UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Varijacioni račun i modeli rasta

- Master rad -

Mentor:
Dr Nenad Teofanov

Autor:
Jelena Mitrović

Novi Sad, 2011

Sadržaj

1. Uvod

Pojam rasta oduvek je privlačio pažnju ekonomista, međutim do ozbiljnih analiza dolazi tek u dvadesetom veku sa pojavom Frenka Remzija i njegovog modela optimalne štednje. Nakon ovog modela usledio je Domar-Harodov model, a zatim i neoklasični model Roberta Soloa. Ovaj rezultat je zaintrigirao mnoge teoretičare rasta, pa su tokom 60-tih godina prošlog veka nastali modeli Hirofumija Uzave, Keneta Eroua, Džejmsa Tobina, Pitera Dajmonda i Edmunda Filipsa. U narednoj deceniji, interes za teorijom rasta počinje da opada, da bi sredinom 80-tih godina prošlog veka, ovaj problem ponovo postao aktuelan.

U prvom delu rada se navode definicije i pojmovi neophodni za formulisanje osnova varijacionog računa. Formulisaće se i dokazati teoreme koje daju potrebne i dovoljne uslove (prvog i drugog reda) za postojanje ekstrema. Zatim se izlažu neki elementarni problemi kojima se bavi varijacioni račun: problem minimalnog rastojanja, izoperimetrijski problem, Fermaov princip, Bernulijev problem i Dirihleov problem. Nakon izvođenja potrebnog uslova za postojanje ekstrema u vidu Ojlerove jednačine, kao i njenih specijalnih slučajeva, navedeni primeri će biti rešeni.

Drugi deo rada je posvećen teoriji rasta. Pre svega će biti dat kratak istorijski osvrt na razvoj teorije rasta koja je oduvek privlačila pažnju ekonomista, a zatim će uslediti formulacija Domar-Harodovog modela rasta. Ovaj model, razvijen od strane Roja Haroda i Evsija Domara, je imao nekoliko bitnih nedostataka i podstakao je Roberta Soloa da formuliše problem neoklasičnog modela rasta, koji će biti glavna tema ovog rada.

U delu posvećenom neoklasičnom modelu rasta, prvo će biti definisana funkcija proizvodnje i ispitaće se njene osobine. Takođe će biti definisane i dokazane teoreme koja daju vezu između marginalne funkcija kapitala i funkcije proizvodnje, kao i marginalne funkcije rada i funkcije proizvodnje. Funkcija proizvodnje definisana u neoklasičnom modelu rasta zadovoljava uslove koji su poznati kao Inada uslovi. Nakon što se upoznamo sa Inada uslovima, uslediće formulacija i dokaz osnovne teoreme neoklasičnog modela rasta, Solouve teoreme.

S obzirom da je neoklasični model rasta nastao 50-tih godina prošlog veka, interesovalo nas je da li je vremenom usavršavan i kakva je njegova primena u sadašnjosti. Vremenom je u model uvedena još jedna nezavisna promenljiva, a to je mera tehnološkog napredka, pa će se prikazati i neoklasični model rasta u kome funkcija proizvodnje pored uložene količine rada i kapitala zavisi i od stepena tehnološke razvijenosti.

Zatim će biti predstavljena struktura neoklasičnog modela rasta. Centralni rezultat kojeg ćemo prikazati je rešavanje osnovnog problema makroekonomskog rasta uz pomoć varijacionog računa u slučaju kada je vreme neprekidna promenljiva.

Na kraju će se ukratko izložiti model u kome se vreme tretira kao diskretna slučajna promenljiva.

2. Pojam varijacionog računa

U ovoj glavi će se definisati pojam varijacionog računa i navesti osnovni pojmovi i definicije neophodni za rešavanje problema varijacionog računa, pri čemu je korišćena literatura Kurepa [5].

2. 1. Osnovni pojmovi i definicije

U ovom poglavlju se navode definicije i pojmovi neophodni za formulisanje problema varijacionog računa.

Definicija 2.1: Skup X elemenata $x, y, z, ...$ je linearan (ili vektorski) prostor nad poljem realnih brojeva ako je X zatvoren u odnosu na operacije sabiranja i množenja realnim brojevima i ako za bilo koje $x, y, z \in X$ i $\alpha, \beta \in R$ važi:

- $x + y = y + x$.
- $(x+y)+z = x+(y+z)$.
- postoji element 0 takav da važi $x + 0 = x$ za svako $x \in X$.
- za svako $x \in X$, postoji element $-x$ takvo da je $x + (-x) = 0$.
- $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x.$
- $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y.$
- $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x.$

Definicija 2.2: Metrički prostor je uređen par (X, d), gde je X neprazan skup, a d preslikavanje za koje važe sledeći uslovi:

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ za svako $x, y \in X$;
- $d(x, y) = d(y, x)$ za svako $x, y \in X$;
- $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$ za svako $x, y, z \in X$.

Definicija 2.3: Neka je (X, d) metrički prostor, niz elemenata $\{x_n\}_{n \in N}$ je Košijev, ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall m, n \in N)(m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon).$$

Definicija 2.4: Metrički prostor je kompletan, ako u njemu svaki Košijev niz konvergira.

Definicija 2.5: Linearan prostor X je normiran ako za svako $x \in X$ postoji nenegativan broj $\|x\|$ (norma elementa $x \in X$) takav da je:

- $\|x\| = 0$ ako i samo ako je $x = 0$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ za bilo koje $x, y \in X$;
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ za svako $\alpha \in R$.

Definicija 2.6: Normiran prostor $(X, \|\cdot\|)$ koji je kompletan, zove se Banahov prostor.

Definicija 2.7: Neka je X vektorski prostor nad poljem $F \in \{R, C\}$ i definisano je preslikavanje $(\cdot|\cdot) : V \to X$. Preslikavanje $(\cdot|\cdot)$ se naziva skalarni proizvod, ako važe sledeći uslovi:

- $(x|x) \geq 0$ za svako $x \in X$ i $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $(\alpha x + \beta y|z) = \alpha(x|z) + \beta(y|z)$ za svako $x, y \in X$ i $\alpha, \beta \in F$;
- $(x|y) = (\overline{y|x})$ za svako $x, y \in X$.

U tom slučaju uređeni par $(X, (\cdot|\cdot))$ se zove pred-Hilbertov prostor.

Definicija 2.8: Kompletan pred-Hilbertov prostor je Hilbertov prostor.

Definicija 2.9: Neka je X linearan prostor. Bilo koje preslikavanje iz X u R ili u C se naziva funkcionela na X. Funkcionela J na X je linearna ako važi:

1) $J(\alpha x) = \alpha J(x)$ za svako $x \in X$ i $\alpha \in R$;
2) $J(x + y) = J(x) + J(y)$ za svako $x, y \in X$.

Definicija 2.10: Neka je X normiran linearan prostor. Funkcionela J je neprekidna u tački x^0, ako za bilo koje $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da $\|x - x^0\| < \delta$ implicira $|J(x) - J(x^0)| < \varepsilon$. Ako je J neprekidna u svakoj tački skupa X onda je neprekidna na X.

Primedba: Neka je J linearna funkcionela nad X. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

i. J je neprekidna na X, ako je neprekidna u nekoj tački $x^0 \in X$.
ii. J je neprekidna.
iii. J je ograničena (postoji μ takvo da je $|J(x)| \leq \mu \|x\|$ za svako $x \in X$).

Primer: Neka je $C_{[a,b]}$ skup svih (ograničenih) neprekidnih realnih funkcija definisanih na zatvorenom intervalu $\left[a,b\right]$. Može se pokazati da je $C_{[a,b]}$ linearan prostor i $\|x\| = \sup_{a \le t \le b} \left|x\left(t\right)\right|$ je norma. Rimanov integral

$$J\left[x\right] \equiv \int_a^b x\left(t\right)dt$$

je neprekidna linearna funkcionela na $C_{[a,b]}$.

Primedba: Normiran linearan prostor X će se smatrati metričkim prostorom sa metrikom koja je indukovana normom, $d\left(x,y\right) = \|x-y\|$, $x,y \in X$.

Definicija 2.11: Neka je X topološki prostor, $x_0 \in X$ i $f : X \to R \cup \{-\infty, +\infty\}$. Funkcija f je poluneprekidna s gornje strane, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji okolina U tačke x^0 takva da je $f\left(x\right) \le f\left(x^0\right) + \varepsilon$ za svako $x \in U$.

Funkcija f je poluneprekidna s donje strane, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji okolina U tačke x^0 takva da je $f\left(x\right) \ge f\left(x^0\right) - \varepsilon$ za svako $x \in U$.

Definicija 2.12: Neka je X normiran linearan prostor. Funkcionela J na X je diferencijabilna u tački $x^0 \in X$, ako postoji neprekidna linearna funkcionela ϕ na X takva da je

$$\Delta J\left(x^0;h\right) \equiv J\left(x^0+h\right) - J\left(x^0\right) = \phi\left(h\right) + o\left(\|h\|\right),$$

gde je $o\left(\|h\|\right)$ infinitezimala višeg reda u odnosu na h (Landauovo o), odnosno

$$\lim_{h \to 0} \frac{o\left(\|h\|\right)}{\|h\|} = 0.$$

Funkcionela J je diferencijabilna na X ako je diferencijabilna u svakoj tački x prostora X.

Kada je prostor X konačno-dimenzioni (na primer $n-$dimenzioni), $\phi\left(h\right)$ se može zapisati kao $\phi \cdot h$, gde je ϕ $n-$dimenzioni vektor. Vrednost linearne funkcionele ϕ na h se označava sa $\phi\left(h\right)$. Linearna funkcionela ϕ se naziva prvi izvod od J i označava se sa J' ili $J'\left(x^0\right)$, dok se $\phi\left(h\right)$ naziva prvi diferencijal od J i označava se sa $dJ\left(x^0;h\right)$ ili $dJ\left(h\right)$.

Primedba: Za fiksirano x^0, $\phi\left(h\right)$ zavisi samo od h. Ukoliko se x^0 promeni, onda se menja i $\phi\left(h\right)$.

Primedba: Linearna funkcionela J je očigledno uvek diferencijabilna, pošto je $J(x+h)-J(x)=J(h)$, pa je $o(\|h\|)=0$.

Primedba: Iz gornje definicije, može se reći da je linearna funkcionela diferencijabilna ako je moguće $\Delta J(x)$ napisati u obliku zbira linearne funkcionele po h i infinitezimale reda višeg u odnosu na h.

Definicija 2.13: Funkcionela $J(x)$ na normiranom linearnom prostoru X je dva puta diferencijabilna u $x^0 \in X$ ako postoji linearna funkcionela ϕ i kvadratna funkcionela Q takva da je

$$\Delta J\left(x^0;h\right)=J\left(x^0+h\right)-J\left(x^0\right)=\phi(h)+Q(h,h)+o\left(\|h\|^2\right).$$

Ovde je $o\left(\|h\|^2\right)$ infinitezimala višeg reda u odnosu na $\|h\|^2$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{o\left(\|h\|^2\right)}{\|h\|^2}=0.$$

Kvadratna funkcija $Q(h,h)$ je drugi diferencijal od J u x^0 i označava se sa $d^2J\left(x^0;h\right)$ ili $d^2J(h)$. Kada je J dva puta diferencijabilna za svako $x\in X$, onda je J dva puta diferencijabilna na X.

Primedba: Kvadratna funkcionela $Q(h,h)$ na R^n iz definicije 2.13 može biti zapisana u obliku

$$Q(h,h)=\frac{1}{2}hAh,$$

gde je $A\equiv\left[a_{ij}\right]$ $n\times n$ matrica, $h\in R^n$, takva da je $a_{ij}=\dfrac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_j}$ u tački $x=x^0$. Ukoliko su $a_{ij}-$ovi ograničeni u okolini tačke x^0 (ukoliko postoji μ takvo da je $\left|a_{ij}\right|\le\mu$ za svako i i j), onda je $h\cdot A\cdot h\le\sum_{i,j}\mu h_i h_j\le\mu n^2\|h\|^2$, gde je

$$\|h\|\equiv\left[\sum_{i=1}^{n}h_i^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (a)$$

ili

$$\|h\|\equiv\max_{1\le i\le n}\left\{\left|h_i\right|\right\}. \qquad \text{(b)}$$

Definicija 2.14: Preslikavanje $\phi : X \times X \to C$ je seskuilinearno, ako je

$$\phi(x+y, z+w) = \phi(x,z) + \phi(x,w) + \phi(y,z) + \phi(y,w)$$
$$\phi(ax, by) = \overline{a}b\phi(x,y)$$

za svako $x, y, z \in X$ i $a, b \in C$.

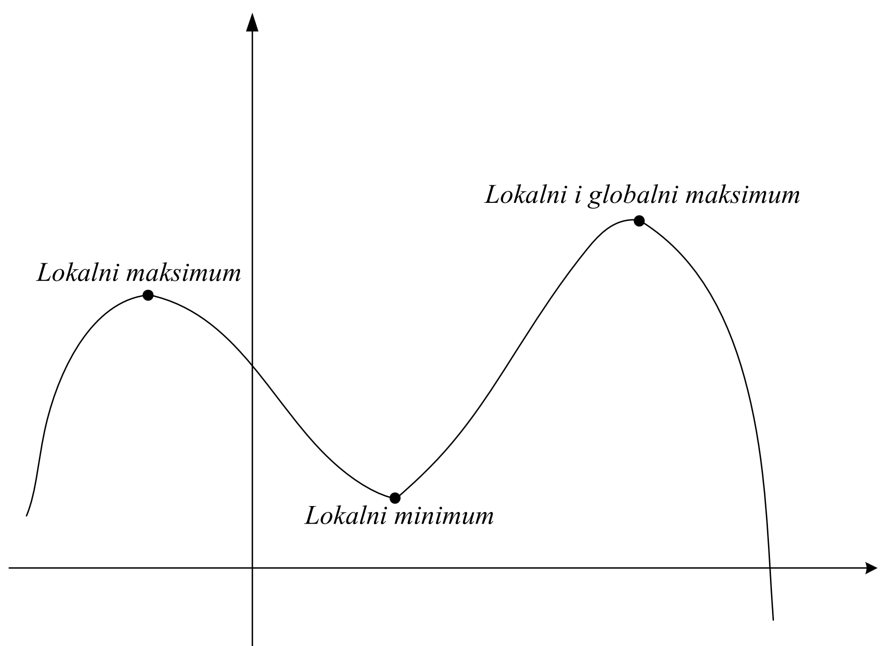
Definicija 2.15: Neka je $J(x)$ funkcionela definisana na normiranom linearnom prostoru X.

i. Funkcionela $J(x)$ dostiže svoj lokalni maksimum (lokalni minimum) u tački $\hat{x} \in X$, ako postoji $\varepsilon > 0$ takvo da za svako $x \in B_\varepsilon(\hat{x}) \subset X$, $x \neq \hat{x}$, važi $J(\hat{x}) \geq J(x)$ ($J(\hat{x}) \leq J(x)$).

ii. Kažemo da $J(x)$ dostiže svoj globalni maksimum (globalni minimum) u $\hat{x} \in X$, ako je $J(\hat{x}) \geq J(x)$ ($J(\hat{x}) \leq J(x)$) za svako $x \in X$, $x \neq \hat{x}$.

Primedba: Lokalni maksimum ili lokalni minimum u $\hat{x}$ je lokalni ekstrem u $\hat{x}$.

Primedba: Jasno je da ako u $\hat{x}$ se dostiže globalni maksimum (globalni minimum) u $J(x)$, takođe dostiže i lokalni maksimum (lokalni minimum), ali obrnuto ne važi. Drugim rečima, lokalni maksimum je potreban uslov za globalni maksimum, ali nije i dovoljan.



Grafik 1: Primeri lokalnih i globalnih ekstrema

Teorema 2.1: Neka je $J(x)$ diferencijabilna funkcionela definisana na normiranom linearnom prostoru X. Potreban uslov da $J(x)$ ima lokalni (ili globalni) ekstrem u $\hat{x} \in X$ je da se njen diferencijal anulira u $x = \hat{x}$, tj. $dJ(\hat{x}; h) = 0$ za svako h.

Dokaz: Iz definicije diferencijala sledi da je $\Delta J(\hat{x};h) \equiv J(\hat{x}+h) - J(\hat{x}) = dJ(\hat{x};h) + \delta\|h\|$ gde je

$$\delta \equiv \frac{o(\|h\|)}{\|h\|}.$$

Iz definicije $o(\|h\|)$, ako $\delta \to 0$, onda $h \to 0$. Dakle, $\Delta J(\hat{x};h)$ i $dJ(\hat{x};h)$ imaju isti znak. Dalje se pretpostavlja da je $dJ(\hat{x};h^0) \neq 0$ za neko h^0. Pošto je dJ linearna funkcionela po h, $dJ(\hat{x};-\theta h^0) = -\theta dJ(\hat{x};h^0) \neq 0$ za bilo koje realno $\theta \neq 0$. Neka je $\theta > 0$ dovoljno malo. Onda $\Delta J(\hat{x};h)$ ne može uvek biti ni ≥ 0 ni ≤ 0 za dovoljno malo h (ili dovoljno malo θ). Ovo je kontradikcija sa pretpostavkom da $J(x)$ ima (lokalni) ekstremum u tački $\hat{x}$.

□

Teorema 2.2: Neka je $J(x)$ dva puta diferencijabilna funkcija definisana na normiranom linearnom prostoru X. Ako je $dJ(\hat{x};h) = 0$ za svako h, potreban uslov da $J(x)$ ima lokalni (globalni) minimum u tački $x = \hat{x}$ je

$$d^2 J(\hat{x};h) \geq 0 \text{ za svako } h.$$

Dokaz: Po definiciji je

$$\Delta J(\hat{x};h) = J(\hat{x}+h) - J(\hat{x}) = dJ(\hat{x};h) + d^2 J(\hat{x};h) + o\left(\|h\|^2\right).$$

Iz teoreme 2.1 sledi da je $dJ(\hat{x};h) = 0$. Dakle, $\Delta J(\hat{x};h)$ i $d^2 J(\hat{x};h)$ imaju isti znak za dovoljno malo $\|h\|$. Pretpostavimo da je $d^2 J(\hat{x};h^0) < 0$ za neko h^0. Iz bilinearnosti kvadratne funkcionele $d^2 J(\hat{x};h)$ imamo da je

$$d^2 J(\hat{x};\theta h^0) = \theta^2 d^2 J(\hat{x};h^0) < 0 \text{ za bilo koje } \theta \neq 0.$$

Dakle, $\Delta J(\hat{x};h)$ može biti negativno za dovoljno malo $\|h\|$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da $J(x)$ ima lokalni minimum u tački $x = \hat{x}$.

□

Primedba: Slično se može dokazati da je $d^2 J(\hat{x};h) \leq 0$ potreban uslov kako bi $\hat{x}$ bio lokalni minimum za $J(x)$. Potreban uslov drugog reda za lokalni minimum (maksimum) je $d^2 J(\hat{x};h) \geq 0$ (≤ 0).

Definicija 2.16: Kvadratna funkcionela $Q(h,h)$ definisana na normiranom linearnom prostoru X je strogo pozitivno definitna, ako postoji konstanta $\theta > 0$ takva da je

$$Q(h,h) \geq \theta \|h\|^2 \text{ za svako } h \in X.$$

Teorema 2.3: Dovoljan uslov da dva puta diferencijabilna funkcionela $J(x)$ ima jedinstven lokalni minimum u tački $x=\hat{x}$, je da se prvi izvod u datoj tački anulira ($dJ(\hat{x};h)=0$) i da je drugi izvod, $d^2J(\hat{x};h)$, u istoj tački strogo pozitivno definitan.

Primedba: Za konačno dimenzioni prostor, stroga pozitivna definitnost kvadratne forme je ekvivalentna sa pozitivnom definitnošću. U slučaju kada je prostor beskonačno dimenzioni stroga pozitivna definitnost može biti jača od pozitivne definitnosti. Dakle, u gornjem dovoljnom uslovu stroga pozitivna definitnost ne može biti zamenjena pozitivnom definitnošću, što vidimo iz sledećeg primera.

Primer: Neka je $J(x)\equiv\int_0^1 x^2(t)\left(t-x(t)\right)dt$, gde je funkcija $x(t)$ neprekidno diferencijabilna na intervalu $[0,1]$. Neka je $\hat{x}(t)\equiv 0$. Onda je $dJ(\hat{x};h)=dJ(0;h)=0$. Štaviše, $d^2J(\hat{x};h)=d^2J(0;h)=\int_0^1 th^2(t)\,dt$, koja je pozitivna za svako $h(t)\neq 0$. Međutim, lako se može izabrati funkcija $x(t)$ takva da je $dJ(x;h)<0$, tada $J(x)$ ne dostiže minimum za $\hat{x}(t)\equiv 0$.

Primedba: Prethodna teorema je definisana za minimum. Kada je u pitanju problem maksimuma, funkcija $J(x)$ dostiže lokalni maksimum u tački $\hat{x}$, ako je $dJ(\hat{x};h)=0$ i ako postoji $\theta>0$ takvo da je $d^2J(\hat{x};h)\leq-\theta\|h\|$ za svako h.

Definicija 2.17: Topološki prostor M je Hausdorfov prostor, ako za svake dve različite tačke $x,y\in M$ postoje disjunktni otvoreni skupovi X i Y u M takvi da $x\in X$ i $y\in Y$.

Definicija 2.18: Neka je M Hausdorfov prostor. Podskup $K\subset M$ se naziva kompaktnim ako i samo ako svaki beskonačan niz u K ima podniz koji konvergira u K.

Teorema 2.4 (Postojanje minimuma u Hausdorfovom prostoru): Neka je funkcija $J:M\to R\cup\{+\infty\}$ polu-neprekidna funkcija s donje strane na Hausdorfovom prostoru M. Neka je r realan broj takav da važi

a) $[J\leq r]=\{x\in M: J(x)\leq r\}\neq\varnothing$ i
b) $[J\leq r]$ je kompaktno.

Tada postoji tačka minimuma $x_0\in M$ funkcije J:

$$J(x_0)=\inf_{x\in M}J(x).$$

Dokaz: Pre svega, neophodno je pokazati da je funkcija J ograničena sa donje strane, jer u suprotnom postoji niz $\{x_n\}_{n\in N}$ takvo da je $J(x_n) < -n$ za svako $n \in N$. Za dovoljno veliko n elementi niza pripadaju skupu $[J \le r]$, tj. postoji podniz $y_j = x_{n(j)}$ koji konvergira ka tački $y \in M$. Pošto je funkcija J polu-neprekidna s donje strane važi $J(y) \le \lim_{j\to\infty} \inf J(y_j)$ što je kontradikcija sa $J(y_j) < -n(j) \to -\infty$. Funkcija J je ograničena sa donje strane i ima konačan infimum:

$$-\infty < \inf_{x\in M} J(x) \le r.$$

Dalje, sledi da postoji minimizirajući niz $\{x_n\}_{n\in N}$ čiji elementi pripadaju skupu $[J \le r]$ za dovoljno veliko n. Kako je $[J \le r]$ kompaktno, postoji podniz $y_j = x_{n(j)}$ koji konvergira ka jedinstvenoj tački $x_0 \in [J \le r]$. Pošto je J polu-neprekidna s donje strane, može se zaključiti da je

$$J(x_0) \le \lim_{j\to\infty} \inf J(y_j) = \lim_{j\to\infty} J(y_j).$$

□

Teorema 2.5 (Jedinstvenost minimuma u Hausdorfovom prostoru): Neka je M konveksan skup u vektorskom prostoru E i $J : M \to R$ je strogo konveksna funkcija na M. Tada ukoliko funkcija J ima minimum na skupu M, taj minimum je jedinstven.

Dokaz: Pretpostavlja se suprotno tvrđenju, da funkcija J na skupu M dostiže dva minimuma x_0 i y_0. Kako je skup M konveksan, svaka tačka oblika $x(t) = tx_0 + (1-t)y_0$, $0 < t < 1$ pripada skupu M i važi $J(x_0) = J(y_0) \le J(x(t))$. Pošto je funkcija J strogo konveksna, onda je $J(x(t)) < tJ(x_0) + (1-t)J(y_0) = J(x_0)$ i dolazi se do kontradikcije $J(x_0) < J(x_0)$. Dakle, minimum ukoliko postoji, on je jedinstven.

□

2. 2. Varijacioni račun

U ovom poglavlju je predstavljen pojam varijacionog računa i izloženi su neki elementarni problemi kojima se bavi varijacioni račun. Nakon izvođenja potrebnog i dovoljnog uslova za postojanje ekstrema u vidu Ojlerove jednačine, navedeni problemi su rešeni. Kao osnovna literatura korišćeni su radovi Fempl [7] i Takayama [1].

Posmatra se sledeći Rimanov integral:

$$J \equiv \int_a^b f\left(t, x(t), x'(t)\right) dt, \text{ gde je } x'(t) \equiv \frac{dx}{dt}.$$

Vrednost datog integrala zavisi od funkcije $x(t)$ za koju se pretpostavlja da pripada klasi C^2. Ukoliko se promeni funkcija $x(t)$, dobijaju se različite vrednosti integrala J. Pretpostavlja se da je data određena klasa funkcija X (na primer, skup svih diferencijabilnih funkcija definisanih na zatvorenom intervalu $[a,b]$). Tada se razmatra problem izbora funkcije $x(t)$ koja će saopštiti ekstremnu vrednost integrala J i zadovoljiti uslove $x(a)=\alpha$ i $x(b)=\beta$. Problemima ovog tipa se bavi varijacioni račun.

Zadaci varijacionog računa svode se na pronalaženje funkcija koje saopštavaju ekstremnu vrednost zadatom određenom integralu, neprekidne su i prolaze kroz zadate tačke. Osnovni zadatak varijacionog računa bi mogao biti formulisan na sledeći način:

Odrediti funkciju $x=x(t)$ koja pripada određenoj klasi i saopštava ekstremnu vrednost određenom integraju J

$$J=\int_a^b f\left(t,x(t),x^{'}(t)\right)dt \to extr.,\ x(a)=x_a,\ x(b)=x_b.$$

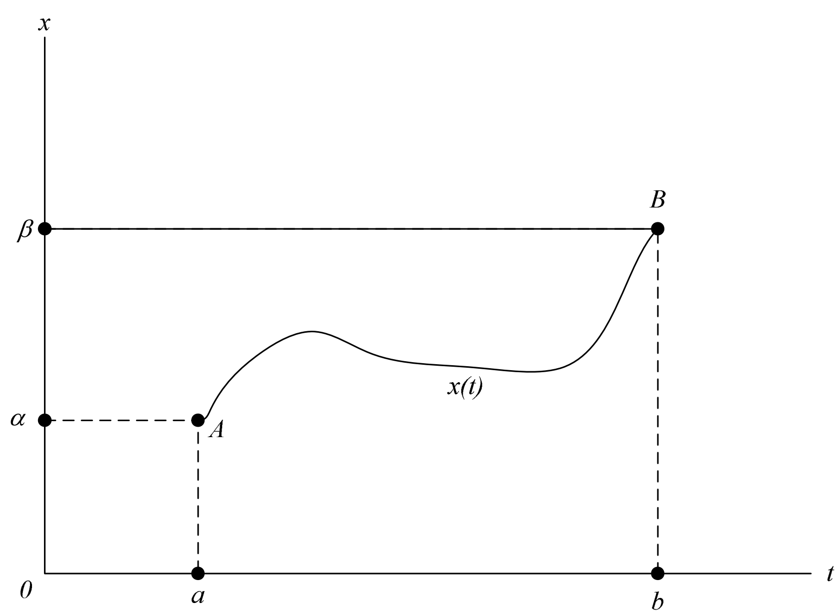
2.2.1. Problem minimalne udaljenosti

Najjednostavniji problem varijacionog računa je verovatno problem nalaženja krive najmanje dužine koja spaja dve fiksirane tačke na nekoj površi. Na grafiku 2 su date dve tačke A i B, kriva koja spaja A i B će biti označena sa $x(t)$, $x(a)=\alpha$ i $x(b)=\beta$.

Dužina luka krive $x(t)$ je data sa $ds=\sqrt{(dt)^2+(dx)^2}=\sqrt{1+x^{'}(t)^2}\,dt$, pa je udaljenost između A i B data sa

$$J_D \equiv \int_a^b \sqrt{1+x^{'}(t)^2}\,dt, \text{ gde je } x^{'}(t)\equiv \frac{dx}{dt}.$$

Tada je potrebno pronaći funkciju $x(t)$ iz skupa diferencijalnih funkcija koja minimizira integral J_D tako da važi $x(a)=\alpha$ i $x(b)=\beta$.



Grafik 2: Problem minimalne udaljenosti

Jasno je da je rešenje gornjeg problema prava linija koja spaja tačke A i B. Ovo je moguće zaključiti i bez primene bilo koje teoreme varijacionog računa.

2.2.2. Izoperimetrijski problem

Prema legendi, kraljica Dido je bežeći iz Tire, feničanskog grada kojim je vladao njen brat tiranin Pigmalion, stigla do Kartagene, gde su od domorodaca zatražili zemlju. Ponudili su joj onoliko zemlje koliko može da obuhvati jedna volujska koža. Dido je prihvatila ponudu i isekla volujsku kožu na tanke kaiševe kojima je omeđila najprostraniju moguću površinu. Kompletan matematički dokaz da je rešenje koje je Dido pronašla najpovoljnije je dat tek u 19. veku. Ovaj problem se često dovodi u vezu sa izoperimetrijskim problemom kod koga je cilj u skupu zatvorenih krivih pronaći krivu koja obuhvata najveću površinu. Ovaj problem je primer minimizacije sa ograničenjima. Intuitivno rešenje ovog problema je jednostavno, međutim to nije slučaj i sa matematičkim dokazom.

Slika 1: Slika Kartagene

2.2.3 Fermaov princip

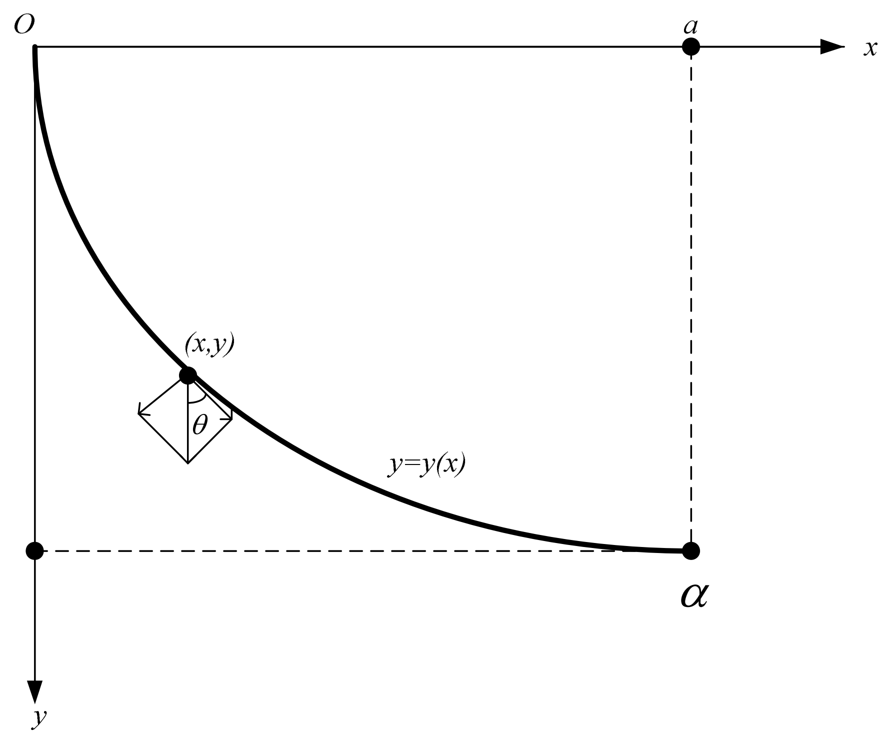
Ovaj problem je prvi definisao još Heron, a zatim je tek 1662. Ferma dao njegovu formulaciju. Neka je sa μ označen indeks prelamanja svetlosti kroz datu sredinu u odnosu na vakuum. Optički put koji svetlost pređe iz tačke A_0 u A_1 je dat sa

$$I = \int_{A_0}^{A_1} \mu ds ,$$

gde je ds element geometrijskog puta svetlosti u datom pravcu. Fermaov princip kaže da od svih krivih koje spajaju tačku A_0 sa tačkom A_1 integral I ima najmanju vrednost.

2.2.4. Bernulijev problem (problem brahistohrone)

Problem brahistohrone je definisan 1696. godine od strane Johana Bernulija (iako je Galileo prvi diskutovao o ovom problemu 1630. godine). Materijalna tačka se kreće pod dejstvom sile teže po glatkoj krivoj liniji bez otpora u vertikalnoj ravni. Po kojoj krivoj će tačka koja je krenula bez početne brzine iz tačke O u tačku α stići za najkraće vreme? Na grafiku 3 je prikazana materijalna tačka (x, y) mase m koja klizi niz glatku vertikalnu krivu $O\alpha$ pod dejstvom sile Zemljine teže, g. Zadatak je pronaći krivu oblika $y = f(x)$, takvu da vreme od tačke O do tačke α bude minimalno.



Grafik 3: Problem brahistohrone

Neka je dt vreme potrebno da tačka pređe elementarni luk krive ds, a v brzina kojom se tačka kreće. Očigledno, $dt = ds / v$. Zakon o održanju totalne mehaničke energije kaže da je $(mv^2)/2 - mgy = 0$, jer je početna brzina tačke jednaka nuli, a tački O odgovara nulta vrednost koordinate y. Iz zakona održanja totalne mehaničke energije sledi da je $v = \sqrt{2gy}$. Ukupno vreme potrebno da tačke pređe iz O u α je dato integralom

$$T = \int_0^T dt = \int_o^\alpha \frac{ds}{v}.$$

Ako se element luka ds izrazi na uobičajen način $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$, gde je $y'=\dfrac{dy}{dx}$, onda formilacija problema brahistohrone glasi:

$$J_B=\int_0^a\sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{2gy}}dx\to\min$$

uz granične uslove $y(0)=0$ i $y(a)=\alpha$.

2.2.5. Dirihleov problem

U ovom problemu neophodno je pronaći diferencijabilnu funkciju f čiji izvodi su kvadratno integrabilni na domenu $\Omega\subset R^3$ i koja uzima vrednosti sa ruba domena $\partial\Omega$, tj. $f_{|\partial\Omega}=g$ gde je g funkcija sa ruba domena $\partial\Omega$ koja minimizira integral

$$I(f)=\int_\Omega|Df(x)|^2dx.$$

Tokom 20-tih i 30-tih godina prošlog veka stručnjaci iz oblasti varijacionog računa, poput Rosa i Evansa, su bili veoma zainteresovani za ekonomiju. Nažalost, u to vreme jedva da je neko od ekonomista bio zainteresovan za njihove radove. Izuzetak su neki njihovi radovi objavljeni od strane R.G.D. Alena 1938. Problem koji je razmatran jeste problem dinamičkog monopola.

Posmatra se potpuni monopolista koji proizvodi i prodaje samo jedan proizvod X. Pretpostavlja se da je njegova funkcija troškova data sa $C(x)$, gde x označava proizvedenu količinu $X-$a. Neka je cena proizvoda X u vremenu t data sa $p(t)$. Dalje se pretpostavlja da je funkcija $p(t)$ diferencijabilna i neka je $p'(t)=dp(t)/dt$. Neka je funkcija tražnje proizvoda X data sa $D=D(p(t),p'(t))$ gde p' predstavlja špekulativni element. Očigledno, profit monopoliste po jedinici vremena je $Dp(t)-C(x)$ gde je $x=D$. Njegov cilj je da nađe optimalnu cenu $p(t)$ kojom želi da maksimizira profit u vremenskom intervalu $[0,T]$. Drugim rečima, želi da nađe funkciju $p(t)$ kojom se maksimizira integral

$$\int_0^T\left[Dp(t)-C(x)\right]dt=\int_0^T\left\{D\left[p(t),p'(t)\right]p(t)-C\left[D\left(p(t),\right)p'(t)\right]\right\}dt$$

uz granične uslove $p(0)=p^0$ i $p(T)=\overline{p}$, gde je $x=D$ i $p'=dp/dt$. Ovo je opet problem varijacionog računa.

Kasnije će biti data rešenja nekih problema, ali pre toga je potrebno objasniti Ojlerovu jednačinu.

Tokom vremena je rastao interes ekonomskih stručnjaka za varijacioni račun, Frenk Remzi je razmatrao problem maksimizacije društvenog bogatstva tokom vremena. Remzijev problem je takođe bio problem varijacionog računa. Ovaj problem, jednom zaboravljen, je ponovo privukao ogromnu pažnju i rešen je od strane Kupmansa i Kasa.

Na osnovu datih primera, može se reći da je oblik $f\left(t,x(t),x'(t)\right)$ svojstven za podintegralne funkcije u formulacijama varijacionih problema.

Varijacioni račun bi se najlakše mogao opisati kao generalizacija problema minimuma i maksimuma elementarnim kalkulusom.

2. 3. Ojlerova jednačina

U ovom poglavlju izodi se potreban uslov prvog reda za maksimizaciju (ili minimizaciju) prethodno razmatranih problema. Akcenat je na intuitivnom razumevanju izvoda, pa će se posmatrati samo najjednostavniji problemi. U sledećem poglavlju se prelazi na opštiju analizu.

Neka je X skup svih neprekidno diferencijabilnih funkcija na zatvorenom intervalu $[a,b]\subset R$. Želimo da pronađemo funkciju $\hat{x}(t)$ iz X koja daje ekstremnu vrednost integralu

$$J[x]\equiv\int_a^b f\left[t,x(t),x'(t)\right]dt, \tag{1}$$

gde je $x'(t)=dx/dt$, uz granične uslove $x(a)=\alpha$ i $x(b)=\beta$. Pretpostavlja se da funkcija f ima neprekidne prve i druge izvode po svim promenljivima.

Ovde se pretpostavlja da postoji funkcija $\hat{x}(t)$ iz X koja maksimizira (ili minimizira) J. Razmatra se proizvoljna diferencijabilna funkcija $h(t)\in X$ takva da je $h(a)=0$ i $h(b)=0$. Neka je ε realan broj i definišemo $x_\varepsilon(t)\in X$ na sledeći način:

$$x_\varepsilon(t)=\hat{x}(t)+\varepsilon h(t). \tag{2}$$

Pretpostavlja se da $J(x_\varepsilon)$ dostiže svoj maksimum (ili minimum) kada je $\varepsilon=0$. Ako se pretpostavi da je $J(x_\varepsilon)$ funkcija po ε, parcijalni izvod anulira u tački $\varepsilon=0$:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}J(x_\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}=0 \tag{3}$$

Sa druge strane,

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}J(x_\varepsilon)_{|\varepsilon=0}=\left[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_a^b f\left(t,\hat{x}+\varepsilon h,\hat{x}'+\varepsilon h'\right)dt\right]_{|\varepsilon=0} \tag{4}$$

$$=\int_a^b \hat{f}_x h\,dt+\int_a^b \hat{f}_{x'}h'\,dt,$$

gde su sa $\hat{f}_x$ i $\hat{f}_{x'}$ označeni, redom, odgovarajući parcijalni izvodi funkcije f u tački $\hat{x}$.

Parcijalnom integracijom dobija se

$$\int_a^b \left[\hat{f}_{x'} h' \right] dt = \hat{f}_{x'} h \Big|_a^b - \int_a^b \left[\frac{d\hat{f}_{x'}}{dt} h \right] dt = -\int_a^b \left[\frac{d\hat{f}_{x'}}{dt} h \right] dt \tag{5}$$

Iz jednakosti (3), (4) i (5) dobija se

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} J\left[x_\varepsilon \right]_{|\varepsilon=0} = \int_a^b \left[\hat{f}_x - \frac{d}{dt} \hat{f}_{x'} \right] h(t)\, dt = 0 \tag{6}$$

Ovo važi za svako $h(t) \in X$ za koje je $h(a) = h(b) = 0$. U nastavku će se pokazati da iz jednakosti (6) sledi $\hat{f}_x - d\hat{f}_{x'} / dt = 0$. U tu svrhu se dokazuje sledeća lema, koja se često naziva osnovnom lemom varijacionog računa.

Lema 2.1: Neka je $F(t)$ neprekidna funkcija na zatvorenom intervalu $[a,b]$. Neka je dalje X_0 skup svih neprekidnih funkcija na intervalu $[a,b]$ takvih da, ako $h(t) \in X_0$ onda važi $h(a) = h(b) = 0$. Pretpostavimo da je

$$\int_a^b F(t) h(t)\, dt = 0$$

za svako $h(t) \in X_0$. Tada je $F(t)$ identički jednaka nuli na $[a,b]$.

Dokaz: Pretpostavlja se da u nekoj tački $\bar{t} \in [a,b]$ važi $F(\bar{t}) \neq 0$, na primer, $F(\bar{t}) > 0$. Tada iz neprekidnosti funkcije $F(t)$, sledi da je $F(t) > 0$ na nekom intervalu $[c,d]$, gde je $c < d$, $\bar{t} \in [c,d]$ i $[c,d] \subset [a,b]$. Bira se $h(t) \in X_0$ takvo da je $h(t) := (c-t)^2 (d-t)^2$ za $t \in (c,d)$ i $h(t) = 0$ za $t \notin (c,d)$. Tada je

$$\int_a^b F(t) h(t)\, dt > 0,$$

što je u kontradikciji sa pretpostavkom teoreme.

□

Ako se koristi lema 2.1. i primeti da je $\hat{f}_{x'}$ neprekidna funkcija, iz jednakosti (6), sledi da u tački $\hat{x}$ važi:

$$\hat{f}_x - \frac{d}{dt} \hat{f}_{x'} = 0, \text{ pri čemu je } \hat{x}(a) = \alpha, \hat{x}(b) = \beta. \tag{7}$$

Jednačina

$$f_x - \frac{d}{dt} f_{x^{'}} = 0\,,\ x(a) = \alpha, x(b) = \beta$$

se naziva Ojlerova jednačina i daje potreban uslov (prvog reda) za maksimum (ili minimum) integrala J.

Primedba: Pošto je

$$\hat{f}_{x^{'}} = \hat{f}_{x^{'}}\left(t, \hat{x}(t), \hat{x}^{'}(t)\right), \hat{f}_x - \frac{d\hat{f}_{x^{'}}}{\partial \hat{x}^{'}} \hat{x}^{"} = 0\,.$$

dobija se diferencijalna jednačina drugog reda

$$\hat{f}_x - \frac{\partial \hat{f}_{x^{'}}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{f}_{x^{'}}}{\partial \hat{x}} \hat{x}^{'} - \frac{\partial \hat{f}_{x^{'}}}{\partial \hat{x}^{'}} \hat{x}^{"} = 0\,.$$

Pretpostavka da je funkcija $\hat{x}(t)$ dva puta diferencijabilna je suviše jaka i kako bi se definisao integral

$$J \equiv \int_a^b f\left(t, x(t), x^{'}(t)\right) dt\,,$$

dovoljno je da $\hat{x}(t)$ bude diferencijabilna funkcija. Iz ovog razloga Ojlerova jednačina se često prikazuje u sledećem obliku:

$$\hat{f}_{x^{'}} = \int^t \hat{f}_x d\tau + const \qquad (8)$$

Ova jednačina se može formalno izvesti integracijom Ojlerove jednačine. Ukoliko

$$\frac{d\hat{f}_{x^{'}}}{dt}$$

ne postoji, procedura izvođenja integracije Ojlerove jednačine je neizvodljiva, jer u tom slučaju Ojlerova jednačina ne postoji. Kako god, gornja jednačina se direktno može dobiti iz jednakosti (3) i (4) i parcijalnom integracijom. Dakle, Ojlerova jednačina (7) implicira (8). Međutim, obrnuto ne mora uvek da važi. Ipak, ako $\hat{\sigma}\hat{f}_x$ i $\hat{\sigma}\hat{x}^{'}$ (označeno sa $\hat{f}_{x^{'}x^{'}}$) postoji i različito je od nule u svakoj tački domena funkcije f, onda se može pokazati da (8) implicira (7). Interesantno je posmatrati funkciju $\hat{x}(t)$ kada ima viši stepen diferencijabilnosti. Kada je uslov $\hat{f}_{xx} \neq 0$ zadovoljen, onda je gornji problem regularan.

Primedba: U gornjoj diskusiji se pretpostavlja da podintegralna funkcija integrala J ima oblik $f\left(t, x(t), x^{'}(t)\right)$. U određenim slučajevima, može se desiti da određeni argumenti nedostaju i za te specijalne slučajeve mogu se dobiti formule. Na primer, u slučaju kada nedostaje argument t, funkcija ima oblik $f\left(x(t), x^{'}(t)\right)$. Pre svega,

$$\frac{df}{dt} = f_x x^{'} + f_{x^{'}} x^{"}.$$

Međutim za optimalno $\hat{x}(t)$, Ojlerova jednačina je zadovoljena tako da važi $\hat{f}_x = \dfrac{d\hat{f}_{x'}}{dt}$.
Dalje je :

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = \left[\frac{d}{dt}\hat{f}_{x'}\right]\hat{x}' + \hat{f}_{x'}\hat{x}'' = \frac{d}{dt}\left[\hat{f}_{x'}\hat{x}'\right],$$

gde je $\hat{f} \equiv f\left(\hat{x}(t), \hat{x}'(t)\right)$ i $\hat{f}_{x'} \equiv \dfrac{\partial \hat{f}}{\partial x'}$. Dalje, sledi sledeći uslov za Ojlerovu jednačinu:

$$\hat{f} = \hat{f}_{x'}\hat{x}' + c \tag{9}$$

pri čemu je c neka konstanta.

2.4. Specijalni slučajevi Ojlerove jednačine

S obzirom da šablon za rešavanje Ojlerovih jednačina ne postoji, biće prikazani neki od specijalnih slučajeva koji se često sreću u praksi.

1) **Podintegralna funkcija ne zavisi od** t

U ovom slučaju je

$$J(x) = \int_a^b f\left(x(t), x'(t)\right)dt.$$

Tada iz Ojlerove jednačine sledi

$$f - x' f_{x'} = const.$$

Kako funkcija f ne zavisi od t, onda je

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x'}x' - \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}x'x'' = 0.$$

Kada se prethodna jednakost pomnoži sa x' dobija se

$$\frac{\partial f}{\partial x}x' - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x'}\left(x'\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}x'x'' = 0.$$

Leva strana jednakosti je jednaka sa

$$\frac{d}{dt}\left(f - x' f_{x'}\right).$$

Odakle se određuje prvi integral Ojlerove jednačine.

2) Podintegralna funkcija ne zavisi od x

Sada je

$$J(x)=\int_a^b f\left(t,x^{'}(t)\right)dt.$$

Iz Ojlerove jednačine, sledi da je

$$f_{x^{'}}=const.,$$

odakle se određuje $x^{'}$.

3) Podintegralna funkcija ne zavisi od $x^{'}$

Posmatra se integral

$$J(x)=\int_a^b f\left(t,x(t)\right)dt.$$

U ovom slučaju, Ojlerova jednačina nije diferencijalna jednačina i egzistencija ekstremala zavisi od graničnih uslova.

2.5. Rešenja primera pomoću Ojlerove jednačine

U ovom poglavlju će biti rešeni prikazani problemi opisani u poglavlju 1.2 pomoću Ojlerove jednačine. Pošto se nije diskutovalo o dovoljnim uslovima, sada će se obratiti pažnja na njih.

1. Problem minimalne udaljenosti

Minimizira se $J_D \equiv \int_a^b \sqrt{1+(x^{'})^2}\,dt$

uz uslove : $x(a)=\alpha$ i $x(b)=\beta$.

Ako se označi $\sqrt{1+(x^{'})^2} \equiv f_D$, onda je Ojlerov uslov dat sa

$$\frac{\partial f_D}{\partial x}=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f_D}{\partial x^{'}}\right].$$

Pošto f_D ne sadrži x, važi

$$\frac{\partial f_D}{\partial x} = 0\,.$$

Dakle,

$$\frac{\partial f_D}{\partial x'} = \frac{x'}{\sqrt{1+(x')^2}} = const.$$

Drugim rečima, $x'(t) = \gamma$ (konstanta). Dakle, $x(t) = \gamma t + \sigma$. Pošto je $\hat{x}(a) = \alpha$ i $\hat{x}(b) = \beta$, dobija se jednačina tražene prave

$$x(t) = \left(\frac{\alpha-\beta}{a-b}\right)t + \frac{a\beta - \alpha b}{a-b}\,.$$

2. Problem brahistohrone

Potrebno je pronaći $y(x)$ takvo da minimizira:

$$J_B \equiv \int_0^a \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}}dx$$

uz uslove: $y(0) = 0$ i $y(a) = \alpha$

Neka je $f_B \equiv \sqrt{\dfrac{1+(y')^2}{2gy}}$. Pošto f_B ne sadrži x, koristi se formula (9).

Drugim rečima,

$$f_B = \left(\frac{\partial f_B}{\partial y'}\right)y' + c\,,\ \text{gde je } c \text{ neka konstanta,}$$

odnosno

$$\sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}} = \frac{\left(y'\right)^2}{\sqrt{2gy\left[1+(y')^2\right]}} + c\,.$$

Kvadriranjem leve i desne strane jednakosti dobija se

$$\frac{1+\left(y'\right)^2}{2gy} - \frac{2\left(y'\right)^2}{2gy} + \frac{\left(y'\right)^4}{2gy\left(1+\left(y'\right)^2\right)} = c^2\,.$$

Sređivanjem izraza, dolazi se do jednakosti

$$\frac{1}{2gy\left(1+\left(y'\right)^2\right)}=c^2.$$

Odakle je dalje

$$y=\frac{k}{1+\left(y'\right)^2} \text{ gde je } k\equiv\frac{1}{2gc^2}.$$

Uvođenjem parametra ω i ako stavimo

$$y'=\tan\omega,$$

dobija se

$$y=\frac{k}{1+(y')^2}=\frac{k}{1+\tan^2\omega}=k\cos^2\omega.$$

Diferenciranjem se dobija $y'=-2k\cos\omega\sin\omega\frac{d\omega}{dx}$, a to je jednako sa $\tan\omega$, pa je $\frac{d\omega}{dx}=-\frac{1}{2k\cos^2\omega}$. Dakle, $dx=-2k\cos^2\omega d\omega=-k\left(1+\cos 2\omega\right)d\omega$. Integracijom ovog izraza se dobija

$$x=-k\left(\omega+\frac{1}{2}\sin 2\omega\right)+const$$

Uz oznake $2\omega=\pi-\theta$ i $\sin\left(\pi-\theta\right)=\sin\theta$, prethodna jednakost dobija oblik

$$x=k_1\left(\theta-\sin\theta\right)+k_2$$

gde su k_1 i k_2 neke konstante. Očigledno je da važi $k_1=\frac{k}{2}$. Takođe y se može dobiti iz sledeće jednakosti:

$$\begin{aligned} y&=k\cos^2\omega=\frac{k}{2}\left(1+\cos 2\omega\right)=\frac{k}{2}\left[1+\cos\left(\pi-\theta\right)\right]\\ &=\frac{k}{2}\left[1-\cos\theta\right]=k_1\left[1-\cos\theta\right]\end{aligned}$$

Drugim rečima, dobija se rešenje u parametarskom obliku:

$$\begin{aligned} x&=k_1\left(\theta-\sin\theta\right)+k_2,\\ y&=k_1\left(1-\cos\theta\right).\end{aligned}$$

Ove jednačine pripadaju familiji „cikloida”. Jedinstvenost date krive se obezbeđuje graničnim uslovima

$$y\left(0\right)=0 \text{ i } y\left(a\right)=\alpha.$$

3. Problem dinamičkog monopola

Traži se funkcija $p(t)$ koja minimizira

$$J_M \equiv \int_0^T \{D[p(t), p'(t)]p(t) - C[D[p(t), p'(t)]]\}dt,$$

pri čemu je $p(0) = p^0$ i $p(T) = \overline{p}$. Ako se podintegralna funkcija označi sa f_M, onda je $J_M \equiv \int_0^T f_M dt$. Pošto funkcija f_M ne mora sadržati t, formula (9) se može iskoristiti umesto Ojlerove jednačine

$$f_M = \frac{\partial f_M}{\partial p'} p' + \delta \text{, gde je } \delta = const.$$

Dakle, $pD - C = \left[pD_{p'} - C'D_{p'}\right]p' + \delta$, gde je $D_{p'} \equiv \frac{\partial D}{\partial p'}$ i $C' \equiv \frac{dC}{dx}$. Naravno, C' označava marginalnu funkciju cena. Gornja jednačina je diferencijalna jednačina prvog reda, konstante koje se dobijaju u rešenju ove diferencijalne jednačine mogu biti izračunate pomoću graničnih uslova $p(0) = p^0$ i $p(T) = \overline{p}$. Sledeći specijalan slučaj ilustruje problem. Neka je

$$D(p, p') = ap + bp' + c,\ a < 0,$$
$$C(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

gde su a, b, c, α, β i γ konstante. Rešenje ovog problema je

$$p(t) = \tilde{p} + Ae^{\lambda t} + Be^{-\lambda t}$$

gde su $\tilde{p}$ i λ definisani sa

$$\tilde{p} \equiv \frac{c - (2\alpha c + \beta)a}{2a(a\alpha - 1)} \text{ i } \lambda \equiv \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a(\alpha a - 1)}{\alpha}}.$$

Konstante A i B se dobijaju iz graničnih uslova $p(0) = p^0$ i $p(T) = \overline{p}$.

3. Modeli ekonomskog rasta

U ovoj glavi se pre svega daje kratak istorijski pregled zasnovan na radu Boianovsky [3]. Nakon toga sledi formulacija neoklasičnog modela rasta, pri čemi je kao osnovna literatura korišćena monografija Takayama [1].

Pojam rasta je privlačio pažnju ekonomista još od vremena fiziokrata (sledbenika teorije po kojoj jedino obrada zemlje i slobodna trgovina podstiču razvoj zemlje) i Adama Smita, međutim ozbiljne analize su počele tek sredinom dvadesetog veka. Jedan od prvih modela su razvili Ser Roj Harod, 1939. godine, i Evsi Domar, 1946. godine, nezavisno jedan od drugog. Ovaj model je imao mnogo mana, tako da su na njegovom unapređenju radili, između ostalih, Robert Solou i Trevor Svon, 1956. godine i tako je nastao neoklasični model rasta. Tokom 60 – tih godina XX veka, ovaj model se razvijao u nekoliko pravaca. Hirofumi Uzava je razvio dvo-faktorski model, Kenet Erou model „učenja radeći”[1], Džejms Tobin model u kome funkcija proizvodnje pored kapitala zavisi i od novca i model Pitera Dajmonda (fiskalna politika i smena generacija)[2]. Tokom ovog perioda, Edmund Felps i drugi autori su koristili neoklasični model rasta kako bi odredili zlatno pravilo rasta. Istovremeno, model Roja Haroda i Evsija Domara je i dalje privlačio pažnju, međutim sve više su se uviđale mane ovog modela.

Interes za teorijom ekonomskog rasta je počeo da opada 70-tih i početkom 80-tih godina prošlog veka. Sredinom 80 – tih godina XX veka dolazi do ponovnog interesovanja za teoriju rasta i stvara se nova teorija rasta u kome je putanja stalnog rasta posmatrana kao nezavisna promenljiva. Solou je negativno reagovao na novu teoriju rasta, pa su sredinom 90 – tih godina XX veka, radovi uglavnom bili posvećeni raspravama koja je teorija prihvatljivija.

Solou je 1956. godine ustanovio agregatni model rasta koji je izgrađen na osnovu tri jednačine: Prva opisuje funkciju proizvodnje koja je skalarna funkcija, konkavna po kapitalu i radu. Druga jednačina definiše akumulaciju kapitala, a treća opisuje rad. Ovaj sistem je generisan diferencijalnim jednačinama prvog reda. Solou je prvo analizirao stabilnost ravnoteže koristeći fazni dijagram, koji će kasnije dobiti naziv po njemu „Solou dijagram”. Model je pokazao na koji način ekonomija konvergira ka putanji stalnog rasta. Kako bi izračunao povećanje prihoda po glavi stanovnika, Solou je uneo tehničke promene u Domar-Harodov model i za funkciju proizvodnje je uzimao Kob-Daglasovu funkciju.

Za stalnu putanju rasta su još u 19. veku znali Karl Marks, Knut Viksel i Alfred Maršal, a prvi put je u literaturi spominje Gustav Kasel početkom 20. veka. Kasel je uticao na nekoliko švedskih ekonomista, uključujući Erika Lundberga, čija se formulacija modela poklapala sa Harodovom i Domarovom formulacijom.

Model Roberta Soloa je nastao sa ciljem da poboljša Domar – Harodov model. On je smatrao da ne postoji konzistentnost Harodove zagarantovane stope rasta i prirodne stope

[1] engleski: learning by doing.
[2] engleski fiscal policy and overlapping generations.

rasta. U svom modelu, Solou isključuje mogućnost konvergencije između garantovane stope rasta i stvarne stope rasta.

Domar je pozitivno reagovao na agregatni neoklasični model rasta. Pre ovog modela, smatrao je da funkcija proizvodnje zavisi samo od kapitala, kao i da bi uvrštanje rada u model dodatno zakomplikovalo model. S druge strane, Harod je odbacivao Solouvu interpretaciju. Harod je tvrdio da je on u svoj model uključio uticaj kamatne stope na odnos kapitala i autputa, ali da nije obratio pažnju na dugoročne efekte. Kako bi ispravio ovu manu, pod delimičnim uticajem Remzija je razvio „prirodnu kamatnu stopu" i „optimalnu stopu uštede" koja odgovara prirodnoj stopi rasta.

Tajna Solouvog uspeha u odnosu na druge teoretičare je bila u tome što je on posmatrao samo dinamiku ravnoteže, dok je, primera radi, Harod posmatrao dinamiku neravnoteže.

U neoklasičnom modelu rasta, rast autputa je predstavljen kao suma inputa kapitala i rada. Iz ovog modela su izostavljeni monetarni problemi. Novac prvi uvodi Džejms Tobin, čiji glavni cilj nije bio analiziranje putanje konstantnog rasta, nego istraživanje veze između novca, nominalnih cena, rasta i tokova.

3.1. Domar – Harodov model

Kao što je već rečeno, ovaj model su razvili Ser Roj Harod, 1939. godine, i Evsi Domar, 1946. godine, nezavisno jedan od drugog sa ciljem da objasne pojam ekonomskog rasta.

Prema modelu, postoje tri koncepta rasta:

- zagarantovani rast
- prirodni rast
- stvarni rast.

Važe sledeće pretpostavke:

1) Funkcija proizvodnje, Y, zavisi od kapitala, K,

$$Y = f(K). \tag{10}$$

2) Funkcija marginalnog kapitala je konstantna, dok je funkcija proizvodnje, homogena funkcija

$$\frac{dY}{dK} = c; \; \frac{dY}{dK} = \frac{Y}{K},$$

dakle $Y = cK$.

3) Kapital je neophodan da bi proizvodnja postojala

$$f(0)=0.$$

4) Štednja, koja se dobija kao proizvod između stope štednje i autputa, je jednaka investicijama

$$sY=S=I.$$

5) Promena kapitala iznosi

$$\Delta K=I-\mu K.$$

Prvobitni cilj Domar – Harodovog modela je bio da objasni proizvodni ciklus,

međutim kasnije je model prilagođavan pojmu ekonomskog rasta.

Iz modela se može zaključiti da rast zavisi od uloženog rada i kapitala, kao i da povećanje investicija vodi do akumulacije kapitala, što dalje proizvodi ekonomski rast. Primenljiv je u slabo razvijenim zemljama, u kojima postoji velika količina radne snage na tržištu, a mala količina raspoloživog kapitala. Ove zemlje nemaju dovoljan prihod po glavi stanovnika kako bi bile u mogućnosti da povećaju svoju stopu štednje. Samim tim, je i akumulacija kapitala manja, kao i investicije.

Najveća zamerka ovom modelu je to što se pretpostavlja da ekonomski rast održava punu zaposlenost. Ova pretpostavka je zasnovana na tome da je odnos uloženog rada i kapitala fiksiran. Model objašnjava ekonomske uspone i padove pretpostavkom da na investicije utiče isključivo autput. Danas se veruje da ova pretpostavka ne važi.

Kritičari modela tvrde da je u njemu izjednačen pojam ekonomskog rasta i pojam razvoja, dok je u stvarnosti ekonomski rast podskup razvoja.

3.2. Neoklasični model rasta

Kao što smo videli Domar – Harodov model je imao mnoge nedostatke. Sam Evsi Domar je 1957. godine izjavio da je smatrao da uvođenje faktora rada u funkciju proizvodnje ne bi u značajnoj meri unapredilo model, a da bi ga dodatno zakomplikovao. Robert Solou i Trevor Svon, 1956. godine, a zatim i Džejms Mid, 1961. godine, su tvrdili da autput ne treba da zavisi isključivo od kapitala. Tako je nastao neoklasični model rasta.

Pre njih nekoliko autora je takođe pokušalo da unapredi Domar – Harodov model. Džejms Tobin je 1955. godine predstavio model sličan neoklasičnom modelu, u kome se pretpostavljalo da proizvodnja pored kapitala, zavisi i od novca. Jan Tinberger je 1942. godine dao model identičan neoklasičnom modelu rasta. U nastavku se izlaže neoklasični model rasta, zasnovan na radu Takayama [1].

Čitava ekonomija se posmatra kao jedan sektor, koji proizvodi samo jedan proizvod Y, dat sledećom proizvodnom funkcijom

$$Y(t)=F\left(L(t),K(t)\right) \tag{11}$$

pri čemu je:

L - količina rada,

K - količina kapitala,
t - vreme.

Potrošnja je označena sa $X(t)$, a investicije sa $I(t)$, ravnoteža na tržištu gotovih proizvoda je data sa

$$Y(t)=X(t)+I(t). \tag{12}$$

Pretpostavlja se da je depresijacija kapitala (opadanje zaliha kapitala nastalo usled habanja ili zastarevanja opreme, postrojenja, tehnologije i dr.) u svakom trenutku jednaka i predstavlja konstantan udeo μ postojećeg kapitala u akcijama. Investicije $I(t)$ su jednake sa

$$\dot{K}(t)+\mu K(t)=I(t),\text{ gde je } K^{'}(t)=\frac{dK(t)}{dt} \tag{13}$$

Pretpostavimo da uložena količina rada raste sa konstantom n po jedinici vremena. Tada je:

$$L(t)=L(0)e^{nt}, \tag{14}$$

gde je $L(0)$ uložena količina radne snage u trenutku $t=0$.

Tako se dobijaju četiri jednačine, a postoji pet promenljivih, $L(t)$, $K(t)$, $Y(t)$, $I(t)$, $X(t)$. Potrebna je još jedna jednačina, kako bi model bio „zatvoren". Ta jednačina opisuje kako se ponaša potrošnja i data je izrazom:

$$X(t)=(1-s)\left(Y(t)-\mu K(t)\right), \tag{15}$$

gde je $s\in(0,1)-$ konstanta koja opisuje stopu štednje, a

$(1-s)-$ je, dakle, stopa potrošnje.

Ponašanje opisano jednačinom (15) se naziva proporcionalno štedno ponašanje.

Kako bi se analizirala svojstva ovog modela, potrebno je pre toga reći nešto o funkciji proizvodnje. Funkcija $F\subset R^2$ je pozitivna homogena, to jest, za svaki pozitivan realan broj α važi $F\left(\alpha L(t),\alpha K(t)\right)=\alpha F\left(L(t),K(t)\right)$. U nastavku se smatra da je vremenska promenljiva t fiksirana. Neka je funkcija F dva puta diferencijabilna, tada ukoliko za svako $L(t)$ i $K(t)$ iz domena važi $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$ i $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$, funkcija F je konkavna funkcija. Ovo znači da marginalna funkcija rada[3], MPP_L, opada kada L_t raste i da marginalna funkcija kapitala MPP_K opada kada K_t raste. Najpoznatiji primer ovakve funkcije je Kob-Daglasova funkcija $F(L,K) = L^{1-\alpha}K^{\alpha}$, $0<\alpha<1$.

Ako se pretpostavi da je $L > 0$, na osnovu osobine $F(\alpha L, \alpha K) = \alpha F(L,K)$, sledi da se jednačina (11) može zapisati u sledećem obliku

$$Y(t) = L(t)F\left(1, \frac{K(t)}{L(t)}\right) = L(t)f\left(k(t)\right), \text{ gde je } k(t) \equiv \frac{K(t)}{L(t)} \text{ i } f(k(t)) \equiv F(1, \frac{K(t)}{L(t)})$$

Drugim rečima,

$$y(t) = f\left(k(t)\right), \text{ gde je } y(t) \equiv \frac{Y(t)}{L(t)}. \tag{16}$$

U daljem radu se pretpostavlja da je $L > 0$ i f realna dva puta diferencijabilna funkcija definisana na $[0,\infty)$.

Naredne dve leme su veoma bitne za agregatnu teoriju rasta.

Lema 3.1: $MPP_L = f(k) - kf'(k)$ i $MPP_K = f'(k)$.

Dokaz: $MPP_L \equiv \frac{\partial F}{\partial L} = \frac{\partial\left[Lf(k)\right]}{\partial L} = f(k) + Lf'(k)\left(-\frac{K}{L^2}\right) = f(k) - kf'(k).$

$$MPP_K \equiv \frac{\partial F}{\partial K} = \frac{\partial\left[Lf(k)\right]}{\partial K} = Lf'(k)\frac{1}{L} = f'(k).$$

□

Lema 3.2: Neka je $L > 0,\ K > 0$. Tada je $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$ za svako $L > 0,\ K > 0$ ako i samo ako je $f''(k) < 0$ za svako $k > 0$ i $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$ za svako $L > 0,\ K > 0$ ako i samo ako je $f''(k) < 0$ za svako $k > 0$.

Dokaz: U dokazu ove leme koristi se lema 2.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} = \frac{\partial}{\partial L}\left[f(k) - kf'(k)\right] = f'(k)\left(\frac{-K}{L^2}\right) - \left(\frac{-K}{L^2}\right)f'(k) - kf''\left(-\frac{K}{L^2}\right) = k^2 f''(k)\frac{1}{L}.$$

[3] marginalna funkcija rada – promena proizvodnog učinka uzrokovana povećanjem inputa rada za jednu jedinicu.

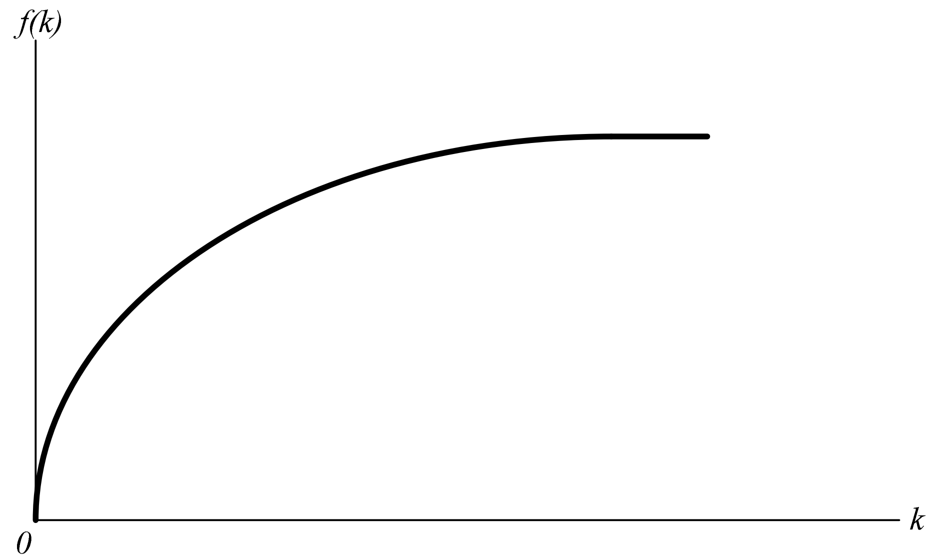
Iz ove jednakosti sledi prvi deo tvrđenje leme. Takođe je:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} = \frac{\partial}{\partial K}\left(f^{'}(k)\right) = f^{''}(k)\frac{1}{L},$$

odakle sledi drugi deo našeg tvrđenja.

□

Posledica leme 3.2 je sledeća: ako je $f^{'}(k) > 0$ za svako $k \geq 0$, onda je i marginalna funkcija kapitala pozitivna. Sa $f^{'}(0)$ i $f^{''}(0)$ označeni su, redom, desni prvi izvodi funkcija f i $f^{'}$ u tački 0. Na grafiku 4 je ilustrovana funkcija proizvodnje. Trebalo bi primetiti da su zadovoljeni uslovi: 1) $f^{''}(k) > 0$ za svako $k \geq 0$ i 2) $f^{''}(k) < 0$ za svako $k \geq 0$. Na grafiku se takođe vidi da je $f(0) = 0$.



Grafik 4: Ilustracija funkcije proizvodnje

U nastavku ćemo jednačine modela predstaviti u jednostavnijem obliku. Iz jednačina (11), (12) i (13) dobija se jednakost

$$F\left(L(t), K(t)\right) = X(t) + \left(K^{'}(t) + \mu K(t)\right).$$

Kada se obe strane jednakosti podele sa $L(t)$ (>0) i uvede oznaka $x(t) \equiv \frac{X(t)}{L(t)}$, dobija se

$$f\left(k(t)\right) = x(t) + \frac{K^{'}(t)}{L(t)} + \mu k(t). \tag{17}$$

Međutim, $\frac{K^{'}(t)}{L(t)} \neq k^{'}(t)$. Važi:

$$k^{'}(t) = \frac{K^{'}(t)L(t) - K(t)L^{'}(t)}{L^{2}(t)} = \frac{K^{'}(t)}{L(t)} - \frac{L^{'}(t)}{L(t)}k(t),$$

Pošto iz (14) sledi $\frac{L^{'}(t)}{L(t)} = \frac{\left(L_0 e^{nt}\right)^{'}}{L_0 e^{nt}} = \frac{nL_0 e^{nt}}{L_0 e^{nt}} = n$, dobija se

$$\frac{K^{'}(t)}{L(t)} = k^{'}(t) + nk(t).$$

Kombinacijom ove jednačine sa jednačinom (17), dobija se fundamentalna jednačina neo – klasičnog agregatnog modela rasta

$$k^{'}(t) = f\left(k(t)\right) - \lambda k(t) - x(t) \text{ gde je } \lambda \equiv n + \mu. \tag{18}$$

Definicija 3.1: Vremenska putanja $\left(k(t), x(t)\right)$, $t \in [0, \infty)$ se naziva izvodljiva[4] putanja rasta, ukoliko zadovoljava jednačinu (18) i $k(t) \geq 0,\ x(t) \geq 0$.

Primedba: Bilo koja putanja $\left(L(t),\ K(t),\ Y(t),\ I(t),\ X(t)\right)$ koja zadovoljava jednakosti (11), (12), (13) i (14) može se opisati putanjom $\left(k(t), x(t)\right)$ koja zadovoljava jednačinu (18), jer je jednačina (18) dobijena iz uslova (11), (12), (13) i (14). Takođe se od putanje $\left(k(t), x(t)\right)$ koja zadovoljava jednačinu (18) može doći do $\left(L(t),\ K(t),\ Y(t),\ I(t),\ X(t)\right)$ koja zadovoljava uslove (11), (12), (13) i (14).

Jasno postoje mnoge krive koje kreću od iste tačke $\left(k(0), x(0)\right)$. Ovo sledi iz činjenice da u okviru jednačine (18) postoje dve „nepoznate”. Kada bi se jednačina (15) podelila sa obe strane sa $L(t)$ i uvrstila u jednačinu (16), dobilo bi se

$$x(t) = (1-s)\left(f\left(k(t)\right) - \mu k(t)\right). \tag{19}$$

Kombinacijom jednačina (19) i (18) se dobija

$$k^{'}(t) = sf\left(k(t)\right) - \lambda^{*}k(t), \text{ gde je } \lambda^{*} \equiv n + s\mu. \tag{20}$$

[4] engleski: feasible.

Na osnovu dosadašnje analize, nameću se sledeće pretpostavke, poznate kao Inada uslovi:

A-1. $f'(k) > 0$ i $f''(k) < 0$ za svako $k \geq 0$.

A-2. $f(0) = 0$.

A-3. $f'(0)$ je „dovoljno" veliko, preciznije, $f'(0) > \frac{\lambda^*}{s}$.

A-4. $f'(\infty)$ je „dovoljno" malo, tj. $f'(\infty) < \frac{\lambda^*}{s}$.

A-5. $0 \leq s \leq 1$.

Pretpostavke A-3 i A-4 se često mogu zapisati i u jačem obliku:

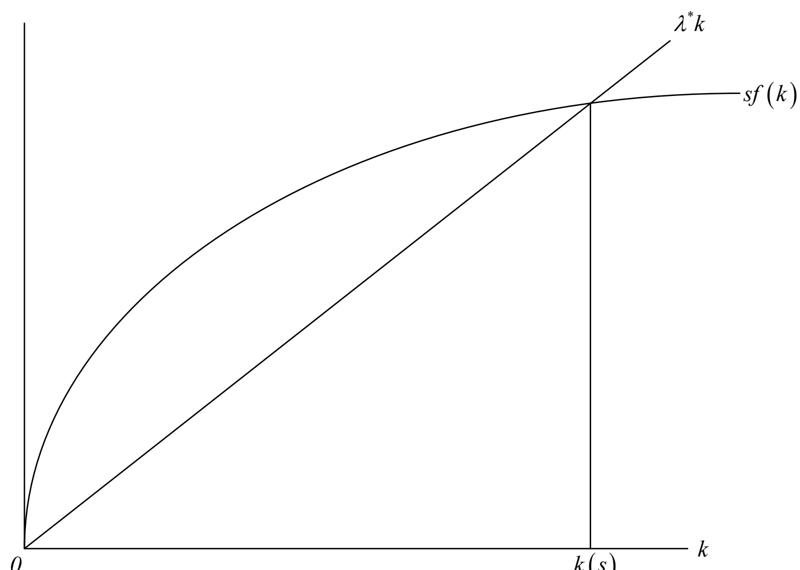
A-3'. $f'(0) = \infty$.

A-4'. $f'(\infty) = 0$.

U nastavku sledi Solouva teorema.

Teorema 3.1 (Solouva teorema): Ukoliko važe pretpostavke (A-1)-(A-5), onda postoji putanja $(k(s), x(s))$, koja je jedinstvena, pri čemu su $k(s)$ i $x(s)$ pozitivne konstante, takve da bilo koji izvodljiv rast sa proporcionalnom štednjom konvergira monotono ($k(t) \to k(s)$ i $x(t) \to x(s)$) kada $t \to \infty$, pri čemu je $k(0) > 0$ početna vrednost, a $k(s)$ i $x(s)$ se računaju preko $sf(k(s)) = \lambda^* k(s)$ i $x(s) \equiv (1-s)\big(f(k(s)) - \mu k(s)\big)$.

Dokaz: Situacija u kojoj važe pretpostavke (A1)-(A5) je ilustrovana na grafiku 5. Važno je primetiti da ove pretpostavke garantuju jedinstvenost preseka između prave $\lambda^* k(s)$ i krive $sf(k(s))$ u pozitivnim vrednostima k i $k(s)$, što se vidi na grafiku 5, a time je dokazano postojanje i jedinstvenost krive $(k(s), x(s))$, $k(s) > 0$ i $x(s) > 0$. Ostatak dokaza je, takođe, jednostavan.



Grafik 5: Ilustracija dokaza Solove teoreme

Kao što se vidi sa grafika 5, $k_t > k_s$ u zavisnosti od toga da li je $sf(k_t) < \lambda^* k_t$. Takođe, važi da je $k_t < k_s$, ako je $sf(k_t) > \lambda^* k_t$ i $k_t = k_s$ za $sf(k_t) = \lambda^* k_t$. Jednačina (20) kaže da je $k_t^{'} < 0$, ako je $sf(k_t) < \lambda^* k_t$. Slično kao malopre, $k_t^{'} > 0$, za $sf(k_t) > \lambda^* k_t$ i $k_t^{'} = 0$ za $sf(k_t) = \lambda^* k_t$. Sada se može zaključiti da znak od $k_t^{'}$ zavisi od odnosa između k_t i k_s. Drugim rečima, ako je $k_t > k_s$, onda je $k_t^{'} < 0$, tj. k_t opada vremenom. Ukoliko je $k_t < k_s$, onda je $k_t^{'} > 0$ i k_t vremenom raste. Kada je $k_t = k_s$, tada je $k_t^{'} = 0$.

□

Primedba: Neka je $k(0)$ količina kapitala po radniku u trenutku $t = 0$, postavlja se pitanje koliko vremena je potrebno da bi se stiglo do uložene vrednosti kapitala k^* po radniku?

$$t(k^*) \equiv \int_{k(0)}^{k^*} \frac{dt}{dk} dk = \int_{k(0)}^{k^*} \frac{1}{\dot{k}} dk = \int_{k(0)}^{k^*} \frac{1}{sf(k) - \lambda^* k} dk,$$

$$sf(k) - \lambda^* k = \begin{cases} >0, \text{ ako je } k<k(s), \\ <0, \text{ ako je } k>k(s). \end{cases}$$

Teorema 3.1. govori o tome da k monotono konvergira ka $k(s)$. Dakle, $t(k^*)$ ima smisla jedino kada je k^* takvo da važi $k(0) \le k^* \le k(s)$ ili $k(s) \le k^* \le k(0)$.

Postavlja se pitanje: Koja vremena je potrebno da bi se stiglo do $k(s)$ kada je $k(0) \ne k(s)$? Ovo se može rešiti razmatranjem dva slučaja $k(0) < k(s)$ ili $k(0) > k(s)$. U oba slučaja važi

$$\lim_{k^* \to k(s)} t(k^*) = \infty$$

pošto $sf(k^*) \to \lambda^* k^*$ kada je $k^* \to k(s)$. Drugim rečima, potrebna je beskonačna količina vremena da bi se stiglo do $(k(s), x(s))$.

Primedba: Kao što smo primetili u dokazu uslovi (A-1)-(A-5) su garantovali postojanje i jedinstvenost pozitivnog $k(s)$, a garantuju i postojanje i jedinstvenost $(k(s), x(s))$ kada je $k(s) > 0$ i $x(s) < 0$. Kriva $(k(s), x(s))$, definisana u teoremi 3.1, se naziva još i Solouvom krivom. Može se primetiti da u tom slučaju rad $L(t)$ i kapital $K(t)$ imaju istu stopu rasta, n (jer je $\frac{K(t)}{L(t)} = k(s) - const.$ i $Y(t)$ i $X(t)$ takođe rastu sa stopom n (zato što su $f(k(s))$ i $(1-s)f(k(s))$ konstantne). Sa istom stopom takođe rastu investicije $I(t)$ što se vidi iz jednačine (12). Dakle, gornja teorema govori da svaki od parametara $(L(t), K(t), Y(t), I(t), X(t))$ raste sa istom stopom, bez obzira na početnu vrednost.

Primedba: Ako je $F(L,K)=L^{1-\alpha}K^{\alpha}$, $0<\alpha<1$, na primer, onda je $f(k)=k^{\alpha}$. Teorema Solou zahteva da je $sf(k(s))=\lambda^{*}k(s)$ ili $k_s=\left(\frac{s}{\lambda^{*}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Osnovna pretpostavka Solouve teoreme je da potrošnja u datom periodu zavisi od prihoda ostvarenih u prethodnom. Alternativna pretpostavka o ponašanju kupaca je ona koju su usvojili klasični ekonomisti, a to je da radnici nemaju ušteđevinu, a da je kapitalisti čuvaju kako bi povećali prihod. Ovakvo ponašanje se naziva proporcionalno štedno ponašanje i opisano je jednačinom (15). Prihod kapitaliste se obeležava sa $(MPP_K)K$ i prema lemi 3.1 je jednak sa $f^{'}(k)K$. Neka je sa $\overline{s}$ označena sklonost kapitaliste ka štednji, pri čemu je $0<\overline{s}<1$, sledeća jednačina zamenjuje jednačinu (15)

$$\overline{s}f^{'}(k(t))K(t)=Y(t)-X(t) \qquad (21)$$

Može se primetiti da X sadrži i potrošnju kapitalista kao i potrošnju radnika, zato je:

$$X(t)=(1-\overline{s})f^{'}(k(t))K(t)+\left[f(k(t))-k(t)f^{'}(k(t))\right]L(t). \qquad (22)$$

Lako se može proveriti da li $X(t)$ zadovoljava jednačinu (21) i $Y(t)=L(t)f(k(t))$.

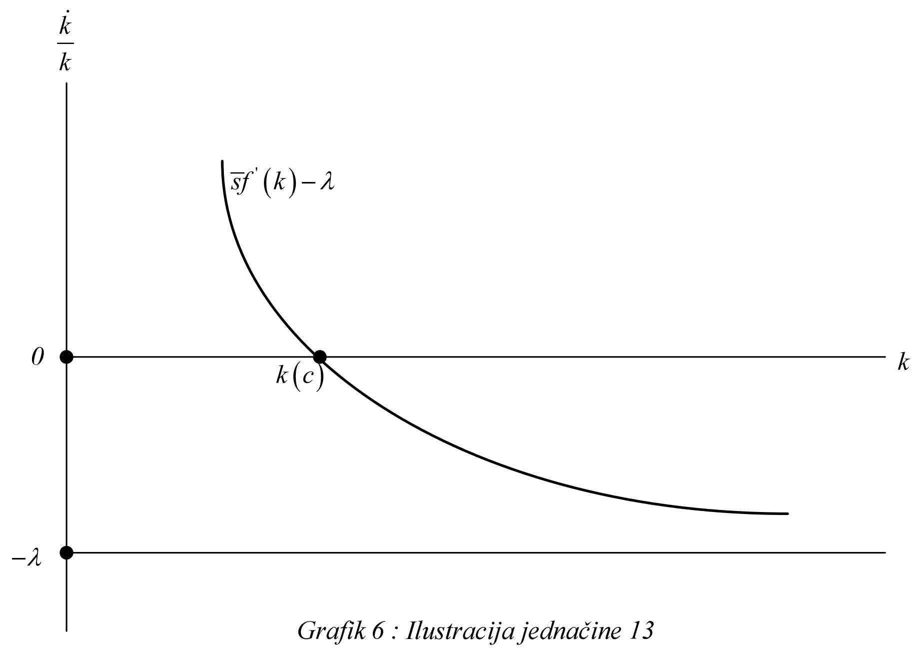
Ukoliko se obe strane jednačine (21) podele sa $L(t)$, dobija se:

$$\overline{s}f^{'}(k(t))k(t)=f(k(t))-x(t).$$

Kombinovanjem ove jednačine sa jednačinom (18), dobija se za $k(t)>0$:

$$\frac{k^{'}(t)}{k(t)}=\overline{s}f^{'}(k(t))-\lambda \text{ gde je } \lambda=n+\mu. \qquad (23)$$

Pretpostavke (A-1), (A-3’) i (A-4’) su date na grafiku 6 i sa njega se vidi da postoji jedinstveno $k(c)$ takvo da je $\overline{s}f^{'}(k(c))=\lambda$ i $k(c)>0$.



Grafik 6 : Ilustracija jednačine 13

Štaviše $k(t)$ se veoma razlikuje od putanje na grafiku 6. Dakle, lako se može zaključiti da je $k(t)>0$, ukoliko je $k(t)<k(c)$, kao i da je $k(t)<0$ za $k(t)>k(c)$, tj. ukoliko je $k(t)=k(c)$ onda je $k(t)=0$. Kako se $k(t)$ približava $k(c)$ i $x(t)$ ka $x(c)$, lako se može doći do jednakosti (22),

$$x(c)=(1-\overline{s})f^{'}(k(c))k(c)+\left[f(k(c))-k(c)f^{'}(k(c))\right]$$

ili

$$x(c)=f(k(c))-\overline{s}f^{'}(k(c))k(c). \qquad (24)$$

Teorema 3.2: Ukoliko važe pretpostavke (A-1), (A-3') i (A-4') uz proporcionalno štedno ponašanje, opisano jednačinom (15), postoji jedinstvena dopustiva kriva $(k(c),x(c))$, $k(c)>0$ i $x(c)>0$, takva da joj se bilo koja izvodljiva kriva $(k(t),x(t))$ približava monotono kada $t\to\infty$ bez obzira na početnu vrednost $k(0)$, pri čemu su $k(c)$ i $x(c)$ određeni, redom iz $\overline{s}f^{'}(k(c))=\lambda$ i jednačine (24).

Primedba: Može se reći da je $(k(c),x(c))$ klasična kriva. Prethodna teorema obezbeđuje opštu stabilnost klasične krive koja je izbalansirana sa rastom $(L(t),K(t),Y(t),X(t),I(t))$. Takođe se može pokazati da je vreme za koje se stiže do klasične krive beskonačno. Dakle, kao i Solouva teorema i gornja teorema govori o asimptotskoj stabilnosti klasične krive. Može se primetiti da gornji metod može biti iskorišćen kako bi se dokazala Solouva teorema.

Definicija 3.2: Neo-klasični dopustiva kriva $(k(t), x(t))$ se naziva putanja zlatnog doba[5] ako su $k(t)$ i $x(t)$ konstantni tokom vremena.

Pošto su $k(t)$ i $x(t)$ konstantni, mogu se označavati sa k i x. Dakle od jednačine (18) dobija se jednačina

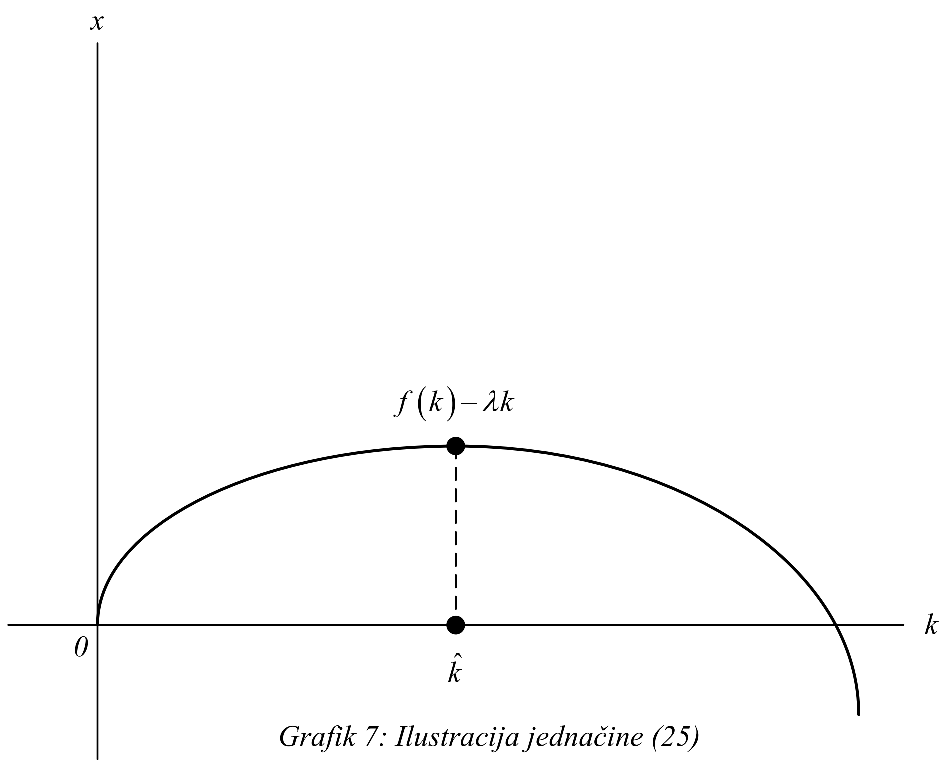
$$x = f(k) - \lambda k \tag{25}$$

Pod pretpostavkom da važi (A-1), (A-2), (A-3') i (A-4') položaj $(k, x)-$ova koji zadovoljavaju jednačinu (25) je dat na grafiku 7. Sa grafika je jasno da postoji jedinstvena pozitivna vrednost k koja maksimizira x tako da važi (25). Neka je označena sa $\hat{k}$. Ovo se formalno dobija maksimiziranjem $(f(k) - \lambda k)$ po k. Uslov prvog reda je

$$\frac{d}{dk}(f(k) - \lambda k) = 0$$

ili

$$f^{'}(k) = \lambda. \tag{26}$$



Grafik 7: Ilustracija jednačine (25)

Prema uslovu (A-1), postoji samo jedna vrednost k koja zadovoljava jednačinu (26) i to je $\hat{k}$. Može se primetiti da (A-1) garantuje strogu konkavnost funkcije f, a samim tim i $(f(k) - \lambda k)$. Dakle, jednačina (26) daje potreban i dovoljan uslova za postojanje jedinstvenog globalnog maksimuma, što se moglo primetiti i samo posmatrajući grafik 7. Sada sledi veoma važan koncept.

[5] engleski: golden age path.

Definicija 3.3: Putanja zlatnog doba koja maksimizira per kapita potrošnju x u svakom trenutku se naziva putanja zlatnog pravila[6].

Gornja razmatranja nam daju sledeću teoremu.

Teorema 3.3: Ako važe pretpostavke (A-1), (A-2), (A-3') i (A-4') tada postoji jedinstveno putanja zlatnog pravila, $\left(\hat{k}, \hat{x}\right)$, pri čemu su $\hat{k}$ i $\hat{x}$, redom definisani sa $f^{'}\left(\hat{k}\right) = \lambda$ i $\hat{x} \equiv f\left(\hat{k}\right) - \lambda \hat{k}$.

Primedba: U putanja zlatnog pravila marginalna produktivnost kapitala $f^{'}\left(\hat{k}\right)$ je jednaka procentu rasta populacije (n) plus stopa depresijacije (μ). Gornji problem je ustanovljen od strane velikog broja ekonomista.

Primedba: Može se primetiti da uslov (A-3') u teoremi može da zameni uslov

A-3''. $f^{'}\left(0\right) > \lambda$.

Takođe (A-4') može biti zamenjen sa

A-4''. $f^{'}\left(\infty\right) < \lambda$.

Primedba: Bitno je zapamtiti da putanja zlatnog pravila maksimizira per kapita potrošnju u skupu svih putanja zlatnog doba. Ovo zanemaruje istorijski datu vrednost k_0 (ili L_0 i K_0). Drugim rečima, nije zagarantovano da istorijski dato k_0 se nalazi na putanji zlatnog pravila. Ovo ozbiljno uzdrmava korisnost ovog koncepta. Međutim, u sledećem poglavlju će se videti da se možemo uveriti da dato k_0 konvergira ka putanji zlatnog pravila kada $t \to \infty$.

3.3. Struktura problema optimalnog rasta agregatne ekonomije

S obzirom da je tema master rada primena varijacionog računa na makroekonomiju, upoznaćemo se sa pojmom makroekonomije. Makroekonomija je nauka o agregatnom ponašanju privrede kao celine. Agregatni trendovi nisu ništa drugo nego rezultat velikog broja individualnih odluka pojedinačnih firmi o angažovanju kapitala, o novoj zaposlenosti, o kretanju cena, ponašanju tržišta, o povezanosti u nove ekonomske celine. Makroekonomija se, dakle, bavi sveukupnim ekonomskim tendencijama, a ne pojedinačnim tendencijama razvitka određenih firmi ili regiona.

[6] engleski: golden rule path.

Reč makroekonomija potiče od grčke reči „makro” što znači veliko, tj. makroekonomija izučava opštu ekonomiju. Ona objašnjava ekonomsku stvarnost procesom simplifikacije, drugim rečima ignorišu se detaljne razlike među milionima osoba, domaćinstava, preduzeća ili proizvoda, odnosno ukazuje na ono što je ključno i reprezentativno za celinu.

3.3.1 Model optimalnog rasta agregatne ekonomije

U prethodnim poglavljima se diskutovalo o agregatnom modelu ekonomskog rasta. Model koji se posmatrao može biti opisan sledećim jednačinama

$$Y(t)=F\left(L(t),K(t)\right), \tag{27}$$

$$K^{'}(t)+\mu K(t)=Y(t)-X(t), \tag{28}$$

$$\frac{L^{'}(t)}{L(t)}=n. \tag{29}$$

Pretpostavlja se da privreda proizvodi samo jedan gotov proizvod Y, koristeći količinu rada L i kapitala K, dok je X ukupna količina potrošenih sredstava. Stopa depresijacije u vremenu t je označena sa μ. U prethodnom delu dodavanje jednačina koje opisuju potrošnju i početnih uslova, poslužilo je kako bi se „zatvorio” model i potpuno opisala svaka promenljiva.

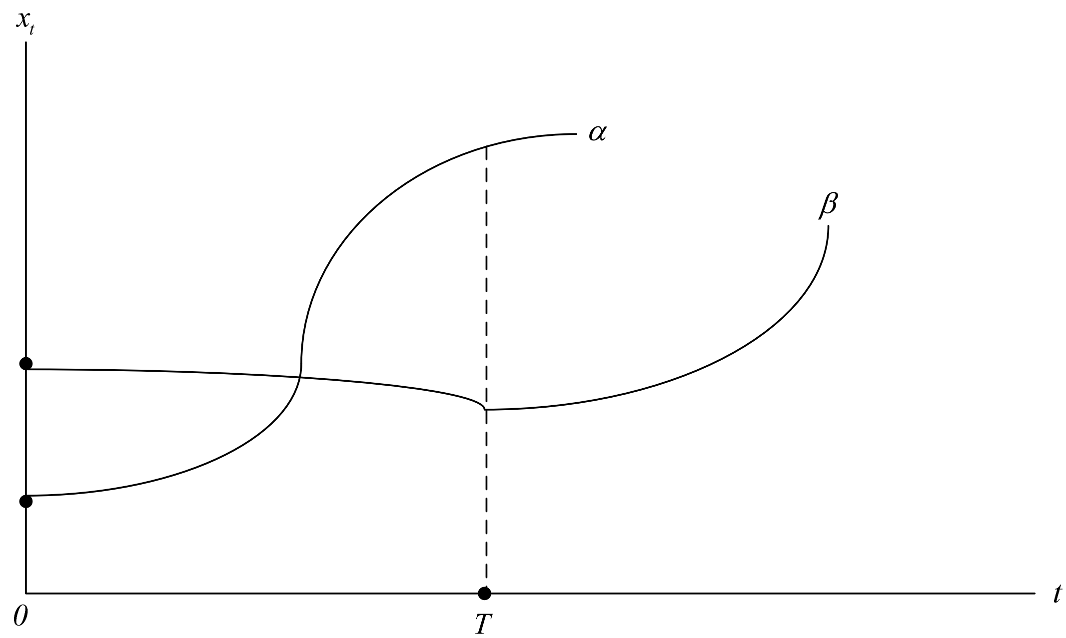
U ovom delu postavlja se pitanje: Kolika potrošnja je potrebna u datom vremenskom trenutku kako bi se maksimizirala funkcija cilja pri čemu bi bile zadovoljene gornje tri jednačine i granični uslovi? Pitanje koje se nameće je pitanje izbora. Ako u sadašnjosti više trošimo, onda ćemo u budućnosti imati manje ušteđenih zaliha, tj. ukoliko u sadašnjosti više trošimo u budućnosti ćemo manje biti zadovoljni. Pitanje je koja potrošnja je optimalna? Pretpostavlja se da postoje samo sadašnjost i budućnost. U stvarnosti postoji više vremenskih perioda.

Neka je uzeta vremenska putanja potrošnje na neprekidnom vremenskom intervalu. Sa $x(t)\equiv\dfrac{X(t)}{L(t)}$ se označava per kapita potrošnja ekonomije. Funkcija cilja je data sa

$$I\equiv\int_0^T x(t)\,dt, \tag{30}$$

gde je T planirani vremenski horizont. U ovom modelu se pretpostavlja da društvo želi da maksimizuje ukupnu per kapita potrošnju tokom vremena, pri čemu su zadovoljeni dopustivi uslovi dati u jednačinama $(27)-(29)$. Na grafiku 8 su prikazana dva tipa tokova potrošnje. Na krivoj α je prikazan „štedljiv” tip ekonomije, tj. onaj koji u sadašnjosti ili bliskoj budućnosti manje troši, dok β kriva prikazuje „manje štedljiv” tip. Ono što je problem jeste kako uporediti oblast ispod α krive do T linije sa oblašću ispod β krive do T linije. Ako početni period obuhvata veću površinu nego kasniji, kažemo da je početni period bolji od kasnijeg. Krive α i β nisu crtane proizvoljno, nego moraju da zadovolje jednačine (27), (28) i (29). Optimalan pristup je onaj koji obezbeđuje najveću površinu ispod krive do prave $t = T$.

Trebalo bi primetiti da optimalno rešenje zavisi od dužine vremenskog horizonta T. Ako je planirani horizont T duži, tada će štedljiv program biti bolji od neštedljivog. Međutim, ako je vremenski horizont T kraći, tada štedljiv program neće biti optimalan. Da li bi vremenski horizont trebao da bude 5, 10 godina ili duži? To je već malo komplikovanije pitanje. Šte se dešava posle vremena T? Ako se dozvoli da akumulirani kapital bude iskorišten, onda optimalni program mora biti takav da zalihe ne postoje posle vremena T. Ukoliko ne dozvolimo sebi da pojedemo čitav akumulirani kapital, i dalje ostaje jedan problem. Kada odredimo dužinu vremenskog intervala T, automatski se ograđujemo od onoga što se dešava posle T i takvo proizvoljno T je izabrano bez a priori kriterijuma. Među ekonomistima postoji dogovor da se za vremensti interval uzima $T = \infty$.



Grafik 8: Ilustarcija problema optimalne potrošnje

Međutim, teško je objasniti šta je to beskonačan vremenski horizont i da li uopšte postoji. Uz to, uvek postoji i problem neodređenosti. Na primer, kako da znamo da će naša tehnologija biti ista za par stotina ili hiljada godina. Jedini odgovor je da optimalno rešenje neće biti posebno osetljivo na to šta će se desiti za nekoliko hiljada godina, ali je bitno da utiče na blisku budućnost. Međutim, u izvesnim slučajevima, beskonačan horizont može bolje opisati blisku budućnost nego daleku.

Toliko o dužini vremenskog intervala T. Sledeći cilj je pronaći funkciju cilja koja je prihvatljivija za ovaj problem od one opisane u jednačini (30). Jedna od mogućnosti je

$$J_T \equiv \int_0^T u\left(x(t)\right)e^{-\rho t}dt \tag{31}$$

gde je u funkcija korisnosti povezana sa „reprezentativnom” individuom u društvu, a ρ je faktor vremenskog popusta. U elementarnoj ekonomiji se često raspravlja da li je oblik funkcije korisnosti $u\left(x(t)\right)=x(t)$ nerealan. Umesto ove funkcije korisnosti, smatraće se da „marginalna korisnost” opada sa povećanjem potrošnje. Drugim rečima, pretpostavlja se da je funkcija u definisana na intervalu $[0,\infty)$ dva puta diferencijabilna i da važi

A-6. $u'\left(x(t)\right)>0$ i $u''\left(x(t)\right)<0$ za svako $x(t)\geq 0$.

Iz ovog uslova, sledi da je $u(x_t)$ striktno monotona i striktno konkavna funkcija.

Određivanje faktora ρ nije jednostavno. Frenk Remzi, koji se prvi sistematski bavio problemom optimalne štednje, smatrao je da bi ρ trebalo biti jednako nuli. S druge strane Kupmans, Dajmond i Vilijamson u svojim delima otkrivaju da ne postoji funkcija korisnosti za sve putanja potrošnje, koja istovremeno prelazi vremensku neutralnost i zadovoljava druge razumne postulate vezane za funkciju korisnosti. Do danas nije ustanovljeno koja je najprihvatljivija vrednost faktora ρ, pa se pretpostavlja da je ρ nenegativna konstanta.

Za beskonačan vremenski horizont, jednačina (31) se može zapisati u sledećem obliku:

$$J \equiv \int_0^\infty u\left(x(t)\right)e^{-\rho t}dt. \tag{32}$$

Sada se nameće problem pronalaženja vremenske putanje $x(t)$ koja maksimizira J i zadovoljava uslove (27), (28) i (29) sa konstantnim odnosom između kapitala i zaliha $k(0)$ pri čemu su sve promenljive nenegativne.

Sledeće pitanje koje se nameće je pitanje konvergencije funkcije J. Ukoliko funkcija J nije konvergentna, gornja formula postaje besmislena. Pitanje konvergencije je posebno važno za $\rho=0$ i rešava se konstruisanjem putanje $\hat{u}$ i formulisanjem sledećeg problema maksimizacije

$$J_R \equiv \int_0^\infty \left(u\left(x(t)\right)-\hat{u}\right)dt. \tag{33}$$

Ako je funkcija korisnosti u monotona, funkcije J i J_R su ograničene sa donje strane za optimalnu putanju. Pretpostavlja se da je ekonomija produktivna u tom smislu da dozvoljava striktno pozitivnu putanju potrošnje, počevši od $k(0)$. Kada je $\rho>0$, konvergencija funkcije J je zagarantovana, ako je funkcija u ograničena sa gornje strane.

Problem optimalne štednje prvi je rešio Frenk Remzi 1928. Zatim je ovaj problem bio skoro zaboravljen, verovatno usled Velike depresije i rata, da bi 50-tih godina ponovo postao aktuelan i rešen od strane Kupmansa i Kasa početkom šezdesetih godina prošlog veka.

Dati problem se može pojednostaviti, ukoliko se na njega primeni varijacioni račun. Za narednu analizu „fazni dijagram" će biti od velike koristi. Putanje koje ne zadovoljavaju Ojlerov uslov su neodgovarajuće i eliminišu se iz skupa izvodljivih putanja koje zadovoljavaju Ojlerov uslov. Kako bi se dobile izvodljive putanje koje zadovoljavaju Ojlerov uslov, koristi se elementarna teorija varijacionog računa.

Procedura pojednostavljivanja jednačina (27), (28) i (29) je već opisana, pa je dovoljno reći da se za $L(t)>0$, ove jednačine svode na:

$$k(t)=f\left(k(t)\right)-\lambda k(t)-x(t), \tag{34}$$

gde je $k(t)\equiv\dfrac{K(t)}{L(t)}$, $x(t)\equiv\dfrac{X(t)}{L(t)}$, $f\left(k(t)\right)\equiv\dfrac{F\left(L(t),K(t)\right)}{L(t)}$. Putanja koja zadovoljava datu jednakost naziva se izvodljiva putanja, a ukoliko zadovoljava proizvoljnu početnu vrednost $k(0)$ i krajnju vrednost $k(T)$ onda se naziva dostižnom putanjom. Kada $T\to\infty$, krajnja vrednost $k(T)$ ne postoji.

Tada je problem sledeći:

$$\max\ J_T\equiv\int_0^T u\left(x(t)\right)e^{-\rho t}dt,$$

$$k(t)=f\left(k(t)\right)-\lambda k(t)-x(t)\ \text{ i }\ k(t)\geq 0,\ x(t)\geq 0\ \text{ za svako } t,\ k(0)>0.$$

Promenljiva $x(t)$ se izražava iz prethodne jednačine, $x(t)=f\left(k(t)\right)-\lambda k(t)-k^{'}(t)$, i prethodni problem se može svesti na sledeći:

$$\max\ \int_0^T u[f\left(x(0)\right)-\lambda k(t)-k^{'}(t)]e^{-\rho t}dt,$$

$$k(t)\geq 0,\ x(t)\geq 0\ \text{ za svako } t,\ k(0)>0.$$

Ukoliko bi se ograničenja $k(t)\geq 0,\ x(t)\geq 0$ zanemarila, bilo bi moguće odmah primeniti Ojlerov uslov kako bi se izabralo $x(t)$ koje maksimizira integral J_T, tj. naš problem bi bilo moguće formulisati kao problem bez ograničenja. Funkcija cilja bi u tom slučaju bila

$$\Phi\left(t,k(t),k^{'}(t)\right)\equiv u\left(f\left(k(t)\right)-\lambda k(t)-k^{'}(t)\right)e^{-\rho t} \tag{35}$$

a iz Ojlerovog uslova sledi

$$\frac{\partial\Phi}{\partial k(t)}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial k^{'}(t)}\right), \tag{36}$$

gde su parcijalni izvodi traženi za optimalno $k^{'}(t)$. Jednakost (36) daje potreban uslov da $k(t)$ bude optimalno. Koristeći jednačine (35) i (36), dobija se potreban uslov za optimalno rešenje:

$$x^{'}(t) = -\frac{u^{'}}{u^{''}}\left(f^{'}\left(k(t)\right) - (\lambda + \rho)\right). \tag{37}$$

Ovaj uslov je i dovoljan za jedinstveni optimum, ukoliko je funkcija Φ strogo konkavna po $k(t)$ i $k^{'}(t)$ na konačnom vremenskom intervalu.

Dobijena je jednačina (34) koja daje dovoljan uslov i jednačina (37) koja daje potreban uslov optimalnosti. Kriva $(k(t), x(t))$ koja zadovoljava obe jednačine se naziva dopustiva Ojlerova kriva. Uz granične uslove $k(0)$ i $k(T)$, moguće je doći do optimalnog rešenja.

Konačno, trebalo bi spomenuti dopustiv uslov (34), posebno oblik funkcije $f\left(k(t)\right)$. U neo-klasičnom modelu se pretpostavljalo da je f strogo konkavna funkcija, tj. da je $f^{'}\left(k(t)\right) > 0$ i $f^{''}\left(k(t)\right) < 0$ za svako k_t. Međutim, postoji još jedan oblik funkcije proizvodnje kod koga se pretpostavlja da je odnos između kapitala i autputa konstantan. U ovom slučaju funkcija $F\left(L(t), K(t)\right)$ ima sledeći oblik:

$$Y(t) = \frac{1}{\sigma}K(t), \tag{38}$$

gde je σ konstanta koja označava odnos između kapitala i autputa. U ovom slučaju funkcija proizvodnje ne mora zavisiti od količine rada $L(t)$. Ukoliko se obe strane jednakosti (38) podele sa $L(t)$, dobija se

$$y(t) = \frac{1}{\sigma}k(t), \text{ gde je } y(t) \equiv \frac{Y(t)}{L(t)}. \tag{39}$$

Drugim rečima, ukoliko je $f\left(k(t)\right) = \frac{1}{\sigma}k(t)$, radi se o specijalnom slučaju funkcije proizvodnje koja je gore posmatrana. Uslov (34) se može zapisati kao

$$k^{'}(t) = \frac{1}{\sigma}[1 - \sigma\lambda]k(t) - x(t). \tag{40}$$

Šta se dešava sa krivom $(k(t), x(t))$ koja zadovoljava jednačine (34) i (37) uz početni uslov $k(0)$, gde je vremenski interval T dovoljno dugačak? U zavisnosti od početnih uslova, postoje tri moguća tipa krivih. Za dovoljno dugačak interval T dva tipa će stvarati probleme, tj. spadaće u klasu nezadovoljavajućih krivih. Krive iz treće klase ne stvaraju pomenute probleme i nazivaju se zadovoljavajućim krivama. Biće pokazano da zadovoljavajuće krive koje zadovoljavaju i jednačinu (34) i jednačinu (37) su takve da se monotono približavaju „modifikovanoj krivoj koja zadovoljava zlatno pravilo” bez obzira na početno $k(0)$. Može se pokazati da integral J (za $\rho > 0$) ili J_R (za $\rho = 0$) konvergira ka takvoj krivi.

3.3.2. *Konstantan odnos kapitala i autputa*

Tokom 50-tih i 60-tih godina prošlog veka, neki naučnici su razmatrali model u kome postoji konstantan odnos kapitala i autputa, funkcija korisnosti u ima specijalan oblik i vremenski interval je konačan. Međutim, ovde će biti pokazano da dolazi do problema, ukoliko je vremenski interval beskonačan, tj. da u slučaju konstantnog kapitala u mnogim slučajevima ne postoji optimalno rešenje.

Ojlerova jednačina u ovom slučaju ima sledeći oblik:

$$x'(t) = -\frac{u'}{u''}\left(\frac{1}{\sigma} - (\lambda+\rho)\right). \tag{41}$$

Pošto je funkcija $x(t) = f(k(t)) - \lambda k(t) - k'(t)$, pri čemu je $k'(t) = \left(\frac{1}{\sigma} - \sigma\lambda\right)k(t) - x(t)$, linearna funkcija po $k(t)$ i $k'(t)$, a funkcija u je strogo konkavna funkcija, Ojlerov uslov (41) je potreban i dovoljan za globalni optimum (pod pretpostavkom da je vremenski interval T konačan). Dopustivo optimalno rešenje je ono koje zadovoljava jednačine (40) i (41) uz uslove $k(t) \geq 0$ i $x(t) \geq 0$. Uslov $x(t) \geq 0$ bi mogao biti zamenjen uslovom $x(t) \geq \overline{x}$, gde $\overline{x}$ označava nivo dovoljne potrošnje.

Pretpostaviće se da je nivo depresijacije kapitala $\mu = 0$, kao i da važi $\rho = 0$, $n = 0$, a samim tim i $\lambda = 0$. Drugim rečima razmatra se slučaj za koji važi pretpostavka:

$$1 - \sigma(\lambda+\rho) > 0$$

Analiza slučaja u kome je $1 - \sigma(\lambda+\rho) < 0$ će biti izostavljena, jedino što se može primetiti jeste da iz jednačine (41) sledi konstantno smanjenje potrošnje po potrošaču. Takođe se može primetiti da jednakost $1 - \sigma(\lambda+\rho) > 0$ implicira $1 - \sigma\lambda > 0$, kao i da parametar ρ ne sme biti prevelik i pretpostavka $\rho = 0$ je sasvim realna. Ako je $1 - \sigma\lambda \leq 0$, tada iz jednakosti (40), sledi da se mora zaustaviti povećenje kapitala i ekonomija mora nestati za dovoljno veliko T u cilju očuvanja pozitivnog nivoa potrošnje. Inače, per kapita potrošnja mora biti jednaka nuli i svaki član društva će bukvalno umreti od gladi. Iz tog razloga nam slučaj $1 - \sigma\lambda \leq 0$ nije interesantan.

Pretpostavlja se da funkcija korisnosti, koja zadovoljava $u'(x(t)) > 0$ i $u''(x(t)) < 0$ za svako $x(t) > \overline{x}$ ima sledeći oblik:

$$u'(x(t)) = (x(t) - \overline{x})^{-\nu}, \quad \nu > 0. \tag{42}$$

Za $\nu = 1$, $u^{'}\left(x\left(t\right)\right) = \dfrac{1}{x\left(t\right) - \overline{x}}$, kada se ovaj izraz integrali, dobija se $u\left(x\left(t\right)\right) = \log\left(x\left(t\right) - \overline{x}\right)$

i

$$u\left(x\left(t\right)\right) = \frac{1}{1-\nu}\left(x\left(t\right) - \overline{x}\right)^{1-\nu}, \text{ ako je } 0 < \nu \neq 1. \qquad (43)$$

U ovom slučaju je $x\left(t\right) > \overline{x}$, ako je $\nu = 1$ i $x\left(t\right) \geq \overline{x}$ za $0 < \nu < 1$. U jednačinama (42) i (43), $\overline{x}$ predstavlja nivo potrošnje dovoljan za preživljavanje. Ako se pretpostavi da je $u\left(x\right) > 0$ za neku vrednost $x > \overline{x}$, onda parametar ν ne može biti veći od 1.

Za ovu funkciju korisnosti, Ojlerova jednačina (41) se može zapisati u sledećem obliku:

$$x^{'}\left(t\right) = \alpha\left(x\left(t\right) - \overline{x}\right), \text{ gde je } \alpha \equiv \frac{1}{\sigma\nu}\left(1 - \sigma\left(\lambda + \rho\right)\right) > 0. \qquad (44)$$

Rešenje ove diferencijalne jednačine je

$$x\left(t\right) = \overline{x} + Ae^{t} \qquad (45)$$

pri čemu iz nejednakosti $1 - \sigma\left(\lambda + \rho\right) > 0$ sledi da je $\alpha > 0$, dok je A konstanta koja se dobija iz graničnih uslova. Jednačina (40) se može zapisati u sledećem obliku:

$$k^{'}\left(t\right) - \beta k\left(t\right) = -\left(\overline{x} - Ae^{\alpha t}\right), \text{ gde je } \beta = \frac{1}{\sigma}\left(1 - \sigma\lambda\right) > 0. \qquad (46)$$

Rešenje ove jednostavne linearne diferencijalne jednačine je

$$k\left(t\right) = \frac{\overline{x}}{\beta} + \left(B - At\right)e^{\beta t}, \text{ ako je } \alpha = \beta, \qquad (47)$$

odnosno

$$k\left(t\right) = \frac{\overline{x}}{\beta} + \frac{A}{\beta - \alpha}e^{\alpha t} + Be^{\beta t}, \text{ ako je } \alpha \neq \beta. \qquad (48)$$

Konstante A i B se dobijaju iz graničnih uslova. Jedan od tih uslova je početna vrednost za k.

Bez gubitka opštosti, pretpostavlja se dalje da je $\overline{x} = 0$. Moguće je $x\left(t\right)$ i $k\left(t\right)$ zameniti sa $x\left(t\right) - \overline{x}$ i $k\left(t\right) - \dfrac{\overline{x}}{\beta}$, redom. Tada jednačine (45), (47) i (48) imaju sledeći oblik

$$x\left(t\right) = Ae^{\alpha t}, \text{ bez obzira na veličinu } \alpha \text{ i } \beta, \qquad (49)$$

odnosno

$$k(t) = (B - At)e^{\beta t}\text{, kada je } \alpha = \beta, \tag{50}$$

$$k(t) = \frac{A}{\beta - \alpha} e^{\alpha t} + Be^{\beta t}\text{, kada je } \alpha \neq \beta, \tag{51}$$

dok su granični uslovi

$$k(0) = a \text{ i } k(T) = b\text{, pri čemu je } a > 0 \text{ i } b \geq 0. \tag{52}$$

Ukoliko je $a = 0$, tada je i $k(t) = 0$, kao i $x(t) = 0$ za svako t, međutim ovaj slučaj nećemo razmatrati. Koristeći (52), dobijaju se sledeći izrazi za A i B:

Slučaj 1: $\alpha = \beta$.

$$A = \frac{a - be^{-\beta T}}{T}, \tag{53}$$

$$B = a. \tag{54}$$

Slučaj 2: $\alpha \neq \beta$.

$$A = (\alpha - \beta)\frac{ae^{\beta T} - b}{e^{\alpha T} - e^{\beta T}}, \tag{55}$$

$$B = a + \frac{A}{\alpha - \beta}. \tag{56}$$

Uslov (55) se može zapisati i kao:

$$A = (\alpha - \beta)\frac{a - be^{-\beta T}}{e^{(\alpha - \beta)T} - 1}. \tag{57}$$

Dalje se ispituje nenegativnost uslova $k(t) \geq 0,\ x(t) \geq 0$ za svako t. Da li su ovi uslovi zadovoljeni ili ne zavise od veličine parametara A i B. Iz jednačina (53) i (56), sledi da znak konstanti A i B zavisi od veličine parametra T i relativnih veličina a i b. Na primer, ukoliko je T dovoljno malo i b dovoljno veliko u odnosu na a, onda važi $a < be^{-\beta T}$, tj. da je $A < 0$ u jednačini (53). Potreban i dovoljan uslov da je $x(t) \geq 0$ za svako t, iz jednačine (49), je $A \geq 0$ bez obzira na veličinu parametara α i β. Ako se posmatraju jednačine (53) i (56), sledi da je $A \geq 0$ ako i samo ako je

$$ae^{\beta T} \geq b\text{, bez obzira na relativne veličine parametara } \alpha \text{ i } \beta. \tag{58}$$

Kada se razmatra slučaj $k(t) \geq 0$ za svako t, koristeći jednakosti (50), (51), (52), (53), (54) i (55), dobijaju se sledeći izrazi:

$$k(t) = ae^{\beta t}\frac{(T - t)}{T} + \frac{bt}{T}\text{, kada je } \alpha = \beta, \tag{59}$$

$$k(t) = ae^{\beta t} - (ae^{\beta t} - b)\frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{e^{\alpha T} - e^{\beta T}}\text{, kada je } \alpha \neq \beta, \tag{60}$$

što se može zapisati kao

$$k(t)=\frac{1}{e^{\alpha T}-e^{\beta T}}\left[ae^{\beta t}\left\{\left(e^{\alpha T}-e^{\beta T}\right)-\left(e^{\alpha t}-e^{\beta t}\right)\right\}+b\left(e^{\alpha T}-e^{\beta T}\right)\right], \text{ kada je } \alpha\neq\beta. \quad (61)$$

Iz jednačine (59) se vidi da je $k_t \geq 0$ za svako t, kada je $\alpha=\beta$. Takođe iz jednačine (61) sledi da je $k(t)\geq 0$ za svako t, kada je $\alpha\neq\beta$. Ustvari, $k(t)>0$ za svako t, $0\leq t<T$ bez obzira na odnos između veličina α i β, dok god je $\alpha>0$.

Ukoliko u jednačinama (53), (54), (55) i (56), se pusti da $T\to\infty$, dobija se

$$A=0,\ B=a, \text{ kada je } \alpha=\beta, \quad (62)$$

$$A=0,\ B=a, \text{ kada je } \alpha>\beta, \quad (63)$$

$$A=(\beta-\alpha)a,\ B=0, \text{ kada je } \alpha<\beta. \quad (64)$$

Dok se u jednačinama (49), (50) i (51) dobija:

$$x(t)=0, \text{ za svako } t, \text{ kada je } \alpha\geq\beta, \quad (65)$$

$$x(t)=(\beta-\alpha)ae^{\alpha t}, \text{ za svako } t, \text{ kada je } \alpha<\beta, \quad (66)$$

$$k(t)=ae^{\beta t}, \text{ za svako } t, \text{ kada je } \alpha\geq\beta, \quad (67)$$

$$k(t)=ae^{\alpha t}, \text{ za svako } t, \text{ kada je } \alpha<\beta. \quad (68)$$

Iz jednačina (66) i (68) se dolazi do sledeće relacije:

$$x(t)=(\beta-\alpha)k(t), \text{ za svako } t. \quad (69)$$

Drugim rečima, $x(t)$ i $k(t)$ rastu sa istom stopom α i odnos između njih je konstantan. U slučaju, kada je $\alpha\geq\beta$, ne dolazi se do rešenja.

Putanja definisana jednačinama (65) i (67) (ili (66) i (68)) se naziva granična putanja. Šta se može zaključiti pomoću granične putanje? Važno je znati da takva kriva daje aproksimaciju optimalne krive ako je horizont odluka dovoljno velik.

Da li se bilo šta može zaključiti ako se posmatra beskonačan vremenski interval? Pre svega, potrebno je primetiti da se krajnje zalihe b ne mogu specifikovati za problem beskonačnog horizonta. Besmisleno je pričati o odnosu između kapitala i rada na beskonačnom vremenskom intervalu, tj. o odnosu na dan do koga nikada nećemo stići.

Moglo bi se postaviti sledeće pitanje: Da li je moguće granični uslov $k(T)=b$ zameniti uslovom $\lim_{T\to\infty}k(T)=b$. Tada su krajnji uslovi određeni. Međutim, moguće je primetiti da granična putanja ne daje rešenje za problem beskonačnog horizonta, kada $k(t)\to\infty$ u graničnoj putanji. Drugim rečima, ako prihvatimo pristup granične putanje za problem beskonačnog horizonta, krajnji uslovi neće biti određeni.

Dalje, granična putanja, u opštem slučaju, nije rešenje problema beskonačnog horizonta, čak iako su konačni uslovi određeni. Ovo se lako može zaključiti podsećanjem na uslov (65) i pretpostavkom da je $\alpha \geq \beta$. Drugim rečima, ako je $\alpha \geq \beta$, $x(t)=0$ za svako t sa granične putanje, potrošnja mora biti održana na nivou dovoljne zauvek. Jasno, putanja za koju je $x(t)=0$ za svako t ne može biti optimalna putanja. U stvari, najgora moguća putanja se dobija ako je $\beta > 0$, pošto je realno da ekonomija bude na višem nivou od dovoljnog za preživljavanje. Dovoljno je izabrati $x(t)$ za koje važi $0 < x(t) \leq \beta a$ i ispitati da li važi uslov (24). Jasno, takva putanja je dostižna i $k(t)$ je neopadajuće po t. Ova putanja je u svakom slučaju bolja nego putanja za koju je ekonomija na nivou dovoljne za preživljavanje u svakom trenutku t.

Šta se može zaključiti iz ovoga? Razuman zaključak bi bio da rešenje problema beskonačnog horizonta ne postoji ako je $\alpha \geq \beta$. Pre svega, rešenje mora zadovoljavati uslov (24), kao i Ojlerove uslove (28) ili (33). Svaka putanja koja zadovoljava ova dva uslova se naziva dopustiva Ojlerova putanja. Dopustiva Ojlerova putanja ne mora obavezno biti i optimalna putanja. Potrebno je primeniti test u kome se iz skupa dopustivih Ojlerovih putanja izdvaja rešenje. Može se primetiti, ako je $x(0)=0$, onda je $x(t)=0$ za svako t po Ojlerovom uslovu (33). Pošto je izvodljivo dostići nivo viši od dovoljnog onda putanja za koju je $x(t)=0$ za bilo koje t nije zadovoljavajuća. U jednačinama (34) i (35), ako je $x(0)>0$ i $\alpha \geq \beta$, za dovoljno veliko t, $k(t)$ će na kraju postati negativno. Drugim rečima, ako je $\alpha \geq \beta$, nijedna dopustiva Ojlerova putanja ne može biti rešenje, tj. rešenje problema beskonačnog horizonta ne postoji.

Pošto gornji zaključak zavisi od toga da li je $\alpha \geq \beta$ ili je $\alpha < \beta$, razmatra se šta se dešava kada je $\alpha < \beta$. Potreban i dovoljan uslov za $\alpha < \beta$ je

$$\nu(1-\sigma\lambda) > 1-\sigma(\lambda+\rho). \tag{70}$$

Dakle, kada je $\rho = 0$ potreban i dovoljan uslov za $\alpha < \beta$ se svodi na uslov

$$\nu > 1. \tag{71}$$

Kao što je ranije rečeno, ako se pretpostavi da je $u(x)>0$ za svako $x>0$, onda je $\nu \leq 1$. Nejednakost $\alpha \geq \beta$ mora da važi dok god je $\rho = 0$. Ukoliko je $\rho > 0$, onda je $\nu \leq 1$ potrebno za $\alpha \geq \beta$, a $\nu > 1$ je dovoljno za $\alpha < \beta$.

Problem konačnog horizonta predstavlja aproksimaciju slučaja u kome je T dovoljno veliko. Međutim u ovom slučaju, proizvodnja i razmena roba i usluga bi većinu vremena bila na osnovnom nivou. Problem je sledeći: za konačno T posmatraju se posledice promene $k(T)=b$ i posledice promena parametra T na program optimalne potrošnje. Na kraju se dolazi do zaključka da program optimalne potrošnje nije osetljiv na ove promene.

Prvo se u razmatraju promene $k(T)=b$ i pretpostavlja se da je T fiksirano. Optimalna kriva $k(T)=b_1$ se označava kao $(k_1(t), x_1(t))$ i $k(T)=b_2$ kao $(k_2(t), x_2(t))$. Koristeći jednakosti (49), (51) i (60) dobijaju se za $b_1 > b_2$ sledeći rezultati:

Slučaj 1: $\alpha = \beta$.

$$x_1(t) - x_2(t) = e^{\alpha t}(A_1 - A_2) = e^{\alpha t}(b_2 - b_1)\frac{e^{-\beta T}}{T} < 0 \text{ (što implicira } x_1(t) < x_2(t)\text{)}, \tag{72}$$

$$k_1(t) - k_2(t) = te^{\alpha t}(A_2 - A_1) = te^{\alpha t}(b_1 - b_2)\frac{e^{-\beta T}}{T} > 0 \text{ (što implicira } k_1(t) > k_2(t)\text{)}. \tag{73}$$

Slučaj 2: $\alpha \neq \beta$.

$$x_1(t) - x_2(t) = e^{\alpha t}(A_1 - A_2) = (b_2 - b_1)e^{\alpha t}\frac{\alpha - \beta}{e^{\alpha T} - e^{\beta T}} < 0 \text{(što implicira } x_1(t) < x_2(t)\text{)}, \tag{74}$$

$$k_1(t) - k_2(t) = \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{e^{\alpha T} - e^{\beta t}}(b_1 - b_2) > 0 \text{ (što implicira } k_1(t) > k_2(t)\text{)}. \tag{75}$$

Dakle, povećanje parametra $k(T)$ ima za posledicu povećanje parametara $x(t)$ i $k(t)$ za svako t. Štaviše, kada je $\alpha = \beta$, razlika između $x_1(t)$ i $x_2(t)$ može biti proizvoljno mala za svako t, ukoliko je T dovoljno veliko i t dovoljno malo. Takođe, razlika između $k_1(t)$ i $k_2(t)$ može biti proizvoljno mala, ako je T dovoljno veliko i t dovoljno malo. Drugim rečima, optimalna kriva nije osetljiva na promene $k(T)$ u nekom početnom periodu, ako je T dovoljno veliko kada je $\alpha = \beta$. Tačan stepen „neosetljivosti" se dobija iz jednačina (72) i (73).

Kako bi se došlo do zaključka šta se dešava kada je $\alpha \neq \beta$, jednačine (74) i (75) se zapisuju u sledećem obliku:

$$x_1(t) - x_2(t) = e^{\alpha t}\frac{(b_2 - b_1)(\alpha - \beta)}{e^{\beta T}\left(e^{(\alpha-\beta)T} - 1\right)} = e^{\alpha t}\frac{(b_2 - b_1)(\beta - \alpha)}{e^{\alpha T}\left(e^{(\beta-\alpha)T} - 1\right)}, \tag{76}$$

$$k_1(t) - k_2(t) = (b_1 - b_2)\frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{e^{\beta T}\left(e^{(\alpha-\beta)T} - 1\right)} = (b_1 - b_2)\frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{e^{\alpha T}\left(e^{(\beta-\alpha)T} - 1\right)}. \tag{77}$$

Kao i u slučaju $\alpha = \beta$, razlika između $x_1(t)$ i $x_2(t)$ (kao i razlika između $k_1(t)$ i $k_2(t)$) može biti proizvoljno mala za svako t, kada je T dovoljno veliko. Izbor parametra T za date vrednosti rastojanja između $x_1(t)$ i $x_2(t)$ i parametra t se dobija iz jednačine (76).

Sada se razmatra efekat promene parametra T na optimalnu putanju. Optimalna putanja za problem $T-$perioda se označava sa $\left(k(t,T), x(t,T)\right)$, a optimalna putanja za problem $T'-$perioda se označava sa $\left(k(t,T'), x(t,T')\right)$. Za $T' > T$ dobijaju se sledeći rezultati:

Slučaj 1: $\alpha = \beta$.

$$x(t,T') - x(t,T) = e^{\alpha t}\delta(T), \text{ gde je } \delta(T) \equiv a\left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right) - b\left(\frac{e^{-\beta T}}{T'} - \frac{e^{-\beta T'}}{T}\right), \tag{78}$$

$$k(t,T') - k(t,T) = -te^{\alpha t}\delta(T). \tag{79}$$

Slučaj 2: $\alpha \neq \beta$.

$$x\left(t,T^{'}\right)-x\left(t,T\right)=e^{\alpha t}\left(\alpha-\beta\right)\Delta\left(T\right),\text{ gde je }\Delta\left(T\right)\equiv\frac{a-be^{-\beta T^{'}}}{e^{(\alpha-\beta)T^{'}}-1}-\frac{a-be^{-\beta T}}{e^{(\alpha-\beta)T}-1},\tag{80}$$

$$k\left(t,T^{'}\right)-k\left(t,T\right)=-\left(e^{\alpha t}-e^{\beta t}\right)\Delta\left(T\right).\tag{81}$$

Ukoliko je T dovoljno veliko, $\delta\left(T\right)$ i $\Delta\left(T\right)$ mogu biti blizu nule. Drugim rečima, za dovoljno veliko T, razlika između $x\left(t,T\right)$ i $x\left(t,T^{'}\right)$ (kao i $k\left(t,T\right)$ i $k\left(t,T^{'}\right)$) može biti proizvoljno mala.

Može se primetiti da, ukoliko je $b=0$, onda je $\delta\left(T\right)<0$, pa je $x\left(t,T^{'}\right)<x\left(t,T\right)$ i $k\left(t,T^{'}\right)>k\left(t,T\right)$ kada je $\alpha=\beta$. Takođe, iz $b=0$ sledi da je $\Delta\left(T\right)<0$, ako je $\alpha>\beta$, tj. $\Delta\left(T\right)>0$, ako je $\alpha<\beta$. Dakle, za $\alpha\neq\beta$ važi da je $x\left(t,T^{'}\right)<x\left(t,T\right)$ i $k\left(t,T^{'}\right)>k\left(t,T\right)$, tj. kada je $b=0$ dostiže se monotonost za $x\left(t,T\right)$ i $k\left(t,T\right)$ po T. Potreban i dovoljan uslov za monotonost se dobijaju iz jednačina (78) i (81), kada je $b>0$.

Osim što je pokazano da je optimalna putanja „neosetljiva” na promene, iz prethodne analize se mogu izvesti sledeći zaključci o odnosu između kapitala i autputa kada je $\alpha\geq\beta$:

i. Rešenje problema beskonačnog horizonta ne postoji.

ii. Iako rezultati o osetljivosti važe za problem konačnog horizonta, rešenje za dovoljno veliko T aproksimira program u kome je potrošnja na osnovnom nivou duži vremenski period.

Iz navedenih razloga sledi da bi model u kome je odnos kapitala i autputa konstantan trebalo da se modifikuje u cilju dobijanja realnijeg modela. Dalje će se posmatrati šta se dešava kada je proizvodna funkcija nelinearna, tada konstantan odnos kapitala i autputa ne postoji. Pokazaće se da pod određenim pretpostavkama rešenje problema beskonačnog horizonta konvergira ka putanji modifikovanog zlatnog pravila.

3.3.3. Neoklasični model rasta sa tehnologijom

Makroekonomija je veoma složena ekonomska disciplina, pa je bilo veoma teško pronaći odgovarajući model. Kako su se menjale ekonomske prilike, tako se menjao i neoklasični model rasta.

U neoklasićnom modelu rasta sa tehnologijom funkcija proizvodnje će imati Kob-Daglasov oblik:

$$Y\left(t\right)=A\left(t\right)K^{\alpha}\left(t\right)L^{1-\alpha}\left(t\right),\ 0<\alpha<1,$$

gde su $K\left(t\right)$ i $L\left(t\right)$ inputi kapitala i rada, dok $A\left(t\right)$ označava meru efikasnosti proizvodnje. Povećanje parametra $A\left(t\right)$ će usloviti povećanje proizvodnje, bez obzira da li dolazi do povećanja inputa.

Model je određen sa sledeće četiri jednačine:

- Akumulacija kapitala, $K^{'}(t)$ se definiše na sledeći način:

$$K^{'}(t) = Y(t) - C(t) - \mu K(t),$$

gde promenljiva $C(t)$ predstavlja štednju, a μ depresijaciju kapitala.

- Input rada raste sa stopom n:

$$\frac{L^{'}(t)}{L(t)} = n.$$

- Efikasnost proizvodnje raste sa stopom g:

$$\frac{A^{'}(t)}{A(t)} = g.$$

- Jednačina koja određuje štednju:

$$Y(t) - C(t) = sY(t),$$

gde je s – prosečna sklonost ka štednji.

Funkcija proizvodnje ima sledeće osobine:

1) Funkcija proizvodnje je skalarna funkcija:

$$A(t)\left(\mu K(t)\right)^{\alpha}\left(\mu L(t)\right)^{1-\alpha} = \mu^{\alpha}\mu^{1-\alpha}Y(t) = \mu Y(t).$$

2) Ako je funkcija Y dva puta diferencijabilna, tada je i konkavna:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha A(t) K^{\alpha-1}(t) L^{1-\alpha}(t)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = \alpha(\alpha-1) A(t) K^{\alpha-2}(t) L^{1-\alpha}(t) < 0.$$

Ova osobina je jedna od najvažnijih osobina funkcije proizvodnje. Na primer, ukoliko je preduzeću neophodna dodatna jedinica kapitala, tada će doći do povećanja autputa. Međutim, ukoliko se nastavlja sa povećanjem inputa kapitala, bez povećanja radne snage, povećanje autputa će najverovatnije prestati. U Kob-Daglasovoj funkciji, parametar α diktira kojim tempom će doći do pada u porastu autputa.

3.3.4. Uticaj kimatskih promena na stopu rasta

U ovom poglavlju će biti opisan i izmeren uticaj klimatskih promena na stopu rasta. Rezultati korišteni u radu su uzeti iz rada S. Frankhauser et al [6].

Uticaj klimatskih promena na stopu rasta i ekonomiju u celini se meri padom u ukupnom autputu. Uticaj se vrši na dva načina, preko bruto domaćeg proizvoda i stope štednje. Odgovor na pitanje u kom trenutku stopa rasta postaje negativna, daće nam neoklasični model rasta.

S jedne strane, zbog povećanih troškova kako bi se usporile klimatske promene, dolazi do povećane štednje. Štednja dovodi do manjih ulaganja, a samim tim i do pada tehnološkog napredka što vodi do manje produktivnosti. S druge strane, klimatske promene vode do smanjenja produktivnosti kapitala.

Neka je

L - količina rada,
K - količina kapitala,
A - tehnološki napredak,
D - uticaj klimatskih promena,
t - vreme.

Funkcija proizvodnje u tom slučaju ima sledeći oblik:

$$Y(t) = A(t)K^{\alpha}(t)L^{1-\alpha}(t) - D(t).$$

Zalihe kapitala se definišu na sledći način:

$$K(t+1) = (1-\mu)K(t) + sY(t).$$

Sada će biti izračunato u kom trenutku je rast jednak nuli. Uslov da bi došlo do toga jeste da se populacija i tehnološki napredak ne menjaju. Tada je

$$K(t+1) = K(t).$$

Dalje sledi:

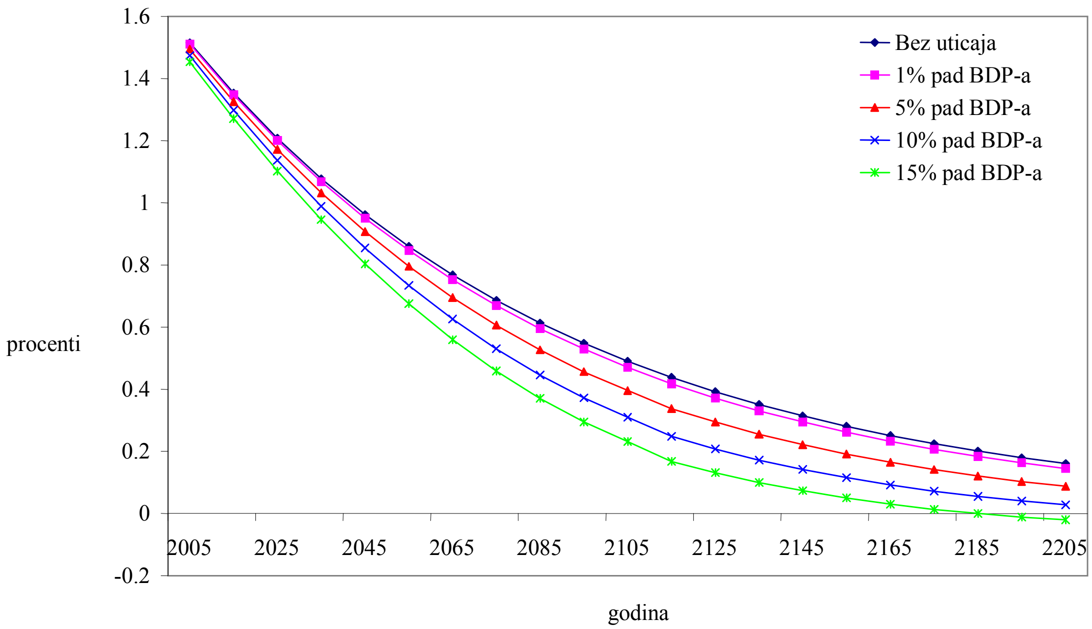
$$(1-\mu)K(t) + sA(t)K^{\alpha}(t)L^{1-\alpha}(t) - sD(t),$$

$$D(t) = A(t)K^{\alpha}(t)L^{1-\alpha}(t) - \frac{\mu}{s}K(t),$$

$$\frac{D(t)}{Y(t)+D(t)} = 1 - \frac{\mu}{s}\frac{K(t)}{Y(t)+D(t)}.$$

Drugim rečima, kada proizvod stope štednje i klimatskog uticaja pređe neto iznos investicija, dolazi do pada u stopi rasta.

Primer: Neka je došlo do povećanja temperature od $3^{\circ}C$. Posmatra se uticaj na stopu rasta potrošnje po stanovniku u slučajevima kada klimatske promene ne vrše uticaj na bruto domaći proizvod i u kojima dolazi do pada od 1%, 5%, 10% i 15% bruto domaćeg proizvoda (BDP).



Grafik 9: Rast stope potrošnjeneoklasičnim modelom rasta

Na osnovu ovog grafika se može zaključiti da klimatske promene dugoročno vode do pada rasta potrošnje po stanovniku, kao i da je pad veći što je uticaj klimatskih promena veći.

3.3.5. Putanja konstantnog rasta

Promena autputa se definiše na sledeći način $Y^{'}(t)=\dfrac{dY(t)}{dt}$. Za definisanje promena autputa, koristiće se trik sa logaritmom. Iz formule $Y(t)=A(t)K^{\alpha}(t)L^{1-\alpha}(t)$, sledi

$$\log Y(t)=\log A(t)+\alpha\log K(t)+(1-\alpha)\log L(t).$$

Diferenciranjem gornjeg izraza dobija se:

$$\frac{\log Y(t)}{dY(t)}\frac{dY(t)}{dt}=\frac{\log A(t)}{dA(t)}\frac{dA(t)}{dt}+\alpha\frac{\log K(t)}{dK(t)}\frac{dK(t)}{dt}+(1-\alpha)\frac{\log L(t)}{dL(t)}\frac{dL(t)}{dt},$$

odakle je

$$\frac{Y^{'}(t)}{Y(t)}=g+\alpha\frac{K^{'}(t)}{K(t)}+(1-\alpha)n.$$

Odavde se može zaključiti da kako bi rast autputa bio konstantan, rast kapitala mora biti konstantan.

Kako bi odnos autputa i kapitala ostao konstantan, njihov rasta mora da se povećava istom stopom. Kombinovanjem jednačine za akumulaciju kapitala i jednačine $Y(t)-C(t)=sY(t)$, dobija se jednakost

$$K^{'}(t)=sY(t)-\mu K(t).$$

Sada i levu i desnu stranu gornje jednakosti delimo sa K_t

$$\frac{K^{'}(t)}{K(t)}=s\frac{Y^{'}(t)}{K(t)}-\mu .$$

Odavde sledi da putanja konstantnog rasta mora da zadovoljava jednakost:

$$\frac{Y^{'}(t)}{Y(t)}=g+\alpha\frac{Y^{'}(t)}{Y(t)}+(1-\alpha)n .$$

Oduzimanjem izraza $\alpha\frac{Y^{'}(t)}{Y(t)}$ od obe strane gornje jednakosti, dobija se

$$(1-\alpha)\frac{Y^{'}(t)}{Y(t)}=g+(1-\alpha)n .$$

Dakle, stopa konstantnog rasta iznosi

$$\frac{Y^{'}(t)}{Y(t)}=\frac{g}{1-\alpha}+n .$$

Može se zaključiti da samo stopa rasta tehnologije g i faktor α utiču na stopu rasta autputa po radniku.

3.3.6. *Dinamika odnosa između kapitala i autputa*

Pre nego što bude objašnjena dinamika odnosa između kapitala i autputa, biće uvedene sledeće oznake. Odnos kapital-autput je:

$$x(t)=\frac{K(t)}{Y(t)}.$$

Funkcija proizvodnje ima oblik:

$$Y(t)=A(t)\big(x(t)Y(t)\big)^{\alpha}L^{1-\alpha}(t).$$

Dalje će se koristiti činjenica da je:

$$K(t)=x(t)Y(t).$$

Deljenjem obe jednakosti sa $Y^{\alpha}(t)$, dobija se:

$$Y^{1-\alpha}(t) = A(t)x^{\alpha}(t)L^{1-\alpha}(t)$$

Dalje sledi:

$$Y(t) = A^{1-\alpha}(t)x^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(t)L(t),$$

tako da autput po radniku iznosi

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = A^{\frac{1}{1-\alpha}}(t)x^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(t).$$

Ova jednačina nam govori da promene u iznosu autputa po radniku zavise od promena u efikasnosti proizvodnje. Ako se pretpostavi da je stopa rasta napredka u proizvodnji $A(t)$ konstantna, dinamika će zavisiti isključivo od odnosa između kapitala i autputa. Sada ćemo opisati kako se taj odnos ponaša.

Koristeći notaciju karakterističnu za dinamiku odnosa kapitala i autputa, jednačina $\frac{K'(t)}{K(t)} = s\frac{Y'(t)}{K(t)} - \mu$ se može zapisati na sledeći način:

$$\frac{K'(t)}{K(t)} = \frac{s}{x(t)} - \mu.$$

Logaritmovanjem leve i desne strane jednakosti, dobija se:

$$\log x_t = \log\frac{K_t}{Y_t} = \log K_t - \log Y_t.$$

Diferenciranjem jednakosti po t, dobija se:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{K'(t)}{K(t)} - \frac{Y'(t)}{Y(t)}.$$

Koristeći jednačinu $\frac{Y'(t)}{Y(t)} = g + \alpha\frac{Y'(t)}{Y(t)} + (1-\alpha)n$ za rast autputa, a jednačinu $\frac{K'(t)}{K(t)} = \frac{s}{x(t)} - \mu$ za rast kapitala, dobijamo jednačinu koja opisuje dinamiku odnosa kapital-autput:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = (1-\alpha)\frac{K'(t)}{K(t)} - g - (1-\alpha)n = (1-\alpha)\left(\frac{s}{x(t)} - \frac{g}{1-\alpha} - n - \mu\right).$$

Ova jednačina ima jednu veoma važnu osobinu: stopa rasta će početi da opada kada vrednost od $x(t)$ pređe određenu vrednost.

U nastavku se određuje vrednost promenljive $x(t)$ za koju će autput beležiti dugoročan rast. Označimo tu vrednost sa $x^{'}$ i mora da važo jednakost $\frac{x^{'}}{x}=0$. Ovo dalje implicira:

$$\frac{s}{x^*}-\frac{g}{1-\alpha}-n-\mu=0.$$

Odakle sledi:

$$x^*=\frac{s}{\frac{g}{1-\alpha}+n+\mu}.$$

Koristeći ovaj izraz, biće opisana konvergencija putanje rasta odnosa između kapitala i autputa. Obe strane jednakosti $(1-\alpha)\left(\frac{s}{x(t)}-\frac{g}{1-\alpha}-n-\mu\right)$ se dele sa $\left(\frac{g}{1-\alpha}+n+\mu\right)$ i dobija se izraz:

$$\begin{aligned}
\frac{x^{'}(t)}{x(t)}&=(1-\alpha)\left(\frac{g}{1-\alpha}+n+\mu\right)\left(\frac{1}{x(t)}\frac{s}{\frac{g}{1-\alpha}+n+\mu}-1\right)\\
&=(1-\alpha)\left(\frac{g}{1-\alpha}+n+\mu\right)\left(\frac{x^*}{x(t)}-1\right)\\
&=(1-\alpha)\left(\frac{g}{1-\alpha}+n+\mu\right)\left(\frac{x^*-x(t)}{x(t)}\right).
\end{aligned}$$

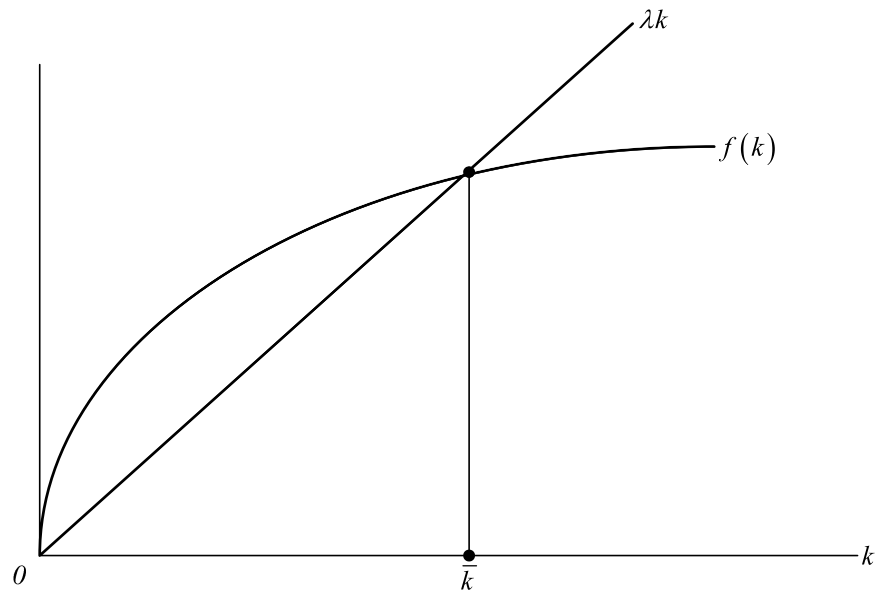
3.4. *Nelinearna funkcija proizvodnje na beskonačnom vremenskom intervalu*

U ovom delu se razmatra slučaj u kome dolazi do zamene između rada i kapitala u funkciji proizvodnje. Drugim rečima, jednačina (18) je i u ovom slučaju fundamentalna jednačina, samo što je funkcija f nelinearna po k. Interval na kome se problem posmatra je beskonačan. Za funkciju f važe sledeće pretpostavke:

A-7. $f^{'}(k)>0$ i $f^{''}(k)<0$ za svako $k\geq 0$.

A-8. $f^{'}(0)=\infty$, $f^{'}(\infty)=0$ i $f(0)=0$.

Sa $f^{'}(0)$ i $f^{''}(0)$ su označeni desni izvodi funkcija f i $f^{'}$ u tački 0. Može se primetiti da, ako je $f^{'}(k)>0$ za svako k, tada je marginalna funkcija kapitala uvek pozitivna i $f^{''}(k)<0$ znači da je marginalna funkcija kapitala (rada) opadajuća funkcija po kapitalu (radu). Jednakost $f(0)=0$ označava da je kapital neophodan kako bi došlo do proizvodnje. Jednačine (A-7) i (A-8) obezbeđuju postojanje jedinstvenog rešenja jednačine $f(k)=\lambda k$, čije rešenje se označava sa $\bar{k}$. Zahvaljujući prvom uslovu jednačini (A-8) se izbegava mogućnost $f(k)-\lambda k<0$ za svako k, što je i prikazano na grafiku 10.



Grafik 10: Ilustracija funkcije proizvodnje

Između slučaja u kome je funkcija f linearna i slučaja u kome je nelinearna postoje bitne razlike. U linearnom slučaju postoji konstantan odnos između kapitala i autputa, dok će za nelinearni slučaj biti dokazano da postoji jedinstvena optimalna dostižna putanja za problem na beskonačnom intervalu, koja aproksimira putanju modifikovanog zlatnog pravila[7].

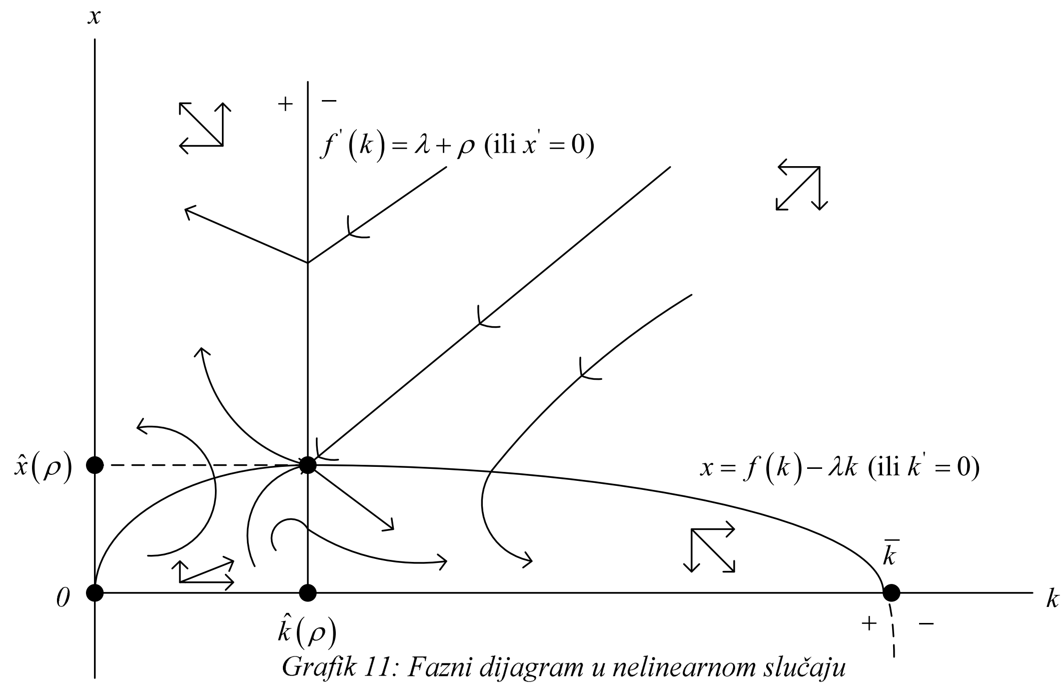
Kako bi se došlo do rezultata, osim uslova (A-6) za funkciju korisnosti, potreban je još jedan uslov:

(A-9) $\lim_{x\to 0} u(x) = -\infty$, $x \geq 0$.

Najpre ćemo posmatrati problem na konačnom intervalu, a zatim se ispituje optimalna dopustiva[8] putanja, ako se T produži u beskonačnost. Pre svega je potrebno maksimizirati integral J_T iz jednačine (31). Ovo je problem varijacionog računa gde je Ojlerov uslov već zadovoljen. Kako se iz jednačina (A-7) i (A-6) može zaključiti da su f i u, redom, striktno konkavne funkcije po k, onda je Φ, iz jednačine (35) striktno konkavna funkcija po k. Ojlerov uslov, dat u jednačini (37), je dovoljan i potreban za postojanje jedinstvenog globalnog maksimuma. Vremenske putanje $k(t)$ i $x(t)$ se mogu analizirati preko faznog dijagrama datog na grafiku 11.

---

[7] engleski: modified golden rule.
[8] engleski: attainable.



Grafik 11: Fazni dijagram u nelinearnom slučaju

Na grafiku 11, $\hat{k}(\rho)$ je definisan kao vrednost funkcije k koja zadovoljava sledeću jednačinu

$$f^{'}(k)=\lambda+\rho. \tag{82}$$

Iz jednakosti (A-7) i (A-8) se može zaključiti da $\hat{k}(\rho)$ leži između 0 i $\bar{k}$ .Takođe, $\hat{x}(\rho)$ sa grafika 11 je definisano na sledeći način:

$$\hat{x}(\rho)\equiv f\left(\hat{k}(\rho)\right)-\lambda\hat{k}(\rho). \tag{83}$$

Na grafiku 11, prava linija koja kreće od $\hat{k}(\rho)$ predstavlja skup (k,x) kombinacija koje zadovoljavaju jednačinu (37), tako da je $x^{'}=0$ duž ove linije, $x^{'}>0$ levo od linije, a $x^{'}<0$ desno od nje. Kriva u obliku nasipa predstavlja (k,x) kombinacije koje zadovoljavaju $x=f(k)-\lambda k$, tako da je $k^{'}=0$ duž date putanje, $k^{'}<0$ iznad putanje, dok je $k^{'}>0$ ispod putanje. Pomoću strelica se može pratiti nekoliko $(k(t),x(t))$ putanja na dijagramu. Početni uslov $k(0)$, kao i nekoliko graničnih govore da se $k(T)$ u potpunosti može opisati preko $(k(t),x(t))$. Kada je T dovoljno veliko optimalna putanja $(k(t),x(t))$ formira putanju oko $\left(\hat{k}(\rho),\hat{x}(\rho)\right)$.

U nastavku se razmatra problem na beskonačnom vremenskom intervalu. Sada je interesantan problem maksimizacije funkcije J date jednačinom (16). Problem bi mogao biti jednostavno analiziran pomoću dopustive Ojlerove putanje kao što je opisano na grafiku 11. Sa grafika se vidi da postoje tri tipa dopustivih Ojlerovih putanja:

1. $k_t>\hat{k}(\rho)$ za svako $t>\bar{t}$ (neko $\bar{t}>0$).
2. $k_t\rightarrow\hat{k}(\rho)$ i $x_t\rightarrow\hat{x}(\rho)$ kada $t\rightarrow\infty$.
3. $k_t<\hat{k}(\rho)$ za svako $t>\bar{t}$ (neko $\bar{t}>0$).

Za prvi tip važi da je $x(t) < \hat{x}(\rho)$, kao i $k(t) > \hat{k}(\rho)$ od nekog određenog trenutka, na primer $t(0)$. Moguće je uvek poboljšati dati tip potrošnjom kapitala od trenutka t_0, dok k_t opada ka $\hat{k}(\rho)$, a x_t raste ka $\hat{x}(\rho)$. Posle toga, $\hat{x}(\rho)$ i $\hat{k}(\rho)$ se održavaju i dobija se putanja superiornija od putanje tipa 1, što znači da tip 1 nije optimalan. Duž putanje trećeg tipa, $\dot{k}_t < 0$ za svako $t > \overline{t}$, pa je k_t opadajuće, dok je x_t neopadajuće, što se vidi sa grafika 10. Dakle, tokom dugog vremenskog intervala, k_t dostiže negativne vrednosti, čime se dolazi u kontradikciju sa pretpostavkom da je $k_t \geq 0$ za svako $t \geq 0$. Ni prvi ni drugi tip nisu povoljni za problem na beskonačnom intervalu.

Šta se dešava sa drugim tipom? Ako je ρ pozitivno, tada integral J definisan jednačinom (16), konvergira duž putanje tipa 2. Konvergencija obezbeđuje jedinstveno potrebno rešenje koje je dopustivo i zadovoljava Ojlerove uslove za bilo koje pozitivno početno k_0. Putanja se monotono približava ka $\left(\hat{k}(\rho), \hat{x}(\rho)\right)$ kako $t \to \infty$. Problem divergencije je moguće izbeći, ukoliko se funkcija cilja definiše na sledeći način:

$$J_R \equiv \int_0^\infty \left(u(x_t) - u(\hat{x})\right) dt \text{, gde je } \hat{x} \equiv \hat{x}(0)$$

Može se pokazati da je integral J_R konvergentan duž krive tipa 2. Sada je moguće definisati sledeću teoremu.

Teorema 3.4. (Remzi – Kupmans – Kas) : Ukoliko važe pretpostavke (A-6), (A-7), (A-8) i (A-9), onda važi

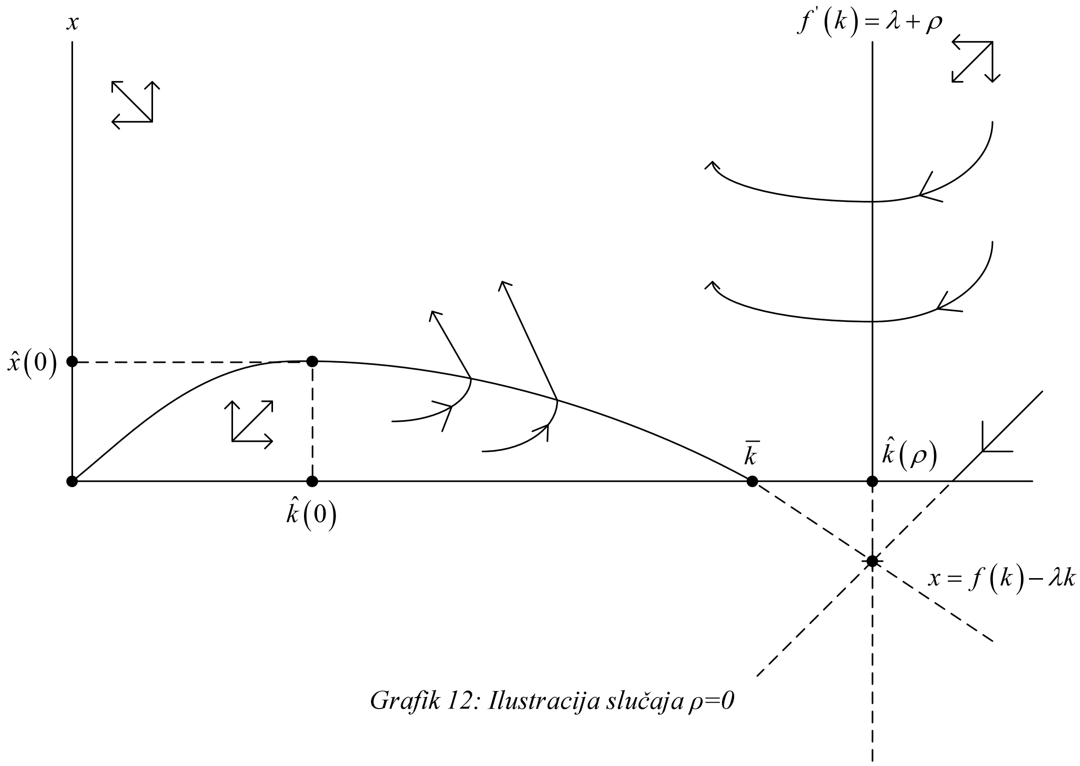
a) $\rho > 0$. Za datu proizvoljnu početnu vrednost za k, optimalna potrebna i dopustiva putanja je jedinstvena i konvergira monotono ka $\left(\hat{k}(\rho), \hat{x}(\rho)\right)$. Optimalnost je definisana maksimizacijom integrala J koji je konvergentan za optimalnu putanju.

b) $\rho = 0$. Za datu proizvoljnu početnu vrednost za k, optimalna potrebna i dopustiva putanja je jedinstvena i konvergira monotono ka $\left(\hat{k}(0), \hat{x}(0)\right)$. Optimalnost je definisana maksimizacijom integrala J koji je konvergentan za optimalnu putanju.

Primedba: Ako je $k(0) = k(\rho)$, onda je optimalna dopustiva putanja jedinstvena $\left(\hat{k}(\rho), \hat{x}(\rho)\right)$ za svako $t \geq 0$. Cilj je integral J kada je $\rho > 0$, a J_R kada je $\rho = 0$.

Primedba: $\left(\hat{k}(\rho), \hat{x}(\rho)\right)$ za $\rho = 0$ je poznata kao „putanja zlatnog pravila", dok se u slučaju $\rho \geq 0$ naziva „modifikovana putanja zlatnog pravila".

Važno je istaći da prethodna teorema daje novo značenje putanji zlatnog pravila, tako što putanja maksimizira „Remzijevu sumu" korisnosti na beskonačnom intervalu i konvergira ka početnoj vrednosti k_0, dok god su zadovoljeni potrebni uslovi. Ovde izabrani skup nije ograničen na putanje zlatnog pravila, pa se k_t može menjati tokom vremena. Ako postoji pozitivan opadajući faktor ($\rho > 0$), teorema govori da optimalna dostižna putanja monotono konvergira ka „modifikovanoj putanji zlatnog pravila".



Grafik 12: Ilustracija slučaja ρ=0

3.5. Diskretan vremenski model optimalnog rasta u jednom sektoru i analiza

U prethodnom delu se pretpostavljlo da je vreme t neprekidna promenljiva, međutim ovde će vreme t biti tretirano kao diskretna promenljiva. Ovakva analiza se naziva „analiza perioda" i pored teorije rasta, koristi se na mnogim poljima ekonomije. Za razliku od drugih analiza u okviru analize perioda se mnogo češće koriste diferencne nego diferencijalne jednačine. U ovom slučaju se mogu uporediti dve tehnike optimizacije, nelinearno programiranje i varijacioni račun. Ovaj oblik analize perioda je veoma koristan, jer objašnjava koliko je važna uloga perioda u određenim vremenskim prilikama. Na primer, potrošnja u određenom periodu može biti značajno uslovljena prihodima iz prošlog perioda.

Pretpostavka da je vreme t diskretna promenljiva je sasvim realna, jer je u stvarnosti, pod uticajem ljudskog faktora, vreme zaista diskretna promenljiva, primera radi neke radnje su otvorene samo jednom nedeljno. Zbog jednostavnosti se često „period"" definiše kao jedan dan ili nedelja, što omogućava da se koriste diferencijalne jednačine, umesto diferencnih.

3.5.1. Diskretan vremenski model rasta

Promenljive $L(t)$, $K(t)$, $X(t)$, $I(t)$ se definišu na isti način kao i u prethodnom poglavlju sa jednom razlikom, što je sa t označen period. Zalihe rada se opisuju jednačinom

$$L(t)=(1+n)^t L(0) \text{ ili } \frac{L(t+1)}{L(t)}=1+n, \text{ gde je } n\geq 0. \tag{84}$$

Osnovna ravnotežna jednačina na tržištu autputa se definiše na sledeći način:

$$X(t+1)+I(t+1)=F\big(L(t),K(t)\big). \tag{85}$$

Za jedinicu perioda se uzima „period proizvodnje", pri čemu je proizvodnja proces koji zahteva određeno vreme. Do depresijacije kapitala, sa stopom $\mu,\ 0<\mu<1$, dolazi na kraju svakog perioda. Funkcija proizvodnje se označava sa $F\big(L(t),K(t)\big)$, kapital $K(t)$ ostaje nepromenjen tokom čitavog perioda t, ali zalihe kapitala iz prethodnog perioda padaju sa $K(t)$ na $K(t)-\mu K(t)$.

Na početku, $(t+1)-$og perioda, deo autputa proizveden u toku perioda t, sada stoji na raspolaganju i povećava zalihe kapitala, koje u $(t+1)-$om periodu iznose

$$K(t+1)=\big(K(t)-\mu K(t)\big)+I(t+1)$$

ili

$$I(t+1)=K(t+1)-\big(K(t)-\mu K(t)\big).$$

Kombinacijom jednačine (85) sa prethodnom, dobija se

$$X(t+1)+\Big[K(t+1)-\big(K(t)-\mu K(t)\big)\Big]=F\big(L(t),K(t)\big) \tag{86}$$

ili

$$X(t+1)+\big(K(t+1)-K(t)\big)=F\big(L(t),K(t)\big)-\mu K(t).$$

Potrošnja, za razliku od investicija, ne mora da se desi u potpunosti na početku perioda, $X(t+1)$ je potrošnja tokom čitavog $(t+1)-$vog perioda.

Kada je u pitanju oblik ravnoteže autputa, ne postoji konsenzus u slučaju kada je vreme t diskretna promenljiva. Na primer, Samuelson je definisao ravnotežu sledećom jednačinom

$$X(t)+\big(K(t+1)-K(t)\big)=F\big(L(t),K(t)\big)-\mu K(t) \tag{87}$$

Kao što se može primetiti jedina razlika između jednačina (86) i (87) je u tome što je $X(t+1)$ iz jednačine (86) u jednačini (87) zamenjeno sa $X(t)$. Jedna od pretpostavki je da proizvodnja nastupa odmah. Analiza se dalje nastavlja, pod pretpostavkom da važi jednačina (86).

Dalje se pretpostavlja da je funkcija F homogena funkcija stepena jedan i važi

$$F\left(L(t),K(t)\right)=L(t)f\left(k(t)\right),\text{ gde je } k(t)=\frac{K(t)}{L(t)}. \tag{88}$$

Deljenjem jednačine (86) sa $L(t+1)$, koristeći jednačine (84) i (88), dobija se

$$x(t+1)+k(t+1)-\frac{k(t)-\mu k(t)}{1+n}=\frac{f\left(k(t)\right)}{1+n}, \tag{89}$$

gde je $x(t+1)\equiv\dfrac{X(t+1)}{L(t+1)}$ i $k(t+1)\equiv\dfrac{K(t+1)}{L(t+1)}$.

Jednačina (89) se može zapisati i na sledeći način:

$$x(t+1)+k(t+1)=g\left(k(t)\right), \tag{90}$$

gde je

$$g\left(k(t)\right)=\frac{1}{1+n}\left(f\left(k(t)\right)+\left(k(t)-\mu k(t)\right)\right). \tag{91}$$

Za funkciju f važe sledeće pretpostavke

A-10. $f(0)=0,\ 0<f'\left(k(t)\right)<\infty$ i $f''\left(k(t)\right)\le 0$ za svako $k(t)<\infty$.

Ukoliko je $f''\left(k(t)\right)=0$, onda se radi o slučaju u kome je odnos kapitala i autputa konstantan. Pretpostavka $(A-10)$, takođe, implicira da važi:

A-10'. $g(0)=0,\ 0<g'\left(k(t)\right)<\infty$ i $g''\left(k(t)\right)\le 0$ za svako $k(t)<\infty$.

Ovo, između ostalog, implicira da je funkcija g konkavna funkcija.

Pretpostavlja se da ekonomija poseduje zalihe dobra čija je per kapita količina jednaka a i da se na kraju $T-$tog perioda u zalihama zadržava per kapita količina b. Odatle, sledi sledeći uslov:

$$x(0)+k(0)=a \tag{92}$$

i

$$k(T)=b. \tag{93}$$

Ako je $a=0$, onda je $k(0)=0$, kao i $x(0)=0$, što dalje implicira da je za svako t, $k(t)=0$ i $x(t)=0$, ako je $g(0)=0$. Kako bi se izbegao ovaj nezanimljiv slučaj, pretpostavlja se da je $a>0$ i

A-11. (a) Postoji jedinstveno $\bar{k},\ 0<\bar{k}<\infty,$ takvo da je $g\left(\bar{k}\right)-\bar{k}=0$, ili

(b) $g''=0$ za svako $k_t\ge 0$ (i $\bar{k}=\infty$).

Kada je funkcija f u pitanju, ovi uslovi su oblika

A-11'. (a) Postoji jedinstveno $\bar{k}$, $0<\bar{k}<\infty$, takvo da je $f(\bar{k})=\lambda\bar{k}$, gde je $\lambda=\mu+n$, ili

(b) $f''=0$ za svako $k_t\geq 0$ (i $\bar{k}=\infty$).

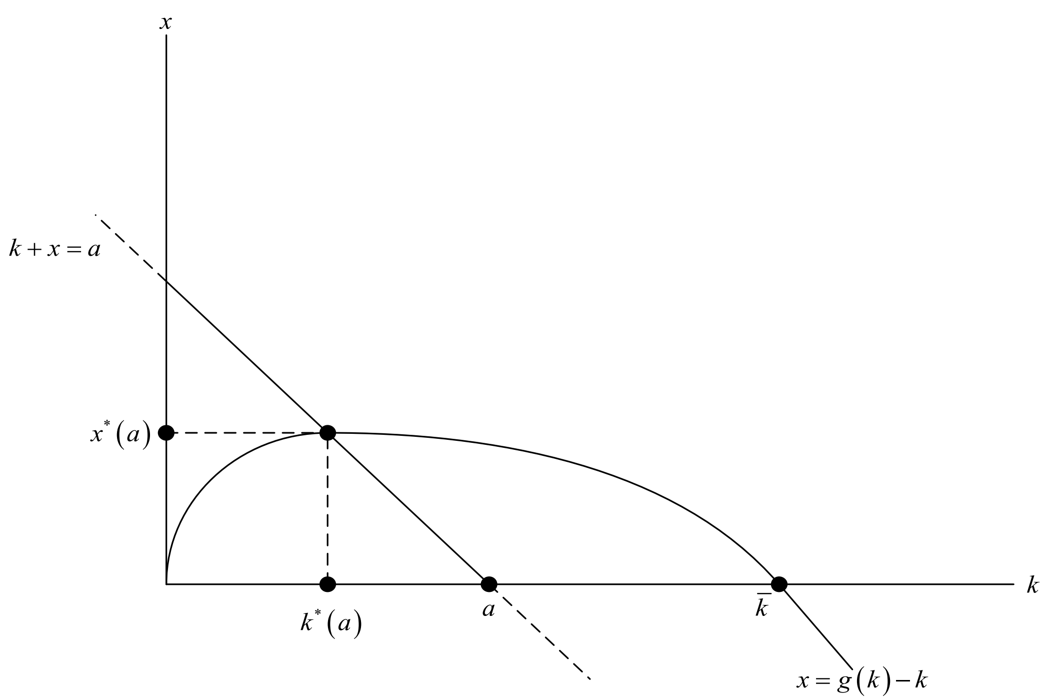
Sada se razmatra problem pronalaženja putanje za koju je $k(t)=k>0$ i $x(t)=x>0$, za svako $t=0,1,...,T$ $(k,x$ su konstante). Postavlja se pitanje da li je ravnotežna putanja rasta različita od nule. Ovaj problem se svodi na problem u kome je potrebno pronaći $k>0,\ x>0$, takvo da je

$$k+x=a \ \text{ i } \ x=g(k)-k. \tag{94}$$

Sa grafika 13 se može videti da je putanja, koja se traži, jedinstvena, ako je $a<\bar{k}$. Takva putanja se naziva ravnotežna putanja rasta po a i označava se sa $\{k^*(a),x^*(a)\}$. Može se primetiti da je $\bar{k}>k^*(a)>0$ i $x^*(a)>0$. Dalje se pretpostavlja

A-12. (a) $a<\bar{k}$, kada je $g''<0$ za svako $k(t)\geq 0$, ili

(b) $g(k(t))-k(t)>0$ za svako $k(t)>0$, kada je $g''=0$ za svako $k(t)\geq 0$.

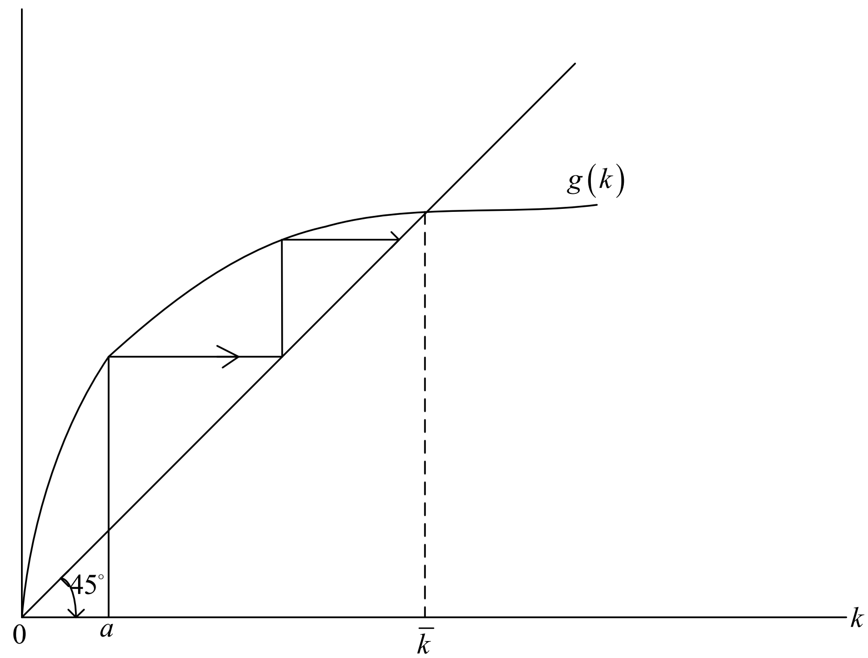


Grafik 13: Postojanje uravnotežene putanje rasta.

Važno je primetiti da iz ove pretpostavke sledi da je ekonomija u mogućnosti da raste, ako je $X(t)>0$ i $K(t)>0$ (ili $x(t)$ i $k(t)$), dok god početni uslovi zadovoljavaju $(A-12)$, za koje se može izabrati $x(t)=x^*(a)$ i $k(t)=k^*(a)$. S druge strane, može se posmatrati putanja čiste akumulacije ili putanja opstanka po a, koja se definiše na sledeći način:

$$k(0)=a,\ k(t+1)=g(k(t)),\ t=0,1,...,T-1,\ x(t)=0,\ t=0,1,...,T. \qquad (95)$$

Putanja čiste akumulacije je ilustrovana na grafiku 14.



Grafik 14: Putanja čiste akumulacije

Ukoliko $(A-12)$ ne važi, tj., ako je $a>\overline{k}$ i $f^{''<0}$, onda k_t monotono opada u putanji (95) ka $\overline{k}$, kada t raste. Ovaj slučaj nije zanimljiv i predstavlja jedno od objašnjenja uslova $(A-12)$.

3.5.2 Optimalna dopustiva putanja

Posmatra se sledeći $T-$period problem optimizacije:

$$\max_{(k(t),x(t))} U=\sum_{t=0}^{T} u(x(t))(1+\rho)^{-t},$$

$$\text{tako da je } x(t)+k(t)=g(k(t-1)),\ t=1,2,...,T,\ x(0)+k(0)=a,\ k(T)=b,$$

$$x(t)\geq 0,\ k(t)\geq 0,\ t=0,1,...,T.$$

Za stopu popusta $\rho\geq 0$ i funkciju korisnosti u važi sledeća pretpostavka

A-13. $\qquad u(0)=-\infty,\ u^{'}(x(t))>0$ i $u^{''}(x(t))<0$ za svako $x(t)$.

Rešenje gornjeg problema se naziva optimalna (dopustiva) putanja, koja počinje u tački a i završava se u b i označava se sa $(\hat{k}(t,a,b;T),\hat{x}(t,a,b;T))$ ili jednostavnije $(\hat{k}(t),\hat{x}(t))$ ili $(\hat{k}(t,b),\hat{x}(t,b))$.

S druge strane, putanja $\left(k(t),x(t)\right),\ t=0,1,...,T$, koja zadovoljava uslove:

$$x(t)+k(t)=g\left(k(t-1)\right),\ t=1,2,...,T \tag{96}$$

i

$$x(0)+k(0)=a,\ k(T)=b. \tag{97}$$

se naziva dopustiva putanja koja počinje u tački a i završava se u b. Kada se uslov (96) nametne i uslov (97) odbaci, onda je putanja izvodljiva. Optimalna dopustiva putanja je putanja koja maksimizira funkciju U u skupu dopustivih putanja. Skup dopustivih putanja može biti prazan, a samim tim se može desiti da ne postoji rešenje gornjeg problema. Na primer, može se desiti da je b preveliko i da ekonomija ne može da dostigne T perioda, čak iako je $x(t)=0$ za svako t. Skup svih dopustivih putanja se označava sa $A(a,b;T)$. Na beskonačnom vremenskom intervalu, kada $T\to\infty$, ovaj skup se označava sa $A(a,\infty)$ ili samo sa $A(a)$, gde se ne nameću ograničenja poput $\lim\limits_{T\to\infty}k(T)=b$.

Pretpostavlja se da skup dopustivih putanja nije prazan, u suprotnom, besmisleno je posmatrati ovaj problem. Dopustiv skup $A(a,b;T)$ je kompaktan u $(2T+2)-$dimenzionom Euklidskom prostoru. Kako bi se ovo dokazalo, pretpostavlja se da je $\left(k^q(t),x^q(t)\right),\ q=1,2,...,$ niz za koji važi

$$x^q(t)+k^q(t)=g\left(k^q(t-1)\right),\ t=1,2,...,T \tag{98}$$

$$x^q(0)+k^q(0)=a,\ k^q(T)=b, \tag{99}$$

i

$$k^q(t)\to k^*(t)\ \text{i}\ x^q(t)\to x^*(t). \tag{100}$$

Tada važi $x^*(t)+k^*(t)=g\left(k^*(t-1)\right),\ x^*(0)+k^*(0)=a$ i $k^*(T)=b$, s obzirom da je funkcija g neprekidna. Skup $A(a,b;T)$ je zatvoren skup, a kako je ovaj skup očigledno ograničen, onda je i kompaktan. Dakle, dopustiv skup $A(a,b;T)$ je neprazan i kompaktan, a kako je funkcija u neprekidna, Vajerštrasova teorema garantuje postojanje rešenja gornjeg problema nelinearnog programiranja.

Dalje se razmatra nenegativnost optimalne dopustive putanje. U stvari, može se pokazati da je $\left(\hat{k}(t),\hat{x}(t)\right)$ optimalna dopustiva putanja, ako je $\hat{k}(t)>0,\ \hat{x}(t)>0$ za svako $t=0,1,...,T$. Prvo se pretpostavlja da je $k^*(a)=b$. Jasno je da je putanja $\left(k(t),x(t)\right)$ u kojoj je $k(t)=k^*(a)>0,\ x_t=x^*(a)>0,\ t=0,1,...,T$ dopustiva putanja. Ako se pretpostavi da je $T=-\infty$ i $f(0)=0$, onda je

$$\hat{k}(t)>0,\hat{x}(t)>0,\ \text{za svako}\ t=0,1,...,T. \tag{101}$$

Ovo znači da za ovaj problem maksimizacije postoji „unutrašnje rešenje”. Sada se pretpostavlja da je $b<k^*(a)$. U tom slučaju postoji unutrašnje rešenje, pošto je putanja $\left(k(t),x(t)\right)$ za koju je $k(t)=k^*(a)>0,\ x(t)=x^*(a),t=0,1,...,T-1$ i $k(T)=b,\ x(T)=g\left(k^*(a)\right)-b=a-b$ dopustiva putanja i $k(t)>0,\ x(t)>0$ za svako t.

Dalje se nameće pretpostavka

A-14. $b \leq k^*(a)$.

Može se primetiti da je uslov $b = 0$ uvek zadovoljen.

Sada će se potvrditi jedinstvenost optimalne putanje, korištenjem Lagranžove funkcije i pretpostavkama da je $u^{"} < 0$ u $(A-4)$ i $g^{'} > 0$ u $(A-1)$. Radi jednostavnosti, uvodi se notacija $x = (x_0, x_1, ..., x_T)$ i $k = (k_0, k_1, ..., k_T)$. Dalje je $U(x) = \sum_{t=0}^{T} u(x_t)(1+\rho)^{-t}$.

Striktna konkavnost funkcije u implicira da je optimalna putanja potrošnje $\hat{x}$ jedinstvena. Kako bi se ova tvrdnja dokazala, pretpostavlja se suprotno da su $(\hat{k}, \hat{x})$ i $(k^{'}, x^{'})$ dve dopustive optimalne putanje i $\hat{x} \neq x^{'}$. Tada je $U(\hat{x}) = U(x^{'})$ i $a - \hat{x}_0 - \hat{k}_0 = 0,\ g(\hat{k}_{t-1}) - \hat{x}_t - \hat{k}_t = 0,\ t = 1,2,...,T,\ \hat{k}_T - b = 0,\ a - x_0^{'} - k_0^{'} = 0,$. $g(k_{t-1}^{'}) - x_t^{'} - k_t^{'} = 0,\ t = 1,2,...,T,\ k_T^{'} - b = 0$. Nova putanja, $(\hat{k}_t, \hat{x}_t)$ se definiše na sledeći način:

$$\tilde{x}_t = \frac{1}{2}(\hat{x}_t + x_t^{'}),\ t = 0,1,...,T-1, \tag{102}$$

$$\tilde{k}_0 = a - \tilde{x}_0,\ \tilde{k}_t = g(\tilde{k}_{t-1}) - \tilde{x}_t,\ t = 12,...,T, \tag{103}$$

$$\tilde{x}_T = g(\tilde{k}_{T-1}) - b. \tag{104}$$

Tada je putanja $(\tilde{k}_t, \tilde{x}_t)$ dopustiva putanja. Može se primetiti da je $\tilde{k}_0 = (\hat{k}_0 + k_0^{'})/2$. iz konkavnosti funkcije g, dobija se

$$\tilde{x}_1 + \tilde{k}_1 = g(\tilde{k}_0) \geq \frac{1}{2} g(\tilde{k}_0) + \frac{1}{2} g(k_0^{'}) = \frac{1}{2}(\hat{x}_1 + \hat{k}_1) + \frac{1}{2}(x_1^{'} + k_1^{'}) = \tilde{x}_1 + \frac{1}{2}(\hat{k}_1 + k_1^{'}) \tag{105}$$

Gornja nejednakost važi ukoliko je $\tilde{k}_0 = k_0^{'}$. Data jednakost, takođe, implicira da važi $\tilde{k}_1 \geq (\hat{k}_1 + k_1^{'})/2$, što implicira

$$\tilde{x}_2 + \tilde{k}_2 = g(\tilde{k}_1) \geq g\left(\frac{1}{2}\hat{k}_1 + \frac{1}{2}k_1^{'}\right) \geq \frac{1}{2} g(\hat{k}_1) + \frac{1}{2} g(k_1^{'}) \tag{106}$$

$$= \frac{1}{2}(\hat{x}_2 + \hat{k}_2) + \frac{1}{2}(x_2^{'} + k_2^{'}) = \tilde{x}_2 + \frac{1}{2}(\hat{k}_2 + k_2^{'}).$$

Odavde se dobila nejednakost $\tilde{k}_2 \geq (\hat{k}_2 + k_2^{'})/2.$ Nejednakost (106) važi, ukoliko je $\hat{k}_0 = k_0^{'}$ i $\hat{k}_1 = k_1^{'}$. Sada se može, ponavljajući navedeni proces, zaključiti da važi:

$$\tilde{x}_T + b = g(\tilde{k}_{T-1}) \geq g\left(\frac{1}{2}\hat{k}_{T-1} + \frac{1}{2}k_{T-1}^{'}\right) \geq \frac{1}{2} g(\hat{k}_{T-1}) + \frac{1}{2} g(k_{T-1}^{'}) \tag{107}$$

$$= \frac{1}{2}(\hat{x}_T + b) + \frac{1}{2}(\hat{x}_T^{'} + b) = \frac{1}{2}(\hat{x}_T + x_T) + b.$$

Nejednakost važi, ukoliko je $\hat{k}_t = k_t^{'}$ za svako $t = 0,1,2,...,T$. Stoga, $\tilde{x}_T \geq \left(\hat{x}_T + x_T^{'}\right)/2$ važi, ako je $\hat{k}_t = k_t^{'}$ za svako $t = 0,1,2,...,T$.. Iz monotonosti i stroge konkavnosti funkcije u, sledi

$$U\left(\tilde{x}\right) \geq U\left(\frac{1}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}x^{'}\right) > \frac{1}{2}U\left(\hat{x}\right) + \frac{1}{2}U\left(x^{'}\right) \tag{108}$$

što je kontradikcija. Može se primetiti da se u gornjim razmatranjima nije uzimao u obzir slučaj $\hat{k} \neq k^{'}$. Pokazaće se da je ovaj slučaj nemoguć. Neka su $\left(\hat{k}, \hat{x}\right)$ i $\left(k^{'}, x^{'}\right)$ dve dopustive optimalne putanje. Iz uslova dopustivosti, sledi

$$g\left(\hat{k}_{t-1}\right) - \hat{k}_t = g\left(k_{t-1}^{'}\right) - k_t^{'},\ t = 1,2,...,T. \tag{109}$$

S obzirom da važi $\hat{k}_T = k_T^{'} = b$, iz monotonosti funkcije g važi $\hat{k}_{T-1} = k_{T-1}^{'}$. Koristeći relaciju (109) dobija se $\hat{k}_t = k_t^{'},\ t = 0,1,2,...,T$, što je konzistentno sa $a - \hat{k}_0 = a - k_0^{'}$, dakle $\hat{k} = k^{'}$. Može se primetiti da je u gornjem dokazu ključna pretpostavka bila $g^{'} > 0$, a ne $g^{''} < 0$.

Sada kada su postojanje i jedinstvenost optimalne dopustive putanje dokazani, nastavlja se sa karakterizacijom putanje. Za gornji problem maksimizacije, uvode se ograničenja:

$$h_0\left(k_0, x_0\right) = a - x_0 - k_0, \tag{110}$$

$$h_t\left(k_{t-1}, k_t, x_t\right) = g\left(k_{t-1}\right) - x_t - k_t,\ t = 1,2,...,T. \tag{111}$$

Kako bi se dobila karakterizacija prvog reda za gornji problem maksimizacije, ispituje se rang kvalifikacije ograničenja. U ovu svrhu se definiše $(T+1)\times(2T+1)$ matrica H na sledeći način:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_0}{\partial k_0} & \cdots & \frac{\partial h_0}{\partial x_T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_T}{\partial k_0} & \cdots & \frac{\partial h_T}{\partial x_T} \end{pmatrix} \tag{112}$$

Broj efektivnih ograničenja za gornji problem je $(T+1)$, a rang kvalifikacije ograničenja ovog problema govori da rang matrice H treba da bude $(T+1)$. Lako se može primetiti da je ovaj uslov u opštem slučaju zadovoljen.

Definiše se Lagranžova funkcija L za gornji problem

$$L = \sum_{t=0}^{T} u\left(x_t\right)\left(1+\rho\right)^{-t} + \sum_{t=0}^{T} p_t h_t \tag{113}$$

pri čemu se $p_0, p_1, ..., p_T$ množitelji Lagranža.

Kako je ograničenje kvalifikacije zadovoljeno, uslov prvog reda daje potreban uslov za optimum

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial k_t} = -p_t + p_{t+1} g^{'}\left(\hat{k}_t\right) = 0,\ t = 0,1,...,T-1, \tag{114}$$

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial x_t} = u^{'}\left(\hat{x}_t\right)\left(1+\rho\right)^{-t} - p_t = 0,\ t = 0,1,2,...,T. \tag{115}$$

Može se primetiti da pošto ne važe nejednakosti $\frac{\partial \hat{L}}{\partial k_t} \leq 0$ i $\frac{\partial \hat{L}}{\partial x_t} \leq 0$, nejednakost $(A-14)$ i pretpostavke $u(0) = -\infty,\ f(0) = 0$ isključuju se rešenja sa ruba domena ($\hat{k}_t = 0,\ \hat{x}_t = 0$ ta neko t). Iz jednakosti (115) i pretpostavke $u^{'}\left(x_t\right) > 0$ za svako x_t može se zaključiti da je $p_t > 0$ za svako $t = 0$. Jednačine (114) i (115) daju $(2T+1)$ jednačinu i zajedno sa $(T+1)$ ograničenjem, govore da je potrebno rešiti sistem od $(2T+1)+(T+1)$ kako bi se došlo do optimalnog rešenja.

Lako je pokazati da jednačine (114) i (115) zajedno sa ograničenjima (97) i (98) daju skup dovoljnih uslova za (globalni) optimum, pod uslovom da su funkcije u i g konkavne. Ranije smo dokazali da je dopustiva putanja jedinstvena i ovi uslovi daju potreban i dovoljan uslov za jedinstveni globalni optimum. Iz uslova (114) i (115) dobija se:

$$u^{'}\left(\hat{x}_t\right) = u^{'}\left(\hat{x}_{t+1}\right)\frac{g^{'}\left(\hat{k}_t\right)}{1+\rho},\ t = 0,1,...,T-1. \tag{116}$$

Jednačina (116) daje T uslova, uz $(T+2)$ uslova iz jednakosti (96) i (97), sledi da je potrebno odrediti vrednost $(2T+2)$ promenljivih $\hat{k}_t,\ \hat{x}_t,\ t = 0,1,...,T$.

U ekonomskom smislu, jednakost (116) je jednostavno primetiti. Smanjenjem potrošnje za jednu jedinicu po dobru, gubitak korisnosti u $t-$tom periodu je $u^{'}\left(\hat{x}_t\right)$. Investiranjem jedinice za koju je smanjena potrošnja, dolazi do dobitka za $g^{'}\left(\hat{x}_t\right)$ u „neto" autputu, što opet dovodi do povećanja korisnosti za $\frac{u^{'}\left(\hat{x}_{t+1}\right)g^{'}\left(\hat{k}_t\right)}{1+\rho}$. Jednačina (116) će sada biti zapisana u sledećem obliku:

$$u^{'}\left(\hat{x}_{t+1}\right) - u^{'}\left(\hat{x}_t\right) = -\frac{u^{'}\left(\hat{x}_{t+1}\right)}{1+\rho}\left(g^{'}\left(\hat{k}_t\right) - (1+\rho)\right). \tag{116'}$$

Sledećom teoremom se sumira gornji rezultat.

Teorema 3.5.: Pod pretpostavkama $(A-10)$, $(A-11)$, $(A-12)$, $(A-13)$ i $(A-14)$ važe sledeća tvrđenja:

i. Uravnotežena putanja rasta $\left(k^*(a), x^*(a)\right)$, koja polazi od tačke $a>0$ postoji, jedinstvena je i $k^*(a)>0,\ x^*(a)>0$.

ii. Optimalna dopustiva putanja $\left(\hat{k}_t, \hat{x}_t\right)$ koja počinje u tački $a>0$ i završava se u $k_T = b \geq 0$ postoji, jedinstvena je, važi $\hat{k}_t > 0,\ \hat{x}_t > 0$ za svako $t = 0,1,2,\ldots,T$ i moguće je očekivati $k_T = b = 0$.

iii. Potreban i dovoljan uslov kako bi putanja bila optimalna i dopustiva je dat jednačinama (116), (96) i (97).

Dalje se definiše koncept kompetitivnosti.

Definicija 3.4.: Dopustiva putanja $\left(\hat{k}_t, \hat{x}_t\right)$ koja polazi od tačke a i završava se u tački b, naziva se kompetitivna putanja, ako postoje nenegativni brojevi („cene”) p_t takvi da je

$$u\left(\hat{x}_t\right)(1+\rho)^{-t} - p_t\hat{x}_t \geq u\left(x_t\right)(1+\rho)^{-t} - p_t x_t \qquad (117)$$
$$za\ svako\ x_t \geq 0,\ t = 0,1,\ldots,T$$

i

$$p_t g\left(\hat{k}_{t-1}\right) - p_{t-1}\hat{k}_{t-1} \geq p_t g\left(k_{t-1}\right) - p_{t-1}k_{t-1} \qquad (118)$$
$$za\ svako\ k_{t-1} \geq 0,\ t = 0,1,\ldots,T.$$

Primedba: Relacija (117) u definiciji kompetitivnosti implicira da potrošači imaju cilj da maksimiziraju korisnost uz ograničenje budžeta, tj.

$$u\left(\hat{x}_t\right) \geq u\left(x_t\right) \text{ za svako } p_t x_t \leq p_t \hat{x}_t,\ t = 0,1,\ldots,T \qquad (119)$$

Uslov (118) je uslov maksimizacije profita s tačke gledišta proizvođača.

Posledica 3.6.: Dostupna putanja je kompetitivna ako i samo ako je optimalna.

***Dokaz**:* Prethodna teorema nam garantuje da je dostupna putanja optimalna ako i samo ako postoji p_t, $t = 0,1,\ldots,T$ takvo da je

$$\sum_{t=0}^{T} u\left(\hat{x}_t\right)(1+\rho)^{-t} + p_0\left(a - \hat{x}_0 - \hat{k}_0\right) + \sum_{t=1}^{T} p_t\left(g\left(\hat{k}_{t-1}\right) - \hat{x}_t - \hat{k}_t\right) \qquad (120)$$
$$\geq \sum_{t=0}^{T} u\left(x_t\right)(1+\rho)^{-t} + p_0\left(a - x_0 - k_0\right) + \sum_{t=1}^{T} p_t\left(g\left(k_{t-1}\right) - x_t - k_t\right)$$

za svako $k_t, x_t \geq 0,\ t = 0,1,\ldots,T$. Neka je $x_t = \hat{x}_t$ za svako $t = 0,1,\ldots,T$, izuzev za $t = t_0$. Zatim se dobija prvi uslov, pošto je izbor t_0 proizvoljan. Dalje se pretpostavlja da je $k_t = \hat{k}_t$, za svako $t = 1,2,\ldots,T$, izuzev za $t = t_0$. i $x_t = \hat{x}_t$ za svako $t = 0,1,\ldots,T$. Pošto je t_0 proizvoljno, izraz (118) daje drugi uslov kompetitivnosti. Drugim rečima, optimalnost implicira kompetitivnost.

□

Sada se ponovo razmatra problem kada je t „preveliko”. Na sledeći način se definišu $\hat{k}(\rho)$ i $\hat{x}(\rho)$:

$$g^{'}\left(\hat{k}(\rho)\right)=1+\rho \tag{121}$$

$$\hat{x}(\rho)=g\left(\hat{k}(\rho)\right)-\hat{k}(\rho) \tag{122}$$

Pretpostavlja se da je za svako $k, g^{"}(k)<0$ i nameću se uslovi $(A-2)$, deo (a). Tada $\left(\hat{k}(\rho),\hat{x}(\rho)\right)$ definiše modifikovanu putanju zlatnog pravila, kada se vreme posmatra kao diskretna promenljiva. Može se primetiti da je $0<\hat{k}(\rho)<\overline{k}$ i kako je $g^{"}(k_t)<0$ za svako k_t i $u^{"}(x_t)<0$ za svako x_t iz jednakosti $\left(116^{'}\right)$ se može zaključiti da važi

$$\hat{x}_{t+1}-\hat{x}_t \underset{<}{\overset{>}{=}} 0\text{, ako je } \hat{k}_t \underset{>}{\overset{<}{=}} \hat{k}(\rho) \tag{123}$$

Uslov (89) se zapisuje na sledeći način

$$k_{t+1}-k_t=g(k_t)-k_t-x_{t+1} \tag{$89^{'}$}$$

Lako se može zaključiti da važi

$$\hat{k}_{t+1}-\hat{k}_t \underset{<}{\overset{>}{=}} 0 \text{ u zavisnosti da li je } g\left(\hat{k}_t\right)-\hat{k}_t-\hat{x}_{t+1} \underset{<}{\overset{>}{=}} 0 \tag{124}$$

Posledica 3.7. (Remzi – Kupmans – Kas): Kada $t\to\infty$ (i $T\to\infty$), tada $\hat{x}_t\to\hat{x}(\rho)$ i $\hat{k}_t\to\hat{k}(\rho)$, bez obzira na početnu tačku a.

3.5.3 Analiza osetljivosti: Brokova teorema

U ovom delu će biti reći o analizi osetljivosti, tačnije o „osetljivosti” optimalne dopustive putanje u odnosu na krajnju tačku b. Sada je moguć slučaj u kome će važiti $g^{"}(k_t)=0$ za svako k_t.U analizi koja sledi pretpostaviće se da važe neke promene vezane za funkcije u i g. Funkcija $u(x_t)$ se može zameniti sa $u(x_t,t)$, dok $g(k_t,t)$ zamenjuje $g(k_t)$. Uslov (89) se može zapisati na sledeći način

$$x_{t+1}+k_{t+1}=g\left(k_t,t\right),\ t=0,1,...,T-1 \tag{$89^{"}$}$$

Uslov (116) se takođe može zapisati na sledeći način:

$$u^{'}\left(\hat{x}_t,t\right)=u^{'}\left(\hat{x}_{t+1},t\right)\frac{g^{'}\left(k_t,t\right)}{1+\rho}. \tag{$116^{"}$}$$

Faktor $(1+\rho)^{-t}$ se može izostaviti iz funkcije cilja U i ona ima oblik $U=\sum_{t=0}^{T}u\left(x_t,t\right)$, takođe je iz uslova $\left(116^{'}\right)$ moguće izostaviti $(1+\rho)$.

Optimalne dopustive putanje sa $T-$perioda koje počinju u a i završavaju se u b_1 i b_2, pri čemu je $b_1 > b_2$ se redom označavaju sa $\left(\hat{k}_t(b_1), \hat{x}_t(b_1)\right)$ i $\left(\hat{k}_t(b_2), \hat{x}_t(b_2)\right)$. Neka je $\hat{k}_0(b_1) \leq \hat{k}_0(b_2)$. Tada sledi

$$\hat{x}_0(b_1) \geq \hat{x}_0(b_2), \tag{125}$$

jer je $\hat{x}_0(b_1) + \hat{k}_0(b_1) = a = \hat{x}_0(b_2) + \hat{k}_0(b_2)$, što dalje implicira $u'\left(\hat{x}_0(b_1), t\right) \leq u'\left(\hat{x}_0(b_2), t\right)$. Uvode se oznake

$$\begin{gathered} P_t(b_1) = u'\left(\hat{x}_t(b_1), t\right),\ P_t(b_2) = u'\left(\hat{x}_t(b_2), t\right) \\ g_t'(b_1) = g'\left(\hat{k}_t(b_1), t\right),\ g_t'(b_2) = g'\left(\hat{k}_t(b_2), t\right). \end{gathered} \tag{126}$$

Tada važi

$$P_0(b_1) \leq P_0(b_2), \tag{127-a}$$

$$g_0'(b_1) \geq g_0'(b_2), \tag{127-b}$$

$$g_0(b_1) \leq g_0(b_2). \tag{127-c}$$

Iz jednakosti $\left(115'\right)$ i $(127-b)$ se dobija

$$\frac{P_0(b_1)}{P_1(b_1)} = \frac{g_0'(b_1)}{1+\rho} \geq \frac{g_0'(b_2)}{1+\rho} = \frac{P_0(b_2)}{P_1(b_2)}, \tag{128}$$

a dalje sledi iz relacije (128) i $(27-a)$:

$$\frac{P_1(b_1)}{P_1(b_2)} \leq \frac{P_0(b_1)}{P_0(b_2)} \leq 1. \tag{129}$$

Dakle, $P_1(b_1) \leq P_1(b_2)$, a samim tim je $\hat{x}_1(b_1) \geq \hat{x}_1(b_2)$. Ova nejednakost zajedno sa uslovima $(127-a)$ i (95) daje

$$\begin{aligned} \hat{k}_1(b_1) - \hat{k}_1(b_2) &= \left(g_0(b_1) - \hat{x}_1(b_1)\right) - \left(g_0(b_2) - \hat{x}_1(b_2)\right) \\ &= \left(g_0(b_1) - g_0(b_2)\right) - \left(\hat{x}_1(b_1) - \hat{x}_1(b_2)\right) \leq 0. \end{aligned} \tag{130}$$

Ponavljajući postupak, za svako $t = 1, 2, ..., T$, dobija se

$$\hat{k}_t(b_1) \leq \hat{k}_t(b_2), \tag{131}$$

što je u kontradikciji sa $\hat{k}_T(b_1) = b_1 > b_2 = \hat{k}_T(b_2)$. Odatle je

$$k_0(b_1) > k_0(b_2). \tag{132}$$

Ponavljajući postupak, dobija se

$$\begin{gathered} \hat{k}_t(b_1) > \hat{k}_t(b_2),\ \text{za svako}\ t = 0, 1, ..., T\ \text{i} \\ \hat{x}_t(b_1) < \hat{x}_t(b_2),\ \text{za svako}\ t = 1, 2, ..., T. \end{gathered} \tag{133}$$

Ovo znači da povećanje u krajnjim tačkama dovodi do povećanja $\hat{k}_t$ i do pada $\hat{x}_t$ za svako t na dopustivoj optimalnoj putanji.

Dalje će se razmatrati do kakvih promena dolazi, promenom vremenskog intervala T. Optimalna dopustiva putanja na vremenskom intervalu T, koja počinje u tački a i završava se u b se označava sa $\left(\hat{k}_t^T(b), \hat{x}_t^T(b)\right)$. Na primer, sa $\hat{k}_T^{T+1}(0)$ se označava kapital u periodu T na dopustivoj optimalnoj putanji sa $T+1$ periodom, koja počinje u tački a i završava se u $k_{T+1}=0$.

Sada će se upoređivati dve optimalne putanje, koje počinju u tački a, a završavaju se u tački 0. Jedina razlika između njih, biće dužina planiranog vremenskog intervala, prva će imati T perioda, a druga $T+1$. Tada je $\hat{k}_{T+1}^{T+1}(0)=\hat{k}_T^T(0)=0$, međutim važi $\hat{k}_T^{T+1}>0$, jer ako bi važilo da je $\hat{k}_T^{T+1}=0$, onda bi takođe bilo $\hat{x}_T^{T+1}=0$, što implicira $u\left(\hat{x}_{T+1}^{T+1}, T+1\right)=-\infty$. Dalje se posmatra

$$\hat{k}_t^{T+1}(0)=\hat{k}_t^T(\hat{k}_T^{T+1}(0)),\ t=0,1,...,T. \tag{134}$$

Vrednost funkcije U na $(T+1)-$periodu se može uvek povećati pomoću sledeće putanje $\hat{k}_t^T(\hat{k}_T^{T+1}(0)),\ t=0,1,...,T$. S obzirom da je $\hat{x}_T^{T+1}>0$, jednačina (134) implicira

$$0=\hat{k}_T^T(0)<\hat{k}_T^T\left(\hat{k}_T^{T+1}(0)\right). \tag{135}$$

Dakle, jednačine (133) i (135) daju

$$\hat{k}_t^T(0)<\hat{k}_t^{T+1}(0) \text{ za svako } t=0,1,...,T \tag{136}$$

i

$$\hat{x}_t^T(0)>\hat{x}_t^{T+1}(0) \text{ za svako } t=0,1,...,T\,.$$

Za svako t, takođe, važi

$$\hat{k}_t^T(0)<\hat{k}_t^{T+1}(0)<\hat{k}_t^{T+2}(0)<... \tag{137}$$

i

$$\hat{x}_t^T(0)>\hat{x}_t^{T+1}(0)>\hat{x}_t^{T+2}(0)>... \tag{138}$$

Drugim rečima, povećanje planiranog vremenskog horizonta kada je krajnja tačka 0, uvek dovodi do povećanja optimalnih zaliha i smanjenja optimalne potrošnje za svako t.

Dalje se može primetiti da je

$$\hat{k}_t^T(0)\leq\bar{k}_t,\text{ za svako } t=0,1,...,T;\ T=1,2,... \tag{139}$$

gde $\bar{k}_t$ označava k_t u putanji čiste akumulacije. Dakle, za svako t, funkcija $\hat{k}_t^T(0)$ ograničena sa gornje strane, monotono raste po T. Dakle, granična vrednost, koja se označava sa $\hat{k}_t$, $\lim_{T\to\infty}\hat{k}_t^T(0)$ postoji. S druge strane, funkcija $\hat{x}_t^T(0)$ ograničena sa donje strane monotono opada po T, što garantuje postojanje granične vrednosti $\hat{x}_t=\lim_{T\to\infty}\hat{x}_t^T(0)$. Neprekidnost funkcije g, govori o postojanju putanje $\left(\hat{k}_t,\hat{x}_t\right)$.

Ova konvergencija je od suštinskog značaja za analizu senzitivnosti po T, Distanca između $\hat{k}_t^T(0)$ i $\hat{k}_t^{T'}(0)$, kao i između $\hat{x}_t^T(0)$ i $\hat{x}_t^{T'}(0)$ može biti proizvoljno mala, ako su početni periodi T i T' dovoljno veliki. Može se primetiti da putanja $(\hat{k}_t, \hat{x}_t)$ odgovara putanji koju su Kupmans i Kas dobili rešavajući problem beskonačnog vremenskog intervala.

4. Zaključak

U radu je posmatran neoklasični model rasta, kao i načini na koje se vremenom menjao pod uticajem tehnološkog napredka, kao i promena ekonomskih prilika. Pomoću ovog modela je određen pad stope rasta potrošnje po stanovniku u zavisnosti od stope uticaja klimatskih promena i moglo se zaključiti da što je uticaj veći, stopa rasta je manja.

Nakon što je prikazana veza između modela u kome je vreme neprekidna slučajna promenljiva sa modelom u kome je diskretna slučajna promenljiva, primenjena je „analiza senzitivnosti”. Nakon svega, može se zaključiti da je u praksi primenljiviji „diskretan model” od modela u kome je vreme konstantno. Razlog tome je činjenica da je u stvarnosti vreme pod uticajem ljudskog faktora, primera radi vlasnik određuje u koje vreme i koliko dugo će prodavnica biti otvorena.

5. Dodatak

Robert Solou

Robert Solou je američki ekonomista, rođen 13. avgusta 1924. godine u Bruklinu, Njujork. Osnovno obrazovanje je stekao u obližnjoj javnoj školi, da bi sa šesnaest godina bio primljen na Harvard.

Na Harvardu se zadržao tek nešto više od dve godine, jer se krajem 1942. godine pridružio vojnim snagama Sjedinjenih Država. Kratko je boravio na frontu u severnoj Africi, da bi kraj Drugog svetskog rata dočakao u Italiji.

Po završetku rata vraća se na Harvard, gde zajedno sa svojim profesorom Vasilijem Leontifom započinje rad na tehnikama kvantitivne ekonomije. Dve godine provodi na univerzitetu Kolumbija, gde se ozbiljno zainteresovao i počeo da izučava verovatnoću i statistiku. Za to vreme je radio i na svojoj doktorskoj disertaciji.

Pre nego što je otišao na univerzitet Kolumbija, Solou je prihvatio mesto docenta na departmanu za ekonomiju Instituta za tehnologiju u Masačusetsu. Tamo je skoro 40 godina sa svojim saradnikom Polom Samuelsonom radio na Fon Nojmanovoj teoriji rasta, teoriji kapitala, linearnom programiranju i Filipsovim krivama.

Godine 1961. je osvojio nagradu američkog udruženja ekonomista Džon Nejts Klark, koja se dodeljuje najboljem ekonomisti mlađem od četrdeset godina. Nobelovu nagradu za ekonomiju je osvojio 1987. godine. Nosilac je odlikovanja za nauku i predsednik centra za Ekonomske studije, čiji je jedan od osnivača.

Poznat po svom radu na teoriji ekonomskog rasta. Njegov rad je dostigao vrhunac kreiranjem modela rasta koji nosi njegovo ime. Dobitnik je medalje Džon Bejts Klark (1961), kao i Nobelove nagrade za ekonomiju (1987).

Frenk Remzi

Frenk Remzi, britanski matematičar, ekonomista i filozof, je rođen 22. februara 1903 u Kembridžu. Njegov otac Artur je bio predsednik Koledža Magdalen. Zahvaljujući uspesima ostvarenim na koledžu Vinčester, dobija stipendiju koledža Triniti, Kembridž.

Remzijev neverovatan talenat, nadaleko poznat u Kembridžu, je primećen od strane ekonomiste Džona Kajnesa, kada je Remzi imao svega šesnaest godina. Uz njegovu pomoć, Remzi je dao značajan doprinos teorijama oporezivanja i rasta.

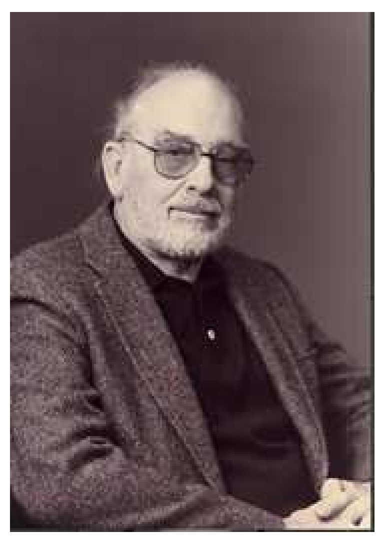
Godine 1928. je objavio rad u kome varijacioni račun primenjuje na model optimalne štednje. Ovaj model se smatra početkom neoklasične teorije rasta, a kasnije su ga usavršili Tjaling Kupmans i Dejvid Kas.

Radio je i na teoriji verovatnoće, međutim dok se nije pojavila *Teorija igara* Džona fon Nojmana i Oskara Morgensterna, njegov rad nije uziman za ozbiljno.

Doprinos Frenka Remzija nauci bi sigurno bio mnogo veći da nije preminuo u svojoj 26. godini od posledica hroničnog oboljenja jetre.

Dejvid Kas

Dejvid Kas (10. januar 1937. - 15. aprila 2008.) je bio profesor ekonomije na univerzitetu u Pensilvaniji. Najpoznatiji je po svom radu na Remzijevom modelu rasta, koji je još poznat i kao Remzi – Kas – Kupmans model.



Rođen u porodici advokata, Kas nakon završene ekonomije na univerzitetu Oregon, upisuje pravo na Harvardu kako bi nastavio porodičnu tradiciju. Međutim, nakon samo godinu dana napušta pravo i odlazi na služenje vojnog roka. Nakon vojske, vraća se ekonomiji i upisuje doktorske studije na Stenfordu. Mentor mu je bio Hirofumi Uzava, koji ga je upoznao sa Tjalingom Kupmansom, u to vreme profesorom, na Jejlu. Godine 1965., Kas je odbranio svoju doktorsku disertaciju pod nazivom *Optimalni rast u agregatnom modelu akumulacije kapitala*.

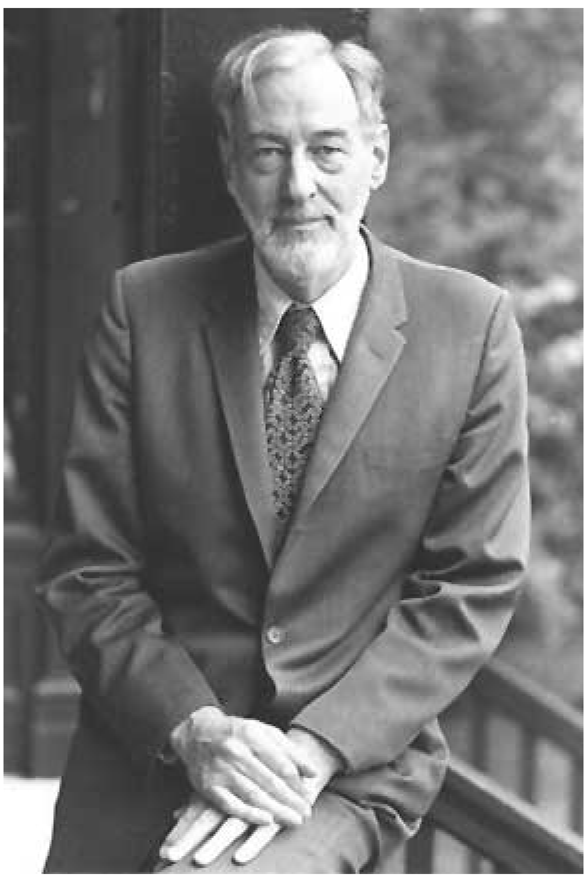
Nakon odbranjene doktorske disertacije, Kas je proveo pet godina na mestu docenta departmana za ekonomiju na univerzitetu Jejl i kao saradnik Komisije za ekonomska istraživanja u Nju Hejvenu.

Od 1974. godine, pa sve do svoje smrti radio je kao profesor na univerzitetu Pensilvanija, a jedan od njegovih studenata, Fin Kidland je kasnije osvojio Nobelovu nagradu za ekonomiju.

Od 1970. godine bio je član društva Gugenhajm, a 1972. je izabran za člana Ekonomskog društva. Počasni doktor nauka Ženevskog univerziteta, postao je 1994., a za počasnog člana Američkog društva ekonomista 1999. Od 2003. bio je član američke akademije nauka i umetnosti.

Tjaling Kupmans

Tjaling Kupmans (28. avgust 1910. – 26. februar 1985.) je rođen 28. avgusta 1910. u mestu Graveland, Severna Holandija. Svoje fakultetsko obrazovanje je započeo već sa sedamnaest godina na univerzitetu u Utrehtu, gde mu je glavni predmet bila matematika. Tri godine kasnije, počeo je da izučava teorijsku fiziku. Godine 1933. sreće Jana Tinbergera i seli se u Amsterdam, da bi kod njega učio matematičku ekonomiju, kao i statistiku i ekonometriju.



U SAD se seli 1940. godine i tamo počinje da radi pri vladi SAD-a i objavljuje Ekonomiju transporta. Američko državljanstvo dobija 1946. godine da bi dve godine kasnije postao predsednik Komisije za ekonomska istraživanja.

Kupmansov rad na Hartri-Flok teoriji je mnogo doprineo u formulaciji Kupmansove teoreme, dobro poznate u kvantnoj hemiji. Zajedno sa Leonidom Kantorovičem je nagrađen Nobelovom nagradom za svoj doprinos razvoju teorije optimalne iskorištenosti resursa. Rad za koji je nagrađen, zasnivao se na odnosu inputa i autputa funkcije proizvodnje, kao i vezi između cena i ekonomske efikasnosti.

6. Literatura

[1] A. Takayama: Mathematical Economics, purdue University, 1974

[2] A. Takayama: Mathematical Economics, 2nd Edition, Cambridge University Press, 1985

[3] D. K. Hoover, M. Boianovsky: The Neoclassical Growth Model and 20th Century Economics, History of Political Economy Conference, 2009

[4] K. Whelan: The Solow model of Economic Growth, University Dublin, 2005

[5] S. Kurepa: Funkcionalna analiza, Zagreb: Školska knjiga, 1981

[6] S. Fankhauser, R. S. J. Tol: Climate Change and Growth, Hamburg, Vrije and Carnegie Mellon Universities, 2001

[7] S. Fempl: Elementi varijacionog računa, Građevinska knjiga, Beograd 1965

Biografija

Rođena sam 13.novembra 1985. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu "Žarko Zrenjanin" sam završila u Novom Sadu.

Završila sam opšti smer gimnazije „Svetozar Marković" u Novom Sadu.

Studije matematike finansija na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu sam upisala 2004. godine. Poslednji ispit sam položila 16. septembra 2008. godine.

Prosek mojih ocena u toku osnovnih studija je bio 8,23.

Master studije na Departmanu za matematiku i informatiku na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom sadu upisala sam 2009. godine. Poslednji ispit na master studijama sam položila u septembru 2010.

Od novembra 2010. sam zaposlena u firmi Pro-elektro.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Jelena Mitrović
AU
Mentor: Dr Nenad Teofanov
MN
Naslov rada: Varijacioni račun i modeli rasta
MR
Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: s/e
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2011
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, PMF, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: (6, 76 , 0, 0, 1, 14, 9)
(broj poglavlja, br. strana, br. literarnih citata, br. tabela, br. slika, br. grafika, br. priloga)
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Finansijska matematika
ND
Ključne reči: varijacioni račun, neoklasični model rasta, putanja zlatnog pravila
PO
UDK:

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod:
IZ
U ovom radu objašnjeni su modeli rasta i odgovarajuća matematička teorija. Primenom varijacionog računa su rešavani neki osnovni problemi makroekonomskog rasta.
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 11. 07. 2011.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO

Predsednik: Dr Ljiljana Gajić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: Dr Nenad Teofanov, redovni profesor Prirodno matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: Dr Sanja Konjik, docent Prirodno matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE KEY
WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents code: Master thesis
CC
Author: Jelena Mitrović
AU
Mentor: Dr Nenad Teofanov
MN
Title: Calculus of Variation and Growth Models
TI
Language of text: Serbian
LT
Language of abstract: English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2011
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: (6, 76 , 0, 0, 1, 14, 9)
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Financial mathematics
SD
Key words: Calculus of Variation, Neoclassical Growth Model, Golden Rule Path
SKW
UC:

Holding data: In library of Department of Mathematics
HD
Note:
N
Abstract:
AB
In this thesis we presented growth models and required mathematical theory. Basic problems of macroeconomic growth were solved by application of valculus of variation.

Accepted by the Scientific Board on: 11. 07. 2011.
ASB
Defended:
DE
Thesis defend board:
DB

President: Dr Ljiljana Gajić, Full Professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad
Member: Dr Nenad Teofanov, Full Professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad
Member: Dr Sanja Konjik, Assistant Professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad