UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

SUGENOV I ŠOKEOV INTEGRAL SA PRIMENOM U OBRADI SLIKA

-MASTER RAD-

Mentor:
dr Mirjana Štrboja

Student:
Jelena Popov 23m/12

Novi Sad, 2015.

Sadržaj

Predgovor ... 3

1. Osnovni pojmovi ... 5

1.1. Vrste monotonih skupovnih funkcija ... 8

1.2. Sugenov integral ... 16

1.2.1. Osobine Sugenovog integrala ... 20

1.3. Šokeov integral ... 27

1.3.1. Osobine Šokeovog integrala ... 28

1.3.2. Izračunavanje Šokeovog integrala na konačnom skupu ... 31

2. Funkcije agregacije ... 32

2.1. Najpoznatije funkcije agregacije ... 35

2.2. Osnovne matematičke osobine ... 37

2.2.1. Monotonost ... 37

2.2.2. Neprekidnost ... 38

2.2.3. Simetričnost ... 42

2.2.4. Idempotentnost ... 42

2.3. Šokeov integral kao funkcija agregacije ... 43

2.4. Sugenov integral kao funkcija agregacije ... 44

3. Primena Sugenovog i Šokeovog integrala u obradi slika ... 48

3.1. Sugenov i Šokeov integral kao filter za uklanjanje šuma ... 48

3.2. Sugenov i Šokeov integral u prepoznavanju oblika ... 50

3.3. Algoritmi za identifikaciju monotonih mera ... 53

Zaključak ... 59

Literatura ... 60

Predgovor

Uopštena teorija mere nastala je uopštavanjem klasične teorije mere. Klasične mere su nenegativne skupovne funkcije sa vrednostima na skupu realnih brojeva, koje su definisane na određenoj klasi podskupova datog univerzalnog skupa, koje mogu zadovoljavati određene uslove [10],[14]. Glavna karakteristika klasičnih mera je uslov prebrojive aditivnosti. Osobina aditivnosti se u nekim slučajevima pokazala suviše restriktivno pa se javila potreba da se uvede nova, šira klasa skupovnih funkcija kod koje se pretpostavlja samo uslov monotonosti. Kada se uslov aditivnosti zameni nizom uslova koji su, kao celina, slabiji od prebrojive aditivnosti, dobija se klasa skupovnih funkcija koje su opštije od klasičnih mera i koje se takođe nazivaju mere. Dakle, uopštena teorija mere koja se još naziva i teorija fazi mere razmatra uopštenje mere čije je aditivno svojstvo zamenjeno slabijim svojstvom monotonosti. Kako se uopštena teorija mere bavi raznim vrstama mera, značenje termina *mera* u uopštenoj teoriji mere je znatno širi od svog originalnog značenja u klasičnoj teoriji mere. Svaki pridev koji karakteriše određenu meru, dodaje se ispred naziva *mera*, pa ćemo u ovom radu, za mere iz klasične teorije mere, koristiti termin *klasične mere* ili *aditivne mere* [14].

Klasične mere imaju svoje korene u metričkoj geometriji koji su okarakterisani dodeljivanjem brojeva dužini, površini ili zapremini. Ovaj proces dodeljivanja, ili *merenja*, prvobitno je predstavljen samo kao poređenje sa standardnom mernom jedinicom i zahtevao je da dodeljeni broj bude invarijantan u odnosu na geometrijski objekat. Problem merenja dužine dijagonale kvadrata čije su dužine stranica jednake jedinici, doveo je do zaključka da je problem daleko komplikovaniji od ovog jednostavnog procesa i da merenja zahtevaju beskonačne skupove i beskonačne procese. U devetnaestom veku razvijen je *integralni račun*, baziran na Rimanovom integralu, koji je mogao da se nosi sa ovim problemom. Međutim, Rimanov integral imao je brojne nedostatke među kojima je njegova primena samo na funkcijama koje su neprekidne osim u konačnom broju tačaka, osnovne operacije diferenciranja i integracije nisu reverzibilne u kontekstu Rimanove teorije integracije itd. Javila se potreba za preciznijim matematičkim analizama i nametnula nova pitanja u vezi merenja. Na primer, ako posmatramo skup realnih brojeva između 0 i 1 na realnoj pravoj i uklonimo krajnje tačke skupa, 0 i 1, šta je mera preostalog skupa (ili dužina preostalog otvorenog intervala na realnoj pravoj). Francuski matematičar Emil Borel je dao odgovor na ovo pitanje i razvio teoriju koju mi danas nazivamo *klasična teorija mere.* U drugoj polovini devetnaestog veka došlo je do sve većeg interesovanja za funkcijama čije su vrednosti iz skupa realnih brojeva, posebno u kontekstu integracije [14].

Francuski matematičar Gustavo Šoke, predložio je najraniji izazov klasične teorije mere iz *teorije kapaciteta*. Šokeov kapacitet je funkcija sa vrednostima iz skupa realnih brojeva, koja je definisana na klasi podskupova datog univerzalnog skupa, koja je monotono rastuća u odnosu na inkluziju i koja, u zavisnosti od vrste kapaciteta, ima jos jednu dodatnu osobinu [14].

Drugi doprinos u razvoju uopštene teorije mere, učinio je istaknuti japanski naučnik Mihio Sugeno kada je pokušao da da vezu između funkcije pripadnosti fazi skupova sa verovatnoćom. Kako to nije bilo moguće, Sugeno je uopštenje klasične mere u neaditivne mere posmatrao analogno uopštenju klasičnih skupova u fazi skupove. Koristeći ovu analogiju, dodelio je neaditivnim merama naziv *fazi mere*. Na osnovu Sugenove teorije, fazi mere su dobijene kada je uslov aditivnosti klasičnih mera zamenjen slabijim uslovima rastuće monotonosti u odnosu na inkluziju i neprekidnošću [14].

U prvom delu rada biće dati osnovni pojmovi vezani za monotone (neaditivne, fazi) mere na kojima su bazirani integrali koje ćemo posmatrati u nastavku rada. Zatim će biti navedena definicija i osobine prvo Sugenovog, a zatim i Šokeovog integrala [9],[14].

Drugi deo rada će se baviti funkcijama agregacije. Prvo će biti data definicija funkcije agregacije sa osnovnim osobinama, a zatim će biti navedeni neki primeri ovih funkcija. Takođe će biti istaknuto koje uslove treba da zadovoljava monotona mera da bi se Sugenov i Šokeov integral svodili na minimum, maksimum, projekciju, ponderisanu aritmetičku sredinu itd. Monotona mera, posmatrana kao neaditivna mera, može poslužiti da se definiše novi integtal. Šokeov integral je upravo sinonim Lebegovog integrala kada je mera neaditivna [4].

Poslednji deo rada biće posvećen primeni Sugenovog i Šokeovog integrala u određenim fazama obrade slike koje su bazirane na fuziji podataka i donošenju odluka. Uprkos uspešnoj primeni metoda koje su zasnovane na ovim integralima, njihova praktična primena može biti veoma komplikovana. Naime, sam odabir odgovarajuće monotone mere, na kojoj se baziraju pomenuti integrali, može biti veoma zahtevan i komplikovan. Stoga su razvijeni mnogi algoritmi koji olakšavaju identifikaciju neaditivnih mera i koji se uspešno primenjuju u praksi. Algoritmi koji će biti opisani se zasnivaju na osobini da se vrednosti monotonih mera u konačnom i diskretnom slučaju mogu predstaviti u obliku rešetke [6],[11]. Unutar tih algoritama se formule iterativnih postupaka, kojima se procenjuje fazi mera, razlikuju. Takođe će biti dato poređenje rezultata dobijenih pomoću metoda baziranih na pomenutim integralima sa drugim metodama koje se koriste prilikom obrade slika [1],[8],[13].

Posebnu zahvalnost u odabiru teme i izradi master rada dugujem svojoj mentorki, dr Mirjani Štrboji, koja mi je u svakom trenutku pomagala, savetovala i pružala podršku.

Takođe se zahvaljujem i članovima komisije, dr Arpadu Takačiju i dr Ivani Štajner-Papugi koji su svojim komentarima i sugestijama doprineli upotpunjavanju ovog rada.

1. Osnovni pojmovi

Najpre ćemo uvesti pojam opšte mere, a zatim dati osnovne pojmove vezane za monotone mere na kojima su bazirani Šokeov i Sugenov integral. Takođe ćemo navesti definicije i osobine tih itegrala [9], [14].

Neka je X neprazan skup koga nazivamo univerzalni skup. Sa $\boldsymbol{C}$ ćemo označiti nepraznu klasu podskupova skupa X koja može biti poluprsten, prsten, algebra ili σ-algebra. $\mu : \boldsymbol{C} \to [0, \infty]$ će označavati nenegativnu skupovnu funkciju sa vrednostima u proširenom skupu realnih brojeva definisanu na $\boldsymbol{C}$ koja poseduje neke dodatne osobine kao što su monotonost u odnosu na inkluziju, neprekidnost, poluneprekidnost,... Koristićemo sledeće jednakosti:

$$sup_{x\in\emptyset}\{x|x \in [0,\infty]\} = 0,$$

$$inf_{x\in\emptyset}\{x|x \in [0,1]\} = 1,$$

$$0 \times \infty = \infty \times 0 = 0,$$

$$\frac{1}{\infty} = 0,$$

$$\infty - \infty = 0,$$

$$\sum_{i\in\emptyset} a_i = 0,$$

gde je $\{a_i\}$ niz realnih brojeva.

Definicija 1.1.[14] Skupovna funkcija $\mu : \boldsymbol{C} \to [0, \infty]$ naziva se *opšta mera* na $(X, \boldsymbol{C})$ ako je $\mu(\emptyset) = 0$ kada je $\emptyset \in \boldsymbol{C}$.

Dakle, pojam mera ne odnosi se na meru u klasičnom smislu nego predstavlja skupovnu funkciju ali se termin mera koristi zbog jednostavnosti i lakšeg čitanja.

Klasa $\boldsymbol{C}$ na kojoj je μ definisano može biti monotona klasa, poluprsten, prsten, algebra, σ-prsten, σ-algebra ili partitivni skup skupa X.

Uređeni par $(X, \boldsymbol{F})$ je *merljiv prostor* pri čemu $\boldsymbol{F}$ predstavlja σ-prsten (σ-algebru), a uređena trojka $(X, \boldsymbol{F}, \mu)$ je *prostor sa opštom merom* pri čemu μ predstavlja opštu meru.

Definicija 1.2.[14] Skupovna funkcija $\mu : \boldsymbol{C} \to [0, \infty]$ naziva se *monotona mera* na $(X, \boldsymbol{C})$ ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

(MM1) $\mu(\emptyset) = 0$ kada $\emptyset \in \boldsymbol{C}$

(MM2) $E \in \boldsymbol{C}$, $F \in \boldsymbol{C}$ i $E \subset F$ sledi $\mu(E) \leq \mu(F)$ (monotonost).

Napomenimo da se u ovom radu pod pojmom monotona mera u stvari podrazumeva samo monotona skupovna funkcija koja ima još osobinu da je njena vrednost na praznom skupu nula.

Primer 1.1: Posmatrajmo merljiv prostor $(X, \boldsymbol{C})$ gde je $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}(X)$ i $X = \{a, b, c\}$. Skupovna funkcija μ definisana na sledeći način:

$$\mu(\emptyset) = 0,$$

$$\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = \mu(\{c\}) = 0.2,$$

$$\mu(\{a, b\}) = \mu(\{a, c\}) = 0.4,$$

$$\mu(\{b, c\}) = 0.5,$$

$$\mu(X) = 1,$$

je monotona mera na $\left(X, \boldsymbol{P}(X)\right)$.

U okviru primene, poželjno je da monotone mere zadovoljavaju još neke uslove.

Ukoliko monotone mere zadovoljavaju uslov

(CB) $\{E_n\} \subset \boldsymbol{C}$, $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$, i $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \boldsymbol{C}$ sledi

$$lim_n\, \mu(E_n) = \mu(\textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \text{ (neprekidnost od dole)}$$

nazivamo ih *poluneprekidne odozdo* (ili *donje poluneprekidne monotone mere*).

Ukoliko monotone mere zadovoljavaju uslov

(CA) $\{E_n\} \subset \boldsymbol{C}$, $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$, $\mu(E_1) < \infty$, i $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \boldsymbol{C}$ sledi

$$lim_n\, \mu(E_n) = \mu(\textstyle\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) \text{ (neprekidnost od gore)}$$

nazivamo ih *poluneprekidne odozgo* (ili *gornje poluneprekidne monotone mere*).

Monotone mere koje zadovoljavaju oba uslova nazivamo *neprekidne monotone mere*.

Definicija 1.3.[14] Monotona mera μ na $(X, \boldsymbol{C})$ je *normirana* ako je $X \in \boldsymbol{C}$ i $\mu(X) = 1$.

Monotona mera μ data u *Primeru 1.1* je normirana monotona mera.

Ako je monotona mera definisana kao zbir ili proizvod druge dve neprekidne, konačne ili σ-konačne monotone mere, tada je i ona sama neprekidna, konačna ili σ-konačna monotona mera. Preciznije tvrđenje dato je u sledećoj lemi.

Lema 1.1.[14] Ako su μ_1 i μ_2 neprekidne, nenegativne, skupovne funkcije na $(X, \boldsymbol{C})$ sa vrednostima u proširenom skupu realnih brojeva i $\mu_1 + \mu_2$ i $\mu_1 \times \mu_2$ definisani na sledeći način

$$(\mu_1 + \mu_2)(E) = \mu_1(E) + \mu_2(E) \text{ i}$$

$$(\mu_1 \times \mu_2)(E) = \mu_1(E) \times \mu_2(E)$$

za sve $E \in \boldsymbol{C}$, tada su i $\mu_1 + \mu_2$ i $\mu_1 \times \mu_2$ neprekidne. Ako su μ_1 i μ_2 konačne ili σ-konačne monotone mere (ili poluneprekidne monotone mere) tada su i $\mu_1 + \mu_2$ i $\mu_1 \times \mu_2$ takođe.

Za svaku normiranu monotonu meru μ na $(X, \boldsymbol{C})$, pri čemu pretpostavljamo da je $\boldsymbol{C}$ zatvoren u odnosu na komplement i sadrži $\emptyset$ i X, možemo definisati drugu monotonu meru ν, takvu da je

$$\nu(A) = 1 - \mu(\bar{A})$$

za sve $A \in \boldsymbol{C}$, i nazivamo je *dual monotone mere* μ.

Dual bilo koje aditivne mere je baš ta mera, tj. aditivne mere su *autoduali*. Za bilo koju normiranu aditivnu meru μ, njen dual ν je takođe normirana monotona mera, a takođe važi i da je dual normirane, monotone i donje poluneprekidne mere normirana, monotona i gornje poluneprekidna mera.

Neka je $A \in \boldsymbol{C}$, $B \in \boldsymbol{C}$, $A \cap B \in \boldsymbol{C}$ i $A \cup B \in \boldsymbol{C}$. Tada, za bilo koju monotonu meru μ na $(X, \boldsymbol{C})$, važi

$$\mu(A \cap B) \leq min\big(\mu(A), \mu(B)\big),$$

$$\mu(A \cup B) \geq max\big(\mu(A), \mu(B)\big).$$

Ove nejednakosti slede iz monotonosti μ i činjenice da je $A \cap B \subset A$ i $A \cap B \subset B$ kao i $A \cup B \supset A$ i $A \cup B \supset B$.

Iz *Definicije 1.2*, vidimo da su, tako definisane, monotone mere *rastuće* skupovne funkcije. Ako uslov $(MM2)$ zamenimo uslovom

$(MM2')$ $\qquad E \in \boldsymbol{C}, F \in \boldsymbol{C}, E \subset F$ sledi $\mu(E) \geq \mu(F)$

dobićemo monotonu *opadajuću* skupovnu funkciju.

Suštinska razlika između ove dve vrste skupovnih funkcija je ta što uslov $(MM2')$ nije mera jer ne zadovoljava uslov $(MM1)$ opšte mere.

U primeru koji sledi date su monotone mere na $(X, \boldsymbol{P}(X))$ koje ćemo koristiti kasnije u radu.

Primer:

1) Najmanja normirana monotona mera je $\mu_{min}(A) := 0$, $\forall A \subsetneq X$.
2) Najveća normirana monotona mera je $\mu_{max}(A) := 1$, $\forall A \subseteq X$, $\forall A \neq \emptyset$.
3) Za svako $i \in X$, Dirakova mera centrirana na i je definisana kao

$$\delta_i(A) = \begin{cases} 1, & ako\ i \in A, \\ 0, & inače \end{cases}$$

za svako $A \subseteq X$.

4) Za svaki ceo broj k, $1 \leq k \leq n$, *mera praga* τ_k definiše se kao

$$\tau_k(A) := \begin{cases} 1, & ako\ je\ |A| \geq k \\ 0, & inače. \end{cases}$$

1.1. Vrste monotonih skupovnih funkcija

Sa stanovišta aditivnosti, monotone mere možemo klasifikovati u četiri klase:

1. aditivne mere
2. superaditivne mere
3. subaditivne mere
4. aditivne mere koje ne pripadaju ni jednoj od prethodne tri klase.

Definicija 1.4.[14] Neka je $A \cup B \in \boldsymbol{C}$, $A \in \boldsymbol{C}$, $B \in \boldsymbol{C}$ i $A \cap B = \emptyset$. Monotona mera μ na $(X, \boldsymbol{C})$ je:

a) *aditivna* ako važi

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B),$$

b) *simetrična* ako važi

$$|A| = |B| \text{ implicira da je } \mu(A) = \mu(B),$$

c) *maksitivna* (eng. maxitive) ako važi

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) \vee \mu(B),$$

d) *minitivna* (eng. minitive) ako važi

$$\mu(A \cap B) = \mu(A) \wedge \mu(B).$$

Definicija 1.5.[14] Neka je $A \in \boldsymbol{C}$, $B \in \boldsymbol{C}$, $A \cap B = \emptyset$ i $\mu(B) = 0$. $\mu: \boldsymbol{C} \to [-\infty, \infty]$ je *nula aditivna* ako važi

$$\mu(A \cup B) = \mu(A).$$

U uopštenoj teoriji mere, superaditivne i subaditivne mere su od velike važnosti. Naime, pomoću superaditivnih mera je moguće izraziti zajednički uticaj dva skupa u smislu osobine čiju vrednost (meru) one određuju, dok je pomoću subaditivnih mera moguće izraziti nekompatibilnost između skupova u smislu osobina čiju meru ove skupovne funkcije predstavljaju. Pomoću aditivnih mera nije moguće izraziti bilo koji od ovih interaktivnih efekata, one se mogu primeniti samo u situaciji kada ne postoji interakcija između skupova koji predstavljaju osobine kojima se dodeljuje neka vrednost (mera).

Definicija 1.6.[14] Neka je $A \cup B \in \boldsymbol{C}$, $A \in \boldsymbol{C}$, $B \in \boldsymbol{C}$ i $A \cap B = \emptyset$. Monotona mera μ na $(X, \boldsymbol{C})$ je *superaditivna* ako važi

$$\mu(A \cup B) \geq \mu(A) + \mu(B).$$

Definicija 1.7.[14] Neka je $A \cup B \in \boldsymbol{C}$, $A \in \boldsymbol{C}$ i $B \in \boldsymbol{C}$. Monotona mera μ na $(X, \boldsymbol{C})$ je *subaditivna* ako važi

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

λ-mera ima široku primenu u mnogim oblastima među kojima je obrada slika, posebno u procesima restauracije slika, prepoznavanju oblika na slikama i drugim problemima vezanim za donošenje odluka. Za definisanje ove vrste monotone mere potreban nam je pojam λ-uslova.

Definicija 1.8.[14] Monotona mera μ zadovoljava *λ-uslov* na **C** ako postoji

$$\lambda \in \left(-\frac{1}{sup\mu}, \infty\right) \cup \{0\},$$

gde je $sup\mu = sup_{E \in \boldsymbol{C}} \mu(E)$, tako da važi

$$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F) + \lambda \cdot \mu(E) \cdot \mu(F),$$

kada je $E \in \boldsymbol{C}$, $F \in \boldsymbol{C}$, $E \cup F \in \boldsymbol{C}$ i $E \cap F = \emptyset$.

Monotona mera μ zadovoljava *konačan λ-uslov* na $\boldsymbol{C}$ ako postoji λ takvo da je

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\left(\prod_{i=1}^{n}\big(1 + \lambda \cdot \mu(E_i)\big) - 1\right), & \text{za } \lambda \neq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i), & \text{za } \lambda = 0 \end{cases}$$

za bilo koju konačnu klasu disjunktnih skupova $\{E_1, \dots, E_n\}$ u **C**, čija je unija takođe u **C**.

Monotona mera μ zadovoljava *σ-λ-uslov* na $\boldsymbol{C}$ ako postoji λ takvo da je

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\left(\prod_{i=1}^{\infty}\left(1+\lambda\cdot\mu(E_i)\right)-1\right), & \text{za } \lambda \neq 0 \\ \sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i), & \text{za } \lambda = 0 \end{cases}$$

za bilo koji niz disjunktnih skupova $\{E_n\}$ u **C**, čija je unija takođe u **C**.

Kada je $\lambda = 0$, λ-uslov je samo aditivnost, konačan λ-uslov konačna aditivnost, σ-λ-uslov σ-aditivnost.

Teorema 1.1.[14] Ako je $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{R}$ prsten i μ zadovoljava λ-uslov, onda μ zadovoljava i konačan λ-uslov.

Dokaz: Kada je $\lambda = 0$ zaključak je očigledan. Pretpostavimo da je $\lambda \neq 0$ i $\{E_1, \dots, E_n\}$ klasa disjunktnih skupova u $\boldsymbol{R}$, i matematičkom indukcijom dokažimo da važi

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \frac{1}{\lambda}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(1+\lambda\cdot\mu(E_i)\right)-1\right).$$

Iz definicije sledi da važi za $n = 2$. Pretpostavimo da važi i za $n = k-1$. Dokažimo da važi i za $n = k$:

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) &= \mu\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i\right)\cup E_k\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i\right) + \mu(E_k) + \lambda\cdot\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i\right)\cdot\mu(E_k) \\
&= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i\right)\cdot\left(1+\lambda\cdot\mu(E_k)\right) + \mu(E_k) \\
&= \frac{1}{\lambda}\left(\prod_{i=1}^{k-1}\left(1+\lambda\cdot\mu(E_i)\right)-1\right)\cdot\left(1+\lambda\cdot\mu(E_k)\right) + \mu(E_k) \\
&= \frac{1}{\lambda}\left(\prod_{i=1}^{k}\left(1+\lambda\cdot\mu(E_i)\right)-\left(1+\lambda\cdot\mu(E_k)\right)\right) + \mu(E_k) \\
&= \frac{1}{\lambda}\left(\prod_{i=1}^{k}\left(1+\lambda\cdot\mu(E_i)\right)-\left(1+\lambda\cdot\mu(E_k)\right)+\lambda\cdot\mu(E_k)\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(\prod_{i=1}^{k}\big(1 + \lambda \cdot \mu(E_i)\big) - 1\right).$$

Definicija 1.9.[14] μ je *λ-mera* na $\boldsymbol{C}$ ako zadovoljava σ-λ-uslov na $\boldsymbol{C}$ i postoji najmanje jedan skup $E \in \boldsymbol{C}$, takav da je $\mu(E) < \infty$.

λ-meru označavamo sa g_λ, a kada je $\boldsymbol{C}$ σ-algebra i $g_\lambda(X) = 1$, λ-meru g_λ nazivamo *Sugenova mera*.

Teorema 1.2.[14] Ako je g_λ λ-mera na klasi $\boldsymbol{C}$ koja sadrži prazan skup $\emptyset$, tada važi

$$g_\lambda(\emptyset) = 0$$

i g_λ zadovoljava konačan λ-uslov.

Dokaz: Ako je g_λ λ-mera, na osnovu *Definicije 1.9* postoji skup $E \in \boldsymbol{C}$ takav da je $g_\lambda(E) < \infty$. U slučaju kada je $\lambda = 0$, g_λ je klasična mera i važi $g_\lambda(\emptyset) = 0$. U slučaju kada je $\lambda \neq 0$, $\{E, E_2, E_3, \dots\}$ je niz disjunktnih skupova u $\boldsymbol{C}$ čija je unija E, pri čemu je $E_2 = E_3 = \cdots = \emptyset$, imamo da je

$$g_\lambda(E) = \frac{1}{\lambda}\left(\prod_{i=2}^{\infty}\big(1 + \lambda \cdot g_\lambda(E_i)\big) \cdot \big(1 + \lambda \cdot g_\lambda(E)\big) - 1\right),$$

gde je $E_i = \emptyset$, $i = 2,3, \dots$ Ako malo sredimo izraz, dobijamo da je

$$1 + \lambda \cdot g_\lambda(E) = \big(1 + \lambda \cdot g_\lambda(E)\big) \cdot \left(\prod_{i=2}^{\infty}\big(1 + \lambda \cdot g_\lambda(E_i)\big)\right).$$

Iz činjenice da $\lambda \in (-1/sup g_\lambda, \infty)$ i $g_\lambda < \infty$, sledi da je

$$0 < 1 + \lambda \cdot g_\lambda(E) < \infty$$

pa imamo da je

$$\prod_{i=2}^{\infty}\big(1 + \lambda \cdot g_\lambda(E_i)\big) = 1$$

odakle sledi

$$1 + \lambda \cdot g_\lambda(\emptyset) = 1$$

što implicira da je

$$g_\lambda(\emptyset) = 0.$$

Teorema 1.3.[14] Ako je g_λ λ-mera na poluprstenu $\boldsymbol{S}$, onda je g_λ *monotona*.

Dokaz: Kada je $\lambda = 0$, mislimo na monotonost klasičnih mera. U slučaju kada je $\lambda \neq 0$, $E \in \boldsymbol{S}$, $F \in \boldsymbol{S}$ i $E \subset F$, kako je $\boldsymbol{S}$ poluprsten, $F - E = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, pri čemu je $\{D_i\}$ konačna klasa disjunktnih skupova iz $\boldsymbol{S}$, važi

$$\frac{1}{\lambda}\left(\prod_{i=1}^{n}\big(1 + \lambda \cdot g_\lambda(D_1)\big) - 1\right) \geq 0$$

i za $\lambda > 0$ i za $\lambda < 0$. Na osnovu *Teoreme 1.2*, g_λ zadovoljava konačan λ-uslov pa važi

$$\begin{aligned}
g_\lambda(F) &= g_\lambda(E \cup D_1 \cup \dots \cup D_n)\\
&= \frac{1}{\lambda}\left(\prod_{i=1}^{n}\big(1 + \lambda \cdot g_\lambda(D_1)\big) \cdot \big(1 + \lambda \cdot g_\lambda(E)\big) - 1\right)\\
&= g_\lambda(E) + \frac{1}{\lambda}\left(\prod_{i=1}^{n}\big(1 + \lambda \cdot g_\lambda(D_1)\big) - 1\right)\big(1 + \lambda \cdot g_\lambda(E)\big)\\
&\geq g_\lambda(E).
\end{aligned}$$

Na osnovu *Teoreme 1.2*, *Teoreme 1.3* i činjenice da su λ-mere neprekidne, zaključujemo da je bilo koja λ-mera na poluprstenu monotona mera.

Teorema 1.4.[14] Neka je g_λ λ-mera na poluprstenu $\boldsymbol{S}$. Ona je subaditivna kada je $\lambda < 0$, superaditivna kada je $\lambda > 0$ i aditivna kada je $\lambda = 0$.

Teorema 1.5.[14] Neka je g_λ λ-mera na prstenu $\boldsymbol{R}$, $E \in \boldsymbol{R}$ i $F \in \boldsymbol{R}$. Tada važi:

1. $g_\lambda(E - F) = \frac{g_\lambda(E) - g_\lambda(E \cap F)}{1 + \lambda \cdot g_\lambda(E \cap F)}$
2. $g_\lambda(E \cup F) = \frac{g_\lambda(E) + g_\lambda(F) - g_\lambda(E \cap F) + \lambda \cdot g_\lambda(E) \cdot g_\lambda(F)}{1 + \lambda \cdot g_\lambda(E \cap F)}$

Ako je $\boldsymbol{R}$ algebra i g_λ je normirana, važi i:

3. $g_\lambda(\bar{E}) = \frac{1 - g_\lambda(E)}{1 + \lambda \cdot g_\lambda(E)}$.

Dokaz: 1. Kako je

$$\begin{aligned}
g_\lambda(E) &= g_\lambda\big((E \cap F) \cup (E - F)\big)\\
&= g_\lambda(E \cap F) + g_\lambda(E - F) + \lambda \cdot g_\lambda(E \cap F) \cdot g_\lambda(E - F)\\
&= g_\lambda(E \cap F) + g_\lambda(E - F)\big(1 + \lambda \cdot g_\lambda(E \cap F)\big)
\end{aligned}$$

sledi da je

$$g_\lambda(E-F)=\frac{g_\lambda(E)-g_\lambda(E\cap F)}{1+\lambda\cdot g_\lambda(E\cap F)}.$$

2. Kako je

$$\begin{aligned}g_\lambda(E\cup F)&=g_\lambda\Big(E\cup\big(F-(E\cap F)\big)\Big)\\&=g_\lambda(E)+g_\lambda\big(F-(E\cap F)\big)\cdot\big(1+\lambda\cdot g_\lambda(E)\big)\\&=g_\lambda(E)+\frac{g_\lambda(F)-g_\lambda(E\cap F)}{1+\lambda\cdot g_\lambda(E\cap F)}\cdot\big(1+\lambda\cdot g_\lambda(E)\big)\end{aligned}$$

sledi da je

$$g_\lambda(E\cup F)=\frac{g_\lambda(E)+g_\lambda(F)-g_\lambda(E\cap F)+\lambda\cdot g_\lambda(E)\cdot g_\lambda(F)}{1+\lambda\cdot g_\lambda(E\cap F)}.$$

3. Da važi

$$g_\lambda(\bar{E})=\frac{1-g_\lambda(E)}{1+\lambda\cdot g_\lambda(E)}$$

zaključujemo iz dokaza 1. i toga da je g_λ normirana.

Značajan i zanimljiv problem je kako konstruisati λ-meru na poluprstenu (ili prstenu, algebri, σ-prstenu, σ-algebri).

Ako je $X=\{x_1,\dots,x_n\}$ konačan skup, klasu $\boldsymbol{C}$ čine skup X i svi njegovi jednoelementni podskupovi, monotona mera μ definisana na $\boldsymbol{C}$ tako da važe sledeći uslovi:

1. $\mu(\{x_i\})<\mu(X)<\infty$ za $i=1,2,\dots,n$ i
2. postoje najmanje dve tačke x_{i_1} i x_{i_2} takve da zadovoljavaju $\mu\left(\left\{x_{i_j}\right\}\right)>0,\ j=1,2,$

onda je takva funkcija μ uvek λ-mera na $\boldsymbol{C}$ za neki parametar λ. U slučaju kada je $\mu(X)=\sum_{i=1}^{n}\mu(\{x_i\})$, $\lambda=0$, u suprotnom, λ se može odrediti izrazom

$$\mu(X)=\frac{1}{\lambda}\left(\prod_{i=1}^{n}\big(1+\lambda\cdot\mu(\{x_i\})\big)-1\right).$$

Nešto više, govori nam sledeća teorema.

Teorema 1.6.[14] Pod gore pomenutim uslovom, jednačina

$$1+\lambda\cdot\mu(X)=\prod_{i=1}^{n}\big(1+\lambda\cdot\mu(\{x_i\})\big)$$

jedinstveno određuje parametar λ na sledeći način:

1. $\lambda > 0$ kada je $\sum_{i=1}^{n} \mu(\{x_i\}) < \mu(X)$;
2. $\lambda = 0$ kada je $\sum_{i=1}^{n} \mu(\{x_i\}) = \mu(X)$;
3. $-\frac{1}{\mu(X)} < \lambda < 0$ kada je $\sum_{i=1}^{n} \mu(\{x_i\}) > \mu(X)$.

Dokaz: Označimo sa $a = \mu(X)$, $a_i = \mu(\{x_i\})$ za $i = 1,2, \dots, n$, i $f_k(\lambda) = \prod_{i=1}^{k}(1 + \lambda \cdot a_i)$ za $k = 2,3, \dots, n$. Bez gubitka opštosti, pretpostavimo da je $a_1 > 0$ i $a_2 > 0$. Iz datog uslova znamo da je $(1 + \lambda \cdot a_k) > 0$ za $k = 1, .., n$ i bilo koje $\lambda \in (-1/a\,, \infty)$. Kako je

$$f_k(\lambda) = \prod_{i=1}^{k-1}(1 + \lambda \cdot a_i)\,(1 + \lambda \cdot a_k) = (1 + \lambda \cdot a_k) f_{k-1}(\lambda),$$

imamo

$$f_k'(\lambda) = a_k \cdot f_{k-1}(\lambda) + (1 + \lambda \cdot a_k) f_{k-1}'(\lambda)$$

i

$$f_k''(\lambda) = 2a_k \cdot f_{k-1}'(\lambda) + (1 + \lambda \cdot a_k) f_{k-1}''(\lambda).$$

Za bilo koje $k = 2, \dots, n$ i bilo koje $\lambda \in (-1/a\,, \infty)$, kada je $f_{k-1}'(\lambda) > 0$ važi da je i $f_{k-1}''(\lambda) > 0$, i kada je $f_k'(\lambda) > 0$ važi da je i $f_k''(\lambda) > 0$. Dakle

$$f_2'(\lambda) = a_1(1 + \lambda \cdot a_2) + a_2(1 + \lambda \cdot a_1) > 0$$

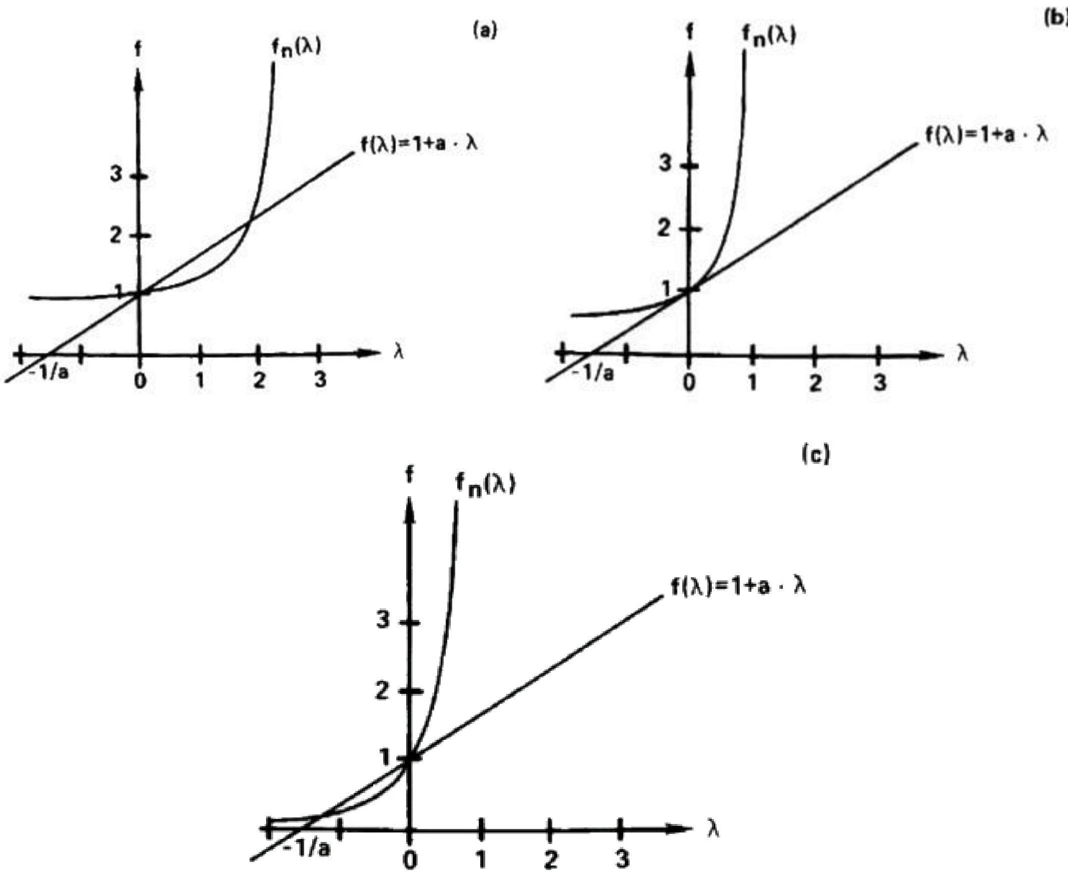
i

$$f_2''(\lambda) = 2a_1a_2 > 0,$$

znamo da je $f_k''(\lambda) > 0$. To znači da je funkcija $f_n(\lambda)$ konveksna na intervalu $(-1/a\,, \infty)$. Iz izvoda funkcije $f_n(\lambda)$ sledi

$$f_n'(0) = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Kako je $lim_{\lambda \to \infty} f_n(\lambda) = \infty$, znamo da, ako je $\sum_{i=1}^{n} a_i < a$, tada kriva funkcije $f_n(\lambda)$ ima jedinstvenu tačku preseka sa pravom $f(\lambda) = 1 + \lambda \cdot a$ za neko $\lambda > 0$ (*Slika 1.1 a)*). Ako je $\sum_{i=1}^{n} a_i = a$, tada je prava $f(\lambda) = 1 + \lambda \cdot a$ samo tangenta na $f_n(\lambda)$ u tački $\lambda = 0$ i nema drugih tačaka preseka sa krivom $f_n(\lambda)$ (*Slika 1.1 b)*). Ako je $\sum_{i=1}^{n} a_i > a$, a znamo da je $f_n'(\lambda) > 0$ i $f(\lambda) = 1 + \lambda \cdot a \leq 0$ kada je $\lambda \leq -1/a$, kriva $f_n(\lambda)$ mora imati jedinstvenu tačku preseka sa pravom $f(\lambda) = 1 + \lambda \cdot a$ za neko $\lambda \in (-1/a\,, \infty)$ (*Slika 1.1 c)*) i time je dokaz završen.



Slika 1.1.[14] Jedinstvenost parametra λ

Posmatraćemo σ-prsten $\boldsymbol{F}$ kao klasu $\boldsymbol{C}$.

Teorema 1.7.[14] Ako je μ konačna monotona mera, onda važi

$$\lim_n \mu(E_n) = \mu\left(\lim_n E_n\right)$$

za svaki niz $\{E_n\} \subset \boldsymbol{F}$ za koji $lim_n\, E_n$ postoji.

Dokaz: Neka je $\{E_n\}$ niz skupova u $\boldsymbol{F}$ čiji limesi postoje i $E = lim_n\, E_n = lim\ \ sup_n\, E_n = lim_n\, E_n = lim\ \ inf_n\, E_n$. Ako iskoristimo osobinu da je μ konačno dobijamo

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \mu\left(\limsup_n E_n\right) = \lim_n \mu\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i\right) = \limsup_n \mu\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i\right)\\ &\geq \limsup_n \mu(E_n) \geq \liminf_n \mu(E_n)\\ &\geq \liminf_n \mu\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} E_i\right) = \mu\left(\liminf_n E_n\right) = \mu(E).\end{aligned}$$

Dakle, $lim_n \, \mu(E_n)$ postoji i $lim_n \, \mu(E_n) = \mu(E)$.

Definicija 1.10.[14] Monotona mera μ je *potpuna* (engl. exhausitive) ako važi

$$\lim_n \mu(E_n) = 0$$

za bilo koji niz disjunktnih skupova$\{E_n\}$ iz $\boldsymbol{F}$.

Teorema 1.8.[14] Ako je μ konačna gornje poluneprekidna monotona mera, onda je ona potpuna.

Dokaz: Neka je $\{E_n\}$ niz disjunktnih skupova iz $\boldsymbol{F}$. Ako je $F_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i$, onda je $\{F_n\}$ opadajući niz skupova iz $\boldsymbol{F}$ i važi

$$\lim_n F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \lim_n \sup E_n = \emptyset.$$

Pošto je μ konačna gornje poluneprekidna monotona mera, ako iskoristimo osobinu da je konačna i neprekidna od gore, sledi

$$\lim_n \mu(F_n) = \mu\left(\lim_n F_n\right) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Vidimo da je

$$0 \leq \mu(E_n) \leq \mu(F_n),$$

pa dobijamo da važi

$$\lim_n \mu(E_n) = 0.$$

Posledica 1.1.[14] Svaka konačna monotona mera na merljivom prostoru je potpuna.

1.2. Sugenov integral

Japanski naučnik Mihio Sugeno 1974. godine uveo je pojam, kao i osnovne osobine, Sugenovog integrala (fazi integrala) za merljivu funkciju $f: \boldsymbol{F} \to [0,1]$ na normiranom prostoru monotone mere $(X, \boldsymbol{F}, \mu)$ [12].

Pretpostavimo da je $(X, \boldsymbol{F})$ merljiv prostor pri čemu $X \in \boldsymbol{F}$, $\mu: \boldsymbol{F} \to [0, \infty]$ je neprekidna monotona mera i $\boldsymbol{G}$ je klasa svih konačnih nenegativnih merljivih funkcija definisanih na $(X, \boldsymbol{F})$. Za svaku datu funkcija $f \in \boldsymbol{G}$, definisaćemo skupove $F_\alpha = \{x | f(x) \geq \alpha\}$ i $F_{\alpha+} = \{x | f(x) > \alpha\}$, za svako $\alpha \in [0, \infty]$. Pošto je skup vrednosti funkcije koju posmatramo interval $[0, \infty)$ koristimo

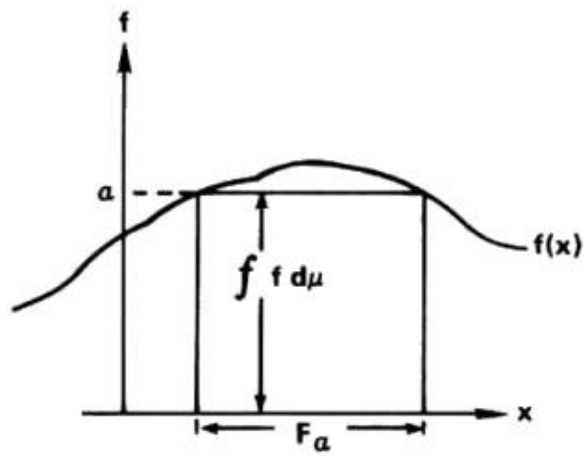
$$\inf_{x\in\emptyset} f(x) = \infty.$$

Definicija 1.11.[12] Neka $A \in \boldsymbol{F}$ i $f \in \boldsymbol{G}$. *Sugenov integral* od funkcije f na skupu A u odnosu na μ definišemo kao

$$⨍_A f d\mu = \sup_{\alpha\in[0,\infty]} \big(\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)\big).$$

Kada je $A = X$, Sugenov integral označavamo kao $⨍ f d\mu$, a u literaturi se nekad pojavljuje i pod nazivom *fazi integral.*

Dakle, smatraćemo da simbol $⨍_A f d\mu$ implicira da $A \in \boldsymbol{F}$ i $f \in \boldsymbol{G}$. Ako je $X = (-\infty, \infty)$, $\boldsymbol{F}$ Borelovo polje $\boldsymbol{B}$, monotona mera μ Lebegova mera i $f: X \to [0, \infty)$ unimodalna neprekidna funkcija, onda $⨍ f d\mu$ predstavlja dužina ivice najvećeg kvadrata između krive $f(x)$ i x-ose (*Slika 1.2*).



Slika 1.2.[14] Geometrijska interpretacija Sugenovog integrala

U praksi se najčešće primenjuje Sugenov integral na konačnom skupu. U sledećem primeru opisano je na koji način se može izračunati Sugenov integral na skupu X koji ima tri elementa.

Primer 1.2. Posmatrajmo merljiv prostor $(X, \boldsymbol{P}(X))$ gde je $X = \{a, b, c\}$. Monotona mera μ je definisana kao u *Primeru 1.1*. Neka je funkcija f definisana sa

$$f(a) = 1,$$

$$f(b) = 2,$$

$$f(c) = 3.$$

Kako je $f(a) < f(b) < f(c)$ to Sugenov integral od funkcije f na skupu X u odnosu na μ ima sledeći oblik

$$\begin{aligned} ⨍ f d\mu = \sup\Bigg(& \sup_{\alpha\in[0,f(a)]} \big(\alpha \wedge \mu(\{a,b,c\})\big), \sup_{\alpha\in[f(a),f(b)]} \big(\alpha \wedge \mu(\{b,c\})\big), \sup_{\alpha\in[f(b),f(c)]} \big(\alpha \\ & \wedge \mu(\{c\})\big), \sup_{\alpha\in[f(c),\infty]} \big(\alpha \wedge \mu(\emptyset)\big)\Bigg) \\ & = \sup(f(a) \wedge \mu(\{a,b,c\}), f(b) \wedge \mu(\{b,c\}), f(c) \wedge \mu(\{c\}), 0) \\ & = \sup(1 \wedge 1, 2 \wedge 0.5, 3 \wedge 0.2) = \sup(1, 0.5, 0.2) = 1. \end{aligned}$$

U sledećoj lemi data je veza između nerastućih funkcija F_α i $F_{\alpha+}$.

Lema 1.2.[14]

1. F_α i $F_{\alpha+}$ su nerastuće funkcije u odnosu na α i $F_{\alpha+} \supset F_\beta$ kada je $\alpha < \beta$.
2. $lim_{\beta\to\alpha-} F_\beta = lim_{\beta\to\alpha-} F_{\beta+} = F_\alpha \supset F_{\alpha+} = lim_{\beta\to\alpha+} F_\beta = lim_{\beta\to\alpha+} F_{\beta+}$.

Dokaz:

1. Tvrđenje je očigledno.
2. Jednakosti proizilaze iz sledećih činjenica:

$$\begin{aligned} \bigcap_{\beta<\alpha} \{x|f(x) \geq \beta\} = & \bigcap_{\beta<\alpha} \{x|f(x) > \beta\} \\ & = \{x|f(x) \geq \alpha\} \supset \{x|f(x) > \alpha\} \\ & = \bigcup_{\beta>\alpha} \{x|f(x) \geq \beta\} = \bigcup_{\beta>\alpha} \{x|f(x) > \beta\}. \end{aligned}$$

U sledećoj teoremi date su ekvivalentne formule Sugenovog integrala izražene pomoću nerastućih funkcija F_α i $F_{\alpha+}$, kao i infimuma posmatrane funkcije nad merljivim skupovima.

Teorema 1.9.[14] Ako je $\boldsymbol{F}(f)$ σ-algebra generisana sa f, najmanja σ-algebra takva da je funkcija f merljiva, tada važi:

1. $⨍_A f d\mu = sup_{\alpha\in[0,\infty)}\big(\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)\big) = sup_{\alpha\in[0,\infty]}\big(\alpha \wedge \mu(A \cap F_{\alpha+})\big)$
2. $⨍_A f d\mu = sup_{\alpha\in[0,\infty)}\big(\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)\big) = sup_{\alpha\in[0,\infty)}\big(\alpha \wedge \mu(A \cap F_{\alpha+})\big)$
3. $⨍_A f d\mu = sup_{E\in\boldsymbol{F}(f)}\big((inf_{x\in E} f(x)) \wedge \mu(A \cap E)\big) = sup_{E\in\boldsymbol{F}}\big((inf_{x\in E} f(x)) \wedge \mu(A \cap E)\big)$,

Dokaz:

1. U slučaju kada je $\alpha = \infty$, $F_\alpha = F_{\alpha+} = \emptyset$, jednačine

$$⨍_A f d\mu = \sup_{\alpha\in[0,\infty)} \big(\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)\big)$$

i

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\big(\alpha\wedge\mu(A\cap F_{\alpha+})\big)=\sup_{\alpha\in[0,\infty)}\big(\alpha\wedge\mu(A\cap F_{\alpha+})\big)$$

su očigledne.

2. U slučaju kada $\alpha\in[0,\infty)$, na osnovu *Leme 1.2* i monotonosti μ imamo

$$\mu(A\cap F_{\alpha})\geq\mu(A\cap F_{\alpha+})$$

pa važi

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty)}\big(\alpha\wedge\mu(A\cap F_{\alpha})\big)\geq\sup_{\alpha\in[0,\infty)}\big(\alpha\wedge\mu(A\cap F_{\alpha+})\big).$$

Sa druge strane, za svako $\varepsilon>0$ i $\alpha\in(0,\infty)$, ako uzmemo da $\alpha'\in\big((\alpha-\varepsilon)\vee 0,\alpha\big)$ imamo

$$\alpha\wedge\mu(A\cap F_{\alpha})\leq(\alpha'+\varepsilon)\ \wedge\mu(A\cup F_{\alpha'+}),$$

pa, imamo

$$\begin{aligned}\sup_{\alpha\in[0,\infty)}\big(\alpha\wedge\mu(A\cap F_{\alpha})\big)&=\sup_{\alpha\in[0,\infty)}\big(\alpha\wedge\mu(A\cap F_{\alpha+})\big)\\ &\leq\sup_{\alpha'\in(0,\infty)}\big((\alpha'+\varepsilon)\ \wedge\mu(A\cap F_{\alpha'+})\big)\\ &\leq\sup_{\alpha'\in(0,\infty)}\big(\ \alpha'\wedge\mu(A\cap F_{\alpha'+})\big)+\varepsilon\\ &=\sup_{\alpha\in[0,\infty)}\big(\alpha\wedge\mu(A\cap F_{\alpha+})\big)+\varepsilon.\end{aligned}$$

Pošto ε može biti proizvoljno blizu nuli, dobijamo

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty)}\big(\alpha\wedge\mu(A\cap F_{\alpha})\big)\leq\sup_{\alpha\in[0,\infty)}\big(\alpha\wedge\mu(A\cap F_{\alpha+})\big).$$

Prema tome, važi

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty)}\big(\alpha\wedge\mu(A\cap F_{\alpha})\big)=\sup_{\alpha\in[0,\infty)}\big(\alpha\wedge\mu(A\cap F_{\alpha+})\big).$$

3. U slučaju kada $\alpha\in[0,\infty]$, pošto je $inf_{x\in F_{\alpha}}f(x)\geq\alpha$, pri čemu $F_{\alpha}\in\boldsymbol{F}(f)$, imamo

$$\big(\alpha\wedge\mu(A\cap F_{\alpha})\big)\leq\sup_{E\in\boldsymbol{F}(f)}\left(\left(\inf_{x\in E}f(x)\right)\wedge\mu(A\cap E)\right)$$

pa stoga važi

$$⨍_A f d\mu = \sup_{\alpha \in [0,\infty]} \big(\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)\big) = \sup_{E \in \boldsymbol{F}(f)} \left(\left(\inf_{x \in E} f(x) \right) \wedge \mu(A \cap E) \right).$$

Dalje, kako je f $\boldsymbol{F}$-merljivo, imamo da je $\boldsymbol{F}(f) \subset E$ pa otuda i

$$\sup_{E \in \boldsymbol{F}(f)} \left(\left(\inf_{x \in E} f(x) \right) \wedge \mu(A \cap E) \right) = \sup_{E \in \boldsymbol{F}} \left(\left(\inf_{x \in E} f(x) \right) \wedge \mu(A \cap E) \right).$$

Na kraju, za svako dato $E \in \boldsymbol{F}$, ako uzmemo da je $\alpha' = inf_{x \in E} f(x)$, onda $E \subset F_{\alpha'}$. Iz toga sledi da je

$$\mu(A \cap E) \leq \mu(A \cap F_{\alpha'})$$

zbor monotonosti μ, i važi

$$\left(\inf_{x \in E} f(x) \right) \wedge \mu(A \cap E) \leq \alpha' \wedge \mu(A \cap F_{\alpha'}) \leq \sup_{\alpha \in [0,\infty]} \big(\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)\big) = ⨍_A f d\mu$$

za svako $E \in \boldsymbol{F}$. Dakle, imamo da je

$$\sup_{E \in \boldsymbol{F}} \left(\left(\inf_{x \in E} f(x) \right) \wedge \mu(A \cap E) \right) \leq ⨍_A f d\mu.$$

Za dato $(X, \boldsymbol{F}, \mu)$, $f \in \boldsymbol{G}$ i $A \in \boldsymbol{F}$, izračunavanje Sugenovog integrala može se pojednostaviti pomoću formule

$$⨍_A f d\mu = \sup_{\alpha \in \Gamma} \big(\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)\big).$$

pri čemu je

$$\Gamma = \big\{\alpha | \alpha \in [0,\infty], \mu(A \cap F_\alpha) > \mu\big(A \cap F_\beta\big) \text{ za svako } \beta > \alpha\big\}.$$

1.2.1. Osobine Sugenovog integrala

Navešćemo sada najelementarnija svojstva Sugenovog integrala i dati poređenje tih osobina sa osobinama Lebegovog integrala koji je predmet istraživanja klasične teorije mere (videti [10]).

Teorema 1.10.[12]

1. Ako je $\mu(A) = 0$, onda je $⨍_A f d\mu = 0$, za svako $f \in \boldsymbol{G}$;
2. Ako je μ neprekidna odozdo i $⨍_A f d\mu = 0$, onda je $\mu(A \cap \{x | f(x) \geq 0\}) = 0$;
3. Ako je $f_1 \leq f_2$, onda je $⨍_A f_1 d\mu \leq ⨍_A f_2 d\mu$;
4. $⨍_A f d\mu = ⨍ f \cdot \chi_A d\mu$, gde je χ_A karakteristična funkcija od A;

5. $⨍_A a d\mu = a \wedge \mu(A)$ za svaku konstantu $a \in [0, \infty)$;
6. $⨍_A (f + a) d\mu \leq ⨍_A f d\mu + ⨍_A a d\mu$ za svaku konstantu $a \in [0, \infty)$.

Dokaz: Potrebno je da dokažemo 2. i 6. jer sve ostale osobine slede direktno iz definicije Sugenovog integrala.

2. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da je

$$\mu(A \cap \{x | f(x) \geq 0\}) = c > 0.$$

Pošto je

$$A \cap \{x | f(x) \geq 1/n\} \nearrow A \cap \{x | f(x) > 0\},$$

ako iskoristimo da je μ neprekidna odozdo, imamo

$$\lim_{n} \mu(A \cap \{x | f(x) \geq 1/n\}) = c.$$

Dakle, postoji neko n_0 takvo da je

$$\mu\left(A \cap F_{1/n_0}\right) = \mu(A \cap \{x | f(x) \geq 1/n_0\}) \geq c/2.$$

Prema tome, važi

$$⨍_A f d\mu = \sup_{\alpha \in [0,\infty]} \left(\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)\right) \geq 1/n_0 \wedge c/2 > 0$$

što je u kontradikciji sa $⨍_A f d\mu = 0$.

6. Na osnovu *Teoreme 1.9*, važi

$$\begin{aligned}
⨍_A (f + a) d\mu &= \sup_{E \in \boldsymbol{F}} \left(\left(\inf_{x \in E} (f(x) + a)\right) \wedge \mu(A \cap E)\right) \\
&\leq \sup_{E \in \boldsymbol{F}} \left(\left(\left(\left(\inf_{x \in E} f(x)\right) \wedge \mu(A \cap E)\right) + \left(a \wedge \mu(A \cap E)\right)\right)\right) \\
&\leq \sup_{E \in \boldsymbol{F}} \left(\left(\left(\left(\inf_{x \in E} f(x)\right) \wedge \mu(A \cap E)\right) + \left(a \wedge \mu(A)\right)\right)\right) \\
&= \sup_{E \in \boldsymbol{F}} \left(\left(\inf_{x \in E} f(x)\right) \wedge \mu(A \cap E)\right) + \left(a \wedge \mu(A)\right) \\
&= ⨍_A f d\mu + ⨍_A a d\mu.
\end{aligned}$$

Treba napomenuti da Lebegov integral poseduje osobinu linearnosti, tj.

$$\int_A (f_1 + f_2) d\mu = \int_A f_1 d\mu + \int_A f_2 d\mu$$

i

$$\int_A a f d\mu = a \int_A f d\mu,$$

dok Sugenov integral ne poseduje.

Kada se operacija + zameni sa ∧ ili ∨ dve funkcije, važe nejednakosti date u posledici koja sledi.

Posledica 1.2.[12]

7. Ako je $A \supset B$, onda je $⨍_A f d\mu \geq ⨍_B f d\mu$;
8. $⨍_A (f_1 \vee f_2) d\mu \geq ⨍_A f_1 d\mu \vee ⨍_A f_2 d\mu$;
9. $⨍_A (f_1 \wedge f_2) d\mu \leq ⨍_A f_1 d\mu \wedge ⨍_A f_2 d\mu$;
10. $⨍_{A\cup B} f d\mu \geq ⨍_A f d\mu \vee ⨍_B f d\mu$;
11. $⨍_{A\cap B} f d\mu \leq ⨍_A f d\mu \wedge ⨍_B f d\mu$.

Lema 1.3.[14] Neka $A \in \boldsymbol{F}$, $a \in [0, \infty)$, $f_1 \in \boldsymbol{G}$ i $f_2 \in \boldsymbol{G}$. Ako je $|f_1 - f_2| \leq a$ na A, onda važi

$$\left| ⨍_A f_1 d\mu - ⨍_A f_2 d\mu \right| \leq a.$$

Dokaz: Kako je $f_1 \leq f_2 + a$ na A, na osnovu osobina *3,5* i *6* Sugenovog integrala, važi

$$⨍_A f_1 d\mu \leq ⨍_A (f_2 + a) d\mu \leq ⨍_A f_2 d\mu + ⨍_A a d\mu = ⨍_A f_2 d\mu + \big(a \wedge \mu(A)\big) \leq ⨍_A f_2 d\mu + a.$$

Slično tome, iz $f_2 \leq f_1 + a$ na A, sledi

$$⨍_A f_2 d\mu \leq ⨍_A f_1 d\mu + a,$$

pa dobijamo da je

$$\left| ⨍_A f_1 d\mu - ⨍_A f_2 d\mu \right| \leq a.$$

Lema 1.4.[14] Za svako $\alpha \in [0, \infty]$, važi $⨍_A f d\mu \leq \alpha \vee \mu(A \cap F_{\alpha+}) \leq \alpha \vee \mu(A \cap F_\alpha)$.

Dokaz: Na osnovu *Teoreme 1.9* i *Leme 1.2*, za svako $\alpha \in [0, \infty]$ imamo

$$\begin{aligned} ⨍_A f d\mu &= \sup_{\alpha' \in [0,\alpha]} \big(\alpha' \wedge \mu(A \cap F_{\alpha'+})\big) \vee \sup_{\alpha' \in (\alpha,\infty]} \big(\alpha' \wedge \mu(A \cap F_{\alpha'+})\big) \\ &\leq \sup_{\alpha' \in [0,\alpha]} \alpha' \vee \sup_{\alpha' \in (\alpha,\infty]} \mu(A \cap F_{\alpha'+}) \leq \alpha \vee \mu(A \cap F_{\alpha+}) \leq \alpha \vee \mu(A \cap F_\alpha). \end{aligned}$$

Lema 1.5.[10] Za svako $\alpha \in [0, \infty)$, važi $⨍_A f d\mu = \infty$ ako i samo ako je $\mu(A \cap F_\alpha) = \infty$.

Dokaz:

Potreban uslov: Ako je $⨍_A f d\mu = \infty$, na osnovu *Leme 1.4* sledi da je

$$\alpha \vee \mu(A \cap F_\alpha) = \infty,$$

pa, u slučaju kada $\alpha \in [0, \infty)$, važi

$$\mu(A \cap F_\alpha) = \infty.$$

Dovoljan uslov: sledi direktno iz *Definicije 1.11*.

U sledećoj lemi dati su potrebni i dovoljni uslovi kada je mera skupa F_α veća ili manja od neke konstante u zavisnosti od vrednosti Sugenovog integrala.

Lema 1.6.[14] Za svako $\alpha \in [0, \infty)$ važi

1. $⨍_A f d\mu \geq \alpha \Leftrightarrow \mu\big(A \cap F_\beta\big) \geq \alpha$ za svako $\beta < \alpha \Leftarrow \mu(A \cap F_\alpha) \geq \alpha$;

   $⨍_A f d\mu < \alpha \Leftrightarrow$ postoji $\beta < \alpha$ takvo da je $\mu\big(A \cap F_\beta\big) < \alpha \Rightarrow \mu(A \cap F_\alpha) < \alpha \Rightarrow$

   $\mu(A \cap F_{\alpha+}) < \alpha$;
2. $⨍_A f d\mu \leq \alpha \Leftrightarrow \mu(A \cap F_{\alpha+}) \leq \alpha \Leftarrow \mu(A \cap F_\alpha) \leq \alpha$;

   $⨍_A f d\mu > \alpha \Leftrightarrow \mu(A \cap F_{\alpha+}) > \alpha \Rightarrow \mu(A \cap F_\alpha) > \alpha$;
3. $⨍_A f d\mu = \alpha \Leftrightarrow$ za svako $\beta < \alpha, \mu\big(A \cap F_\beta\big) \geq \alpha \geq \mu(A \cap F_{\alpha+}) \Leftarrow \mu(A \cap F_\alpha) = \alpha$;

   Kada je $\mu(A) < \infty$, imamo:
4. $⨍_A f d\mu \geq \alpha \Leftrightarrow \mu(A \cap F_\alpha) \geq \alpha$;
5. $⨍_A f d\mu = \alpha \Leftrightarrow \mu(A \cap F_\alpha) \geq \alpha \geq \mu(A \cap F_{\alpha+})$.

Dokaz:

1. Treba samo da razmotrimo slučaj kada $\alpha \in (0, \infty)$. Ako je $\mu\big(A \cap F_\beta\big) \geq \alpha$ za svako $\beta < \alpha$, važi

$$⨍_A f d\mu = \sup_{\beta \in [0,\infty)} \Big(\beta \wedge \mu\big(A \cap F_\beta\big)\Big) \geq \sup_{\beta \in [0,\alpha)} \Big(\beta \wedge \mu\big(A \cap F_\beta\big)\Big) \geq \sup_{\beta \in [0,\alpha)} (\beta \wedge \alpha)$$

$$= \sup_{\beta \in [0,\alpha)} \beta = \alpha.$$

Suprotno tome, ako postoji $\beta < \alpha$ takvo da je $\mu\big(A \cap F_\beta\big) < \alpha$, onda je

$$⨍_A f d\mu \leq \beta \vee \mu\big(A \cap F_\beta\big) < \alpha.$$

Druga jednakost sledi iz *Leme 1.2* i monotonosti μ.

2. Ako je $\mu(A \cap F_{\alpha+}) \leq \alpha$, sledi

$$⨍_A f d\mu \leq \alpha \vee \mu(A \cap F_{\alpha+}) = \alpha.$$

Suprotno tome, na osnovu *Leme 1.2* i neprekidnost odozdo μ, važi

$$\lim_{\beta \to \alpha+} \mu(A \cap F_\beta) = \mu(A \cap F_{\alpha+}).$$

Ako je $\mu(A \cap F_{\alpha+}) > \alpha$, onda postoji $\alpha_0 > \alpha$ takvo da je $\mu(A \cap F_{\alpha_0}) > \alpha$. Pa na osnovu *Definicije 1.11* važi

$$⨍_A f d\mu \geq \alpha_0 \wedge \mu(A \cap F_{\alpha_0}) > \alpha.$$

3. Sledi iz kombinacije 1. i 2.
4. Kada je $\mu(A) < \infty$ imamo

$$\lim_{\beta \to \alpha-} \mu(A \cap F_\beta) = \mu(A \cap F_\alpha).$$

Dakle, $\mu(A \cap F_\alpha) \geq \alpha$ ako i samo ako je $\mu(A \cap F_\beta) \geq \alpha$ za svako $\beta < \alpha$.

U klasičnoj teoriji mere, ako su dve funkcije jednake skoro svuda, onda su i njihovi integrali jednaki (videti [10],[14]), što nije slučaj sa Sugenovim integralima u prostoru monotone mere. U nastavku će biti razmatrano koji dodatni uslovi trebaju biti zadovoljeni da bi ova osobina važila i kod Sugenovog integrala.

Definicija 1.12.[14] Neka $A \in \boldsymbol{F}$ i neka je P tvrdnja koja važi za tačke iz A. Ako postoji $E \in \boldsymbol{F}$, uz uslov da je $\mu(E) = 0$, takvo da je P tačno na $A - E$, tada kažemo da je P tačno na *A skoro svuda.*

Teorema 1.11.[14] $⨍ f_1 d\mu = ⨍ f_2 d\mu$ kad god je $f_1 = f_2$ skoro svuda ako i samo ako je μ nula-aditivna pri čemu funkciju smatramo nula-aditivnom ako važi $\mu(E \cup F) = \mu(E)$, kad god je $E \in \boldsymbol{F}$, $F \in \boldsymbol{F}$, $E \cap F = \emptyset$ i $\mu(F) = 0$.

Dokaz:

Dovoljan uslov: Ako je μ nula-aditivna, onda iz

$$\mu(\{x | f_1(x) \neq f_2(x)\}) = 0,$$

znamo da važi

$$\mu(\{x | f_2(x) \geq \alpha\}) \leq \mu(\{x | f_1(x) \geq \alpha\} \cup \{x | f_1(x) \neq f_2(x)\}) = \mu(\{x | f_1(x) \geq \alpha\})$$

za svako $\alpha \in [0, \infty]$. Obrnuta jednakost važi takođe, pa imamo

$$\mu(\{x|f_1(x) \geq \alpha\}) = \mu(\{x|f_2(x) \geq \alpha\})$$

za svako $\alpha \in [0, \infty]$, pa sledi da važi

$$⨍ f_1 d\mu = ⨍ f_2 d\mu.$$

Potreban uslov: Za svako $E \in \boldsymbol{F}$ i $F \in \boldsymbol{F}$ i $\mu(F) = 0$, ako je $\mu(E) = \infty$, na osnovu monotonosti μ, važi $\mu(E \cup F) = \infty = \mu(E)$. Kontradikcijom ćemo dokazati da važi $\mu(E \cup F) = \mu(E)$.

Pretpostavimo da važi $\mu(E) < \infty$ i $\mu(E \cup F) > \mu(E)$, $a \in \big(\mu(E), \mu(E \cup F)\big)$ i

$$f_1(x) = \begin{cases} a, & \text{ako } x \in F \\ 0, & \text{ako } x \notin F \end{cases} \qquad \text{i} \qquad f_2(x) = \begin{cases} a, & \text{ako } x \in E \cup F \\ 0, & \text{ako } x \notin E \cup F' \end{cases}$$

tada je $\mu(\{x|f_1(x) \neq f_2(x)\}) = \mu(F - E) \leq \mu(F) = 0$, pa važi

$$f_1 = f_2 \text{ skoro svuda.}$$

Dakle, trebalo bi da sledi

$$⨍ f_1 d\mu = ⨍ f_2 d\mu.$$

Ali mi imamo

$$⨍ f_1 d\mu = a \wedge \mu(E) = \mu(E)$$

i

$$⨍ f_2 d\mu = a \wedge \mu(E \cup F) = a \neq \mu(E),$$

što je kontradikcija.

Posledica 1.3.[14] Ako je μ nula-aditivna, onda je $⨍_A f_1 d\mu = ⨍_A f_2 d\mu$ kad god je $f_1 = f_2$ skoro svuda na A.

Dokaz: Ako je $f_1 = f_2$ skoro svuda na A, onda je $f_1\chi_A = f_2\chi_A$ skoro svuda i na osnovu *Teoreme 1.11* i *Teoreme 1.10* sledi dokaz.

Posledica 1.4.[14] Ako je μ nula-aditivna, onda je za svako $f \in \boldsymbol{G}$, važi

$$⨍_{A \cup B} f d\mu = ⨍_A f d\mu$$

kad god $A \in \boldsymbol{F}$, $B \in \boldsymbol{F}$ i $\mu(B) = 0$.

Razmotrićemo sada kako da transformišemo Sugenov integral $⨍_A f d\mu$ koji je definisan na prostoru monotone mere $(X, \boldsymbol{F}, \mu)$, u drugi Sugenov integral $⨍ g dm$ na prostoru Lebegove mere $([0,\infty], \overline{\boldsymbol{B}_+}, m)$, gde je $\overline{\boldsymbol{B}_+}$ klasa Borelovih skupova u $[0,\infty]$ i m je Lebegova mera.

Teorema 1.12.[12] Za svako $A \in \boldsymbol{F}$, važi

$$⨍_A f d\mu = ⨍ \mu(A \cap F_\alpha) dm,$$

gde je $F_\alpha = \{x | f(x) \geq \alpha\}$ i m je Lebegova mera.

Dokaz: Označimo sa $g(\alpha) = \mu(A \cap F_\alpha)$. $g(\alpha)$ je opadajuća u odnosu na α. Za svako $\alpha \in [0,\infty]$, označimo $\boldsymbol{B}_\alpha = \{E | supE = \alpha, E \in \overline{\boldsymbol{B}_+}\}$ i $\{\boldsymbol{B}_\alpha | \alpha \in [0,\infty]\}$ je particija $\overline{\boldsymbol{B}_+}$ i $sup_{E \in \boldsymbol{B}_\alpha} m(E) = \alpha$. Sledi da je

$$⨍ \mu(A \cap F_\alpha) dm = ⨍ g(\alpha) dm = \sup_{E \in \overline{\boldsymbol{B}_+}} \left(\inf_{\beta \in E} g(\beta) \wedge m(E) \right)$$
$$= \sup_{\alpha \in [0,\infty]} \sup_{E \in \boldsymbol{B}_\alpha} \left(\inf_{\beta \in E} g(\beta) \wedge m(E) \right).$$

Kako je $g(\beta)$ opadajuća, imamo

$$g(\alpha -) \geq \inf_{\beta \in E} g(\beta) \geq g(\alpha)$$

za svako $E \in \boldsymbol{B}_\alpha$, gde je $g(\alpha -) = lim_{\beta \to \alpha -} g(\beta)$. Dakle, sa jedne strane imamo

$$⨍ \mu(A \cap F_\alpha) dm \geq \sup_{\alpha \in [0,\infty]} \left(g(\alpha) \wedge \sup_{E \in \boldsymbol{B}_\alpha} m(E) \right) = \sup_{\alpha \in [0,\infty]} (g(\alpha) \wedge \alpha)$$
$$= \sup_{\alpha \in [0,\infty]} \big(\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)\big) = ⨍_A f d\mu;$$

sa druge strane, za svako dato $\varepsilon > 0$, važi

$$⨍ \mu(A \cap F_\alpha) dm \leq \sup_{\alpha \in [0,\infty]} \left(g(\alpha -) \wedge \sup_{E \in \boldsymbol{B}_\alpha} m(E) \right) = \sup_{\alpha \in [0,\infty]} (g(\alpha -) \wedge \alpha)$$
$$\leq \sup_{\alpha \in [\varepsilon,\infty]} \big(\alpha \wedge g(\alpha -)\big) \vee \varepsilon \leq \sup_{\alpha \in [\varepsilon,\infty]} \big(\alpha \wedge g(\alpha - \varepsilon)\big) \vee \varepsilon$$
$$\leq \sup_{(\alpha-\varepsilon) \in [0,\infty]} \big((\alpha - \varepsilon) \wedge g(\alpha - \varepsilon)\big) + \varepsilon$$
$$= \sup_{(\alpha-\varepsilon) \in [0,\infty]} \big((\alpha - \varepsilon) \wedge \mu(A \cap F_{\alpha-\varepsilon})\big) + \varepsilon = ⨍_A f d\mu + \varepsilon.$$

Kako ε može biti proizvoljno blizu nuli, sledi da je

$$⨍ \mu(A \cap F_\alpha) dm = ⨍_A f d\mu.$$

1.3. Šokeov integral

Francuski matematičar Gustavo Šoke je 1953. godine prvi uveo pojam Šokeovog integrala [2], dok se kasnije 1980. godine u literaturi intenzivno razmatralo o ovom integralu.

Neka je $(X, \boldsymbol{F}, \mu)$ prostor monotone mere, tj. X je neprazan skup, $\boldsymbol{F}$ je σ-algebra podskupova od X i $\mu: \boldsymbol{F} \to [0, \infty]$ je monotona mera. Neka $A \in \boldsymbol{F}$ i f je merljiva funkcija na $(X, \boldsymbol{F})$. Lebegov integral od f u odnosu na μ ne može biti dobro definisan zbog neaditivnosti μ. Zaista, za dva niza neopadajućih jednostavnih funkcija $\{\mathrm{s_j}\}$ i $\{\mathrm{t_j}\}$ sa $lim_{j\to\infty} \mathrm{s_j} = lim_{j\to\infty} t_j = f$, gde je $\mathrm{s_j} = \sum_{i=1}^{m_s(j)} a_{ji}\chi_{A_{ji}}$ i $\mathrm{t_j} = \sum_{i=1}^{m_t(j)} b_{ji}\chi_{B_{ji}}$ za svako j, moguće je da važi

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{m_s(j)} a_{ji}\mu(A_{ji}) \neq \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{m_t(j)} b_{ji}\mu(B_{ji}).$$

Lebegov integral se definiše pomoću Rimanovog integrala na sledeći način

$$\int_A f d\mu = \int_0^\infty \mu(F_\alpha \cap A) d\alpha,$$

gde je μ mera u klasičnom smislu na skupu X [10]. Uz pretpostavku da je μ monotona mera koja u opštem slučaju ne mora biti aditivna, analogno se definiše integral koji se naziva *Šokeov integral.* Sledi definicija tog integrala.

Definicija 1.13.[2] *Šokeov integral* nenegativne merljive funkcije f u odnosu na monotonu meru μ na merljivom skupu A, označen sa $(C)\int_A f d\mu$, definiše se kao

$$(C)\int_A f d\mu = \int_0^\infty \mu(F_\alpha \cap A) d\alpha,$$

gde je $F_\alpha = \{x | f(x) \geq \alpha\}$, za $\alpha \in [0, \infty)$. Kada je $A = X$, $(C)\int_X f d\mu$ se obično piše kao $(C)\int f d\mu$.

Kako je f merljiva, znamo da $F_\alpha = \{x | f(x) \geq \alpha\} \in \boldsymbol{F}$ za $\alpha \in [0, \infty)$ i stoga i $F_\alpha \cap A \in \boldsymbol{F}$. Dakle, $\mu(F_\alpha \cap A)$ je dobro definisano za sve $\alpha \in [0, \infty)$. Osim toga, $\{F_\alpha\}$ je klasa skupova koji su nerastući u odnosu na α i takođe su skupovi u $\{F_\alpha \cap A\}$. Kako je monotona mera μ neopadajuća skupovna funkcija, znamo da je $\mu(F_\alpha \cap A)$ neopadajuća funkcija od α i stoga Rimanov integral ima smisla. Prema tome, Šokeov integral nenegativne merljive funkcije u odnosu na monotonu meru na merljivom skupu je dobro definisan.

Sledeća teorema uspostavlja ekvivalentnu formu za definisanje Šokeovog integrala u odnosu na konačnu monotonu meru.

Teorema 1.13.[14] Neka je $\mu(A)$ konačna. Važi

$$(C)\int_A f d\mu = \int_0^\infty \mu(F_{\alpha+} \cap A) d\alpha,$$

gde je $F_{\alpha+} = \{x | f(x) > \alpha\}$ za $\alpha \in [0, \infty)$.

Dokaz: Za svako dato $\epsilon > 0$ imamo

$$\begin{aligned}
(C)\int_A f d\mu &= \int_0^\infty \mu(F_\alpha \cap A) d\alpha = \int_0^\infty \mu(\{x | f(x) \geq \alpha\} \cap A) d\alpha \\
&\geq \int_0^\infty \mu(\{x | f(x) > \alpha\} \cap A) d\alpha \geq \int_0^\infty \mu(\{x | f(x) \geq \alpha + \varepsilon\} \cap A) d\alpha \\
&= \int_0^\infty \mu(\{x | f(x) \geq \alpha + \varepsilon\} \cap A) d(\alpha + \varepsilon) = \int_\varepsilon^\infty \mu(\{x | f(x) \geq \alpha\} \cap A) d\alpha \\
&\geq \int_0^\infty \mu(\{x | f(x) \geq \alpha\} \cap A) d\alpha - \varepsilon \cdot \mu(A) \\
&= (C)\int_A f d\mu - \varepsilon \cdot \mu(A).
\end{aligned}$$

Kako je $\mu(A) < \infty$, kad pustimo da $\varepsilon \to 0$, dobijamo

$$(C)\int_A f d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x | f(x) > \alpha\} \cap A) d\alpha = \int_0^\infty \mu(F_{\alpha+} \cap A) d\alpha.$$

U specijalnom slučaju kad je monotona mera σ-aditivna, Šokeov integral poklapa se sa Lebegovim integralom što nas dovodi do zaključka da je Šokeov integral realno uopštenje Lebegovog integrala.

1.3.1. Osobine Šokeovog integrala

Za razliku od Lebegovog integrala, Šokeov integral je generalno nelinearan zbog neaditivnosti μ. To znači da u opštem slučaju važi

$$(C)\int (f + g) d\mu \neq (C)\int f d\mu + (C)\int g d\mu$$

za neke nenegativne merljive funkcije f i g.

Lebegov i Šokeov integral imaju zajedničke osobine koje su date u sledećoj teoremi.

Teorema 1.14.[2] Neka su f i g nenegativne merljive funkcije na $(X, \boldsymbol{F}, \mu)$, A i B merljivi skupovi i a nenegativna realna konstanta. Tada važi:

1. $(C)\int_A 1 d\mu = \mu(A)$,
2. $(C)\int_A f d\mu = (C)\int f \cdot \chi_A d\mu$,
3. Ako je $f \leq g$ na A, onda je $(C)\int_A f d\mu \leq (C)\int_A g d\mu$,
4. Ako je $A \subset B$ onda je $(C)\int_A f d\mu \leq (C)\int_B f d\mu$,
5. $(C)\int_A a f d\mu = a \cdot (C)\int_A f d\mu$.

Sledeća teorema daje potreban i dovoljan uslov kada je Šokeov integral jednak nuli.

Teorema 1.15.[2]

1. $(C)\int_A f d\mu = 0$ ako je $\mu(\{x|f(x) > 0\} \cap A) = 0$, skoro svuda, i $f = 0$ na A, skoro svuda;

2. Suprotno, ako je monotona mera μ neprekidna od dole i $(C)\int_A f d\mu = 0$, onda je $\mu(\{x|f(x) > 0\} \cap A) = 0$.

Dokaz:

1. Iz $\mu(\{x|f(x) > 0\} \cap A) = 0$ znamo da je

$$\mu(\{x|f(x) \geq \alpha\} \cap A) \leq \mu(\{x|f(x) > 0\} \cap A) = 0$$

za svako $\alpha > 0$. Kako je μ nenegativna, važi

$$\mu(\{x|f(x) \geq \alpha\} \cap A) = 0$$

za svako $\alpha > 0$. Prema tome,

$$(C)\int_A f d\mu = \int_0^\infty \mu(F_\alpha \cap A) d\alpha = \int_0^\infty \mu(\{x|f(x) \geq \alpha\} \cap A) d\alpha = 0.$$

2. Prvo ćemo kontradikcijom pokazati da je $\mu(\{x|f(x) \geq \alpha\} \cap A) = 0$, za svako $\alpha > 0$, ako je $(C)\int_A f d\mu = 0$.

Ustvari, $\mu(\{x|f(x) \geq \alpha\} \cap A) = c > 0$, za neko $\alpha_0 > 0$, implicira $\mu(\{x|f(x) \geq \alpha\} \cap A) = c$ za sve $\alpha \in (0, \alpha_0]$, pošto je μ neopadajuća. Prema tome, važi

$$(C)\int_A f d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x|f(x) \geq \alpha\} \cap A) d\mu \geq \int_0^{\alpha_0} \mu(\{x|f(x) \geq \alpha\} \cap A) d\mu$$

$$\geq \int_0^{\alpha_0} c d\mu = c \cdot \alpha_0 > 0$$

što je u kontradikciji sa $(C)\int_A f d\mu = 0$.

Drugo,

$$\{x|f(x) > 0\} \cap A = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(\left\{ x \middle| f(x) \geq \frac{1}{j} \right\} \cap A \right),$$

gde je $\{x|f(x) > 0\} \cap A$ granica neopadajućih podskupova skupa $\left\{ \left\{ x \middle| f(x) \geq \frac{1}{j} \right\} \cap A \right\}$. Na osnovu neprekidnosti μ, važi

$$\mu(\{x|f(x) > 0\} \cap A) = \lim_{j \to \infty} \mu \left(\left\{ x \middle| f(x) \geq \frac{1}{j} \right\} \cap A \right) = 0.$$

Osobina data u sledećoj teoremi se naziva *translatornost* (eng. translatability) Šokeovog integrala.

Teorema 1.16.[2] Za svaku konstantu c koja zadovoljava $f + c \geq 0$, važi

$$(C)\int_A (f + c) d\mu = (C)\int_A f d\mu + c \cdot \mu(A).$$

Dokaz: Iz definicije Šokeovog integrala, $f(x) + c \geq \alpha$, za svako $x \in X$, kada je α između 0 i c, važi

$$\begin{aligned} (C)\int_A (f + c) d\mu &= \int_0^{\infty} \mu(\{x|f(x) + c \geq \alpha\} \cap A) d\alpha \\ &= \int_c^{\infty} \mu(\{x|f(x) + c \geq \alpha\} \cap A) d\alpha + \int_0^{c} \mu(\{x|f(x) + c \geq \alpha\} \cap A) d\alpha \\ &= \int_c^{\infty} \mu(\{x|f(x) \geq \alpha - c\} \cap A) d(\alpha - c) + \int_0^{c} \mu(X \cap A) d\alpha \\ &= \int_0^{\infty} \mu(\{x|f(x) \geq \alpha\} \cap A) d\alpha + \int_0^{c} \mu(A) d\alpha \\ &= (C)\int_A f d\mu + c \cdot \mu(A). \end{aligned}$$

1.3.2. Izračunavanje Šokeovog integrala na konačnom skupu

U svakoj bazi podataka broj osobina je uvek konačan. Neka je $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ konačan skup osobina (atributa), $\big(X, \boldsymbol{P}(X)\big)$ merljiv prostor. Svaki zapis (posmatranje) $x_1, x_2, \dots, x_n$ označen sa $f(x_1), f(x_2), \dots,\ f(x_n)$, respektivno, je funkcija f na skupu realnih brojeva X. Kako je partitivni skup skupa X uzet kao σ-algebra, svaka funkcija na skupu realnih brojeva X je merljiva. Monotona mera μ definisana na $\boldsymbol{P}(X)$ se obično koristi da opiše zajednički značaj kao pojedinačni značaj osobina na X.

Kako je X konačan skup možemo razviti jednostavnu formula za izračunavanje vrednosti $(C)\int f d\mu$ kada su dati f i μ.

Neka je $b_1 = min_{1 \le i \le n} f(x_i)$ i $b_2 = max_{1 \le i \le n} f(x_i)$. Kako je funkcija f između b_1 i b_2, imamo $F_\alpha = X$ kada je $\alpha \le b_1$ i $F_\alpha = \emptyset$ kada je $\alpha > b_2$. Koristeći translatornost Šokeovog integrala imamo

$$\begin{aligned}(C)\int f d\mu &= (C)\int (f - b_1) d\mu + b_1 \cdot \mu(X)\\ &= \int_0^{b_2 - b_1} \mu(\{x | f(x) - b_1 \ge \alpha\}) d\alpha + b_1 \cdot \mu(X).\end{aligned}$$

Ako vrednosti funkcije f, $\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$ poređamo u neopadajući niz kao

$$b_1 = f(x_1^*) \le f(x_2^*) \le \cdots \le f(x_n^*) = b_2$$

gde je $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\ )$ permutacija od $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, onda je skup $\{x | f(x) - b_1 \ge \alpha\}$ uvek $\{x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*\}$ kada $\alpha \in [f(x_{i-1}^*) - b_1, f(x_i^*) - b_1]$ za $i = 2,3, \dots, n$. Prema tome, važi

$$\begin{aligned}(C)\int f d\mu &= \sum_{i=2}^{n} [f(x_i^*) - f(x_{i-1}^*)] \cdot \mu(\{x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*\}) + b_1 \cdot \mu(X)\\ &= \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - f(x_{i-1}^*)] \cdot \mu(\{x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*\})\end{aligned}$$

uz uslov da je $f(x_0^*) = 0$.

Primer 1.3. Posmatrajmo merljiv prostor $\big(X, \boldsymbol{P}(X)\big)$ gde je $X = \{a, b, c\}$. Monotona mera μ je definisana kao u *Primeru 1.1*, funkcija f kao u *Primeru 1.2*. Kako je $f(a) < f(b) < f(c)$ možemo izračunati Šokeov integral

$$\begin{aligned}(C)\int f d\mu &= (f(a) - 0)\mu(\{a, b, c\}) + \big(f(b) - f(a)\big)\mu(\{b, c\}) + \big(f(c) - f(b)\big)\mu(\{c\})\\ &= 1 \cdot 1 + (2 - 1) \cdot 0.5 + (3 - 2) \cdot 0.2 = 1 + 0.5 + 0.2 = 1.7\end{aligned}$$

2. Funkcije agregacije

U drugom delu bavićemo se funkcijama agregacije i uslovima koje monotona mera (monotona skupovna funkcija koja ima osobinu (MM1) iz *Definicije 1.2*) treba da zadovolji da bi se Sugenov i Šokeov integral svodili na minimum, maksimum, projekciju...[4]

Agregacija je proces kombinovanja ili spajanja više ulaznih, najčešće numeričkih, vrednosti u jednu izlaznu vrednost. Funkcija koja opisuje taj proces naziva se *funkcija agregacije.* Glavna karakteristika funkcija agregacije je da se koriste u velikom broju oblasti i disciplina, kao i da se koriste u rešavanju problema vezanih za fuziju podataka. Najpoznatije funkcije agregacije su aritmetička sredina, geometrijska sredina, minimum, maksimum, medijana. Sugenov i Šokeov integral u diskretnom, konačnom slučaju određuju posebnu klasu funkcija agregacije. Definisanje ili odabir prave klase funkcije agregacije za specifičan problem je težak s obzirom na velik izbor potencijanih funkcija agregacije [4].

Ako se uzme u obzir aritmetička sredina, moglo bi se zaključiti da su funkcije argregacije stare koliko i sama matematika. Međutim, one su počele intenzivno da se proučavaju tek osamdesetih godina prošlog veka i njihova teorijska osnova se od tada ubrzano razvija čime se mogu svrstati u aktuelnu oblast matematike. Funkcije argregacije imaju široku primenu u različitim oblastima, a naročito u primenjenoj matematici (verovatnoći, statistici, teoriji odlučivanja), informatici (veštačkoj inteligenciji, operacionim istraživanjima), fizici (astronomiji, optici), medicini (magnetna rezonanca, medicinska dijagnoza, neurologiji), ekonomiji, obradi slika i mnogim drugim poljima.

Pretpostavimo da promenljive svake funkcije agregacije imaju zajednički domen $\mathbb{I}$ koji je neprazan realan interval. U nekim posebnim slučajevima $\mathbb{I}$ će predstavljati neprazan interval u proširenom skupu realnih brojeva $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$. Sa $\mathrm{int}(\mathbb{I})$ ćemo označavati unutrašnjost skupa $\mathbb{I}$, a sa $\overline{\mathbb{I}}$ zatvaranje skupa.

Neka je n prirodan broj, skup $X := [n] = \{1, \dots, n\}$ i $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

Pre nego što bude data definicija funkcije agregacije, posmatraćemo njen specijalan slučaj. Neka je $\mathbb{I} = [0,1]$. Funkcija agregacije na $[0,1]^n$ je samo funkcija $A^{(n)}: [0,1]^n \to [0,1]$ koja je neopadajuća za svaku promenljivu i zadovoljava granične uslove

$$A^{(n)}(0, \dots, 0) = 0 \;\text{ i }\; A^{(n)}(1, \dots, 1) = 1.$$

U opštem slučaju funkcija agregacije se definiše na sledeći način:

Definicija 2.1.[4] *Funkcija agregacije* na $\mathbb{I}^n$ je funkcija $A^{(n)}: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ koja

1. je neopadajuća za svaku promenljivu
2. zadovoljava granične uslove

$$inf_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{I}^n} A^{(n)}(\boldsymbol{x}) = inf\mathbb{I} \text{ i } sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{I}^n} A^{(n)}(\boldsymbol{x}) = sup\mathbb{I}.$$

Ceo broj n predstavlja arnost funkcije agregacije, tj. broj promenljivih pa da ne dodje do zabune, funkciju agregacije označavaćemo sa A umesto sa $A^{(n)}$.

Aritmetička sredina definisana kao

$$AM^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

je funkcija agregacije na svakom domenu $\mathbb{I}^n \subseteq \mathbb{R}^n$.

Specifičan slučaj je agregacija jednoelementnog podskupa tj. unarna funkcija $A^{(1)}: \mathbb{I} \to \mathbb{I}$. Kako agregacija jednoelementnog podskupa nije stvarno agregacija, smatramo da je

$$A^{(1)}(x) = x \quad (x \in \mathbb{I}).$$

Proizvoljnu funkciju sa više promenljivih označavaćemo sa F ili G ili H i slično, a funkciju agregacije sa A. Rang bilo koje funkcije F označavaćemo sa $ran(F)$.

Vidimo da je svaka funkcija $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava uslove 1 i 2 iz *Definicije 2.1*, takva da je $ran(F) \subseteq \bar{\mathbb{I}}$, uopšteno svaka funkcija agregacije A u $\mathbb{I}^n$ zadovoljava $ran(A) \subseteq \mathbb{I}$.

Svaka n-torka $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{I}^n$, čije će koordinate biti agregirane u funkciju agregacije A, može se smatrati funkcijom iz X u $\mathbb{I}$.

Definicija 2.2.[7] *Dijagonalna sekcija* (eng. diagonal section) svake funkcije $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je unarna funkcija $\delta_F: \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ definisana kao $\delta_F(x) = F(x, \dots, x)$.

Funkcija agregacije ne može biti definisana ako ne odredimo domen.

Teorema koja sledi daje potreban i dovoljan uslov da neopadajuća funkcija $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ bude funkcija agregacije na $\mathbb{I}^n$.

Teorema 2.1.[4] Neopadajuća funkcija $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je funkcija agregacije na $\mathbb{I}^n$ ako i samo ako je $ran(\delta_F) \subseteq \mathbb{I}$ i važi

$$inf_{x\in\mathbb{I}}\, \delta_F(x) = inf\, \mathbb{I} \text{ i } sup_{x\in\mathbb{I}}\, \delta_F(x) = sup\, \mathbb{I}.$$

Dokaz: Za svaku datu neopadajuću funkciju $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ važi

$$\delta_F(min(x_1, \dots, x_n)) \leq F(\boldsymbol{x}) \leq \delta_F(max(x_1, \dots, x_n)) \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n),$$

što imlicira

$$inf_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{I}^n} F(\boldsymbol{x}) = inf_{x\in\mathbb{I}}\, \delta_F(x) \text{ i } sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{I}^n} F(\boldsymbol{x}) = sup_{x\in\mathbb{I}}\, \delta_F(x).$$

Teorema 2.2.[4] Neka je $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ neopadajuća funkcija i neka su $a := inf\ \mathbb{I}$ i $b := sup\ \mathbb{I}$. Tada je

$$\underset{x\in\mathbb{I}}{inf}\ \delta_F(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \delta_F(a) = a \ \text{(pri čemu } a \in \mathbb{I}) \ \text{ ili } \ \underset{x\to a}{lim}\ \delta_F(x) = a,$$

i

$$\underset{x\in\mathbb{I}}{sup}\ \delta_F(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \delta_F(b) = b \ \text{(pri čemu } b \in \mathbb{I}) \ \text{ ili } \ \underset{x\to b}{lim}\ \delta_F(x) = b.$$

Dokaz:

($\Rightarrow$) Pretpostavimo da

$$inf_{x\in\mathbb{I}}\ \delta_F(x) = a \quad (2.1)$$

i $\delta_F(a) \neq a$. Tada je neophodno da $a \notin \mathbb{I}$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Na osnovu (2.1), postoji $x^* \in \mathbb{I}$ takvo da je $\delta_F(x^*) - a \leq \varepsilon$. Sledi da, za svako $x \in \mathbb{I}$, takvo da je $x \leq x^*$, važi

$$0 \leq \delta_F(x) - a \leq \delta_F(x^*) - a \leq \varepsilon,$$

odnosno,

$$lim_{x\to a}\ \delta_F(x) = a. \quad (2.2)$$

($\Leftarrow$) Ako $a \in \mathbb{I}$ i $\delta_F(a) = a$ tada direktno važi (2.1).

Pretpostavimo da važi (2.2). Neka je $\varepsilon > 0$. Tada je $0 < \eta < b - a$ takvo da $x \leq a + \eta$ implicira $\delta_F(x) - a \leq \varepsilon$. Ako izaberemo $x^* = a + \eta$, imamo $x^* \in \mathbb{I}$ i $\delta_F(x^*) - a \leq \varepsilon$ pa važi (2.1).

Posledica 2.1.[4] Neka je $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ neopadajuća funkcija. Ako je F idempotentna, tj. $\delta_F(x) = x$ za sve $x \in \mathbb{I}$, onda je ona funkcija agregacije na $\mathbb{I}^n$ i na svakom podintervalu.

Definicija 2.3.[4] *Proširena* (eng. extended) *funkcija* iz $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n$ je preslikavanje

$$F: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}.$$

Proširena funkcija agregacije iz $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n$ je proširena funkcija A iz $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n$, čija je restrikcija $A^{(n)} := A|_{\mathbb{I}^n}$ u $\mathbb{I}^n$ funkcija agregacije na $\mathbb{I}^n$, za svako $n \in \mathbb{N}$.

Kako je proširena funkcija definisana za bilo koji broj argumenata, može se posmatrati kao niz $\left(F^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ čiji je n-ti element n-arna funkcija $F^{(n)}: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$. Nekad ćemo proširenu funkciju zvati samo funkcija.

2.1. Najpoznatije funkcije agregacije

- *Funkcija aritmetičke sredine* $AM: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i *funkcija geometrijske sredine* $GM: [0, +\infty]^n \to [0, +\infty]$ su definisane na sledeći način:

$$AM(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$GM(\boldsymbol{x}) := \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}.$$

Kada je $n > 1$, geometrijska sredina nije funkcija agregacije na bilo kom domenu. Moramo razmatrati domen $\mathbb{I}^n$ takav da je $\mathbb{I} \subseteq [0, +\infty]$, uz uslov da je $0 \cdot \infty = 0$.

- Za svako $k \in X$, *projekcija* je funkcija $P_k: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$P_k(\boldsymbol{x}) := x_k$$

Projekcija na prvu i poslednju koordinatu definisane su kao

$$P_F(\boldsymbol{x}) := P_1(\boldsymbol{x}) = x_1$$

$$P_L(\boldsymbol{x}) := P_n(\boldsymbol{x}) = x_n$$

- *Statistika poretka reda k* (eng. order statistic) je funkcija $OS_k: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definisana kao

$$OS_k(\boldsymbol{x}) := x_{(k)}$$

gde je

$$x_{(1)} \leq \cdots \leq x_{(k)} \leq \cdots \leq x_{(n)}.$$

- *Minimum* i *maksimum* definisani su na sledeći način:

$$Min(\boldsymbol{x}) := min(x_1, \dots, x_n),$$

$$Max(\boldsymbol{x}) := max(x_1, \dots, x_n),$$

a zapisuju se i pomoću simbola $\wedge$ i $\vee$ na sledeći način:

$$Min(\boldsymbol{x}) = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i \quad i \quad Max(\boldsymbol{x}) = \bigvee_{i=1}^{n} x_i.$$

Može se primetiti da su minimum i maksimum respektivno statistike prvog i n-tog reda.

Sa OS_k možemo označiti termine samo u smislu minimumam i maksimuma kao

$$OS_k(\boldsymbol{x}) = \bigwedge_{\substack{T\subseteq X\\ |T|=k}} \bigvee_{i\in T} x_i = \bigvee_{\substack{T\subseteq X\\ |T|=n-k+1}} \bigwedge_{i\in T} x_i.$$

Medijana neparnog broja vrednosti $(x_1, \dots, x_{2k-1})$ je definisana kao

$$Med(x_1, \dots, x_{2k-1}) := x_{(k)} = \bigwedge_{\substack{T\subseteq[2k-1]\\ |T|=k}} \bigvee_{i\in T} x_i = \bigvee_{\substack{T\subseteq[2k-1]\\ |T|=k}} \bigwedge_{i\in T} x_i.$$

Za bilo koje $\alpha \in \mathbb{I}$, α-*medijana* u oznaci $Med_\alpha: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definisana je kao

$$Med_\alpha(\boldsymbol{x}) = Med\left(x_1, \dots, x_n, \underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_{n-1}\right) = Med\big(Min(\boldsymbol{x}), \alpha, Max(\boldsymbol{x})\big).$$

- Za svaki podskup $S \subseteq X$, *parcijalni minimum (*eng. partial minimum) $Min_S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i *parcijalni maksimum (*eng. partial maximum) $Max_S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, u odnosu na S, definisani su kao

$$Min_S(\boldsymbol{x}) := \bigwedge_{i\in S} x_i$$

$$Max_S(\boldsymbol{x}) := \bigvee_{i\in S} x_i.$$

- Za svaki vektor težine $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_n) \in [0,1]^n$, takav da je $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, *ponderisana (težinska) aritmetička sredina* je funkcija $WAM_{\boldsymbol{w}}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ u odnosu na w, i funkcija *ponderisane aritmetičke sredine poretka* $OWA_{\boldsymbol{w}}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definisane su kao

$$WAM_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}) := \sum_{i=1}^n w_i x_i$$

$$OWA_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}) := \sum_{i=1}^n w_i x_{(i)}.$$

- Funkcije s*uma* $\sum: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i *proizvod* $\prod: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definisane su kao

$$\sum(\boldsymbol{x}) := \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\prod(\boldsymbol{x}) := \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

Treba napomenuti da, kada je $n > 1$, poslednje dve funkcije nisu funkcije agregacije na svakom domenu. Za sumu treba da razmatramo domene $\mathbb{R}^n$, $|0, +\infty|^n$ i $|-\infty, 0|^n$, pri čemu $|a, b|$ predstavlja realan interval takav da su a i b krajnje tačke. Za proizvod, kada je ograničenje $[0, +\infty]^n$ razmatramo domene $|0,1|^n$, $|1, +\infty|^n$, $|0, +\infty|^n$ i to da je $0 \cdot \infty = 0$.

- Pretpostavimo da je $\mathbb{I} = [a, b]$ zatvoren interval. *Najmanja* i *najveća funkcija agregacije* na $[a, b]^n$ definisane su kao

$$A_{\perp}(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} b, & ako\ je\ \ x_i = b, za\ sve\ i \in X \\ a, & inače \end{cases}$$

$$A_{\top}(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} a, & ako\ je\ x_i = a, za\ sve\ i \in X \\ b, & inače. \end{cases}$$

Iz definicije sledi $A_{\perp} \leq A \leq A_{\top}$ za svaku funkciju agregacije $A\colon [a, b]^n \to [a, b]$.

- *Konstantna funkcija* $C_c\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, data sa

$$C_c(\boldsymbol{x}) := c,$$

gde je $c \in \mathbb{R}$ fiksna konstanta, je trivijalni primer funkcije koja nije funkcija agregacije sem u slučaju kada je $\mathbb{I} = \{c\}$.

2.2. Osnovne matematičke osobine

Najpre ćemo navesti osnovne osobine potrebne za agregaciju.

2.2.1. Monotonost

Definicija 2.4.[4] Funkcija $F\colon \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je *neopadajuća* (za svaki argument) ako, za svako $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{I}^n$, važi

$$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}' \implies F(\boldsymbol{x}) \leq F(\boldsymbol{x}').$$

Dakle, za neopadajuću funkciju važi da povećanje ulazne vrednosti ne utiče na smanjenje izlazne vrednosti. Osobinu neopadajuće monotonosti poseduju sve funkcije agregacije.

Definicija 2.5.[4] Funkcija $F\colon \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je *strogo rastuća* ako, za svako $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{I}^n$, važi

$$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}'\ i\ \ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}' \implies F(\boldsymbol{x}) < F(\boldsymbol{x}').$$

Funkcija je strogo rastuća ako je neopadajuća i predstavlja pozitivnu reakciju na bilo koje povećanje ulazne vrednosti. Stroga monotonost zahteva neopadajuću monotonost.

Definicija 2.6.[4] Funkcija $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je *osetljiva* (eng. sensitive) ako, za svaki indeks $i \in X$ i svaki realan broj $\lambda \neq 0$, važi $F(\boldsymbol{x}) \neq F(\boldsymbol{x} + \lambda 1_{\{i\}})$.

Kada je $K \subseteq X$, sa 1_K označavamo karakteristični vektor skupa K u $\{0,1\}^n$, tj. n-torku čija je i-ta koordinata 1, ako $i \in K$, i 0, inače.

Teorema 2.3.[4] Neopadajuća funkcija $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je strogo rastuća ako i samo ako je osetljiva.

Jednoglasno rastuća funkcija, drugačije rečeno, *zajednička strogo rastuća* funkcija je neopadajuća funkcija koja predstavlja pozitivan odgovor kad god su sve ulazne vrednosti strogo rastuće.

Definicija 2.7.[4] Funkcija $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je *jednoglasno rastuća* ako je neopadajuća i ako, za sve $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{I}^n$ važi

$$x_i < x'_i, \qquad \forall i \in X \;\; \Rightarrow \;\; F(\boldsymbol{x}) < F(\boldsymbol{x}').$$

Ako je funkcija strogo rastuće monotona onda je i jednoglasno rastuće monotona. Na primer, aritmetička sredina je strogo rastuća pa i osetljiva i jednoglasno rastuća. Funkcije minimum i maksimuma su jednoglasno rastuće ali ne i strogo rastuće itd.

2.2.2. Neprekidnost

Definicija 2.8.[4] Funkcija $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je *neprekidna* ako je

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^* \\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n}} F(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}^*) \quad (\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{I}^n).$$

Neprekidnost znači da male promene argumenata ne bi trebalo da podrazumevaju veliku promenu agregatne vrednosti.

Teorema 2.4.[4] Za neopadajuću funkciju $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

1) F je neprekidna.
2) F je neprekidna za svaku promenljivu, tj. za svako $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$ i svako $i \in X$ unarna funkcija

$$u \longmapsto F(x_1, \dots, x_{i-1}, u, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

   je neprekidna.

3) za svako $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{I}^n$, $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ i za svako $c \in [F(\boldsymbol{x}), F(\boldsymbol{y})]$, postoji $\boldsymbol{z} \in \mathbb{I}^n$, $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{y}$, takvo da je $F(\boldsymbol{z}) = c$.

$Dokaz$:

Da iz 1) ⇒ 2) je trivijalno.

2) ⇒ 1) Fiksiramo $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{I}^n$, $\varepsilon > 0$ i neka je $\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathbb{I}^n$ koji konvergira ka $\boldsymbol{x}^*$. Definišemo nizove $\left(\boldsymbol{a}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ i $\left(\boldsymbol{b}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ u $\mathbb{I}^n$ koji konvergiraju ka $\boldsymbol{x}^*$, takve da važi $\boldsymbol{a}^{(k)} \leq \boldsymbol{a}^{(k+1)}$, $\boldsymbol{b}^{(k+1)} \leq \boldsymbol{b}^{(k)}$ i $\boldsymbol{a}^{(k)} \leq \boldsymbol{x}^{(k)} \leq \boldsymbol{b}^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$.

Neprekidnost F u i-toj promenljivoj znači da postoji $K_i \in \mathbb{N}$ takvo da je, za svako $k \geq K_i$,

$$F(\boldsymbol{x}^*) - \varepsilon \leq F\left(\left(a_i^{(K_i)}\right)_{\{i\}} \boldsymbol{x}^*\right) \leq F\left(\left(x_i^{(k)}\right)_{\{i\}} \boldsymbol{x}^*\right) \leq F\left(\left(b_i^{(K_i)}\right)_{\{i\}} \boldsymbol{x}^*\right) \leq F(\boldsymbol{x}^*) + \varepsilon.$$

Sledi da, za svako $k \geq K := max_{i\in X} K_i$, važi

$$F(\boldsymbol{x}^*) - n\varepsilon \leq F\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right) \leq F(\boldsymbol{x}^*) + n\varepsilon$$

pa je F neprekidna.

1) ⇒ 3) Poznato je da za neprekidnu unarnu funkciju ova implikacija važi (nezavisno od toga da li je neopadajuća ili ne). Za svako $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{I}^n$ takve da je $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ i $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ možemo definisati unarnu funkciju $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ kao

$$f(t) = F\big((1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}\big).$$

Ova funkcija je neprekidna i za svako $c \in [F(\boldsymbol{x}), F(\boldsymbol{y})] = [f(0), f(1)]$ postoji neko $t_0 \in [0,1]$, takvo da je $f(t_0) = c$. Postoji $\boldsymbol{z} = (1-t_0)\boldsymbol{x} + t_0\boldsymbol{y}$ koje zadovoljava $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{y}$, takvo da je $F(\boldsymbol{z}) = c$.

Definicija 2.9.[4] Neka je $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ norma i $D \subseteq \mathbb{I}^n$. Funkcija $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je *uniformno neprekidna* na D (u odnosu na $\|\cdot\|$) ako, za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da je $|F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{y})| < \varepsilon$ kad god je $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < \delta$ i $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in$ D.

Uniformno neprekidna funkcija je neprekidna, dok obrnuto ne važi. Međutim, obrnuto važi za funkcije na specijalnim domenima kao što su zatvoreni i ograničeni intervali.

Teorema 2.5.[4] Funkcija $F: [a,b]^n \to \mathbb{R}$ je uniformno neprekidna u $[a,b]^n$ ako i samo ako je neprekidna u $[a,b]^n$.

Dokaz: Pretpostavimo da je F neprekidna u $[a,b]^n$ ali ne i uniformno neprekidna. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takvo da, za svako $k \in \mathbb{N}$, postoje $\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{y}^{(k)} \in [a,b]^n$ koji zadovoljavaju $\left\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{y}^{(k)}\right\| \leq 1/k$ i $\left|F\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right) - F\left(\boldsymbol{y}^{(k)}\right)\right| > \varepsilon$.

Iz niza $\boldsymbol{x}^{(k)}$ možemo izdvojiti podniz $\boldsymbol{x}^{(k_m)}$ koji konvergira ka $\boldsymbol{x}^* \in [a, b]^n$. Onda i podniz $\boldsymbol{y}^{(k_m)}$ takođe konvergira ka $\boldsymbol{x}^*$ jer

$$\left\|\boldsymbol{y}^{(k_m)} - \boldsymbol{x}^*\right\| \leq \left\|\boldsymbol{y}^{(k_m)} - \boldsymbol{x}^{(k_m)}\right\| + \left\|\boldsymbol{x}^{(k_m)} - \boldsymbol{x}^*\right\|.$$

Dakle, iz neprekidnosti $F\left(\boldsymbol{x}^{(k_m)}\right) - F\left(\boldsymbol{y}^{(k_m)}\right)$ sledi konvergencija $F(\boldsymbol{x}^*) - F(\mathbf{x}^*) = 0$, što je kontradikcija jer je

$$\left|F\left(\boldsymbol{x}^{(k_m)}\right) - F\left(\boldsymbol{y}^{(k_m)}\right)\right| > \varepsilon.$$

Definicija 2.10.[4] Neka je $f: \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ funkcija i D podskup $\mathbb{R}$. *Varijacija* (eng. variation) od f na D, u oznaci $Var_D(f)$, se definiše na sledeći način : Ako je $D \cap \mathbb{I} = \emptyset$ onda je $Var_D(f) = 0$, inače $Var_D(f)$ je data kao

$$sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |f(a_i) - f(a_{i-1})| : a_0, \dots a_n \in D \cap \mathbb{I}, a_0 \leq \cdots \leq a_n\right\},$$

gde supremum prolazi kroz sve konačne familije $\{a_0, \dots a_n\}$ za $n \in \mathbb{N}$. Ako je $Var_D(f)$ konačna, kažemo da je f *ograničena varijacija* na D.

Teorema 2.6.[4] Neka je $f: \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ funkcija ograničene varijacije. Onda je f diferencijabilna skoro svuda na $\mathbb{I}$, i f' je integrabilna na celom $\mathbb{I}$ i važi

$$\int_{\mathbb{I}} |f'(t)| dt \leq Var_{\mathbb{I}}(f).$$

Definicija 2.11.[4] Unarna funkcija $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ je *apsolutno neprekidna* ako, za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ takvo da za svaki konačan sistem disjunktnih intervala $(a_i, b_i) \subset (a, b)$, $i = 1, \dots, n$, za koje je

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$$

važi

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

Svaka apsolutno neprekidna funkcija na zatvorenom intervalu je neprekidna na tom intervalu.

Teorema 2.7.[4] Apsolutno neprekidna funkcija $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ je ograničena varijacija na $[a, b]$.

Teorema 2.8.[4] Neka je $\mathbb{I} = [a, b]$.

1) Apsolutno neprekidna funkcija na $\mathbb{I}$ je uniformno neprekidna.
2) Ako je $f: \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ apsolutno neprekidna, ona je i ograničena varijacija na $\mathbb{I}$, pa je diferencijabilna skoro svuda na $\mathbb{I}$ i njen izvod je integrabilan na celom $\mathbb{I}$.
3) Ako su $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ apsolutno neprekidne, onda su i $f + g$ i cf takođe, za svako $c \in \mathbb{R}$.
4) Ako su $f, g: \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ apsolutno neprekidne, onda je fg takođe.
5) Ako su $g: \mathbb{I} \to [c, d]$ i $f: [c, d] \to \mathbb{R}$ apsolutno neprekidne i g je neopadajuća, onda je kompozicija $f \circ g: \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ apsolutno neprekidna.

Teorema 2.9.[4] Neka je $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

1) Postoji integrabilna realna funkcija $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ takva da je

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt \quad (x \in [a, b]).$$

2) $\int_a^x f'(t)dt$ postoji i jednak je $f(x) - f(a)$ za svako $x \in [a, b]$.
3) f je apsolutno neprekidna.

Teorema 2.10.[4] Neka je $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija koja je diferencijabilna na (a, b). Ako je njen izvod f' integrabilan nad $[a, b]$, tada je f apsolutno neprekidna i važi

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt.$$

Definicija 2.12.[4] Kažemo da je $F: [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ *apsolutno neprekidna* ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

1) Za dato $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da je

$$\sum_{R \in \mathcal{R}} |\Delta_R(F)| < \varepsilon$$

gde je $\mathcal{R}$ konačan skup pravougaonika koji se po parovima ne preklapaju $R = [a', b'] \times [c', d']$ koji su podskupovi pravougaonika $[a, b] \times [c, d]$,

$$\Delta_R(F) = F(a', c') - F(b', c') - F(a', d') + F(b', d'),$$

i važi

$$\sum_{R \in \mathcal{R}} \lambda(R) < \delta;$$

gde je λ Lebegova mera na $\mathbb{R}^2$;

2) funkcije $F(\cdot,d)$ i $F(b,\cdot)$ su apsolutno neprekidne funkcije jedne promenljive na $[a,b]$ i $[c,d]$, respektivno.

Definicija 2.13.[4] Neka je $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ norma. Ako funkcija $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ zadovoljava nejednakost

$$|F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{y})| \leq c\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{I}^n)$$

za neku konstantu $c \in (0,+\infty)$, onda kažemo da funkcija F zadovoljava *Lipšicov uslov*, pri čemu $c > 0$ nazivamo Lipšicovom konstantom.

Ako funkcija $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ zadovoljava nejednakost

$$|F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{y})| \leq c\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^{\alpha} \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{I}^n),$$

gde je $0 < \alpha \leq 1$ i $c \in (0,+\infty)$, onda kažemo da funkcija F zadovoljava *Lipšicov uslov stepena α*. U slučaju kada je $0 < \alpha < 1$, ovaj uslov nazivamo *Holderov uslov stepena α*.

2.2.3. Simetričnost

Definicija 2.14.[4] Funkcija $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je *simetrična* ako je

$$F(\boldsymbol{x}) = F([\boldsymbol{x}]_{\sigma}) \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n, \sigma \in \mathfrak{S}_X),$$

pri čemu je $\mathfrak{S}_X$ skup svih permutacija na X, a $[\boldsymbol{x}]_{\sigma} = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$.

Simetričnost ustvari znači da agregatna vrednost ne zavisi od redosleda argumenata. Simetrične funkcije su AM, GM i $OWA_{\mathbf{w}}$, dok $WAM_{\mathbf{w}}$ nije.

Teorema 2.11.[4] Funkcija $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je simetrična ako i samo ako, za sve $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$, važi

1) $F(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$
2) $F(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1) = F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

2.2.4. Idempotentnost

Definicija 2.15.[4] Funkcija $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je *idempotentna* ako je $\delta_F = id$, odnosno

$$F(n \cdot x) = x \quad (x \in \mathbb{I}).$$

Idempotentne funkcije su AM, $WAM_{\mathbf{w}}$, $OWA_{\mathbf{w}}$, Min, Max i Med, dok $\sum$ i $\prod$ nisu. Svaka neopadajuća i idempotentna funkcija $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je funkcija agregacije.

Definicija 2.16.[4] Funkcija $F: \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je *strogo idempotentna* ako, za svako $n \in \mathbb{N}$, važi

$$F(n \cdot \boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x} \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^m).$$

Na primer, ako je $F: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ strogo idempotentna, imamo

$$F(x_1, x_2, x_1, x_2) = F(x_1, x_{2,}).$$

Teorema 2.12.[4] Pretpostavimo da je $F: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ strogo idempotentna. Onda je F idempotentna ako i samo ako je $F(x) = x$ za sve $x \in \mathbb{I}$.

Dokaz: Ako je F strogo idempotentna, imamo $F(n \cdot x) = F(x)$ za sve $x \in \mathbb{I}$ pa otuda i važi teorema.

2.3. Šokeov integral kao funkcija agregacije

Ako je $\mathbb{I}$ ograničen, samo normirana monotona mera obezbeđuje da će granice $\mathbb{I}$ biti očuvane i zbog toga Šokeov integral je funkcija agregacije ako i samo ako je μ normirana monotona mera. Ako je $\mathbb{I} := \mathbb{R}_+$ ovaj uslov više nije neophodan.

Neka je μ monotona mera na $(X, \boldsymbol{P}(X))$, gde je $X = \{1, \dots, n\}$ i $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^n$. Ako je σ permutacija na X takva da važi $x_{\sigma(1)} \leq x_{\sigma(2)} \leq \cdots \leq x_{\sigma(n)}$, uz uslov $x_{\sigma(0)} := 0$ i $A_{\sigma(i)} := \{\sigma(i), \dots, \sigma(n)\}$, za Šokeov integral od $\boldsymbol{x}$ u odnosu na μ koristićemo oznaku $C_\mu(\boldsymbol{x})$ koja je preuzeta iz [8]. Uzimajući u obzir prethodne oznake i oblik Šokeovog integrala na konačnom skupu, dat u odeljku 1.3.2, može se zaključiti da Šokeov integral od $\boldsymbol{x}$ u odnosu na μ ima sledeći oblik

$$C_\mu(\boldsymbol{x}) := \sum_{i=1}^{n} \left(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i-1)}\right) \mu\left(A_{\sigma(i)}\right).$$

Jasno se vidi da je ekvivalentna formula

$$C_\mu(\boldsymbol{x}) := \sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)} \left(\mu\left(A_{\sigma(i)}\right) - \mu\left(A_{\sigma(i+1)}\right)\right) \quad (2.3)$$

uz uslov $A_{\sigma(n+1)} := \emptyset$.

Nekad cemo koristiti x_i umesto $x_{\sigma(i)}$.

U sledećoj teoremi dati su uslovi koje monotona mera treba da zadovolji da bi se Šokeov integral svodio na specijalan slučaj funkcije agregacije.

Teorema 2.13.[4] Neka je μ normalizovana monotona mera na $(X, \boldsymbol{P}(X))$ i $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$. Važi:

1) $C_\mu = Min$ ako i samo ako je $\mu = \mu_{min}$.
2) $C_\mu = Max$ ako i samo ako je $\mu = \mu_{max}$.
3) $C_\mu = OS_k$ ako i samo ako je μ mera praga τ_{n-k+1}.

4) $C_\mu = P_k$ ako i samo ako je μ Dirakova mera δ_k.
5) $C_\mu = WAM_{\boldsymbol{w}}$ ako i samo ako je μ aditivna i važi $\mu(\{i\}) = w_i$, $\forall i \in X$.
6) $C_\mu = OWA_{\boldsymbol{w}}$ ako i samo ako je μ simetrična i važi $w_i = \mu(A_{n-i+1}) - \mu(A_{n-i})$, $i = 2, \dots, n$ i $w_1 = 1 - \sum_{i=2}^{n} w_i$, gde je A_i svaki podskup od X za koji važi $|A_i| = i$ odnosno, $\mu(A) = \sum_{j=0}^{i-1} w_{n-j}$, $\forall A$, $|A| = i$.

Dokaz: 1), 2) i 3) su specijalni slučajevi 6). 4) je specijalan slučaj 5).

5) neka je $\boldsymbol{w}$ težinski vektor. Koristeći (2.3) jednostavno možemo proveriti da, uzimajući da je μ aditivna i važi $\mu(\{i\}) := w_i$, za sve $i \in X$, imamo $WAM_{\boldsymbol{w}} = C_\mu$. Sa druge strane, pošto je $WAM_{\boldsymbol{w}}$ aditivna, neophodno je da je i μ aditivna u C_μ [4].

6) Dovoljno je koristiti (2.3) i proveriti da li μ vodi ka $OWA_{\boldsymbol{w}}$. Nasuprot tome, pošto je svaka $OWA_{\boldsymbol{w}}$ simetrična, neophodno je da je i μ simetrična [4].

2.4. Sugenov integral kao funkcija agregacije

Kao i za Šokeov integral, u ovom odeljku ćemo posmatrati Sugenov integral kao funkciju agregacije nad $\mathbb{I}^n$ i, umesto oznake $(S)\int f d\mu$, koristićemo $S_\mu(\boldsymbol{x})$ dok $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$.

U prvom delu smo definisali Sugenov integral.

Neka je μ monotona mera na $(X, \boldsymbol{P}(X))$, gde je $X = \{1, \dots, n\}$, $\boldsymbol{x} \in [0, \mu(X)]^n$ i σ permutacija na X takva da je $x_{\sigma(1)} \le x_{\sigma(2)} \le \dots \le x_{\sigma(n)}$, uz uslov da je $A_{\sigma(i)} := \{\sigma(i), \dots, \sigma(n)\}$. *Sugenov integral* od $\boldsymbol{x}$ u odnosu na μ ima sledeći oblik

$$S_\mu(\boldsymbol{x}) := \bigvee_{i=1}^{n} \left(x_{\sigma(i)} \wedge \mu\big(A_{\sigma(i)}\big) \right).$$

Takođe, Sugenov integral od f u odnosu na μ možemo definisati i na sledeći način.

Teorema 2.14.[4] Za svako $\boldsymbol{x} \in [0, \mu(X)]^n$ i svaku monotonu meru μ na $(X, \boldsymbol{P}(X))$, Sugenov integral od $\boldsymbol{x}$ u odnosu na μ može se napisati kao

$$S_\mu(\boldsymbol{x}) = \bigvee_{A \subseteq X} \left(\bigwedge_{i \in A} x_i \wedge m(A) \right)$$

$$S_\mu(\boldsymbol{x}) = \bigwedge_{A \subseteq X} \left(\bigvee_{i \in A} x_i \vee \overline{m}(A) \right)$$

gde je m svaka skupovna funkcija takva da je $m_* \le m \le m^*$, uz uslov $m^* := \mu$ i

$$m_*(A) := \begin{cases} \mu(A), & \text{ako je } \mu(A) > \mu(A \setminus i), \forall i \in A \\ 0, & inače \end{cases}, \qquad \forall A \subseteq X,$$

i $\overline{m}$ je svaka skupovna funkcija takva da je $\overline{m}_* \leq \overline{m} \leq \overline{m}^*$, uz uslov $\overline{m}_*(A) := \mu(X \setminus A)$, $A \subseteq X$ i

$$\overline{m}^*(A) := \begin{cases} \mu(X \setminus A), & \text{ako je } \mu(X \setminus A) < \mu\big((X \setminus A) \cup i\big), \forall i \in A \\ 1, & inače \end{cases}, \qquad \forall A \subseteq X.$$

Teorema 2.15.[4] Neka je μ monotona mera na $\big(X, \boldsymbol{P}(X)\big)$. Sledeće formule Sugenovog integrala su ekvivalentne:

$$\begin{aligned} S_\mu(\boldsymbol{x}) &= \bigwedge_{i=1}^{n} \Big(x_{\sigma(i)} \vee \mu\big(A_{\sigma(i+1)}\big)\Big) \\ &= \bigvee_{i=1}^{n} \big(x_i \wedge \mu(\{j | x_i \geq x_i\})\big) \\ &= Med\Big(x_1, \dots, x_n, \mu\big(A_{\sigma(2)}\big), \dots, \mu\big(A_{\sigma(n)}\big)\Big). \end{aligned}$$

Definicija 2.17.[4] Neka $\boldsymbol{w} \in [0,1]^n$ zadovoljava $\bigvee_{i=1}^{n} w_i = 1$, i $\mathbb{I} = [0,1]$.

1) *Ponderisani maksimum* u odnosu na $\boldsymbol{w}$ je funkcija agregacije definisana kao

$$WMax_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}) := \bigvee_{i=1}^{n} (w_i \wedge x_i), \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n.$$

2) *Ponderisani minimum* u odnosu na $\boldsymbol{w}$ je funkcija agregacije definisana kao

$$WMin_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}) := \bigwedge_{i=1}^{n} \big((1 - w_i) \vee x_i\big), \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n .$$

3) *Funkcija ponderisanog maksimuma poretka* u odnosu na $\boldsymbol{w}$ je funkcija agregacije definisana kao

$$OWMax_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}) := \bigvee_{i=1}^{n} \big(w_i \wedge x_{(i)}\big), \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n,$$

uz uslov $x_{(1)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$.

4) *Funkcija ponderisanog minimum poretka* u odnosu na $\boldsymbol{w}$ je funkcija agregacije definisana kao

$$OWMin_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}) := \bigwedge_{i=1}^{n} \Big((1 - w_i) \vee x_{(i)}\Big), \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n.$$

U sledećoj teoremi dati su uslovi koje monotona mera treba da zadovolji da bi se Sugenov integral svodio na specijalan slučaj funkcije agregacije.

Teorema 2.16.[4] Neka je μ monotona mera na $(X, \boldsymbol{P}(X))$, $\mathbb{I} = [0, \mu(X)]$, tada važi:

1) $S_\mu = Min$ ako i samo ako je $\mu = \mu_{min}$.
2) $S_\mu = Max$ ako i samo ako je $\mu = \mu_{max}$.
3) $S_\mu = OS_k$ ako i samo ako je μ monotona mera praga τ_{n-k+1}.
4) $S_\mu = P_k$ ako i samo ako je μ Dirakova mera δ_k.
5) $S_\mu = WMax_{\boldsymbol{w}}$ ako i samo ako je μ normirana maksitivna monotona mera, takva da je $\mu(\{i\}) = w_i$ za sve $i \in X$.
6) $S_\mu = WMin_{\boldsymbol{w}}$ ako i samo ako je μ normirana minitivna monotona mera, takva da je $\mu(X \setminus \{i\}) = \mu(X) - w_i$, za sve $i \in X$.
7) $S_\mu = OWMax_{\boldsymbol{w}}$ ako i samo ako je μ normirana simetrična monotna mera, takva da je $\mu(A) = w_{n-|A|+1}$, za sve $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$.
8) $S_\mu = OWMin_{\boldsymbol{w}}$ ako i samo ako je μ normirana simetrična monotna mera, takva da je $\mu(A) = w_{n-|A|}$, za sve $A \subsetneq X$.

*Dokaz:*1), 2), 3) i 4) slede iz *Teoreme 2.13*

5) Pretpostavimo da je μ normirana maksitivna i definišimo $w_i := \mu(\{i\})$ za svako $i \in X$. Ovako definisan težinski vektor $\boldsymbol{w}$ zadovoljava $\vee_i w_i = 1$. Znamo da je S_μ takođe maksitivna [4], pa za svako $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n = [0,1]^n$ važi

$$\begin{aligned} S_\mu(\boldsymbol{x}) &= \bigvee_{i=1}^{n} S_\mu(x_i \mathbf{1} \wedge \mathbf{1}_i) \\ &= \bigvee_{i=1}^{n} \left(x_i \wedge S_\mu(\mathbf{1}_i)\right) \quad (\wedge -homogenost) \\ &= \bigvee_{i=1}^{n} (x_i \wedge w_i). \end{aligned}$$

Sa druge strane, pošto je $WMax$ maksitivna, neophodno je da i μ bude maksitivna [4]. Čak šta više, $WMax_{\boldsymbol{w}}(\mathbf{1}_i) = w_i = \mu(\{i\})$.

6) sledi na osnovu 5).

7) Uzmimo neki težinski vektor $\boldsymbol{w}$, takav da je $\vee_i w_i = 1$, i definišimo simetričnu monotonu meru $\mu(A) = w_{n-|A|+1}$, za svako $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Imamo

$$S_\mu(\boldsymbol{x}) = \bigvee_{i=1}^{n} \left(x_{(i)} \wedge \mu\left(A_{(i)}\right)\right)$$

$$= \bigvee_{i=1}^{n} \left(x_{(i)} \wedge w_i\right) = OWMax_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}).$$

Sugenov integral je simetričan ako i samo ako je μ simetrična i važi $OWMax_{\boldsymbol{w}}(\mathbf{1}_A) = w_{n-|A|+1} = \mu(A)$.

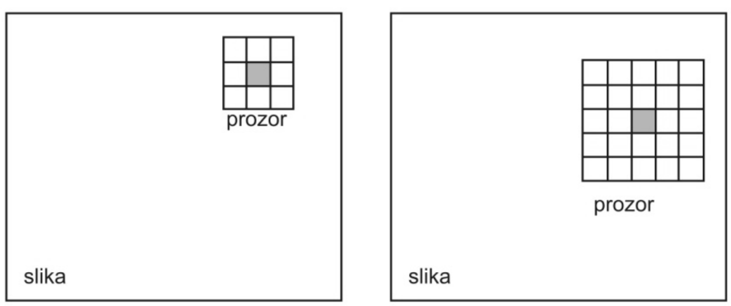
8) sledi iz 7).

3. Primena Sugenovog i Šokeovog integrala u obradi slika

Kako u današnje vreme postoji sve veća potreba za vizualizacijom i analizom slika u mnogim oblastima tako su se razvile razne metode koje se koriste za poboljšanje kvaliteta slike, izdvajanje bitnih karakteristika slike, prepoznavanje oblika itd. U postupku poboljšanja kvaliteta slike veoma je važno uklanjanje šuma iz slike. Uklanjanje šuma se može vršiti pomoću filtera koji su zasnovani na funkcijama agregacije. Primena Sugenovog i Šokeovog integrala kao filtera je proučavana od strane više autora u [3],[5],[7],[9] itd.

3.1. Sugenov i Šokeov integral kao filter za uklanjanje šuma

Posmatrajmo u jednom delu slike piksel ξ i piksele $x_1, x_2, \dots, x_n$ koji se nalaze u njegovoj okolini. Okolinu piksela ξ predstavlja prozor koji je najčešće kvadratnog oblika dimenzija $k \times k$ gde je k obično neparan broj i u čijem centru se nalazi ξ (*Slika 3.1*). Neka je f funkcija koja predstavlja nijanse sive u prozoru na crno-beloj slici. Sugenov i Šokeov integral se mogu primeniti kao filteri tako što se boja piksela ξ zameni sa vrednosti ovih integrala funkcije f na skupu $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Različit izbor mere na kojima su bazirani ovi integrali daje različite vrste filtera [1]. S obzirom da postoji veza Sugenovog i Šokeovog integrala sa najpoznatijim funkcijama agregacije, koja je data u prethodnom poglavlju, specijalni slučajevi filtera baziranih na ovim integralima su filteri bazirani na aritmetičkoj sredini, ponderisanoj aritmetičkoj sredini poretka, statistici poretka, minimumu, maksimumu itd. Ovi filteri se često koriste u praksi kako bi se uklonio šum iz slike.



Slika 3.1. Okolina piksela ξ

U primeru koji sledi Šokeov integral je definisan u odnosu na Sugenovu meru, tj. λ-meru g_λ na merljivom prostoru $(X, \boldsymbol{P}(X))$, za koju je $g_\lambda(X) = 1$. Prilikom određivanja λ-mere gde skup *X* ima *n* elemenata, problem se svodi na utvrđivanje vrednosti λ-mere samo nad jednoelementnim podskupovima skupa *X*. Vrednosti λ-mere nad drugim podskupovima skupa *X*, potrebnim za izračunavanje Šokeovog integrala na tom skupu, mogu se odrediti pomoću vrednosti te skupovne funkcije na jednoelementnim podskupovima. Naime, ako koristimo oznake iz odeljka *1.3.2*, jednakost datu u *Teoremi 1.6* i $g_\lambda(X) = 1$, dobijamo da se λ može odrediti rešavanjem sledećeg polinoma:

$$1 + \lambda = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \lambda \cdot g_\lambda(\{x_i^*\})\right),$$

dok se na osnovu *Definicije 1.8* vrednosti g_λ Sugenove mere nad skupovima $X_i = \{x_i^*, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*\}$, $1 < i < n$ određuju pomoću sledećih formula:

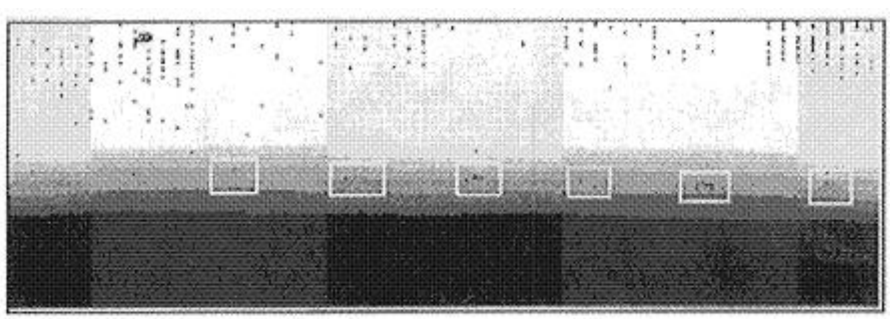
$$g_\lambda(X_n) = g_\lambda(\{x_n^*\}),$$

$$g_\lambda(X_{i-1}) = g_\lambda(X_i \cup \{x_{i-1}^*\}) = g_\lambda(X_i) + g_\lambda(\{x_{i-1}^*\}) + \lambda \cdot g_\lambda(X_i) \cdot g_\lambda(\{x_{i-1}^*\}),$$

gde se vrednosti broja i uzimaju u opadajućem redosledu, tj. počevši od $n - 1$. Posle utvrđenih vrednosti λ-mere na skupovima X_i za svako $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ na prethodno opisan način, vrednost Šokeovog integrala se dobija pomoću formule za izračunavanje ovog integrala na konačnom skupu, date u odeljku *1.3.2*.

Sada će biti opisan primer primene Šokeovog integrala kao filtera [8],[9].

Na *Slici 3.2* je dat laserski snimak terena (eng. LADAR range image). Potrebno je dobiti jasnu sliku kolone vozila koja se nalazi u sredini. Slika prikazuje 6 od 9 meta (ciljeva). Ručno su ucrtani beli pravougaonici koji okružuju vozila koja se nalaze u koloni.



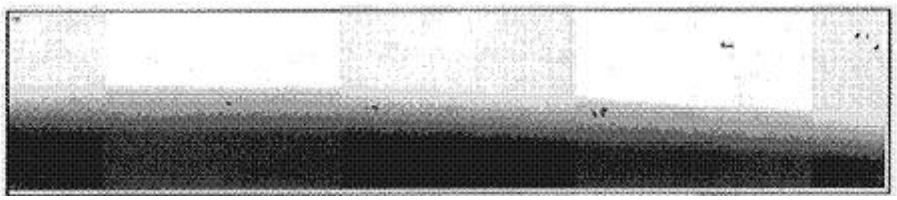
Slika 3.2.[1] Laserski snimak terena

Na originalnu sliku su primenjena sledeća tri filtera:

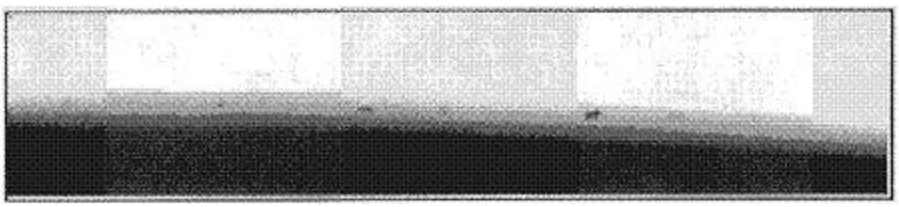
a) standardni 5x5 medijana filter (filter baziran na medijani),
b) 3x3 OWA filter sa težinama 0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.25, 0, 0, 0 (filter baziran na ponderisanoj aritmetičkoj sredini poretka),
c) 5x5 filterom baziranim na Šokeovim integralom u odnosu na Sugenovu meru.

Umesto 5x5 OWA filtera se primenjuje 3x3 OWA filter jer 5x5 OWA filter daje iste rezultate kao 5x5 medijana filter [9].

a) 3x3 OWA filter



b) 5x5 medijana (srednji) filter



c) 5x5 Šokeov filter

Slika 3.3.[1] Primena filtera

Način na koji se definiše monotona mera u odnosu na koju je definisan Šokeov integral je opisan u [9]. Naime, vrednost monotone mere na jednoelementnom skupu koji sadrži posmatrani piksel predstavlja stepen sličnosti sa bojama piksela koji se nalaze u njegovoj okolini. U sva tri posmatrana slučaja se vrednost posmatranog piksela zamenjuje sa vrednošću koja se dobija pomoću filtera.

Prednost filtera zasnovanog na Šokeovom integralu u odnosu na druga dva filtera se ogleda u tome što bolje očuvava ivice oblika.

Na *Slici 3.3* prikazani su rezultati dobijeni primenom ova tri filtera na originalnu sliku. Zbog malog formata slika teže je videti da u prva dva slučaja postoji određena tekstura u pozadini dok je na trećoj slici uklonjena. Dakle, filter baziran na Šokeovom integralu se takođe pokazao boljim i u procesu ublažavanja (eng. smoothing).

3.2. Sugenov i Šokeov integral u prepoznavanju oblika

Fazi integrali se mogu koristiti i za rešavanje problema prepoznavanja oblika [1]. Prepoznavanje oblika igra značajnu ulogu jer se svodi na proces donošenja odluke. Slike koje se obrađuju ne moraju biti samo slike koje se dobijaju pomoću kamere nego i slike koje se dobijaju putem satelita, letelica, telekomunikacionih uređaja za prenos, uređaja za medicinsku dijagnostiku, radara kao i mnogih drugih uređaja. U nastavku će biti opisano na koji način se mogu primeniti Sugenov i Šokeov integral prilikom klasifikacije objekta na slici. Identifikuju se izvori informacija koji mogu biti pojedinačne funkionalnosti, klasifikatori oblika, informacije o kontekstu, itd. Za oblik koji je potrebno klasifikovati, računa se funkcija $h_i(x_j)$ (eng. evidence function) za svaki izvor informacija x_j i svaku klasu i. Zatim se integrale funkcije $\{h_i\}$ u odnosu na njihovu odgovarajuću klasu fazi mere i rezultiraju u jednu vrednost poverenja (eng. confidence value) za svaku klasu. Ove vrednosti poverenja se koriste da bi se donela konačna odluka o klasifikaciji, na primer, oblik se svrstava u klasu sa najvećim poverenjem. U sledećoj tabeli je opisan postupak kojim se integrali Sugena i Šokea primenjuju u klasifikaciji.

Dato	• Skup izvora informacija $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ • Oznaka: objekat $\boldsymbol{z}$ • Za $1 \le i \le c$, funkcija $h_i\colon X \to [0,1]$ koja pokazuje pripadnost objekta $\boldsymbol{z}$ klasi i u odnosu na x_j
Dobiti	λ -mere $\{g_i\}$ pri čemu je $1 \le i \le c$
Pronaći	$h_i(x_j)$ za sve izvore j i svaku klasu i za objekat $\boldsymbol{z}$
Sortirati	$X\colon \{h_i(x_1) \le h_i(x_2) \le \dots \le h_i(x_n)\colon 1 \le i \le c\}$
Izračunati	$f_{g_i}(h_i) = \begin{cases} S_{g_i}(h_i) = \bigvee_{j=1}^{n} \left(h_i(x_j) \wedge g_i(X_j)\right) \ \forall i \text{ ili} \\ C_{g_i}(h_i) = \sum_{j=1}^{n} \left(h_i(x_j) - h_i(x_{j-1})\right) \cdot g_i(X_j) \ \forall i \end{cases}$ gde je $X_j = \{x_j, x_{j+1}, \dots, x_n\}$,
Niz	$\boldsymbol{D}_{f_g}(\boldsymbol{z}) = \left(f_{g_1}(h_1(\boldsymbol{z})), \dots, f_{g_c}(h_c(\boldsymbol{z}))\right)^T$ gde je $f = S$ ili C i $g = (g_1, \dots, g_c)$
Odluka	$\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{D}_{f_g}(\boldsymbol{z})\right) = \boldsymbol{e}_i \Leftrightarrow f_{g_i}(h_i(\boldsymbol{z})) \ge f_{g_j}\left(h_j(\boldsymbol{z})\right) \ \forall j \ne i$

Tabela 3.1.[1] Klasifikatori bazirani na fazi integralim

U *Tabeli 3.1*, vrste *Sortirati* i *Izračunati,* postupak za računanje integrala je prilagođen prvom delu ovog rada, dok se u [1] vrednosti $h_i(x_1), h_i(x_2), \dots, h_i(x_n)$ za svako $1 \le i \le c$ sortiraju u opadajućem redosledu, a zatim se pimenjuju ekvivaletne forme ovih integrala.

U polju *Niz* je data formula kojom se dobija vektor verovatnoća koji odgovara objektu $\boldsymbol{z}$ koristeći bilo Sugenov ili Šokeov integral. Dakle, $\boldsymbol{D}_{f_g}$ je klasifikator verovatnoća koji zavisi od Sugenovog ili Šokeovog integrala. U poslednjem redu *Tabele 3.1* je dato na koji se način donosi odluka kojoj klasi pripada objekat $\boldsymbol{z}$ pomoću prethodno izračunatih vrednosti, što je označeno sa $\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{D}_{f_g}(\boldsymbol{z})\right)$ [1]. Izraz dat u polju *Niz* autori često nazivaju *fazi klasifikator*.

Sada ćemo opisati primenu Šokeovog i Sugenovog integrala kao klasifikatora koji se koristi u automatskom prepoznavanju oblika od interesa na slici. Tačnije, pokazaćemo primenu na primeru Sugenovog integrala [1], [13].

Godine 1990. Tahani i Keler razvili su klasifikator baziran na fazi integralima za automatsko (ciljano) prepoznavanje (eng. ATR - automatic target recognation) i testirali ga pomoću infracrvene FLIR kamere (eng. FLIR - forward looking infrared camera) [13]. Infracrvene FLIR kamere su kamere koje formiraju sliku na osnovu toplote koju otkrivaju. Posmatrali su sliku dobijenu kamerom, koja sadrži dva tenka i jedan oklopni transporter (eng. APC – armored personnel carrier). Cilj im je bio da se donese odluka kojoj klasi pripada vozilo, tj. da li je tenk ili oklopni transporter na osnovu prepoznavanja oblika sa slike. Koristili su tri sekvence od 100 prozora (deo slike) i u svakoj sekvenci vozila su se pojavljivala pod različitim uglom u odnosu na senzor $(0°, 45°, 90°)$. U četvrtoj sekvenci oklopni transporter je zaobišao jedan tenk pomerajući se u i iz uvale i konačno došao pred sensor. Ova sekvenca se koristi za obavljanje uporednih testova. Slike se prethodno obrađuju kako bi se izdvojili prozori koji sadrže objekte koji nas zanimaju.

Klasifikacija objekta zavisi od vrednosti Sugenovog integrala S_{g_i} u odnosu na λ-mere g_i na skupu X koji se sastoji od četiri elementa koji se dobijaju pomoću četiri statističke funkcije koje se primenjuju na posmatrani deo slike (prozora), tj. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ koji predstavljaju {srednju vrednost, varijansu, koeficijent nagiba (eng. skewness), koeficijent spljoštenosti (eng. kurtosis)} susednih slika. Da bi se dobile procene, $h_k(x_i)$ (za k=tenk, APCs=oklopni transporter), za svaku funkciju, u [13] je korišten algoritam koji se naziva FCM algoritam, što je skraćenica od *fuzzy c-means*, za $c = 2$ na podacima za obuku.

Sugenove mere g_i, za svako $1 \leq i \leq c$ nad skupovima $X_j = \{x_j, x_{j+1}, \dots, x_n\}$, $1 < j < n$ mogu se odrediti pomoću postupka opisanog u odeljku *3.1*.

Vrednosti $g^m = g_i(\{x_m\})$ za $1 \leq m \leq 4$, koje se nazivaju fazi gustine su stepen važnosti za svaku karakteristiku (obeležje) i dodeljene su na osnovu toga koliko dobro svaka karakteristika razdvaja dve klase (na podacima za obuku). Ovo je prikazano u sledećoj tabeli

	g^1	g^2	g^3	g^4	λ
Tenk	0.16	0.23	0.19	0.22	0.760
APC	0.15	0.24	0.18	0.23	0.764

Tabela 3.2.[1] Izračunate gustine i λ vrednosti

U *Tabeli 3.3* dato je poređenje izlaznih rezultata za tri klasifikatora pri čemu $\boldsymbol{D}_{S_g}$ označava klasifikator baziran na Sugenovom integralu, $\boldsymbol{D}_b$ standardni Bajesov klasifikator i $\boldsymbol{D}_{DS}$ klasifikator koji koristi Dempster-Šaferovu teoriju za integraciju informacija [15].

	Fazi integral $\boldsymbol{D}_{S_g}$		Bajesov klasifikator $\boldsymbol{D}_b$		Dempster-Šafer $\boldsymbol{D}_{DS}$	
	tenk	APC	tenk	APC	tenk	APC
Tenk	175	1	176	0	176	0
APC	17	49	22	44	22	44
	92.6% tačno		90.9% tačno		86.4% tačno	

Tabela 3.3.[1] Rezultati klasfikacija za tri klasifikatora

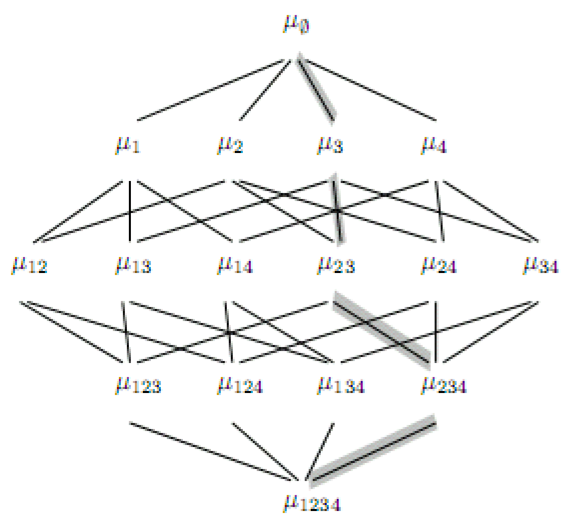
Svaki 2x2 blok ćelija u *Tabeli 3.3* je tzv. matrica grešaka (eng. confusion matrix) dobijena od klasifikatora kada se primene na podacima koji se testiraju na uobičajeni način (četvrta sekvenca slike). U ovom testu, klasifikatori koji su napravljeni pomoću fazi integrala su nešto bolji od dva koja su dizajnirana pomoću verovatnoće (eng. probabilistic).

3.3. Algoritmi za identifikaciju monotonih mera

Kao što smo već pomenuli, uprkos uspešnoj primeni metoda koje su zasnovane na Sugenovom i Šokeovom integralu, njihova primena može biti veoma komplikovana jer odabir odgovarajuće monotone mere, na kojima se integrali baziraju, može biti veoma zahtevan i komplikovan. U prethodnom odeljku je opisan način određivanja specijalnog slučaja monotone mere - Sugenove mere. Međutim, određivanje monotone mere u opštem slučaju je dosta komplikovanije. Iz tog razloga, razvijeni su mnogi algoritmi koji olakšavaju identifikaciju monotonih mera. U nastavku će biti opisana dva algoritma za identifikaciju monotonih mera iz [6] i [11].

Neka je $X = \{x_1, .., x_n\}$ i $(X, \boldsymbol{P}(X))$ merljiv prostor.

Kako je osobina aditivnosti zamenjena slabijom osobinom monotonosti, definicija fazi mere zahteva 2^n koeficijenata koji predstavljaju vrednost monotone mere na svim podskupovima skupa X. Pogodan način za predstavljanje fazi mere je rešetkasta prezentacija. Svi koeficijenti, koji definišu fazi meru, mogu se poređati u rešetku i dodeliti im se realni brojevi. *Slika 3.4* daje ilustraciju kada je $n = 4$, pri čemu μ_{23} označava $\mu(\{x_2, x_3\})$.



Slika 3.4.[6] Rešetka koeficijenata monotone mere

Rešetka monotone mere je napravljena od *čvorova* koji su povezani *granama*. Sastoji se od $n+1$ horizontalnih nivoa, numerisanih od 0 (za nivo koji sadrži samo $\mu_\emptyset$) do n (za nivo koji sadrži samo μ_X). *Staza* (eng. path) je skup povezanih grana, počev od čvora $\mu_\emptyset$ do čvora μ_X (na *Slici 3.4* je naglašena staza koja prolazi kroz μ_3, μ_{23} i μ_{234}). Za dati čvor u nivou l, njegovi donji (gornji) susedni čvorovi su čvorovi koji se nalaze u nivou $l-1$ $(l+1)$ i povezani su sa njim. Postoji l donjih i $n-l$ gornjih susednih čvorova.

Pretpostavimo da imamo sistem S sa n ulaznih promenljivih i jednu izlaznu što želimo da modeliramo pomoću fazi integrala, odnosno

$$S(x) = \mathcal{F}_\mu(x)$$

gde je $x = [x_1, .., x_n]$ n-dimenzionalni vektor, a μ normirana monotona mera na skupu X, $X = \{x_1, .., x_n\}$. Neka je sa (x, y) obeležen skup podataka za obučavanje (eng. learning data) pri čemu y označava izlaz sistema kada je x ulaz. U nastavku ćemo podatak za obučavanje algoritma kraće nazivati podatak. Javlja se problem kako za dati fazi integral (Šokeov, Sugenov ili neki drugi) naći najbolju monotonu meru μ takvu da greška bude minimalna što se najčešće postiže tako što se minimizira suma kvadrata grešaka između modela i sistema.

Analiza problema otkriva sledeće:

- Jedan od glavnih problema je da koeficijenti moraju zadovoljavati ograničenja monotonosti koja se mogu staviti u formu rešetke
- Bez obzira koji je integral izabran, ulazna vrednost x podrazumeva upotrebu svih koeficijenata koji se nalaze na stazi od $\emptyset$ do X
- Poznato je da se fazi integral nalazi između min i max, pa je model pogodan za sistem za koji važi za svaki ulazni vektor $x_1 \wedge ... \wedge x_n \leq S(x_1, ..., x_n) \leq x_1 \vee ... \vee x_n$. U

odsustvu bilo kog skupa podataka ili bilo koje informacije, jedino razumno rešenje je da se izabere srednja vrednost ulazne veličine $1/n \sum_i x_i$. Na osnovu *Teoreme 2.13* se može videti da ovo odgovara Šokeovom integralu u odnosu na fazi meru koja je aditivna i važi $\mu(\{x_i\}) = 1/n$, za sve i.

Algoritam opisan u [6] daje odgovor na ova razmatranja i zasniva se na dva osnovna koraka:

Korak 1: za dati podatak (informaciju) x, modifikujemo samo koeficijente na stazi koji su uključeni u x u cilju smanjenja greške. Modifikacija se vrši u cilju očuvanja osobine monotonosti na stazi. Monotonost je takođe proverena i za susedne čvorove. Ovo se radi za sve podatke nekoliko puta.

Korak 2: ako ima premalo podataka, onda su možda neki čvorovi ostali nemodifikovani. Ti čvorovi se ovde modifikuju kako bi se postigla najbolje uravnotežena rešetka, tj. udaljenost između susednih čvorova bi trebala da bude jednaka što je više moguće.

Posle *Koraka 2* ideja je da se, u odsustvu bilo kakvih informacija za neki čvor, čvorovi organizuju u rešetku tako da se dobije, što je više moguće, homogena rešetka. Očekujemo da ovo bude robusno kada je dato samo nekoliko podataka, tj. očekujemo bolju sposobnost generalizacije.

Opisaćemo detaljno dva koraka.

Korak 0: monotona (fazi) mera se postavlja u stanje ravnoteže.

Korak 1.1: Razmatramo skup podataka (x, y). Izračunamo grešku modela $e = \mathcal{F}_\mu(x) - y$. Označimo sa $u(0), u(1), \dots, u(n)$ vrednosti čvorova na putu koji su uključeni u x. Na primer, na *Slici 3.4* imamo $u(1) = \mu_3$, $u(2) = \mu_{23}$, $u(3) = \mu_{234}$, pri čemu je $S_\mu(0,1,0,..,0) = \mu(\{x_2\})$. Dakle, imamo da je uvek $u(0) = 0$ i $u(n) = 1$.

Korak 1.2: Računamo novu vrednost $u^{novo}(i)$ na sledeći način:

$$u^{novo}(i) = u^{staro}(i) - \alpha \frac{e}{e_{max}} \left(x_{(n-i)} - x_{(n-i-1)} \right) \quad (3.1)$$

gde je $\alpha \in [0,1]$ konstanta i e_{max} maksimalna vrednost greške. $e_{max} = 1$ ako y uzima vrednost iz intervala $[0,1]$. $x_{(i)}$ označava i-tu vrednost od x_i u rastućem redosledu.

Korak 1.3: Provera monotonosti. Ako je $e > 0$, provera se vrši samo sa čvorom ispod (niže), a ako je $e < 0$, samo sa čvorom iznad. Šta više, provera se vrši samo sa čvorovima koji su već modifikovani u prethodnim koracima. Ako je monotonost narušena, onda za čvor μ_J, $J \subset X$ važi $u(i) = \mu_J$.

Ponavljati *Korake 1.2* i *1.3* za $i = 1, \dots, n-1$ na sledeći način:

- ako je $e > 0$, početi sa $u(1), u(2), \dots, u(n-1)$
- ako je $e < 0$, početi sa $u(n-1), u(n-2), \dots, u(1)$.

Ponavljati *Korake 1.1* do *1.3* za sve podatke. Ovo se naziva *jedna iteracija*. Može se vršiti nekoliko iteracija, tj. isti skup vrednosti se može koristiti više puta.

Korak 2.1: Za svaki čvor koji je ostao nemodifikovan u *Koraku 1* (početi od nižih čvorova), proveriti da li je ispunjen uslov monotonosti sa nižim i višim susednim čvorovima. Ako uslov monotonosti nije ispunjen, modifikovati čvor kao u *Koraku 1.3*. Može se desiti da gornji i donji susedni čvorovi međusobno ne zadovoljavaju uslov monotonosti. U ovom slučaju, mi ćemo prvo ispraviti čvorove kod kojih je narušena monotonost.

Korak 2.2: za svaki čvor koji je ostao nemodifikovan u *Koraku 1* (početi od nižih nivoa), podesiti vrednosti uzimajući u obzir vrednosti gornjih i donjih susednih čvorova, kako bi rešetka bila homogena. To se radi izračunavanjem sledećih veličina. Neka je $u(i)$ čvor koji posmatramo, tada je:

- srednja vrednost gornjih susednih čvorova $\overline{m}(i) = 1/(n-i) \sum_{gornjih\ susednih\ čvorova} \mu_J$
- srednja vrednost donjih susednih čvorova $m_{-}(i) = 1/(i) \sum_{donjih\ susednih\ čvorova} \mu_J$
- minimalna razdaljina (udaljenost) između $u(i)$ i njegovog gornjeg (donjeg) susednog čvora, u oznaci $\bar{d}_{min}(i)$ $(d_{-_{min}}(i))$

Ako je $\overline{m}(i) + m_{-}(i) - 2u(i) > 0$, onda je $u(i)$ povećan

$$u^{novo}(i) = u^{staro}(i) + \beta \frac{\big(\overline{m}(i) + m_{-}(i) - 2u(i)\big)\bar{d}_{min}(i)}{2\big(\overline{m}(i) + m_{-}(i)\big)}$$

inače je smanjen

$$u^{novo}(i) = u^{staro}(i) + \beta \frac{\big(\overline{m}(i) + m_{-}(i) - 2u(i)\big)d_{-_{min}}(i)}{2\big(\overline{m}(i) + m_{-}(i)\big)}$$

gde je β konstanta iz [0,1].

Primeniti *Korak 2.1* i *2.2* na sve čvorove koji su ostali nemodifikovani u prvom koraku. Ovo se naziva jedna iteracija i može se vršiti nekoliko iteracija.

Mogu se uočiti sledeće osobine algoritma:

- Kada podatak prođe *Korake 1.2* i *1.3* monotonost na stazi je osigurana kao i monotonost sa susednim, već modifikovnim, čvorovima

- Ako bismo koristili terminologiju mašinskog učenja, tada za Šokeov integral, jednačina data u *Koraku 1.2* odgovara algoritmu opadajućeg gradijenta primenjenog na $E = \left(C_\mu(x) - y\right)^2$, sa korakom (eng. learning rate) $\alpha/2e_{\max}$.
- Ako neprestano ulazi isti podatak, tada algoritam konvergira. Zbog jednostavnosti, posmatraćemo podatak (x,y) gde je $y = C_\mu(x)$. Označimo sa $u^k(i)$ vrednost čvora $u(i)$ u k-toj iteraciji i $u(i)$ pravu vrednost. Tada imamo:
$$u^1(i) = u^0(i) - \alpha\left(C_{\mu^0}(x) - C_\mu(x)\right)\left(x_{(n-i)} - x_{(n-i-1)}\right).$$
Posmatrajući samo termin $u^k(i)$ imamo
$$u^1(i) = Ku^0(i) + (1-K)u(i)$$
gde je $K = 1 - \alpha\left(x_{(n-i)} - x_{(n-i-1)}\right)^2$, za $K \in [0,1]$. Tada se može dokazati da je $u^k(i) = K^k u^0(i) + (1-K^k)u(i)$, takvo da $u^k(i)$ konvergira pravoj vrednosti $u(i)$.
- Ako je $\alpha = 1$, i u algoritam ubacimo skup podataka koji odgovara broju 2^n čvorova iz skupa $[0,1]^n$, tada algoritam konvergira tačno ka rešenju jedne iteracije.
(skica dokaza: y su 2^n koeficijenti fazi mere, takvi da je
$$u^1(i) = u^0(i) - \left(C_{\mu^0}(x) - u(i)\right) = u(i).)$$

Navešćemo sada rezultate testa poređenja prethodno opisanog algoritma iz [6] autora Grabiš sa algoritmom koji su posmatrali Mori i Murofuši u [11]. Mori i Murofuši su predložili algoritam sličan prethodno opisanom algoritmu, s' tim što je u *Koraku 1* formula za ažuriranje podataka (x,y)

$$u^{novo}(i) = u^{staro}(i) - KC_n^i \frac{e}{x_{(n)}}.$$

Test se sastoji od identifikacije fazi mera datih u *Tabeli 3.4* koristeći uzorak od 81 podatka (x,y), gde je $y = C_\mu(x) + n$, n je centrirani Gausov šum, x je svaka ulazna tačka iz $[0,1]^4$ čije koordinate pripadaju skupu {0,0.5,1}.

A	$\mu(A)$	A	$\mu(A)$	A	$\mu(A)$
{1}	0.1	{1,2}	0.3	{1,2,3}	0.5
{2}	0.2105	{1,3}	0.3235	{1,2,4}	0.8667
{3}	0.2353	{1,4}	0.7333	{1,3,4}	0.8824
{4}	0.6667	{2,3}	0.4211	{2,3,4}	0.9474
		{2,4}	0.8070		
		{3,4}	0.8235		

Tabela 3.4.[6] Fazi mere koje se identifikuju

Rezultat identifikacije za različite vrednosti varijanse šuma dat je u *Tabeli 3.5*, gde je $E^2 = 1/81 \sum \left(y - C_\mu(x)\right)^2$.

σ^2 šum	Mori i Murofuši		Grabiš	
	$n.$ iteracija	E^2	$n.$ iteracija	E^2
0.0	97	0.0000	8	1.4e-7
0.00096	116	0.00087	10	0.00083
0.0125	70	0.0117	11	0.0108
0.00625	74	0.0605	11	0.0530
0.01250	79	0.1211	9	0.1054

Tabela 3.5.[6] Rezultati identifikacije za dva algoritma

Performanse su jasno bolje za algoritam dat u [6], posebno u brzini konvergencije. Eksperiment je realizovan za $\alpha = 0.5$ i indicirani broj iteracija odgovara stabilnosti E^2 na 10^{-6}. Broj iteracija proširen je na 100 da bi proverio stabilnost rezultata. Sa nižom vrednošću α preciznost je povećana po ceni dužeg vremena konvergencije. Ovo je sumirano u *Tabeli 3.6* kada je $\sigma^2 = 0.0125$.

α	$n.$ iteracija	E^2
0.5	11	0.0107846
0.25	27	0.00964529
0.1	52	0.00899498
0.05	86	0.00878478

Tabela 3.6.[6] Uticaj parametra α

Takođe, prvi algoritam se bolje pokazao i u odnosu na standardni optimizacioni algoritam koji se naziva Lemkeov algoritam ili metod kvadratnog programiranja [6].

Zaključak

U ovom radu opisana je uopštena teorija mere (teorija fazi mere) koja razmatra uopštenje mere čije je aditivno svojstvo zamenjeno slabijim svojstvom monotonosti. Jedna od prednosti uopštene mere je ta što je njena primena mnogo šira od primene mere koja je predmet izučavanja klasične teorije mere.

U prvom delu dali smo osnovne pojmove monotonih mera na kojima se baziraju Sugenov i Šokeov integral. Ovi integrali bazirani su na skupovnim funkcijama odnosno neaditivnim merama i pokazali su se veoma pogodnim prilikom rešavanja problema u kojima je potrebno doneti odluku na osnovu više kriterijuma i njihove međusobne interakcije. Takođe su navedene osnovne defnicije i osobine Sugenovog i Šokeovog integrala i veza Šokeovog i Lebegovog integrala, odnosno Šokeov integral je realno uopštenje Lebegovog integrala kada je monotona mera σ-aditivna, ali je, za razliku od Lebegovog, Šokeov integral nelinearan.

U drugom delu data je definicija i osobine funkcija agregacije koje se koriste u velikom broju oblast i disciplina, naročito u primenjenoj matematici, informatici, medicine, ekonomiji, obradi slika kao i u rešavanju problema vezanih za fuziju podataka. Najpoznatije funkcije agregacije su aritmetička sredina, geometrijska sredina, minimum, maksimum, medijana… Sugenov i Šokeov integral u diskretnom, konačnom slučaju određuju posebnu klasu funkcija agregacije. Navedeni su uslovi koje monotona mera treba da zadovolji da bi se Sugenov i Šokeov integral svodili na minimum, maksimum, projekciju, ponderisanu aritmetičku sredinu..

U trećem delu data je primena Sugenovog i Šokeovog integrala u obradi slika kao i njihove prednosti. Navedeni su primeri algoritama za identifikaciju monotonih mera koji se zasnivaju na osobini da se vrednosti monotonih mera u konačnom diskretnom slučaju predstavljaju u obliku rešetke. Unutar tih algoritama razlikuju se formule iterativnih postupaka kojima se procenjuju fazi mere. Takođe su dati rezultati poređenja dobijeni pomoću metoda baziranih na Sugenovom i Šokeovom integralu sa drugim metodama koje se koriste prilikom obrade slika. Filter za uklanjanje šuma baziran na Šokeovom integralu pokazao se bolje u odnosu na druga dva filtera. Klasifikatori koji se koriste za automatsko prepoznavanje oblika na slici bazirani na Sugenovom integralu pokazali su se boljim od klasifikatora dizajniranih pomoću verovatnoća.

Možemo zaključiti da se problem odabira odgovorajuće monotone mere, na kojoj se baziraju Šokeov i Sugenov integral, uspešno rešava razvojem algoritama koji olakšavaju identifikaciju neaditivnih mera koji se sve više primenjuju u praksi.

Literatura

[1] J.C. Bezdek, J. Keller, R. Krisnapuram, N.R. Pal: Fuzzy Models and Algorithms for Pattern Recognition and Image Processing, Springer, 2005.

[2] G. Choquet: Theory of capacities. Annales de l'Institut Fourier, Department of Mathematics, University of Kansas, Lawrence, KS, May 1954.

[3] M. Grabisch: Fuzzy integreds as a generalized class of order filters, Proc. SPIE, 2315, SPIE. Bellingham, WA, 128-136, 1994.

[4] M. Grabisch, J.L. Marichal, R. Mesiar, E. Pap: Agregation Functions, Cambridge Universitz Press, 2009.

[5] M. Grabisch, M. Schmitt: Mathematical morphology, order filters, and fuzzy logic, Proc. lEEE/lFES Int. Joint. Conf. on Fuzzy Syst, Yokohama Japan, 2103-2108, 1995.

[6] M. Grabisch: A New Algorithm for Identifying Fuzzy Measures and Its Application to Pattern Recognition, Int. Joint Conf. of the 4th IEEE Int. Cont. on Fuzzy Systems and the 2nd Int. Fuzzy Engineering Symposium, march 1995, Yokohama, Japan, 145-150.

[7] A. Hocaoglu. P. Gader: Choquet integral representations of nonlinear filters with applications to LADAR image processing. Proc. SPIE Conf. Nonlinear Image Processing IX, SPIE, Bellingham, WA, 66-72, 1998.

[8] A. K. Hocaoglu, P. Gader, J. Keller: Nonlinear filters for target detection in LADAR range images, Proc. NAFIPS Conf, 177-182, 1997.

[9] J. M. Keller, P. Gader, R. Krishnapuram, X. Wang, A. Hocaoglu, H. Frigui, J. Moore: Fuzzy logic automatic target recognition system for LADAR range images. Proc. IEEE Int. Conf. on Fuzzy Syst, IEEE Press, Piscataway, NJ, 71-76, 1998.

[10] E. Lieb, M. Loss: Analysis, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 2001.

[11] T. Mori, T. Murofushi: An analysis of evaluation model using fuzzy measure and the Choquet integral, 5th Fuzzy Systems Symposium, Kobe, Japan, june 2-3 1989. (in japanese).

[12] M. Sugeno: Theory of Fuzzy Integrals and its Applications, Ph.D. dissertation, Tokyo, Institute of Technology, 1974.

[13] H. Tahani, M. Keller: Information fusion in computer vision using the fuzzy integral, IEEE Trans. Syst, Man and Cybems., 20(3), 733-741, 1990.

[14] Z. Wang, G.J. Klir: Generalized measure theory, Springer, 2009.

[15] J.Wootton, J. M. Keller, C. Carpenter, G. Hobson: A multiple hypothesis rule-based automatic target recognizer, in Pattern Recognition, Lecture Notes in Comp. Science, ed. J. Klttler, 301, Springer-Verlag, 315-324, 1988.

Biografija

Jelena Popov rođena je 01.03.1988. godine u Kikindi.

Završila je osnovnu školu "Vasa Stajić" u Mokrinu 2003. godine kao nosilac Vukove diplome.

Srednju školu završila je 2007. godine u Kikindi sa odličnim uspehom i iste godine upisala Prirodno-matematički fakultet, smer matematika finansija, u Novom Sadu.

Osnovne studije završila je 2012. godine i potom upisala master studije primenjene matematike na istom fakultetu.

Do oktobra 2013. godine položila je sve predmete predviđene planom i programom master studija i time stekla pravo na odbranu master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni Štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Jelena Popov

AU

Mentor: dr Mirjana Štrboja

MN

Naslov rada: Sugenov i Šokeov integral sa primenom u obradi slika

MR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: Srpski/Engleski

JI

Zemlja publikovanja: Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2015.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (3 poglavlja, 61 strana, 6 tabela, 6 slika, 15 referenci)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Teorija odlučivanja

ND

Ključne reči: Mera, Sugenov integral, Šokeov integral, funkcija agregacije, obrada slika

KR

UDK:

Čuva se: Biblioteka departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: U radu su predstavljeni osnovni pojmovi monotone mere, Sugenov i Šokeov integral kao i njihove osnovne osobine. Takođe su navedeni uslovi koje monotona mera treba da zadovolji da bi se Sugenov i Šokeov integral svodili na specijalne slučaje funkcije agregacije koje su poznate

iz drugih oblasti među kojima je teorija verovatnoće. I na kraju data je primena ovih integrala u obradi slika kao i poređenje rezultata dobijenih pomoću metoda baziranih na pomenutim integralima sa drugim metodama koje se koriste prilikom obrade slika.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 13.05.2014.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

Mentor: dr Mirjana Štrboja, docent na PMF-u u Novom Sadu

Predsednik: dr Arpad Takači, redovni profesor na PMF-u u Novom Sadu

Član: dr Ivana Štajner-Papuga, vanredni profesor na PMF-u u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE KEY
WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification umber:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master thesis

CC

Author: Jelena Popov

AU

Mentor: Mirjana Štrboja, PhD

MN

Title: Sugeno and Choquet integrals with application in image processing

XI

Language of text: Serbian (latinic)

LT

Language of abstract: English/Serbian

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2015.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description: (3 chapters, 61 pages, 6 tables, 6 pictures, 15 references)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Decision theory

Key words: measure, Sugeno integral, Choquet integral, aggregation function, image processing

UC:

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Computer Sciences, Faculty of Natural Sciences, Trg Dositeja obradovića 4, Novi Sad

HD Note:

Abstract: This paper presents the basic concepts of monotone measures, Sugeno and Choquet integrals and their basic properties. There were also set out conditions that monotone measures should meet in order to Sugeno and Choquet integrals reduced to the special cases of aggregation functions that are known from other areas, including the theory of probability. And at the end, the application of these integrals in the image processing has been given as well as the comparison of results obtained using the method based on these integrals with other methods used in image processing.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 13.05.2014.

Defended:

Thesis defend board:

Mentor: Mirjana Štrboja, PhD, Assistant professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Novi Sad

President: Arpad Takači, PhD, Full professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Novi Sad

Member: Ivana Štajner-Papuga, PhD, Associate professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Novi Sad