogo nedostatke, ne posmatra uticaj mnogih faktora na nivo ekonomskog rasta kao što su rast stanovništva, tehnološki napredak i slično, i zato je nastao Solouov model rasta.

2.2 Solouov model rasta

Solouov model rasta je dobio ime po ekonomisti Robert Solow-u (1924-), a razvijen je 1950-ih, 1960-ih godina. Solou je 1987. dobio Nobelovu nagradu za svoj rad iz oblasti ekonomskog rasta.

Model pokazuje kako štednja, rast stanovništva, i tehnološki napredak deluju na nivo ekonomskog rasta i njegov rast tokom vremena. Krećemo od funkcije proizvodnje, u kojoj se tvrdi da autput zavisi od stoka kapitala, *K*, i radne snage, *N* pa imamo

$$Y = F\left(K, N\right),$$

i pretpostavljamo da važi

$$zY = F\left(zK, zN\right),$$

što znači da je F homogena funkcija stepena 1, odnosno da ta funkcija ima konstantne povraćaje u srazmeri. Nastavljamo dalje analizu tako što stavimo da je $z = \frac{1}{N}$ i dobijamo

$$\frac{Y}{N} = \frac{F\left(K, N\right)}{N} = F\left(\frac{K}{N}, 1\right) = f\left(k, 1\right) = f\left(k\right).$$

Funkcija $y = f\left(k\right)$ ima sledeće osobine

$$\begin{aligned} & f\left(0\right) = 0 \\ & f'\left(k\right) > 0 \\ & f''\left(k\right) < 0 \\ & k > 0 \end{aligned}.$$

Ova jednačina pokazuje da je iznos autputa po radniku $\frac{Y}{N}$ funkcija iznosa kapitala po radniku $\frac{K}{N}$. Uvodimo oznake $y = \frac{Y}{N}$ što predstavlja autput po radniku, i $k = \frac{K}{N}$ što predstavlja kapital po radniku. Nagib funkcije proizvodnje pokazuje koliko dodatnog

autputa radnik proizvede uz dodatnu jedinicu kapitala. Ovu količinu zovemo *marginalni proizvod kapitala MPK.*
Autput po radniku y se deli između potrošnje i investicija

$$y = c + i .$$

Solouov model pretpostavlja da svake godine ljudi štede deo s svog dohotka i troše deo $1-s$; $0 \le s \le 1$ odnosno $c = (1\text{-}s)\ y$, pa iz toga sledi

$$y = (1\text{-}s)\,y + i ,$$

tj.

$$i = sy ,$$

dakle, investicije su jednake štednji.
Da bismo uključili amortizaciju u ovaj model, pretpostavimo da se izvestan deo kapitala δ pohaba svake godine. Ovo δ se zove stopa amortizacije. Npr. ako kapital traje u proseku 25 godina, onda je stopa amortizcije $\delta = 4\%$ godišnje.

Uticaj investicija i stopa amortizacije na stok kapitala se može izraziti putem jednačina:

$$\dot{k} = i - \delta k ,$$

gde je $\dot{k}$ promena u stoku kapitala u odnosu na vreme. Pošto su investicije jednake $sf(k)$, dobijamo

$$\dot{k} = sf(k) - \delta k .$$

Iz $\dot{k} = 0$ dobijamo rešenje k^* za koje je iznos investicija jednak iznosu amortizacije; k^* se zove *nivo kapitala stanja mirovanja*. Stanje mirovanja je značajno iz dva razloga: ekonomija u stanju mirovanja će na tom nivou i ostati. Uz to, ekonomija koja nije u stanju mirovanja želeće da to stanje dostigne.To znači da, bez obzira na nivo kapitala sa kojim ekonomija počinje, ona stiže do nivoa kapitala za stanje mirovanja. U ovom smislu *stanje mirovanja predstavlja dugoročnu ekonomsku ravnotežu.*
Kada se bira stanje mirovanja, cilj kreatora politike jeste da maksimizuje dobrobit pojedinaca koji čine društvo. Pojedinci ne vode računa o sumi kapitala u ekonomiji, niti o iznosu autputa. Oni vode brigu o količini roba i usluga koje mogu potrošiti. Vrednost stanja mirovanja k koja maksimizuje potrošnju zove se *nivo kapitala zlatnog pravila* i označavaćemo ga sa k^*_{zlato}.
Potrošnja po radniku je $c = y - i$. Naravno, potrošnja po radniku u stanju mirovanja je

$$c^* = f(k^*) - \delta k^* .$$

Iz zlatnog pravila sledi da je MPK=δ.

Treba imati na umu da broj radnika tokom vremena raste. Solouov model rasta pretpostavlja da stanovništvo raste po konstantnoj stopi n. Onda je promena u stoku kapitala po radniku

$$\dot{k} = sf\left(k\right) - \left(n+\delta\right)k\ . \tag{36}$$

Do sada je pokazano kako promene u kapitalu (štednja i investicije) i promene u radnoj snazi (rast stanovništva) deluju na ekonomski rast. Ostaje da vidimo kako tehnološke promene utiču na ekonomski rast. Da bi se u model ugradio tehnološki napredak, vratimo se na funkciju proizvodnje $f\left(K,N\right)$ koju sada zapisujemo $f\left(K,N\times E\right)$, pri čemu je E nova (i donekle apstraktna) promenljiva koja se zove efikasnost radne snage. Kako se raspoloživa tehnologija usavršava, tako se povećava i efikasnost radne snage. $N\times E$ meri broj efikasnih radnika. Najjednostavnija pretpostavka za tehnološki napredak jeste da on uzrokuje da se efikasnost radne snage povećava po konstantnoj stopi g. Pošto se radna snaga N povećava po stopi n, a efikasnost svake jedinice radne snage E po stopi g, broj efektivnih radnika $N\times E$ raste po stopi $n+g$. Jednačina koja je pokazivala rast k tokom vremena sada se menja u

$$\dot{k} = sf\left(k\right) - \left(n+\delta+g\right)k\ . \tag{37}$$

Prema Solouovom modelu samo tehnološki napredak može da objasni postojan rast životnog standarda. Uvođenje tehnološkog napretka menja i kriterijum za zlatno pravilo. Nivo kapitala zlatnog pravila sada se definiše kao stanje mirovanja koje maksimizira potrošnju po efektivnom radniku. Sada je potrošnja u stanju mirovanja po efektivnom radniku

$$c^* = f\left(k^*\right) - \left(\delta+n+g\right)k^*,$$
$$MPK = \delta+n+g\ ,$$
$$MPK - \delta = n+g\ .$$

Jednačina Solouovog modela (36) je dobijena na sledeći način.
Iz modela

$$I = \dot{K} + \delta K$$
$$S = sY$$
$$\dot{K} + \delta K = sY$$
$$K\left(0\right) = K_0,$$

sledi da je

$$\frac{dk}{dt}=\dot{k}=\frac{N\frac{dK}{dt}-K\frac{dN}{dt}}{N^2}$$

$$\begin{aligned}\dot{k}&=\left(\frac{1}{N}\right)\frac{dK}{dt}-\left(\frac{K}{N}\right)\left(\frac{1}{N}\right)\frac{dN}{dt}\\&=\left(\frac{K}{N}\right)\left(\frac{1}{K}\right)\frac{dK}{dt}-\left(\frac{K}{N}\right)\left(\frac{1}{N}\right)\frac{dN}{dt}\\&=k\left(\frac{\dot{K}}{K}-\frac{\dot{N}}{N}\right)\end{aligned}.$$

Kako je

$$\frac{\dot{K}}{K}=\frac{sY-\delta K}{K}=\frac{sY}{N}\left(\frac{N}{K}\right)-\delta=\frac{sf(k)}{k}-\delta,$$

i

$$\frac{\dot{N}}{N}=\frac{nN}{N}=n,$$

to imamo

$$\dot{k}=sf(k)-\delta k-nk=sf(k)-k(\delta+n),$$

uz početni uslov

$$k(0)=\frac{K_0}{N_0}=k_0.$$

Pretpostavimo da je funkcija proizvodnje Kob-Daglasova tj.

$$Y=aK^{\alpha}N^{1-\alpha},\qquad 0<\alpha<1$$

$$\frac{Y}{N}=a\left(\frac{K}{N}\right)^{\alpha},$$

ili

$$y=f(k)=ak^{\alpha}.$$

Dobijamo $\dot{k}=sak^{\alpha}-(n+\delta)k$.

Dakle, Solouov model rasta je redukovan na diferencijalnu jednačinu

$$\dot{k}+(n+\delta)k=sak^{\alpha},$$

što je Bernulijeva jednačina i njeno rešenje je

$$k(t)=\left[\frac{as}{n+\delta}+\left(k_0^{1-\alpha}-\frac{as}{n+\delta}\right)e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Rešenje jednačina (37), uz pretpostavku da je funkcija proizvodnje Kob-Daglasova je

$$k(t)=\left[\frac{as}{n+g+\delta}+\left(k_0^{1-\alpha}-\frac{as}{n+g+\delta}\right)e^{-(1-\alpha)(n+g+\delta)t}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Solov u svom modelu pretpostavlja da je ponuda rada od domaćinstva *n* fiksirana, a i da je štednja konstantna. Jasno je da to nije u stavarnosti zadovoljeno i da to koliko će jedno domaćinstvo štedeti ima uticaja na model, stoga je uvedena maksimizacija funkcije korisnosti u Remzijevom modelu. Sada se odlučuje koliko će se štedeti, (*n* je i dalje egzogeno).

2.3 Remzijev model rasta

Frank Plumpton Ramsey (1903-1930), britanski matematičar, ekonomista i filozof. Remzi je 1927. godine napisao rad o ekonomskom rastu u kome je izložio model rasta u kome je glavno pitanje na koje je on pokušao da odgovori bilo koliko jedno domaćinstvo treba da štedi godišnje . Međutim u to doba ekonomisti ga ne razumeju sve dok Tjalling Koopmans (1910-1985), holandski ekonomista, koji je 1975. godine dobio Nobelovu nagradu za rad iz oblasti ekonomije, i David Cass (1937-2008), američki ekonomista, uglavnom poznat po svom doprinosu za teoriju opšte ravnoteže u ekonomiji, nisu modifikovali 1965. godine Remzijev model rasta i u literaturi se može naći i pod imenom Remzi-Kes-Kupmans model. Suštinu tog modela ćemo ukratko izložiti.

Posmatrajmo Remzijev model rasta u neprekidnom vremenu koji je osnova mnogih modela u teoriji optimalnog rasta. Počećemo sa jednostavnim definicijama prihoda i investicija

$$\begin{aligned} Y(t) &= C(t)+I(t) \\ I(t) &= \dot{K}(t)+\delta K(t) \end{aligned}.$$

Posmatramo

$$\frac{Y(t)}{N(t)}=\frac{C(t)}{N(t)}+\frac{\dot{K}(t)}{N(t)}+\frac{\delta K(t)}{N(t)},$$

tj.

$$y(t)=c(t)+\frac{\dot{K}(t)}{N(t)}+\delta k(t),$$

ali $$\dot{k}=\frac{d}{dt}\left(\frac{K}{N}\right)=\frac{N\dot{K}-K\dot{N}}{N^2}=\frac{\dot{K}}{N}-\left(\frac{K}{N}\right)\frac{\dot{N}}{N}=\frac{\dot{K}}{N}-k\frac{\dot{N}}{N}.$$

Pretpostavljamo za rad da raste po konstantnoj stopi *n,* tako da je $\frac{\dot{N}}{N}=n$ i zato je

$$\frac{\dot{K}}{N}=\dot{k}+kn$$

i

$$y(t)=c(t)+\dot{k}(t)+(n+\delta)k(t).$$

Ukoliko imamo homogenu funkciju proizvodnje stepena jedan, onda možemo izraziti autput, *y*, kao funkciju od *k*. Dakle, $y=f(k)$. Izostavljajući vreme u zapisu imamo

$$\dot{k}=f(k)-(n+\delta)k-c.$$

Pretpostavimo da je $U(c)$ funkcija korisnosti za svakog potrošača ponaosob. Cilj nam je da maksimizujemo diskontovanu vrednost korisnosti u odnosu na jednačine koje smo izveli, tj.

$$\begin{aligned}
&\max_{\{c\}} J=\int_0^{\infty} e^{-\beta t}U(c)\,dt\\
&\dot{k}=f(k)-(n+\delta)k-c\\
&k(0)=k_0\\
&0\le c\le f(k)
\end{aligned}$$

Trenutni Hamiltonijan je

$$H_c=U(c)+\mu\left[f(k)-(n+\delta)k-c\right],$$

a uslovi prvog reda su

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_c}{\partial c}&=U'(c)-\mu=0\\
\dot{\mu}&=-\mu f'(k)+\mu(n+\delta)+\beta\mu\\
\dot{k}&=f(k)-(n+\delta)k-c,
\end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned}
U'(c)&=\mu\\
\dot{\mu}&=-\mu f'(k)+\mu(n+\delta+\beta)
\end{aligned}$$

$$\dot{k} = f(k) - (n+\delta)k - c.$$

Transformacijama ovih uslova dobijamo dve diferencijalne jednačine po promenljivoj stanja *k*, i po kontrolnoj promenljivoj *c*.
Prvi uslov diferenciramo po *t* i imamo

$$\frac{d\left[U'(c)\right]}{dt} = \dot{\mu}$$

$$U''(c)\frac{dc}{dt} = \dot{\mu} = -\mu f'(k) + (n+\delta+\beta)\mu,$$

$$\text{tj. } U''(c)\dot{c} = \dot{\mu} = -\mu\left[f'(k) - (n+\delta+\beta)\right]$$

ili

$$-\frac{U''(c)}{U'(c)}\dot{c} = f'(k) - (n+\delta+\beta) \qquad \left(\text{jer je } \mu = U'(c)\right).$$

Definišimo sada Pretovu meru averzije prema riziku:

$$\sigma(c) = -\frac{cU''(c)}{U'(c)},$$

i imamo dalje

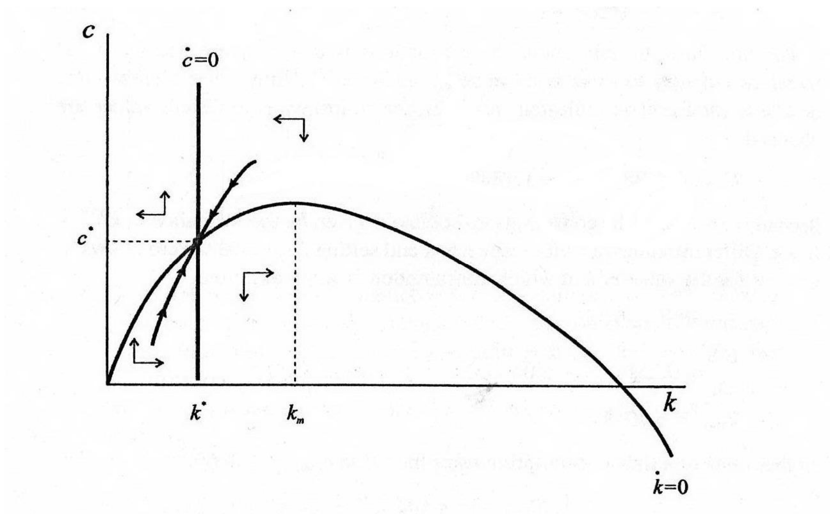
$$\frac{\sigma(c)}{c}\dot{c} = f'(k) - (n+\delta+\beta) \text{ ili } \dot{c} = \frac{1}{\sigma(c)}\left[f'(k) - (n+\delta+\beta)\right]c.$$

Dobijamo dve diferencijalne jednačine

$$\dot{c} = \frac{1}{\sigma(c)}\left[f'(k) - (n+\delta+\beta)\right]c \tag{38}$$

$$\dot{k} = f(k) - (n+\delta)k - c. \tag{39}$$

Ako je $\dot{c} = 0$ sledi $f'(k^*) = n+\delta+\beta$. Dok, sa druge strane, kada je $\dot{k} = 0$ onda je $c^* = f(k^*) - (n+\delta)k^*$. Još imamo i da ako je $\dot{c} > 0$ sledi da je $f(k^*) > (n+\delta+\beta)$ iz čega sledi $k < k^*$ što se vidi na slici 6. Stoga, levo od $\dot{c} = 0$ izokline, c raste; desno od $\dot{c} = 0$, c opada. Slično, ako $\dot{k} > 0$ onda je $c < f(k^*) - (n+\delta)k^*$. Stoga, ispod $\dot{k} = 0$ izokline k raste, dok iznad izokline $\dot{k} = 0$, k opada. Vektor sila jasno pokazuje da je rešenje $\left(k^*, c^*\right)$ sedlasta tačka. Jedina optimalna trajektorija je stabilna grana (ona konzistentno kreće ka ravnoteži). Za bilo koji k_0 jedini dopustiv i moguć nivo potrošnje je onaj na stabilnoj grani. Za datu početnu tačku na stabilnoj grani, sistem direktno teži ka ravnoteži. Primetimo da je u ravnoteži k konstanta i tako kapital raste sa istom stopom kao i rad. Kako je k konstanta u ravnoteži onda je i y, i Y takođe raste istom stopom kao i rad. Naravno radi se o izbalansiranom rastu u ekvilibrijumu. Grafički prikaz dat je na slici 6.



Slika 6.
Slika predstavlja fazni dijagram za jednačine Remzijevog modela rasta.

Primer 5:

Numerički primer Remzijevog modela rasta

Razmotrimo problem optimalnog rasta

$$\begin{aligned} &\max_{\{c\}} J = \int_0^\infty e^{-\beta t} U(c)\,dt \\ &\dot{k} = f(k) - (n+\delta)k - c \\ &k(0) = k_0 \\ &0 \le c \le f(k) \end{aligned},$$

gde je $\beta = 0.02, f(k) = k^{0.25}, n = 0.01, \delta = 0.05, k(0) = 2$

i $U(c) = \dfrac{c^{1-\theta}}{1-\theta}$.

Ako je $\theta = \frac{1}{2}$ tada je $U(c) = 2\sqrt{c}$. Problem se svodi na

$$\max_{\{c\}} J = \int_0^{\infty} e^{-0.02t}\, 2\sqrt{c}\,dt$$
$$\dot{k} = k^{-0.25} - 0.06k - c \qquad ,$$
$$k(0) = 2$$

Trenutni Hamiltonijan je $H_c = 2\sqrt{c} + \mu\left[k^{0.25} - 0.06k - c\right]$,
dok su uslovi prvog reda

$$\frac{\partial H_c}{\partial c} = 2\left(\frac{1}{2}\right)c^{-1/2} - \mu = 0$$
$$\dot{\mu} = -\mu 0.25k^{-0.75} + 0.08\mu$$
$$\dot{k} = k^{0.25} - 0.06k - c\,.$$

Iz prvog uslova imamo $c^{-1/2} = \mu$. Diferenciramo po *t* i dobijamo
$-\frac{1}{2}c^{-3/2}\dot{c} = -\mu(0.25)k^{-0.75} + 0.08c^{-1/2}$, ali pošto je $\mu = c^{-1/2}$ imamo

$-\frac{1}{2}c^{-3/2}\dot{c} = -c^{-1/2}(0.25)k^{-0.75} + 0.08c^{-1/2}$, i kada sve podelimo sa $c^{-1/2}$ dobija se
$-\frac{1}{2}c^{-1}\dot{c} = -(0.25)k^{-0.75} + 0.08$ tj.

$$\dot{c} = 2c(0.25)k^{-0.75} + 2(0.08)c$$
$$= \left(0.5k^{-0.75} - 0.16\right)c$$

Sad imamo dve diferencijalne jednačine po *c* i *k*, koje izgledaju ovako

$$\begin{aligned}\dot{c} &= \left(0.5k^{-0.75} - 0.16\right)c \\ \dot{k} &= k^{0.25} - 0.06k - c\end{aligned} \quad ,$$

čija su rešenja
$$k^* = 4.5688, \qquad \mathrm{c}^* = 1.1879$$

Druga stvar koju uočavamo je da je izoklina potrošnje data formulom $c = k^{0.75} - 0.06k$. Diferencirajući po *k* i izjednačavajući sa nulom dobijamo k_{max}

$$c = k^{0.75} - 0.06k$$
$$\frac{dc}{dk} = 0.25k^{-0.75} - 0.06 = 0 \quad .$$
$$k_{\max} = 6.7048$$

Za ovu vrednost *k*, potrošnja je $c_{\max} = 1.2069$.
Da bi utvrdili osobine ekvilibrijuma, linearizujemo sistem oko tačke $\left(k^{*},\ \mathrm{c}^{*}\right) = \left(4.5688,\quad 1.1879\right)$.
Neka je

$$\begin{aligned} \dot{c} &= f\left(c,k\right) = \left(0.5k^{-0.75} - 0.16\right)c \\ \dot{k} &= g\left(c,k\right) = k^{0.25} - 0.06k - c \end{aligned}.$$

Sistem može da se zapiše u linearizovanoj formi

$$\begin{aligned} \dot{c} &= f_c\left(c^{*},k^{*}\right)\left(c-c^{*}\right) + f_k\left(c^{*},k^{*}\right)\left(k-k^{*}\right) \\ \dot{k} &= g_c\left(c^{*},k^{*}\right)\left(c-c^{*}\right) + g_k\left(c^{*},k^{*}\right)\left(k-k^{*}\right) \end{aligned},$$

gde je

$$\begin{aligned} f_c\left(c^{*},k^{*}\right) &= 0 \qquad & f_k\left(c^{*},k^{*}\right) &= -0.0312 \\ g_c\left(c^{*},k^{*}\right) &= -1 \qquad & g_k\left(c^{*},k^{*}\right) &= 0.02 \end{aligned},$$

pa je matrica sistema

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -0.0312 \\ -1 & 0.02 \end{bmatrix},$$

čiji su karakteristični koreni $r = 0.1869$ i $s = -0.1669$. Pošto su suprotnog znaka rešenje u ravnoteži je sedlasta tačka.
Možemo aproksimirati sedlastu putanju koristeći linearnu aproksimaciju sistema. Prvo razmotrimo slučaj kada je $r = 0.1869$

$$\left(\boldsymbol{A} - r\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{v}^{r} = \boldsymbol{0}$$

tj.

$$\begin{bmatrix} -0.1869 & -0.0312 \\ -1 & -0.1669 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^r \\ v_2^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

odatle je

$$\begin{aligned} v_1^r &= -0.1669 \\ v_2^r &= 1 \end{aligned}.$$

Ova sedlasta putanja ima negativan nagib i označava nestabilnu granu (konzistentno se udaljuje od ravnoteže).
Sada razmotrimo slučaj kada je $s = -0.1669$ i tada je

$$\begin{bmatrix} 0.1669 & -0.0312 \\ -1 & 0.1869 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^s \\ v_2^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

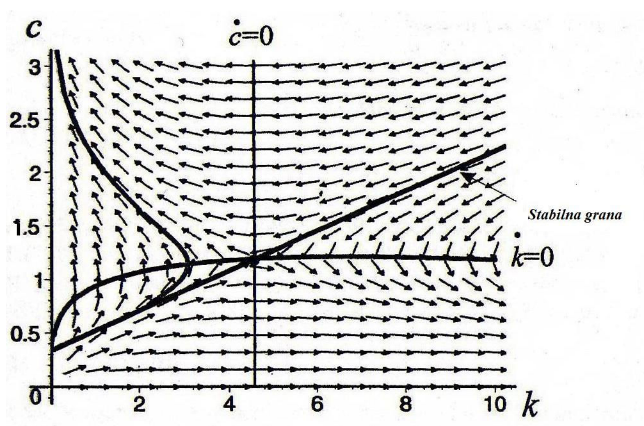
i dobijamo

$$v_1^s = 0.1869$$
$$v_2^s = 1$$

Ova sedlasta putanja ima pozitivan nagib i predstavlja stabilnu granu. Jednačina za stabilnu granu može da se odredi iz

$$\begin{aligned} c - c^* &= 0.1869\left(k - k^*\right) \\ c &= -0.33399 + 0.1869k \end{aligned}.$$

Grafički prikaz je dat na slici 7, u okolini kritične tačke. Data početna tačka je $\left(k(0), c(0)\right) = (2, 0.70779)$.



Slika 7.
Fazni dijagram za dati Remzijev problem.

Smanjenje poreza podstiče ekonomiju

Kada je Džon F. Kenedi 1961. godine postao predsednik SAD, on je u Vašington doveo neke od briljantnih mladih ekonomista ondašnjeg vremena da rade u Savetu ekonomskih savetnika. Ovi ekonomisti, koji su školovani na Kejnsovoj ekonomiji, uneli su kejnsijanske ideje u razmatranja ekonomske politike na najvišem nivou.
Jedan od prvih predloga bio je da se poveća nacionalni dohodak kroz smanjenje poreza. To je dovelo do značajnog smanjenja privatnih i korporativnih poreza 1964. u SAD. Smanjenje poreza je trebalo da podstakne potrošnju i investicije, što bi uticalo na povećanje nivoa dohotka i zaposlenosti.
Kao što su Kenedijevi ekonomski savetnici i predviđali, prelaz na smanjenje poreza praćen je ekonomskim bumom. Rast realnog GDP-a je bio 5,3% 1964. godine, a 6,0%

1965. godine. Stopa nezaposlenosti je pala sa 5,7% u 1963. godini na 5,2% 1964. godine, i na 4,5% 1965. godine.
Ekonomisti su nastavili raspravu o izvorima ovog brzog rasta početkom 1960-ih. Grupa koja se zvala *ekonomisti ponude* tvrdila je da je ekonomski prosperitet rezultirao iz podsticajnih efekata smanjenja poreskih stopa na dohodak. Prema ekonomistima ponude, kada je radnicima dopušteno da zadrže veći deo svojih zarada, oni su ponudili znatno više radne snage i povećali agregatnu ponudu roba i usluga. Kejnsijanci su, međutim, isticali uticaj sniženja poreza na agregatnu tražnju. Oba pristupa su najvećim delom sadržala istinu: *Sniženje poreza stimuliše agregatnu ponudu putem povećanja podsticaja za radnike i povećava agragatnu tražnju putem raspoloživog dohotka.* [5]

3. Dinamički skoring

O statičkom i dinamičkom skoringu

Kada se predlaže smanjenje poreza u državi ekonomisti treba da izračunaju koliko će to smanjenje da košta državni budžet. Nakon čega, državna odlučuje da li će smanjiti poreze ili neće. Postoji dva načina koja koriste ekonomisti da informišu državne organe o mogućem koštanju smanjenja poreza, a to su statički i dinamički skoring.
Statički skoring podrazumeva da smanjenje poreza neće izazvati promenu ponašanja pojedinaca u državi. To bi značilo da ako se 100 evra od zarade pojedinca u državi oporezuje sa 50%, to daje državi prihod od 50 evra. Smanjenje poreske stope za 25% će dati 25 evra manje prihoda za državu. Po statičkom skoringu niže poreske stope neće uticati na pojedince da promene svoje ponašanje u smislu da ako su npr. snižene poreske stope za rad, pojedinac neće ulagati dodatni rad (koji je moguć) bez obzira što mu je data mogućnost da zadrži više zarađenog novca.
Dinamički skoring se odnosi na izračunavanje troškova smanjenja poreza na osnovu predvidljivih promena u ekonomskom ponašanju koje će izazvati poresko sniženje.
Ako je 50% porez na 100 evra, to daje 50 evra u državni budžet, i ako opet posmatramo smanjenje poreza od 25%, pojedinci će biti u dobitku za 25 evra, baš kako statički skoring predviđa. Međutim, po dinamičkom skoringu, pojedinci će tada raditi više jer će moći da zadrže više svog novca. Ova promena ponašanja će proizvesti dodatnih 100 evra, koje će država oporezovati sa 25%, i to je onda ukupno 50 evra za državni budžet, što znači da nema gubitaka za državu. [14]
Godine 1920. je u SAD- u osnovan zajednički komitet za oporezivanje (JCT) sa ciljem da vrši procenu efekata promene poreza na prihod. Isprva su ekonomisti iz JCT-a posmatrali podatke o porezima za godine za koje su postojali ti podaci i izračunavali prihode za poreski sistem koji je bio na snazi u to vreme. To znači da su izračunavanje promena poreza vršili na statičkoj osnovi. Odnosno, podrazumevajući da se ne menja ponašanje poreskih obveznika pri promeni poreza. Ekonomisti su znali da ovaj metod daje netačne podatke o tome kako poreske promene stvarno utiču na prihod. Koristili su takozvane ading mašine (slične običnom kalkulatoru) pomoću kojih su izračunavali prihode od poreza tako što su preračunavli prihode za godine za koje su postojali podaci ukoliko je bilo nekog sniženja poreza i na osnovu toga vršili procene. Ono što je sigurno je da će ljudi promeniti svoje ponašanje ukoliko dođe do promene poreske situacije, a naravno da to onda utiče i na celu ekonomiju. Do 1970. godine ne postoji alat da se ovaj posao

obavlja bolje. Konačno, te godine se uvode računari i onda je bilo moguće u analizu uključiti i ekonomske efekte od promene poreza, ali su se u JCT-u opirali promeni metodologije rada bez obzira što su sada postojali alati koji su poboljšavali tačnost njihovih izračunavanja. JCT je ostao pri statičkom skoringu uglavnom iz političkih razloga. Demokrate su tada bili većina u skupštini SAD-a, i protivili se dinamičkom skoringu jer su se plašili da ukoliko prihvate dinamički skoring biće im teže da povećavaju poreske stope, i da će to izazvati gubitke u budžetu.

Kada su 1995. godine republikanci preuzeli većinu u skupštini bili su u poziciji da primene dinamički skoring, ali nisu iskoristili priliku jer su hteli da gubitak od smanjenja poreza prikažu što većim. Posledica svega toga je da je JCT radio statički skoring godinama. U martu 2003. godine predsednik skupštinske većine i odbor za budžet naređuju JCT-u da treba da poboljša svoj način rada i da primenjuje dinamički skoring. Konačno, cilj je bio da treba da se obuhvate svi ekonomski efekti poreskih promena, pozitivni i negativni, i da se što preciznije proceni prihod. Politika ne treba da stoji tome na putu. [15]

Dinamički skoring predviđa uticaje promena fiskalne politike tako što prognozira reakcije ekonomskih agenata tj. njihove imovine.

To je ustvari adaptacija statičkog skoringa, tradicionalne metode za analizu ekonomsko-političkih promena.

Dinamički skoring daje tačnije prognoze uticaja ekonomsko-političkih promena na državni fiskalni balans i ekonomski autput. Mogućnost za veću tačnost se dostiže kada domaćinstava i firme menjaju svoje ponašanje sledeći maksimizaciju dobrobiti (domaćinstva), ili profita (firme) pri novoj ekonomskoj politici. Takođe, dinamički skoring je mnogo tačniji od statičkog skoringa kada ekonometrijski modeli tačno određuju kako domaćinstva i firme reaguju na promenu ekonomske politike.

Dinamički skoring je teško primenljiv zbog kompleksnosti modeliranja ponašanja ekonomskih agenata. Ekonomisti moraju zaključiti iz trenutnog ponašanja agenata kako će se agenti ponašati pri novoj politici. Teškoće rastu kada je nova ekonomske politika značajno različita od postojeće. Isto tako, teškoće sa dinamičkim skoringom rastu što je vreme duž koga se posmatra dinamički skoring duže. Ustvari, svaki model je suštinski nemoćan da objasni nepredviđene šokove u budućnosti. [16]

3.1 Dinamički skoring i smanjenja poreza

Koji deo smanjenja poreza je samofinansirajući? Ovo pitanje se javlja kod ekonomista koji rade u vladinim organima gde se mere budžetski prihodi. Tradicionalni pristup ovom problemu, statički skoring, pretpostavlja da smanjenja poreza utiču na nacionalni prihod tako što se on smanji za to poresko sniženje. Drugi pristup, ilustrovan Laferovom krivom, kaže da se smanjenja poreza u potpunosti samofinansiraju tj. kroz ekonomski rast ona se otplate u potpunosti. Većina ekonomista su skeptici za oba ova slučaja i veruju da porezi utiču na nacionalni prihod, ali sumnjaju da je ekonomski rast toliko veliki da bi smanjenja poreza bila samofinansirajuća. Drugim rečima, smanjenja poreza jesu jednim svojim delom samofinansirajuća, ali kojim, to je otvoreno pitanje kojim ćemo se pozabaviti u ovom radu.

Osnovni Remzijev model

Pre nego se pozabavimo detaljnijom analizom, posmatraćemo poznati specijalni slučaj-ravnotežno stanje za Remzijev model rasta. Malo ćemo izmeniti ovaj model uključujući poreske stope τ_k za prihod od kapitala, i τ_n za prihod od rada. Pretpostavlja se da je ponuda rada neelastična. Možemo zapisti:

$$r = f'(k) \tag{40}$$

$$w = f(k) - kf'(k) \tag{41}$$

$$(1-\tau_k)r = \rho + \gamma g \tag{42}$$

$$Y = \tau_k rk + \tau_n w. \tag{43}$$

Ovaj sistem od 4 jednačine potpuno određuje ravnotežno stanje po 4 endogene promenljive

k - kapital po jednoj jedinici rada,
w - cena rada
r - cena kapitala po jedinici rada
Y - ukupan prihod po jedinici rada.

I, dalje imamo da je

$f(k)$ - ukupan autput po jedinici,
γ - koeficijent u trenutnoj funkciji korisnosti,
g - stopa povećanja tehnologije rada, i
ρ - subjektivna diskontna stopa.

Pretpostavljamo da je funkcija proizvodnje Kob-Daglasova

$$y = f(k) = k^{\alpha},$$

gde je y autput za jednu jedinicu rada, a α je udeo kapitala u autputu. Cilj nam je da izračunamo uticaj poreskih promena na ravnotežno stanje prihoda od poreza *Y*. Tradicionalni skoring daje sledeće rezultate, u kojima nema dinamike

$$\left.\frac{dY}{d\tau_k}\right|_{statički} = rk = \alpha y \tag{44}$$

$$\left.\frac{dY}{d\tau_n}\right|_{statički} = w = (1-\alpha)\, y. \tag{45}$$

Ove jednačine pokazuju uticaj promene poreza na prihod od poreza, pretpostavljajući da su nacionalni prihod i ostale makroekonomske promenljive konstantne. Primetimo da je svaki od ova dva izvoda jednak poreskoj osnovi odgovarajućeg poreza.
Dinamički skoring predstavlja uticaj promene poreza, uzimajući u obzir kako smanjenja poreza utiču na ekonomski rast. Ako iskoristimo jednakosti (40)-(43) sledi

$$\left.\frac{dY}{d\tau_k}\right|_{dinamički} = \left[1 - \frac{\alpha\tau_k + (1-\alpha)\tau_n}{(1-\tau_k)(1-\alpha)}\right] \left.\frac{dY}{d\tau_k}\right|_{statički} \tag{46}$$

$$\left.\frac{dY}{d\tau_n}\right|_{dinamički} = \left.\frac{dY}{d\tau_n}\right|_{statički}, \tag{47}$$

Jednačinu (46) smo dobili kada iz jednačine (42) izrazimo *k,* tj. $k = \left(\frac{\rho + \gamma g}{1-\tau_k}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$, zatim zamenimo u *Y* i diferenciramo $Y = k^{\alpha}\left(\alpha\tau_k + (1-\alpha)\tau_n\right)$ po τ_k.

Ove jednačine pokazuju uticaj promena poreza na prihod od poreza. Glavni zadatak je da se uporede statički i dinamički rezultati. U tradicionalnom pristupu Remzijevom modelu, sa pretpostavkom o neelastičnosti ponude rada, uticaj na prihod pri promenama poreskih stopa za rad je isti pri statičkom i dinamičkom skoringu. U (46) se posmatra uticaj promene poreske stope τ_k na prihod od poreza. Ako uzmemo empirijski moguće vrednosti parametara $\tau_k = \tau_n = 1/4$ i $\alpha = 1/3$. Onda iz (46) sledi

$$\left.\frac{dY}{d\tau_k}\right|_{dinamički} = \frac{1}{2}\left.\frac{dY}{d\tau_k}\right|_{statički}.$$

Smanjenja poreza za kapital na dug rok utiču na prihod polovinom u odnosu na statički skoring. Drugim rečima, ekonomski rast otplati 50% smanjenja poreza na kapital u ravnotežnom stanju.
Možemo zaključiti dve stvari, prvo, dinamički i statički skoring mogu nam dati različite rezultate, drugo, ravnotežno stanje Remzijevog modela nam daje proste izraze koji nam dalje koriste za dinamički skoring.

Uopšteni Remzijev model rasta

Proširujemo osnovni Remzijev model tako što ćemo uključiti elastičnost ponude rada. I dalje nam je funkcija proizvodnje Kob-Daglasova. Potrošnja je vođena korisnošću.

Problem potrošača je da što više troši u sadašnjosti ostaje mu da manje investira u sadašnjosti, što implicira manju proizvodnju, i naravno manju proizvodnju u budućnosti. Iz ovoga sledi da možda postoji neka potrošnja koja je najbolja, ili optimalna. Jasno, najbolje rešenje za to koliko će se investirati u sadašnjosti zavisiće od toga koliko dugo se smatra da će budućnost trajati. Ovde, predstavljemo problem potrošača pretpostavljajući da potrošač ne zna koliko će budućnost trajati ili smatra da će trajati *beskonačno*.

Firme

Krećemo od proizvodnje. Pretpostavimo da ima mnogo firmi koje su konkurentne na tržištu, proizvode autput sa konstantnim povraćajima u srazmeri i funkcija proizvodnje je

$$Y = F(K, N).$$

Y - ukupna količina autputa koji firma proizvodi

K - ukupna količina kapitala kojim firma raspolaže

N - ukupna količina rada koju firma pruža, uključujući podešavanja zbog povećanja tehnologije rada, tj. n je input rada za reprezentativno domaćinstvo i g je stopa povećanja tehnologije rada, i zato je $N = ne^{gt}$.

Možemo zapisati

$$y = f(k, n),$$

gde je $k = \frac{K}{e^{gt}}$, kapital po jedinici efikasnosti rada i $y = \frac{Y}{e^{gt}}$, autput po jedinici efikasnosti.

I dalje imamo da je

$$y = k^{\alpha} n^{1-\alpha} \quad . \tag{48}$$

Ova funkcionalana forma je realna i široko korišćena pri analizi ekonomskog rasta. Za dato konkurentno tržište važi

$$r = f_k(k, n) = \alpha k^{\alpha-1} n^{1-\alpha}. \tag{49}$$

Svaka efikasna jedinica rada je plaćena sa w i jednaka je

$$w = f_n(k, n) = (1-\alpha) k^{\alpha} n^{-\alpha} \tag{50}$$

Domaćinstvo

Posmatramo konvencionalno, reprezentativno domaćinstvo, za koje se pretpostavlja da živi beskonačno. Trenutna funkcija korisnosti ima izoelastičnu formu[6] sa parametrom zakrivljenosti γ. Funkcija korisnosti za domaćinstvo je

$$U(t)=\int e^{-\rho t}\frac{\left(ce^{gt}\right)^{1-\gamma}e^{(1-\gamma)\upsilon(n)}-1}{1-\gamma}dt,$$

gde je $\upsilon(n)$ diferencijabilna funkcija ponude rada, a sve ostale promenljive su iste kao i ranije.

Dinamička budžetska ograničenja u uslovima efikasnosti po jedinici rada su

$$\dot{k}=(1-\tau_n)wn+(1-\tau_k)rk-c-gk+T$$
$$\lim_{t->\infty}ke^{(-r+g)t}=0,$$

gde je $\dot{k}$ izvod po t kapitalnog stoka za jedinicu efikasnosti, a T su vladini transferi. Druga jednačina je standardni prelazni uslov.

Iz maksimizacije korisnosti za domaćinstvo slede uslovi prvog reda

$$\upsilon'(n)=\frac{-(1-\tau_n)w}{c} \tag{51}$$

$$r=\frac{1}{1-\tau_k}\left[\rho+\gamma\left(\frac{\dot{c}}{c}+g\right)+(1-\gamma)\upsilon'(n)\dot{n}\right]. \tag{51'}$$

Iz jednačine (51) može da se izvede izraz za elastičnost ponude rada, koji se označava sa σ i važi

$$\sigma=\frac{\upsilon'(n)}{\upsilon''(n)\cdot n}.$$

U ravnotežnom stanju, potrošnja po jedinici efikasnosti c i plata po jedinici efikasnosti w su konstante. Kao rezultat toga dobijamo da je i ponuda rada n takođe konstanta. Tada se uslov prvog reda redukuje na

$$r=\frac{\rho+\gamma g}{1-\tau_k}, \tag{52}$$

isto kao i u osnovnom Remzijevom modelu.

U ravnotežnom stanju je $\dot{k}=0$, i možemo zapisati da je nivo potrošnje jednak

[6] Izoelastična forma funkcije korisnosti je navedena u delu 1.3 ovog rada

$$c = f\left(k,n\right) - gk\ . \qquad (53)$$

Jednačine od (43)-(48) potpuno određuju ravnotežno stanje šest promenljivih: y, k, n, r, w i c.

Jednačine (51) i (51') su dobijene na sledeći način.
Trenutni Hamiltonijan je

$$Hc = \frac{\left(ce^{gt+\nu(n)}\right)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} + \mu\left(\left(1-\tau_n\right)wn + \left(1-\tau_k\right)rk - c - gk + T\right),$$

a uslovi prvog reda su

$$\frac{\partial Hc}{\partial c} = 0 \qquad (*)$$

$$\dot{\mu} = -\frac{\partial Hc}{\partial k} + \rho\mu \qquad (**)$$

$$\frac{\partial Hc}{\partial n} = 0 \qquad (***)$$

Kada (*) uslov logaritmujemo i nađemo prvi izvod po t dobijemo jednačinu $\frac{\dot{\mu}}{\mu} = g + (1-\gamma)\nu'(n)\dot{n} - \frac{\dot{c}}{c}\gamma - \gamma g$, dok iz (**) dobijamo $\frac{\dot{\mu}}{\mu} = -\left(1-\tau_k\right)r + g + \rho$, kada te poslednje dve izjednačimo dobije se (51'). Iz (*) i (***) se dobija (51).

<u>Vlada-Država</u>

Ukupni prihodi po jedinici efikasnosti, u oznaci Y, je zbir plaćenih poreza od kapitala i rada

$$Y = \tau_k rk + \tau_n wn\,. \qquad (54)$$

Prvi sabirak na desnoj strani (54) je poreska stopa za kapital pomnožena sa prihodom od kapitala, dok je drugi sabirak poreska stopa za rad pomnožena sa prihodom od rada.
Vlada sakuplja prihode od poreza i raspoređuje ih putem transfera ka domaćinstvima. Ovde vreme ne igra bitnu ulogu, može se pretpostaviti da potrošači žive beskonačno.

Dinamički i statički skoring u ravnoteži

Konvencionalni skoring kod koga nema dinamike daje sledeće rezultate

$$\left.\frac{dY}{d\tau_k}\right|_{statički} = rk = \alpha f(k,n)$$
$$\left.\frac{dY}{d\tau_n}\right|_{statički} = w = (1-\alpha) f(k,n).$$

Nasuprot, da bi odredili stvarni uticaj poreskih promena na prihod u ravnoteži, iskoristićemo sve ravnotežne uslove i iz njih sledi

$$\left.\frac{dY}{d\tau_k}\right|_{dinamički} = \left[1 - \frac{\alpha\tau_k + (1-\alpha)\tau_n}{(1-\alpha)(1-\tau_k)} - \frac{\alpha\tau_k + (1-\alpha)\tau_n}{(\rho+\gamma g) - \alpha(1-\tau_k)g}\frac{\sigma}{1+\sigma}g\right]\left.\frac{dY}{d\tau_k}\right|_{statički} \tag{55}$$

$$\left.\frac{dY}{d\tau_n}\right|_{dinamički} = \left[1 - \frac{\alpha\tau_k + (1-\alpha)\tau_n}{(1-\alpha)(1-\tau_n)}\frac{\sigma}{1+\sigma}\right]\left.\frac{dY}{d\tau_n}\right|_{statički}. \tag{56}$$

Primetimo da elastičnost ponude rada σ ulazi u rezultat (55) i (56). U slučaju smanjenja poreza na kapital, elastičnost ponude rada igra malu ulogu. Ako je $g=0$, tada je (55) isto kao i (46) tj. u osnovnom Remzijevom modelu. U slučaju sniženja poreskih stopa za rad, elastičnost ponude rada igra ključnu ulogu. Što je veća elastičnost ponude rada, to je manji dinamički uticaj na prihod od smanjenja poreza poreskih stopa na rad. Radi ilustracije efekta elastičnosti ponude rada, posmatrajmo sledeće moguće vrednosti parametara: $\tau_k = \frac{1}{4}, \tau_n = \frac{1}{4}, \alpha = \frac{1}{3}, \gamma = 1, g = 0.02, \rho = 0.05$ i $\sigma = \frac{1}{2}$.
Tada je

$$\left.\frac{dY}{d\tau_k}\right|_{dinamički} = 0.47\left.\frac{dY}{d\tau_k}\right|_{statički}$$

$$\left.\frac{dY}{d\tau_n}\right|_{dinamički} = 0.83\left.\frac{dY}{d\tau_n}\right|_{statički}.$$

Pod ovim pretpostavkama, smanjenja poreza na kapital imaju na dug rok samo 47% uticaja od statičkog uticaja. Odnosno, rast otplaćuje 53% smanjenja poreza.
Smanjenja poreza za rad imaju na dug rok uticaj na prihod 83% svog statičkog uticaja, rast plaća 17% smanjenja poreza. [17]

4. Konačni modeli

Dosada smo posmatrali reprezentativno domaćinstvo u neoklasičnom modelu rasta tako da se za njega pretpostavljalo da živi beskonačno. Pitamo se šta će se desiti u modelu ako je domaćinstvo konačnog života, i da li će biti neke bitne razlike u zaključcima o dinamičkom skoringu.

Blančardov model

Olivier Blanchard (1948-), francuski ekonomista, predaje na MIT (Massachusetts Institute of Tehnology) . On je makroekonomista koji se bavi različitim pitanjima počevši od monetarne politike, preko prirode tržišta rada i nezaposlenosti do tranzicije bivših komunističkih republika. S obzirom na to radio je za brojne internacionalne organizacije. Autor je mnogih knjiga i eseja uključujući i dve knjige iz makroekonomije. Nama je značajan njegov rad u kome je opisan model, tj. Blančardov model koji ćemo ukratko predstaviti .

Pretpostavimo da je Remzijev model konačan. Po Blančardovom modelu, svako domaćinstvo se susreće sa konstantnom verovatnoćom *p* da će nestati u svakom periodu i biti zamenjeno novim domaćinstvom. Domaćinstvo reaguje na ovaj rizik tako što troši svoje bogatstvo ne ostavljajući nasleđa.
Pretpostavimo da je $\sigma = 0,\ \gamma = 1$. Funkcija proizvodnje je Kob-Daglasova. Nema tehnološkog napretka, $g = 0$. Ravnoteža je postignuta za

$$r = \frac{1}{1-\tau_k}\left[\rho + p(\rho + p)\frac{k}{y}\right],$$

i važe (40), (41) i (43). Pitamo se šta se dešava sa $\left.\frac{dY}{d\tau_k}\right|_{dinamički}$?

Pošto je ponuda rada neelastična, porezi na rad ne proizvode neke značajne dinamičke efekte, dok za poreske stope na kapital imamo

$$\left.\frac{dY}{d\tau_k}\right|_{statički} = rk = \alpha y\,,$$

i

$$\left.\frac{dY}{d\tau_k}\right|_{dinamički} = \left\{1 - \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\frac{\left[\alpha\tau_k + (1-\alpha)\tau_n\right]2p(\rho + p)}{\rho^2 + 4p(\rho + p)\alpha(1-\tau_k) - \rho\sqrt{\rho^2 + 4p(\rho + p)\alpha(1-\tau_k)}}\right\}\left.\frac{dY}{d\tau_k}\right|_{statički}$$

Ukoliko *p* teži 0, ova jednačina postaje ista kao (46). Ako je *p*=0.02, i prosečno vreme koje posmatramo je npr. 50 godina, povratni dinamički efekat opadne sa 50% na 45%. Dok, ako je *p*=0.05, i posmatrani period je npr. 20 godina, povratni dinamički efekat pada na 39%. Blančardov model je uopštenje Remzijevog modela, i ne menja zaključke od ranije.

5. Prelazna dinamika

Dosadašnji rezultati su se uvek odnosili na ekonomiju u ravnoteži. Sada ćemo razmotriti šta se dešava van ravnoteže. Posmatrajmo diferencijalne jednačine koje opisuju ponudu rada $\dot{n}(t)$ i kapital $\dot{k}(t)$. Nakon nekog smanjenja poreza, kapital i ponuda rada će naravno odmah da odreaguju da bi se približili svom novom ravnotežnom stanju.
Izvodimo rezultate iz log-linearizovane verzije sistema diferencijalnih jednačina koje opisuju dinamički model. Pojednostavljujemo tako što pretpostavljamo da je $\gamma = 1$, da imamo Kob-Daglasovu funkciju proizvodnje i da nema tehnološkog napretka $g = 0$.
Da bi videli šta se dešava sa prihodom od poreza potrebno je da znamo izgled funkcija $n(t)$ i $k(t)$, i vrednost *n* i *k* u tri tačke: pre smanjenja poreza, odmah nakon smanjenja poreza i dugo nakon smanjenja poreza. Označimo te vrednosti za *n* i *k* u te tri tačke sa n_0, n_ε, n^* i k_0, k_ε, k^* respektivno. Slično, Y_0, Y_ε, Y^* označavaju prihode od poreza pre smanjenja poreza, odmah nakon smanjenja poreza i dugo nakon smanjenja poreza. Koristeći te oznake prelazna putanja iz početnog u novo ravnotežno stanje može da se zapiše kao

$$\ln n_t - \ln n^* = \left(\ln n_\varepsilon - \ln n^*\right) e^{\lambda t} \tag{57}$$

$$\ln k_t - \ln k^* = \left(\ln k_\varepsilon - \ln k^*\right) e^{\lambda t} \quad , \tag{58}$$

gde je λ negativni karakteristični koren matrice sistema diferencijalnih jednačina. Prihod u svakom vremenu *t* je

$$Y_t = \left(\alpha \tau_k + (1-\alpha)\tau_n\right) k_t^\alpha n_t^{1-\alpha} .$$

Sa ove tri poslednje jednačine i uslovima za ravnotežu iz poglavlja 3, možemo izračunati koliko od statičkog uticaja smanjenja poreza će se platiti za bilo koji dati period. Pretpostavimo da je $\tau_k = \frac{1}{4}, \tau_n = \frac{1}{4}, \alpha = \frac{1}{3}, \sigma = \frac{1}{2}$. Za sniženje poreske stope za kapital, povratni efekat u ravnoteži je 50%. Nasuprot, trenutni povratni efekat je 10.6% kada ponuda rada reaguje kao odgovor na poresko sniženje. Povratni efekat je 21.3% u petoj godini, 29.1% u desetoj godini, i 42% u dvadesetpetoj godini.
Za sniženja poreskih stopa za rad povratni efekat u ravnoteži je 16.7%, trenutni efekat je 12.5%. U petoj godini je 13.5%, 14.3% je u desetoj godini, a 15.8% u dvadesetpetoj.

Nakon svega analiza prelazne dinamike pokazuje da je zadatak o dinamičkom skoringu posebno važan za duže vremenske periode koji se posmatraju. U praktičnim raspravama budžetske politike, skoring okvir je samo od 5 do 10 godina.
Sada sledi objašnjenje kako smo došli do jednačina (57) i (58).
Imamo 9 vrednosti za tri promenljive da izračunamo, a to su $c_0, n_0, k_0, c_\varepsilon, n_\varepsilon, k_\varepsilon, c^*, n^*, k^*$. Početne i nove ravnotežne vrednosti mogu da se izračunaju sa standardnim uslovima ravnoteže. Kod promenljivih primetimo da je kapitalni stok fiksiran, tj. $k_0 = k_\varepsilon$. Možemo da izračunamo preostale vrednosti c_ε i n_ε pomoću diferencijalnih jednačina.
Da bi izveli ove diferencijalne jednačine počećemo sa Hamiltonijanom

$$H = e_t^{-\rho t} \frac{\left(ce^{gt+v(n)}\right)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} + \varphi(t)\left[(1-\tau_n) wn + (1-\tau_k) rk - c - gk + T\right],$$

gde pretpostavljamo da je $\gamma = 1$ i $g = 0$ radi jednostavnosti. Primenjujući uslove prvog reda dobijamo

$$\frac{\dot{c}}{c} = (1-\tau_k)\alpha k^{\alpha-1} n^{1-\alpha} - \rho \tag{59}$$

$$\frac{\dot{n}}{n} = \frac{\rho + (1-\tau_k)\alpha k^{\alpha-1} n^{1-\alpha} - \alpha \frac{c}{k}}{\frac{1}{\sigma} + \alpha} \quad . \tag{60}$$

Gde je σ elastičnost ponude rada. Akumulacija kapitala je data sa

$$\frac{\dot{k}}{k} = k^{\alpha-1} n^{1-\alpha} - \frac{c}{k}. \tag{61}$$

Sada linearizujemo sistem (59)-(61) oko ravnoteže. Zapišimo sistem pomoću logaritama

$$\frac{d \ln c}{dt} = \alpha (1-\tau_k) e^{(\alpha-1)(\ln k - \ln n)} \tag{62}$$

$$\frac{d \ln n}{dt} = \frac{1}{\alpha + \frac{1}{\sigma}}\left[\alpha (1-\tau_k) e^{(\alpha-1)(\ln k - \ln n)} - \alpha e^{(\ln c - \ln k)} + \rho\right] \tag{63}$$

$$\frac{d \ln k}{dt} = e^{(\alpha-1)(\ln k - \ln n)} - e^{(\ln c - \ln k)} \quad . \tag{64}$$

Ove tri jednačine (60)-(62) možemo da rešimo za ravnotežu po parametrima i dobijamo

$$\begin{aligned} e^{(\alpha-1)\left(\ln k^*-\ln n^*\right)} &= \frac{\rho}{\alpha\left(1-\tau_k\right)} \\ e^{\left(\ln c^*-\ln k^*\right)} &= \frac{\rho}{\alpha\left(1-\tau_k\right)} \end{aligned}.$$

Pravimo aproksimaciju prvog reda za log-linearizovani sistem (62)-(64) oko promena *c*, *n* i *k* od njihovog ravnotežnog stanja. Matrica sistema je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -(\alpha-1)\rho & (\alpha-1)\rho \\ \dfrac{-\rho}{\left(\alpha+\dfrac{1}{\sigma}\right)(1-\tau_k)} & \dfrac{-(\alpha-1)\tau_k\rho}{\left(\alpha+\dfrac{1}{\sigma}\right)(1-\tau_k)} & \dfrac{\left(1+(\alpha-1)\tau_k\right)\rho}{\left(\alpha+\dfrac{1}{\sigma}\right)(1-\tau_k)} \\ \dfrac{-\rho}{\alpha(1-\tau_k)} & \dfrac{-(\alpha-1)\rho}{\alpha(1-\tau_k)} & \dfrac{\rho}{(1-\tau_k)} \end{bmatrix}.$$

Možemo da iskoristimo karakteristične korene i karakteristične vektore matrice *A* i da izvedemo prelaznu putanju za naše promenljive do njihovog nivoa u ravnoteži. Od tri karakteristična korena matrice *A* koja se mogu izračunati dobija se da je jedan od njih pozitivan, jedan negativan, a treći nula. Označićemo ih ϕ, λ, ω, respektivno. Matricu odgovarajućih karakterističnih vektora označavamo *V*. Sada možemo opisati trajektorije za *log* vrednosti od *c*, *n* i *k* sa

$$\begin{aligned} \ln c &= \ln c^* + v_{11}e^{\phi t}b_1 + v_{12}e^{\lambda t}b_2 + v_{13}e^{\omega t}b_3 \\ \ln n &= \ln n^* + v_{21}e^{\phi t}b_1 + v_{22}e^{\lambda t}b_2 + v_{23}e^{\omega t}b_3 \\ \ln k &= \ln k^* + v_{31}e^{\phi t}b_1 + v_{32}e^{\lambda t}b_2 + v_{33}e^{\omega t}b_3 \end{aligned},$$

gde su v_{ij}, *ij*-te komponente matrice karakterističnih vektora, a b_1, b_2, b_3 su koeficijenti određeni graničnim uslovom. Za granične uslove, posmatramo $t \to \infty$. Pošto je $\phi > 0$ i $\lim_{t\to\infty} c_t = c^*$ znamo da je $b_1 = 0$. Slično, pošto je $\omega = 0$ onda je i $b_3 = 0$ takođe. Ostaje nam dakle samo

$$\begin{aligned} \ln c &= \ln c^* + v_{12}e^{\lambda t}b_2 \\ \ln n &= \ln n^* + v_{22}e^{\lambda t}b_2 \\ \ln k &= \ln k^* + v_{32}e^{\lambda t}b_2 \end{aligned}.$$

Pošto je $k_0 = k_\varepsilon$ dobijemo

$$b_2 = \frac{\left(\ln k_0 - \ln k^*\right)}{v_{32}} = \frac{\left(\ln k_\varepsilon - \ln k^*\right)}{v_{32}}.$$

Koristeći prethodnu relaciju dobijemo

$$\ln c - \ln c^* = \frac{\ln k_\varepsilon - \ln k^*}{v_{32}} v_{12} e^{\lambda t} \tag{65}$$

$$\ln n - \ln n^* = \frac{\ln k_\varepsilon - \ln k^*}{v_{32}} v_{22} e^{\lambda t} \tag{66}$$

$$\ln k - \ln k^* = \left(\ln k_\varepsilon - \ln k^*\right) e^{\lambda t} \ . \tag{67}$$

Pošto je $t = \varepsilon$ imamo

$$\left(\ln n_\varepsilon - \ln n^*\right) e^{-\lambda\varepsilon} = \frac{\ln k_\varepsilon - \ln k^*}{v_{32}} v_{22}$$

$$\left(\ln n - \ln n^*\right) e^{-\lambda\varepsilon} = \left(\ln n_\varepsilon - \ln n^*\right) e^{\lambda t}. \tag{68}$$

Jednakosti (67) i (68) predstavljaju formu za veličine k i n odmah nakon smanjenja poreza do njihovih novih veličina u novom ravnotežnom stanju po stopi λ.
Jednakosti (67) i (68) nam omogućavaju da izračunamo nivoe kapitalnog stoka i ponude rada u bilo kom vremenu. Da bi (67) i (68) mogli da iskoristimo trebaju nam početni i nivoi ključnih promenljivih u novom ravnotežnom stanju. To može da se izvede pomoću uslova u ravnoteži

$$\begin{aligned}
&y = k^\alpha n^{1-\alpha} \\
&r = \alpha k^{\alpha-1} n^{1-\alpha} \\
&w = (1-\alpha) k^\alpha n^{-\alpha} \\
&v'(n) = \frac{(1-\tau_n) w}{c} \quad . \\
&r = \frac{\rho}{(1-\tau_k)} \\
&c = y
\end{aligned}$$

Pretpostavimo da $v(n)$ ima izoelastičnu funkcionalnu formu.

Sa vrednostima za n i k pre smanjenja poreza, odmah nakon smanjenja poreza i u novom ravnotežnom stanju, koristimo (67) i (68) i karakteristične korene generisane matricom A da izračunamo vrednosti kapitalnog stoka i ponude rada u bilo kom vremenu. To nam omogućuje da izračunamo prihod u bilo kojoj tački u vremenu, jer je

$$Y = \left(\alpha\tau_k + (1-\alpha)\tau_n\right) k^\alpha n^{1-\alpha} .$$

6. Mogućnosti za finansiranje smanjenja poreza

Postoje dva pitanja koja su važna za dinamički skoring. Prvo, kako fiskalni troškovi od smanjenja poreza variraju primenjujući neke od mogućih metoda: redukciju javne potrošnje, podizanje drugih poreza ili povećavanje duga? Drugo, ako se smanjenja poreza finansiraju kroz pozajmljivanje, tj. povećavanje duga, koliko snažno onda troškovi variraju u odnosu na poravnavanje budžeta zbog rasta duga?

Mankiw i Weinzierl (2006) se bave dinamičkim skoringom u neoklasičnom modelu rasta, sa pretpostavkom da se u više perioda transferi podešavaju da bi se izbalansirao budžet. *Eric M Leeper i Shu-Chun Susan Yang* (2008) proučavaju konvencionalni neoklasični model rasta koji je diskretna verzija *Mankiw-Weinzielr*-jevog modela, pri čemu imaju uvid u vladino izdavanje vredonosnih papira da bi se finansirala smanjenja poreza, imaju pristup ukupnoj sumi (budžetu) i mogućnost menjanja finansijskih šema da bi se održala budžetska solvesnost. Razmatraju trajnu redukciju poreskih stopa na rad i kapital. Fiskalnu stabilnost obezbeđuju jednim od tri instrumenta:

- Niži vladini transfer-autput razmeri
- Niži vladini potrošač-autput razmeri
- Povećanje drugih poreskih stopa.

Oni dalje proučavaju kako trajne olakšice za rad i kapital utiču na ekonomiju, obe na postojano stanje u dugom roku i duž prelazne putanje do novog ravnotežnog stanja. Navodimo i dva zaključka. Prvi, povećavanje bogatstva od smanjenja poreza zavise krucijalno od izbora fiskalnog instrumenta koji podešavaju i jačine reakcije na pogoršanje stanja budžeta. Što je veća reakcija, manji dug se nagomilava i mnogo su bolji efekti od smanjenja poreza. Drugo, poreske obveznike interesuju budžetski troškovi naročito za smanjenja poreza na dug rok: što je veća reakcija na pogoršanje stanja budžeta to vodi smanjenju dug-autput razmera i smanjenja poreza manje koštaju.

7. Zaključak

Rad se bavio teorijom optimalne kontrole, zatim različitim modelima ekonomskog rasta, dinamičkim skoringom i smanjenjem poreza u tom okviru. Cilj je bio uočiti kako smanjenje poreza utiče na prihod. Naravno, zaključak je da su sniženja poreskih stopa jednim svojim delom samofinansirajuća i da je dinamički skoring teško primenljiv zbog kompleksnosti modeliranja ponašanja ekonomskih agenata, ali da daje tačnije prognoze u odnosu na statički skoring.

Literatura:

[1] Teofanov, N.,Gajić, Lj.: *Predavanja iz Optimizacije*, Faculty of Science, University of Novi Sad, 2006.
[2] Shone, Ronald: *Economic Dynamics*, Cambrige University press 2002.
[3] Chiang, Alpha C.: *Osnovne metode matematičke ekonomije*, Mate, Zagreb 1994.
[4] http://sr.wikipedia.org/sr-el/Makroekonomija

[5] Mankiw, Gregory: *Makroekonomija*, Cekom books, Novi Sad, 2005.

[6] http://en.wikipedia.org/wiki/Neoclassical_economics

[7] http://economics.about.com/cs/economicsglossary/g/neoclassical_g.htm

[8] Norstad, John: *An Introduction to Utility Theory*, January 22, 2005
http://homepage.mac.com/j.norstad

[9] http://www.economyprofessor.com/theorists/evseydomar.php i
http://www.economyprofessor.com/theorists/royharrod.php

[10] Robert M. Solow : *A Contribution to the Theory of Economic Growth*
The Quarterly Journal of Economics, Vol. 70, No. 1 (Feb., 1956), pp. 65-94
Published by: The MIT Press

[11] Ramsey, Frank P.: *A Mathematical Theory of Saving*, Economic Journal (1928), Vol. 38, No 152, pp. 543 559

[12] http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1975/koopmans-autobio.html

[13] Cass, David: *Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation*, The Review of Economic Studies, Vol. 32, No. 3 (Jul., 1965), pp. 233-240

[14] http://www.nationalreview.com/nrof_bartlett/bartlett071702.asp

[15] http://www.freedomworks.org/publications/static-versus-dynamic-scoring

[16] http://en.wikipedia.org/wiki/Dynamic_scoring

[17] Gregory Mankiw, Matthew Weinzierl: *Dynamic scoring: A back of the envelope guide*, Journal of Public Economics 90 (2006.) ,1415-1433

[18] http://econ-www.mit.edu/faculty/blanchar/short i "Deficits, Debt and Finite Horizons", *The Journal of Political Econom*y, Vol. 93, No. 2. (Apr., 1985), pp. 223-247.

[19] Eric M Leeper, Shu-Chun Susan Yang: *Dynamic scoring: Alternative financig schemes*, Journal of Public Economics 92 (2008.), 159-182

Biografija

Zovem se Jovana Kokić, rođena sam 28. aprila 1983. godine u Sarajevu. Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer matematika finansija, sam završila 2006. godine sa prosečnom ocenom 8,57 i te godine sam upisala master studije na istom fakultetu. Zaposlena sam u osnovnoj školi „Dositej Obradović" u Irigu, od 2006. godine. Trenutno radim i u srednjoj tehničkoj školi „Mileva Marić Ajnštajn" u Novom Sadu. Paraleno sa tim, radim na izradi master rada sa temom „Dinamički skoring i smanjenje poreza".

Novi Sad, *03. 05.2010.*

Ime i prezime
Jovana Kokić

PODACI O RADU
UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU
KLJUČNA DOKUMETACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Jovana Kokić
AU
Mentor: Prof. dr Zorana Lužanin
MN
Naslov rada: Dinamički skoring i smanjenje poreza
NR
Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski i engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2010.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada (broj poglavlja, broj strana, broj literarnih citata, broj tabela, broj slika, broj grafika, broj priloga): (8,57,5,1,7,0,0)
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Finansijska matematika
ND
Ključne reči: Dinamički skoring, model rasta, princip maksimuma, teorija optimalne kontrole, Hamiltonijan

PO
UDK:
Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: Teorija optimalne kontrole je ono čime rad počinje, da bi se nakon nekoliko primera, Herod-Domarovog modela rasta došlo do Remzijevog modela rasta, koji je ustvari osnova ovog rada o poreskim sniženjima. Ovaj rad o smanjenju poreza i dinamičkom skoringu se najvećim delom oslanja na radove Mankiva. Ono što se ovde pokušava otkriti jeste da li smanjenja poreza mogu sama da se otplate kroz ekonomski rast ili ne. Kroz moguće realne primere dolazimo do zaključka da smanjenja poreza jednim svojim delom mogu da se otplate kroz ekonomski rast.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća:
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: Dr Nataša Krejić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: Dr Danijela Rajter Ćirić, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: Dr Zorana Lužanin, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATISC AND INFORMATICS
KEY WORD DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents Code: Master thesis
CC
Author: Jovana Kokić
AU
Mentor: Prof. dr Zorana Lužanin
MN
Title: Dynamic scoring and tax cuts
TI
Language of text: Serbian
LT
Language of abstract: Serbian and English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2010.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physyical description: (8,57,0,0,0,7,0)
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Mathemtics of finance
SD
Key words: Dynamic scoring, Model of growth, Maksimum principle, Optimal Control Theory
SKW

UC:
Holding data:
HD
Note:
N
Abstarct: Optimal control theory is that this paper starts with, and after several examples of Harrod-Domar and Solow growth model we came to Remsey's growth model, which is actually base of this work about tax cuts. This paper about tax cuts and dynamical scoring mostly relies on Mankiw's papers. What we want to reveal in this paper is if tax cuts could pay off themselves through economic growth or not. We came to the conclusion, through real examples, that tax cuts can partly pay off themselves through economic growth.
AB
Accepted by Scientific Board on:
ASB
Defended:
DE
Thesis defended board:
DB
President: Dr Nataša Krejić, Full Professor, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Novi Sad
Member: Dr Danijela Rajter Ćirić, Associate Professor, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Novi Sad
Member: Dr Zorana Lužanin, Full Professor, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Novi Sad