Univerzitet u Novom Sadu

Prirodno-matematički fakultet

Departman za matematiku i informatiku

Jovan Jokanović

TESTIRANJE PREDVIĐANJA ZA OČEKIVANI GUBITAK

Master rad

Novi Sad, 2013.

Sadržaj

Predgovor

Zbog neizvesnosti rezultata poslova kojima se čovek bavi, uzrokovane pojavama koje ga okružuju, predikcija događaja je od izuzetne važnosti za njegov opstanak. U istoriji čovečanstva od najranijih perioda antičkih civilizacija pa sve do danas, može se uočiti velika posvećenost predviđanju budućih događaja. Do pojave nauke, za predviđanja korišćene su veoma često nerealne metode, bez ikakvih objektivnih kostrukcija. Jasna i potpuna predviđanja su nemoguća. Savremena nauka koristeći se modelima za procenu rizika, uspeva da nas pripremi za brojne neizvesne situacuje.

Potreba da se neizvesnost umanji, javlja se u svakom društvu i u svim oblastima. Konkretno na finansijskom tržištu, učesnici u njemu se izlažu promenljivosti tržišnih veličina kao što su kamatne stope, cene hartija od vrednosti, menjačke stope, cene kapitala, cene robe i druge. Banke, osiguravajuće kuće, berzanske kuće, brokeri, agenti trgovanja i drugi učesnici finansijskog tržišta veliku pažnju posvećuju određivanju rizika sa kojim se suočavaju. Rizik se javlja u više oblika u zavisnosti od subjekta koji se suočava sa rizikom, od njegovog tipa i alokacije, te se rukovođenje rizikom ogleda u raznovrsnim modelima.

U praksi finansijskih institucija, naročito banaka, što potvrđuju regulative Bazela II, za određivanje rizika u smislu rezervacije kapitala, propisan je model vrednost pod rizikom (VaR) kao mera rizika. Ovaj model je favorizovan iz razloga što je intuitivan, lako razumljiv, te je za njega takođe lako izvršiti testiranje. Međutim postoji i model rizika koji je manje intuitivan, tzv. očekivani gubitak, koji takođe dobro ocenjuje rizik, čak i zadovoljava više poželjnih mernih osobina, ali biva zapostavljen zbog teškog izvođenja testiranja. U ovom radu pokazaću da je testiranje izvodljivo i da taj postupak nije kompleksan, a model nije za potcenjivanje.

Kako postoji više modela rizika neophodno je izvršiti i proveru istih. Koliko je model rizika prihvatljiv govori nam testiranje predviđanja. Ovo testiranje predstavlja proces procene modela baziranog na istorijskim podacima. Obzirom na važnost kvaliteta instrumenata kojima se određuje rizik, u ovom radu će se prikazati celokupan postupak testiranja predviđanja za model očekivanog gubitka.

1. Uvod

Rad se sastoji iz nekoliko celina, a sadržaj rada je pratio istraživanjia priznatih začetnika testiranja riziko modela, među kojima su istaknuti Kupiec P.H., Kristofferson K., Blanco C., Ihle G., Dowd K., i drugi.

U uvodnom delu se navode osnovne definicije finansijske matematike, definicije rizika i prinosa. Nadalje se definišu modeli rizika: očekivani gubitak i vrednost pod rizikom, za koje se ispituje zadovoljenost mernih osobina.

Glavni deo rada obuhvatao bi definisanje postupka za određivanje rizika prema definisanim modelima, ispitivanje na izabranom uzorku akcija i dobijanje podataka potrebnih za testiranje modela. Nakon izvršene postavke modela vrši se testiranje modela i iznošenje zaključaka o modelu.

Kako se u testiranju koristim programskim paketom Matlab za obradu podataka velikih uzoraka, u prilogu sam postavio kodove koji se koriste i određuju pomoću funkcija.

Da bi sadržina rada bila jasnija definisaću osnovne pojmove iz pojedinih matematičkih grana, te ću se u daljem tekstu pozivati na njih.

1.1. Osnovne definicije

Kako je pojava rizika relativna i zavisi od slučajnih događaja navode se osnovne definicije iz teorije verovatnoće.

Definicija. Podskup $\mathcal{F}$ partitivnog skupa $\mathcal{P}(\Omega)$, je **σ-algebra (σ-polje)** nad Ω ako važe uslovi:

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$,

(ii) ako $A \in \mathcal{F}$ onda $\overline{A} \in \mathcal{F}$,

(iii) ako $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, onda

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

Definicija. Neka je Ω skup svih elementarnih događaja i $\mathcal{F}$ σ-algebra nad Ω. Funkcija $P: \mathcal{F} \to [0,1]$ se zove **verovatnoća** na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$, ako zadovoljava uslove

(i) $P(\Omega) = 1$

(ii) ako $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1,2, \ldots$, onda

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

- Primer. Borelova σ-algebra $\mathcal{B}$ se definiše skupom realnih brojeva, formira se pomoću familije poluotvorenih intervala $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$. $\mathcal{B}$ sadrži sve skupove koji se dobijaju kao konačni ili prebrojivi preseci ili unije te familije, kao i skupove koji se dobijaju uzimanjem komplemenata. Elementi $\mathcal{B}$ su Borelovi skupovi. Preslikavanje $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koje važi $\forall\, S \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(S) \in \mathcal{B}$, zove se Borelova funkcija.

Definicija. Preslikavanje $X: \Omega \to \mathbb{R}$ je **slučajna promenljiva** nad prostorom $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ako $X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$ za svako $S \in \mathcal{B}$, gde je $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borelova σ-algebra. Ekvivalentno kažemo da je X $\mathcal{F}$-merljivo.

Definicija. Slučajna promenljiva X je **diskretna** (diskretnog tipa), ako postoji prebrojiv skup R_X takav da je $P\{X \in \overline{R_X}\} = 0$, odnosno ako je skup slika od X najviše prebrojiv. Verovatnoća događaja $\{X = x_i\}$ će se skraćeno označavati sa $p(x_i)$.

Definicija. Funkcija $F_X: \mathbb{R} \to [0,1]$ definisana sa

$$F_X(x) = P_X\big((-\infty, x)\big) = P\{\omega \in \Omega | X(\omega) < x\}$$

naziva se funkcija raspodele slučajne promenljive X.

Definicija. Slučajna promenljiva X je **apsolutno neprekidnog tipa** ako postoji nenegativna integrabilna funkcija $\varphi_X(x)$, $-\infty < x < \infty$, takva da je za svaki skup $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P\{X \in S\} = \int_S \varphi_X(x) dx.$$

Funkcija $\varphi_X(x)$ zove se **gustina raspodele** verovatnoća slučajne promenljive X, skraćeno gustina raspodele.

Definicija. Očekivanje $E(X)$ diskretne slučajne promenljive X sa raspodelom $p(x_k)$, $k = 1,2, \ldots$, definiše se sa

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p(x_k)$$

i postoji ako i samo ako

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p(x_k) < \infty.$$

Definicija. Očekivanje $E(X)$ apsolutno neprekidne slučajne promenljive X sa gustinom $\varphi_X(x)$, definiše se sa

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi_X(x) dx.$$

i postoji ako i samo ako

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \varphi_X(x) dx. < \infty.$$

Definicija. Centralni momenat reda 2, slučajne promenljive X zove se **disperzija** ili **varijansa** slučajne promenljive X i označava se sa $D(X)$ ili $\sigma^2(X)$.

$$D(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$$

Definicija. Standardna devijacija slučajne promenljive X se definiše sa

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Definicija. Kovarijansa slučajne promenljive (X, Y) je

$$cov(X, Y) = E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Definicija. Koeficijent korelacije slučajne promenljive (X, Y) je

$$\rho_{XY} = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}.$$

Poznate raspodele slučajnih promenljivih i njihove karakteristike sa njihovim gustinama, funkcijama verovatnoće, očekivanjem i disperzijom date su Tablici 1.1.

Naziv	Oznaka	Verovatnoća	Očeki-vanje $E(X)$	Disperzija $D(X)$
Binomna	$\mathcal{B}(n,p)$	$p(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Uniformna	$\mathcal{U}(a,b)$	$\varphi_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in(a,b)\\ 0, & x\notin(a,b)\end{cases}$ $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a<x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Eksponencijalna	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\varphi_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normalna	$\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$\varphi_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(m-x)^2}{2\sigma^2}}, x\in\mathbb{R}$ $F_X(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(m-x)^2}{2\sigma^2}}dx, x\in\mathbb{R}$	m	σ^2

Tablica 1.1.

Analiza prikupljenih podataka o komponentama portfolija i definisanje postupka testiranja modela očekivanog gubitka zahtevaće statističke osnove.

Definicija. Skup elemenata na kojima se proučava neka pojava naziva se **populacija**, a osobine po kojima se elemneti razlikuju nazivaju se **obeležja**.

Definicija. Za slučajnu promenljivu X **kvantil** red p, $p\in(0,1)$, je vrednost slučajne promenljive M_p sa osobinom

$$P\{X < M_p\} \leq p \quad \text{i} \quad P\{X > M_p\} \leq 1 - p.$$

Definicija. Neka se na polulaciji Ω posmatra obeležje X. **Prost slučajni uzorak** obima n za obeležje X je n-torka nezavisnih slučajnih promenljivih $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ od kojih svaka ima istu raspodelu kao i obeležje X.

Definicija. Neka je $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ prost slučajan uzorak obima n za obeležje i $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ Borelova funkcija. Slučajna promenljiva $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ je **statistika** ako se u njoj figuriše nepoznati parametar.

Definicija. Neka je dat prost slučajni uzorak $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ za obeležje X i neka su $U_1 = u_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ i $U_2 = u_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ dve statistike takve da je

$$P\{U_1 \leq \theta \leq U_2\} = \gamma,$$

gde γ ne zavisi od θ. Tada se interval (U_1, U_2) naziva **interval poverenja** za parametar θ na nivou poverenja γ, ili $100\gamma\%$ interval poverenja za θ.

Definicija. Neka je dopustiva familija raspodela obeležja X $\{f(x, \theta), x \in \mathbb{R}, \theta \in \Theta\}$. Statistička **hipoteza** je svaka pretpostavka o tome da obeležje X ima raspodelu koja pripada nekom podskupu skupa dopustivih raspodela.

Definicija. Ako je pretpostavka da θ pripada skupu $\Lambda \subset \Theta$, u oznaci $H_0(\theta \in \Lambda)$, naziva se osnovna ili nulta hipoteza, dok je hipoteza da θ pripada skupu $\widetilde{\Lambda} \subset \Theta$, gde $\Lambda \cap \widetilde{\Lambda} = \emptyset$, u oznaci $H_1(\theta \in \widetilde{\Lambda})$ alternativna hipoteza.

- Ako realizovani uzorak $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pripada $C_{\mathcal{T}}$ (izabrana kritična oblast iz $\mathbb{R}^n$), onda se hipoteza H_0 se odbacuje;
- Ako realizovani uzorak $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ne pripada $C_{\mathcal{T}}$, nemamo razlog da odbacimo hipotezu H_0.

Za upoređivanje modela merenja rizika posmatraćemo osobine riziko mera kao što su sledeće.

Definicija. Riziko mera ρ je **monotona** ako za sve iznose W_1 i W_2 (od kojih riziko mera zavisi) važi

$$W_1 \leq W_2 \Longrightarrow \rho(W_1) \geq \rho(W_2).$$

Definicija. Riziko mera ρ je **translatorno invarijanta** ako za sve iznose W važi

$$\rho(W + K) = \rho(W) - K.$$

Definicija. Riziko mera ρ je **homogena** ako za sve iznose W važi

$$\rho(b \cdot W) = b \cdot \rho(W).$$

Definicija. Riziko mera ρ je **subaditivna** ako za sve iznose W_1 i W_2 važi

$$\rho(W_1 + W_2) \leq \rho(W_1) + \rho(W_2).$$

Definicija. Riziko mera je **konzistentna** ukoliko za nju važe monotonost, translatorna invarijantnost, homogenost i subaditivnost.

2. Rizik

2.1. Pojam rizika

Pojam rizika se može definisati kao: mogućnost gubitka, neizvesnost ili mogućnost bilo kog ishoda koji nije očekivan.

Ono što je zajedničko svim definicijama rizika je neizvesnost i gubitak. Neizvesnost postoji kada se ne može sa sigurnošću znati ishod određenog događaja. Kada rizik postoji, moraju postojati bar dva moguća ishoda (ukoliko sigurno znamo da će se gubitak dogoditi, tada rizik ne postoji). Najmanje jedan od mogućih ishoda mora da bude nepoželjan. To može biti gubitak u smislu da je nešto što osoba poseduje izgubljeno, ili to može biti dobitak manji od mogućeg. Na primer, investitor koji propusti povoljnu priliku gubi dobitak koji je mogao ostvariti.

Svaka kompanija da bi opstala i napredovala na tržištu mora da se izlaže riziku. Posao rukovođenja rizikom se ogleda u odgovornosti za razumevanje trenutnog rizika portfolija kompanije i rizika portfolija koji se planira u bliskoj budućnosti. Neophodno je odrediti nivo prihvatljivog rizika, kao i mere koje bi trebalo preduzimati.

2.2. Rizik i prinos investitora

Kao što je svim fond menadžerima dobro poznato, između rizika i prinosa investiranja postoji međusobna zavisnost. Što je veći rizik, veća je i mogućnost da se obezbedi veći prinos. Zapravo ova povezanost se nalazi između rizika i očekivanog prinosa. Reč je o matematičkom očekivanju, a ne očekivanjima u smislu onoga što se priželjkuje. Očekivani prinos se određuje statistički na osnovu raspodele slučajne promenljive prinosa i predstavlja srednju vrednost.

Primer 2.1. Neka nam je na raspolaganju dato 1 milion dinara i želimo da ih investiramo na period od godinu dana i to tako da:

- kupimo trezorski zapis sa godišnjim prinosom od 5%, u ovom slučaju se ne izlažemo riziku;
- kupimo akcije, čiji mogući prinosi su izvesni i dati su Tablicom 2.1. sa verovatnoćama.

Verovatnoća $p(x_k)$	Prinos x_k
$\frac{1}{16}$	$+50\%$
$\frac{1}{4}$	$+20\%$
$\frac{3}{16}$	$+10\%$
$\frac{5}{16}$	-10%
$\frac{3}{16}$	-30%

Tablica 2.1.

U slučaju akcijskog investiranja se izlažemo riziku. Prinos akcije je slučajna promenljiva i to diskretnog tipa, te očekivani prinos iznosi

$$E(R) = \sum_{k=1}^{5} x_k p(x_k) = \frac{1}{16} * 50\% + \frac{1}{4} * 20\% + \frac{3}{16} * 10\% - \frac{5}{16} * 10\% - \frac{3}{16} * 30\% = 0.2$$

□

Iz ovog primera kako je prinos trezorskog zapisa manji od prinosa akcija, sledi da nam se rizikovanje isplati.

Povezanost rizika i očekivanog prinosa među prvima je izučavao Markovitz (1952.), dok su kasnije Sharpe i drugi analizirajući rad Markovitza razvili CAP model (Capital Asset Price model).

Kako odrediti rizik?

Pouzdana mera kojom se određuje rizik je standardna devijacija prinosa na godišnjem nivou. Ona se odredjuje kao

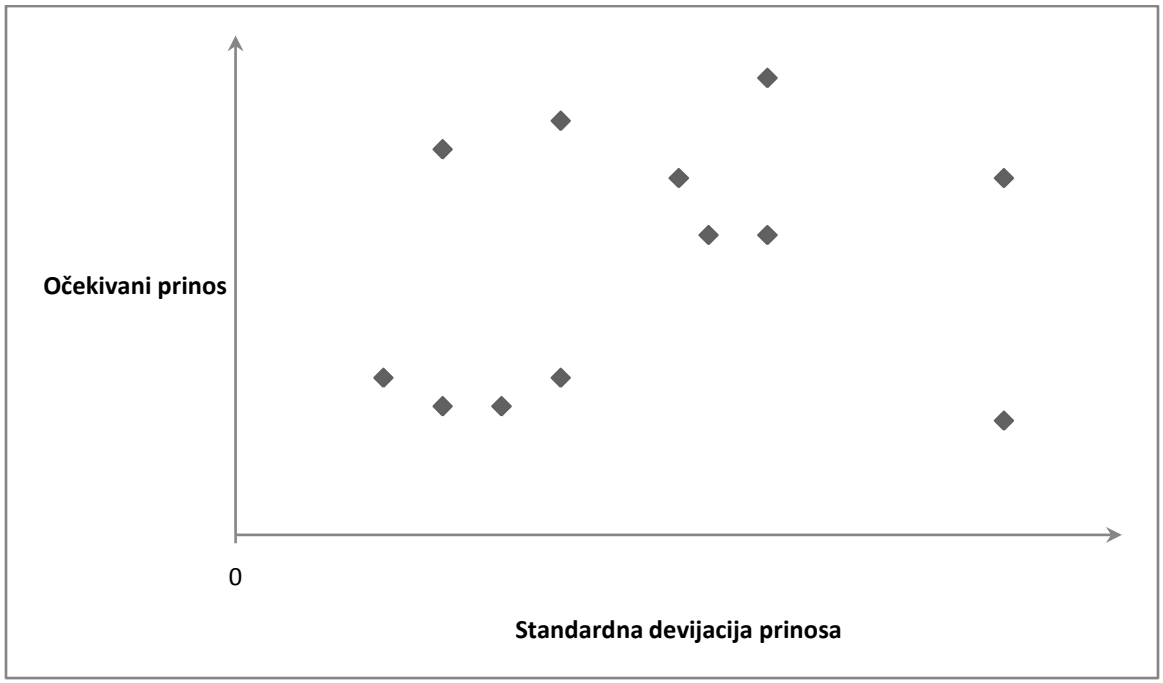
$$\sigma(R) = \sqrt{E(R^2) - E(R)^2},$$

gde je R prinos na godišnjem nivou.

Iz prethodnog primera standardna devijacija iznosi

$$\sigma(R) = \sqrt{E(R^2) - E(R)^2} = \sqrt{0.046 - 0.1^2} = 0.189.$$

Kada primenimo na više investicija ovakav postupak određivanja očekivanog prinosa i rizika, možemo da napravimo dijagram kao što je prikazana na Grafiku 2.1.



Slika 2.1.

U slučaju kada imamo dve investicije u portfoliju, sa prinosima R_1 i R_2 postupak određivanja očekivanog prinosa i standardne devijacije je malo drugačiji. Ukupno bogatstvo koje investiramo moramo da podelimo na dva dela, novac koji ulažemo u prvu i drugu aktivu, sa oznakama w_1 i w_2 respektivno. Jasno je da važi $w_1 + w_2 = 1$. Tada prinos portfolija P će iznositi

$$P = w_1 R_1 + w_2 R_2.$$

Očekivani prinos portfolija iznosi

$$\mu_P = w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2,$$

gde su μ_1 i μ_2 očekivani prinosi investicija respektivno.

Kako su σ_1 i σ_2 standardne devijacije prinosa investicija, važi

$$\begin{aligned}
&{\sigma_P}^2 = E(P^2) - E(P)^2 = \\
&= E((w_1R_1 + w_2R_2)^2) - (w_1\mu_1 + w_2\mu_2)^2 = \\
&= E[(w_1R_1)^2 + 2w_1w_2R_1R_2 + (w_2R_2)^2] - [(w_1\mu_1)^2 + 2w_1w_2\mu_1\mu_2 + (w_2\mu_2)^2] = \\
&= {w_1}^2E\left({R_1}^2\right) + 2w_1w_2E(R_1R_2) + {w_2}^2E\left({R_2}^2\right) - (w_1\mu_1)^2 - 2w_1w_2\mu_1\mu_2 - (w_2\mu_2)^2 = \\
&= {w_1}^2\left(E\left({R_1}^2\right) - {\mu_1}^2\right) + {w_2}^2\left(E\left({R_2}^2\right) - {\mu_2}^2\right) + 2w_1w_2(E(R_1R_2) - \mu_1\mu_2) \\
&= {w_1}^2{\sigma_1}^2 + {w_2}^2{\sigma_2}^2 + 2w_1w_2cov(R_1, R_2) = \\
&= {w_1}^2{\sigma_1}^2 + {w_2}^2{\sigma_2}^2 + 2w_1w_2\rho\sigma_1\sigma_2.
\end{aligned}$$

Dobijamo da je standardna devijacija prinosa portfolija

$$\sigma_P = \sqrt{{w_1}^2{\sigma_1}^2 + {w_2}^2{\sigma_2}^2 + 2w_1w_2\rho\sigma_1\sigma_2},$$

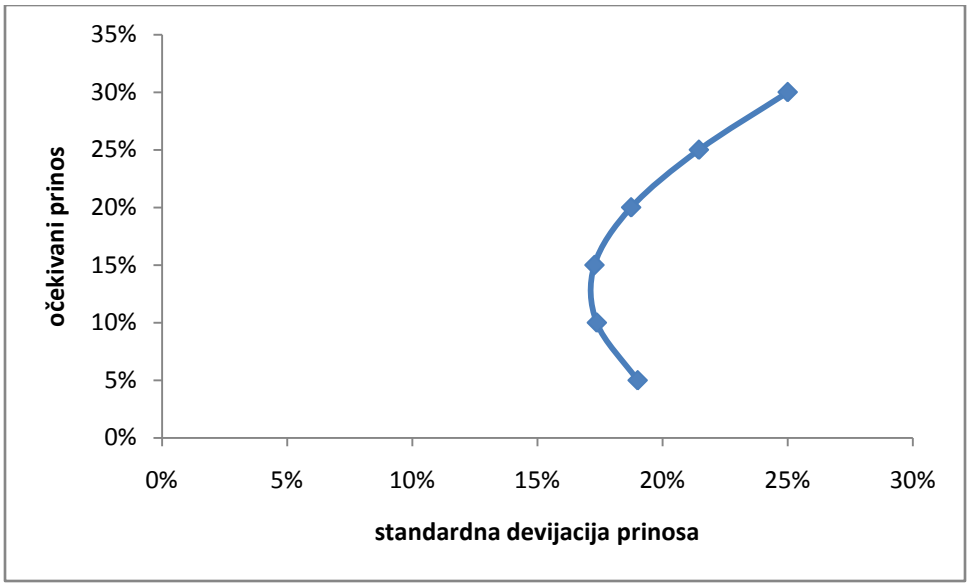
gde je koeficijent korelacije prinosa ρ.

Primer 2.2. Neka su date dve akcije sa očekivanim prinosima 5% i 30%, sa standardnim devijacijama 9% i 25% i koeficijentom korelacije 0,3. U Tablici 2.2. za različite podele bogatstva dobijene su vrednosti očekivanog priniosa i standardne devijacije portfolija.

w_1	w_2	μ_P	σ_P
0	1	30%	25.00%
0.2	0.8	25%	21.45%
0.4	0.6	20%	18.74%
0.6	0.4	15%	17.27%
0.8	0.2	10%	17.37%
1	0	5%	19.00%

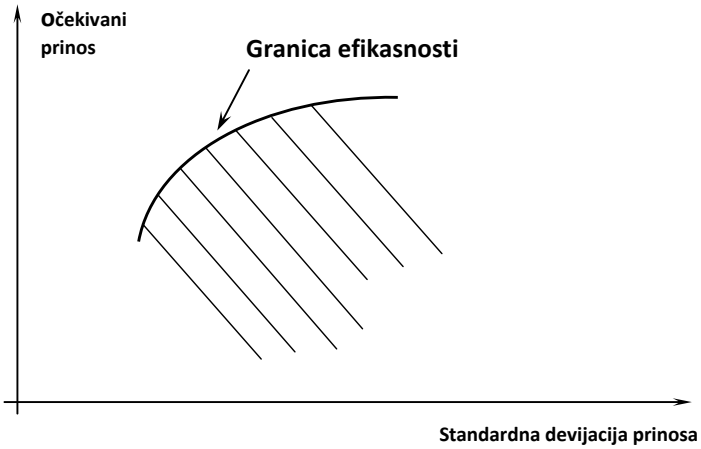
Tablica 2.2.

Ukoliko prikažemo na dijagramu te podatke dobićemo izgled kao na Grafiku 2.2.



Grafik 2.2.

Analognim postupkom moze da se proširi priča na slučaj portfolija sa tri, četiri i više aktiva uključenih u portfolio i analizom standardne devijacije i očekivanog prinosa bismo dobili dijagram prikazan na Grafiku 2.3.



Grafik 2.3.

Kako je prikazano na dijagramu, portfoliji se grupišu u specifičnom obliku (Markowitz's bullet). Granica dobijene površi sa gornje leve strane predstavlja granicu efikasnost i ona sadrži one portfolije za koje je razumno investirati od svih mogućih – jer za fiksirani

rizik portfolio koji ima najveći očekivani prinos se nalazi na granici efikasnosti i za fiksirani očekivani prinos portfolio sa najmanjim rizikom se nalazi na granici efikasnosti.

Uvođenjem nove bezrizične investicije u portfolio dobija se potpunija slika o investiranju. Neka bezrizična investicija ima prinos R_F. U ovom slučaju dijagram će promeniti izgled po pitanju granice efikasnosti. Na dijagramu na Grafiku 2.4. nerizičnu investiciju ćemo označiti tačkom F i konstruisati tangentu na granicu efikasnosti rizičnih investicija, sa tačkom dodira M. Prava koja je određena tačkama F i M je nova granica efikasnosti.

Da bismo ovo pokazali, posmatrajmo portfolio I sačinjen od β_I $(0 < \beta_I < 1)$ udela investicije rizičnog portfolija M i $1 - \beta_I$ udela u bezrizičnu investiciju F. Portfolio M se sastoji od svih rizičnih investicija na tržištu i naziva se tržišni portfolio (Market portfolio). Dobijeni portfolio ima prinos

$$R_I = \beta_I R_M + (1 - \beta_I) R_F,$$

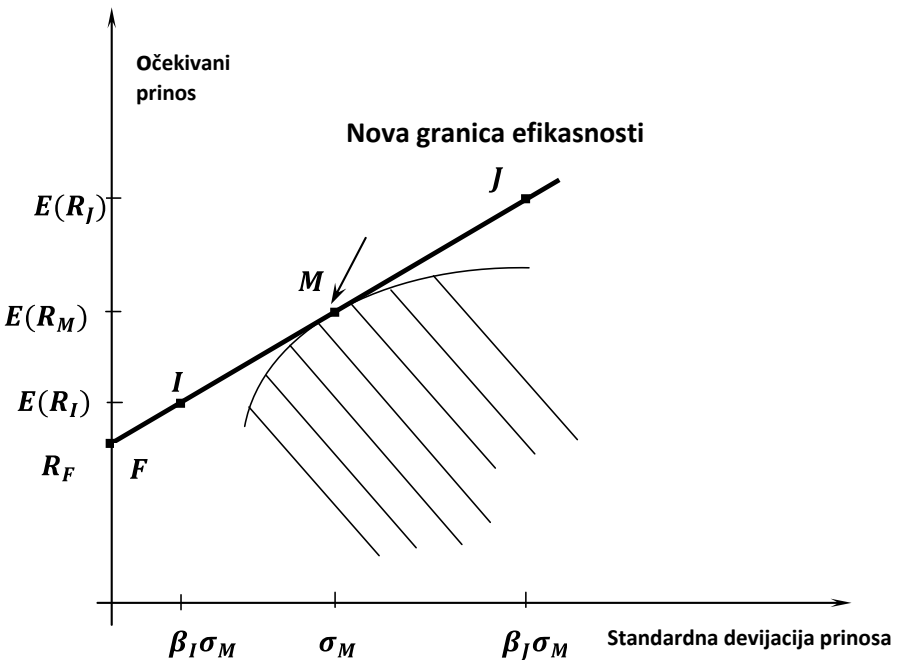
a očekivani prinos

$$E(R_I) = E(\beta_I R_M + (1 - \beta_I) R_F)$$

$$= \beta_I E(R_M) + (1 - \beta_I) R_F$$

i standardnu devijaciju $\beta_I \sigma_M$, gde je σ_M standardna devijacija portfolija M.

Sve tačke na pravoj FM se mogu dobiti odgovarajućim kombinovanjem pondera investicije F i portfolija M, uz napomenu da protfolije sa udelom $\beta_I > 1$ dobijamo kratkom pozajmicom bezrizične investicije. Portfoliji na ovoj pravoj dominiraju one portfolije na prethodnoj granici efikasnosti u pogledu očekivanog prinosa i rizika.



Grafik 2.4.

2.3. Sistematski i nesistematski rizik

Podela rizika je raznovrsna, ali sa matematičkog stanovišta mozemo uočiti uočiti dva tipa rizika:

- **sistematski** i
- **nesistematski,**

što pokazuje sledeća zakonitost

$$R = \alpha + \beta R_M + \epsilon$$

gde je R ukupan prinos investicije, R_M prinos tržišnog portfolija, α i β konstante i ϵ slučajna promenljiva regresione greške.

U jednačini imamo dva sabirka βR_M i ϵ koja upućuju na rizik, prvi sabirak odgovara sistematskom riziku, a drugi nesistematskom.

Posmatrajmo nesistematski rizik. Ako pretpostavimo da su ϵ nezavisni za sve različite investicije, tada se nesistematski rizik skoro u potpunosti diverzifikuje u velikim portfolijima. U tom slučaju investitor ne bi trebalo da se brine za nesistematski rizik, niti da obezbedjuje dodatni, veći prinos od onog sadržanog u bezrizičnoj investiciji kako bi se suočio sa ovim rizikom.

Ipak sistematskom riziku bi trebalo posvetiti značajniju pažnju, jer kada se veliki portfolio diverzifikuje, sistematski rizik koji je reprezentovan članom βR_M ne nestaje. U ovom slučaju investitor bi trebalo da obezbedi očekivani prinos kojim će kompezovati sistematski rizik.

Menadžment rizika finansijskih institucija nije u mućnosti da unapred i precizno predvidi sve moguće rizike, ali svakako je moguće stvoriti smernice za prepoznavanje rizika. Na primer, banka kao organizacija sa najdinamičnijim poslovanjem zbog svoje izloženosti mora rukovoditi sledećim rizicima:

1. **tržišni,**
2. **kreditni**,
3. **operativni,**
4. rizik likvidnosti i
5. ostali rizici.

U bankama akcijski kapital ima mali udeo u celoj imovini na bilansu stanja, ali mora oprezno rukovoditi njime kako bi izbegla velike oscilacije u primanjima. Postoje dve strategije odbora za upravljanje rizikom. Jedan od pristupa je odrediti rizik pojedinačno, pa ih odvojeno i razmatrati, što se često naziva **dekompozicija** rizika. Drugi pristup nalaže dobru diverzifikcjiu kako bi se rizik izbegao, tzv. **agregacija** rizika.

Tržišni rizik se pojavljuje u trgovinskim aktivnostima banke. Banka je izložena kretanjima interesnih stopa, menjačkih stopa, cena kapitala, cena roba i sirovina, kao i mnogih tržišnih promenljivih. Ovim rizicima u prvom stepenu upravljaju menadžeri trgovine - trgovci. Na primer, postoji verovatno jedan (ili više) trgovac koji radi za banku Ujedinjenih Nacija koji je odgovoran za rizik menjačke stope dolar-jen. Na kraju svakog radnog dana taj trgovac ima obavezu da obezbedi granicu rizika propisanu od strane banke koja neće biti prekoračena. Ako se u nekom danu desi jedno ili više prekoračenja rizika, tada trgovac mora izvršiti hedžing trgovinu pridržavajući se tih granica.

Menadžeri rizika tada sakupljaju reziduale tržišnih rizika svih trgovinskih delovanja da bi ocenili ukupan rizik sa kojim se banka suočava usled promena tržišnih veličina. Nadajmo se da je banka dobro diverzifikovana, kako bi se njena izloženost tržišnim promenama znatno smanjila. Ako je rizik neprihvatljivo velik tada se uzroci moraju odrediti i preduzeti korektivne mere.

Kreditnim rizikom se upravlja da bi se obezbedila dobra diverzifikacija portfolija kredita (agregacija rizika). Ako bi banka pozajmila sav raspoloživi fond jednom dužniku, onda bi ovo bio slučaj potpune nediverzifikacije i izložila bi se velikom riziku. Ako bi dužnik upao u poteškoće i nije u mogućnosti da obezbedi i glavnicu i kamatu, banka će postati nesolventna.

Na primer, ako banka prilagodi bolju strategiju diverzifikacije pozajmljujući 0,01% raspoloživog fonda broju dužnika od 10.000, tada ona zauzima bezbedniju poziciju. Pretpostavimo da se u nekoj godini poznaje verovatnoća neizvršavanja obaveza i iznosi 1%. Tada očekujemo da će približno oko 100 dužnika zadesiti položaj neisplativosti, a godišnji gubici banke će biti veći od zarađenog profita sa druge strane, od 99% dobro realizovanih zajmova.

Diverzifikacija umanjuje nesistematski rizik, ali ne eliminiše sistematski. Banka se suočava sa rizikom od nevraćanja zajmova usled ekonomskog pada. Maksimiziranjem naknada diverzifikacije, dužnici bi bili iz različitih oblasti i različitih delatnosti. Velika međunarodna banka sa tipovima dužnika različitih zemalja je verovatno bolje diverzifikovana od neke manje banke iz Teksasa koja posluje sa uglavno naftnim kompanijama. Ipak uvek će postojati sistemski rizik koji se ne da diverzfikovati, kao što je nemoguće zaštiti banku od svetskih recesija.

3. Očekivani gubitak

Da bismo se upoznali sa modelom očekivanog gubitka, potrebno je da utvrdimo model VaR (Value at Risk), koji je baza prethodno pomenutog modela. Oba ova modela su praktična i veoma primenjena, te nose svoje prednosti i mane koje ćemo takođe razmotriti u ovom delu.

Prvobitni modeli za procenu rizika bili su deskriptivnog karaktera u pogledu na određene aspekte rizika. Tako je sučaj kod modela Greek letters, gde su se određivanjem veličina delta, gama, vega i sl. dobijale određene mere koje opisuju osobine portfolija, kao što su senzitivnost, volatilnost, priraštaje i sl. Za tumačenje dobijenih mera, koje su se svakodnevno računale, bili su potrebni ekonomski eksperti i ovakav način računanja i analiziranja rizika bi oduzimao dosta vremena. Kao što je pomenuto, ove mere ne govore o celokupnoj vrednosti rizika, već o pojedinim tržišnim veličinama, dok ukupna izloženost finansijske institucije riziku ostaje nepoznata.

3.1. Vrednost pod rizikom VaR

Začetnik VaR-a je bio J. P. Morgan, sa ciljem da se jednom broju dodeli celokupan rizik portfolija. Model VaR-a je u samom startu našao široku primenu kod brojnih korporacija i fond menadžera, pa i u finansijskim institucijama, da bi kasnije postao mera Bazelskog komiteta u postavljanju kapitalnih zahteva bankama širom sveta.

Kako je nastao VaR?

Predsedavajući Dennis Weatherstone nezadovoljan dugačkim i opširnim izveštajima o riziku koje je svakodnevno dobijao, baziranih na modelu Greek letters, zatražio je jednostavniji prikaz totalnog rizika kojem se banka izlaže naredna 24 sata, koji će izmeriti u celom trgovačkom portfoliju. Njegov podređeni je odgovorio da je to nemoguće, ali konačno uz pomoć Markowitz-ovog modela se ispostavilo da je moguće razviti novi – VaR izveštaj. Postao je poznat kao „Izveštaj u 4:15“, jer je u to vreme izveštaj bio predat predsedavajućem, tog dana pa i narednih.

Pravljenje ovog izveštaja zahtevalo je puno posla, kao što su: prikupljanje dnevnih podataka sa različitinih delova sveta od drugih banaka, suočavanje se sa drugim vremenskim zonama, procenjivanje korelacija i volatilnosti, kao i generalno razvijanje kompjuterskog sistema. Posao je bio kompletiran 1990. Ključna prednost novog sistema je što više rukovodstvo za njega ima bolje razumevanje o rizičnosti banke, jer je omogućeno da se dodeli određeni bančin kapital riziku. Istim ovim istraživanjem su se bavile i druge banke, te su 1993. objavile VaR kao važnu meru rizika.

Banke uglavnom drže svoje mere rizika u strogoj tajnosti, no ipak je 1994. J.P. Morgan napravio pojednostavljenu verziju njihovog sistema zvanu Risk Metrics, dostupnu i na Internetu. Risk Metrics je računo varijanse i kovarijanse za veliki broj različitih tržišnih promenljivih. Ovo je privuklo pažnju i dovelo do debata na temu VaR modela. Softverske firme su nudile svoje VaR modele sa korišćenjem baze podataka Risk Metrics-a. Nakon toga ovaj model je postao standard u mnogobrojnim finansijskim i pojedinim nefinansijskim institucijama. BIS-ov (Bank for International Settlements) amandman, koji je baziran na VaR-u, je objavljen 1996., a dopunjen 1998. godine. Kasnije Risk Metrics grupa je 1997. godine sa J.P. Morganom na čelu je razvila Credit Metrics za procenu kreditnog rizika i 1999. godine Corrporate Metrics za rizik nefinansijskih institucija.

3.2. Definicija VaR-a

Korišćenje riziko mere vrednost pod rizikom podrazumeva pravljenje sledeće forme –

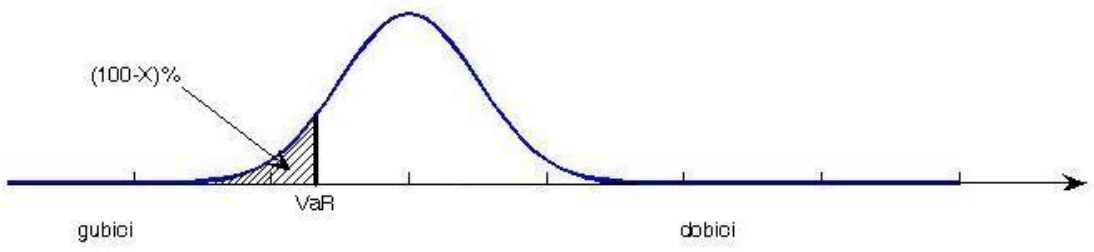
> Sa sigurnošću od X procenata nećemo izgubiti V novčanih jedinica u narednih N dana.

Promenljiva V je VaR portfolija i to je funkcija sa dva parametra:

- vremenski N [dana]
- sigurnosni X [%].

To je nivo gubitka za period od N dana, za koji se sa X% garantuje da neće biti premašen. VaR je gubitak koji odgovara $(100 - X)$-tom percentilu raspodele promene vrednosti portfolija (raspodele gubitaka ili dobitaka) za narednih N dana. Dobici su pozitivne promene, a gubici negativne. Na primer, ako imamo $N = 5$ i $X = 97$, VaR je

tada treći percentil raspodele promena vrednosti portfolija za narednih 5 dana. U ovom slučaju, kao što je prikazano na Grafiku 3.1., promene vrednosti portfolija prate normalnu raspodelu. Reč je o raspodeli dnevnih dobitaka portfolija, gde se gubici predstavljaju kao negativne vrednosti, a moguće je i odrediti raspodelu dnevnih gubitaka portfolija gde se dobici predstavljaju kao negativni gubici.



Grafik 3.1.

1996. godine BIS amandman kalkuliše kapital za knjigu trgovanja koristeći VaR meru sa $N = 10$ i $X = 99$. Kapital koji se zahteva od banke da bude rezervisan je k puta veći od VaR mere. Umnožak k se u zavisnosti regulatora banaka različito određuje i najmanje mora iznositi 3. Za banke koje dobro procenjuju VaR vrlo je verovatno da će k iznositi 3. Za neke druge banke uglavnom je to više, a može da iznosi i do 4.

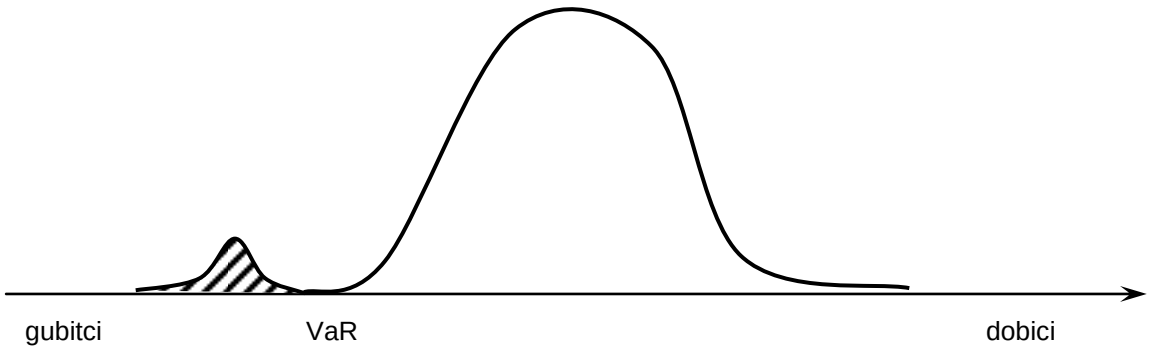
3.3. VaR i očekivani gubitak

VaR je privlačna mera rizika iz razloga što se lako razume. U suštini postavlja se jednostavno pitanje – *Koliko stvari mogu loše da ishode?* Odgovor na ovo pitanje posebno je poželjan kod izvršnih rukovodioca. Njima odgovara ideja da se teorija Greeks letters kompresuje u jedan broj, jer se takođe ovo može testirati.

Ipak, ukoliko bismo hteli da limitiramo rizik trgovcima, to nas može dovesti do nepoželjnih rezultata. Neka banka saopšti trgovcima da za jedan dan 99%-ni VaR

portfolio trgovca mora iznositi 10 miliona n.j. Trgovac bi tada mogao da napravi portfolio koji zadovoljava limit sa 99%-tnim VaR-om od 10 miliona n.j. i sa 1%-nim od 500 miliona n.j. Trgovci će zadovoljiti nametnuti limit banke zauzimajući neprihvatljiv rizični položaj.

Ponašanje trgovca nije neverovatno kao što to izgleda. Mnogi trgovci vole da rizikuju na veliko, nadajući se velikom prinosu i ako im se ukaže prilika da nađu način za to, poštujući ograničenja, oni će rizikovati. Kako navodi jedna trgovac: ,,I have never met a risk control system that I cannot trade around“. Odgovor na ovaj problem daje se grafičkim prikazom na Grafiku 3.2. raspodele promena vrednosti portfolija u poređenju sa onim na Grafiku 3.1. Na Grafiku 3.2. možemo videti da portfolio ima veći očekivani gubitak, iako ima VaR iste veličine kao i portfolio na Grafiku 3.1.



Grafik 3.2.

3.4. Očekivani gubitak

Mera koja daje veći podsticaj trgovcima u odnosu na VaR je **očekivani gubitak.** Ova mera se često naziva i uslovni VaR (Conditional Value at Risk - CVaR) ili gubitak repa. Kod VaR-a se postavlja pitanje koliko stvari mogu loše da ishode, dok se kod očekivanog gubitka postavlja sledeće: *Ukoliko stvari krenu loše, koliko iznosi očekivani gubitak?*

Očekivani gubitak je takođe funkcija dve promenljive:

- vreme N [dana]
- procenat sigurnosti X [%].

To je očekivani gubitak za N-dnevni period, uslovljen gubitkom većim od X%-og kvantila raspodele gubitaka portfolija. Na primer, ako je $X = 99$ i $N = 10$, očekivani gubitak je srednji iznos koji izgubimo za deset dana, pod uslovom da je gubitak veći od 99-og percentila raspodele gubitaka.

U nastavku ćemo pokazati da očekivani gubitak ima bolje karakteristike od VaR-a, u smislu da ohrabruje diverzifikaciju. Jedan nedostatak je taj što nije jednostavan kao i VaR i što se kao rezultat slabije shvata. Takođe, ponovo izračunavanje je teže. VaR je ipak polularnija mera rizika i kod regulatora i kod menadžera rizika uprkos svim manama.

3.5. Karakteristike mera rizika

Mere rizika korišćene za određivanje kapitalnih zahteva mogu biti zamišljene kao iznos novca koji se dodaje u poziciju rizikovanja da bi bio prihvatljiv od strane regulatora. Mnogi analitičari nabrajaju sledeće poželjne osobine riziko mera, a to su:

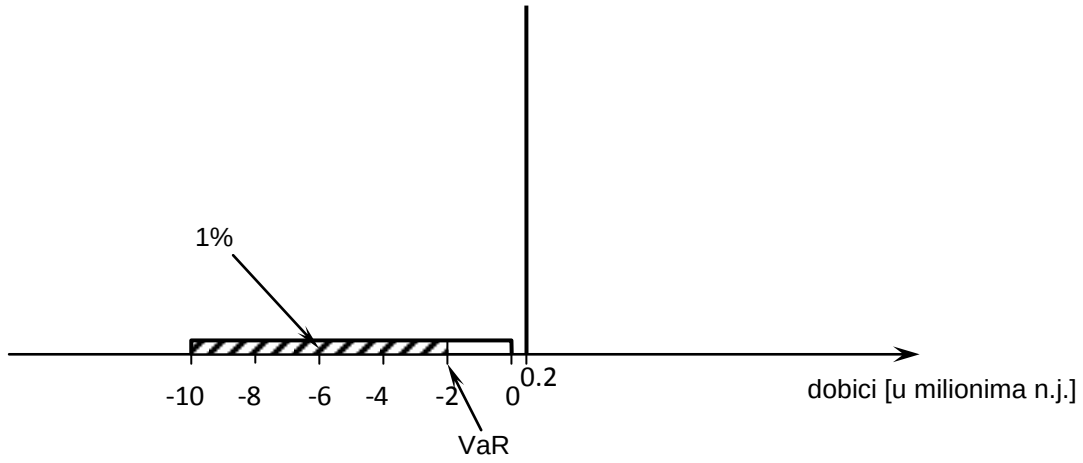
1. Monotonost – ako jedan portfolio ima niži prinos u odnosu na sve druge portfolije, njegova mera rizika bi trebalo biti veća.
2. Translatorna invarijantnost – ako dodamo količinu novca K u portfolio, njegova riziko mera mora biti manja u odnosu na iznos K.
3. Homogenost – menjanje veličine portfolija b puta, a pritom zadržavajući relativne iznose različitih komponenata u portfoliju, bi trebalo da rezultira riziko meru umnoženu za faktor b.
4. Subaditivnost – mera rizika za dva spojena portfolija ne bi smela da bude veća od mera rizika zasebih portfolija.

Prva tri prethodno pomenuta uslova su direktna i govore da riziko mera je iznos novca koji je neophodno uložiti u portfolio kako bi se njegov rizik mogao prihvatiti. Četvrti uslov govori da diverzifikacija pomaže u smanjivanju rizika. Ako izvršimo agregaciju dva

rizika, celokupna mera rizika bi trebala ostati ista ili čak manja. VaR zadovoljava prva tri uslova dok četvrti ne, što pokazuje sledeći primer.

Primer 3.1. Posmatrajmo dva zajma od 10 miliona n.j. za period od jedne godine sa verovatnoćom difolta (neizmirivanja obaveza) 1.25% za oba zajma. Takođe, postavimo pretpostavku da se difolt može desiti samo jednom zajmu, i to u iznosu od 0-100% celokupne glavnice. Ako se ne desi difolt, tada će biti postignuta kamata u iznosu od 0.2 miliona.

Potrebno je odrediti prvi percentil raspodele dobitaka. Za jedan zajam jednogodišnji 99%-ni VaR iznosi 2 miliona n.j. To je iz razloga što 1% u 1.25% verovatnoće difolta predstavlja 80% udela. Dakle, za 80% gubitaka, koje predstavljamo kao negativni dobici, koji su uniformno rasporedjeni od -10 do 0, dobija se iznos od -2 miliona n.j.



Grafik 3.3.

Posmatrajmo sada portfolio od dva zajma. Pošto je verovatnoća difolta 1.25% jednog zajma, verovatnoća difolta oba zajma je 2.5%.

Takođe, kao i u prethodnom slučaju, potrebno je odrediti prvi percentil raspodele dobitaka portfolija. Kako 1% u 2.5% predstavlja 40% udela, te za 40% negativnih dobitaka, koji su uniformno rasporedjeni od -9.8 do 0.2 miliona n.j. dobija se vrednost od -5.8 milion n.j. Zbog pretpostavke da uvek će biti ostvarena kamata 0.2 jednog od zajmova, te je zato maksimalni gubitak 9.8. Možemo reći da VaR iznosi 5.8 miliona n.j.

VaR pojedinačnih zajmova iznosi 2+2=4 miliona n.j., dok VaR portfolija iznosi 5.8 miliona n.j., te je narušena osobina subaditivnosti i činjenica da je diverzifikacija prednost. □

Mera rizika koja zadovoljava osobine homogenost, translatorna invarijantnost, monotonost i subativnost naziva se **koherentna mera** rizika. **VaR nije uvek koherentna mera rizika.** Očekivani gubitak jeste koherentna mera rizika i to se može pokazati. Primer 4.2. pokazuje to računajući očekivane gubitke za investicije iz Primera 3.1.

Primer 3.2. Posmatrajmo situaciju od malopre. Dobili smo da je VaR jednog zajma 2 miliona n.j. Očekivani gubitak jednog zajma sa nivoom poverenja 99% će biti očekivani gubitak zajma pod uslovom da je gubitak veći od 2 mil. n.j. Kako su gubici uniformno raspoređeni od 0 do 10 mil. n.j., očekivani gubitak jeste srednja vrednost 2 i 10, te je očekivani gubitak 6 mil. n.j.

VaR portfolija od dva zajma je iznosio 5.8 mil. n.j, a očekivani gubitak za ovaj portfolio jeste veći od 5.8 Kako se drugi zajam realizovao naši gubici će biti uniformno raspoređeni od -9.8 do 0.2 mil. n.j. i očekivani gubitak će biti srednja vrednost od -9.8 i 5.8 mil. n.j. i iznosiće 7.8 mil. n.j.

Zaključak je da očekivani gubitak dva zajma odvojeno u iznosu od 12 mil. n.j. je veći od očekivanog gubitka dva zajma kombinovana u portfoliju sa iznosom od 7.8 mil. n.j. Ovim primerom se pokazije da očekivani gubitak kao mera rizika jeste subaditivna.

□

Riziko mera se može opisati kao kvantil određenog reda raspodele gubitaka. VaR u tom slučaju pruža 100% ponderisanja X-tom kvantilu, dok očekivani gubitak predstavlja jednako ponderisanje svim kvantilima većim od X-tog i nula preostalim. Ipak, moguće je definisati spektralnu meru rizika ako kvantilima dodelimo drugačije pondere i dobijemo koherentnu meru rizika, tako su ponderi q-tog kvantila raspodele gubitaka oblika neopadajuće funkcije od q. Očekivani gubitak jeste jedna ovakva mera, dok VaR nije, iz

razloga što ponderi kvantila većih od X-tog su manji od pondera dodeljenog X-tom. Neki naučnici predlažu dodeljivanje pondera q-tim kvantilima srazmerno rastuće q. Na primer kao što je ponder dodeljen q-tom kvantilu proporcionalan sa

$$e^{-(1-q)/\gamma},$$

gde je γ konstanta. Ovakva mera se naziva eksponencijalna spektralna mera rizika.

4. Metodologija

Model rizika VaR je veoma popularan u menadžmentu rizika svih finansijskih institucija. Finansijski analitičari i eksperti koriste ga u poziciji računanja izloženosti riziku i samim tim ga razvijaju i osavremenjuju u svojoj primeni. Iz modela VaR razvile su se brojne tehnike njegovog određivanja, a paralelno sa tim su se razvile i tehnike za očekivani gubitak, kako analitičkim tako i istorijskim pristupom.

Kako bih izvršio testiranje modela očekivanog gubitaka, koristim se analitičkim modelom i istorijskim pristupom određivanja tržišnog rizika. Ovi postupci koje razmatram koriste istorijske promene tržišnih promenljivih, koje se svakodnevno posmatraju, sa ciljem da se dobije raspodela verovatnoće promene vrednosti portfolija.

Nakon izvršenog postupka određivanja riziko mera izneću metod testiranja očekivanog gubitka.

4.1. Vrednost portfolija

Neka su na tržištu na raspolaganju akcije $A_1, A_2, \dots A_n$ i neka nam je na raspolaganju određeni iznos novca. Ako želimo da uložimo količinu novca u portfolio sačinjen od pomenutih akcija tako da imamo pondere $w_1, w_2, \dots w_n$, respektivno akcijama, za koje važi

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 100\%, \qquad w_i \geq 0,$$

tada će vrednost portfolija iznositi

$$\pi = w_1 A_1 + w_2 A_2 + \cdots + w_n A_n.$$

4.2. Prinos i volatilnost portfolija

Pretpostavka da je volatilnost konstantna je neprihvatljiva! U istorijske podatke ćemo uvesti monitoring dnevne volatilnost. Da bismo to izveli potrebno je odrediti prinos portfolija.

Dnevni prinos portfolija $r_\pi = [r_i]_{(m-1)\text{x}1}$, gde r_i predstavlja dnevni prinos na i-ti dan i dat je sa

$$r_i = \frac{\pi(i) - \pi(i-1)}{\pi(i-1)},$$

gde $\pi(i)$ predstavlja vrednost portfolija na i-ti dan, $i = 1,2,3,\dots,m$.

Označimo volatilnost sa σ_i na i-ti dan, određenu pred kraj $(i-1)$-tog dana. Varijansa će u tom slučaju biti ${\sigma_i}^2$ i koristićemo sledeći obrazac za računanje iste

$${\sigma_i}^2 = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j {r_{i-j}}^2$$

na osnovu podataka o prinosima prethodnih m dana. Promenljive α_j predstavljaju vrednosti pondera dodeljenih onim prinosima od pre j dana i važi

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1, \qquad \alpha_j > 0\,.$$

Zbog značajnosti novijih informacija u odnosu na stare o prinosima, za određivanje volatilnosti postoji potreba da se uspostavi poredak pondera $\alpha_k < \alpha_j$, gde je $j < k$.

Model koji ovo zadovoljava jeste EWMA model (The Exponentially Weighted Moving Average model). Kod ovog modela je $\alpha_{i+1} = \lambda\alpha_i$, gde je $\lambda \in (0,1)$.

Može se pokazati da važi sledeća zakonitost:

$$\sigma_i{}^2 = \lambda\sigma_{i-1}{}^2 - (1-\lambda)r_{i-1}{}^2,$$

dok u opštem slučaju je

$$\alpha_j = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^i}\,\lambda^{j-1}.$$

J. P. Morgan, koji je kreirao Risk Metrics softver, je 1994. objavio EWMA model koristeći $\lambda = 0.94$ za određivanje dnevne volatilnosti. Njegova kompanija je otkrila da baš ova vrednost odgovara približno tačnom predviđanju volatilnosti u pogledu na onu koja se zaista realizuje. U sopstvenom proračunu koristiću baš tu vrednost.

4.3. Analitčko određivanje vrednosti portfolija

Analitičkim određivanjem vrednosti portfolija, sa uključivanjem podataka iz prošlosti biće pokazatelj onog što će se desiti u budućnosti. Pretpostavimo da želimo da izračunamo jednodnevni očekivani gubitak portfolija sa nivoom poverenja od 99%. Prvi korak jeste da odaberemo tržišne promenljive koje utiču na portfolio, kao što su cene akcija, menjačke stope, interesne stope i druge. U mom slučaju glavna promenljiva jeste cena akcije.

Neka je $\pi(i)$ vrednost portfolija na dan i i neka je n poslednji dan u uzorku. Tada je i-ti scenario vrednost

$$\pi(n)\frac{\pi(i)}{\pi(i-1)}.$$

Obzirom da se na prirodan i intuitivan način uvodi promena volatilnosti, dobija se inventivnija analitička vrednost portfolija i zato se za i-ti scenario koristi sledeći obrazac

$$\pi(n)\frac{\pi(i-1) + \big(\pi(i) - \pi(i-1)\big)\sigma_{n+1}/\sigma_i}{\pi(i-1)}.$$

Testiranje modela očekivanog gubitka podrazumeva upoređivanje rezultata očekivanog gubitka koji se predviđaju sa realizovanim vrednostima portfolija.

4.4. Raspodela dobitaka portfolija i određivanje riziko mera

Poslednji korak u određivanju raspodele dobitaka portfolija je odrediti promenu vrednosti portfolija i to kao razliku analitičkih vrednosti portfolija i poslednje posmatrane vrednosti u portfoliju.

Od dobijenih podataka, riziko mere, VaR i očekivane gubitke možemo određivati:

1. Empirijski (neparametarski), kvantilnom metodom, pretpostavljajući diskretnu raspodelu sa jednakim verovanoćama za svaki ishod.

   Od istorijskih podataka $x_1, x_2, \dots, x_n$ formira se varijacioni niz $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$ za nivo poverenja X.

   VaR se određuje kao $(1 - X)$-ti kvantil:

   i) Ako je $n(1 - X) \notin \mathbb{N}$ tada za VaR uzimamo
   $$y_{\lfloor n(1-X) \rfloor + 1};$$
   ii) Ako je $n(1 - X) \in \mathbb{N}$ tada za VaR uzimamo
   $$\frac{1}{2}\left(y_{n(1-X)} + y_{n(1-X)+1}\right).$$

   Očekivani gubitak se u tom slučaju određuje na sledeći način:

   i) Ako je $n(1 - X) \notin \mathbb{N}$ tada za očekivani gubitak uzimamo
   $$\frac{1}{\lfloor n(1-X) \rfloor + 1} \sum_{k=1}^{\lfloor n(1-X) \rfloor + 1} y_k\,;$$
   ii) Ako je $n(1 - X) \in \mathbb{N}$ tada za očekivani gubitak uzimamo
   $$\frac{1}{n(1-X)} \sum_{k=1}^{n(1-X)} y_k.$$

2. Parametarski metod (metoda varijanse).

Pretpostavlja se normalnu raspodelu $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ gde su m i σ respektivno aritmetička sredina i varijansa promena vrednosti portfolija $(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \quad \text{i}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (x_k - m)^2.$$

VaR sa nivoom poverenja X predstavlja:

$$\sigma\phi^{-1}(1 - X) + m,$$

gde je ϕ funkcija raspodele za $\mathcal{N}(0,1)$, a ϕ^{-1} njena inverzna funkcija,

dok je **očekivani gubitak**

$$\frac{1}{1 - X}\int_{-\infty}^{VaR} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(m-x)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

4.5. Testiranje riziko mera

Ako su dobijeni podaci o vrednostima očekivanog gubitka i VaR-a potrebno je izvršiti testiranje dobijenih rezultata.

U slučaju testiranja očekivanog gubitka mi bismo poredili vrednosti predikcija sa realizovanim vrednostima dnevnih gubitaka.

Realizovane vrednosti dnevnih gubitaka računaću kao razliku trenutne vrednosti portfolija i vrednosti portfolija prethodnog dana.

Ono što bi dalje trebalo da se radi jeste odgovoriti na pitanja:

1. Da li bi bilo dovoljno uraditi testiranje modela VaR, kao dovoljnog test valjanosti modela očekivanog gubitka iz razloga što je vrednost VaR-a uvek manja ili jednaka od očekivanog gubitka? Tada bi se testiranje svelo na dve opcije:

a) U slučaju da je VaR prihvatljiv model, tada bi model očekivanog gubitka bio prihvatljiv ili precenjen.
b) Kada je VaR potcenjen, tada ne znamo da li je očekivani gubitak prihvatljiv ili neprihvatljiv.

2. Kako bi neparametarski Wilcoxonov test za zavisne uzorke merio značajnost razlike izmedju stvarnih gubitaka i predviđenih?

4.5.1. Testiranje VaR mere kao pokazatelja za očekivani gubitak

Postoje brojne metode koje se koriste za testiranje VaR modela. U zavisnosti od interesovanja ispitivanja poznatiji su: Kupiecov model detekcije prekoračenja, Blanco-Ihleov model, koji osim detekcije koristi iznos prekoračenja, i Pearsonov Q test pokrivenosti po intervalima. Druga dva modela su kompleksnija, jer posmatraju više karakteristika modela. Kako bi moja procena bila preciznija u daljem testarnju modela ću se koristiti Pearsonovim Q testom.

Postupak Pearsonovog Q testa je baziran na broju prekoračenja koji se posmatraju na particiji jediničnog intervala [0,1]. Kao prvo trebalo bi napraviti particiju tog intervala, a jedna, koju sam iskoristio u svom testu je sledeća:

$$[0,0.01], [0.01,0.05], [0.05,0.1], [0.1,1],$$

koja deli celokupni posmatrani vremenski interval na četri različita intervala.

Kada se jednom napravi particija, ostaje da se prebroje prekoračenja realnih gubitaka u svakom podskupu izabrane particije. Sa dobijenim brojem prekoračenja u svakom od podskupova, prema Q testu se računa vrednost

$$Q = \frac{\left(N_{(u_i,l_i)} - N(u_i - l_i)\right)^2}{N(u_i - l_i)},$$

gde je $N_{(u_i,l_i)}$ broj prekoračenja VaR-a u i-tom podskupu, a N je ukupan broj posmatranih dana tokom kog se konstruiše ceo test. Takođe u_i i l_i se odnose na gornju i donju granicu podskupa koji se posmatra iz izabrane particije. U slučaju kada se VaR model približno poklapa sa stvarnim gubicima, tada test ima aproksimativno χ^2 raspodelu sa $k - 1$ stepeni slobode.

Kako je particija intervala $[0,1]$ izabrana, očigledno je da se fokusiramo na set kvantila većih od 10-og percentila. Isto je moglo da se uradi sa drugačijom particijom, u zavisnosti od interesovanja za pojedini set kvantila.

U zavisnosti od rezultata testa, ako test pokaže da je VaR model prihvatljiv testiranje je gotovo, možemo zaključiti da je model rizika očekivani gubitak prihvatljiv, jer je očekivani gubitak bira već vrednosti za rizik, te nas više štiti. Ipak ako se pokaže da je VaR model neprihvatljiv, tada treba izvršiti dodatno testiranje.

4.5.2. Testiranje očekivanog gubitka neparametarskim testom

Ukoliko bi prethodni test dao negativan odgovor VaR modelu, ne bismo bili u mogućnosti da tvrdimo da je model očekivanog gubitka prihvatljiv ili je i on neprihvatljiv.

Da bismo dobili odgovor koji karakteriše model očekivanog gubitka koristiću se neparametarskim Wilcoxonovim testom.

Ovaj test ima dva uzorka X_i i Y_i. Uzorak X_i bi trebalo da predstavlja realizovane gubitke, dok uzorak Y_i, predviđene očekivane gubitke. Reč je o dvodimenzionalnoj slučajnoj promenljivoj koja se redukuje u jedno posmatranje određivanjem razlike D,

$$D_i = Y_i - X_i.$$

Podaci se sastoje iz n' merenja (x_1, y_1),(x_2, y_2),...,$(x_{n'}, y_{n'})$ dvodimenzionalnih slučajnih promenljivih (X_1, Y_1),(X_2, Y_2),...,$(X_{n'}, Y_{n'})$. Određuje se n' apsolutnih razlika ne uzimajući u obzir znak:

$$|D_i| = |Y_i - X_i|, \quad i = 1,2, \dots, n',$$

za svaki od n' parova $(Y_i - X_i)$.

Iz daljeg razmatranja izostavljaju se parovi čija je razlika nula (odnosno kod kojih je $Y_i = X_i$, $D_i = 0$). Neka broj parova koji preostanu bude označen sa n, $n \leq n'$. Rangovi od 1 do n se pridružuju parovima prema relativnoj veličini apsolutne razlike $|D_i|$. Rang 1 se dodeljuje paru (X_i, Y_i) sa najmanjom apsolutnom razlikom $|D_i|$; rang 2 se dodeljuje paru (X_i, Y_i) sa drugom po veličini najmanjom apsolutnom razlikom $|D_i|$; i tako dalje, do ranga n koji pripada paru sa najvećom apsolutnom razlikom.

Ako nekoliko parova ima apsolutne razlike koje su jednake jedna drugoj, tada se svakom od ovih parova dodeljuje prosečni rang, na primer, ako četiri para imaju rangove 3, 4, 5 i 6, a da pritom ne znamo koji rang da stavimo kom paru, jer su im sve četiri apsolutne razlike međusobno jednake, svakom paru pridružujemo prosečni rang $\frac{1}{4}(3 + 4 + 5 + 6) = 4.5$.

Osnovne pretpostavke ovog testa su sledeće:

1. Raspodela svake razlike D_i je simetrična,
2. D_i su međusobno nezavisne,
3. Sve D_i imaju istu aritmetičku sredinu, i
4. Skala merenja za D_i je najmanje intervalna.

Neka je R_i rang sa znakom definisanim za svaki par (X_i, Y_i) na sledeći način:

- R_i= pozitivni rang dodeljen paru (X_i, Y_i), ako je razlika $D_i = X_i - Y_i$ pozitivna (odnosno ako je $X_i < Y_i$) i
- R_i= negativni rang dodeljen paru (X_i, Y_i), ako je razlika $D_i = X_i - Y_i$ negativna (odnosno ako je $X_i > Y_i$).

Test statistika je zbir pozitivnih rangova

$$T^{+} = \sum_{D_i > 0} R_i.$$

5. Ilustracija modela

Na srpskom tržištu kapitala moguće je i raspoloživo pristupiti istorijskim podacima akcijama sa Beogradske berze Belex. U ilustrovanju modela koji bi predstavljao testiranje očekivanog gubitka posmatraću dvanaest akcija iz grupe Belex 15 najlikvidnijih akcija domaćeg tržišta za period od 17.8.2006. do 30.12.2011. godine za sledeće kompanije kao što je prikazano Tablicom 5.1.

	Izdavalac	Simbol
A_1	AIK banka a.d. , Niš	**AIKB**
A_2	Alfa plam a.d. , Vranje	**ALFA**
A_3	Energoprojekt holding a.d. , Beograd	**ENHL**
A_4	Galenika Fitofarmacija a.d. , Zemun	**FITO**
A_5	Imlek a.d. , Beograd	**IMLK**
A_6	Jedinstvo Sevojno a.d. , Sevojno	**JESV**
A_7	Jubmes banka a.d. , Beograd	**JMBN**
A_8	Komercijalna banka a.d. , Beograd	**KMBN**
A_9	Metalac a.d. , Gornji Milanovac	**MTLC**
A_{10}	Soja protein a.d. , Bečej	**SJPT**
A_{11}	Tigar a.d. , Pirot	**TIGR**
A_{12}	Veterinarski zavod Subotica a.d. , Subotica	**VZAS**

Tablica 5.1.

Podatke koje sam izdvojio su prilagođeni za sve akcije i u daljem postupku određivanja očekivanog gubitka koristiću se softverskim paketom Matlab 7.0 u kom ću ih prikazivati i obrađivati.

Obzirom na veličinu dlimičan prikaz uzorka dat je Tablicom 5.2.

	AIKB	ALFA	ENHL	FITO	IMLK	JESV	JMBN	KMBN	MTLC	SJPT	TIGR	VZAS
Dan 1	4000	34400	1000	3000	1300	2300	53949	6890	3740	2119	1845	430
Dan 2	4000	34001	970	2988	1299	2300	53947	6890	3738	2020	1866	430
Dan 3	4000	34001	970	3000	1300	2300	53949	6000	3738	2040	1862	445
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Dan 1358	1633	7400	390	1828	2344	4900	12733	1651	1608	521	490	321
Dan 1359	1648	7200	392	1801	2411	4900	12051	1650	1600	547	530	321
Dan 1360	1648	7200	392	1820	2353	4855	12999	1700	1600	565	514	321

Tablica 5.2.

5.1. Vrednost portfolija

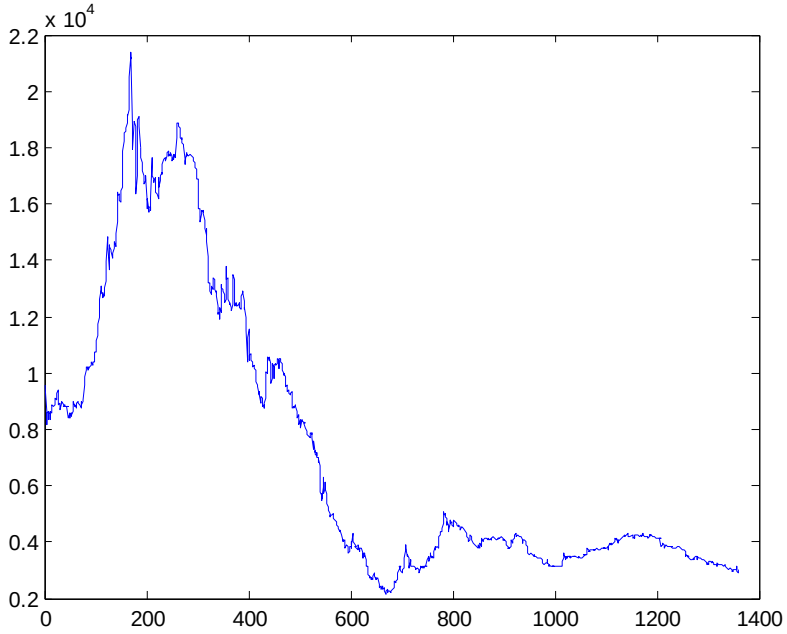
Od pomenutih akcija napravio sam portfolio sa jednakim udelom od svake akcije. Bez umanjenja opštosti možemo posmatrati portfolio sa jednakim ponderima, odnosno $\frac{1}{12}$, koji ujedno predstavljaju udeo kapitala uloženog u svaku akciju u portfoliju.

Vrednost portfolija je matrica kolona dimenzije 1360x1

$$\pi = \frac{1}{12}A_1 + \frac{1}{12}A_2 + \cdots + \frac{1}{12}A_{12},$$

gde su $A_1, A_2, \dots A_{12}$ cene akcija (matrice kolone 1360x1) sa oznakama respektivno dato kao u Tablici 5.2.

Prikaz kretanja vrednosti portfolija tokom ovih dana grafički je prikazan na Grafiku 5.1.

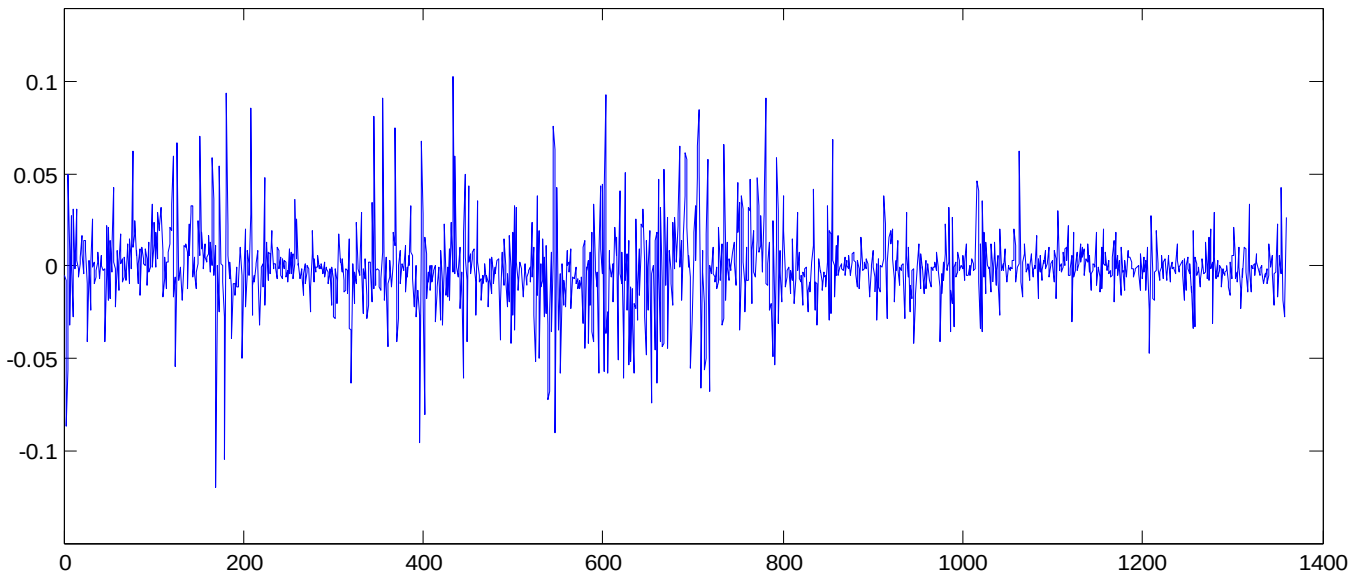


Grafik 5.1.

5.2. Prinos i volatilnost portfolija

Dnevni prinos portfolija za 1360 vrednosti portfolija biće predstavljen matricom **PrinosPja**.

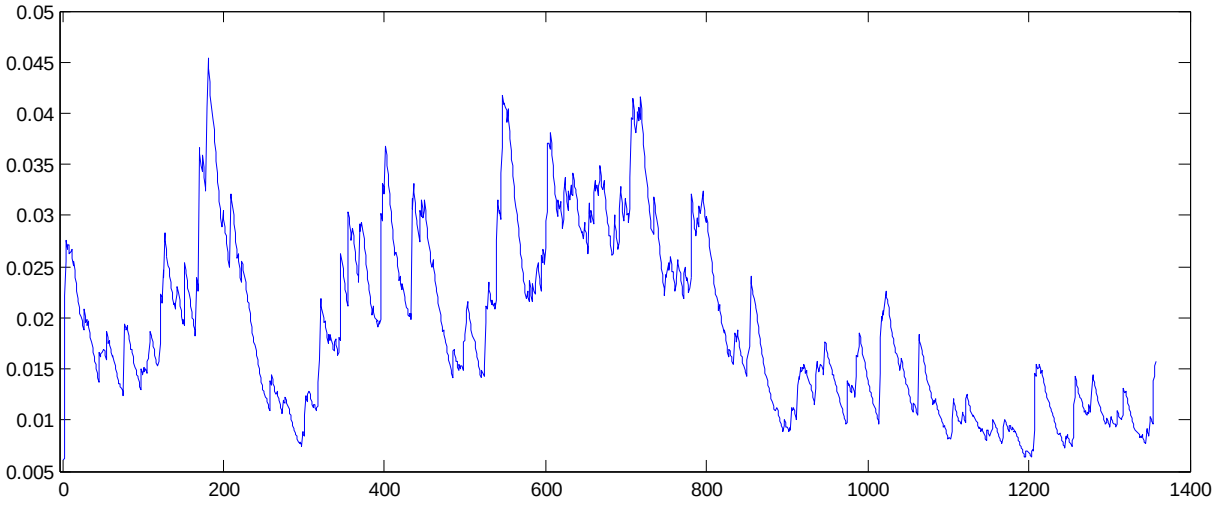
Podaci o prinosu portfolija prikazani su i grafički na Grafiku 5.2.



Grafik 5.2

Prinos protfolija je veoma dinamičan, ali obzirom na to da je slučajno izabran izbor akcija u portfoliju i da se ponderisani odnos akcija po pretpostavci ne menja u njemu tokom ovog dugačkog vremenskog perioda, možemo tvrditi da ovo nije neuobičajena situacija.

Grafički prikaz volatilnosti se može videti na Grafiku 5.3. za dane od 4. do 1361. i on takođe reflektuje veoma velike oscilacije događaja koji se odvijaju na berzi.



Grafik 5.3.

5.3. Analitičke vrednosti portfolija

Kako na raspolaganju imam uzorak od 1360 istorijskih podataka, iz njega ću izdvojiti prvih 800, od kojih ću dobiti 799 scenarija i izračunati VaR i očekivani gubitak za 801. dan. Istim postupkom odrediću VaR i očekivani gubitak drugih 800 podataka (na osnovu podataka od 2. do 801.) i dobiti predviđanja za 802. dan, ovaj postupak bi se ponavljao nadalje za pretposlednjih 800 grupa podataka iz uzorka. Da bih ovo postigao biće mi potrebno analitičko određivanje vrednosti portfolija koju dobijam matricom **SIMULACIJE** dimenzije 560x799, čije su vrste scenariji kojima ćemo se voditi u određivanju VaR vrednosti i očekivanih gubitaka.

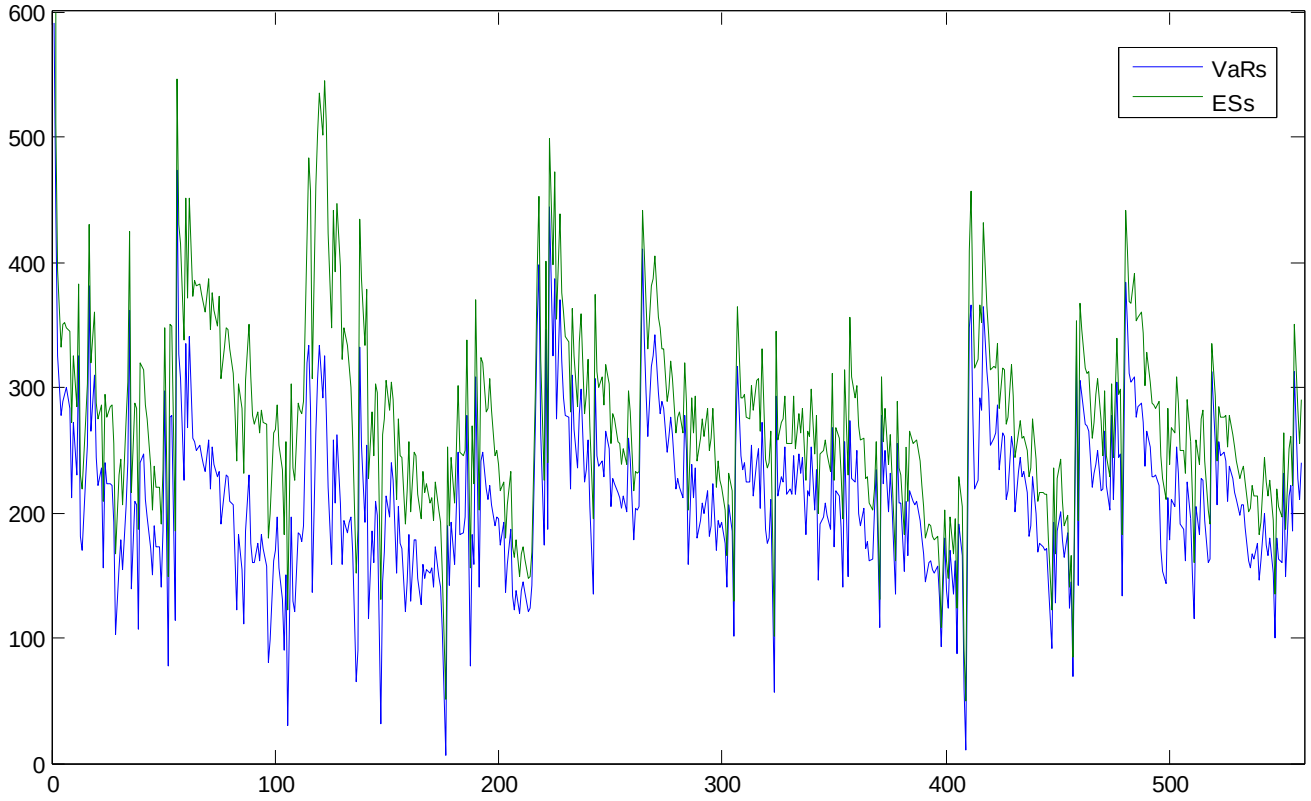
5.4. Raspodela dobitaka portfolija i određivanje riziko mera

Poslednji korak u određivanju raspodele dobitaka portfolija je odrediti promenu vrednosti portfolija i to kao razliku scenarija vrednosti portfolija i poslednje posmatrane vrednosti u portfoliju.

U programu Matlab koristeći oba postupka za određivanje VaR-a i očekivanog gubitka, za obe mere rizika sam programirao kodove koji ih računaju.

Na osnovu naredbi dobija se matrica vrsta **VaRs**, dimenzije 1x560 koja ima vrednosti VaR za sve dane od 801. do 1361. kao i matrica vrsta **ESs**, dimenzije 1x560, sa očekivanim gubitkom za dan 801. dan, očekivani gubitak za 802. dan... pa do očekivanog gubitka za 1361. dan.

Kako su dobijeni podaci matrice velikih dimenzija, prikazaću ih grafičkim putem na Grafiku 5.4.

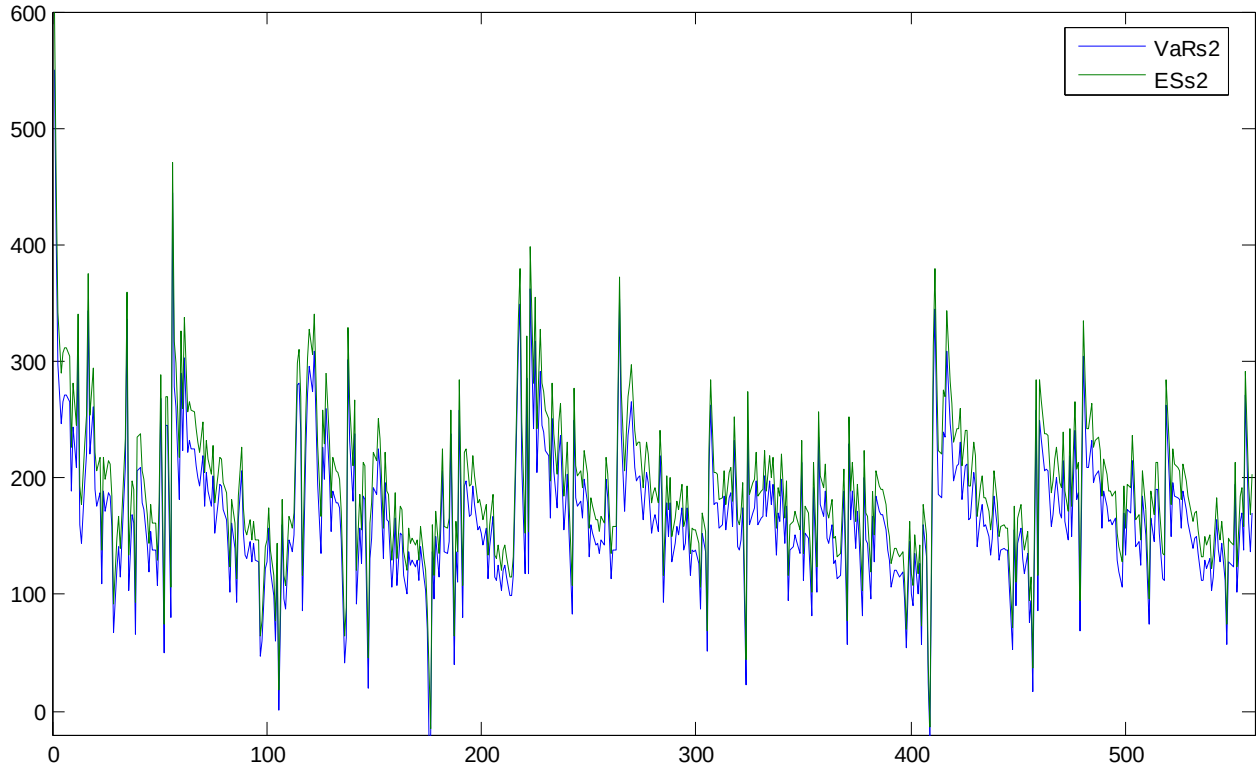


Grafik 5.4.

Očekivani gubitak na grafikonu je predstavljen zelenom linijom koja ide iznad plave linije koja odražava vrednosti VaR-a. Obzirom da je očekivani gubitak manji ili jednak u odnosu na VaR i predstavlja rezervaciju kapitala, grafik ima ovaj oblik jer se na njemu prikazuju gubici kao pozitivni brojevi.

Kada se napravi identičan analogon, **parametarskom metodom** se dobijaju matrice **VaRs2** i **ESs2** dimezije 1x560 koja ima vrednosti riziko mera za sve dane od 801. do 1361.

Kako su dobijeni podaci matrice velikih dimenzija, prikazaću ih grafičkim putem na Grafiku 5.5.



Grafik 5.5.

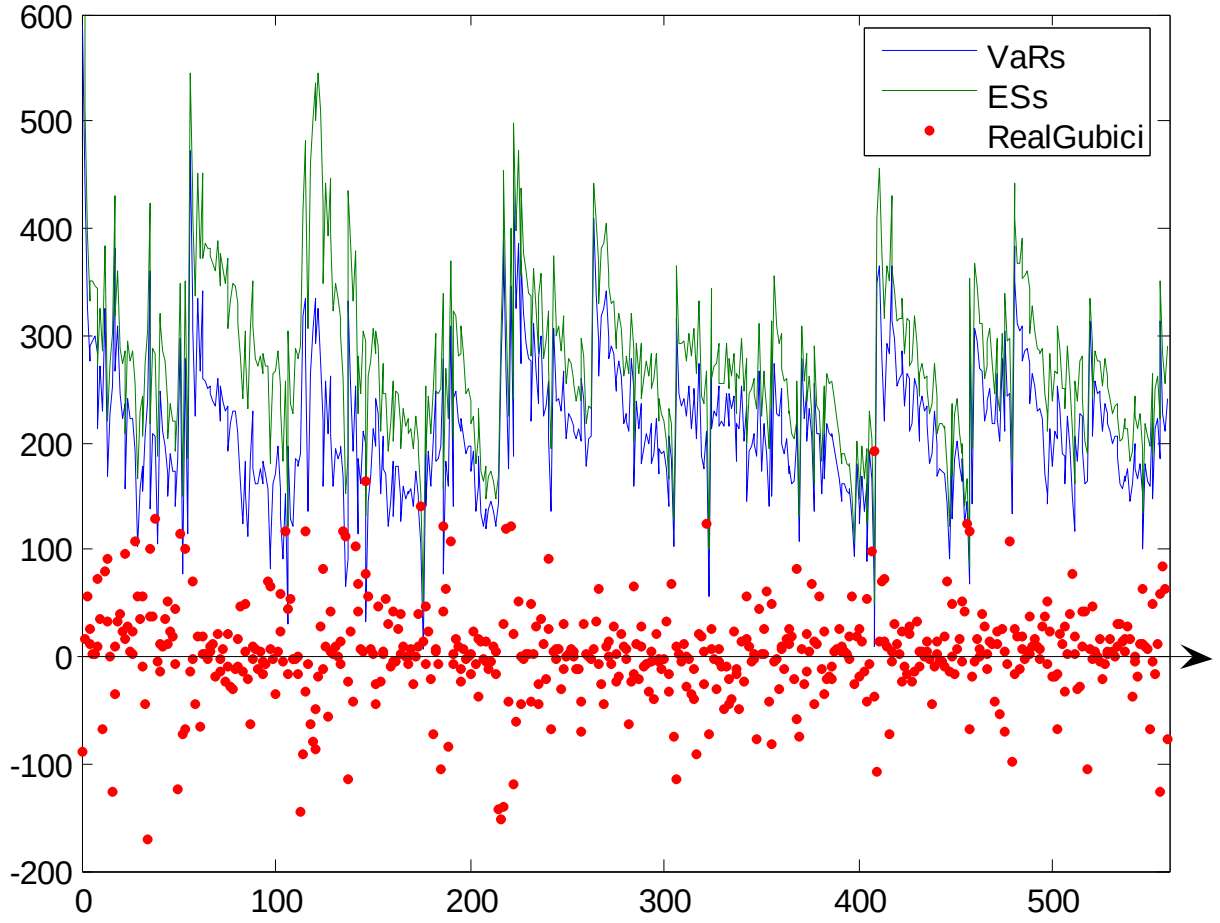
Grafici 5.4. i 5.5 prikazuju naizgled konfuzan dijagram riziko mera, određenih na oba načina, a to je takođe zbog dinamike tržišta. Osim toga vizuelno možemo primetiti da u drugom slučaju, parametarske metode, očekivani gubitak bolje prati VaR meru, nego što je to slučaj kod mera određenih empirijskom raspodelom. Odgovor na ovo pitanje daje se ocenjivanjem fitovanja empirijskih podataka, normalnoj raspodeli, gde usled lošeg fitovanja dolazi do pojave takozvanih debelih repova.

Očigledno je da i na jednom i na drugom zelena izlomljena kriva prati plavu iznad nje, što zapravo govori o sličnosti ova dva riziko modela i tu sličnost ćemo iskoristiti upravo u sledećem delu.

5.5. Testiranje riziko mera

Poteškoće u dobijanju rezultata testiranja su uzrokovane, zato što se VaR i očekivani gubitak gledaju kao dva veoma različita modela, šta više, pojedini analitičari kažu da je porediti ih kao “jabuke i narandže”. Jabuke i narandže su različite očigledno, ali obe ove vrste pripadaju istoj grupi, obe su voće. Ono što hoću da istaknem – da riziko mere imaju razlike, određene su na dva veoma različita probabilistička pristupa, jer je jedan kvantil, a drugi očekivanje uslovljenih kvantila, ali reč je o **istoj** posmatranoj raspodeli gubitaka. Na mestu na kom je određen VaR, u nizu gubitaka, posmatranjem preostalih članova niza gubitaka postiže se očekivani gubitak. Zato ovaj model testiranja očekivanog gubitka dozvoljava oslanjanje na testiranje VaR-a, te zaobilazi razlike i posmatra ono što im je zajedničko.

Kako su dobijeni podaci o vrednostima očekivanog gubitka i VaR-a potrebno je izvršiti testiranje dobijenih rezultata. Poredićemo vrednosti predikcija sa realizovanim vrednostima dnevnih gubitaka.



Grafik 5.6.

Realizovane vrednosti dnevnih gubitaka računaću kao razliku trenutne vrednosti portfolija i vrednosti portfolija prethodnog dana. Ovo je određeno matricom **RealGubici**, dimenzije 559x1, a grafički prikazano na Grafiku 5.6. crvenim tačkama, zajedno sa rezultatima očekivanog gubitka i VaR-a empirijske raspodele.

Shodno grafičkom prikazu možemo uočiti da skoro na celom posmatranom vremenskom intervalu od 559. dana, obe riziko mere dobro predviđaju rizičnost portfolija i dovoljno određuju nivo rezervisanog kapitala. Izlomljene linije koje odgovaraju riziko merama (plava i zelena) predstavljaju granicu preko koje gubici (crvene tačke) ne bi smeli preći. Ako bolje pogledamo prikaz možemo uočiti da ipak ima svega nekoliko izuzetaka. Ovi izuzeci ako su u poželjnom broju će govoriti o preciznosti modela.

Prvi i najprostiji pristup testiranja modela koji je predložio Kupiec, u kom govori o tome da se ispita frekvencija ovih izuzetaka i da se za određeni nivo poverenja testiraju rezultati. Nedostatak ovog modela bi mogao da se ogleda upravo u pokrivenosti izuzetaka na posmatranom vremenskom intervalu. Na primer, u slučaju da posmatramo izuzetke 99%-tnog VaR-a za period od 5 godina, što je približno 1200 dana, ukoliko imamo 10 gubitaka na početku prve posmatrane godine. Ovaj model bi u tom slučaju rezultovao pozitivnim odgovorom. Međutim, ovo ne mora biti realna situacija, u slučaju da se na početku prve posmatrane godine odigravala svetska recesija, rezultati ne bi davali jasnu sliku o tačnosti modela. Ovakav pristup jeste potreban, ali ne i dovoljan, zato brojni autori navode da se pri vršenju testiranja riziko modela moramo voditi višestrukom testiranju, uzimavši u obzir više testiranih osobina.

5.5.1. Testiranje VaR mere kao pokazatelja za očekivani gubitak

Kao što sam i napomenuo, izvršiću testiranje koje uzima u razmatranje još neku osobinu, a reč je o Pearsonovom Q testu. Kako Pearsonov postupak testiranja zahteva pravljenje particije realinih gubitaka na podskupove

$$[0,0.01], [0.01,0.05], [0.05,0.1], [0.1,1],$$

ova particija predstavlja podelu vremena tokom kog smo računali 559 VaR vrednosti za svaki dan, a particija po danima bi bila sledeća:

$$\{1, \dots ,6\}, \{7, \dots ,28\}, \{29, \dots ,56\}, \{57, \dots ,559\}.$$

Kako je particija intervala $[0,1]$ izabrana, očigledno je da se fokusiramo na set kvantila većih od 10-og percentila. Isto je moglo da se uradi sa drugačijom particijom, u zavisnosti od interesovanja za određeni set kvantila.

Nakon izvršavanja Pearsonovog Q testa, sa nivoom poverenja 95% dobijamo odbacivanje nulte hipoteze, za pokrivenost izuzetaka VaR-ovog empirijskog i parametarskog modela.

Kako je test pokazao, VaR model je neprihvatljiv u oba slučaja, tako da ne možemo zaključiti da li je očekivani gubitak prihvatljiv ili neprihvatljiv. U slučaju da smo dobili da je model prihvatljiv, obzirom da je očekivani gubitak manji ili jednak VaR-u, tada bismo implicitno znali da je očekivani gubitak prihvatljiv model, jer bi nas jednako dobro štitio od rizika. Da bismo pronašli odgovor o tačnosti očekivanog gubitka, alternativa ovom testu jeste neparametarski test.

5.5.2. Testiranje očekivanog gubitka neparametarskim testom

Nakon testiranja hipoteze Wicoxsonovog testa značajnosti dobijamo pozitivne rezultate, dobijamo rešenje o vrednosti p, za veoma malu vrednost u odnosu na nivo poverenja od 5% i slobodni smo da tvrdimo da bi nultu hipotezu trebalo odbaciti, odnosno da se uzorci značajno razlikuju, što za sam model očekivanog gubitka, sa empirijskim određivanjem, govori da je **prihvatljiv**. Analognim postupkom testiranja dobijamo za model očekivanog gubitka, dobijenog parametarskom metodom, da je **prihvatljiv**.

5.6. Drugi pristupi testiranja

Nakon uspešnog testiranja potrebno je prodiskutovati i potencijalne nedostatke. Obavezno je napomenuti da standardni testovi koji se fokusiraju na frekvenciju i nezavisnost izuzetaka imaju manu da često neuspešno odbacuju nultu hipotezu i stoga dovode do statističke greške tipa II. Osim niske moći standardnih testova, postoji još jedan problem da istinitost nulte verovatnoće nije poznata. Stoga kada koristimo test ne znamo, da li ćemo prihvatiti nezadovoljavajući model ili odbaciti dobar, jer je moguće da koristimo pogrešnu nultu verovatnću.

Napraviću mali osvrt na neke druge radove na temu testiranja očekivanog gubitka. Na primer kod Blanco-Ihleovog pristupa postavljanjem normalizovane funkcije gubitaka, dolazi do nedefinisanosti iste, u slučaju da je $VaR = 0$. Ako zanemarimo ovaj nedostatak, pojavljuje se novi problem određivanja raspodele test statistike. Raspodelu je praktično nemoguće odrediti. Samo pravljenje scenarija kao empirijske grupe podataka za jednu predikciju riziko mere, zahteva veliki posao, a da bi se utvrdila učestalost i dodelila nova raspodela, potreban je veći broj pravljenja analitičkih vrednosti, za isti set finansijske podloge u portfoliju.

Jedan od priznatijih metoda testiranja poznata po svojoj funkcionalnosti je **Generalna procedura** testiranja predložena Bazelskom konvencijom. Obzirom da je ovaj rad deo obavezinih smernica za brojne finasijske institucje koje moraju da rukovode tržišni rizik, odlikovan je kompletnim sadržajem postupka za testiranje od odabira nivoa, procedure testiranja do postupka određivanja rezervacije kapitala sa multiplikativnim faktorima koji se koriste.

Ovakav pristup testiranja omogućuje i insistira da se porede kvantili raspodele gubitaka koji imaju istu vrednost i za VaR i očekivani gubitak, a ne kvantili raspodele gubitaka sa istim nivoom poverenja u odnosu na ova dva modela rizika.

Kao osnova za pravljenje testiranja se broje prekoračenja i ovom slučaju se ne uzima visina prekoračenja, niti momenti prekoračenja u odnosu na ostala prekoračenja u ukupnom vremenskom intervalu na kom testiramo. Ovim prekoračenjima je dodeljena Bernulijeva raspodela, samim tim ovaj model je klasičan i vrlo jednostavan.

Takođe postavlja se pretpostavka da je raspodela gubitaka neprekidna (simetrične kao što su Gausova i Studentova), dok posmatrani podaci o gubicima portfolija se posmatraju dnevno i određuju diskretnu slučajnu promenljivu. Zbog ovoga testiranje je dopunjeno određivanjem proceniteljskog rizika. Proceniteljski rizik jeste rizik od lošeg fitovanja osnovnih podatak kojima se odeljuje apsolutno neprekidna raspodela i određuje se statistički.

Drugi model sa kojim bih uporedio rezultate testiranja iz ovog rada, je predložen od strane **Woon K. Wonga** u rukovodjenju tržišnim rizikom komercijalnih banaka.

Ovaj model je veoma specifičan i koristi se tehnikom sedlaste tačke odnosno asimptotskom tehnikom malih uzoraka, sa ciljem da se odredi p-vrednost, baziranu na uzorku očekivanih gubitaka. Tako da se na ovaj način može precizno izračunati p-vrednost, bez obzira na broj izuzetaka (prekoračenja) prema nutoj hipotezi.

Ono što ovaj model odlikuje moćnijim u odnosu na male uzorke izuzetaka jeste uvođenje Monte Karlo simulacije. Na ovaj način postiže se mogućnost poređenja moći drugih testova riziko mera. Odnosno onih testova u kojima se uzorku dodeljuju druge asimptotske raspodele, kao što su Studentova, inverzna Gausova ili onu koja je određena GARCH procesom. Samim tim ponovo sledi da se dovodimo u položaj sa proceniteljskim rizikom.

Takođe ovaj rad je uveličan uzimanjem velikog uzorka tržišnih promenljivih od šest komercijalnih banaka, te razmatra ponašanje rezultate testiranja očekivanog gubitka u međusobnom odnosu i odnosu na tržišnu situaciju u kojoj se nalaze banke.

Zaključak

U ovom radu je prikazan novi pristup testiranju u pogledu na dosadašnje. Prikazani su postupci za određivanje dve uslovno povezane riziko mere VaR i očekivani gubitak, kao i još dva modela za svaki u zavisnosti od pristupanja određivanja istih. Izvršena je metodologija postupka testiranja modela. Za zadati portfolio, izvršena je analiza testiranja očekivanog gubitka, u kombinaciji sa testiranjem VaR-a, kao i nezavisno testiranje očekivanog gubitka.

Kako se vrši procena riziko mera VaR i očekivanog gubitka, uprkos degradiranju modela očekivanog gubitka zbog nemogućnosti testiranja, pokazali smo suprotno, da je testiranje modela moguće i da je ocena o modelu očekivanog gubitka uspešno dobijena.

Šta ovo znači za nas i za druge? Još jednom ću uporediti model VaR-a sa modelom očekivanog gubitka.

Prednost VaR-a je ta što je intuitivan, te lako razumljiv za riziko menadžere i više organe upravljanja finansijskih institucija, a u odnosu na njega model očekivanog gubitka je u tom smislu kompleksniji. Ova vrlina je relevantna iz aspekta pomenutih korisnika informacija o riziku.

Prednost očekivanog gubitka u odnosu na VaR je realna i egzaktna. Finansijski analitičari su obezbedili i dokazali upravo to da je očekivani gubitak koherentna mera. VaR nije.

Postoji još jedan poredak između ova dva modela, a to je činjenica da je očekivani gubitak uvek veći ili jednak u odnosu na VaR.

Prva prednost VaR-a koja je pomenuta je manje objektivnog karaktera i veoma je diskutabilna. Razlog zašto je model VaR favorizovan od strane korisnika informacija o riziku je poslednja osobina, jer obzirom da je rezervacija kapitala za rizik obavezna, u ovom slučaju izborom VaR-a pravi se jeftinija zaštita od rizika.

Ovaj rad, osim postupka za testiranje očekivanog gubitka, pokazuje i njegovu prednost u odnosu na druge VaR modele, jer ohrabruje diverzifikaciju. Univerzalnost ovakvog pristupa testiranja omogućuje otvaranje pitanja i ideje o testiranjima drugih modela rizika, kao što je model TCL model (Tail Conditional Loss) i svih drugih VaR modela.

Takođe, moguće je napraviti kombinovano testiranje kao analogno gore pomenutom, apliciranjem Blanco-Ihleovog modela. U ovom slučaju prepreke oko dodeljivanja raspodele funkciji gubitaka koji ovaj model definiše bi se mogle prevazići aproksimacijom iste. Kako i savremena teorija testiranja navodi, moglo bi se zaključiti da kombinovano testiranje riziko mera je sve više popularnije u menadžmentu rizika, jer daje sigurniju i precizniju sliku o riziko modelu.

Prilog

U ovom delu prikazaću sintakse kojima sam se koristio za određivanje matrica velikih dimenzija, kao i funkcija koje sadrže postupke za određivanje istih.

Tablica 6.2. predstavlja delimičan prikaz o cenama akcija, a njena matrica u Matlabu je zadata sintaksom

```
Cene=[CeneAIKB,CeneALFA,CeneENHL,CeneFITO,CeneIMLK,CeneJESV,
eJMBN,CeneKMBN,CeneMTLC,CeneSJPT,CeneTIGR,CeneVZAS];
```

Vrednost portfolija je matrica kolona dimenzije 1360x1 **VrePja** u programskom paketu Matlab.

```
w=(1/12)*[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1];
VrePja=Cene*w';
```

Dnevni prinos portfolija za 1360 vrednosti portfolija biće predstavljen matricom **PrinosPja**.

Podaci o prinosu portfolija prikazani su i grafički na Grafiku 6.2.

Sintaksa koja određuje vektor volatilnosti za dane od 4. do 1361. je

```
Volatilnost=Vewma(PrinosPja,0.94); % vol na kraju cetvrtog
dana pa do kraja 1361. Dana%
```

Za određivanje prinosa koristi se sledeća sintaksa.

```
PrinosPja=(VrePja(2:1360)-VrePja(1:1359))./VrePja(1:1359);
%prinosi od drugog do 1360. Dana %
```

Kako bih dobio podatke o volatilnosti, u Matlabu sam programirao funkciju **Vewma**, oblika M-file, čiji su argumenti n-dimenzionalni vektor prinosa portfolija i vrednost parametra λ, a za rezultat daje $(n-1)$-dimenzionalni vektor.

```
%funkcija koja racuna volatilnosti za zadati vektor prinosa
A i vrednost

%parametra lambda lmbd

function res=Vewma(A,lmbd)

[m,n]=size(A);

for i=2:(m-1)

    res(1)=(((1-lmbd)/(1-lmbd^2))*A(1)^2+((1-lmbd)*lmbd/(1-
lmbd^2))*A(2)^2)^(1/2);

    res(i)=(lmbd*(res(i-1))^2+(1-lmbd)*A(i)^2)^(1/2);

end
```

Sintaksa za dobijanje analitičkih vrednosti je

```
SIMULACIJE=SimVr(VrePja,Volatilnost); %scenariji  od 2.-800.
Dana, pa 3.- 801. Dana...562 1360. Dana%
```

i predstavlja matricu **SIMULACIJE** dimenzije 560x799, čije su vrste podaci kojima ćemo se voditi u određivanju VaR vrednosti i očekivanih gubitaka.

Za pravljenje analitičkih vrednosti programirao sam M-file u Matlabu, funkciju **SimVr** koja za argumente ima n-dimenzionalni vektor cena portfolija i m-dimenzionalni vektor volatilnosti. Funkcija rezultira matricu dimenzije $(n-800)\ x\ (800-1)$.

```
%C-vektor cena

%V-vektor volatilnosti

function rez=SimVr(C,V)

[m,n]=size(C);

[k,l]=size(V);

for i=2:(m-800)

    for j=2:799

     rez(1,1)=C(800)*C(1)/C(2);

     rez(1,j)=C(800)*(C(j)+(C(j+1)-C(j))*V(798)/V(j-
1))/C(j);

     rez(i,1)=C(800+i-1)*(C(1)+(C(2)-C(1))*V(800-2+i)/V(i-
1))/C(1);

     rez(i,j)=C(800+i-1)*(C(j)+(C(j+1)-C(j))*V(800-
2+i)/V(i+j-2))/C(j);

    end

end
```

U Matlabu ovaj rezultat postiže se sledećom sintaksom

```
ProVrePja=SIMULACIJE-
(ones(799,560)*diag(VrePja(801:1360)))';
```

koja rezultuje matricu **ProVrePja**, čije vrste konfigurišu raspodele gubitaka portfolija.

Za određivanje VaR-a **empirijskom metodom** koristim se ugrađenom funkcijom QUANTILE, koja za argumente ima matricu istorijskih podataka (**ProVrePja**) i nivo poverenja (u mom slučaju to je vrednost $1 - X$). Sintaksa je sledeća:

```
VaRs=quantile(ProVrePja',0.01);% VaR za 801. Dan, VaR za
802. Dan, … , VaR-a za 1361. Dan
```

Na osnovu podataka o VaR vrednostima, za očekivani gubitak sam kreirao M-file, koji definiše funkciju **ES**, čiji su argumenti matrica istorijskih podataka (PVP) i nivo poverenja (alfa =$1 - X$).

```
function res=ES(PVP,alfa)
[m,n]=size(PVP);
A=sortPoVrstama(PVP)';
if floor(n*alfa)==n*alfa
    res=mean(A(1:n*alfa,1:m));
else
    res=mean(A(1:floor(n*alfa),1:m));
end
```

Sintaksa za dobijanje podatak o vrednostima očekivanog gubitka je

```
ESs=ES(ProVrePja,0.01);
```

i predstavlja matricu vrstu **ESs**, dimenzije 1x560, sa očekivanim gubitkom za 801. Dan, očekivani gubitak za 802. Dan... pa do očekivanog gubitka za 1361. Dan.

Za dobijanje VaR-a parametarskom metodom kreirao sam M-file, za funkciju **VAR2**, koja ima za argumente matricu istorijskih podataka (S), broj dana za koji određujemo VaR (N) i nivo poverenja ($1 - X$), sa kodom

```
function res=VAR2(S,N,alf)
[m,n]=size(S);
for i=1:n
    res(i)=norminv(alf,mean(S(:,i)),std(S(:,i)))*N^(1/2);
end
```

Sintaksa koja daje podatke o VaR-u **parametarskom metodom** je

```
VaRs2=VAR2(ProVrePja',1,0.01);
```

i rezultira matricom vrstom **VaRs2**, dimezije 1x560 koja ima vrednosti VaR za sve dane od 801 do 1361.

Očekivani gubitak koji se dobija parametarskom metodom koristi se kreiranim M-filea, za funkciju **ES2**, koja ima za argumente matricu istorijskih podataka (PVP), matricu vrstu vrednosti VaR (VAR) i nivo poveranja (alf = $1 - X$), sa kodom

```
function res=ES2(PVP,VAR,alf)
[m,n]=size(PVP);
syms x real
for i=1:m
    m(i)=mean(PVP(i,:));
    s(i)=std(PVP(i,:));
    res(i)=double(int(x*normpdf(x,m(i),s(i))/alf,-
inf,VAR(i)));
end
```

Pomoću sintakse, parametarskom metodom,

```
ESs2=ES2(ProVrePja,VaRs2,0.01);
```

dobija se matrica **ESs2** 1x560, sa očekivanim gubitkom za 801. Dan, očekivani gubitak za 802. Dan... pa do očekivanog gubitka za 1361. Dan.

U Matlabu će realni gubici biti predstavljeni matricom **RealGubici**, dimenzije 559x1

```
RealGubici=VrePja(802:1360)-VrePja(801:1359);
```

Postupak ovog testa sam programirao u softverskom paketu Matlab, u okviru M-filea, sa funkcijom **PearsonQ**. Sam kod ima sledeći oblik:

```
%R vektor realnih gubitaka

%V vektor vrednosti VaR-a

%X-nivo poverenja

%testiramo hipotezu da je X nivo poverenja jednako
rezultovao, u konacnom

%broju podskupova particije vektora R-V, imao istu uspesnost
u realizaciji

%zastite od rizika

function Q=PearsonQ(R,V,b)

X=0.99;

p=[0.01 0.05 0.10 1];

alf=1-X;

k=4;

[N,m]=size(V);

if size(V)==size(R)

    for i=2:k
```

```
        M(1)=sum(R(1:round(N*p(1)))<V(1:round(N*p(1))));

        M(i)=sum(R(round(N*p(i-
1)+1):round(N*p(i)))<V(round(N*p(i-1)+1):round(N*p(i))));

        a(1)=(M(1)-N*(p(1)-0))^2/(N*(p(1)-0));

        a(i)=(M(i)-N*(p(i)-p(i-1)))^2/(N*(p(i)-p(i-1)));

    end

    Q=sum(a);

if Q<=chi2inv(1-b,k-1)

            disp('Ho   se   ne   odbacuje   na   unetom   nivou
poverenja, model je prihvatljiv');

        else

            disp('Ho se odbacuje na nivou poverenja koji je
unesen, model je neprihvatljiv');

        end

else

    display('pogresna dimenzija unetih vektora')

end
```

Sa naredbama

```
>> R=RealGubici;

>> V=VaRs(1:559)';

>> [Q,h]=PearsonQ(R,V,0.05)
```

dobijam registrovanu vrednost statistike Q i rezultat testa

```
Ho se odbacuje na nivou poverenja koji je unesen, model je
neprihvatljiv

Q =  549.0497.
```

Analognim postupkom i naredbama za drugi način određivanje VaR-a sa pretpostavkom da gubici imaju normalnu raspodelu sintaksom

```
>> V2=VaRs2(1:559)';
>> [Q]=PearsonQ(R,V2,0.05)
```

dobija se takođe

```
Ho se odbacuje na nivou poverenja koji je unesen, model je
neprihvatljiv
Q = 543.1272
```

Kako je softevski paket Matlab opremljen statističkim funkcijama, tako poseduje funkciju *signrank* koja će mi izvršiti Wilcoxonov test. Funkcija ima tri argumenta: prvi za vektor kolonu prvog uzorka, drugi za vektor kolonu drugog uzorka i treći za parametar nivoa poverenja. Jednostavnim pozivom na naredbu

```
>> [p,h] =signrank(RealGubici,ESs(1:559)',0.05)
p =  3.0914e-093
h =  1
```

dobijamo rešenje o vrednosti p za veoma malu vrednost u odnosu na nivo poverenja od 0.05, što i sam rezultat $h = 1$ tvrdi, da bi hipotezu $H_0(m_D = 0)$ trebalo odbaciti, odnosno uzorak X i Y se značajno razlikuju. Što za sam model očekivanog gubitka, sa empirijskim određivanjem, govori da je **prihvatljiv**. Analognim postupkom

```
>> [p2,h2] = signrank(RealGubici,ESs2(1:559)',0.05)
p2 =  8.6176e-093
h2 =  1
```

dobijamo da je p veoma mala vrednost u odnosu na nivo poverenja od 0.05, što i sam rezultat $h = 1$ tvrdi, da bi hipotezu $H_0(m_D = 0)$ trebalo odbaciti, odnosno uzorak X i Y se značajno razlikuju. Tako da za model očekivanog gubitka, sa empirijskim određivanjem, zaključujemo da je **prihvatljiv**.

Literatura

[1] Hull, J.C., „Risk Management and Financial Istitutions“ 2007.

[2] Luenberger, D.G., „Investment Science“ Mean-Variance Portfolio Theory 1998.

[3] Letmark, M. „Robustness of Conditional Value-at-Risk. (CVaR) when measuring market risk across different asset classes” Working Paper, Mart 2010.

http://www.math.kth.se/matstat/seminarier/reports/M-exjobb10/100308a.pdf

[4] Güner, B., Rachev, S.T., Edelman, D., Fabozzi F.J. „Bayesian inference for hedge funds with stable distribution of returns” Working Paper Series in Economics August 2010.
digbib.ubka.uni-karlsruhe.de/volltexte/documents/1443240

[5] Campbell, S.D., „A Review of Backtesting and Backtesting Procedures” Working Paprer, April 2010.

[6] Rajter-Ćirić, D., „Verovatnoća” Novi Sad, 2008.

[7] Lozanov-Crvenković, Z., „Skripte iz statistike“ Novi Sad

[8] R. Tyrrell Rockafellar, Uryasev S., „Optimization of Conditional Value-at-Risk“

[9] Blanco C., Oks M., „Backtesting VaR models: Quantitative and Qualitative Tests“

[10] Nieppola O., „Backtesting Value-at-Risk Models“ HELSINKI SCHOOL OF ECONOMICS, 2009.

[11] Wong W. K., „Backtesting tradng risk of commercial banks using expected shortfall“ Journal of Banking and FInance 32, (2008.) 1404–1415

[12] Kerkhof J., Melenberg B., „Backtesting for risk-based regulatory capital“, Journal of Banking & Finance 28 (2004.) 1845–1865

Biografija

Jovan Jokanović je rođen 27.9.1987. u Bečeju. Osnovnu školu ,,Šamu Mihalj'' završio u Bečeju kao nosilac Vukove diplome. Srednju Tehničku školu je 2006. takođe završio u Bečeju, odličnim uspehom i nagradom đaka generacije sa priznanjem Ministarstva prosvete i kraljevske porodice Karađorđević. Iste godine upisao osnovne akademske studije na Prirodnomatematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer finansijska matematika. Osnovne studije završio 2010. godine sa prosekom 8.46. 2010. godine je upisao master studije na istom fakultetu na smeru primenjene matematike i položio sve ispite predviđene planom i programom zaključno sa junskim ispitnim rokom 2011. godine.

UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: master rad

VR

Autor: Jovan Jokanović

AU

Mentor: dr Miloš Božović

ME

Naslov rada: Testiranje predviđanja za očekivani gubitak

NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s / en

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2013.

GO

Izdavač: autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Bečej, Nikole Aleksića 73

MA

Fizički opis rada: (5/59/0/5/0/13/1)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)

FO:

Naučna oblast: primenjena matematika

NO

Naučna disciplina: finansije

ND

Ključne reči: očekivani gubitak (ES ili CVaR), vrednost pod rizikom VaR, testiranje, tržišni rizik, riziko mera, akcije, portfolio

PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodnomatematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: Ovaj master rad se bavi testiranjem finansijskog modela očekivanog gubitka koji se koristi u određivanju rezervacije kapitala za tržišni rizik finansijskih institucija. Iznete su dve metode za određivanje tačnosti ove riziko mere i testirane na uzorku vrednosti portfolija. Dobijeni su rezultati i uspešno je pokazano funkcionisanje testiranja.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 10.05.2012.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

ČK

Predsednik: dr Nataša Krejić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Zorana Lužanin, redovni profesor Prirodnomatematičkog fakulteta u Novom Sadu

Mentor: dr Miloš Božović, docent Ekonomskog fakulteta u Beogradu

UNIVERSITY OF NOVI SAD

FACULTY OF SCIENCE

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identication number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master's thesis

CC

Author: Jovan Jokanović

AU

Mentor: dr Miloš Božović

MN

Title: Backtesting of Expected Shortfall

TI

Language of text: Serbian (Latin)

LT

Language of abstract: s / en

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2013

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publication place: Bečej, Nikole Aleksića 73

PP

Physical description: (5/59/0/5/0/13/1)(chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)

PD

Scientic field: Applied Mathematics

SF

Scientic discipline: Finance

SD

Subject/Key words: Expected shortfall (ES or CVaR), Value at Risk (VaR), backesting, market risk, risk measure, stock, portfolio

SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract: This master thesis deals with backtesting of a financial model called expected shortfall, that is used in determining the reserved capital for market risk of financial institutions. The paper outlines two methods for determining the accuracy of this risk measure and theirs procedure on a sample of portfolio values. Results are obtained and successfully demonstrated the functioning of testing.

AB

Accepted by the Scientic Board on: 10.05.2012.

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President: Natašsa Krejić, PhD. Full Professor , Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Zorana Lužanin, PhD. Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Mentor: Miloš Božović, PhD. Assistant Professor, Faculty of Economics, University of Belgrade