UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Jelena Nedeljković

Uopšteni stohastički procesi

\- završni rad -

Novi Sad, 2011.

Sadržaj

Predgovor

Dok posmatramo mnoge prirodne fenomene i pokušavamo da im damo matematički prihvatljiv oblik, slučajnost je nešto što je jako teško izbeći. Čak i ako nam to uspe, ne možemo uvek dobiti linearan problem koji kao rešenje daje funkciju sa idealnim osobinama. Ovaj rad kombinuje delove velikih teorija, kao što su stohastička analiza i teorija distribucija, u cilju dobijanja jednog od mnogih pristupa za rešavanje stvarnih problema sa kojima se susreću fizičari ili inženjeri.

U prvoj glavi, dajemo osnove stohastičke analize i teorije distribucija. Cilj nam je definisanje slučajnih procesa, na klasičan način, i proširivanje pojma funkcije u matematici. U radu sa uopštenim funkcijama ili distribucijama imamo veću slobodu nego sa klasičnim pristupom, ali nailazimo na problem kada pokušamo da definišemo njihovo množenje.

Druga glava u potpunosti je posvećena problemu množenja distribucija. Kroz primere uočavamo potrebu za takvom operacijom i teškoće koje nastaju ukoliko pokušamo da tu operaciju definišemo tako da su neke prirodne osobine zadovoljene. Konačno, prihvatamo rezultat nemogućnosti i kao metod za prevazilaženje problema biramo proširivanje skupa objekata, obrađen u Glavi 4.

U trećoj glavi, uopštavamo koncept stohastičkog procesa na isti način na koji smo uopštili koncept funkcije. Kao prototip uopštenog stohastičkog procesa uzimamo beli šum - izvod Vinerovog procesa.

Glave 4 i 5 bave se konstrukcijama Kolomboovih algebri uopštenih funkcija i uopštenih stohastičkih procesa, redom. Na kraju, rešavanjem stohastičke diferencijalne jednačine pokazujemo korisnost prethodnih konstrukcija.

Zahvaljujem se svom mentoru dr Danijeli Rajter - Ćirić, najpre na za-

nimljivim predavanjima iz teorije verovatnoće i stohastičke analize, a zatim i na nesebičnoj pomoći prilikom izrade ovog rada. Njena stalna ljubaznost u svim pitanjima, naučnim i manje naučnim, bila je veliki podstrek.

Posebno se zahvaljujem svojim roditeljima Vladimiru i Bosiljki, koji su me uvek podržavali.

Novi Sad, septembar 2011. god. Jelena Nedeljković

Glava 1

Uvod

U ovoj glavi navešćemo osnovne definicije neophodne za dalji rad. Pozabavićemo se najpre osnovama teorije verovatnoće i stohastičke analize, a zatim i uopštenim funkcijama. Ove oblasti objedinjuje zajednički cilj. U idealnom slučaju, problemi koji se javljaju u prirodi modeliraju se sistemima u kojima su svi parametri poznati, a kao rešenje dobijamo funkciju sa osobinama neprekidnosti, diferencijabilnosti, ...

Stvarnost je često mnogo drugačija. Stohastička analiza nam može pomoći u radu sa nepoznatim parametrima, dok nam teorija uopštenih funkcija pomaže da proširimo skup rešenja problema koja za nas imaju smisla. Spajanje ovih principa daće nam još veću korist, kao što ćemo videti kasnije.

1.1 Osnove stohastičke analize

Modeliranje velikog broja sistema (na primer, pomoću diferencijalnih jednačina) veoma često zahteva slučajne parametre. Takvi modeli često nastaju iz problema u prirodnim naukama ili ekonomiji gde nemamo dovoljno informacija o vrednostima parametara koji se pojavljuju.

Postavlja se pitanje kako da radimo sa nekim parametrima kada ne znamo kako oni tačno izgledaju. Jedna od mogućnosti je da koristimo prilaz stohastičke analize i da posmatramo te parametre kao slučajne objekte. Druga mogućnost za prevazilaženje ovog problema moglo bi biti zamenjivanje pravih, ali nepoznatih parametara nekom vrstom prosečnih vrednosti i rad sa odgovarajućim determinističkim sistemom nadajući se da je to dovoljno „dobra“ aproksimacija polaznog problema.

Tokom proteklog veka, sve češće su korišćeni metodi stohastičke analize. Takav pristup se razvijao veoma brzo i sada predstavlja važan alat u mnogim oblastima. U ovom odeljku nalaze se osnove stohastičke analize koje ćemo kasnije koristiti da bismo razvili naš stohastički aparat za rešavanje problema u okviru Kolomboove teorije uopštenih funkcija.

1.1.1 Osnovni pojmovi teorije verovatnoće

Teorija verovatnoće bavi se matematičkim modelima čiji ishodi zavise od slučaja. Označimo sa Ω skup svih mogućih ishoda - elementarnih događaja ω. Skup $A \subset P(\Omega)$ nazivamo slučajnim događajem, dok sa $\overline{A}$ označavamo događaj suprotan događaju A. U istom smislu, Ω je siguran događaj, a $\emptyset$ je nemoguć događaj.

Definicija 1. *Neka je $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Ako su zadovoljeni uslovi:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$ *;*
2. *iz $A \in \mathcal{F}$ sledi $\overline{A} \in \mathcal{F}$;*
3. *iz $\{A_i\}_{i \in \boldsymbol{N}}$ sledi $\bigcup_{i \in \boldsymbol{N}} A_i \in \mathcal{F}$,*

$\mathcal{F}$ se naziva σ - polje ili σ - algebra nad Ω.

Elementi σ - algebre su merljivi skupovi, a par $(\Omega, \mathcal{F})$ naziva se merljiv prostor.

Definisaćemo zasebno Borelovu σ - algebru.

Definicija 2. *Neka je E metrički prostor. Najmanja σ - algebra podskupova od E koja sadrži sve otvorene (zatvorene) podskupove od E se zove Borelova σ - algebra i označava se sa $B(E)$.*

Specijalno, označavamo: $B^n = B(\mathbf{R}^n)$.

Definicija 3. *Prostor verovatnoća je trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gde je $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor i P je probabilistička mera na $\mathcal{F}$, što znači da $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ i važi:*

1. $P(\Omega) = 1$,
2. $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$, *gde su $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \boldsymbol{N}$, disjunktni skupovi.*

Definicija 4. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *prostor verovatnoća. Preslikavanje* $X : \Omega \to \boldsymbol{R}^n$ *takvo da* $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, $B \in B^n$ *naziva se* $\boldsymbol{R}^n$ *- vrednosna slučajna promenljiva nad* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Takođe koristimo izraz X je $\mathcal{F}$ - merljivo.

Definicija 5. *Neka je* $X : \Omega \to \boldsymbol{R}^n$ *slučajna promenljiva na* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Tada je* $\mathcal{F}(X) = \{X^{-1}(B), B \in B^n\}$ *jedna* σ *- algebra na* Ω *i to je najmanja podalgebra od* $\mathcal{F}$ *odnosu na koju je* X *merljivo. Ovako definisana* σ *- algebra naziva se* σ *- algebra generisana slučajnom promenljivom* X.

Definicija 6. *Neka je* $X = (X_1, \ldots, X_n)$ $\boldsymbol{R}^n$ *- vrednosna slučajna promenljiva. Funkcija* F_X *definisana sa*

$$\begin{aligned} F_X(x) &= F_X(x_1, \ldots, x_n) \\ &= P\{\omega : X_1(\omega) \leq x_1, \ldots, X_n(\omega) \leq x_n\} = P[X \leq x] \end{aligned}$$

se zove funkcija raspodele slučajne promenljive X.

Funkcija raspodele slučajne promenljive X pokazuje koliko je verovatno da X uzima vrednosti manje od x.

Postoje dva osnovna tipa slučajnih promenljivih: diskretne, kod kojih možemo slučajnoj promenljivoj dodeliti konkretne vrednosti sa određenim verovatnoćama, i apsolutno neprekidne, kod kojih to nije moguće.

Za apsolutno neprekidne slučajne promenljive, gustina raspodele slučajne promenljive se definiše na sledeći način.

Definicija 7. *Slučajna promenljiva* $X = (X_1, \ldots, X_n)$ *je* n *- dimenzionalna slučajna promenljiva apsolutno neprekidnog tipa ako postoji integrabilna funkcija* $\varphi_X(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$, $-\infty < x_1, \ldots, x_n < \infty$, *takva da je, za svaki Borelov skup* $B \in B^n$,

$$P\{(X_1, \ldots, X_n) \in B\} = \int_S \cdots \int \varphi_X(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Funkcija $\varphi_X(x)$ *zove se gustina raspodele verovatnoća (ili samo gustina raspodele) slučajne promenljive* X.

Specijalno, ako izaberemo $B = \{(y_1, \ldots, y_n); y_k \leq x_k, k = 1, \ldots, n\}$ dobijamo

$$F_X(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \cdots \int\limits_{-\infty}^{x_n} \varphi_X(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n.$$

Nekoj realnoj slučajnoj promenljivoj možemo dodeliti određeni broj, njeno očekivanje. Ako X ima samo konačno mnogo različitih vrednosti $c_1, \ldots, c_n$, očekivanje od X definisano je sa

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} c_i P[X_i = c_i]$$

U nekoliko koraka, ovo možemo proširiti na proizvoljnu slučajnu promenljivu. U praksi koristimo teoremu:

Teorema 1. *Neka je $g : \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^n$ merljiva funkcija. Tada je za slučajnu promenljivu $Y = g(X)$,*

$$E(Y) = \int\limits_{\boldsymbol{R}^n} g(x)\, dF_X(x),$$

i, specijalno, za $n = m$ i $g(x) \equiv x$,

$$E(X) = \int\limits_{\boldsymbol{R}^n} x dF_X(x),$$

ukoliko integrali na desnim stranama postoje.

Stavimo, za svako $p \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p &= \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, P) \\ &= \{X : X \text{ je } \mathbf{R}^n \text{ - vrednosna slučajna promenljiva}, E(|X|^p) < \infty\}. \end{aligned}$$

Za $p \geq q$ imamo da $\mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^q$ i $\mathcal{L}^p$ je linearan prostor. Ako u $\mathcal{L}^p$ pređemo na skup L^p klasa ekvivalencije slučajnih promenljivih koje se podudaraju sa verovatnoćom 1 i stavimo

$$\|X\|_p = (E(|X|^p))^{\frac{1}{p}},$$

tada je L^p Banahov prostor u odnosu na tu normu. Štaviše, L^2 je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom

$$(X, Y) = E\left(X^T Y\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i Y_i),$$

gde X^T označava transponovano X.

Posmatramo sada $\mathbf{R}^n$ - vrednosnu slučajnu promenljivu X.

Definicija 8. *Neka je $n = 1$.*

1. $V(x) = E(X - E(X))^2 = \sigma^2(X)$, *gde* $X \in L^2$, *se zove disperzija ili varijansa slučajne promenljive* X.

2. $\sigma = \sqrt{V(X)}$ *se zove standardna devijacija slučajne promenljive* X.

3. $E\left(X^k\right), X \in L^k, k \in \boldsymbol{N}$, *je* k *- ti momenat slučajne promenljive* X.

4. $E(X - E(X))^k$, *gde* $X \in L^k, k \in \boldsymbol{N}$, *se zove* k *- ti centralni momenat slučajne promenljive* X.

Definicija 9. *Neka je $n = 1$. Tada se*

$$Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))),$$

gde $X, Y \in L^2$, *zove kovarijansa slučajnih promenljivih* X *i* Y.

Ako je $Cov(X, Y) = 0$, *kažemo da su slučajne promenljive* X *i* Y *nekorelirane.*

Za $n > 1$, *simetrična nenegativna* $n \times n$ *matrica*

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= E\left((X - E(X))(Y - E(Y))^T\right) \\ &= (Cov(X_i, Yj)), \quad i, j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

se zove kovarijansna matrica $\boldsymbol{R}^n$ *- vrednosnih slučajnih promenljivih* X *i* Y.

Za $Cov(X, X)$ *jednostavno pišemo* $Cov(X)$.

Sledi definicija karakteristične funkcije.

Definicija 10. *Karakteristična funkcija slučajne promenljive* X *ili njene funkcije raspodele* F *je*

$$\phi(t) = \phi_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = \int\limits_{\boldsymbol{R}^n} e^{itX} dF(x), t \in \boldsymbol{R}^n.$$

Funkcija raspodele F je jedinstveno odredjena sa ϕ.

Pre nego što se pozabavimo slučajnim procesima, moramo napomenuti da u teoriji verovatnoće postoji više principa konvergencije. U sledećoj definiciji navodimo četiri koncepta konvergencije, najčešćih u primenama.

Definicija 11. *Neka* X *i* X_n, $n \in \boldsymbol{N}$, *označavaju* $\boldsymbol{R}^d$ *- vrednosne slučajne promenljive definisane na prostoru verovatnoća* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1. *Ako postoji skup mere nula* $N \in \mathcal{F}$ *takav da, za sve* $\omega \notin N$, *niz* $X_n(\omega) \in \boldsymbol{R}^d$ *konvergira ka* $X(\omega) \in \boldsymbol{R}^d$, *tada kažemo da niz* $\{X_n\}$ *konvergira* P *- skoro sigurno ili sa verovatnoćom 1 ka* X. *Pišemo*

$$ss - \lim_{n\to\infty} X_n = X.$$

2. *Ako, za svako* $\varepsilon > 0$,

$$p_n(\varepsilon) = P\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} \to 0, \quad kada\ n \to \infty,$$

tada kažemo da niz $\{X_n\}$ *konvergira u verovatnoći ka* X. *Pišemo*

$$P - \lim_{n\to\infty} X_n = X.$$

3. *Ako* $X_n, X \in L^p, p \geq 1$, *i*

$$E(|X_n - X|^p) \to 0, \quad kada\ n \to \infty,$$

tada kažemo da niz $\{X_n\}$ *konvergira u* p *- srednjem ka* X. *Za* $p = 1$ *govorimo o konvergenciji u srednjem, a za* $p = 2$ *govorimo o konvergenciji u srednje kvadratnom i pišemo*

$$sk - \lim_{n\to\infty} X_n = X.$$

4. *Neka su* F_n *i* F *funkcije raspodela slučajnih promenljivih* X_n *i* X, *redom. Tada, ako za svaku realnu neprekidnu funkciju* g *definisanu na* $\boldsymbol{R}^d$, *važi*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\boldsymbol{R}^d} g(x)\, dF_n(x) = \int\limits_{\boldsymbol{R}^d} g(x)\, dF(x),$$

kažemo da niz $\{X_n\}$ *konvergira u raspodeli ka* X.

To je slučaj ako i samo ako

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

u svakoj tački u kojoj je F *neprekidna ili*

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \phi(t), \quad za\ sve\ t \in \boldsymbol{R}^d,$$

gde ϕ_n *i* ϕ *označavaju odgovarajuće karakteristične funkcije.*

Može se pokazati da su ovi koncepti konvergencije međusobno u sledećim odnosima.

Ako je $p \leq q$, tada q - sredna konvergencija implicira p - srednju konvergenciju. Takođe, konvergencija u p - srednjem i skoro sigurna konvergencija impliciraju konvergenciju u verovatnoći, koja dalje implicira konvergenciju u raspodeli. Dalje, niz konvergira u verovatnoći ako i samo ako svaki podniz tog niza sadrži skoro sigurno konvergentan podniz.

Konačno, dovoljan uslov da $ss - \lim_{n\to\infty} X_n = X$ je da

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left(|X_n - X|^p\right) < \infty, \text{ za neko } p > 0.$$

1.1.2 Stohastički procesi

Zamislimo da se u svakom trenutku t vremenskog intervala I posmatra neka karakteristika X fizičkog sistema, a da je pri tome ta karakteristika slučajna. Možemo reći da je $X(t)$ slučajna promenljiva, za $t \in I$. To znači da na skup svih slučajnih promenljivih $X(t)$, $t \in I$ možemo gledati kao na slučajnu veličinu koja se menja u vremenu, odnosno, slučajnu funkciju vremena. Tada je za nas $X(t)$ jedan slučajni ili stohastički proces.

Sada ćemo navesti i formalnu definiciju. Neka I označava proizvoljan neprazan skup i neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoće.

Definicija 12. *Familija $\{X_t : t \in I\}$ $\boldsymbol{R}^d$ - vrednosnih slučajnih promenljivih se zove stohastički (slučajan) proces sa parametarskim (indeksnim) skupom I i prostorom stanja $\boldsymbol{R}^d$.*

Ako je parametarski skup konačan, tada jednostavno imamo konačno mnogo slučajnih promenljivih. Ako je taj skup prebrojiv, govorimo o nizu slučajnih promenljivih. Izraz „proces“ najčešće koristimo u slučaju kada parametarski skup nije prebrojiv.

Neka je $\{X_t : t \in [t_0, T]\}$ slučajan proces. Tada je $X_t(\cdot)$ $\mathbf{R}^d$ - vrednosna slučajna promenljiva, za svako fiksirano $t \in [t_0, T]$. Tu slučajnu promenljivu nazivamo *zasek* ili *sečenje* stohastičkog procesa.

Definicija 13. *Neka je $\{X_t : t \in [t_0, T]\}$ slučajan proces. Tada je, za svako fiksirano $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ $\boldsymbol{R}^d$ - vrednosna funkcija na $[t_0, T]$ i zove se staza (trajektorija) slučajnog procesa.*

Definicija 14. *Konačno - dimenzionalne raspodele slučajnog procesa*

$$\{X_t : t \in [t_0, T]\}$$

su date sa

$$\begin{aligned} P\left[X_t \leq x\right] &= F_t\left(x\right), \\ P\left[X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2\right] &= F_{t_1,t_2}\left(x_1, x_2\right), \\ &\vdots \\ P\left[X_{t_1} \leq x_1, \ldots, X_{t_n} \leq x_n\right] &= F_{t_1,\ldots,t_n}\left(x_1, \ldots, x_n\right), \\ &\vdots \end{aligned}$$

gde t i t_i pripadaju $[t_0, T]$ i x_i pripadaju $\boldsymbol{R}^d$, $i = 1, 2, \ldots$

Može se pokazati da sistem funkcija raspodela zadovoljava sledeća dva uslova:

1. *Uslov simetrije*: Ako je $\{i_1, \ldots, i_n\}$ permutacija brojeva $1, \ldots, n$, tada za proizvoljne trenutke i $n \geq 1$,

$$F_{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}}\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\right) = F_{t_1,\ldots,t_n}\left(x_1, \ldots, x_n\right).$$

2. *Uslov kompatibilnosti*: Za $m < n$ i za proizvoljne trenutke $t_{m+1}, \ldots, t_n \in [t_0, T]$ važi

$$F_{t_1,\ldots,t_m,t_{m+1},\ldots,t_n}\left(x_1, \ldots, x_m, \infty, \ldots, \infty\right) = F_{t_1,\ldots,t_m}\left(x_1, \ldots, x_m\right)$$

Često je umesto familije slučajnih promenljivih definisanih na nekom prostoru verovatnoća data familija funkcija raspodela $F_{t_1,\ldots,t_n}\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ koje zadovoljavaju uslove simetrije i kompatibilnosti. Ova dva koncepta su ekvivalentna kao što se može videti iz sledećeg tvrđenja.

Teorema 2. (Kolmogorova fundamentalna teorema*) Za svaku familiju funkcija raspodele koja zadovoljava uslove simetrije i kompatibilnosti postoje prostor verovatnoća* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i slučajni proces* $\{X_t : t \in [t_0, T]\}$ *definisan na njemu koji poseduje date raspodele kao konačno - dimenzionalne raspodele.*

U nastavku, umesto $\{X_t : t \in [t_0, T]\}$ jednostavno ćemo pisati X_t, i izložiti neke od osobina slučajnih procesa.

Definicija 15. *Slučajni procesi X_t i $\overline{X}_t$ definisani na istom prostoru verovatnoća su (stohastički) ekvivalentni ako, za svako $t \in [t_0, T]$, važi $X_t = \overline{X}_t$ sa verovatnoćom 1. Tada se X_t zove verzija procesa $\overline{X}_t$ i obrnuto.*

Konačno - dimenzionalne raspodele dva ekvivalentna slučajna procesa se podudaraju. Sa druge strane, trajektorije ekvivalentnih procesa mogu imati potpuno različita svojstva.

Definicija 16. *Slučajan proces je (strogo) stacionaran ako su njegove konačno dimenzionalne raspodele invarijantne u odnosu na raspored u vremenu, odnosno ako, za sve $t_i, t_i + t \in [t_0, T]$,*

$$F_{t_1+t,\ldots,t_n+t}(x_1, \ldots, x_n) = F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

Strogo stacionarni procesi, ukoliko imaju očekivanje, zadovoljavaju

$$E(X_t) = E(X_{t+h}) = m = const.$$

Ako je strogo stacionaran proces ujedno i L^2 proces, tada je $Cov(X_t, X_s)$ funkcija razlike argumenata. To nas motiviše da uvedemo stacionarnost u širem smislu. Posmatramo procese koji iako nisu strogo stacionarni, imaju neke od osobina koje smo primetili kod strogo stacionarnih procesa.

Definicija 17. *Slučajan proces X_t je stacionaran u širem smislu ako je $E(X_t) = m = const.$ i $Cov(X_t, X_s) = C(t-s)$, gde je C funkcija jedne promenljive.*

Ako je taj proces i srednje - kvadratno neprekidan, to jest, ako ima osobinu

$$\lim_{t \to s} E\left(|X_t - X_s|^2\right) = 0,$$

tada kovarijansna matrica C ima reprezentaciju

$$C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} dF(u), \quad -\infty < t < \infty,$$

gde je $d \times d$ matrica $F(u)$ takozvana spektralna funkcija raspodele od X_t. Ako F ima gustinu f, tada se ona zove spektralna gustina od X_t.

U slučaju

$$\int_{-\infty}^{\infty} |C(t)| \, dt < \infty,$$

f se dobija inverznom formulom

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{\infty} e^{-itu} C(t) \, dt, \quad u \in \boldsymbol{R}.$$

1.1.3 Vinerov proces

Jedan od najčešće korišćenih slučajnih procesa je svakako Gausovski proces.

Definicija 18. $\boldsymbol{R}^d$ *vrednosni slučajan proces se zove Gausovski proces ako su njegove konačno - dimenzionalne raspodele normalne. Drugim rečima, ako zajednička raspodela od* $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ *ima sledeću karakterističnu funkciju*

$$\varphi_{t_1,\ldots,t_n}(u_1,\ldots,u_n) = exp\left(i\sum_{k=1}^{n} u_k^T m(t_k) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} u_k^T C(t_k,t_j)\, u_j\right),$$

gde $u_1,\ldots,u_n \in \boldsymbol{R}^d, t_1,\ldots,t_n \in [t_0,T]$.

Ovde je $m(t) = E(X_t)$ *i* $C(t,s) = Cov(X_t, X_s)$.

Zato su konačno - dimenzionalne raspodele Gausovog procesa jedinstveno određene dvema funkcijama $m(t)$ i $C(t,s)$, odnosno, prvim i drugim momentom.

Takozvano Braunovo kretanje prvi put je korišćeno u biologiji za opisivanje kretanja čestica polena u fluidu. Kasnije je primećeno da se ista pravila mogu primeniti i na druge fenomene u fizici ili, recimo, promenu cena akcija u ekonomiji. Stohastički proces koji opisuje Braunovo kretanje je Vinerov proces.

Definicija 19. *Vinerov proces* W_t *je slučajan proces sa nezavisnim, stacionarnim i* $\mathcal{N}(0,(t-s)I)$ *- raspodeljenim prirastajima* $W_t - W_s$ *(I je jedinična matrica), sa početnom vrednošću* $W_0 = 0$ *i skoro neprekidnim trajektorijama.*

Može se pokazati da je W_t Gausovski proces sa očekivanjem $E(W_t) = 0$ i kovarijansnom matricom $E(W_t W_s) = min(t,s)\, I$.

Dalje, ako je W_t Vinerov proces, procesi $-W_t$, $cW_{\frac{t}{c^2}}$ $(c \neq 0)$, $tW_{\frac{1}{t}}$ i $W_{t+s} - W_s$ (s je fiksirano i $t \geq 0$) su takođe Vinerovi procesi.

Skoro sve trajektorije Vinerovog procesa su neprekidne, ali nigde diferencijabilne funkcije. Da bismo stekli probabilističku predstavu o tome, uzmimo da je t fiksirano.

Diferencni količnik $\frac{W_{t+h} - W_t}{h}$ je normalno raspodeljen sa parametrima 0 i $\frac{1}{|h|}I$. To zapisujemo

$$\frac{W_{t+h} - W_t}{h} : \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{|h|}I\right).$$

Kada $h \to 0$, ta normalna raspodela divergira, odnosno, za svaki ograničen merljiv skup B,

$$P\left[\frac{W_{t+h} - W_t}{h} \in B\right] \to 0, \text{ kada } h \to 0.$$

Zato diferencni količnik ne konvergira sa pozitivnom verovatnoćom ka nekoj konačnoj slučajnoj promenljivoj.

Kao što smo videli, Vinerov proces je klasičan slučajan proces. U nastavku ćemo definisati proces belog šuma koji je sa njim povezan. Međutim, pre nego što to uradimo, moramo se pozabaviti uopštenim funkcijama.

1.2 Distribucije

Distribucije opisuju matematički koncept uopštavanja klasičnog koncepta funkcije. Potreba za takvim uopštavanjem javlja se u mnogim problemima inženjera, fizičara i matematičara. Uvođenje uopštenih funkcija daje nam mogućnost da matematički ispravno definišemo mnoge idealizovane situacije npr. gustinu materijalne tačke, napon u tački,... S druge strane, uopštene funkcije reflektuju činjenicu da se u stvarnosti fizičke veličine ne mogu izmeriti u proizvoljnoj tački; samo se srednje vrednosti u dovoljno malim okolinama date tačke mogu zaista meriti. Dakle, teorija uopštenih funkcija daje adekvatan aparat za opisivanje raspodela (distribucija) raznih fizičkih veličina. Zbog toga se uopštene funkcije nazivaju i distribucije.

Osnovna ideja daljeg izlaganja je sledeća: definisaćemo najpre tzv. prostor test funkcija, funkcija na koje će delovati distribucije, zatim sam prostor distribucija ili uopštenih funkcija i na kraju ćemo videti da je taj prostor proširenje prostora klasičnih funkcija kojima smo se do sada bavili. Cilj je naravno da prostor uopštenih obuhvati na neki način i klasične funkcije.

Na sličan način ćemo kasnije pokušati da uvedemo uopštene stohastičke procese.

Pre nego što se pozabavimo prostorom distribucija, uvešćemo prostore $L^p(Q), L^p_{loc}(Q)$, za $1 \leq p < \infty$, $L^\infty(Q)$ i $L^\infty_{loc}(Q)$.

Neka je Q otvoren podskup od $\mathbf{R}^n$. Skup funkcija sa vrednostima u K ($K = \mathbf{R}$ ili $K = \mathbf{C}$) Lebeg - merljivih nad Q za koje važi

$$\int_Q |f(x)|^p \, dx < \infty,$$

gde je p fiksiran broj iz intervala $[1, \infty]$, se označava sa $\Lambda^p(Q)$. U taj skup se uvodi relacija ekvivalencije $f = g$ ako je $f(x) = g(x)$ skoro svuda u Q. Skup klasa ekvivalencije nad poljem K ima strukturu vektorskog prostora; to je prostor $L^p(Q)$.

Funkciju f i klasu $f \in L^p(Q)$ kojoj pripada označavamo na isti način, što nas ne dovodi do zabune. U odnosu na normu

$$\|f\|_{L^p(Q)} = \left(\int_Q |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

prostor $L^p(Q)$ je Banahov prostor.

Prostor $L^2(Q)$ je Hilbertov sa skalarnim proizvodom

$$(f, g) = \int_Q f(x) \, \overline{g}(x) \, dx,$$

gde je $\overline{g}$ konjugovana funkcija za g.

Sa $\Lambda^p_{loc}(Q), p \in [1, \infty)$ označavamo skup merljivih funkcija sa vrednostima u K nad otvorenim skupom $Q \subset \mathbf{R}^n$ za koje važi da za svaki ograničen otvoren n - interval $I \subset \Omega, f \in L^p(I)$. Kažemo da su f i g iz $\Lambda^p_{loc}(Q)$ u relaciji ako je $f(x) = g(x)$ skoro svuda u Q. To je relacija ekvivalencije u $\Lambda^p_{loc}(Q)$; skup odgovarajućih klasa ekvivalencije nad poljem K ima strukturu vektorskog prostora koji označavamo sa $L^p_{loc}(Q)$.

Elementi od $L^p_{loc}(Q)$ se nazivaju p - lokalno integrabilne funkcije. Prostori $L^1(Q)$ i $L^1_{loc}(Q)$ se nazivaju prostori integrabilnih, odnosno, prostori lokalno integrabilnih funkcija.

Skup merljivih funkcija sa vrednostima u K nad otvorenim skupom $Q \subset \mathbf{R}^n$ za koje važi $|f(x)| < \infty$ skoro svuda u Q, odnosno nad svakim ograničenim n - intervalom $I \subset Q$, $|f(x)| < \infty$ skoro svuda u I, se označava sa $\Lambda^{\infty}(Q)$, odnosno $\Lambda^{\infty}_{loc}(Q)$. Prostori odgovarajućih klasa ekvivalencije u odnosu na relaciju: f i g su u relaciji ako su jednaki skoro svuda u Q, se označavaju respektivno sa $L^{\infty}(Q)$ odnosno $L^{\infty}_{loc}(Q)$.

U odnosu na normu

$$\|f\|_{L^{\infty}(Q)} = ess \sup_{Q} |f(x)| := \inf \left\{ C \in \mathbf{R}^{+}; |f(x)| \leq C \text{ skoro svuda u } Q \right\}$$

prostor $L^{\infty}(Q)$ je Banahov.

1.2.1 Prostor osnovnih funkcija

Neka je Q podskup od $\mathbf{R}^n$.

Definicija 20. *Nosač neprekidne funkcije $f : Q \to \boldsymbol{C}$ je adherentan skup za skup $\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$. Nosač funkcije f skraćeno označimo sa supp f.*

Prema ovoj definiciji nosač neprekidne funkcije f je najmanji zatvoren skup u Q izvan koga je $f = 0$. Ako $x \in supp\ f$, tada ne postoji okolina tačke x u kojoj je $f = 0$.

Koristeći se vezom $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ može se pokazati da za neprekidne funkcije važi $supp\ (f+g) \subset supp\ f \cup supp\ g$.

Sa P^n označimo podskup od $\mathbf{R}^n$ čiji elementi imaju koordinate cele nenegativne brojeve. Ako $k = (k_1, \ldots, k_n) \in P^n$ tada stavljamo $|k| = k_1 + \ldots + k_n$. Često umesto P^1 stavljamo samo P, $P = \{0\} \cup \mathbf{N}$.

Za funkciju f koja ima parcijalne izvode koristimo oznaku

$$f^{|k|}(x) = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_n^{k_n}} f(x) = \partial^k f(x)$$

Definicija 21. *$\mathcal{C}^m(Q)$, $m \in P^1$ ili $m = \infty$, je skup funkcija koje su definisane nad Q i imaju neprekidne sve izvode do reda m. $\mathcal{C}_0^m(Q)$ je podskup od $\mathcal{C}^m(Q)$ onih funkcija čiji su nosači kompaktni u Q.*

Iz primedbe o kompaktnim skupovima u Q sledi da je $\mathcal{C}_0^m(Q) \subset \mathcal{C}_0^m(\mathbf{R}^m)$. Tada je $g \in \mathcal{C}_0^m(\mathbf{R}^n)$ element i skupa $\mathcal{C}_0^m(Q)$ ako i samo ako je *supp* $g \subset Q$.

Sa običnim sabiranjem i množenjem kompleksnih brojeva, prostori $\mathcal{C}^m(Q)$ i $\mathcal{C}_0^m(Q)$ su vektorski prostori nad poljem $\mathbf{C}$. Funkcije iz $\mathcal{C}^\infty(Q)$ se nazivaju glatke funkcije.

Označimo sa $\mathcal{C}_0^m(K), m \in P^1$ ili $m = \infty$, gde je K kompaktan podskup od Q, potprostor od $\mathcal{C}_0^m(Q)$ čiji elementi imaju nosače sadržane u K.

U prostoru $\mathcal{C}_0^\infty(K)$, gde je K kompaktan podskup od Q definišimo niz normi $\{p_{K,m}; m \in P^1\}$:

$$p_{K,m}(\phi) = \sum_{|j| \leq m} \sup_{x \in K} \left| \phi^{(j)}(x) \right|.$$

Sa ovim normama $\mathcal{C}_0^\infty(K)$ je lokalno konveksan prostor, tj. ima bazu okolina nule sastavljenu od konveksnih skupova.

Definicija 22. *Vektorski prostor $\mathcal{C}_0^\infty(K)$ snabdeven navedenom topologijom je $\mathcal{D}(K)$.*

Ako za dva kompaktna skupa K_1 i K_2 znamo da je $K_1 \subset K_2$, sledi da je $\mathcal{C}_0^\infty(K_1) \subset \mathcal{C}_0^\infty(K_2)$ i da se topologija u $\mathcal{D}(K_1)$ poklapa sa topologijom koju $\mathcal{D}(K_2)$ indukuje na $\mathcal{D}(K_1)$. Za otvoren neprazan skup $Q \subset \mathbf{R}^n$ može se konstruisati niz $\{K_\nu\}$ kompaktnih skupova za koje važi: $K_\nu \subset K_{\nu+1}$ i $\bigcup_{\nu=1}^\infty K_\nu = Q$.

Ideja je naravno da pomoću već definisanih topologija na kompaktnim podskupovima od Q definišemo željenu topologiju na $\mathcal{C}_0^\infty(Q)$, tzv. topologiju striktne induktivne granice, međutim, nećemo ulaziti u detalje.

Definicija 23. *Vektorski prostor $\mathcal{C}_0^\infty(Q)$ snabdeven definisanom topologijom striktne induktivne granice je prostor $\mathcal{D}(Q)$. Ovaj prostor se naziva prostor osnovnih ili test funkcija.*

1.2.2 Prostor distribucija

Definicija 24. *Neprekidna linearna funkcionela nad $\mathcal{D}(Q)$ naziva se distribucija.*

Distribucije označavamo istim oznakama kao i funkcije: $f, g, \ldots$; one preslikavaju $\mathcal{D}(Q)$ u $\mathbf{C}$. To simbolički označavamo sa

$$f : \phi \mapsto \langle f, \phi \rangle = \left(f, \overline{\phi}\right).$$

Često ćemo distribucije $f, g, \ldots$ označavati sa $f(x), g(x), \ldots$ da bismo istakli domen, dok čitav prostor distribucija na Q označavamo sa $\mathcal{D}'(Q)$.

Jasno, u odnosu na uobičajene operacije sabiranja:

$$\langle f + g, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle + \langle g, \phi \rangle$$

i množenja kompleksnim brojem:

$$\langle cf, \phi \rangle = c \langle f, \phi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}(Q)$$

skup distribucija čini vektorski prostor $\mathcal{D}'(Q)$, dual od $\mathcal{D}(Q)$.

Teorema 3. *Linearna funkcionela $f : \mathcal{D}(Q) \to \boldsymbol{C}$ je iz $\mathcal{D}'(Q)$ ako i samo ako za svaki niz $\{\phi_\nu\} \subset \mathcal{D}(Q)$ koji konvergira ka nuli u $\mathcal{D}(Q)$ sledi da (f, ϕ_ν) konvergira ka nuli u skupu kompleksnih brojeva.*

Sledeća teorema često se koristi i kao definicija distribucije.

Teorema 4. *Potreban i dovoljan uslov da je linearna funkcionela $f : \mathcal{D}(Q) \to \boldsymbol{C}$ distribucija jeste da za svaki kompaktan skup $K \subset \Omega$ postoje konstante $C > 0$ i $m \in P^1$ tako da za svako $\phi \in \mathcal{D}(K)$ važi*

$$|\langle f, \phi \rangle| \leq C p_{K,m}(\phi). \tag{1.1}$$

Definicija 25. *Neka za distribuciju $f \in \mathcal{D}(Q)$ važi da postoji $p \in P^1$ tako da je p najmanji broj takav da (1.1) važi za $m = p$ i svaki kompaktan skup $K \subset\subset Q$. Broj p je red distribucije f; distribucija f je konačnog reda p. Ako distribucija nije konačnog reda, tada kažemo da je beskonačnog reda.*

1.2.3 Regularne distribucije

U narednom primeru, definišemo Dirakovu distribuciju.

Primer 1. *Dirakova (Dirac) distribucija $\delta(x - x_0) \in \mathcal{D}'(Q), x_0 \in Q$, definisana je na sledeći način*

$$\langle \delta(x - x_0), \phi(x) \rangle = \phi(x_0), x_0 \in Q, \phi \in \mathcal{D}(Q).$$

Neka je $f \in L^1_{loc}(Q)$, tj. lokalno integrabilna funkcija, kako smo ranije definisali.

Jednostavno se pokazuje da je tada sa

$$\phi \mapsto \langle f, \phi \rangle = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\phi(x)\,dx, \phi \in \mathcal{D}(Q)$$

definisana distribucija iz $\mathcal{D}'(Q)$.

Definicija 26. *Distribucije definisane pomoću lokalno integrabilnim funkcijama izrazom*

$$\left\langle \widetilde{f}, \phi \right\rangle := \int\limits_{\boldsymbol{R}^n} f(x)\,\phi(x)\,dx = \int\limits_{K} f(x)\,\phi(x)\,dx = \left(\widetilde{f}, \overline{\phi}\right),$$

gde je $K = supp\ \phi$ iz $\mathcal{D}'(Q)$, nazivaju se regularne distribucije. Regularna distribucija koja odgovara lokalno integrabilnoj funkciji f označava se sa $\widetilde{f}$.

Teorema 5. *Ako su $f, g \in L^1_{loc}(Q)$ i ako za svako $\phi \in \mathcal{D}(Q)$, $\left\langle \widetilde{f}, \phi \right\rangle = \langle \widetilde{g}, \phi \rangle$, tada su f i g jednake skoro svuda u Q.*

Drugim rečima, različiti elementi iz $L^1_{loc}(Q)$ generišu različite distribucije.

Prethodna teorema nam govori da je prostor $L^1_{loc}(Q)$ izomorfan sa prostorom regularnih distribucija. Na osnovu izomorfizma

$$L^1_{loc}(Q) \ni f \to \widetilde{f} \in \mathcal{D}'(Q)$$

poistovećujemo regularne distribucije i odgovarajuće funkcije iz $L^1_{loc}(Q)$. Regularnu distribuciju $\widetilde{f}$ koja je definisana sa $f \in L^1_{loc}(Q)$ ćemo označavati takođe sa f, ako to ne unosi konfuziju.

Iz izloženog sledi da je $\mathcal{D}(Q)$ podskup od $\mathcal{D}'(Q)$.

Postoje distribucije koje nisu regularne. Dirakova δ - distribucija, data u Primeru 1, nije regularna distribucija, tj. ne postoji lokalno integrabilna funkcija $\delta(x)$ tako da važi

$$\phi(0) = \int \delta(x)\,\phi(x)\,dx, \qquad \phi \in \mathcal{D}(Q).$$

1.2.4 Nosač distribucije

Za $f \in \mathcal{D}'(Q)$ kažemo da je nula na $K \subset Q$ ako je

$$\langle f, \phi \rangle = 0, \qquad \text{za sve } \phi \in \mathcal{D}(Q).$$

Definicija 27. *Nosač distribucije $f \in \mathcal{D}'(Q)$ je skup tačaka iz Q koje imaju okolinu u kojoj f nije jednaka sa distribucijom 0. Nosač distribucije f označava se sa supp f.*

Drugačije rečeno, nosač distribucije $f \in \mathcal{D}'(Q)$ je komplement unije svih otvorenih skupova u Q nad kojim je $f = 0$.

Komplement od *supp* f je i najveći otvoren skup u kojem je $f = 0$, što znači da Definicija 27. i Definicija 20. utvrđuju isti nosač za regularnu distribuciju $\widetilde{f}$ i njoj odgovarajuću funkciju f iz $L^1_{loc}(Q)$.

Sa $\mathcal{E}'(Q)$ označavamo prostor distribucija sa kompaktnim nosačem.

Definicija 28. *Za $f \in \mathcal{D}'(Q)$ singularni nosač od f, u oznaci sing supp f, je skup tačaka u Q koje nemaju okolinu u kojoj je f glatka funkcija.*

Drugačije rečeno, singularni nosač je komplement unije svih otvorenih skupova u Q nad kojima je f glatka funkcija.

Teorema 6. *Distribucija f je glatka funkcija u komplementu od sing supp f.*

1.2.5 Izvod distribucije

Neka je $f \in \mathcal{D}'(Q)$ i $e_i \in P^n$ vektor čija je i - ta komponenta 1, a sve ostale komponente su nula. Parcijalni izvod $\frac{\partial}{\partial x_i} f = f^{(e_i)}$ je definisan sa

$$\left\langle f^{(e_i)}(x), \phi(x) \right\rangle := -\left\langle f(x), \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} \right\rangle, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.2}$$

Sa (1.2) definisano je preslikavanje iz $\mathcal{D}'(Q)$ u $\mathcal{D}'(Q)$ što znači da svaka distribucija ima sve parcijalne izvode prvog reda. Navedena operacija se naziva diferenciranje distribucija.

Za proizvoljno $\alpha \in P^n$ važi

$$\langle \partial^\alpha f, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle f, \phi^{(\alpha)} \right\rangle,$$

čime je u $\mathcal{D}'(Q)$ definisan proizvoljan mešovit izvod koji ne zavisi od reda parcijalnih izvoda u njemu.

Primer 2. *Pokažimo da je izvod distribucije koju definiše Hevisajdova (Heaviside) funkcija*

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

δ - distribucija. Za svako $\phi \in \mathcal{D}(Q)$ važi

$$\langle H'(x), \phi(x) \rangle = -\langle H(x), \phi'(x) \rangle = -\int\limits_0^\infty \phi'(x)\,dx = \phi(0) = \langle \delta(x), \phi(x) \rangle.$$

Ranije smo već uočili da skup distribucija $\mathcal{D}'(Q)$ proširuje skup lokalno integrabilnih funkcija nad Q. Osim toga, operacija diferenciranja distribucija je neprekidna na $\mathcal{D}'(Q)$.

Može se pokazati (što nije naše osnovno interesovanje, ali je važna činjenica), da je skup distribucija najmanji skup koji proširuje skup lokalno integrabilnih funkcija u kojem postoji izvod svakog njegovog elementa tako da je i pojam klasičnog izvoda proširen. Skup distribucija $\mathcal{D}'(Q)$ je najmanje proširenje od $L^\infty(Q)$ u kojem je diferenciranje uvek moguće.

Teorema 7. *Neka je $f(x) \in \mathcal{D}'(Q)$ i neka je $Q_1 \subset\subset Q \subset \boldsymbol{R}^n$. Postoji funkcija $g(x) \in L^\infty(Q_1)$ i postoji $r \in P$ tako da nad Q_1 u distribucionom smislu važi*

$$f(x) = \frac{\partial^{n\cdot r}}{\partial x_1^r \ldots \partial x_n^r} g(x).$$

($Q_1 \subset\subset Q$ znači da je $\overline{Q}_1$ kompaktan podskup od Q).

Definisaćemo još konvoluciju distribucija.

1.2.6 Konvolucija distribucija

U prostoru lokalno integrabilnih funkcija nad $\mathbf{R}^n$ uvodi se operacija konvolucije na sledeći način:

Definicija 29. *Neka su $f, g \in L^1_{loc}(\boldsymbol{R}^n)$. Ako integral*

$$\int\limits_{\boldsymbol{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy$$

postoji za skoro svako $x \in \boldsymbol{R}^n$ i predstavlja lokalno integrabilnu funkciju u $\boldsymbol{R}^n$, tada se taj integral naziva konvolucija funkcije f i g i označava se sa $f * g$.

Kako u Definiciji 29. $f * g \in \mathbf{R}^n$, sa njom je određena regularna distribucija $f * g \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$. Za $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ imamo

$$\begin{aligned}
\langle f * g, \phi \rangle &= \int (f * g)(x)\, \phi(x)\, dx \\
&= \int \left(\int f(y)\, g(x-y)\, dy \right) \phi(x)\, dx \\
&= \int f(x) \left(\int g(x-y)\, \phi(x)\, dx \right) dy \\
&= \int f(y) \left(\int g(z)\, \phi(y+z)\, dz \right) dy \\
&= \langle f(y), \langle g(z), \phi(y+z) \rangle \rangle .
\end{aligned}$$

Ovo je motivacija za definiciju konvolucije distribucija. Međutim, prethodnim izrazom ne može se definisati konvolucija dve proizvoljne distribucije. Umesto toga, daćemo definiciju na manjim skupovima za koje smo sigurni da konvolucija postoji. U svakom slučaju, onda kada $f * g$ postoji, to je distribucija iz $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$.

Definicija 30. *Za $f \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ i $g \in \mathcal{E}'(\boldsymbol{R}^n)$, izrazom*

$$\langle f * g, \phi \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \phi(x+y) \rangle \rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^n).$$

definisana je konvolucija distribucija.

U sledećoj teoremi navedene su neke osobine konvolucije distribucija.

Teorema 8. *Za $f \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ i $g \in \mathcal{E}'(\boldsymbol{R}^n)$ važi:*

1. $f * g \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$,
2. $f * g = g * f$,
3. *Ako je $h \in \mathcal{E}'(\boldsymbol{R}^n)$, tada*

$$(f * g) * h = f * (g * h),$$

4. *Ako δ označava Dirakovu distribuciju, onda*

$$f * \delta = \delta * f = f.$$

Glava 2

Množenje distribucija

U ovoj glavi pozabavićemo se pitanjem množenja distribucija. Iako smo uspeli da proširimo prostor klasičnih funkcija, to ponekad nije dovoljno. Matematičari su se bavili pitanjem proizvoda distribucija, jer mnogi problemi teorijske fizike, na primer kvantne teorije polja, vezani su za nemogućnost definisanja množenja proizvoljnih elemenata iz $\mathcal{D}$. Sa manje ili više uspeha definisano je množenje samo nad nekim podskupovima od $\mathcal{D}\left(Q\right)$.

Najpre ćemo pokazati opravdanost potrebe za proizvodom distribucija, zatim opisati teškoće koje nastaju pri pokušajima definisanja ovog proizvoda pod odgovarajućim prirodnim uslovima koje bi takav proizvod morao da zadovolji. Na kraju navodimo teoremu o nemogućnosti definisanja proizvoda distribucija i potencijalne dalje korake.

2.1 Zašto množimo distribucije?

Do sada smo više puta naglasili široku primenu teorije distribucija u rešavanju stvarnih fizičkih problema. Pokazaćemo sada primer parcijalne diferencijalne jednačine koje se pojavljuje prilikom modeliranja fizičkih sistema. U njoj je jasno izražena potreba za množenjem distribucija.

Primer 3. (Udarni talasi u kvazilinearnim, nekonzervativnim sistemima) *Posmatramo jednodimenzionalnu elastičnu sredinu koja zauzima x - osu, ima gustinu $\rho\left(x,t\right)$ i kreće se brzinom $u\left(x,t\right)$. Zakon održanja mase u diferencijalnom obliku nam govori da je brzina promene gustine jednaka negativnom gradijentu fluksa ρu, tj.*

$$\rho_t + \left(\rho u\right)_x = 0.$$

Zakon održanja impulsa nam daje

$$(\rho u)_t + \left(\rho u^2\right)_x = \sigma_x,$$

gde σ predstavlja prosečnu silu kojom se telo opire deformaciji. Pun sistem termoelastičnosti može se formirati dodavanjem još diferencijalnih veza između raznih fizičkih veličina (kao što su unutrašnja energija, entropija, ...) i konačno zamenjivanjem u jednačine određenih fizičkih zakona.

Na primer, za idealni gas sila kojom se opire deformaciji jednaka je po intenzitetu sa pritiskom, ali suprotnog delovanja, dok je za idealni gas u sistemu u kome se entropija ne menja (izotopni sistem - isoentropic system), pritisak zadat funkcijom gustine. Dobijamo sistem

$$\begin{array}{lcll} \rho_t & + & (\rho u)_x & = 0 \\ (\rho u)_t & + & (\rho u^2)_x & = -p_x, \quad p = p(\rho) \end{array} \tag{2.1}$$

S druge strane, ukoliko modeliramo sudare metala pri velikoj brzini, možemo prihvatiti sledeće razmatranje. Sa (ξ, t) označimo koordinate materijala, tako da je $x = x(\xi, t)$ i $\xi = x(\xi, 0)$. Poznati Hukov zakon nam govori da je sila kojom se materijal suprotstavlja maloj promeni proporcionalan toj deformaciji. U našem slučaju ta sila je $\sigma(x(\xi, t), t)$, pa možemo zapisati ($\kappa > 0$)

$$\sigma(x(\xi, t), t) = \kappa \partial_\xi (x(\xi, t) - \xi).$$

Ukoliko je D_t izvod položaja materijala u odnosu na vreme, znamo da je

$$D_t x(\xi, t) = u(x(\xi, t), t),$$

što nam daje $D_t \sigma = \kappa \partial_\xi u$. Pod pretpostavkom da je deformacija mala, dobijamo $\partial_\xi u \approx \partial_x u$.

Konačno, u prostornim koordinatama (x, t) izvod D_t postaje $\partial_t + u\partial_x$, pa stižemo do sistema

$$\begin{array}{lcll} \rho_t & + & (\rho u)_x & = 0 \\ (\rho u)_t & + & (\rho u^2)_x & = \sigma_x \\ \sigma_t & + & u\sigma_x & = \kappa u_x \end{array} \tag{2.2}$$

Sistemi (2.1) i (2.2) se fundamentalno razlikuju: sistem (2.1) je u konzervativnom obliku, tj. svaka jednačina predstavlja divergenciju u odnosu na t i x nekih funkcija od u, ρ i p. To je uobičajeni oblik koji nastaje primenom zakona održanja u fizici. S druge strane, sistem (2.2) nije tog oblika: proizvod

$u\sigma_x$ koji se javlja u trećoj jednačini nije gradijent.

Razlika je velika kada tražimo rešenja u obliku udarnih talasa. To su rešenja koja su po delovima u $\mathcal{C}^1$, ali imaju skokove duž nekih $\mathcal{C}^1$ - krivih u (x,t) - ravni. U sistemu (2.1) nemamo nikakvih problema: moguće je najpre obaviti množenje, a zatim naći izvode u distributivnom smislu (na taj način dolazimo do takozvanih slabih rešenja.) U drugom sistemu, ako dođe do skoka u u i σ istovremeno duž iste krive, nailazimo na proizvod tipa „Hevisajdova funkcija puta Dirakova mera“. Ovakav problem može se samo pogoršati uključimo li u naš sistem izvode višeg reda za u, ρ, σ, a skokove nije moguće izbeći.

Poznato je da čak i uz glatke ulazne veličine, klasična rešenja kvazilinearnih hiperboličnih sistema imaju skokove u konačnom vremenu. Zato problem množenja ne može da se izbegne zahtevanjem dodatnih „lepih osobina“ za ulazne veličine. U Primeru 5. videćemo zašto ne možemo definisati odgovarajući proizvod.

Sledi primer iz domena linearne akustike.

Primer 4. *Linearizacija sistema (2.1) u blizini stanja mirovanja ρ_0, $u_0 = 0$, $p_0 = p(\rho_0)$ daje nam novi sistem*

$$\begin{array}{rcll} \overline{\rho}_t & + & \rho_0\,\overline{u}_x & = 0 \\ \rho_0\,\overline{u}_t & + & \overline{p}_x & = 0, \quad \overline{p} = c_0^2\,\overline{\rho} \end{array} \tag{2.3}$$

za priraštaje $\overline{\rho} = \rho - \rho_0$, $\overline{u} = u$, $\overline{p} = p - p_0$. Brzina zvuka c_0 data je dobro poznatim izrazom

$$c_0 = \sqrt{p'(\rho_0)}.$$

Pretpostavimo da negativnu x - osu zauzima materijal sa gustinom ρ_0^- i u kome je brzina prostiranja zvuka c_0^-, a pozitivnu x - osu materijal gustine ρ_0^+, uz brzinu prostiranja zvuka c_0^+. Želimo da proučimo prostiranje zvučnog talasa koji kreće iz neke tačke $x_0 < 0$ (u kojoj smatramo da nam je talas poznat u svakom trenutku vremena) i prolazi kroz problematičnu tačku $x = 0$. U klasičnom smislu, mi bismo rešili sistem (2.3) sa obe strane diskontinuiteta i nametnuli prelazni uslov za $x = 0$. U ovom jednostavnom primeru, fizički opravdan uslov je očigledan: brzina $\overline{u}$ i pritisak $\overline{p}$ moraju biti neprekidni. Međutim, u odgovarajućem višedimenzionalnom problemu nije sasvim jasno šta bi moglo da posluži kao smislen prelazni uslov, naročito ako površina na kojoj dolazi do prekida ima singularnosti, recimo oštre vrhove. To nas dovodi *do nove interpretacije problema (2.3) kao globalnog problema sa prekidima u koeficijentima.*

Jednačine bi trebalo da važe na celom $\boldsymbol{R}^2$*, ali* ρ_0 *i* c_0 *imaju skokove duž linije* $\{(0,t) : t \in \boldsymbol{R}\}$*, pa nam prelazni uslov nije potreban. Kako smo napustili a priori zahtev neprekidnosti od* u*, moramo da platimo cenu: izraz* $\rho\, u_x$ *predstavlja proizvod step funkcije i izvoda funkcije koja ne mora biti neprekidna, dakle, proizvod distribucija. Ipak, upravo će ovakva interpretacija problema (2.3) imati jedinstveno rešenje u Kolomboovoj algebri uopštenih funkcija. Štaviše, ako su podaci za* x_0 *dati klasično, uopšteno rešenje se ponaša makroskopski kao i klasično rešenje koje smo dobili ranije uz ispravan prelazni uslov. Mehanizam koji se krije iza toga uključuje postojanje i pogodno ponašanje sekvencijalnih rešenja koja možemo dobiti ublažavanjem skokova kod* ρ_0 *i* c_0*, kao i činjenice da sistem (2.3) možemo formalno zapisati kao*

$$\begin{array}{ccccccc} c_0^{-2} & \rho_0^{-1} & \overline{p}_t & + & \overline{u}_x & = 0 \\ & \rho_0 & \overline{u}_t & + & \overline{p}_x & = 0 \end{array} \tag{2.4}$$

Deljenje funkcijom koja ima prekide nema smisla ukoliko se bavimo konceptom klasičnih slabih rešenja, ali u diferencijalnoj algebri uopštenih funkcija prelaz sa sistema (2.3) na sistem (2.4) je opravdan. Obe formulacije su zapravo ekvivalentne.

Lako je zamisliti mnoge druge situacije u kojima se pojavljuju jednačine sa diskontinuitetima u koeficijentima; veoma strmi gradijenti ili prekidi u fizičkim sredinama su samo neki od razloga te pojave.

2.2 Teškoće i rezultat nemogućnosti množenja distribucija

Pokazali smo da potreba za množenjem distribucija postoji. Da li je tačno da je u opštem slučaju množenje distribucija nemoguće? Da bismo se približili odgovoru pokušaćemo da otkrijemo moguće razloge za nemogućnost množenja.

Postoje dve vrste primera. Prva vrsta se bavi takozvanom unutrašnjom operacijom množenja distribucija, tj. pokušajem da definišemo proizvod dve distribucije koji je ponovo distribucija. Pomoću ovakvih primera zaključujemo da deluje nemoguće pronaći postupak koji bi dao razumnu vrednost za proizvod dve potpuno proizvoljne distribucije. Druga vrsta primera tiče se diferencijalnih algebri koje sadrže prostor distribucija. U takvoj algebri, proizvod dve distribucije je definisan. Tada nastaju nove teškoće. Ispostavilo se da je nemoguće obezbediti željene algebarske osobine (kao što su asocijativnost ili komutativnost) i u isto vreme konzistenciju između novog proizvoda i novih izvoda i odgovarajućih klasičnih operacija tamo gde se mogu definisati.

Primer 5. (Proizvod Hevisajdove funkcije i Dirakove mere) *U Primeru 3. ukazala se potreba za definisanjem proizvoda Hevisajdove funkcije i Dirakove mere. Pokušaćemo da taj proizvod definišemo pomoću regularizacije i traženja granične vrednosti, tačnije kao*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon \varphi_\varepsilon$$

ukoliko ta granična vrednost postoji u $\mathcal{D}'(\boldsymbol{R})$.

Pretpostavljamo da je $H_\varepsilon(x)$ *glatko, konvergira ka* $H(x)$ *za skoro svako* x *i da je ograničeno nezavisno od* ε. *Slično, svako* φ_ε *je glatko i zadovoljava sledeće uslove:*

1. *supp* $(\varphi_\varepsilon) \to \{0\}$ *kad* $\varepsilon \to 0$
2. $\int \varphi_\varepsilon(x)\, dx = 1$ *za sve* $\varepsilon > 0$
3. $\int |\varphi_\varepsilon(x)|\, dx$ *je ograničeno nezavisno od* $\varepsilon > 0$.

Očigledno, granična vrednost zavisi od izbora regularizacije. Neka je supp $(\varphi_\varepsilon) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$. *Ako je* $H_\varepsilon = 0$ *na* $(-\infty, \varepsilon]$ *za sve vrednosti* ε, *onda*

$$H_\varepsilon \varphi_\varepsilon \equiv 0,$$

ali ako je $H_\varepsilon = 1$ *na* $[-\varepsilon, \infty)$, *onda važi*

$$H_\varepsilon \varphi_\varepsilon \equiv \varphi_\varepsilon \to \delta.$$

Na kraju, možemo definisati H_ε *i kao konvoluciju od* H *i istog* φ_ε, *što nam daje*

$$\begin{aligned} (H * \varphi_\varepsilon)\, \varphi_\varepsilon &= \frac{d}{dx} \frac{1}{2} (H * \varphi_\varepsilon)^2 \\ &\to \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} H\right) = \frac{1}{2}\delta \quad u\ \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}), \end{aligned}$$

s obzirom da je i $(H * \varphi_{\varepsilon})^2 \to H$ *u* $\mathcal{D}'(\boldsymbol{R})$.

Ovako nešto nam sugeriše da bi najrazumnije rešenje bilo $H\delta = \frac{1}{2}\delta$. *Međutim, ova kao i sve ostale formule za* $H\delta$ *osuđena je na propast.*

Uzmimo u razmatranje još jedan zakon održanja:

$$u_t + \left(\frac{1}{m}u^m\right)_x = 0. \tag{2.5}$$

Klasičan koncept slabih rešenja sprovodi sledeći postupak: za dato $u \in L^\infty\left(\boldsymbol{R}^2\right)$, *najpre nalazimo* u^m *u algebri* L^∞ *- funkcija, a zatim tražimo izvode u smislu distribucija. Lako se proverava da je po delovima konstantan putujući talas*

$$u(x,t) = H(x - ct)$$

slabo rešenje ako i samo ako je

$$c = \frac{1}{m}.$$

S druge strane, ako naivno interpretiramo zakon održanja (2.5) kao

$$u_t + u^{m-1}u_x = 0 \tag{2.6}$$

i iskoristimo $H^{m-1}(x-ct) = H(x-ct)$ *i* $H(x-ct)\,\delta(x-ct) = \frac{1}{2}\delta(x-ct)$, *vidimo da je* $u(x,t) = H(x-ct)$ *rešenje za (2.6) ako i samo ako je* $c = \frac{1}{2}$ *za proizvoljnu vrednost* m. *Dakle, nismo došli do pouzdane formule.*

Dublji razlog za neslaganje rešenja jednačina (2.5) i (2.6) za $m \neq 2$ *leži u tome što smo da bismo transformisali prvu jednačinu u drugu koristili zakone komutativne diferencijalne algebre. Nažalost, ti zakoni se ne slažu sa zahtevima* $H^m = H$ *i* $H' \neq 0$, *što ćemo pokazati u Primeru 6.*

Iz svega do sada izloženog možemo zaključiti da pod odgovarajućim prirodnim uslovima koje bi trebalo množenje da zadovoljava, tu operaciju nije moguće definisati nad celim $\mathcal{D}'(Q)$. Izložićemo sada jedno Švarcovo tvrđenje koje je dato u opštoj formi, ali će nas dovesti do konačnog rezultata.

Teorema 9. *Neka je* E *vektorski prostor nad* $\boldsymbol{C}$ *čiji je jedan podskup* $\mathcal{C}(Q)$, *gde je* Q *otvoren podskup realne prave koji sadrži nulu. Neka je u* E *definisana linearna operacija* $\odot$ *(množenje) kao i unarna operacija* D *(izvod) sa sledećim osobinama:*

1. *Operacija $\odot$ indukuje na $\mathcal{C}(Q)$ obično množenje.*

2. *To je bilinearna asocijativna operacija za koju je neutralan element 1.*

3. *Za operator D se pretpostavlja da je linearan, da ako $f \in \mathcal{C}^1(Q)$, tada je $Df = f'$ kao i da važi*

$$D(f \odot g) = Df \odot g + f \odot Dg \quad \textit{(Lajbnicova formula)}. \tag{2.7}$$

Pod svim navedenim pretpostavkama u E ne postoji element δ različit od nule za koji je $x \odot \delta = 0$.

Dokaz. Pokažimo prvo da $f(x) = x$, $x \in \mathbf{R}$, ima inverzan element u E u odnosu na operaciju $\odot$. Neka je $h(x) := x(\log|x| - 1)$, $x \in \mathbf{R}$. Pokazaćemo da važi

$$D^2(x(\log|x| - 1)) \odot x = x \odot D^2(x(\log|x| - 1)) = 1.$$

Iz (2.7) sledi (za proizvoljno f i g iz E)

$$D^2(f \odot g) = \left(D^2 f\right) \odot g + 2(Df) \odot (Dg) + f \odot \left(D^2 g\right),$$

pa kako je $x^2(\log|x| - 1) \in \mathcal{C}^2(Q)$, dobijamo

$$D(x \odot h(x)) = \left(x^2(\log|x| - 1)\right)' = 2x(\log|x| - 1) + x = 2h + x.$$

Zato je

$$x \odot \left(D^2 h\right) = D^2(x \odot h) - 2Dh = 1.$$

Na isti način se pokazuje i da je $(D^2 h) \odot x = 1$.

Ako pretpostavimo da postoji $\delta \in E$ različit od nule za koji važi $x \odot \delta = 0$, iz asocijativnosti sledi

$$0 = \left(D^2 h\right) \odot (x \odot \delta) = \left(D^2 h \odot x\right) \odot \delta = 1 \odot \delta = \delta,$$

što dovodi do kontradikcije; time je dokaz kompletan. $\square$

U prostoru $\mathcal{D}'(Q)$, δ - distribucija ima osobinu da je različita od nule i da je $x\delta = 0$. Ako stavimo da je $\mathcal{D}'(Q)$ prostor E iz prethodne teoreme, a operator D operator distribucionog izvoda, iz prethodne teoreme direktno sledi da u $\mathcal{D}'(Q)$ ne možemo definisati multiplikativnu operaciju sa osobinama navedenim u teoremi.

Navodimo još jedan primer koji može biti zanimljiv.

Primer 6. (Stepeni Hevisajdove funkcije) *Neka je $\mathcal{A}$ asocijativna i komutativna diferencijalna algebra sa izvodima ∂. Pokazaćemo da svaki element H za koji je $H^2 = H$ mora biti konstanta, to jest, $\partial H = 0$. Zaista,*

$$\partial\left(H^2\right) = (\partial H)\, H + H\,(\partial H) = 2H\partial H,$$
$$\partial\left(H^3\right) = 3H^2\partial H.$$

Ako je $H^2 = H$, onda je $H^3 = H$ i tako

$$2H\partial H = \partial H = 3H\partial H.$$

Sledi da je $H\partial H = 0$ i dalje $\partial H = 0$, što smi i želeli da pokažemo.

Vidimo da ako izvršimo potapanje prostora $\mathcal{D}'(\boldsymbol{R})$ u asocijativnu i komutativnu algebru i protumačimo H kao Hevisajdovu funkciju, mora biti ili $H^2 \neq H$ ili $\partial H \neq \delta$.

Glava 3

Uopšteni stohastički procesi

Na isti način na koji smo uopštili matematički koncept funkcije i dobili distribucije, sada želimo da uopštimo koncept stohastičkog procesa. U suštini, teorija distribucija nam je potrebna da bismo to ispravno uradili. U nastavku ćemo definisati proces belog šuma i pokazati da to nije moguće učiniti na klasičan način.

3.1 Proces belog šuma

Radi jednostavnosti, na početku ćemo posmatrati jednodimenzionalan slučaj.

U inženjerskoj literaturi takozvani (Gausovski) beli šum se definiše kao stacionaran Gausovski proces ξ_t, $-\infty < t < \infty$, sa srednjom vrednošću $E(\xi_t) = 0$ i konstantnom spektralnom gustinom $f(\lambda)$ na realnoj osi $\mathbf{R}$.

Ako je $E(\xi_s \xi_{t+s}) = C(t)$ kovarijansna funkcija za ξ_t, tada

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} C(t)\, dt = \frac{c}{2\pi}, \quad \lambda \in \mathbf{R}, \tag{3.1}$$

gde je c pozitivna konstanta. Možemo, bez gubitka opštosti, uzeti da je $c \equiv 1$.

Drugim rečima takav proces ima spektralnu gustinu u kojoj sve frekvencije učestvuju sa istom gustinom. Zbog analogije sa belom svetlošću u optici, gde se sve frekvencije vidljive svetlosti pojavljuju uniformno, taj spektar se zove „beli“ spektar. Međutim, takav proces ne postoji u klasičnom smislu, jer (3.1) odgovara samo izboru

$$C(t) = \delta(t),$$

gde je δ Dirakova distribucija. Onda bismo imali

$$C(0) = E\left(\xi_t^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\lambda = \infty.$$

Kako je $C(t) = 0$ za $t \neq 0$, vrednosti ξ_t i ξ_{t+s} bi bile nekorelirane za proizvoljno male vrednosti s, i kako je proces Gausovski, bile bi nezavisne. To objašnjava zašto se beli šum često označava kao „potpuno slučajan proces". Jasno, trajektorije procesa čije su vrednosti nezavisne u svakoj tački moraju biti jako iregularne.

Kao što smo napomenuli, beli šum je prvi put korektno opisan i definisan koristeći teoriju distribucija. U sledećem odeljku pozabavićemo se tom definicijom.

3.2 Definicija uopštenih stohastičkih procesa

Krećemo od činjenice da u svakom stvarnom merenju vrednosti neke funkcije $f(t)$, preciznost mernog instrumenta nam dozvoljava da dobijemo samo prosečnu vrednost

$$\langle X_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) f(t)\, dt, \tag{3.2}$$

gde je $\varphi(t)$ funkcija koja karakteriše merni instrument. X_f zavisi linearno i neprekidno od φ. Tačnije, to je uopštena funkcija kojoj odgovara f.

Vraćamo se prostoru test funkcija $\mathcal{D}\left(\mathbf{R}^d\right)$. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća.

Definicija 31. *Uopšten stohastički (slučajni) proces je slučajna uopštena funkcija u sledećem smislu: svakom $\varphi \in \mathcal{D}\left(\boldsymbol{R}^d\right)$ je dodeljena slučajna promenljiva $\langle X, \varphi \rangle$ tako da važe sledeća dva uslova:*

1. *Funkcionela X je linearna na $\mathcal{D}\left(\boldsymbol{R}^d\right)$ sa verovatnoćom 1, tj. za proizvoljne φ i ψ iz $\mathcal{D}\left(\boldsymbol{R}^d\right)$ i proizvoljne brojeve α i β imamo*

$$\langle X, \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = \alpha \langle X, \varphi \rangle + \beta \langle X, \psi \rangle$$

sa verovatnoćom 1.

2. $\langle X, \varphi \rangle$ *je neprekidno u sledećem smislu: konvergencija* $\varphi_{k_j} \to \varphi_k$ *u prostoru* $\mathcal{D}\left(\boldsymbol{R}^d\right)$*,* $k = 1, \ldots, n$*, implicira konvergenciju raspodele vektora* $\left(\left\langle X, \varphi_{1_j} \right\rangle, \ldots, \left\langle X, \varphi_{n_j} \right\rangle\right)$ *ka raspodeli* $\left(\langle X, \varphi_1 \rangle, \ldots, \langle X, \varphi_n \rangle\right)$ *u smislu konvergencije u raspodeli.*

Drugim rečima, za fiksirano φ iz $\mathcal{D}\left(\mathbf{R}^d\right)$, preslikavanje $\Omega \to \mathbf{R}$ definisano sa

$$\omega \mapsto \langle X(\omega), \varphi \rangle$$

je slučajna promenljiva.

Koristeći reprezentaciju (3.2), može se pokazati da svakom „običnom“ stohastičkom procesu sa neprekidnim trajektorijama odgovara uopšteni stohastički proces.

Za uopšteni stohastički proces kažemo da je *Gausovski* proces ako, za proizvoljne $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{D}\left(\mathbf{R}^d\right)$, slučajna promenljiva $\left(\langle X, \varphi_1 \rangle, \ldots, \langle X, \varphi_n \rangle\right)$ ima normalnu raspodelu. Kao i u klasičnom smislu, uopšteni Gausovski proces je jedinstveno određen neprekidnom linearnom funkcionelom

$$E\left(\langle X, \varphi \rangle\right) = m(\varphi)$$

i neprekidnom bilinearnom pozitivno - definitnom funkcionelom

$$E\left(\left(\langle X, \varphi \rangle - m(\varphi)\right)\left(\langle X, \psi \rangle - m(\psi)\right)\right) = C(\varphi, \psi).$$

Jedna od važnih prednosti uopštenog stohastičkog procesa je što njegov izvod uvek postoji i ponovo je uopšteni stohastički proces. Izvod $\dot{X}$ uopštenog stohastičkog procesa X jeste proces definisan sa

$$\left\langle \dot{X}, \varphi \right\rangle = -\langle X, \dot{\varphi} \rangle.$$

Izvod Gausovskog procesa sa očekivanjem $m(\varphi)$ i kovarijansom $C(\varphi, \psi)$ je ponovo Gausovski proces sa očekivanjem $\dot{m}(\varphi) = -m(\dot{\varphi})$ i kovarijansom $\dot{C}(\varphi, \psi) = C\left(\dot{\varphi}, \dot{\psi}\right)$.

Kao primer uzimamo Vinerov proces i njegov izvod. Iz reprezentacije

$$\langle X, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) W_t dt,$$

(uz uslov $W_t \equiv 0$ za $t < 0$), zaključujemo da je W_t posmatran kao uopšteni Gausovski stohastički proces okarakterisan sa

$$m(\varphi) \equiv 0$$

i

$$C(\varphi, \psi) = \int_0^\infty \int_0^\infty \min(t, s)\, \varphi(t)\, \psi(s)\, dt\ ds.$$

Nakon par transformacija i parcijalne integracije, dobijamo

$$C(\varphi, \psi) = \int_0^\infty (\hat{\varphi}(t) - \hat{\varphi}(\infty)) \left(\hat{\psi}(t) - \hat{\psi}(\infty)\right) dt,$$

gde

$$\hat{\varphi}(t) = \int_0^t \varphi(s)\, ds, \quad \hat{\psi}(t) = \int_0^t \psi(s)\, ds.$$

Potražimo sada izvod Vinerovog procesa. To je uopšteni Gausovski stohastički proces sa očekivanjem $\dot{m}(\varphi) \equiv 0$ i kovarijansom

$$\begin{aligned} \dot{C}(\varphi, \psi) &= C\left(\dot{\varphi}, \dot{\psi}\right) \\ &= \int_0^\infty \varphi(t)\, \psi(t)\, dt. \end{aligned}$$

Ova formula može biti zapisana kao

$$\dot{C}(\varphi, \psi) = \int_0^\infty \int_0^\infty \delta(t - s)\, \varphi(t)\, \psi(s)\, ds\ dt.$$

Dakle, kovarijansna funkcija izvoda Vinerovog procesa je uopštena funkcija

$$\dot{C}(\varphi, \psi) = \delta(t - s).$$

Međutim, ovo je kovarijansna funkcija belog šuma. Zaključujemo da je beli šum ξ_t izvod Vinerovog procesa W_t, gde oba procesa posmatramo kao uopštene stohastičke procese. Ovo opravdava notaciju

$$\xi_t = \dot{W}_t \tag{3.3}$$

koja se često sreće u inženjerskoj literaturi. Naravno, imamo i obrnuto

$$W_t = \int_0^t \xi_s ds \tag{3.4}$$

u smislu poklapanja kovarijansnih funkcionela.

Konačno, možemo dati formalnu definiciju:

Definicija 32. *Gausovski beli šum ξ_t, za $t \in \boldsymbol{R}$, je uopšteni Gausovski stohastički proces X_ξ sa očekivanjem koje ima vrednost 0 i kovarijansnim funkcionalom*

$$C_\xi(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, \psi(t)\, dt. \tag{3.5}$$

Iz (3.5), možemo zaključiti da

$$C_\xi(\varphi(t), \psi(t)) = C_\xi(\varphi(t+h), \psi(t+h)), \quad h \in \mathbf{R},$$

što za posledicu ima sledeće: za proizvoljne funkcije $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{D}\left(\mathbf{R}^d\right)$, slučajna promenljiva $(\langle X_\xi, \varphi_1(t+h)\rangle, \ldots, \langle X_\xi, \varphi_n(t+h)\rangle)$ ima istu raspodelu za sve h, tj. beli šum je *stacionaran* uopšteni proces.

Izraz (3.5) nam takođe govori da je

$$C_\xi(\varphi, \psi) = 0 \;\text{ ako je }\; \varphi(t) \cdot \psi(t) \equiv 0,$$

tj. slučajne promenljive $\langle X_\xi, \varphi\rangle$ i $\langle X_\xi, \psi\rangle$ su nezavisne u tom slučaju. Za uopštene stohastičke procese sa ovom osobinemo kažemo da *imaju u svakoj tački nezavisne vrednosti.*

Ovakvi procesi veoma su dobro proučeni. Grubo govoreći, mogli bismo reći da ih dobijamo diferenciranjem procesa sa stacionarnim i nezavisnim priraštajima. Svaki od tih procesa može poslužiti za modeliranje „šumova“, to jest, stacionarnih i brzo fluktuirajućih fenomena. „Šum“ je „beli“, odnosno, spektralna gustina je konstantna, ako kovarijansna funkcionela ima oblik (3.5). Iako smo ovde razmatrali samo Gausovski beli šum, postoje i drugi, ne - Gausovski, procesi belog šuma, na primer, takozvani Poasonov beli šum, izvod Poasonovog procesa (posle oduzimanja očekivanja).

Mada stacionarni Gausovski proces ξ_t sa svuda konstantnom spektralnom gustinom u tradicionalnom smislu ne postoji, takav koncept se pokazao kao veoma korisna matematička idealizacija. Dalje, posmatrajući izraze (3.3) i (3.4) zaključujemo da je ξ_t samo izvod klasičnog procesa, i da je potreban samo uglačavajući efekat jedne integracije da se sa ξ_t vratimo na klasičan stohastički proces W_t. Iz ovog razloga se diferencijalne jednačine koje sadrže beli šum često zapisuju kao integralne jednačine.

Primer 7. *Zaključili smo da beli šum ne postoji kao proces u klasičnom smislu. Pokazaćemo u ovom primeru da se ipak može dobro aproksimirati klasičnim stacionarnim Gausovskim procesom.*

Neka je dat stohastički proces X_t sa kovarijansom

$$C(t) = a\, e^{-b|t|} \quad (a > 0, b > 0).$$

Takav proces ima spektralnu gustinu

$$f(\lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{ab}{b^2 + \lambda^2}.$$

Ako sada pustimo da a i b teže beskonačnosti, ali tako da $a/b \to 1/2$, dobijamo

$$f(\lambda) \to \frac{1}{2\pi} \quad \text{za sve } \lambda \in \boldsymbol{R}$$

i

$$C(t) \to \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0, \end{cases}$$

ali

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(t)\, dt \to 1,$$

pa

$$C(t) \to \delta(t);$$

to jest, X_t konvergira u određenom smislu ka ξ_t.

Posmatraćemo dalje određeni integral

$$Y_t = \int_0^t X_s ds.$$

To je ponovo Gausovski proces sa očekivanjem $E(Y_t) = 0$ *i kovarijansom*

$$E(Y_t Y_s) = \int_0^t \int_0^s a e^{-b|u-v|} du dv.$$

Ako potražimo graničnu vrednost gornjeg izraza, imamo

$$E(Y_t Y_s) \to \min(t, s),$$

tačnije, kovarijansu jednodimenzionalno Vinerovog procesa W_t*.*

3.3 Stohastički integrali

Analiza stohastičkih dinamičkih sistema često podrazumeva razmatranje diferencijalnih jednačina oblika

$$X_t' = f(t, X_t) + G(t, X_t)\xi_t, \tag{3.6}$$

gde je ξ_t m - dimenzionalni beli šum, X_t i f su $\mathbf{R}^d$ - vrednosne funkcije i $G(t,x) = (G_{ij}(t,x))$ je $(d \times m)$ - matrica.

Kao što smo videli, iako ξ_t nije klasičan stohastički proces, integral od ξ_t se može identifikovati sa m - dimenzionalnim Vinerovim procesom W_t:

$$W_t = \int_0^t \xi_s ds,$$

ili

$$dW_t = \xi_t dt.$$

Rešenje determinističkog početnog problema

$$x_t' = f(t, x_t), \quad x_{t_0} = c,$$

za neprekidnu funkciju $f(t,x)$ je ekvivalentno rešenju integralne jednačine

$$x_t = c + \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds,$$

za koju je moguće naći krivu rešenja klasičnom procedurom iteracije.

Na isti način transformišemo jednačinu (3.6) u integralnu jednačinu

$$X_t = C + \int_{t_0}^{t} f(s, X_s)\, ds + \int_{t_0}^{t} G(s, X_s)\, \xi_s ds, \tag{3.7}$$

gde je C proizvoljna slučajna promenljiva.

Prvi integral u prethodnom izrazu možemo posmatrati kao poznat Rimanov integral. Drugi integral može predstavljati veći problem.

Sada i formalno eliminišemo beli šum iz (3.7) pomoću

$$\int_{t_0}^{t} G(s, X_s)\, \xi_s ds = \int_{t_0}^{t} G(s, X_s)\, dW_s,$$

tako da dobijamo

$$X_t = C + \int_{t_0}^{t} f(s, X_s)\, ds + \int_{t_0}^{t} G(s, X_s)\, \xi_s dW_s. \tag{3.8}$$

Jednačina (3.8) može biti jednostavnije zapisana u diferencijalnom obliku

$$dX_t = f(t, X_t) + G(t, X_t)\, dW_t. \tag{3.9}$$

Naš cilj je da definišemo integral

$$X_t = X_t(\omega) = \int_{t_0}^{t} G(s)\, dW_s = \int_{t_0}^{t} G(s, \omega)\, dW_s(\omega),$$

za što je moguće širu klasu $(d \times m)$ - vrednosnih funkcija (matrica) G. To je moguće učiniti na više načina. Mi ćemo definisati „Ito - ov integral.“ Najpre navodimo par definicija potrebnih za glavnu konstrukciju.

Neka je W_t m - dimenzionalni Vinerov proces definisan na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Neka je t_0 fiksirani nenegativni broj. Definišemo dve σ - algebre:

$$\mathcal{W}[t_0, s] := \mathcal{F}(W(t), t_0 \leq t \leq s),$$

i

$$\mathcal{W}_t^+ := \mathcal{F}\left(W\left(s\right) - W\left(t\right), s \geq t\right).$$

Možemo dati i intuitivno značenje ovim podalgebrama od $\mathcal{F}$. Recimo, $\mathcal{W}\left[t_0, t\right]$ sadrži sve podatke o događajima koji su u vezi sa procesom W u intervalu $\left[t_0, t\right]$ (i nigde drugde).

Kako W_t ima nezavisne priraštaje, $\mathcal{W}\left[t_0, t\right]$ i $\mathcal{W}_t^+$ su nezavisne.

Definicija 33. *Familija $\mathcal{U}_t \subseteq \mathcal{F}$, $t \geq t_0$ σ - algebri se zove neanticipirajuća u odnosu na m - dimenzionalni Vinerov proces W_t ako:*

1. $\mathcal{U}\left(t\right) \supseteq \mathcal{U}\left(s\right)$, *za* $t_0 \leq s \leq t$;
2. $\mathcal{U}\left(t\right) \supseteq \mathcal{W}\left[t_0, t\right]$, $t \geq t_0$;
3. $\mathcal{U}\left(t\right)$ *je nezavisno od* $\mathcal{W}_t^+$, $t \geq t_0$.

Na σ - algebru $\mathcal{U}\left(t\right)$ možemo gledati kao na objekat koji sadrži sve informacije dostupne do trenutka t.

Definicija 34. $(d \times m)$ *- vrednosna funkcija $G = G\left(s, \omega\right)$ definisana na $\left[t_0, t\right] \times \Omega$ i merljiva na $\left(s, \omega\right)$ je neanticipirajuća ako za svako $s \in \left[t_0, t\right]$ važi, $G = G\left(s, \omega\right)$ je $\mathcal{U}\left(s\right)$ - merljivo, gde je $\mathcal{U}\left(s\right)$ neanticipirajuća familija σ - algebri.*

Sa $M_2^{d,m}\left[t_0, t\right] = M_2\left[t_0, t\right]$ označavamo prostor neanticipirajućih funkcija definisanih na $\left[t_0, t\right] \times \Omega$ za koje trajektorije $G\left(\cdot, \omega\right)$ sa verovatnoćom 1 zadovoljavaju:

$$\int\limits_{t_0}^{t} \left|G\left(s, \omega\right)\right|^2 ds < \infty.$$

Sada prelazimo na konstrukciju integrala

$$\int_{t_0}^{t} G\ dW = \int\limits_{t_0}^{t} G\left(s\right) dW_s = \int\limits_{t_0}^{t} G\left(s, \omega\right) dW_s\left(\omega\right)$$

za proizvoljno $t \geq t_0$ i sve $G \in M_2\left[t_0, t\right]$.

To izvodimo u dva koraka. U prvom koraku, definišemo integral za step - funkcije iz $M_2\left[t_0, t\right]$. U drugom koraku, proširujemo tu definiciju na čitav prostor $M_2\,[t_0, t]$ aproksimacijom proizvoljne funkcije step - funkcijama.

Funkcija $G \in M_2\,[t_0, t]$ se naziva *step - funkcija* ako postoji dekompozicija $t_0 \leq t_1 \leq t_n = t$ tako da je

$$G\,(s) = G\,(t_{i-1})$$

za sve $s \in [t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Za step - funkciju G, definišemo stohastički integral od G u odnosu na W_t kao $\mathbf{R}^d$ - vrednosnu slučajnu promenljivu

$$\int_{t_0}^{t} G\ dW = \int_{t_0}^{t} G\,(s)\,dW_s = \sum_{i=1}^{n} G\,(t_{i-1})\,(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}). \tag{3.10}$$

U cilju definisanja stohastičkog integrala za proizvoljnu funkciju G iz $M_2\,[t_0, t]$, primetimo najpre da je skup step - funkcija gust u $M_2\,[t_0, t]$ u smislu sledeće leme:

Lema 1. *Za svaku funkciju $G \in M_2\,[t_0, t]$ postoji niz step - funkcija $G_n \in M_2\,[t_0, t]$ takav da*

$$ss - \lim_{n \to \infty} \int\limits_{t_0}^{t} |G\,(s) - G_n\,(s)|^2\,ds = 0.$$

Lema 2. *Neka je $G \in M_2\,[t_0, t]$ i neka je $G_n \in M_2\,[t_0, t]$ niz step - funkcija za koji*

$$P - \lim_{n \to \infty} \int\limits_{t_0}^{t} |G\,(s) - G_n\,(s)|^2\,ds = 0.$$

Ako definišemo

$$\int_{t_0}^{t} G_n\,(s)\,dW_s$$

jednačinom (3.10), tada

$$P - \lim_{n \to \infty} \int_{t_0}^{t} G_n\,(s)\,dW_s = \int_{t_0}^{t} G\,(s)\,dW_s = I\,(G)\,,$$

gde je $I\,(G)$ slučajna promenljiva koja ne zavisi od izbora niza $\{G_n\}$.

Za svaku $(d \times m)$ - vrednosnu funkciju $G \in M_2[t_0, t]$, stohastički integral od G u odnosu na m - dimenzionalni Vinerov proces W_t je slučajna promenljiva $I(G)$ koja je, na osnovu Leme 2, skoro sigurno jedinstveno određena sa

$$I(G) = \int_{t_0}^{t} G(s)\, dW_s = P - \lim_{n \to \infty} \int_{t_0}^{t} G_n(s)\, dW_s,$$

gde je $\{G_n\}$ niz step - funkcija iz $M_2[t_0, t]$ koji aproksimira G. Time stižemo do integrala koji smo želeli da definišemo.

Neka nam je dat stohastički proces

$$X_t(\omega) = X_{t_0}(\omega) + \int_{t_0}^{t} f(s, \omega)\, ds + \int_{t_0}^{t} G(s, \omega)\, dW_s,$$

uz prethodne pretpostavke. Tada kažemo da stohastički proces X_t ima *stohastički diferencijal*

$$dX_t = f(t)\, dt + G(t)\, dW_t.$$

Navodimo još teoremu koja će nam omogućiti rad sa stohastičkim integralima i rešavanje jednačina (3.7).

Teorema 10. (Ito - ova teorema) *Neka je $u = u(t, x)$ neprekidna funkcija definisana na $[t_0, t] \times \boldsymbol{R}^d$ sa vrednostima u $\boldsymbol{R}$ i sa neprekidnim parcijalnim izvodima u_t, u_{x_i} i $u_{x_i x_j}$, $i, j \leq d$. Neka je d jednodimenzionalnih stohastičkih procesa X_t definisano na $[t_0, t]$ stohastičkim diferencijalima*

$$dX_i(t) = f_i(t)\, dt + G_i(t)\, dW_t, \quad i = 1, 2, \ldots, d,$$

u odnosu na isti jednodimenzionalni Vinerov proces W_t.

Tada stohastički proces

$$Y_t = u(t, X_1(t), \ldots, X_d(t))$$

takođe ima stohastički diferencijal u odnosu na isti Vinerov proces W_t:

$$dY_t = u_t dt + \sum_{i=1}^{d} u_{x_i} dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} u_{x_i x_j} dX_i dX_j.$$

Glava 4

Kolomboove algebre

Posle svih razmatranja u Glavi 2, o potrebi množenja distribucija i teškoćama na koje nailazimo, ostaje nam da se zapitamo koje mogućnosti su nam preostale. Kao i ranije, dve osnovne ideje su: definisanje operacije na distribucijama koja kao rezultat daje distribuciju (unutrašnja operacija), i uvećanje prostora objekata (spoljašnja operacija). Ovoga puta, poučeni prethodnim iskustvom, znamo da ne možemo očekivati u isto vreme potpunu opštost, slobodu u diferencijalno - algebarskim manipulacijama i poklapanje sa klasičnim definicijama.

Švarcov rezultat, dat u Teoremi 9, je nakon objavlivanja 1954. godine proizveo slogan: „Množenje distribucija je nemoguće." Međutim, ako pažljivije razmotrimo dokaz ovog tvrđenja, vidimo da je jedino „nemoguće" imati množenje neprekidnih funkcija, diferenciranje diferencijabilnih funkcija, i u isto vreme δ - funkciju.

Ukoliko sve protumačimo na povoljniji način, „rezultat nemogućnosti" nam samo govori da u asocijativnim algebrama uopštenih funkcija, množenje i diferenciranje ne možemo istovremeno proširiti odgovarajuće klasične operacije bez ikakvih ograničenja. Neke od osobina ipak možemo obezbediti.

Zahvaljujući radu Kolomboa (J. F. Colombeau), mogu se konstruisati asocijativne algebre sa operacijom množenja $\odot$, u terminima Teoreme 9, koja ne indukuje obično množenje na $\mathcal{C}\left(Q\right)$, ali indukuje obično množenje na $\mathcal{C}^{\infty}\left(Q\right)$.

Kolomboove algebre se konstruišu kao faktor algebre beskonačnog stepena prostora $\mathcal{C}^{\infty}$ po modulu određene klase ideala. Pozabavićemo se najpre nekim elementarnim konstrukcijama.

4.1 Osnovne definicije i osobine

Za $q \in P^1$ definišemo

$$\mathcal{A}_q(\mathbf{R}) = \left\{ \chi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}) : \int \chi(x)\,dx = 1 \text{ i } \int x^j \chi(x)\,dx = 0, 1 \leq j \leq q \right\},$$

$$\mathcal{A}_q(\mathbf{R}^n) = \left\{ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) : \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} \chi(x_k) \text{ za neke } \chi \in \mathcal{A}_q(\mathbf{R}) \right\}.$$

Lema 3. *Za svako $q \in P^1$, skup $\mathcal{A}_q(\boldsymbol{R}^n)$ nije prazan.*

Dokaz. Jasno, dovoljno je da pokažemo $\mathcal{A}_q(\mathbf{R}) \neq \emptyset$. Dajemo dva različita dokaza, koji će nam kasnije biti od koristi.

I način: Posmatramo neprekidne linearne forme na $\mathcal{D}(\mathbf{R})$,

$$L_0(\varphi) = \int \varphi(x)\,dx,$$
$$L_j(\varphi) = \int x^j \varphi(x)\,dx,\ 1 \leq j \leq q.$$

Vidimo da su $L_j,\ 0 \leq j \leq q$ linearno nezavisni (ako $\sum_{j=0}^{q} \alpha_j \int x^j \varphi(x)\,dx = 0$ za sve $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, onda polinom $\sum_{j=0}^{q} \alpha_j x^j$ mora nestati.) Specijalno, L_0 nije linearna kombinacija od $L_1, \ldots, L_q$.

Kao posledica Han - Banahove teoreme, postoji element ψ biduala $\mathcal{D}''(\mathbf{R}) = \mathcal{D}(\mathbf{R})$ tako da

$$L_0(\psi) = 1, \quad L_j(\psi) = 0, \quad 1 \leq j \leq q.$$

Konačno, ψ pripada $\mathcal{A}_q(\mathbf{R})$.

II način: Neka je $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ tako da važi $\int \psi(x)\,dx = 1$ i $\psi(x) = \psi(-x)$. Onda $\psi \in \mathcal{A}_1(\mathbf{R})$. Označimo

$$\varphi = \psi + \lambda \psi'',$$

pri čemu λ treba odrediti. Jasno, $\varphi \in \mathcal{A}_1(\mathbf{R})$. Međutim,

$$\int x^2 \varphi(x)\,dx = \int x^2 \psi(x)\,dx + 2\lambda \int \psi(x)\,dx$$

uz izbor $\lambda = -\frac{1}{2} \int x^2 \psi(x)\,dx$, smešta φ u $\mathcal{A}_2(\mathbf{R})$, onda čak i u $\mathcal{A}_3(\mathbf{R})$. Dalje, ako stavimo

$$\chi = \varphi + \mu \varphi^{(4)}$$

i izaberemo $\mu = -\frac{1}{4!} \int x^4 \varphi(x)\,dx$, dobijamo $\chi \in \mathcal{A}_4(\mathbf{R})$, i tako dalje. $\square$

Drugi deo dokaza pokazuje da $\mathcal{A}_q(\mathbf{R}^n)$ sadrži simetrične elemente, elemente sa realnim vrednostima i elemente sa proizvoljnim nosačem. Prvi deo dokaza se može lako proširiti da bi se pokazalo da $\mathcal{A}_q(\mathbf{R})$ sadrži elemente takve da važi $\psi \neq 0$ ili $\int |x| \psi(x)\, dx \neq 0$, i tako dalje. Primetimo, međutim, da elementi od $\mathcal{A}_q(\mathbf{R}^n)$ nisu nikad nenegativni kada je $q \geq 2$. Konačno, napominjemo da je presek svih skupova $\mathcal{A}_q(\mathbf{R}^n)$ prazan.

Definisaćemo još nenegativne model delta mreže.

Definicija 35. *Za dato $\varphi \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^n)$ za koje je $\int \varphi(x)\, dx = 1$, mreža $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, gde je*

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

naziva se nenegativna model delta mreža.

Sada smo spremni za konstrukciju Kolomboove algebre $\mathcal{G}_q(\mathbf{R}^n)$, najpre na čitavom $\mathbf{R}^n$. Kao polaznu tačku uzimamo

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_q[\mathbf{R}^n] &= (\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n))^{\mathcal{A}_0(\mathbf{R}^n)} \\ &= \{\text{Sva preslikavanja } u : \mathcal{A}_0(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)\}.\end{aligned}$$

Alternativno, možemo videti $\mathcal{E}[\mathbf{R}^n]$ kao skup svih preslikavanja

$$u : \mathcal{A}_0(\mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$$

koja su neprekidna po drugoj promenljivoj. Moramo naglasiti da elemente $\varphi \in \mathcal{A}_q(\mathbf{R}^n)$ posmatramo u ovom slučaju kao parametre, ne kao test funkcije.

Na $\mathcal{E}[\mathbf{R}^n]$ uvodimo strukturu diferencijalne algebre. Operacije definišemo po komponentama:

$$\begin{aligned}(uv)(\varphi) &= u(\varphi)\, v(\varphi) \\ (\partial^\alpha u)(\varphi) &= \partial^\alpha(u(\varphi)),\end{aligned}$$

za $\varphi \in \mathcal{A}_q(\mathbf{R}^n)$ i $\alpha \in P^n$. Štaviše, postoji potapanje $\iota : \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{E}[\mathbf{R}^n]$ dato sa

$$\iota(w)(\varphi) = w * \varphi,$$

za $w \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{A}_q(\mathbf{R}^n)$ i $w * \varphi(x) = \langle w(y), \varphi(x-y)\rangle$. Injektivnost od ι sledi iz relacije

$$w = \lim_{\varepsilon\to 0}(w * \varphi_\varepsilon).$$

Jasno, $\partial^\alpha \iota(w) = \iota(\partial^\alpha w)$.

Dakle, $\mathcal{E}[\mathbf{R}^n]$ je komutativna, asocijativna diferencijalna algebra koja sadrži distribucije, sa definisanim parcijalnim izvodima koji su proširenje izvoda na $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$.

Međutim, množenje na $\mathcal{E}[\mathbf{R}^n]$ nije proširenje čak ni množenja vrednosti po tačkama na $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$. Zaista, ako $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$, onda

$$\iota(fg)(\varphi) = (fg) * \varphi \neq (f * \varphi)(g * \varphi) = (\iota(f)\,\iota(g))(\varphi)$$

u opštem slučaju. Zbog toga želimo da pređemo na faktor algebru, u kojoj će $(fg) * \varphi$ i $(f * \varphi)(g * \varphi)$ biti identifikovani, barem za $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$. Možemo zahvaliti Kolomboou zato što je pokazao da se to zaista može učiniti, zadržavajući sve diferencijalno - algebarske osobine $\mathcal{E}[\mathbf{R}^n]$ o kojima smo govorili.

Da bismo motivisali narednu definiciju, primetićemo da je ispunjeno

$$(fg) * \delta = (f * \delta)(g * \delta)$$

za Dirakovu distribuciju δ. To nam sugeriše da uporedimo $(fg) * \varphi_\varepsilon$ i $(f * \varphi_\varepsilon)(g * \varphi_\varepsilon)$ za malo $\varepsilon > 0$; vrednosti elemenata od $\mathcal{E}[\mathbf{R}^n]$ za svako φ_ε sa malim $\varepsilon > 0$ biće od presudnog značaja.

Uvodimo $\mathcal{N}(\mathbf{R}^n)$ kao skup svih nula funkcija na $\mathbf{R}^n$.

Definicija 36. *Funkcija $u \in \mathcal{E}[\boldsymbol{R}^n]$ je nula funkcija na $\boldsymbol{R}^n$ ako:*

Za sve kompaktne skupove $K \subset \boldsymbol{R}^n$ i sve $\alpha \in P^n$ postoji $N \in \boldsymbol{N}$ tako da za sve $\varphi \in \mathcal{A}_q(\boldsymbol{R}^n)$, gde je $q \geq N$ važi:

Postoje $c > 0$, $\eta > 0$ takvi da je

$$\sup_{x \in K} |\partial^\alpha u(\varphi, x)| \leq c\, \varepsilon^{q-N}, \quad 0 < \varepsilon < \eta. \tag{4.1}$$

Ovde smo koristili notaciju $u(\varphi_\varepsilon, x) = u(\varphi_\varepsilon)(x)$. Možemo reći da elementi $\mathcal{N}(\mathbf{R}^n)$ teže nuli brže od bilo kog stepena od ε kada deluju na φ_ε, za $\varphi \in \mathcal{A}_q(\mathbf{R}^n)$ i q dovoljno veliko.

$\mathcal{N}(\mathbf{R}^n)$ je, očigledno, podalgebra od $\mathcal{E}[\mathbf{R}^n]$ zatvorena u odnosu na diferenciranje. Međutim, to nije ideal od $\mathcal{E}[\mathbf{R}^n]$, jer $\mathcal{E}[\mathbf{R}^n]$ sadrži elemente koji imaju proizvoljan rast na φ_ε kad $\varepsilon \to 0$. Na primer, $u(\varphi) = \exp(\varphi)$:

Postoje elementi φ iz $\mathcal{A}_q(\mathbf{R}^n)$ takvi da je $\varphi(0) = 1$, i onda $u(\varphi_\varepsilon, 0) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Da bismo isključili takve slučajeve, uvodimo skup $\mathcal{E}_M[\mathbf{R}^n]$, skup svih umerenih funkcija na $\mathbf{R}^n$.

Definicija 37. *Funkcija $u \in \mathcal{E}[\boldsymbol{R}^n]$ je umerena na $\boldsymbol{R}^n$ ako:*

Za sve kompaktne skupove $K \subset \boldsymbol{R}^n$ i za sve $\alpha \in P^n$ postoji $N \in \boldsymbol{N}$ tako da za sve $\varphi \in \mathcal{A}_N(\boldsymbol{R}^n)$ važi:

Postoje $c > 0$, $\eta > 0$ tako da je

$$\sup_{x \in K} |\partial^\alpha u(\varphi_\varepsilon, x)| \leq c\, \varepsilon^{-N}, \quad 0 < \varepsilon < \eta. \tag{4.2}$$

$\mathcal{E}_M[\mathbf{R}^n]$ je diferencijalna algebra, podalgebra od $\mathcal{E}[\mathbf{R}^n]$, i sadrži $\mathcal{N}(\mathbf{R}^n)$ kao diferencijalni ideal.

Definicija 38. *Kolomboova algebra uopštenih funkcija se definiše kao faktor algebra*

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{R}^n) = \mathcal{E}_M[\boldsymbol{R}^n] / \mathcal{N}(\boldsymbol{R}^n).$$

I dalje je u pitanju asocijativna i komutativna diferencijalna algebra. Sledeće tvrđenje nam govori da potapanje $\iota : \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{E}_M[\mathbf{R}^n]$ indukuje potapanje $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$.

Teorema 11. *$\iota(\mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)) \subset \mathcal{E}_M[\boldsymbol{R}^n]$, i $\iota^{-1}(\mathcal{N}(\boldsymbol{R}^n)) = \{0\}$.*

Možemo zaključiti da ι indukuje linearno injektivno preslikavanje prostora $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ u $\mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$, i da komutira sa izvodima. Poenta cele konstrukcije jeste da ova injekcija ι pretvara $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ u podalgebru od $\mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$, preciznije, $\iota \restriction \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ je algebarski monomorfizam.

Uzmimo, na primer, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$. Onda

$$\iota(f) = \text{ klasa od } [\varphi \to f * \varphi] \text{ u } \mathcal{G}(\mathbf{R}^n).$$

Sa druge strane, postoji konstantno ili „standardno“ potapanje σ od $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ u $\mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$:

$$\sigma(f) = \text{ klasa od } [\varphi \to f] \text{ u } \mathcal{G}(\mathbf{R}^n).$$

σ je takođe algebarski monomorfizam. Štaviše, ova potapanja se poklapaju na $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Teorema 12. *Ako* $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\boldsymbol{R}^n)$, *onda* $(f * \varphi - f)_{\varphi \in \mathcal{A}_0(\boldsymbol{R}^n)}$ *pripada* $\mathcal{N}(\boldsymbol{R}^n)$. *Kao posledica,* $\iota \restriction \mathcal{C}^{\infty}(\boldsymbol{R}^n) = \sigma$.

Dokaz. Dokaz se zasniva na Tejlorovom razvoju. Zbog jednostavnosti, posmatramo samo slučaj $n = 1$:

$$(f * \varphi_\varepsilon - f)(x) = \int (f(x - \varepsilon y) - f(x))\,\varphi(y)\,dy$$

$$= \sum_{j=1}^{q} f^{(j)}(x) \int \frac{(-\varepsilon y)^j}{j!} \varphi(y)\,dy + \int \frac{(-\varepsilon y)^{q+1}}{(q+1)!} f^{(q+1)}(\xi)\,\varphi(y)\,dy, \tag{4.3}$$

gde je ξ između x i $x - \xi y$.

Prvi deo izraza (4.3) nestaje, jer $\varphi \in \mathcal{A}_q(\mathbf{R}^n)$. Ako x pripada kompaktnom skupu, drugi deo izraza (4.3) može biti ocenjen sa $const \cdot \varepsilon^{q+1}$, a faktor ε^{q+1} je isti za sve $\varphi \in \mathcal{A}_q(\mathbf{R}^n)$. Slične ocene važe i za izvode od f. $\square$

Ovim je završena konstrukcija algebre $\mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$.

4.2 Kolomboova algebra $\mathcal{G}(Q)$

Prihvatamo konvenciju: elemente $U \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$ označavamo velikim slovima, a svaki od njih je definisan svojim pretstavnikom $u(\varphi_\varepsilon) \in \mathcal{E}_M[\mathbf{R}^n]$.

Sve operacije su definisane pomoću odgovarajućih operacija među predstavnicima. Na primer: $\partial^\alpha U = [\partial^\alpha u(\varphi_\varepsilon)]$, $\alpha \in P^1$, $U\ V = [u(\varphi_\varepsilon)\, v(\varphi_\varepsilon)]$, i tako dalje.

Da sumiramo, u prethodnom delu definisana algebra $\mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$ ima sledeće osobine:

1. $\mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$ je komutativna, asocijativna algebra sa izvodima prirodno definisanim na predstavnicima.

2. Postoji linearno potapanje $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$.

3. $\partial_j \restriction_{\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)}$ se poklapa sa običnim izvodom na $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, $j = 1, \ldots, n$.

4. Proizvod elemenata iz $\mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$ se poklapa sa običnim proizvodom u $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbf{R}^n)$.

5. Ako je F polinomijalno ograničena sa svim svojim izvodima funkcija i ako $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$, tada $F(U_1, \ldots, U_n) \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$.

Naš sledeći zadatak biće konstrukcija algebre $\mathcal{G}(Q)$ na proizvoljnim otvorenim podskupovima Q od $\mathbf{R}^n$. Zapravo, konstrukcija same algebre je potpuno ista kao na $Q = \mathbf{R}^n$, ali je potapanje prostora distribucija $\mathcal{D}'(Q)$ u $\mathcal{G}(Q)$ nešto komplikovanije.

Neka je $\mathcal{E}[Q]$ algebra svih preslikavanja iz $\mathcal{A}_q(\mathbf{R}^n)$ u $\mathcal{C}^\infty(Q)$. Podalgebra $\mathcal{E}[Q]$ sastoji se od svih preslikavanja koja zadovoljavaju osobinu (4.2) na svim kompaktnim podskupovima $K \subset Q$, dok se ideal $\mathcal{N}(Q)$ sastoji od onih preslikavanja koja zadovoljavaju osobinu (4.1).

Kao i pre, definišemo

$$\mathcal{G}(Q) = \mathcal{E}_M[Q].$$

Potapanje ι_0 distribucija sa kompaktnim nosačem $\mathcal{E}'(Q)$ u Kolomboovu algebru $\mathcal{G}(Q)$ je odmah dostupno, i to kao

$$\iota_0(w)(\varphi) = (w * \varphi) \restriction_Q$$

za $w \in \mathcal{E}'(Q)$, $\varphi \in \mathcal{A}_0(\mathbf{R}^n)$.

U slučaju kada ne radimo sa distribucijama sa kompaktnim nosačem proces potapanja se vrši na sledeći način. Koristićemo (bez dokaza) činjenicu da je Kolomboova algebra $\mathcal{G}(Q)$ snop (diferencijalnih algebri), odakle imamo da postoji samo jedno proširenje ι od ι_0 kao morfizam snopa $\mathcal{D}'(Q) \to \mathcal{G}(Q)$.

Napomena 1. *Iskoristili smo činjenicu da je $\mathcal{G}(Q)$ snop. U pitanju je za nas nov pojam. Intuitivno, snop koristimo da bismo podatke koji su nam dostupni o nekom otvorenom skupu dobili pomoću podataka koji su ograničeni na manje otvorene skupove koji zajedno čine početni skup. Takvi podaci mogu biti dati pomoću, recimo, prstenova neprekidnih ili glatkih funkcija definisanih na svakom od otvorenih skupova. Da bi određena struktura bila snop, mora da zadovolji neke početne pretpostavke, odnosno da bude predsnop (presheaf). Neka je X topološki prostor i neka je C kategorija. Predsnop F nad X sa vrednostima u C zadovoljava sledeće osobine:*

- *Svakom otvorenom skupu U nad X odgovara objekat $F(U)$ u C.*
- *Svakoj inkluziji otvorenih skupova $V \subseteq U$ odgovara morfizam $\varphi_{U,V}$: $F(U) \to F(V)$ u kategoriji C.*

Morfizam $\varphi_{U,V}$ naziva se restriktivni morfizam (restriction morphism). Restriktivni morfizam mora da zadovolji sledeće osobine:

- *Za svaki otvoreni skup U nad X, restriktivni morfizam $\varphi_{U,U} : F(U) \to F(U)$ je identički morfizam na $F(U)$.*

- *Za svaka tri otvorena skupa $W \subseteq V \subseteq U$, važi $\varphi_{W,V} \circ \varphi_{V,U} = \varphi_{W,U}$.*

Pozabavićemo se samo konkretnim osobinama koje moraju biti zadovoljene da bi predsnop $\mathcal{G}(Q)$ bio snop nad $\boldsymbol{R}^n$. Neka je Ω otvoren podskup od $\boldsymbol{R}^n$ i $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ otvoren pokrivač od Ω. Osobine koje nas zanimaju su:

- *Ako $U, V \in \mathcal{G}(Q)$ takvi da $U \restriction_{\Omega_\lambda} = V \restriction_{\Omega_\lambda}$ za sve $\lambda \in \Lambda$, onda je $U = V$ u $\mathcal{G}(Q)$.*

- *Ako nam je data kompatibilna familija $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ elemenata $U_\lambda \in \mathcal{G}(Q)$, tj. $U_\lambda \restriction_{\Omega_\lambda\cap\Omega_\mu} = U_\mu \restriction_{\Omega_\lambda\cap\Omega_\mu}$, za sve $\lambda, \mu \in \Lambda$, postoji $U \in \mathcal{G}(Q)$ tako da je $U \restriction_{\Omega_\lambda} = U_\lambda$ za sve $\lambda \in \Lambda$.*

Kao što smo ranije naveli, nećemo dokazivati da ove osobine važe, ali nam pomažu da bolje shvatimo našu strukturu.

Da bismo izvukli količinu ε iz datog φ_ε, koristimo ovakav trik: Stavimo

$$\ell(\varphi) = \sup\{|x|\,(x) \neq 0\}$$

za $\varphi \in \mathcal{A}_q(\mathbf{R}^n)$. Tada je $\ell(\varphi_\varepsilon) = \varepsilon\ell(\varphi)$.

Da smo uzeli, recimo

$$m(\varphi) = \int |\varphi(x)|^2\, dx,$$

onda bismo imali $m(\varphi_\varepsilon) = \varepsilon^{-n} m(\varphi)$.

Dalje, iscrpljujemo skup Q kompaktnim skupovima

$$Q_r = \left\{x \in Q : |x| \leq \frac{1}{r} \text{ i } dist\,(x, \partial Q) \geq 2r\right\},$$

gde je $r > 0$. Neka je χ_r karakteristična funkcija za Q_r. Konačno, stavimo

$$\theta(\varphi) = \chi_{\ell(\varphi)} * \varphi,$$

za $\varphi \in \mathcal{A}_0(\mathbf{R}^n)$.

Jasno, $\theta(\varphi) \in \mathcal{D}(Q)$. Ako $w \in \mathcal{D}'(Q)$, definišemo $\iota \in \mathcal{G}(Q)$ kao klasu preslikavanja

$$\varphi \to (\theta(\varphi) w) * \varphi.$$

Može se pokazati da je ι linearno potapanje koje komutira sa izvodima i daje podalgebru $\mathcal{C}^\infty(Q)$. Primetimo, ako je φ fiksirano i K je kompaktan podskup od Q, tada

$$(\theta(\varphi_\varepsilon) w) * \varphi_\varepsilon(x) = \langle w(y), \varphi_\varepsilon(x-y)\rangle,$$

za sve $x \in K$, pri čemu je ε dovoljno malo.

Na osnovu same konstrukcije, elementi algebre $\mathcal{G}(Q)$ su već određeni njihovim vrednostima na (φ_ε, x) za malo ε i x iz kompaktnog skupa.

4.3 Asociranost u Kolomboovim algebrama

Na osnovu Teoreme 9, već znamo da u diferencijalnoj algebri kao što je $\mathcal{G}(Q)$ proizvod neprekidnih funkcija ne može biti očuvan. Najpre, možemo primetiti da je

$$x \cdot \delta(x) \neq 0, \quad \text{u } \mathcal{G}(\mathbf{R}). \tag{4.4}$$

Zaista, $x \cdot \delta(x)$ je u klasi $\varphi \to x\varphi(x)$. Za proizvoljno $q \in P^1$, postoji $\varphi \in \mathcal{A}_q(\mathbf{R})$ tako da je $\varphi(1) \neq 0$. Ukoliko stavimo $x = \varepsilon$, dobijamo

$$\sup_{|x|\leq 1} |x\varphi_\varepsilon(x)| \geq |\varepsilon\varphi_\varepsilon(\varepsilon)| = |\varphi(1)| \neq 0,$$

pa preslikavanje $\varphi \to x\varphi(x)$ nije nula preslikavanje i važi (4.4).

Ako pri tome ne dolazi do zabune, gledaćemo na $\mathcal{D}'$ kao na potprostor od $\mathcal{G}$, bez naglašavanja potapanja ι koje smo definisali ranije.

Definicija 39. *Kažemo da je uopštena funkcija $U \in \mathcal{G}(Q)$ asocirana sa distribucijom $w \in \mathcal{D}'(Q)$, ako U ima predstavnika $u \in \mathcal{E}_M[Q]$ tako da važi:*

Za sve $\psi \in \mathcal{D}(Q)$ postoji $N \in \boldsymbol{N}$ tako da

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int u(\varphi_\varepsilon, x)\psi(x)\,dx = \langle w, \psi\rangle$$

za sve $\varphi \in \mathcal{A}_N(\boldsymbol{R}^n)$.

Definicija ne zavisi od predstavnika i w je jedinstveno, ukoliko postoji. Pišemo $U \approx w$. Svaka distribucija je asocirana sa samom sobom; preciznije, $\iota(w) \approx w$ za $w \in \mathcal{D}'(Q)$. Za date $U, V \in \mathcal{G}(Q)$, važi

$$U \approx V \quad \text{ako i samo ako} \quad U - V \approx 0.$$

Dve distribucije, posmatrane kao elementi od $\mathcal{G}(Q)$, su međusobno asocirane ako i samo ako su jednake. Dakle, koncept asociranosti je proširenje jednakosti distribucija.

Takođe, za elemente $U, V \in \mathcal{G}(Q)$ za koje je $U \approx V$, važi:

$$\begin{aligned} \partial^\alpha U \approx \partial^\alpha V \qquad & \text{za sve} \quad \alpha \in P^n, \\ fU \approx fV \qquad & \text{za sve} \quad f \in \mathcal{C}^\infty(Q). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Primer 8. *Navodimo dva problema koje smo ranije spominjali.*

1. $x \cdot \delta(x) \approx 0$. *Zaista, za dato* $\varphi \in \mathcal{A}_0(\boldsymbol{R})$ *i* $\psi \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R})$,

   $$\int \frac{x}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\psi(x)\,dx = \varepsilon \int y\varphi(y)\,\psi(\varepsilon y)\,dy \to 0$$

   kad $\varepsilon \to 0$.

2. $H^2 \neq H$ u $\mathcal{G}(\mathbf{R})$, ali $H^2 \approx H$, za Hevisajdovu funkciju H. *Drugi iskaz je očigledan, a prvi smo pokazali u Primeru 6. Zbog osobine 4.5, imamo* $2H\delta \approx \delta$, *to jest,*

   $$H\delta \approx \frac{1}{2}\delta.$$

Glava 5

Kolomboovi uopšteni stohastički procesi

U ovoj glavi, uvodimo najpre Kolomboove stohastičke procese, a zatim ćemo pokazati kako se sve o čemu smo do sada govorili može upotrebiti na rešavanje stvarnih problema.

5.1 Konstrukcija Kolomboovih uopštenih procesa

Za početak, fiksiramo prostor verovatnoće (Ω, Σ, μ), gde Σ označava merljiv podskup od Ω i μ je probabilistička mera. Za vremenski interval uzimamo $\mathbf{R}$.

Algebru klasičnih slučajnih procesa na $\mathbf{R}$ sa skoro sigurno neprekidnim trajektorijama ćemo označavati sa $\mathcal{C}_\Omega(\mathbf{R})$, dok će $\mathcal{C}^\infty_\Omega(\mathbf{R})$ označavati algebru klasičnih slučajnih procesa sa skoro sigurno glatkim trajektorijama.

Označimo sa $\mathcal{E}[\mathbf{R}]$ prostor mreža $\{X_\varepsilon\}_\varepsilon$, $\varepsilon \in (0,1)$, procesa X_ε sa skoro sigurno glatkim trajektorijama, odnosno, prostor mreža procesa

$$X_\varepsilon : (0,1) \times \mathbf{R} \times \Omega \to \mathbf{R}$$

takvih da

- $\omega \mapsto X_\varepsilon(t, \omega)$ je merljivo, za sve $\varepsilon \in (0,1)$ i $t \in \mathbf{R}$;
- $t \mapsto X_\varepsilon(t, \omega)$ pripada $\mathcal{C}^\infty\mathbf{R}$, za sve $\varepsilon \in (0,1)$ i skoro sve $\omega \in \Omega$.

Sada definišemo prostore $\mathcal{E}_b^{\Omega}(\mathbf{R})$, $\mathcal{N}_b^{\Omega}(\mathbf{R})$ i $\mathcal{G}_b^{\Omega}(\mathbf{R})$ na sledeći način.

Definicija 40. *$\mathcal{E}_b^{\Omega}(\boldsymbol{R})$ je prostor mreža procesa $\{X_\varepsilon\}_\varepsilon$ koji pripadaju $\mathcal{E}[\boldsymbol{R}]$, $\varepsilon \in (0,1)$, sa osobinom da za skoro svako $\omega \in \Omega$, za sve $T > 0$ i $\alpha \in P^1$, postoje konstante $N, C > 0$ i $\varepsilon_0 \in (0,1)$ takve da*

$$\sup_{t\in[0,T]} |\partial^\alpha X_\varepsilon(t,\omega)| \le C\varepsilon^{-N}, \quad \varepsilon \le \varepsilon_0.$$

Definicija 41. *$\mathcal{N}_b^{\Omega}(\boldsymbol{R})$ je prostor mreža procesa $\{X_\varepsilon\}_\varepsilon$ koji pripadaju $\mathcal{E}[\boldsymbol{R}]$, $\varepsilon \in (0,1)$, sa osobinom da za skoro svako $\omega \in \Omega$, za sve $T > 0$ i $\alpha \in P^1$ i sve $b \in \boldsymbol{R}$, postoje konstante $C > 0$ i $\varepsilon_0 \in (0,1)$ takve da*

$$\sup_{t\in[0,T]} |\partial^\alpha X_\varepsilon(t,\omega)| \le C\varepsilon^{b}, \quad \varepsilon \le \varepsilon_0.$$

Definicija 42. *Algebra Kolomboovih uopštenih slučajnih procesa je faktor algebra*

$$\mathcal{G}_b^{\Omega}(\boldsymbol{R}) = \mathcal{E}_b^{\Omega}(\boldsymbol{R}) / \mathcal{N}_b^{\Omega}(\boldsymbol{R}).$$

$\mathcal{G}_b^{\Omega}(\mathbf{R})$ je diferencijalna algebra, pa Kolomboove uopštene slučajne procese možemo množiti i tražiti njihove (uopštene) izvode. Štaviše, ta činjenica čini mogućom superpoziciju Kolomboovog uopštenog slučajnog procesa sa polinomijalno ograničenom funkcijom (ili ograničenom funkcijom), kao što ćemo videti u nastavku.

Neka $\mathcal{O}_M(\mathbf{R}^n)$ označava algebru glatkih polinomijalno ograničenih funkcija $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$.

Definicija 43. *Funkcija $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ se naziva brzo opadajuća ako za svaki par multi indeksa $\alpha, \beta \in P^n$ važi*

$$\sup\left\{\left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| ; x \in \boldsymbol{R}^n\right\} < \infty;$$

skup brzo opadajućih funkcija označavamo sa $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$, kraće $\mathcal{S}$.

U odnosu na uobičajene operacije $\mathcal{S}$ je vektorski prostor za koji važi da je $\mathcal{C}_0^\infty \subset \mathcal{S}$, $\mathcal{C}_0^\infty \ne \mathcal{S}$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}^\infty$ i $\mathcal{S} \ne \mathcal{C}^\infty$.

Definicija 44. *Prostor neprekidnih linearnih funkcionela nad $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^n)$ označavamo sa $\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ ili $\mathcal{S}'$. Elementi od $\mathcal{S}'$ se nazivaju temperirane distribucije ili distribucije sporog rasta.*

Definicija 45. *Familija* $G = \{G_\varepsilon\}_\varepsilon$, $\varepsilon \in (0,1)$, *se zove temperirana ako* $G_\varepsilon \in \mathcal{O}_M\left(\boldsymbol{R}^2\right)$ *za sve* $\varepsilon \in (0,1)$ *i ako za sve* $\alpha \in P^2$ *postoje* $N, C > 0$ *takve da*

$$|\partial^\alpha G_\varepsilon(x,y)| \leq C\varepsilon^{-N}(1+|x|+|y|)^N, \quad \text{za sve } (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \ i \ \varepsilon \in (0,1).$$

Može se pokazati da važi sledeće tvrđenje.

Teorema 13. *Neka su* $X, Y \in \mathcal{G}_b^\Omega(\boldsymbol{R})$ *Kolomboovi uopšteni slučajni procesi i neka je* G *temperirana familija. Tada je* $G(X,Y)$ *dobro definisan element prostora* $\mathcal{G}_b^\Omega(\boldsymbol{R})$*. Specijalno,* $F(X,Y)$ *je dobro definisano ako* $F \in \mathcal{O}_M\left(\boldsymbol{R}^2\right)$.

Sada ćemo definisati potapanje prostora procesa sa neprekidnim trajektorijama u Kolomboov prostor $\mathcal{G}_b^\Omega(\mathbf{R})$. U tu svrhu, izaberimo element

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}) \text{ takav da } \int_{\mathbf{R}} \varphi(s)\, ds = 1,$$

čiji svi momenti nestaju, to jest,

$$\int_{\mathbf{R}} s^j \varphi(s)\, ds = 0, \text{ za sve } j \geq 1.$$

Dalje, uzmimo $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ tako da je

$$\psi(s) \equiv 1 \text{ u okolini od } s = 0.$$

Za proces Z sa skoro sigurno neprekidnim trajektorijama definišemo odgovarajući element prostora $\mathcal{G}_b^\Omega(\mathbf{R})$ kao

$$\iota(Z) = \left[(Z * (\psi\varphi_\varepsilon))_\varepsilon\right], \quad \varepsilon \in (0,1), \tag{5.1}$$

gde zagrade [ ] označavaju klasu, $\varphi_\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$ i konvolucija je konvolucija po trajektorijama

$$(Z * (\psi\varphi_\varepsilon))(t,\omega) = \int_{\mathbf{R}} Z(s,\omega)\, \psi(t-s)\, \varphi_\varepsilon(t-s)\, ds.$$

Za skoro svako $\omega \in \Omega$, $(Z * (\psi\varphi_\varepsilon))(t,\omega)_\varepsilon$ pripada $\mathcal{E}_b^\Omega(\mathbf{R})$ obzirom da je $Z(\cdot,\omega)$ uniformno ograničeno na kompaktnom vremenskom intervalu. Dakle, možemo uzeti njegovu klasu u $\mathcal{G}_b^\Omega(\mathbf{R})$.

Primer 9. *Neka je* W *Vinerov proces. Tada* $W \in \mathcal{G}_b^\Omega(\boldsymbol{R})$ *i*

$$\dot{W} = \frac{d}{dt}\iota(W)$$

predstavlja beli šum kao element prostora $\mathcal{G}_b^\Omega(\boldsymbol{R})$.

Procesi $\mathcal{C}_{\Omega}^{\infty}(\mathbf{R})$ sa skoro sigurno glatkim trajektorijama se takođe mogu potopiti u $\mathcal{G}_b^{\Omega}(\mathbf{R})$ pomoću standardnog potapanja

$$\sigma(Z) = [\{Z_\varepsilon\}_\varepsilon], \quad \varepsilon \in (0,1).$$

Svojstvo konzistencije $\iota \restriction_{\mathcal{C}_{\Omega}^{\infty}(\mathbf{R})} = \sigma$ je dato u sledećoj teoremi.

Teorema 14. *Ako je Z proces sa skoro sigurno neprekidnim trajektorijama, tada*

$$\iota(Z) = \sigma(Z) \quad u \quad \mathcal{G}_b^{\Omega}(\boldsymbol{R}).$$

Iz ovog tvrđenja sledi da je $\iota(\mathcal{C}_{\Omega}^{\infty}(\mathbf{R}))$ diferencijalna subalgebra od $\mathcal{G}_b^{\Omega}(\mathbf{R})$. Slično smo imali i pri definisanju potapanja kod Kolomboovih uopštenih funkcija.

Za izračunavanje vrednosti Kolomboovog uopštenog slučajnog proccesa u fiksiranom vremenskom trenutku uvodimo koncept Kolomboove uopštene slučajne promenljive.

Neka je $\mathcal{ER}$ prostor mreža merljivih funkcija na Ω.

Definicija 46. *$\mathcal{ER}_b$ je prostor mreža $\{X_\varepsilon\}_\varepsilon \in \mathcal{ER}$, $\varepsilon \in (0,1)$, sa osobinom da za skoro svako $\omega \in \Omega$ postoje konstante $N, C > 0$ i $\varepsilon_0 \in (0,1)$ takve da*

$$|X_\varepsilon(\omega)| \leq C\varepsilon^{-N}, \quad \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

$\mathcal{NR}$ je prostor mreža $\{X_\varepsilon\}_\varepsilon \in \mathcal{ER}$, $\varepsilon \in (0,1)$, sa osobinom da za skoro sve $\omega \in \Omega$ i sve $b \in \boldsymbol{R}$, postoje konstante $C > 0$ i $\varepsilon_0 \in (0,1)$ takve da

$$|X_\varepsilon(\omega)| \leq C\varepsilon^{b}, \quad \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Diferencijalna algebra $\mathcal{GR}$ Kolomboovih uopštenih slučajnih promenljivih je faktor algebra

$$\mathcal{GR} = \mathcal{ER}_b / \mathcal{NR}.$$

Za Kolomboov uopšten slučajni proces $X \in \mathcal{G}_b^{\Omega}(\mathbf{R})$ i vremenski trenutak $t_0 \in [0,T)$ imamo da je $X(t_0)$ Kolomboova uopštena slučajna promenljiva, odnosno, element prostora $\mathcal{GR}$.

5.2 Stohastičke diferencijalne jednačine sa Kolomboovim stohastičkim procesima

Pošto smo kroz čitav rad obezbedili alat koji nam omogućava nelinearne operacije sa uopštenim funkcijama, a zatim i sa uopštenim stohastičkim procesima, želimo da na konkretnom primeru sve to primenimo. U prirodnim i inženjerskim naukama stohastičke diferencijalne jednačine se pojavljuju na prirodan način i pri tome najčešće opisuju takozvane sisteme sa šumom.

Pozabavićemo se jednačinama tipa

$$X'(t) = F(X(t), Y(t)), \quad t \in \mathbf{R}, \quad X(0) = A, \tag{5.2}$$

u prostorima Kolomboovih uopštenih slučajnih procesa koje smo definisali u prethodnom odeljku.

Pretpostavimo da je Y Kolomboov uopšten slučajni proces na $\mathbf{R}$, odnosno, $Y = [\{Y_\varepsilon\}_\varepsilon] \in \mathcal{G}_b^\Omega(\mathbf{R})$, $\varepsilon \in (0,1)$. Početna vrednost je Kolomboova uopštena slučajna promenljiva $A = [\{A_\varepsilon\}_\varepsilon] \in \mathcal{GR}$, $\varepsilon \in (0,1)$, a funkcija $F = [\{F_\varepsilon\}_\varepsilon] \in \mathcal{E}\left[\mathbf{R}^2\right]$, $\varepsilon \in (0,1)$, je data temperiranom familijom (kao u Definiciji 45).

Rešenje jednačine (5.2), $X = [\{X_\varepsilon\}_\varepsilon]$, $\varepsilon \in (0,1)$, ćemo posmatrati kao element prostora $\mathcal{G}_b^\Omega(\mathbf{R})$. Dodatno, pretpostavićemo da svaka od funkcija F_ε (koje definišu F) ima globalno ograničen gradijent:

$$|\nabla F_\varepsilon(x,y)| \leq C \log\frac{1}{\varepsilon}, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad \varepsilon \in (0,1), \tag{5.3}$$

za neku konstantu $C > 0$. Specijalno, ova pretpostavka je ispunjena ako je F klasična globalno Lipšicova neprekidna funkcija koja pripada $\mathcal{O}_M\left(\mathbf{R}^2\right)$.

Sledeća teorema bavi se rešenjem problema (5.2).

Teorema 15. (Rešenje i jedinstvenost) *Neka je F takvo da je zadovoljena osobina (5.3). Za date $Y \in \mathcal{G}_b^\Omega(\boldsymbol{R})$ i $A \in \mathcal{GR}$, problem (5.2) ima jedinstveno rešenje $X \in \mathcal{G}_b^\Omega(\boldsymbol{R})$.*

Dokaz. (Egzistencija rešenja.) Fiksirajmo $\varepsilon \in (0,1)$. Tada možemo koristiti klasične teoreme za rešenja trajektorija i dobiti jedinstveno rešenje X_ε sa glatkim stazama.

Ostaje da pokažemo da $\{X_\varepsilon\}_\varepsilon \in \mathcal{E}_b^\Omega(\mathbf{R})$. Njegova klasa u $\mathcal{G}_b^\Omega(\mathbf{R})$ će tada biti traženo rešenje.

Za skoro svako fiksirano $\omega \in \Omega$ imamo

$$X_\varepsilon(t) = A_\varepsilon + tF_\varepsilon(0,0) + \int_0^t \partial_y F_\varepsilon(\theta(X_\varepsilon(s), Y_\varepsilon(s))) Y_\varepsilon(s)\, ds$$
$$+ \int_0^t \partial_x F_\varepsilon(\theta(X_\varepsilon(s), Y_\varepsilon(s))) X_\varepsilon(s)\, ds,$$

za neku funkciju θ.

Kako su $F_\varepsilon(0,0)$ i $Y_\varepsilon \restriction_{[0,T]}$ reda ε^{-N} na fiksiranom intervalu $[0,T]$, za svako $T > 0$, a $\partial_x F_\varepsilon$ i $\partial_y F_\varepsilon$ reda $\log \frac{1}{\varepsilon}$, primenom Gronvalove nejednakosti dobijamo

$$\sup_{t\in[0,T]} |X_\varepsilon(t)| \leq C\varepsilon^{-N} \exp\left(T \log \varepsilon^{-1}\right) = C\varepsilon^{-(N+T)},$$

odnosno, X_ε ima umerenu granicu. Slične ocene za izvode od X_ε direktno slede iz jednačine primenom indukcije.

(Jedinstvenost rešenja.) Neka su X i $\tilde{X}$ dva rešenja problema (5.2). Tada, postoje $\{N_{1\varepsilon}\}_\varepsilon \in \mathcal{N}_b^\Omega(\mathbf{R})$ i $\{N_{2\varepsilon}\}_\varepsilon \in \mathcal{NR}$ takvi da

$$X_\varepsilon - \tilde{X}_\varepsilon = F_\varepsilon(X_\varepsilon, Y_\varepsilon) - F_\varepsilon\left(\tilde{X}_\varepsilon, Y_\varepsilon\right) + N_{1\varepsilon},$$

$$X_\varepsilon(0) - \tilde{X}_\varepsilon(0) = N_{2\varepsilon}.$$

Dakle,

$$X_\varepsilon(t) - \tilde{X}_\varepsilon(t) = N_{2\varepsilon} + \int_0^t N_{1\varepsilon}(s)\, ds + \int_0^t \partial_x F_\varepsilon(\theta, Y_\varepsilon)\left(X_\varepsilon(s) - \tilde{X}_\varepsilon(s)\right) ds,$$

za neku funkciju $\theta = \theta\left(X_\varepsilon, \tilde{X}_\varepsilon\right)$.

Na osnovu Gronvalove leme

$$\sup_{t\in[0,T]} \left|X_\varepsilon(t) - \tilde{X}_\varepsilon(t)\right| \leq C(1+T)\varepsilon^b \exp\left(T \log \varepsilon^{-1}\right) = C(1+T)\varepsilon^{b-T},$$

odnosno, razlika $X_\varepsilon - \tilde{X}_\varepsilon$ je nula funkcija.

Slično se mogu oceniti svi izvodi te razlike i na osnovu toga zaključiti da $\left\{X_\varepsilon - \tilde{X}_\varepsilon\right\}_\varepsilon \in \mathcal{N}_b^\Omega(\mathbf{R})$. Dakle, $X = \tilde{X}$ pripada $\mathcal{G}_b^\Omega(\mathbf{R})$ i time je dokaz završen. □

Ako je $F_\varepsilon \equiv F$, za malo ε, klasična globalno Lipšic neprekidna funkcija, proces $S \in \mathcal{C}_\Omega^\infty(\mathbf{R})$ je gladak, i početna vrednost $A_\varepsilon = A \in \mathcal{L}^0$ je klasična slučajna promenljiva, onda problem

$$Z' = F(Z, S), \quad Z(0) = A \tag{5.4}$$

ima klasično, glatko rešenje $Z \in \mathcal{C}_\Omega^\infty(\mathbf{R})$. Veoma je važno da se, u tom slučaju, uopšteno rešenje $X \in \mathcal{G}_b^\Omega(\mathbf{R})$ poklapa sa klasičnim rešenjem Z, kao što je izloženo u sledećoj teoremi.

Teorema 16. (Konzistencija) *Neka je $F_\varepsilon \equiv F \in \mathcal{O}_M\left(\boldsymbol{R}^2\right)$, zatim neka je $|\nabla F|$ ograničeno i $A_\varepsilon = A \in \mathcal{L}^0$. Pretpostavimo da $S \in \mathcal{C}_\Omega^\infty(\boldsymbol{R})$. Neka je $Z \in \mathcal{C}_\Omega^\infty(\boldsymbol{R})$ klasično rešenje jednačine (5.4), a $X \in \mathcal{G}_b^\Omega(\boldsymbol{R})$ uopšteno rešenje jednačine (5.2) sa $Y = \iota(S)$. Tada je $X = \iota(Z)$ u $\mathcal{G}_b^\Omega(\boldsymbol{R})$.*

Dokaz. Na osnovu Teoreme 14, $\{Y_\varepsilon\}_\varepsilon \equiv S$, $\varepsilon \in (0,1)$, daje predstavnika za $Y = \iota(S)$. Slično, $\{Z_\varepsilon\}_\varepsilon$, koje definiše klasično rešenje Z, može biti predstavnik jedinstvenog uopštenog rešenja X. $\square$

Ovaj pristup nam omogućava da radimo i sa glatkim funkcijama F proizvoljnog rasta i to koristeći pogodnu proceduru sečenja. Sa druge strane, postavljanjem nekih dodatnih uslova na Y, procedura sečenja može postati nepotrebna, kao što je pokazano u sledećem primeru.

Primer 10. *Posmatramo jednačinu multiplikativnog šuma*

$$X'(t) = \alpha X(t)\dot{W}(t), \quad X(0) = A, \tag{5.5}$$

gde $\dot{W} \in \mathcal{G}_b^\Omega(\boldsymbol{R})$ označava beli šum koji nam je poznat od ranije, $\alpha \in \boldsymbol{R}$ i $A \in \mathcal{GR}$ je Kolomboova uopštena slučajna promenljiva.

Bez procedure sečenja desna strana u

$$F\left(X, \dot{W}\right) = \alpha X(t)\dot{W}(t)$$

ne zadovoljava pretpostavke Teoreme 15. Ipak, zahvaljujući lokalnoj ograničenosti Vinerovog procesa, imamo jedinstveno rešenje $X \in \mathcal{G}_b^\Omega(\boldsymbol{R})$.

Zaista, za $\{W_\varepsilon\}_\varepsilon$, $\varepsilon \in (0,1)$, predstavnika od $\iota(W)$, na osnovu (5.1), imamo da je $\left\{\dot{W}_\varepsilon\right\}_\varepsilon$, $\varepsilon \in (0,1)$.

Ako je $\{X_\varepsilon\}_\varepsilon$, $\varepsilon \in (0,1)$ predstavnik rešenja $X \in \mathcal{G}_b^\Omega(\boldsymbol{R})$ za (5.5), tada, za neke $\{N_{1\varepsilon}\}_\varepsilon \in \mathcal{N}_b^\Omega(\boldsymbol{R})$ i $\{N_{2\varepsilon}\}_\varepsilon \in \mathcal{NR}$,

$$X_\varepsilon'(t) = \alpha X_\varepsilon(t)\dot{W}_\varepsilon(t) + N_{1\varepsilon}(t), \quad X_\varepsilon(0) = A_\varepsilon + N_{2\varepsilon},$$

gde je $\{A_\varepsilon\}_\varepsilon$*,* $\varepsilon\,(0,1)$*, predstavnik od* A*.*

Dakle,

$$X_\varepsilon(t) = (A_\varepsilon + N_{2\varepsilon})\exp(\alpha W_\varepsilon(t) - \alpha W_\varepsilon(0)) \\ + \int_0^t \exp(\alpha W_\varepsilon(t) - \alpha W_\varepsilon(s))\, N_{1\varepsilon}(s)\, ds.$$

Na osnovu ograničenosti po trajektorijama $\{W_\varepsilon\}_\varepsilon$*,* $\varepsilon \in (0,1)$*, na svakom intervalu* $[0,T]$*, nezavisno od* ε*, mreža* $\{X_\varepsilon\}_\varepsilon$*,* $\varepsilon \in (0,1)$*, pripada* $\mathcal{E}_b^\Omega(\boldsymbol{R})$*. Ona definiše rešenje.*

Lako se može videti da je to rešenje jedinstveno obzirom da izrazi koji sadrže $N_{1\varepsilon}$ *i* $N_{2\varepsilon}$ *pripadaju* $\mathcal{N}_b^\Omega(\boldsymbol{R})$*. Predstavnik rešenja je*

$$\tilde{X}_\varepsilon(t) = A_\varepsilon \exp(\alpha W_\varepsilon(t) - \alpha W_\varepsilon(0)).$$

U slučaju kada je A_ε *klasična slučajna promenljiva* A*,* $X_\varepsilon(t)$ *ili* $\tilde{X}_\varepsilon(t)$ *konvergiraju, po trajektorijama uniformno po* $t \in [0,T]$*, ka*

$$Z(t) = A\exp(\alpha W_\varepsilon(t)), \text{ kada } \varepsilon \to \infty.$$

To možemo protumačiti kao da je uopšteno rešenje $X \in \mathcal{G}_b^\Omega(\boldsymbol{R})$ *asocirano sa klasičnim procesom* $Z \in \mathcal{C}_\Omega(\boldsymbol{R})$*.*

U opštem slučaju, kada umesto belog šuma u (5.5) imamo proizvoljan uopšteni slučajan proces teško je dati odgovor da li je uopšteno rešenje $X \in \mathcal{G}_b^\Omega(\boldsymbol{R})$ *asocirano sa nekim klasičnim slučajnim procesom ili ne.*

Siguran pozitivan odgovor postoji samo za glatke procese. Tada je X *jednako klasičnom rešenju.*

Zaključak

Moglo bi se reći da se ovaj rad bavi osnovnim idejama. Kao što smo ranije napomenuli, radi se o malim delovima velikih teorija. Svaki obrađeni odeljak mogao bi postati zaseban rad.

U tom smislu, kada smo se suočavali sa problemima u konstrukciji, rešavali smo ih na izvestan način - koji svakako nije jedini. Na primer, problem množenja distribucija ovde prevazilazimo uvođenjem takozvane spoljašne operacije. Međutim, postoji čitava teorija koja se bavi unutrašnjim operacijama, odnosno, definisanjem proizvoda dve distribucije na manjim podskupovima prostora distribucija koji je opet distribucija. O svemu tome ovde nismo govorili.

Uopšteni stohastički procesi zbog svojih osobina imaju veliku primenu. U ovom radu smo ih posmatrali u odnosu na neke od „Kolomboovih struktura.“ Dalja razmatranja vodila bi nas u komplikovanije strukture istog tipa ili potpuno drugačije pristupe - mogućnosti su zaista velike.

Literatura

1. **L. Arnold** - Stochastic Differential Equations: Theory and Applications, John Willey and Sons, New York, 1974.

2. **S. Pilipović, B. Stanković** - Prostori distribucija, Srpska akademija nauka i umetnosti, Ogranak u Novom Sadu, 2000.

3. **M. Oberguggenberger** - Multiplication of Distributions and Applications to Partial Differential Equations, John Wiley and Sons, New York, 1992.

4. **D. Rajter - Ćirić** - Konstrukcija Kolomboovih rešenja determinističkih i stohastičkih diferencijalnih jednačina, Doktorska teza, 2001.

5. **M. Nedeljkov, D. Rajter - Ćirić** - Nonlinear Stochastic Wave Equation with Colombeau Generalized Stochastic Processes, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. 12, No. 5 (2002) 665-688

Kratka biografija

Rođena sam 13. januara 1988. godine. Završila sam Osnovnu školu „Aca Sinadinović“ u Predejanu kao đak generacije, a zatim Gimnaziju u Leskovcu, smer učenika talentovanih za matematiku, kao nosilac Vukove diplome. 2006. godine upisala sam osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer inženjer matematike. Studije sam završila u oktobru 2010. godine sa prosečnom ocenom 10,00. Iste godine na istom fakultetu upisala sam master studije primenjene matematike, modul tehnomatematika. Zaključno sa junskim ispitnim rokom 2011. godine položila sam sve predviđene ispite sa prosečnom ocenom 10,00.

Novi Sad, septembar 2011. god. Jelena Nedeljković

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Završni rad
VR

Autor: Jelena Nedeljković
AU

Mentor: dr Danijela Rajter - Ćirić
MN

Naslov rada: Uopšteni stohastički procesi
MR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / en
JI

Zemlja publikovanja: R Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2011.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (5/ 70/ 0/ 0/ 0/ 0/ 0) (broj poglavlja/ broj strana/broj literarnih citata/ broj tabela/broj slika/ broj grafika/ broj priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Stohastička analiza
ND

Ključne reči: stohastički proces, Vinerov proces, beli šum, uopšteni stohastički proces, distribucija, množenje distribucija, Kolomboove algebre
PO
UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: U uvodnom delu rada, obrađene su osnove stohastičke analize i teorije distribucija. U nastavku, rad se bavi problemom množenja distribucija. Kroz primere je ukazano na postojanje potrebe za množenjem distribucija i teškoće koje se pri tome javljaju. Opisan je beli šum kao model stacionarnih i brzo fluktuirajucih fenomena i uvedeni su uopšteni stohastički procesi. Problem množenja distribucija rešen je proširivanjem prostora distribucija pomoću prostora Kolomboovih uopštenih funkcija. Definisani su Kolomboovi uopštene stohastički procesi u cilju rešavanja stohastičkih diferencijalnih jednačina.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 14. 9. 2011. god.
DP

Datum odbrane: Septembar 2011. god.
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik: Akademik dr Stevan Pilipović, redovni profesor Prirodno - matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Marko Nedeljkov, redovni profesor Prirodno - matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Mentor: dr Danijela Rajter - Ćirić, vanredni profesor Prirodno - matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code:
CC

Author: Jelena Nedeljković
AU

Mentor: dr Danijela Rajter Ćirić
MN

Title: Generalized Stochastic Processes
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: s / en
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2011.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (5/ 70/ 0/ 0/ 0/ 0/ 0) (chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Stochastic analysis
SD

Key words: Stochastic process, Wiener process, white noise, generalized stochastic process, distribution, multiplication of distributions, Colombeau algebra
SKW
UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics
HD

Note:
N

Abstract: The paper starts with introduction to stochastic analysis and theory of distributions. Next, the problem of multiplication of distributions arises. Examples are used to show existence of the need to multiply distributions and difficulties encountered in attempts to define the desired product. White noise process is described as a common way for modelling stacionary and rapidly fluctuating phenomena and generalized stochastic processes are

intoduced. Problem of multiplication of distribution is solved by introducing larger space containing the space of distributions. The paper deals with this approach, using space of Colombeau generalized funcions. Generalized stochastic processes in Colombeau algebras are defined. Examples are given to state how some problems can be solved using this structure.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 14. 9. 2011.
ASB

Defended: September 2011.
DE

Thesis defend board:
DB

President: Academician dr Stevan Pilipović, full professor at Faculty of Science in Novi Sad

Member: dr Marko Nedeljkov, full professor at Faculty of Science in Novi Sad

Mentor: dr Danijela Rajter - Ćirić, associate professor at Faculty of Science in Novi Sad