Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i
informatiku

Jelena Ilkić

Portfolio optimizacija nasuprot jednostavne diverzifikacije: da li je $1/N$ dovoljno dobra strategija na duži rok?

Master rad

Novi Sad, 2012.

Sadržaj

Predgovor

Osnovna ideja u radu je da se utvrdi koliko je zaista efikasna $1/N$ diverzifikacija u poređenju sa modernom portfolio optimizacijom. Odnosno, ideja je da se utvrdi pod kojim uslovima je bolja moderna portfolio teorija a pod kojim naivna diverzifikacija.

Rad sadrži pet poglavlja. Prvo poglavlje je posvećeno uvođenju čitaoca u problematiku koja je obrađena u radu i sadrži pregled osnovnih definicija i teorema. Drugo poglavlje sadrži objašnjenje portfolio strategija koje poredimo u radu. Treći deo rada objašnjava na koji način ćemo da poredimo strategije. Četvrto poglavlje je posvećeno empirijskim rezultatima. Poslednji deo je, naravno, zaključak u kom su ukratko dati rezultati do kojih se došlo kroz rad.

Svom mentoru, dr Milošu Božović, dugujem zahvalnost kako na pomoći prilikom odabira teme tako i na brojnim konsultacijama koje su mi bile od velike pomoći prilikom izrade ovog rada. Zanimljiva i veoma poučana predavanja iz Finansija 2 svakako su bila motiv da odaberem temu iz ove oblasti.

Takođe bih se zahvalila članovima komisije, dr Nataši Krejić i dr Zorani Lužanin, pre svega na interesantnim predavanjima tokom studija.

Zahvaljujem se svojoj tetki Slavki kod koje sam stanovala tokom osnovnih studija na razumevanju. Svojoj dragoj prijateljici Mimi želim da se zahvalim na iskrenom prijateljstvu i vremenu koje provodimo zajedno. Takođe, Mariji i Mileni bih se zahvalila na druženjima tokom studija i na vremenu koje i sada jedna za drugu nađemo.

Bratu Vladimiru dugujem zahvalnost za podršku i razumevanje, posebno mu se zahvaljujem na sposobnosti da me uvek nasmeje i oraspoloži. Miljanu bih se zahvalila na konstantnom ohrabrivanju i podršci tokom poslednjih sedam godina.

Na kraju, svojim dragim roditeljima, Dušanu i Anđeliji, želim da se zahvalim na ljubavi, pomoći i podršci koju mi svakodnevno pružaju tokom čitavog života.

1 Uvod

Jedan od najvećih problema u svetu investicija jeste naći optimalan portfolio za skup raspoloživih aktiva i datu količinu kapitala. Savremena portfolio teorija teži da nađe optimalan model koji će da da najbolje rezultate. Kroz ovaj rad ćemo pokušati da saznamo da li zaista portfolio teorija uspeva da nadjača naivnu portfolio diverzifikaciju koja svakoj aktivi dodeljuje isti težinski koeficijent $(1/N)$. Harry Markowitz je jedan od prvih koji uvodi modernu portfolio teoriju. U njegovim modelima optimizacije investitiori vode računa samo o očekivanju i varijansi očekivane stope prinosa. U radu će biti data dva modela portfolija kojima se on bavio, portfolio koji se dobija minimizacijom rizika i portfolio koji se dobija maksimizacijom očekivane stope prinosa. Pored ovih modela porediće se i vrednosno ponderisani portfolio (Value Weighted portfolio) koji takođe neki autori smatraju za naivnu portfolio strategiju jer su težinski koeficijenti ovog portfolija dati kao proporcije tržišnih kapitalizacija.

Da bismo mogli da utvrdimo koja od strategija daje najbolje rezultate za svaku od njih računamo sledeće veličine: očekivani višak prinosa, varijansu, Šarpov količnik i sigurnosni ekvivalent. Da bi podaci bili što doslednij optimizacija će biti izvršena na skupu podataka koji se sastoji od 30 akcija i na seriji od 7 indeksa.

Autori rada [5] pokazali su da ni jedan od 14 modela moderne portfolio optimizacije nije dosledno bolji od naivne $(1/N)$ diverzifikacije. U njihovom radu našla sam motivaciju za svoju temu. Za razliku od nekih dosadašnjih rezultata u literaturi, a posebno onih navedenih u [5], pokazaćemo da, kakvi rezultati će se dobiti zavisi od serije podataka na kojoj računamo gore navedene veličine, od veličine uzorka na kom ocenjujemo parametre i od broja aktiva koje učestvuju u optimizaciji.

1.1 Lista oznaka

U nastavku su uvedene oznake koje se koriste u daljem tekstu.

$\mathbb{R}$	Skup realnih brojeva
$E(X)$	Očekivanje slučajne promenljive X
$D(X)$	Varijansa slučajne promenljive X
$r = [r_1, \cdots, r_n]^T$	Stopa prinosa portfolija
$\bar{r} = E[r] = [\bar{r}_1, \cdots, \bar{r}_n]^T$	Očekivana stopa prinosa portfolija
$w = \left[w_{1,\cdots,}w_n\right]^T$	Vektor težinskih koeficijenata (ponderi)
$e = [e_1, \cdots, e_n]^T$	Jedinični vektor
$\sigma^2 = D(r)$	Varijansa portfolija
σ_{ij}	Kovarijansa
$\Sigma = \left[\sigma_{ij}\right]$	Matrica kovarijansi
ρ	Koeficijent korelacija
r^f	Stopa bez rizika
$\hat{\mu}$	Ocena očekivane stope prinosa
$\hat{\sigma}^2$	Ocena varijanse
$\widehat{w}$	Ocena težinskih koeficijanata
$\hat{\Sigma}$	Ocena matrice kovarijansi
$P_{i,t}$	Cena aktive i u trenutku t
$MC_{i,t}$	Tržišni kapital aktive i u trenutku t
S	Šarpov količnik
CE	Sigurnosni ekvivalent

1.2 Pregled definicija i teorema

Navedimo sada osnovne definicije i teoreme koje su neophodne za razuemavnje teorije izložene u neredn im poglavljima.

Osnovni pojmovi linearne algebre

Definicija 1.1 Kvadratna matrica A je **regularna** ako postoji kvadratna matrica B tako da je $A \cdot B = E$.

Definicija 1.2 Kvadratna matrica B koja zadovoljava uslov $A \cdot B = E$ naziva se **inverzna matrica** matrice A i obeležava se sa A^{-1}.

Definicija 1.3 Kvadratna matrica za koju ne postoji inverzna matrica naziva se **singularna matrica**.

Definicija 1.4 Kvadratna matrica A je **pozitivno definitna** ako za svaki ne nula vektor x važi $x^T Ax > 0$.

Definicija 1.5 Kvadratna matrica A je **pozitivno semidefinitna** ako za svaki ne nula vektor x važi $x^T Ax \geq 0$.

Osnovni pojmovi teorije verovatnoće

Ω – skup elementarnih događaja

Definicija 1.6 Podskup $\mathcal{F}$ partitivnog skupa $\mathcal{P}(\Omega)$ je **σ-polje** (σ-algebra) nad Ω ako važe uslovi:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. ako $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$, onda $\overline{\mathrm{A}} \in \mathcal{F}$,
3. ako $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, onda $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Borelovo σ-polje, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, je jedno σ-polje definisano nad skupom realnih brojeva.

Definicija 1.7 Neka je $\mathcal{F}$ σ-polje nad Ω . Funkcija $P \mapsto [0,1]$ se zove **verovatnoća** na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ ako zadovoljava uslove:

1. $P(\Omega) = 1$,
2. ako $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, $i, j = 1,2, \cdots$, onda

$P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Prostor verovatnoća je uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gde je Ω skup svih elementarnih događaja, $\mathcal{F}$ je σ-polje nad Ω, a P je verovatnoća nad $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definicija 1.8 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća i $X: \Omega \mapsto \mathbb{R}$. Preslikavanje X je **slučajna promenljiva** ako $\forall x \in \mathbb{R}$ važi

$$\{\omega | \omega \in \Omega, X(\omega) < x\} \in \mathcal{F} .$$

One slučajne promenljive $X: \Omega \mapsto \mathbb{R}$ koje uzimaju konačno ili prebrojivo mnogo vrednosti, odnosno postoji najviše prebrojiv skup

$$\mathcal{R}_X = \{x_1, x_2, \cdots\} \subset \mathbb{R},$$

takav da je

$$P(\{\omega | \omega \in \Omega, X(\omega) \in \mathcal{R}_X\}) = 1 ,$$

nazivamo **diskretne slučajne promenljive**.

Slučajna promenljiva X je **apsolutno neprekidnog** tipa ako postoji nenegativna integrabilna funkcija $\varphi_X(x), -\infty < x < \infty$, takva da je za svaki skup $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$P\{X \in S\} = \int_S \varphi_X(x)\, dx.$$

Funkcija $\varphi_X(x)$ se zove gustina raspodele verovatnoća.

Definicija 1.9 Funkcija $F_X(x): \mathbb{R} \mapsto [0,1]$ definisana sa

$$F_X(x) = P_X\big((-\infty, x)\big) = P(\{\omega \in \Omega |\, X(\omega) < x\}) ,$$

naziva se **funkcija raspodele** slučajne promenljive X.

Definicija 1.10 n-dimenzionalna slučajna promenljiva $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ je diskretna ako postoji prebrojiv skup tačaka u $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}_{\boldsymbol{X}} = \left\{\left(x_1^{(k_1)}, \cdots, x_n^{(k_n)}\right); k_1, \cdots, k_n = 1,2, \cdots\right\}$$

takav da $P\{\boldsymbol{X} \in \bar{R}_{\boldsymbol{X}}\} = 0$. Skup $R_{\boldsymbol{X}}$ je skup svih mogućih vrednosti za $\boldsymbol{X}$.

Definicija 1.11 Slučajna promenljiva $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ je n-dimenzionalna slučajna promenljiva apsolutno neprekidnog tipa ako postoji integrabilna funkcija $\varphi_{\boldsymbol{X}}(x_1, \cdots, x_n) \geq 0, -\infty < x_1, \cdots, x_n < \infty$, takva da je, za svaki Borelov skup $S \in \mathcal{B}_n$,

$$P\{(X_1, \cdots, X_n) \in S\} = \int_S \cdots \int \varphi_{\boldsymbol{X}}(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

Funkcija $\varphi_{\boldsymbol{X}}(x)$ zove se gustina raspodele verovatnoća slučajne promenljive $\boldsymbol{X}$.

Teorema 1.1 Neka su $X_1, \cdots, X_n$ slučajne promenljive na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Potreban i dovoljan uslov da slučajne promenljive $X_1, \cdots, X_n$ budu **nezavisne** je da važi

$$F_{(X_1, \cdots, X_n)}(x_1, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n).$$

Definicija 1.12 Ako je $\boldsymbol{X}$ diskretna slučajna promenljiva zadata na sledeći način

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix},$$

tada je $E(\boldsymbol{X}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i p_i$ **matematičko očekivanje** slučajne promenljive $\boldsymbol{X}$, ako red $\sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i| p_i$ konvergira.

Ako je $\boldsymbol{X}$ slučajna promenljiva neprekidnog tipa sa funkcijom gustine raspodele $\varphi_{\boldsymbol{X}}(x)$, tada je matematičko očekivanje $E(\boldsymbol{X})$ slučajne promenljive $\boldsymbol{X}$ definisano sa

$$E(\boldsymbol{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi_{\boldsymbol{X}}(x)\, dx,$$

pod uslovom da integral $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \varphi_{\boldsymbol{X}}(x)\, dx$ konvergira.

Osobine očekivanja:

1. $|E(X)| \leq E(|X|)$.
2. $E(c) = c$.
3. $E(cX) = cE(X)$.
4. Ako slučajne promenljive $X_1, \cdots, X_n, n \in \mathbb{N}$, imaju očekivanja onda

$$E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)\,.$$

5. Ako je za svako $\omega \in \Omega, \mathrm{X}(\omega) \geq 0$, tada je $E(X) \geq 0$.
6. Ako je $X \geq Y$ (za svako $\omega \in \Omega, \mathrm{X}(\omega) \geq \mathrm{Y}(\omega)$), tada je $E(X) \geq E(Y)$.
7. Ako su slučajne peomenljive $X_1, \cdots, X_n, n \in \mathbb{N}$, nezavisne i imaju očekivanja onda je
$$E\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} E(X_k).$$
8. Ako slučajna promenljiva X ima očekivanje onda
$$E\big(X - E(X)\big) = 0\,.$$

Definicija 1.13 **Disperzija (varijansa)** slučajne promenljive X se definiše na sledeći način:

$$D(X) = E\left(\big(X - E(X)\big)^2\right).$$

Jednosnavniji izraz za disperziju je: $D(X) = E(X^2) - E^2(X)$.

Osobine disperzije:
1. $D(X) \geq 0$.
2. $D(X) = 0 \iff X = const$.
3. Ako je $c = const$, onda je $D(cX) = c^2 D(X)$ i $D(X + c) = D(X)$.
4. Ako su slučajne promenljive $X_1, \cdots, X_n, n \in \mathbb{N}$ nezavisne i imaju disperzije onda je
$$D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} D(X_k)\,.$$

Definicija 1.14 **Standardna devijacija** (standardno odstupanje) slučajne promenljive X se definiše sa $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Definicija 1.15 **Kovarijansa** slučajne promenljive (X, Y) se definiše na sledeći način:

$$\sigma_{XY} = cov(X, Y) = E\big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\big] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Definicija 1.16 **Koeficijent korelacije** slučajne promenljive (X, Y) je

$$\rho_{XY} = cov\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}, \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right),$$

važi sledeće

$$\rho_{XY} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Kažemo da su X i Y pozitivno korelisane ako je $\rho_{XY} > 0$, negativno korelisane ako je $\rho_{XY} < 0$ i nisu u korelaciji ako je $\rho_{XY} = 0$.

Za koeficijent korelacije ρ_{XY} važi $|\rho_{XY}| \leq 1$.

Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive onda je $\rho_{XY} = 0$.

Osnovni pojmovi teorije optimizacije

Definicija 1.17 Funkcija f, diferencijabilna na U, **raste** (**opada**) na U, ako i samo ako važi $f'(x) \geq 0 \ (f'(x) \leq 0), \forall x \in U$.

Definicija 1.18 Funkcija f definisana nad konveksnim skupom U je **konveksna** na U ako $\forall u, v \in U$ i za sve $\alpha \in (0,1)$ važi $f(\alpha u + (1-\alpha)v) \leq \alpha f(u) + (1-\alpha)f(v)$.

Definicija 1.19 Dvaput diferencijabilna funkcija f je **konveksna** (konkavna) na U ako i samo ako je $f''(x) \geq 0 \ (f''(x) \leq 0), x \in U$.

Definicija 1.20 Ako je funkcija f dvaput neprekidno diferencijabilna i ako je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0 \ (f''(x_0) < 0)$ onda funkcija u x_0 ima **minimum** (**maksimum**).

Problem optimizacije:

Zadatak je naći $x = (x_1, \dots, x_n)$ tako da se minimizira funkcija $f(x)$ uz uslov $g_i(x) = b_i, \ i = 1, \dots, m$.

Pri čemu su $f(x)$ i $g_i(x), i = 1, \dots, m$, date funkcije n promenljivih za koje se pretpostavlja da su diferencijabilne.

Najpre se formira **Lagranžova funkcija**

$$L(x,\lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(x) - b_i)\,.$$

$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ je vektor Lagranžovih množitelja.

Potrebni uslovi za optimalno rešenje Lagranžove funkcije su

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \;\; j = 1, \cdots, n\,,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = g_i(x) - b_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, m\,.$$

Navedeni uslovi koje treba da ispunjava rešenje da bi bilo optimalno nazivaju se **KKT uslovi** (Karush, Kuhn, Tacker) .

2 Modeli optimizacije portfolija

Optimizacija portfolija podrazumeva optimalan izbor investicija za skup raspoloživih investicija i datu količinu kapitala. U momentu odlučivanja se ne zna šta će se dešavati sa novčanim tokom koji opisuje investiciju već samo postoji očekivano ponašanje novčanog toka, zbog toga je stopa prinosa investicija **slučajna promenljiva** koja ima očekivanu vrednost i standardno odstupanje (varijansu). Postoje i investicije kod kojih unapred znamo novčani tok, u tom slučaju je prinos deterministička vrednost i standardno odstupanje je nula. Ovakve investicije se nazivaju **investicije bez rizika**. Iako u praksi investicije bez rizika ne postoje jer čak i najsigurnije investicije nose malu količinu rizika [16], često se investicije kao što su depozit (kredit) koji nosi fiksnu, unapred poznatu kamatu ili državne obveznice tj. portfolijo sastavljen od njih uzimaju kao stope bez rizika.

2.1 Očekivani prinos i varijansa portfolija

2.1.1 Prinos aktive

Pretpostavimo da posmatramo jedan period i u nultom vremenskom trenutku kupujemo neko dobro, a na kraju perioda ga prodajemo. Neka su:

P_0 - uloženi iznos novca

P_1 – vraćeni iznos novca

R - prinos

Prinos investicije računamo na sledeći način:

$$R = \frac{P_1}{P_0}. \tag{2.1}$$

Stopa prinosa definisana je sa:

$$r = \frac{P_1 - P_0}{P_0},$$

gde r predstavlja stopu prinosa a P_0 i P_1 su, kao što je već navedeno, uloženi i vraćeni iznos novca.

Često se u literaturi sreće termin prinos iako se misli na stopu prinosa, ali iz konteksta treba da bude jasno o kojoj je veličini reč.

Iz dve gornje jednakosti jasno se vidi da je veza između prinosa i očekivane stope prinosa sledeća:

$$R = 1 + r\,.$$

Jednakost (2.1) sada možemo napisati i u obliku

$$P_1 = (1 + r)P_0\,.$$

2.1.2 Prinos portfolija

Neka je dato n dobara od kojih formiramo investicioni portfolio. Ulog P_0 delimo na n dobara. Dakle, biramo iznose P_{0i} , $i = 1, \cdots, n$ takve da važi

$$\sum_{i=1}^{n} P_{0i} = P_0\,,$$

gde je P_{0i} iznos koji investiramo u i-to dobro. Ukoliko je dozvoljena kratka prodaja[1] iznosi P_{0i} mogu biti i negativni, u protivnom ovi iznosi su nenegativni.

Iznos investiran u pojedinačno dobro može biti predstavljen i kao udeo u ukupnoj početnoj investiciji. Tj. možemo da pišemo

[1] *Kratka prodaja (short selling) podrazumeva prodaju nekog sredstva koje investitor ne poseduje(trgovina pozajmljenim sredstvom).Kratkom prodajom se ostvaruje profit ako cena pozajmljenog sredstva opada, u suprotnom dolazi do gubitka.Ovo je jedan od razloga zašto je kratka prodaja zabranjena na pojedinim finansijskim tržištima.*

$$P_{0i} = w_i P_0 \,, \; i = 1, \cdots, n \,,$$

vrednosti w_i su **težinski koeficijenti** (ponderi) i-tog dobra u portfoliju. Jasno je da mora da važi $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Ova jednakost nam garantuje da sve investicije učestvuju u formiranju portfolija.

Ukoliko je kratka prodaja dozvoljena neki od težinskih koeficijenata w_i mogu biti negativni, a u suprotnom su svi nenegativni.

Ako sa R_i označimo prinos dobra i onda je iznos, generisan tim dobrom, koji dobijamo na kraju perioda dat sa

$$R_i P_{0i} = R_i w_i P_0 \,.$$

Stoga, **totalni prinos portfolija** je:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i w_i P_0}{P_0} = \sum_{i=1}^{n} w_i \, R_i \,.$$

Kako je

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Dobijamo da je

$$r = R - 1 = \sum_{i=1}^{n} w_i \, R_i - \sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} w_i (R_i - 1) = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i$$

stopa prinosa portfolija.

Kao što smo već rekli stope prinosa su veličine čije vrednosti ne znamo sa sigurnošću. Razlog tome je što u momentu ulaganja iznosa P_0 ne znamo koji će iznos P_1 biti vraćen (ne možemo znati cene dobara u narednom trenutku pa tako u momentu kupovine ne znamo koji iznos će se ostvariti prodajom nekog dobra).

Shodno tome, stope prinosa r posmatramo kao slučajne promenljive. Kao slučajna promenljiva stopa prinosa ima svoju **očekivanu vrednost** i **varijansu** koje respektivno označavamo sa $E[r] = \bar{r}$ i $\sigma^2 = E[(r - \bar{r})^2]$. Takođe zanimaće nas i **kovarijansa** datog dobra sa ostalim dobrima koja nas interesuju, i nju ćemo označavati sa $\sigma_{ij} = (r_i - \overline{r_i})(r_j - \overline{r_j})$ (kovarijansa između i-tog i j-tog dobra).

Posmatrajmo ponovo slučaj kada imamo n investicija, sa slučajnim stopama prinosa r_i i standardnim odstupanjima σ_i, $i = 1, \cdots, n$. Od ovih investicija formiramo portfolijo koristeći težinske koeficiente w_i , $i = 1, \cdots, n$. Dobijamo da je **stopa prinosa portfolija**:

$$r_\pi = w_1 r_1 + w_2 r_2 + \cdots + w_n r_n = \sum_{i=1}^{n} w_i\, r_i\,.$$

Iz ove jednakosti dobijamo da je **očekivana vrednost stope prinosa portfolija** data sa:

$$\bar{r}_\pi = E[r] = w_1 E[r_1] + w_2 E[r_2] + \cdots + w_n E[r_n] = w_1 \overline{r_1} + w_2 \overline{r_2} + \cdots + w_n \overline{r_n}$$
$$= \textstyle\sum_{i=1}^{n} w_i \overline{r_i}.$$

Rečima možemo reći da je očekivana stopa prinosa portfolija jednaka težinskoj sumi očekivanih stopa prinosa pojedinačnih investicija od kojih se portfolio sastoji.

2.1.3 Varijansa portfolija

Označimo sa σ_i^2 varijansu i-tog dobra, $i = 1, \cdots, n$, a sa σ_{ij} kovarijansu prinosa i-tog i j-tog dobra, $i, j = 1, \cdots, n$. **Varijansu** (standardno odstupanje) celog **portfolija** računamo na sledeći način:

$$\sigma^2 = E[(r - \bar{r})^2]$$
$$= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\, r_i - \sum_{i=1}^{n} w_i \overline{r_i}\right)^2\right]$$

$$= E\left[(\sum_{i=1}^{n} w_i (r_i - \overline{r_i}))(\sum_{j=1}^{n} w_j (r_j - \overline{r_j}))\right]$$

$$= E\left[\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j (r_i - \overline{r_i})(r_j - \overline{r_j})\right]$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} .$$

Dakle, varijansa prinosa portfolija može se izračunati preko kovarijansi parova investicija i težinskih koeficijenata.

Uvedimo sada **matrični zapis**, neka je $\Sigma = [\sigma_{ij}]$ matrica kovarijansi, $r = [r_{1,\cdots,} r_n]^T$ vektor prinosa, $\bar{r} = [\bar{r}_{1,\cdots,} \bar{r}_n]^T$ vektor očekivanih prinosa i $w = [w_{1,\cdots,} w_n]^T$ vektor težinskih koeficijenata, tada je:

$r_\pi = w^T r = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i$ prinos portfolija,

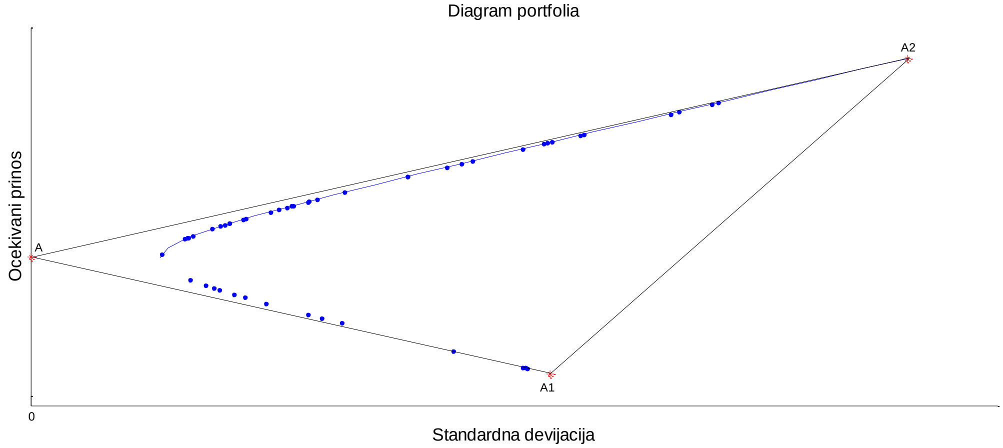
$\bar{r}_\pi = w^T \bar{r} = \sum_{i=1}^{n} w_i \overline{r_i}$ očekivani prinos portfolija,

$\sigma^2 = w^T \Sigma w = \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$ varijansa portfolija.

Kao što vidimo, svaka investicija i svaki portfolio ima svoju očekivanu stopu prinosa $\bar{r}$ i standardnu devijaciju σ. Shodno tome, svaki portfolio možemo predstaviti kao tačku u $\bar{r} - \sigma$ ravni.

Pretpostavimo da na raspolaganju imamo dve aktive, $\boldsymbol{A1}$ i $\boldsymbol{A2}$. Uvođenjem realnog broja $\boldsymbol{\pi}$ definisaćemo čitavu familiju portfolija tako što ćemo težinske koeficijente da definišemo kao $\boldsymbol{w_1 = 1 - \pi}$ i $\boldsymbol{w_2 = \pi}$, $\boldsymbol{\pi} \in (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1})$. Kako $\boldsymbol{\pi}$ varira od $\boldsymbol{0}$ do $\boldsymbol{1}$ portfolio koji posmatramo može da sadrži samo aktivu $\boldsymbol{A1}$, kombinaciju aktive $\boldsymbol{A1}$ i $\boldsymbol{A2}$ ili samo aktivu $\boldsymbol{A2}$. Ukoliko $\boldsymbol{\pi} \notin (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1})$ onda postji mogućnost kratke prodaje. Izgled ovog portfolia je dat na sledećem grafiku. Bitno je uočiti da izgled krive zavisi od kovarijanse između aktiva, $\boldsymbol{\sigma_{12}}$.

Grafik 1



Ovaj rezultat je formalno dat sledećom lemom.

Lema 2.1 [10] ***(Portfolio dijagram lema)***

Kriva u $\bar{r}-\sigma$ ravni definisana nenegativnom kombinacijom aktiva $A1$ i $A2$ leži unutar trougaone oblasti određene tačakama $A1$, $A2$ i A, gde je A tačka na $\bar{r}$, odnosno A ima koordinate $A\left(\frac{\bar{r}_1\sigma_2+\bar{r}_2\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2},0\right)$.

Dokaz. Stopa prinosa portfollija definisanog pomoću π je data sa

$$r(\pi)=(1-\pi)r_1+\pi r_2\,,$$

očekivana vrednost ove stope je data sa

$$\bar{r}(\pi)=(1-\pi)\bar{r}_1+\pi\bar{r}_2\,.$$

Na osnovu definicije za standardno odstupanje portfolija imamo da je za ovaj portfolio, sa dve aktive, standardno odstupanje dato sa

$$\sigma(\pi)=\sqrt{(1-\pi)^2\sigma_1^2+2\pi(1-\pi)\sigma_{12}+\pi^2\sigma_2^2}\,.$$

Kako je koeficijent korelacije aktiva $A1$ i $A2$ dat sa $\rho=\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$, standardno odstupanje možemo predstaviti kao

$$\boldsymbol{\sigma(\pi)=\sqrt{(1-\pi)^2\sigma_1^2+2\rho\pi(1-\pi)\sigma_1\sigma_2+\pi^2\sigma_2^2}}\,.$$

Kako je $-1 \leq \rho \leq 1$ i kako je $\sigma(\pi)$ rastuća funkcija po ρ možemo odrediti donju i gornju granicu funkcije $\sigma(\pi)$.

Za $\rho = 1$ gornja granica je data sa:

$$\begin{aligned}\sigma(\pi)^* &= \sqrt{(1-\pi)^2\sigma_1^2 + 2\pi(1-\pi)\sigma_1\sigma_2 + \pi^2\sigma_2^2} \\ &= \sqrt{[(1-\pi)\sigma_1 + \pi\sigma_2]^2} \\ &= (1-\pi)\sigma_1 + \pi\sigma_2 \, .\end{aligned}$$

Analogno, za $\rho = -1$, donja granica je data sa:

$$\begin{aligned}\sigma(\pi)_* &= \sqrt{(1-\pi)^2\sigma_1^2 - 2\pi(1-\pi)\sigma_1\sigma_2 + \pi^2\sigma_2^2} \\ &= \sqrt{[(1-\pi)\sigma_1 - \pi\sigma_2]^2} \\ &= |(1-\pi)\sigma_1 - \pi\sigma_2| \, .\end{aligned}$$

Kada se ova apsolutna vrednost raspiše dobijamo sledeće dve jednakosti:

$$(1-\pi)\sigma_1 - \pi\sigma_2 \, , \quad \pi < \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \, ,$$

$$\pi\sigma_2 - (1-\pi)\sigma_1 \, , \quad \pi \geq \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \, .$$

Upravo u preseku ove dve prave se dobija tačka A sa grafika. ■

2.2 Jednakoponderisani portfolio ($\frac{1}{N}$ portfolio)

Ova strategija pretpostavlja da je učešće svake aktive u portfoliju jednako. Drugim rečima, ako posmatramo n aktiva onda je vektor težinskih koeficijenata portfolija dat sa $w = \left[\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right]$.

Kako smo već naveli da je očekivani prinos portfolija dat sa $\bar{r} = \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r_i}$, za težinske koeficijente $\frac{1}{n}$ imamo da je:

$$\bar{r} = \sum_{i=1}^{n} w_i \overline{r_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \overline{r_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \overline{r_i} \ .$$

Varijansa ovog portfolija je:

$$\sigma^2 = E[(r - \bar{r})^2] =$$

$$= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \, r_i - \sum_{i=1}^{n} w_i \overline{r_i}\right)^2\right] =$$

$$= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} (r_i - \overline{r_i})\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} (r_j - \overline{r_j})\right)\right] =$$

$$= E\left[\sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{n^2} (r_i - \overline{r_i})(r_j - \overline{r_j})\right] =$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} (r_i - \overline{r_i})^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \frac{1}{n^2} (r_i - \overline{r_i})(r_j - \overline{r_j})\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \frac{1}{n^2} \sigma_{ij} \ .$$

Posmatrajmo sada sledeću situaciju:

Na raspolaganju imamo n investicija sa jednakim očekivanim prinosom μ i jednakom varijansom s^2, tj, važi $\overline{r_i} = \mu$, $\sigma_i^2 = s^2$, $\forall i$. Takođe, pretpostavimo da investicije nisu u međusobnoj korelaciji.

Za ovakav portfolio očekivani prinos je dat sa

$$\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \overline{r_i} = \frac{1}{n} n\mu = \mu \ .$$

Odgovarajuća varijansa je

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} \sigma_i^2 = n \frac{1}{n^2} s^2 = \frac{s^2}{n}.$$

Ovde smo iskoristili činjenicu da aktive nisu u međusobnoj korelaciji.

Kao što vidimo očekivani prinos ne zavisi od broja raspoloživih aktiva dok se varijansa smanjuje sa povećanjem broja aktiva.

Pretpostavimo sada da kovarijanse nisu jednake nuli ali da jesu međusobno jednake, $\sigma_{ij} = ks^2$, $i \neq j$, gde je k konstanta. Tada dobijamo da je

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= n \frac{1}{n^2} s^2 + n(n-1) \frac{1}{n^2} ks^2 \\
&= \frac{s^2}{n} + (n-1) \frac{ks^2}{n} \\
&= \frac{s^2}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) ks^2 \\
&= \frac{(1-k)s^2}{n} + ks^2.
\end{aligned}$$

Vidimo da u ovom slučaju ne možemo uticati na smanjenje ks^2 ma koliko da povećavamo broj aktiva. Možemo uticati samo na smanjenje jednog dela varijanse koji zavisi od n , $\frac{(1-k)s^2}{n}$, i time dovesti do smanjenja σ^2 ali samo do neke određene granice. Odnosno, vidimo da je $\sigma^2 \geq ks^2$, što znači da rizik ne može biti manji od ks^2 .

Ovaj proces kojim se nastoji smanjiti varijansa dodavanjem aktiva naziva se **diverzifikacija**.[10]

Visok nivo rizika koji je izražen velikim standardnim odstupanjem se uglavnom javlja kod portfolija sa malim brojem aktiva. Opšte je pravilo da se varijansa smanjuje na taj način što se dodaju nove aktive, tj. primenjuje se proces diverzifikacije. Kao što smo videli diverzifikacijom može da se smanji varijansa, odnosno rizik, samo do određene granice.

Naime, ukoliko su prinosi nekorelisani, diverzifikacijom je moguće smanjiti varijansu portfolija do nule dodajući veliki broj aktiva, n je dovoljno veliko.

Nasuprot tome, ukoliko su prinosi pozitivno korelisani, varijansu je teško smanjiti tj. postoji mogućnost smanjenja samo do određene granice.[10]

Dakle, ako su investicije negativno korelisane rizik se može smanjiti ali samo do određene granice. Sa povećanjem korelacije mogućnost smanjenja rizika je manja.

Vidimo da povećanje aktiva u portfoliju ne mora nužno da dovede do smanjenja rizika, naprotiv može čak da dovede i do povećanja.

2.3 Markovicov portfolio

Markovicov model predstavlja konstrukciju optimalnog portfolija u smislu **minimizacije rizika**. Kako rizik merimo varijansom portfolija, tražimo portfolio minimalne varijanse. Ovaj portfolio ćemo označavati sa *Min-Var* u rezultatima. Neka je dato n investicija očekivanih stopa prinosa $\overline{r_i}$, i kovarijansi σ_{ij}, $i, j = 1, \cdots, n$.

Problem koji treba da rešimo je da se odredi portfolio minimalne varijanse. Dakle, imamo problem minimizacije sa ograničenjem:

$$\begin{gathered} min \frac{1}{2} w^T \Sigma w \ , \\ e^T w = 1 \ . \end{gathered} \tag{2.2}$$

Gde je $e = [e_1, \cdots, e_n]^T$ jedinični vektor i pretpostavljamo da je **Σ simetrična** i **pozitivno definitna matrica**, pa rešenje postoji i jedinstveno je.

Umesto standardnog odstupanja posmatramo polovinu varijanse iz tehničkih razloga.

Definišimo Lagranžovu funkciju za dati problem:

$$L(w, \lambda) = \frac{1}{2} w^T \Sigma w - \lambda (e^T w - 1),$$

Gde λ označava Lagranžov množitelj.

Teorema 2.1 [13] Problem (2.2) ima jedinstveno rešenje dato sa:

$$w = \lambda \Sigma^{-1} e \,, \qquad \lambda = \frac{1}{\alpha} \,,$$

Gde je $\alpha = e^T \Sigma^{-1} e$.

Dokaz.

Uslovi optimalnosti prvog reda su dati sa:

$$\nabla_w L(w, \lambda) = 0 \,,$$
$$\nabla_\lambda L(w, \lambda) = 0 \,.$$

Odnosno,

$$\Sigma w - \lambda e = 0 \,,$$
$$e^T w = 1 \,.$$

Dakle, rešavamo ovaj sistem sa dve jednačine i dve nepoznate:

Kada prvu jednačinu pomnožimo sa Σ^{-1} sa leve strane dobijamo da je:

$$w = \lambda \Sigma^{-1} e \,.$$

Uvrštavanjem ovog u drugu jednačinu dobijamo:

$$\lambda e^T \Sigma^{-1} e = 1 \,,$$

a odatle sledi:

$$\lambda = \frac{1}{e^T \Sigma^{-1} e} = \frac{1}{\alpha} \,.$$

Uvrstimo sada ovo λ u izraz za w i dobijamo:

$$w = \frac{\Sigma^{-1}e}{e^T\Sigma^{-1}e} = \frac{\Sigma^{-1}e}{\alpha} \ . \blacksquare$$

Uvedimo oznaku za standardno odstupanje portfolija: $\Phi(w) = \sigma$, odnosno $\Phi(w) = (w^T\Sigma w)^{1/2}$.

Lema 2.2 Funkcija $\Phi(w)$ je konveksna.

Dokaz.

$$\Phi(w)^2 = w^T\Sigma w \ ,$$

Diferenciramo ovu jednakost i dobijamo:

$$2\Phi\Phi_w = 2\ \Sigma w \ .$$

Diferenciramo sada dobijeni izraz pa dobijamo:

$$\Phi\Phi_{ww} + \Phi_w{\Phi_w}^T = \ \Sigma \ .$$

Kako iz $\Phi\Phi_w = \Sigma w \ \Rightarrow \ \Phi_w = \frac{\Sigma w}{\Phi}$

Imamo da je:

$$\Phi\Phi_{ww} = \Sigma - \frac{\Sigma w w^T\Sigma}{\Phi^2} \ .$$

Hoćemo da pokažemo da je Φ_{ww} pozitivno semidefinitna matrica (jer odatle sledi da je Φ konveksna).

Neka je $z \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan vektor, imamo da je:

$$\Phi z^T\Phi_{ww}z = z^T\Sigma z - \frac{z^T\Sigma w w^T\Sigma z}{\Phi^2} \ ,$$

$$\Phi z^T\Phi_{ww}z = z^T\Sigma z - \frac{(z^T\Sigma w)^2}{w^T\Sigma w} \ .$$

Na osnovu Koši-Švarcove nejednakosti sledi da je

$$\Phi z^T \Phi_{ww} z \geq 0 \,. \blacksquare$$

Lema 2.3 Ako je $\Phi(w)$ konveksna funkcija i

$$\sigma = min\{\Phi(w) : w^T \bar{r} = r_\pi \,, w^T e = 1\}$$

onda je $\sigma(\bar{r})$ konveksna funkcija.

Dokaz. Označimo sa $\bar{r}^1$ i $\bar{r}^2$ dve realne vrednosti i neka su w^1 i w^2 odgovarajući argumenti za koje funkcija $\Phi(w)$ dostiže minimum uz uslove:

$w^T \bar{r} = \bar{r}^1$, odnosno $w^T \bar{r} = \bar{r}^2$.

Neka $p \in [0,1]$, tada je za portfolio

$$p\, w^1 + (1-p) w^2 \,, \qquad (2.3)$$

$$\bar{r}^T (p w^1 + (1-p) w^2) = p \bar{r}^1 + (1-p) \bar{r}^2 \,,$$

i

$$e^T (p\, w^1 + (1-p) w^2) = 1 \,.$$

Znači, portfolio formiran sa (2.3) je dopustiv. Koristeći osobine minimuma i konveksnosti funkcije $\Phi(w)$ dobijamo:

$$\begin{aligned}\sigma(p\, \bar{r}^1 + (1-p)\bar{r}^2) &\leq \Phi(p\, w^1 + (1-p) w^2)\\ &\leq p\Phi(w^1) + (1-p)\Phi(w^2)\\ &\leq p\sigma(\bar{r}^1) + (1-p)\sigma(\bar{r}^2) \,.\end{aligned}$$

Odvde sledi da je $\sigma(\bar{r})$ konveksna funkcija. ■

Dakle, pokazali smo da je **skup efikasnih portfolija konveksna kriva** u $\bar{r}-\sigma$ ravni.

Markovicov model se može definisati na još jedan način, ukoliko **maksimizujemo očekivanu stopu prinosa.** U rezultatima ova strategija će biti označena sa *Mean-Var*. U ovom slučaju, u obzir se uzima **koeficijent averzije prema riziku**, γ. Ovaj problem možemo zapisati u obliku:

$$max\, \bar{r}^T w - \frac{1}{2}\gamma w^T \Sigma w \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1\,.$$

Diferencirajući funkciju korisnosti i izražavajući težinske koeficijente dobijamo da je:

$$w = \frac{\Sigma^{-1}\bar{r}}{\gamma}\,.$$

Pošto ćemo posmatrati relativne težinske koeficijente u ovom slučaju, dobijamo da je:

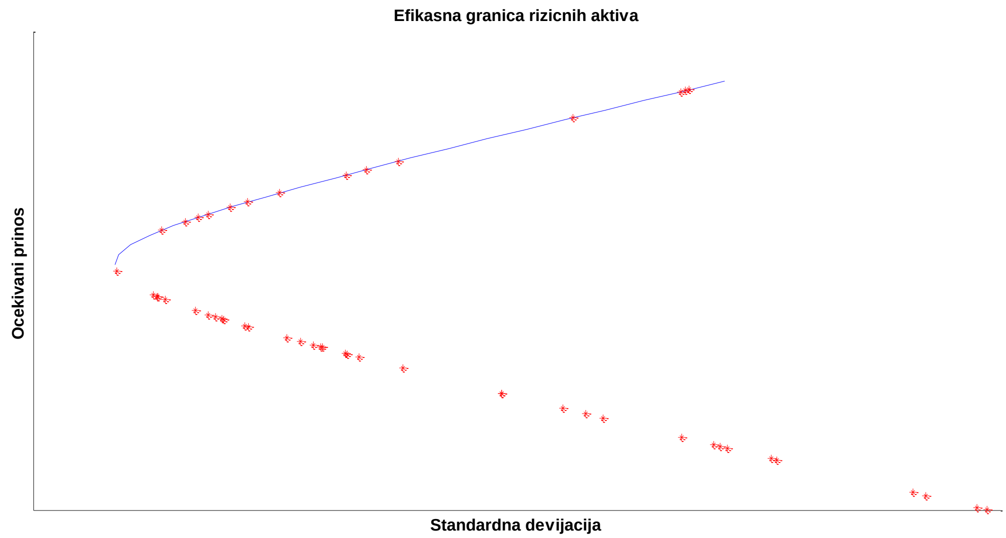
$$x = \frac{w}{|e^T w|}\,,$$

dakle, dobijamo da su težinski koeficijenti u ovom slučaju dati sa:

$$x = \frac{\Sigma^{-1}\bar{r}}{e\Sigma^{-1}\bar{r}}\,.$$

Efikasnu granicu portfolija možemo predstaviti i grafički na sledeći način:

Grafik 2



Razmotrićemo sada slučaj kada je investitorima na raspolaganju i **investicija bez rizika**. Portfolio se sada sastoji iz rizičnog dela i dela bez rizika. Investiciju bez rizika ćemo označavati sa r^f, važi sledeće:

$$E[\, r^f] = \, r^f \;,$$

$$\sigma_f = 0 \;,$$

$$\sigma_{if} = E[(r_i - \overline{r_i})(r^f - r^f)] = 0 \;.$$

Navedeni uslovi nam govore da je investicija bez rizika deterministička vrednost očekivane stope prinosa r^f, varijanse $\sigma_f = 0$, i kovarijanse sa bilo kojom drugom (i −tom) investicijom $\sigma_{if} = 0$. Zbog poslednje osobine jednostavno je odrediti skup (granicu) efikasnih portfolija koji sadrže i investiciju bez rizika.

Posmatrajmo prvo slučaj kada se portfolio sastoji samo od dve investicije, rizične i bezrizične:

$$(1-p)r + pr^f.$$

Očekivani prinos ovog portfolija je:

$$\overline{r_\pi} = (1-p)\bar{r} + pr^f \ ,$$

dok je standardno odstupanje dato sa:

$$\sigma_\pi = (1-p)\sigma + p\sigma_f \ ,$$
$$\sigma_\pi = (1-p)\sigma \ ,$$

jer je $\sigma_f = 0$.

Zbog toga što i očekivana stopa prinosa i standardno odstupanje linearno zavise od p, variranjem p dobijamo dve prave u $\bar{r} - \sigma$ ravni.

Šta se dešava ukoliko je investitorima na raspolaganju n rizičnih aktiva i jedna bez rizika?

Situacija je sledeća, dato je n rizičnih investicija sa očekivanim stopama prinosa $\overline{r_i}$ i standardnim odstupanjima $\sigma_i \, , i = 1, \cdots, n$, i data je investicija bez rizika r^f.

Prvo se od rizičnih investicija konstruiše portfolio minimalne varijanse, na uobičajen način. Nakon toga se za svaki portfolio iz dopustivog skupa pravi kombinacija sa investicijom bez rizika. Kombinacija se pravi tako da kratka prodaja rizičnog dela nije dozvoljena. Svaka od ovih kombinacija daje pravu koja je određena dvema tačkama, tačkom $(\bar{r}, \sigma)$ rizičnog dela i tačkom $(r^f, 0)$. Prava koja je tangenta na skup efikasnih portfolija iz tačke $(r^f, 0)$ jeste efikasna granica. Odnosno, ako sa M označimo tačku dodira tangente i skupa efikasnih portfolija, onda je efikasna granica prava koja je određena tačkama M i $(r^f, 0)$.

Ovim smo pokazali da važi **teorema o jednom fondu**:

Teorema 2.2 [10] Ako je na raspolaganju n rizičnih investicija i investicija bez rizika, onda se svaki efikasan portfolio može konstruisati pomoću jednog rizičnog portfolija (određenog tačkom M) i investicijom bez rizika.

Logično pitanje koje se postavlja jeste kako doći do portfolija M. Odgovor je da se do ovog portfolija dolazi tako što on mora da sadrži sve investicije koje se nalaze na nekom tržištu, zbog toga se i naziva **tržišnim portfolijom** (market portfolio).

Teorema 2.3 [10] Za stopu bez rizika r^f težinski **koeficijenti** $w_i, i = 1, \cdots, n$ **tržišnog portfolija** zadovoljavaju sledeću jednakost:

$$w = \frac{\Sigma^{-1}(\bar{r} - r^f e)}{e^T \Sigma^{-1}(\bar{r} - r^f e)}.$$

Dokaz.

Koeficijent pravca prave koja prolazi kroz tačku $(r^f, 0)$ ma kog dopustivog portfolija je dat sa:

$$k = \frac{\bar{r}_\pi - r^f}{\sigma_\pi} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i(\bar{r}_i - r^f)}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}}}.$$

Jasno je da takva prava postaje tangenta na skup efikasnih portfolija kada je k maksimalno pa se traženje tržišnog portfolija svodi na rešavanje sledećeg problema:

$$max\, k,$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1.$$

Lagranžova funkcija ovog problema je data sa:

$$L(w, \lambda) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \bar{r}_i - r^f}{(w^T \Sigma w)^{1/2}} + \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^n w_i\right).$$

Uslovi optimalnosti su dati sa:

$$\nabla_w L(w,\lambda) = 0\,,$$
$$\nabla_\lambda L(w,\lambda) = 0\,.$$

Odnosno, dobijamo sistem od sledeće dve jednačine:

$$\nabla_w L(w,\lambda) = (w^T\Sigma w)^{-1/2}[\bar{r} - (w^T\Sigma w)^{-1}(w^T\bar{r} - r^f)\Sigma w] - \lambda e = 0 \qquad (2.4)$$

$$\nabla_\lambda L(w,\lambda) = 1 - w^T e = 0\;.$$

Iz (2.4) imamo da je

$$\bar{r} - (w^T\Sigma w)^{-1}(w^T\bar{r} - r^f)\Sigma w = \lambda(w^T\Sigma w)^{1/2} e$$

Odakle sledi da je:

$$\sigma^2\bar{r} - (\bar{r}_M - r^f)\Sigma w = \lambda\sigma^3 e\;. \qquad (2.5)$$

Ukoliko iskoristimo činjenicu da je $w^T e = 1$ i pomnožimo prethodnu jednakost sa w^T sa leve strane, dobijamo:

$$\sigma^2\bar{r} - (\bar{r}_M - r^f)\sigma^2 = \lambda\sigma^3\;.$$

Odavde sledi da je za $\sigma \neq 0$:

$$\lambda = \frac{r^f}{\sigma}\,.$$

Kada ovo λ uvrstimo u (2.5) dobija se:

$$\sigma^2\bar{r} - (\bar{r}_M - r^f)\Sigma w = r^f\sigma^2 e$$

Pomnožimo sada gornju jednakost sa Σ^{-1}, dobijamo:

$$\frac{\bar{r}_M - r^f}{\sigma^2} w = \Sigma^{-1}(\bar{r} - r^f e). \tag{2.6}$$

Iskoristimo $e^T w = 1$ i dobijamo:

$$\frac{\bar{r}_M - r^f}{\sigma^2} = e^T \Sigma^{-1}(\bar{r} - r^f e).$$

Ako ovo uvrstimo u (2.6) dobijamo:

$$e^T \Sigma^{-1}(\bar{r} - r^f e) w = \Sigma^{-1}(\bar{r} - r^f e)\ ,$$

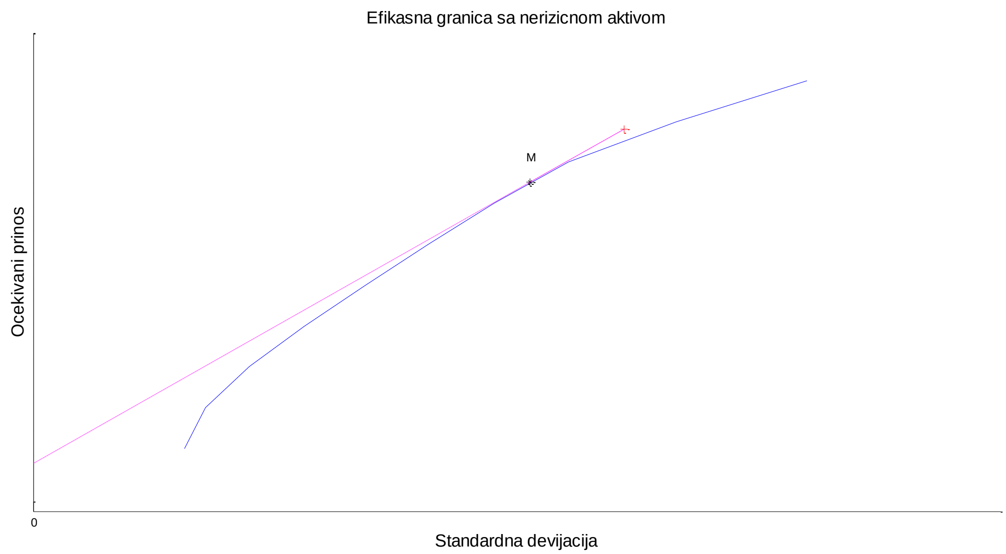
a odavde sledi:

$$w = \frac{\Sigma^{-1}(\bar{r} - r^f e)}{e^T \Sigma^{-1}(\bar{r} - r^f e)}\ ,$$

što smo i želeli da dokažemo. ■

Prikažimo sada efikasnu granicu portfolija kada je uključena i nerizična investicija:

Grafik 3



Na grfiku je plavom bojom predstavljena efikasna granica ukoliko nije uključena investicija bez rizika. Uključivanjem nerizične aktive efikasna granica se menja, odnosno svi investitori teže da dostignu portfolio koji se dobije kada se iz tačke $(0, r^f)$ povuče tangenta na efikasnu granicu rizičnih portfolija. Ta tačka je označena na grafiku sa M.

Analiza portfolija koju ćemo vršiti u ovom radu neće uključivati stopu bez rizika, optimizacija će biti rađena samo na rizičnim investicijama. Dakle, portfoliji koje budemo posmatrali će se sastojati samo od rizičnih aktiva.

2.4 CAPM (model ravnotežnog vrednovanja)

Da bi CAPM važio sledeće pretpostavke moraju da budu zadovoljene:

- Svi investitori rešavaju Markowitz-ev problem optimizacije, odnosno odbojni su prema riziku i maksimiziraju očekivani prinos.
- Svi imaju iste procene očekivane stope priniosa, varijanse i kovarijanse tih stopa.
- Na tržištu postoji bezrizična investicija koja je dostupna svim investitorima.
- Sve investicije se mogu kupiti u proizvoljno malim delovima.
- Nema transakcionih troškova. Znači da ne postoji trošak kupovinom ili prodajom bilo koje aktive. U slučaju da uzmemo u obzir postojanje transakcionih troškova svaka odluka bi zavisila od naše pozicije u svakoj

aktivi u prethodnom periodu, što, naravno, dovodi do velike kompleksnosti.

- Moguća je kratka prodaja.
- Sve investicione odluke se donose u jednom vremenskom trenutku, odnosno svi investitori posmatraju isti vremenski period.
- Informacije su dostupne svim investitorima.

U Markovicovom modelu smo naveli teoremu o jednom fondu koja nam kaže da se svaki efikasan portfolio može konstruisati kombinovanjem tržišnog portfolija i investicije bez rizika. Dakle, potrebno je ulagati u tržišni portfolijo koji se sastoji od svih rizičnih aktiva koje su dostupne na tržištu i u investiciju bez rizika. Tržišni portfolio (market portfolio) označićemo sa M. Skup efikasnih portfolija se nalazi na pravoj koja je određena tačkama M i $(r^f, 0)$ (grafik 3).

Težinski koeficijenti u portfoliju su definisani kao proporcije tržišnog kapitala. Naime, težinski koeficijent svake aktive u tržišnom portfoliju je jednak odnosu ukupnog kapitala te aktive sa ukupnim tržišnim kapitalom.

Ako svi investitori posmatraju očekivanje-varijansa portfolije i imaju iste procene parametara znamo da je efikasan portfolio (fond) koji se sastoji od samo rizičnih aktiva upravo tržišni portfolio. Dakle, pod tim pretpostavkama nema potrebe za formulacijom očekivanje-varijansa problema za izračunavanje parametara, niti je potrebno rešavati sistem jednačina za dobijanje optimalnog portfolija. Znamo da je optimalan portfolio koji bi se dobio ovim rešavanjem tržišni portfolio a gore smo naveli kako izračunavamo njegove težine.

Radi lakšeg razumevanja formiranja tržišnog portfolija daćemo sledeći primer.

Primer 1.

Težišni koeficijenti tržišnog portfolija

Akcije	**Broj akcija u opticaju**	**Odnos broja akcije sa ukupnim brojem svih akcija**	**Cena**	**Kapital**	**Ponderi na tržištu**
Akcija 1	20	2/9	500	10000	**5/23**
Akcija 2	30	1/3	400	12000	**6/23**
Akcija 3	40	4/9	600	24000	**12/23**
Σ	90	1		46000	1

Ovim primerom se htelo pokazati da se težinski koeficijenti portfolija dobijaju kao odnos kapitala svih akcija koje učestvuju na tržištu i kapitala pojedinačne akcije.

Prava koja je određena tržišnim portfoliom $M(\sigma_M, \bar{r}_M)$ i nerizičnim portfoliom r^f naziva se **linija tržišta kapitala** (capital market line - CML). Ova prava se može predstaviti sledećom jednačinom

$$\bar{r} = r^f + \frac{\bar{r}_M - r^f}{\sigma_M}\sigma \, .$$

Svaki efikasan portfolio koji se nalazi na liniji tržišta kapitala zadovoljava gornju jednakost. Nagib te prave $\frac{\bar{r}_M - r^f}{\sigma_M}$ neziva se **cenom rizika** jer pokazuje za koliko se poveća očekivani višak prinosa portfolija ako se standardna devijacija poveća za jednu jedinicu.

U sledećoj teoremi navešćemo CAPM tako da u vezu budu dovedeni očekivani prinos pojedinačne investicije i očekivani prinos tržišnog portfolija.

Teorema 2.4 [4] Ako je tržišni portfolio (M) efikasan, onda očekivani prinos $\bar{r}_i$ svake investicije A_i zadovoljava sledeću jednakost

$$\bar{r}_i = r^f + \beta_{iM}[\bar{r}_M - r^f] \, , \tag{2.7}$$

gde je $\beta_{iM} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$.

Pomoću parametra β izložićemo ekonomsko tumačenje CAPM-a.

Parametar β_{iM} se naziva **beta investicije** i, označavaćemo ga samo sa β u daljoj diskusiji. Razlika $\bar{r}_i - r^f$ naziva se **očekivani višak prinosa** (expected excess rate of return) investicije A_i. Kao što se iz gornje relacije vidi CAPM tvrdi da je očekivani višak prinosa investicije A_i, $\bar{r}_i - r^f$, proporcionalan očekivanom višku prinosa tržišnog portfolija M, $\bar{r}_M - r^f$, sa koeficijentom proporcionalnosti β_{iM}.

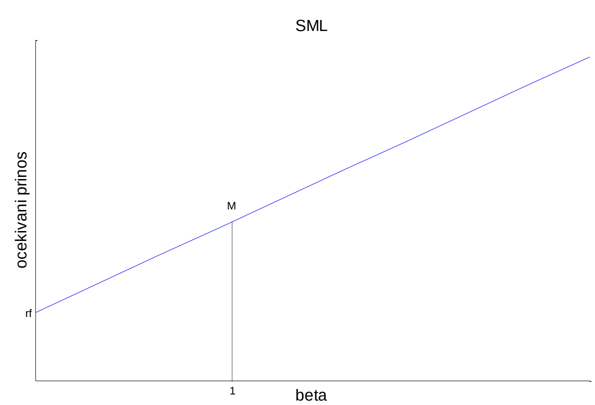
Pretpostavimo sada da investicija nije u korelaciji sa tržištem, dakle $\beta = 0$. Tada iz CAPM-a imamo da je $\bar{r} = r^f$. Ova jednakost nam govori da iako je aktiva veoma rizična (sa velikim σ) očekivani prinos će biti jednak r^f, nema premije rizika. Razlog tome je što, rizik investicije koja nije u korelaciji sa tržištem može biti lako diverzifikovan. Ako imamo nekoliko takvih investicija, koje nisu u međusobnoj korelaciji i nisu u korelaciji sa tržištem, možemo dodati mali deo svake od njih i rezultovati time da ukupna varijansa bude manja. Kako ukupan prinos ima malu varijansu odgovarajući očekivani prinos će biti približno jednak r^f.

Posmatrajmo sada slučaj kada je β negativno. U ovakvoj situaciji je $\bar{r} < r^f$, što nam kaže da iako pojedinačna aktiva ima veoma visok rizik (veliko σ), očekivani prinos će uvek biti manji od nerizične aktive, r^f. Ovakve investicije smanjuju ukupan rizik portfolija kada se kombinuju sa tržištem. Investitori su zbog toga spremni da prihvate nižu očekivanu vrednost da bi smanjili potencijalni rizik. Takva sredsta obezbeđuju oblik osiguranja. Ona se ponašaju dobro kada se sve ostalo (celo tržište) ponaša loše.

Grafička interpretacija CAPM-a preko očekivane stope prinosa portfolija ($\bar{r}$) i β daje karakterističnu liniju hartije (security market line).

Kao što možemo videti sa grafika tržište (tržišni portfolio) označeno tačkom M odgovara vrednosti $\beta = 1$. Nagib SML predstavlja očekivani višak prinosa tržišnog portfolija.

Grafik 4



Predstavimo stopu prinosa kao slučajnu promenljivu:

$$r_i = r^f + \beta_i(r_M - r^f) + \varepsilon_i \,,$$

ε_i su slučajne vrednosti (greške koje r_i čine slučajnom promenljivom). Iz CAPM formule dobijamo nekoliko osobina za ε_i. Iz (2.7) imamo da je $E(\varepsilon_i) = 0$. Odredimo sada kovarijansu između prinosa aktive A_i, r_i, i prinosa na tržišni portfolio, r_M.

$$
\begin{aligned}
& cov(r_i, r_M) \\
&= \beta_i cov(r_M, r_M) + cov(\varepsilon_i, r_M) \\
&= \beta_i \sigma_M^2 + cov(\varepsilon_i, r_M) \\
&= \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}\sigma_M^2 + cov(\varepsilon_i, r_M).
\end{aligned}
$$

Dakle, dobijamo da je $\sigma_{iM} = \sigma_{iM} + cov(\varepsilon_i, r_M)$, odakle sledi da je $cov(\varepsilon_i, r_M) = 0$.

Sada možemo izračunati varijansu σ_i^2 :

$$var(r_i) = var(r^f + \beta_i(r_M - r^f) + \varepsilon_i) = \beta_i^2 var(r_M) + var(\varepsilon_i) + 2cov(r_M, \varepsilon_i).$$

Kada iskoristimo $cov(\varepsilon_i, r_M) = 0$, dobijamo:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + var(\varepsilon_i)\,.$$

Vidimo da se σ_i^2 sastoji iz dva sabirka. Prvi sabirak $\beta_i^2\sigma_M^2$ naziva se **sistematski rizik** ili tržišni rizik. Ovaj rizik je povezan sa čitavim tržištem i na njegovo smanjenje se ne može uticati diverzifikacijom. Drugi sabirak $var(\varepsilon_i)$ naziva se **specifični** ili idiosinkratski rizik (nesistematski rizik). Ovaj rizik nije u korelaciji sa tržištem pa se na njega može uticati diverzifikacijom, može se smanjiti.

Aktive koje leže na CML sadrže samo sistematski rizik, nema specifičnog rizika. Očekivani prinos tih aktiva je $\bar{r} = r^f + \beta(r_M - r^f)$. Aktive koje sadrže i specifični rizik nalaze se ispod CML.

2.5 Vrednosno ponderisani portfolio (Value-Weight portfolio)

Vrednosno ponderisani portfolio uključuje sve rizične aktive koje se nalaze na tržištu koje posmatramo. Težišne koeficijente ovog portfolija dobijama tako što u odnos stavljamo tržišnu kapitalizaciju jedne aktive i ukupnu kapitalizaciju (market capitalization) svih aktiva koje učestvuju u portfoliju (na tržištu) u trenutku t. Ovu portfolio strategiju ćemo označavati sa *VW* u rezultatima. Dakle, ako je na tržištu N aktiva, formula za izračunavanje težinskih koeficijenata vrednosno ponderisanog portfolija je sledeća:

$$w_{i.t} = \frac{MC_{i,t}}{\sum_{i=1}^{N} MC_{i,t}},$$

$MC_{i,t}$ – tržišna kapitalizacija (market capitalization) aktive i u trenutku t.

Tržišna kapitalizacija aktive se dobija na sledeći način:

$$MC_{i,t} = P_{i,t} * n\,.$$

Gde je $P_{i,t}$ cena akcije i u trenutku t a n broj tih akcija koje su dostupne javnosti na tržištu (shares outstanding).

Kao što vidimo, model vrednosno ponderisanog portfolija je dat u CAPM-u. Znači, CAPM daje tržišni portfolio odnosno vrednosno ponderisani portfolio.

3 Vrednovanje rezultata

U ovom poglavlju predstavljen je način na koji dolazimo do rezultata pojedinačnih strategija. Izloženi su metodi uzorkovanja koje koristimo da bismo došli do rezultata. Zatim su izložene veličine pomoću kojih merimo, odnosno ocenjujemo, koja strategija je bolja. Na kraju ovog poglavlja navešćemo na kojim skupovima podataka je ova analiza urađena. Dobijeni rezultati će biti predstavljeni u narednom poglavlju.

3.1 Metode uzorkovanja

Pre nego što budu izložene veličine na osnovu kojih ćemo meriti efikasnost različitih strategija treba napomenuti da ćemo koristiti dva metoda uzorkovanja, odnosno da ćemo posmatrati rezultate na istim skupovima podataka ali da će se uzorkovanje vršiti **u uzorku (in sample)** i **van uzorka (out of sample)**.

Takođe, bitno je istaći da će se sve portfolio optimizacije vršiti na skupovima podataka koji se sastoje iz očekivanog viška prinosa (iznad r^f), odnosno umesto očekivanih prinosa $\bar{r}$, posmatraćemo $\bar{r} - r^f$.

Pretpostavimo da imamo uzorak veličine T, neka je $M < T$ dužina na kojoj ocenjujemo parametre.[2] Ocene dobijamo na sledeći način, uzimamo seriju od prvih M podataka i na njoj ocenimo parametre koji su potrebni da bismo dobili težinske koeficijente u trenutku t, potom dobijene vrednosti koristimo da bismo dobili parametre (očekivanje, varijansu,...) u trenutku $t + 1$. Ovako opisan način uzorkovanja je *van uzorka (out of sample)*. Dobijene težine držimo samo jedan period (za mesečne podatke to je jedan mesec a za dnevne jedan dan). Nakon toga, procedura se ponavlja na naredni period (*„rolling window“ procedure*), pomeramo „prozor“ M za jedan, tako što uvrštavamo novu seriju podataka iz novog perioda, a izbacujemo prvu seriju iz prethodnog perioda. Znači, za svaki naredni period dobijamo nove ocene parametara i nove težinske koeficijente. Dakle, ukupno imamo $T - M$ ocena, odnosno dobijemo seriju podataka dužine $T - M$. Na kraju, za svaku od portfolio strategija izračunamo veličine koje želimo da saopštimo .

[2] *Rezultati će biti dati za M=60, što je 5 godina ukoliko posmatramo mesečne podatke i približno tri meseca ukoliko imamo dnevne podatke; M=120, što odgovara vremenskom periodu od 10 godina ukoliko su mesečni podaci u pitanju, a približno pola godine ukoliko su dnevni podaci. Za dnevne podatke ćemo još uzeti u razmatranje i M=1260 što predstavlja 5 godina i M=2520 što predstavlja 10 godina.*

Ukoliko se ocene vrše *u uzorku* procedura je mnogo jednostavnija, tada je $T = M$, i računamo ocene parametara na ovoj seriji podataka i pomoću tako dobijenih ocena dobijamo težinske koeficijente svake strategije. Dakle ukolliko radimo u uzorku ukupna serija podataka jednaka je seriji podataka na kojoj se vrše ocene parametara ($T = M$).

3.2 Ocene parametara

U ovom poglavlju biće izložene veličine pomoću kojih ćemo meriti učinak svake strategije. Na osnovu ovih veličina (ocena) moćićemo da kažemo koja je strategija najbolja.

Veličine na osnovu kojih ćemo određivati koja strategija daje najbolje rezultate su očekiavana vrednost stope prinosa portfolija, varijansa portfolija, Šarpov količnik i sigurnosni ekvivalent.

Označimo sa $\hat{\mu}$ i $\hat{\Sigma}$ ocene momenata date serije podataka prinosa (iznad r^f).

U drugom poglavlju je već izloženo detaljno kako se dolazi do očekivane stope prinosa i varijanse za portfolijo. Dakle, ukoliko računamo **očekivanu stopu prinosa portfolija u uzorku** imamo da je

$$\hat{r}_\pi = \hat{w}^T \hat{\mu}$$

gde je $w = \left[w_{1,\cdots,} w_n\right]^T$ vektor težinskih koeficijenata date strategije.

Kako očekivanje predstavlja srednju vrednost oko koje se podaci grupišu, prilikom vrednovanja rezultata, boljom strategijom će se smatrati ona koja ima veću očekivanu stopu prinosa.

Varijansa portfolija u uzorku se računa na sledeći način:

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{w}^T \hat{\Sigma} \hat{w} \text{ ,}$$

gde je $\Sigma = \left[\sigma_{ij}\right]$ matrica varijansi i kovarijansi, a $w = \left[w_{1,\cdots,} w_n\right]^T$ kao i kod očekivanog prinosa vektor težinskih koeficijenata date strategije.

Pošto varijansom merimo rizik portfolija onda ćemo prilikom odabira strategija birati portfolio sa što manjom varijansom.

Šarpov količnik (Sharpe ratio) se definiše na sledeći način:

$$S = \frac{\bar{r}_\pi - r^f}{\sigma}.$$

Dakle, u odnos se stavlja očekivani višak prinosa i varijansa portfolija. U CAPM-u smo se susreli sa Šarpovim količnikom tržišnog portfolija, $\frac{\bar{r}_M - r^f}{\sigma_M}$, koji je predtavljao nagib linije tržišta kapitala (CML).

Kako su podaci koje koristimo u radu takvi da posmatramo višak prinosa, a ne prinos, za sve aktive onda će **Šarpov količnik u uzorku** biti definisan sa

$$\hat{S} = \frac{\hat{r}_\pi}{\hat{\sigma}} = \frac{\widehat{w}^T \hat{\mu}}{\widehat{w}^T \hat{\Sigma} \widehat{w}}.$$

Kao što iz same konstrukcije Šarpovog količnika vidimo, što je veća vrednost Šarpovog količnika bolji je portfolio. Ukoliko dva portfolija imaju isti nivo rizika (istu varijansu) veći Šarpov količnik ima onaj portfolio koji ima veći očekivani višak prinosa. Dakle, bolji je portfolio sa većim Šarpovim količnikom, odnosno većim očekivanjem. S druge strane, ukoliko imamo dva portfolija koji imaju iste očekivane viškove prinosa (iznad r^f), veći Šarpov količnik ima onaj portfolio kod kog je varijansa manja. Kako varijansom merimo rizik portfolija svakako da biramo onaj portfolio sa manjom varijansom odnosno sa većim Šarpovim količnikom.

Šarpov količnik je veoma koristan kada poredimo efikasnost portfolija koji nemaju isti rizik (predstavljen varijansom) niti isti očekivani prinos, odnosno kada na osnovu neke od te dve ocene ne možemo doneti odluku koji je portfolio bolji. Tada, ukoliko izračunamo Šarpov količnik možemo da odredimo da je bolji onaj portfolio koji ima veći Šarpov količnik.

Ukoliko imamo podatke van uzorka, gde je $M < T$, i kao što smo već rekli T je ukupna serija podataka a M je serija podataka na kojoj vršimo ocene parametara, onda se ocene stope prinosa portfolija, varijanse portfolija i Šarpovog količnika razlikuju od ocena koje smo dobili u uzorku.

Da bismo izračunali očekivani prinos (iznad stope bez rizika) portfolija van uzorka i na gore opisani način („rolling window“ procedure) momente ocenjujemo u prvih M perioda, tako dobijamo ocene u trenutku t, te ocene potom koristimo za dobijanje stope prinosa u trenutku $t+1$. Dakle, postupak je sledeći za svaku od strategija: $\hat{r}_{t+1} = \widehat{w}_t r_{t+1}$,

r_{t+1} predstavlja prinos iznad stope bez rizika u trenutku $t+1$.

Nakon izvršenog uzorkovanja dobijamo seriju podataka od $T-M$ prinosa r_t.

Sada na ovoj seriji podataka dobijamo ocene stope prinosa, varijanse i Šarpovog količnika na sledeći način:

Očekivana stopa prinosa van uzorka je $\hat{\mu} = \frac{1}{T-M}\sum_{k=1}^{T-M}\hat{r}_k$.

Varijansa portfolija van uzorka je $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-M}\sum_{k=1}^{T-M}(\bar{r}_k - \hat{\mu})$.

U skladu sa ovim vrednostima i **Šarpov količnik za portfolio van uzorka** je dat sa

$S = \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$, za gore navedene $\hat{\mu}$ i $\hat{\sigma}^2$.

Procedura pri odabiru je svakako ista kao kada smo posmatrali ove ocene u uzorku, odnosno biramo portfolio sa što većom očekivanom stopom prinosa, manjom disperzijom i što većim Šarpovim količnikom.

Da bismo odredili da li se Šarpovi količnici strategija optimizacije portfolija statistički značajno razlikuju od jednostavne $(1/N)$ strategije izračunaćemo p vrednost za svaku strategiju. Hipoteze testiramo na sledeći način:

Neka su data dva portfolija i i n, sa ocenjenim očekivanjima $\hat{\mu}_i$, $\hat{\mu}_n$, varijansama $\hat{\sigma}_i^2, \hat{\sigma}_n^2$ i kovraijansama $\hat{\sigma}_{in}$ na uzorku dužine $T-M$. Želimo da vidimo da li se Šarpovi količnici statistički značajno razlikuju. Testiramo hipotezu: $H_0 : \frac{\hat{\mu}_i}{\hat{\sigma}_i} - \frac{\hat{\mu}_n}{\hat{\sigma}_n} = 0$ protiv alternativne $H_1 : \frac{\hat{\mu}_i}{\hat{\sigma}_i} - \frac{\hat{\mu}_n}{\hat{\sigma}_n} \neq 0$. Jobson i Krokie test statistika je definisana na sledeći način:

$\hat{Z}_{JK} = \frac{\hat{\sigma}_n\hat{\mu}_i - \hat{\sigma}_i\hat{\mu}_n}{\sqrt{\hat{\vartheta}}}$, gde je $\hat{\vartheta} = \frac{1}{T-M}\left(2\hat{\sigma}_i^2\hat{\sigma}_n^2 - 2\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_n\hat{\sigma}_{in} + \frac{1}{2}\hat{\mu}_i^2\hat{\sigma}_n^2 + \frac{1}{2}\hat{\mu}_n^2\hat{\sigma}_i^2 - \frac{\hat{\mu}_i\,\hat{\mu}_n}{\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_n}\sigma_{in}^2\right)$.

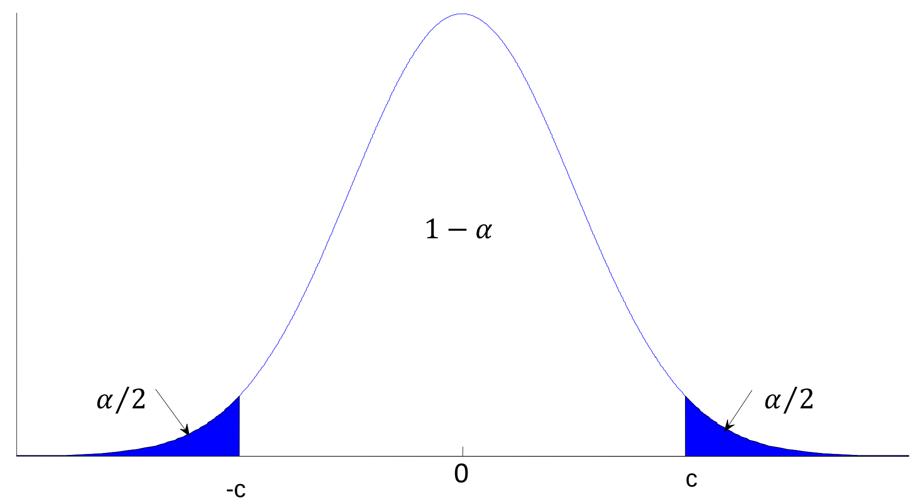
Test statistika $\hat{Z}_{JK}$ asimptotski ima $\mathcal{N}(0{,}1)$ raspodelu pod pretpostavkom da su prinosi nezavisni, jednaki tokom vremena i normalno raspodeljeni.[5], [8]

Kao što vidimo Z-statistika koju koristim važi asimptotski te nije pogodna za male uzorke pa je u tim slučajevima bolje koristiti t-statistiku koja ima Studentovu raspodelu.

U empirijskim rezultatima daćemo p vrednost test statistike $\hat{Z}_{JK}: \mathcal{N}(0,1)$, sa pragom značajnosti $\alpha = 0{,}05$.

Oblasti prihvatanja i odbacivanja hipoteze su dati na sledećem grafiku.

Grafik 5



Kritična oblast za testiranje hipoteze $H_0: \frac{\hat{\mu}_i}{\hat{\sigma}_i} - \frac{\hat{\mu}_n}{\hat{\sigma}_n} = 0$ protiv alternativne $H_1: \frac{\hat{\mu}_i}{\hat{\sigma}_i} - \frac{\hat{\mu}_n}{\hat{\sigma}_n} \neq 0$ pomoću statistike $\hat{Z}_{JK} = \frac{\hat{\sigma}_n \hat{\mu}_i - \hat{\sigma}_i \hat{\mu}_n}{\sqrt{\hat{\vartheta}}}$ je $(-\infty, -c] \cup [c, \infty)$, gde je c kvantil reda $1 - \frac{\alpha}{2}$, normalne $\mathcal{N}(0,1)$ raspodele. Dakle, pošto mi hoćemo da vidimo da li se Šarpovi količnici statistički značajno razlikuju, hoćemo da testiramo hipotezu $H_0: \frac{\hat{\mu}_i}{\hat{\sigma}_i} - \frac{\hat{\mu}_n}{\hat{\sigma}_n} = 0$.

Statistički test se takođe može sprovesti pomoću p-vrednosti, gde je p-vrednost veličina kritične oblasti čija je granica registrovana vrednost test statistike.

Na primer, ako je

$$\alpha = P_{H_0}\{|Z| > c\},$$

tada se verovatnoća

$$p = P_{H_0}\{|Z| > z_{reg}\},$$

Naziva $\boldsymbol{p}$**-vrednost**.

Pomoću p-vrednosti odluka se donosi na sledeći način:

- Ako je $p \leq \alpha$, $\boldsymbol{H_0}$ **se odbacuje**;
- Ako je $p > \alpha$, $\boldsymbol{H_0}$ **se ne odbacuje**.

U programskom paketu Matlab postoji ugrađena funkcija *ztest* pomoću koje možemo da izračunamo p-vrednost Z statistike i koja nam govori da li se hipoteza prihvata ili odbacuje.

Još jedna veličina koju uvodimo, na osnovu koje ocenjujemo efikasnost strategija, jeste **sigurnosni ekvivalent** (certainty equivalent). Sigurnosni ekvivalent slučajne promenljive X, koja predstavlja bogatstvo investitora, jeste sigurno bogatstvo (bez rizika) čija funkcija korisnosti daje istu vrednost kao i očekivana vrednost funkcije korisnosti slučajne promenljive X. Drugim rečima, ako sa CE označimo sigurnosni ekvivalent onda treba da bude zadovoljena sledeća jednakost:

$$U(CE) = E[U(X)] .$$

Dakle, sigurnosni ekvivalent predstavlja zagarantovani prinos koji će investitor radije prihvatiti nego da zaradi više sa određenim nivoom rizika (sa neizvešnošću).

Može se pokazati da je za investitore sa kvadratnom funkcijom korisnosti $U(X) = X - bX^2$, sigurnosni ekvivalent dat sa:

$$CE = \bar{r}_\pi - \frac{\gamma}{2}\sigma^2 ,$$

gde je γ koeficijent averzije prema riziku. U radu će rezultati biti dati za $\gamma = 1$.

Možemo uočiti da je sigurnosni ekvivalent jednak funkciji korisnosti koju investitori maksimiziraju prilikom traženja portfolija sa maksimalnim prinosom ($max\, \bar{r}^T w - \frac{1}{2}\gamma w^T \Sigma w$).

Iz definicije sigurnosnog ekvivalenta vidimo da, što je veći sigurnosni ekvivalent strategija je bolja. Veći sigurnosni ekvivalent garantuje veći prinos (bez rizika).

3.3 Skupovi podataka

Da bismo mogli da uradimo optimizaciju portfolija moramo imati podatke na kojima ćemo izvršiti optimizacije navedenih strategija. Dakle, moramo odrediti na kojoj seriji podataka će se vršiti analize. Kako bismo bili sigurni u tačnost rezultata optimizaciju ćemo uraditi na nekoliko skupova podataka. Posmatraćemo cene 30 akcija koje ulaze u sastav *Dow Jones indeksa*, kao i vrednosti sledećih indeksa: *Russell 1000, Russell 2000, Russell 3000, S&P 100, S&P 500, S&P 600 i Nyse Composite Index.* Istorijski podaci o vrednostima ovih indeksa i cenama akcija mogu se naći na internet stranici http://finance.yahoo.com/.

Kao što vidimo, navedeni su istorijski podaci o cenama investicija, kako su nama potrebni prinosi njih ćemo izračunati na sledeći način:

$$r_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}\ , t = 1, \cdots T\ .$$

gde je P_t cena investicije u trenutku t, a P_{t-1} cena u trenutku $t-1$.

Pored toga, kako poredimo viškove prinosa (iznad r^f), potrebni su nam i istorijski podaci za stopu bez rizika r^f. Za određivanje stope bez rizika uzećemo stopu na tromesečne trezorske zapise SAD (T-bill). Kao izvor za stopu na trezorske zapise u radu su korišćeni zvanični podaci Federalnih Rezervi u St. Louisu, http://research.stlouisfed.org/fred2/series/DTB3/ . Frekvencija preuzetih podataka je dnevna i mesečna.

Takođe, bitno je istaći da će se podaci posmatrati na mesečnom i dnevnom nivou, dakle dobićemo mesečne i dnevne rezultate. Koju dužinu serije podataka (T) ćemo uzeti i koliki vremenski okvir za ocenjivanje parametar (M) ćemo posmatarti biće navedeno iznad svake tabele sa rezultatima.

Svi rezultati će biti dati u procentima.

4 Empirijski rezultati

U ovom poglavlju izloženi su rezultati dobijeni na navedenim skupovima podataka. Portfolio optimizacije na ovim skupovima podataka su izvršene u programskom paketu *Matlab*.

Kako posmatramo rezulate koje dobijamo iz uzorka i van uzorka, vremenski okvir koji koristimo za dobijanje rezultata van uzorka ćemo menjati. U slučaju kada posmatramo mesečne podatke za vremenski okvir na kome se ocenjuju momenti uzimaćemo 5 godina ($M = 60$ meseci) i 10 godina ($M = 120$ meseci). Za dnevne podatke, posmatraćemo takođe $M = 60$ što je približno tri meseca, $M = 120$ što predstavlja približno pola godine. Pored toga posmatraćemo i $M = 1260$ što odgovara vremenskom periodu od 5 godina kada su u pitanju dnevni podaci i $M = 2520$ što predstavlja 10 godina.

Rezultati van uzorka

30 Akcija koje učestvuju u Dow Jones Industrial Average (DJIA) indeksu

Dnevni podaci

(2001-2007)

$\boldsymbol{N = 30}$

$\boldsymbol{T = 1708}$; $\boldsymbol{M = 60}$

Model	Očekivanje	Varijansa	Šarpov količnik	Sigurnosni ekvivalent
$1/N$	0.0088	1.0630	0.0086	-0.5227
Min-Var	-0.0161	0.9911	-0.0161 ($p = 1.1013 \times 10^{-255}$)	-0.5116
Mean-Var	-3.8932	2.9753×10^4	-0.0226 (p=0.8839)	-1.4880×10^4
VW	0.0075	0.9966	0.0075 (p=0)	-0.4908

Tabela 1

Na osnovu ovih podataka i vremenskog okvira za ocene parametara $M = 60$ vidimo da $1/N$ model ima najbolje očekivanje koje iznosi 0.0088, što je za 0.0013 veće nego prvo sledeće očekivanje koje iznosi 0.0075 koje ostvaruje VW model. Međutim ukoliko bi trebalo odlučiti na osnovu varijanse između ove dve strategije, odlučili bismo se za Min-Var, jer ima manju varijansu. Sigurnosni ekvivalent VW portfolija je veći nego sigurnosni ekvivalent $1/N$ portfolija, tako da bi na osnovu ovog kriterijuma rekli da je VW bolja strategija. U ovakvim situacijama dobar pokazatelj je Šarpov količnik. Na osnovu njega možemo da odlučimo koji portfolio je bolji ukoliko su različiti i varijansa i očekivani prinos (iznad r^f). Šarpov količnik $1/N$ strategije je za 0.0011 veći od Šarpovog količnika VW strategije, koja ima sledeći po redu najveći Šarpov količnik, tako da na osnovu ovog kriterijuma odlučujemo da je $1/N$ strategija bolja. Takođe, Šarpovi količnici se statistički značajno razlikuju ($p = 0$) tako da možemo reći da je u ovom slučaju $1/N$ strategija statistički bolja, što se tiče Šarpovog količnika, od VW strategije.

$\boldsymbol{N = 30}$
$\boldsymbol{M = 120}$

Model	Očekivanje	Varijansa	Šarpov količnik	Sigurnosni ekvivalent
$1/N$	0.0102	1.0010	0.0102	-0.4903
Min-Var	-0.0045	0.6416	-0.0056 (p=0)	-0.3253
Mean-Var	0.1010	2.9489×10^3	0.0019 (p=0.9005)	-1.4744×10^3
VW	0.0086	0.9632	0.0088 (p=0)	-0.4730

Tabela 2

Pogledajmo sada šta se dešava ukoliko M povećamo, tj. ako stavimo da je $M = 120$. Markovicovi modeli (Min-Var i Mean-Var) imaju veće očekivanje i manju varijansu, a samim tim i veći Šarpov količnik (grafik 6). Ovo je i bilo za očekivati jer sa povećanjem „prozora“ M ocene parametara su bolje, matrica varijansi i kovarijansi daje verodostojnije rezultate i samim tim ovi modeli su bolji. Ipak, i u ovom slučaju dobijamo slične rezultate kao i za $M = 60$. Iako je očekivani prinos Mean-Var strategije veći nego prinos $1/N$ portfolija, varijansa je dosta lošija (mnogo je veća) nego kod $1/N$ strategije. Šarpov količnik je manji za portfolio Mean-Var ali se takođe statistički značajno ne razlikuje od Šarpovog količnika $1/N$ portfolija. Sigurnosni ekvivalent je manji za Mean-Var portfolio od sigurnosnog ekvivalenta $1/N$ portfolija. Iako je većina rezultata u korist $1/N$ strategije u odnosu na Mean-Var portfolijo, ne možemo reći da je $1/N$ strategija statistički bolja jer se Šarpovi količnici statistički značajno ne razlikuju. Ukoliko posmatramo očekivanje $1/N$ portfolija i Min-Var portfolija, vidimo da $1/N$ portfolio ima veće očekivanje za 0.0147. Međutim, ako za kriterijum uzmemo varijansu, $1/N$ portfolio ima veću varijansu, odnosno Min-Var strategija je bolja. Takođe, sigurnosni ekvivalent Min-Var var strategije je veći, tj. daje bolji rezultat od $1/N$ strategije za 0.1650. Međutim, Šarpov količnik $1/N$ portfolija je za 0.0158 bolji nego Šarpov količnik Min-Var portfolija, takođe Šarpovi količnici ovih dveju strategija se statistički značajno razlikuju tako da možemo reći da je po ovom kriterijumu $1/N$ portfolio bolji. Ostaje još da uporedimo rezultate dobijene za VW portfolio. Očekivani prinos $1/N$ portfolija je bolji u odnosu na VW portfolio. VW ima manju varijansu nego $1/N$, odnosno ukoliko bi na osnovu varijanse odlučivali, odlučili bismo se za VW strategiju. Takođe, sigurnosni ekvivalent VW portfolija je veći nego sigurnosni ekvivalent $1/N$ portfolija, tako da bi se i na osnovu ovog kriterijuma odlučili za VW portfolio. Međutim, ukoliko posmatramo Šarpov količnik, $1/N$ portfolio ima za 0.0014 veći nego VW portfolio, ovi Šarpovi količnici se statistički značajno razlikuju tako da na osnovu ovog kriterijuma možemo reći da je $1/N$ portfolio bolji. Kao što možemo zaključiti iz ove analize, nijedna strategije nije dosledno bolja od $1/N$ portolija.

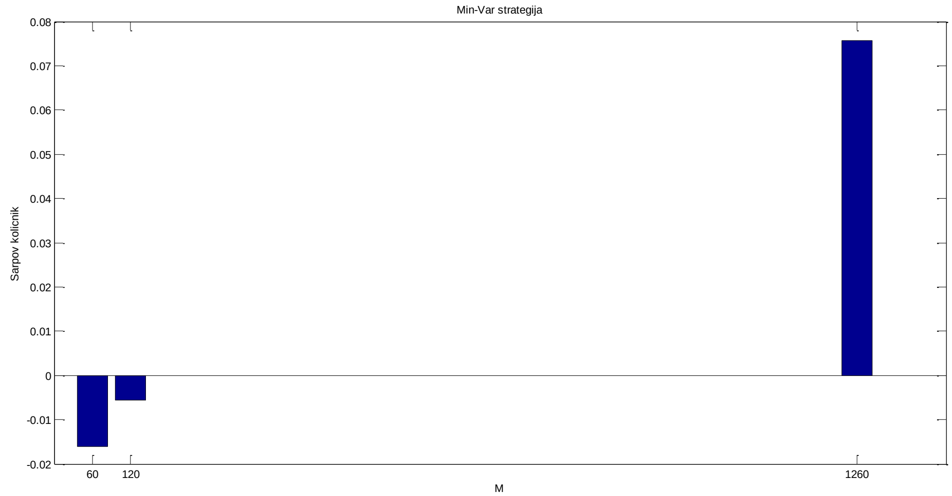
$\boldsymbol{N = 30}$
$\boldsymbol{M = 1260}$

Model	Očekivanje	Varijansa	Šarpov količnik	Sigurnosni ekvivalent
$1/N$	0.0314	0.6567	0.0388	-0.2970
Min-Var	0.0477	0.3966	0.0757 (p=0)	-0.1507
Mean-Var	-0.4640	128.9317	-0.0409 ($p = 2.4571 \times 10^{-38}$)	-64.9298
VW	0.0393	0.6320	0.0494 (p=0)	-0.2767

Tabela 3

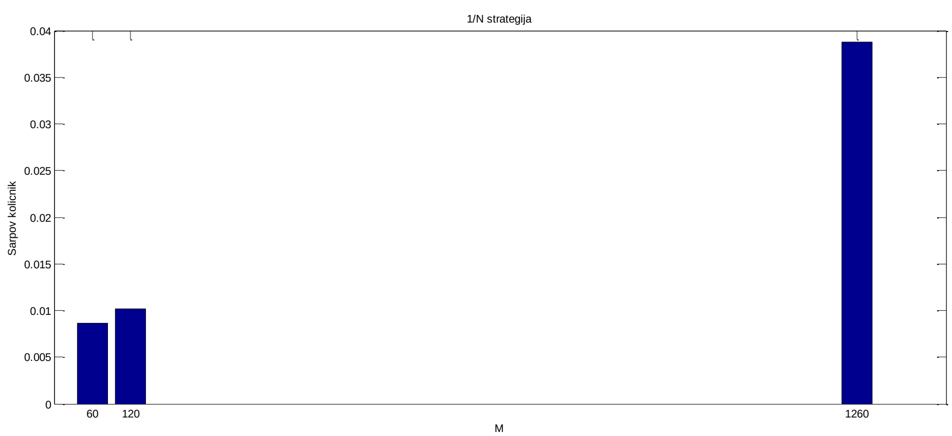
Kao što vidimo, ukoliko je veremenski okvir za ocenu parametara $M = 1260$ (5 god.) Min-Var portfolio je najbolji. Ovo je bilo i očekivano, da će se na dovoljno velikom vremenskom okviru dobiti dovoljno dobre ocene parametara tako da mogu da „pobede“ $1/N$ portfolio. Vidimo da je Šarpov količnik znatno bolji nego kada je M manje (grafik 6). Ukoliko kao kriterijum za poređenje uzmemo očekivani višak prinosa vidimo da prva sledeća strategija (VW) ima za 0.0084 manji. Što se varijanse tiče, takođe je Min-Var strategija najbolja, ima najmanju varijansu. Šarpov količnik Min-Var portfolija je veći za 0.0263 od VW portfolija. Sigurnosni ekvivalent Min-Var strategije je takođe najbolji. Kako se Šarpovi količnici $1/N$ portfolija i Min-Var portfolija statistički značajno razlikuju, u ovom slučaju možemo reći da je Min-Var statistički najbolji portfolio.

Grafik 6



Na kraju još uočimo da na ovoj seriji podataka koja je dužine $T = 1708$, i $1/N$ strategija daje bolje rezultate, što se tiče svih veličina, sa porastom „prozora“ M. Ova promena je, za Šarpov količnik, grafički predstavljena na sledećem grafiku.

Grafik 7



Sada ćemo da posmatramo rezultate koji su dobijeni ukoliko se sve strategije posmatraju u uzorku. I dalje posmatramo seriju podataka od 2001-2007. godine, odnosno imamo seriju od 1708 podataka i analiza se vrši u uzorku, na čitavoj seriji.

Rezultati u uzorku
DJIA index (2001-2007)
$\boldsymbol{N = 30}$
$\boldsymbol{T = 1708}$

Model	Očekivanje	Varijansa	Šarpov količnik	Sigurnosni ekvivalent
$1/N$	0.0029	1.0595	0.0028	-0.5268
Min-Var	0.0179	0.5005	0.0253	-0.2323
Mean-Var	0.2822	7.8912	0.1005	-3.6634
VW	0.0028	0.9946	0.0028	-0.4945

Tabela 4

Što se očekivane vrednosti viška prinosa tiče najbolje rezultate daje Mean-Var portofolio. Međutim varijansa ovog portfolija je veoma visoka tj. najveća u poređenju sa ostalim strategijama tako da na osnovu ovog kriterijuma Mean-Var daje najlošije rezultate. Da bismo videli koji portfolio je zaista bolji korisno je porediti Šarpove količnike, tako da na osnovu Šarpovih količnika dobijamo ponovo da je Mean-Var najbolji. Međutim sigurnosni ekvivalent ove strategije je najlošiji što nije začuđavajuće zbog veoma visoke varijanse. Možemo zaključiti da je Mean-Var najbolja strategija ukoliko strategije poredimo na osnovu očekivanja i Šarpovog količnika. Dok najbolju (najmanju) varijansu daje Min-Var portfolio. Takođe najveći sigurnosni ekvivalent ima Min-Var portfolio. U svakom slučaju vidimo da najbolje rezultate daju startegije koje se oslanjaju na ocene parametara. Odnosno, možemo zaključiti da se dobijaju bolji rezultati kada posmatramo $1/N$ strategiju van uzorka nego u uzorku jer u uzorku $1/N$ portfolio ne daje najbolje rezultate ni po jednom kriterijumu poređenja.

Sada ćemo povećati uzorak da vidimo šta se sa kojom strategijom dešava. Posmatrajmo ponovo dnevne podatke 30 Dow Jones akcija ali na dužem vremenskom periodu. Situacija je sledeća:

Rezultati van uzorka
Dnevni podaci
DJIA index (06.2001-01.2012)
$\boldsymbol{T = 2752}$
$\boldsymbol{N = 30}$; $\boldsymbol{M = 60}$

Model	Očekivanje	Varijansa	Šarpov količnik	Sigurnosni ekvivalent
$1/N$	-6.7763×10^{-4}	1.8569	-4.9727×10^{-4}	-0.9292
Min-Var	0.0237	1.3097	0.0207 ($p = 3.3380 \times 10^{-181}$)	-0.6311
Mean-Var	-10.1305	7.7392×10^{4}	-0.0364 ($p = 0.9003$)	-3.8706×10^{4}
VW	3.4892×10^{-4}	1.6325	$2.7308e \times 10^{-4}$ ($p = 1.7828 \times 10^{-129}$	-0.8159

Tabela 5

Posmatrajmo prvo očekivanje (očekivani prinos) portfolija. Iz tabele se vidi da najbolje (najveće) očekivanje ima Min-Var portfolio, ono iznosi 0.0237, što je za 0.0244 više nego očekivanje koje ima $1/N$ strategija. Takođe, što se varijanse tiče, najmanja je kod Min-Var strategije. Logičan sled jeste da su i Šarpov količnik i sigurnosni ekvivalent ove strategije najbolji, a tabela nam to i potvrđuje. Kao što vidimo p vrednost nam pokazuje da se Šarpovi količnici ove strategije i $1/N$ strategije statistički značajno razlikuju, stoga Min-Var portfolio možemo u ovom slučaju smatrati za najbolju strategiju. Šarpov količnik Min-Var strategije je za 0.0212 bolji od $1/N$ strategije.

U poređenju sa ostalim strategijama, $1/N$ pravilo ima bolje očekivanje, varijansu, Šarpov količnik i sigurnosni ekvivalent od Mean-Var portfolija ali kako se Šarpovi količnici ova dva portfolija statistički značajno ne razlikuju, ne možemo tvrditi da je $1/N$ strategija bolja. U poređenju sa Value Weight portfolijom vidimo da Value Weight daje bolje rezultate što se tiče sve četiri veličine na osnovu kojih poredimo strategije. Takođe, Šarpov količnik Value Weight portfolija i $1/N$ portfolija se statistički značajno razlikuju, tako da možemo reći i da je Value Weight portfolio bolji od $1/N$ portfolija u ovom slučaju.

$\boldsymbol{N = 30}$
$\boldsymbol{M = 120}$

Model	Očekivanje	Varijansa	Šarpov količnik	Sigurnosni ekvivalent
$1/N$	-5.7122×10^{-5}	1.8377	-4.2137×10^{-5}	-0.9189
Min-Var	0.0021	0.8601	0.0023 ($p = 0.0095$)	-0.4279
Mean-Var	-0.1662	3.1303×10^{3}	-0.0030 ($p = 0$)	-1.5653×10^{3}
VW	4.7749×10^{-5}	1.6964	3.6661×10^{-5} ($p = 9.5285 \times 10^{-12}$)	-0.8482

Tabela 6

Prvo šta možemo uočiti jeste da sa povećanjem M Mean-Var portfolio daje znatno bolje rezultate. Razlog ovome jeste što se ova strategija oslanja na procenu matrice kovarijansi pa na većem uzorku možemo dobiti bolje rezultate. Sada možemo da kažemo da je $1/N$ portfolio bolji od Mean-Var portfolija, kao što vidimo $1/N$ portfolio ima očekivani prinos -5.7122×10^{-5}, što je za 0.1661 veće nego prinos Mean-Var portfolija. Takođe, Šarpov količnik $1/N$ strategije je za 0.0030 veći od Mean-Var strategije. Ovi količnici se i statistički značajno razlikuju pa možemo reći da je u ovom slučaju $1/N$ strategija bolja od Mean-Var strategije.

Ostale strategije, kao što vidimo, nadjačavaju $1/N$ pravilo, a ponovo je Min-Var strategija najbolja. Šarpov količnik ove strategije je čak za 0.0023 bolji od $1/N$ pravila.

$\boldsymbol{N = 30}$
$\boldsymbol{M = 1260}$

Model	Očekivanje	Varijansa	Šarpov količnik	Sigurnosni ekvivalent
$1/N$	-0.0021	2.3742	-0.0014	-1.1892
Min-Var	0.0267	0.8608	0.0287 ($p = 0$)	-0.4037
Mean-Var	-0.6209	186.2533	-0.0455 ($p = 0.0218$)	-93.7476
VW	7.1245×10^{-4}	2.0949	4.9224×10^{-4} ($p = 0$)	-1.0467

Tabela 7

U slučaju kada posmatramo vremenski okvir od 5 godina ($M = 5$) vidimo da najbolje rezultate daje Min-Var portfolio, najveće očekivanje, 0.0267. Takođe, ovaj model daje i najmanju varijansu a samim tim i najveći Šarpov količnik. Bitna stvar je da se Šarpovi količnici $1/N$ strategije i Min-Var u ovom slučaju statisčki značajno razlikuju te je zaista Min-Var strategija najbolja u ovom slučaju u terminima Šarpovog količnika. Iz tabele zaključujemo da je i sigurnosni ekvivalent ove strategije najveći te je i po tom kriterijumu Min-Var portfolio najbolji. Takođe, Šarpov količnik Min-Var portfolija je bolji sa porastom M (grafik 8).

Pogledajmo šta će se desiti ukoliko povećamo okvir za procene momenata (M). Kako duži period za procenu može da poboljša rezultate kod matrice kovarijansi, ovo povećanje bi moglo da dovede do još boljih rezultata za Markovicove modele jer su oni zasnovani na proceni momenata. Takođe, duži vremenski okvir često dovodi do slabijih rezultata za jednakoponderisani portfolio.

Dakle, posmatramo kada je okvir za procenu 10 godina, odnosno M=2520.

$\boldsymbol{N = 30}$
$\boldsymbol{M = 2520}$

Model	Očekivanje	Varijansa	Šarpov količnik	Sigurnosni ekvivalent
$1/N$	-0.0274	2.1093	-0.0189	-1.0821
Min-Var	0.0747	0.6435	0.0932 (p=0)	-0.2470
Mean-Var	0.2143	10.3906	0.0665 ($p = 1.0041 \times 10^{-179}$)	-4.9810
VW	-0.0175	1.8937	-0.0127 (p=0)	-0.9643

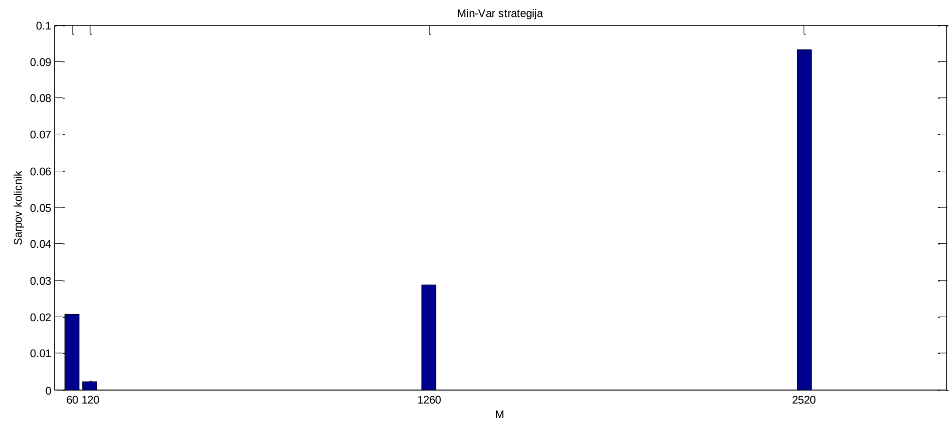
Tabela 8

Kao što vidimo, rezultati za jednakoponderisani portfolio su zaista lošiji nego u slučaju kada je $M = 1260$ (5 godina), očekivani prinos i Šarpov količnik su manji (grafik 9).

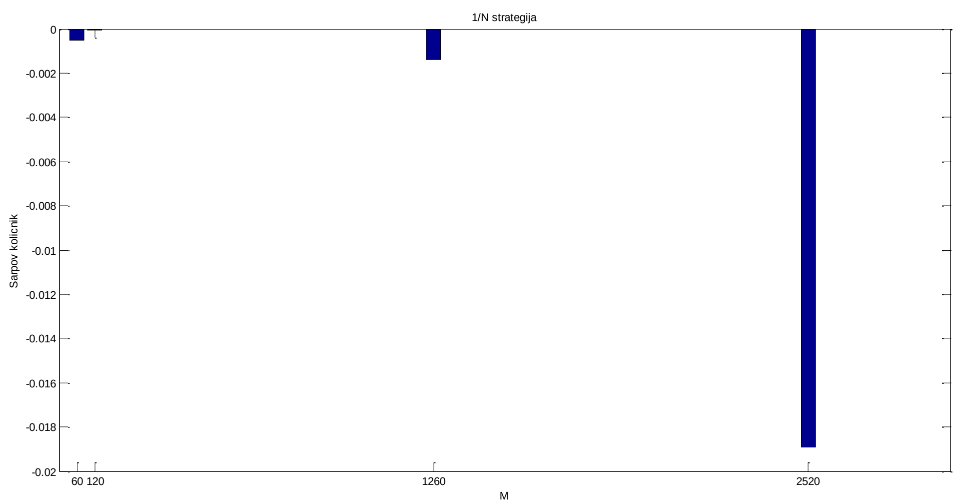
Min-Var model daje dosta bolje rezultate za ovaj vremenski okvir. Došlo je do poboljšanja u svim veličinama koje posmatramo. Grafički prikaz poboljšanja Šarpovog količnika je predstavljen na grafiku 8. Šarpov količnik ove strategije je i dalje najbolji, kao i sigurnosni ekvivalent. Da je ova strategija zaista najbolja potvrđuje i to što se Šarpovi količnici Min-Var strategije i $1/N$ strategije statistički značajno razlikuju.

Bitna stvar je istaći da je došlo i do poboljšanja kod Mean-Var portfolia, što potvrđuje da se na dužim vremenskim periodima dobijaju bolje ocene momenata. U ovom slučaju Mean-Var strategija je druga po redu strategija koja daje najbolje rezultate, dok je u slučaju za $M = 120$ i $M = 1260$ bila poslednja, odnosno najlošija strategija.

Grafik 8



Grafik 9



Sa grafika 9 takođe uočavamo da ukoliko imamo seriju podataka dužine $T = 2752$ sa porastom okvira M dobijamo sve lošije rezultate za Šarpov količnik $1/N$ portfolija.
Dakle, dok je dužina serije podataka bila $T = 1708$, sa porastom M, $1/ N$ portfolio je davao bolje vrednosti Šarpovih količnika (grafik 7), sa povećanjem serije

podataka na $T = 2752$ situacija se menja, odnosno sa porastom M dobijamo sve lošije vrednosti za Šarpov količnik (grafik 9).

Takođe, ukoliko poredimo grafički prikaz Šarpovih količnika Min-Var strategije na vremenskoj seriji dužine $T = 1708$, za različite vrednosti M, (grafik 6) sa grafičkim prikazom na vremenskoj seriji dužine $T = 2752$ (grafik 8) vidimo da su rezultati na dužoj seriji podataka znatno bolji.

Posmatrajmo sada ove **podatke u uzorku**, odnosno posmatrajmo sledeću situaciju:

DJIA index (2001-2012)
$\boldsymbol{N = 30}$
$\boldsymbol{T = 2752}$

Model	Očekivanje	Varijansa	Šarpov količnik	Sigurnosni ekvivalent
$1/N$	-0.0043	1.8374	-0.0032	-0.9230
Min-Var	0.0216	0.7170	0.0255	-0.3369
Mean-Var	0.2341	7.7806	0.0839	-3.6562
VW	-0.0042	1.7038	-0.0032	-0.8561

Tabela 9

Uočimo sledeće, sa povećanjem uzorka (sa $T = 1708$ na $T = 2752$) došlo je do pada prinosa jednakoponderisanog portfolija a time i do manjeg Šarpovog količnika i sigurnosnog ekvivalenta. Dakle, za ovu strategiju još jedan put se pokazalo da daje bolje rezultate za kraći vremenski period.

Što se tiče prinosa i Šarpovog količnika najbolje rezultate daje Mean-Var portfolio. Ali, takođe ova strategija ima najveću varijansu i najmanji sigurnosni ekvivalent pa ne možemo sa sigurnošću reći da je najbolja. U odnosu na Min-Var portfolio, Mean-Var ima manje očekivanje i Šarpov količnik, ali i manju varijansu i veći sigurnosni ekvivalent. Znači da u ovom slučaju ni za jednu od ove dve strategije u potpunosti ne možemo reći da je najbolja. Možemo samo reći koje veličine su kod koje strategije bolje.

Za isti uzorak izložićemo i rezultate koji su dobijeni kada se posmatraju mesečni podaci. U ovom slučaju dužina čitavog uzorka je $T = 132$ a vremenski okvir za ocenu parametara $M = 60$ predstavlja 5 godina.

Mesečni podaci
DJIA index (2001-2012)
$\boldsymbol{N = 30}$
$\boldsymbol{T = 132; M = 60}$

Model	Očekivanje	Varijansa	Šarpov količnik	Sigurnosni ekvivalent
$1/N$	-0.0354	28.4376	-0.0066	-14.2542
Min-Var	0.4595	18.9512	0.1055 ($p = 9.6785 \times 10^{-39}$)	-9.0162
Mean-Var	-0.9663	3.0743×10^3	-0.0174 (p=0.9626)	-1.5381×10^3
VW	0.0719	20.9767	0.0157 (p=0)	-10.4165

Tabela 10

Iz tabele se vidi da najbolje rezultate daje Min-Var portfolio. Očekivanje ove strategije iznosi 0.4595 što je za 0.3876 više od očekivane vrednosti sledeće njabolje strategije koju daje Value Weight portfolio i koja iznosi 0,0719. Takođe, bitno je istaći da se Šarpovi količnici jednakoponderisanog portfolija i Min-Var portfolija statistički značajno razlikuju te u ovom slučaju možemo reći da je Min-Var strategija zaista najbolja.

Povećajmo sada vremenski okvir M sa 60 na 120.

$\boldsymbol{N = 30}$
$\boldsymbol{M = 120}$

Model	Očekivanje	Varijansa	Šarpov količnik	Sigurnosni ekvivalent
$1/N$	-0.1958	22.7406	-0.0411	-11.5661
Min-Var	1.2318	5.2881	0.5357 (p=0)	-1.4122
Mean-Var	-2.1712	318.3546	-0.1217 (p=0.1459)	-161.3484
VW	0.0283	15.0913	0.0073 (p=0)	-7.5174

Tabela 11

Rezultati za jednakoponderisani portfolio su lošiji sa povećanjem M u smislu očekivanog prinosa i Šarpovog količnika, dobijamo manje vrednosti. Dok je varijansa manja i sigurnosni ekvialent veći, odnosno što se ovih veličina tiče rezultati su bolji.

Min-Var strategija je i u ovom slučaju najbolja. Bitno je uočiti da ova strategija daje znatno bolje rezultate sa povećanjem M za sve veličine koje posmatramo, Očekivana vrednost je veća, varijansa je manja, Šarpov količnik i sigurnosni ekvivalent su takođe veći. Šarpovi količnici jednakoponderisane strategije i Min-Var strategije se statistički značajno razlikuju pa i u ovom slučaju Min-Var strategiju možemo proglasiti najboljom.

Pogledajmo sada rezultate na ovoj seriji podataka koje daju optimizacije kada ih posmatramo **u uzorku**.

$\boldsymbol{N = 30}$
$\boldsymbol{T = 132}$

Model	Očekivanje	Varijansa	Šarpov količnik	Sigurnosni ekvivalent
$1/N$	-0.2462	24.3415	-0.0499	-12.4170
Min-Var	0.3550	7.1213	0.1330	-3.2057
Mean-Var	5.4766	188.7874	0.3986	-88.9171
VW	-0.0987	19.0540	-0.0226	-9.6258

Tabela 12

Ukoliko posmatramo očekivanje najbolje rezultate daje Mean-Var portfolio ali ovaj portfolio ima jako veliku varijasu tako da je na osnovu tog kriterijuma najlošiji. U slučaju kada posmatramo varijansu portfolija najbolji portfolio je Min-Var jer ima najmanju varijansu. Što se Šarpovog količnika tiče najbolje rezultate daje Mean-Var strategija ali opet ova strategija ima i najlošiji sigurnosni ekvivalent. U slučaju da poredimo na osnovu sigurnosnog ekvivalenta odabrali bi Min-Var portfolio. Svakako možemo uočiti da najbolje rezultate i u ovom uzorku daju modeli portfolija koji se oslanjaju na procene očekivanja i varijanse.

Sada će biti izloženi rezultati koji se dobiju ukoliko optimizaciju vršimo na 7 indeksa. Indeksi koji su učestvovali u optimizaciji su sledeći: *Russell 1000, Russell 2000, Russell 3000, S&P 100, S&P 500, S&P 600 i Nyse Composite Index.*

Rezultati za 7 indeksa van izorka
Dnevni podaci (08.1995-01.2012.)
$\boldsymbol{N = 7}$
$\boldsymbol{T = 3113}$; $\boldsymbol{M = 60}$

Model	Očekivanje	Varijansa	Šarpov količnik	Sigurnosni ekvivalent
$1/N$	0.0186	0.7829	0.0210	-0.3729
Min-Var	0.0212	0.7842	0.0239 ($p = 3.0526 \times 10^{-57}$)	-0.3709
Mean-Var	2.3571	7.0921×10^3	0.0280 (p=0.8867)	-3.5437×10^3
VW	0.0111	1.4551	0.0092 (p=0)	-0.7165

Tabela 13

Za ovu seriju podataka najbolje očekivanje daje Min-Var portfolio. Najmanju varijansu ima $1/N$ portfolio ali Šarpov količnik i sigurnosni ekvivalent su veći za Min-Var portfolio. Šarpov količnik Min-Var portfolija se statistički značajno razlikuje od Šarpovog količnika $1/N$ portfolia pa možemo raći da je Min-Var portfolio statistički najbolji u ovom slučaju. Iako Mean-Var portfolio ima bolje očekivanje i Šarpov količnik od Min-Var portfolija, ne možemo prihvatiti ovaj portfolio kao bolji jer se Šarpovi količnici $1/N$ portfolija i Mean-Var portfolia ne razlikuju statistički značajno. Ovde još možemo da uočimo da je $1/N$ strategija znatno bolja od VW portfolija.

$\boldsymbol{N = 7}$
$\boldsymbol{M = 120}$

Model	Očekivanje	Varijansa	Šarpov količnik	Sigurnosni ekvivalent
$1/N$	0.0165	0.7952	0.0185	-0.3811
Min-Var	0.0111	0.5669	0.0147 ($p = 1.7644 \times 10^{-245}$)	-0.2724
Mean-Var	0.5406	1.5334×10^3	0.0138 (p=0.8426)	-766.1570
VW	0.0081	1.4750	0.0067 (p=0)	-0.7294

Tabela 14

Kada povećamo vremenski okvir za ocene parametara sa 60 na 120 $1/N$ portfolio ima najbolje očekivanje i Šarpov količnik, dok Min-Var portfolio i dalje ima najbolju varijansu i sigurnosni ekvivalent. U ovom slučaju ne možemo reći ni za jednu strategiju da je dosledno bolja od $1/N$ portfolija.

$\boldsymbol{N = 7}$
$\boldsymbol{M = 1260}$

Model	Očekivanje	Varijansa	Šarpov količnik	Sigurnosni ekvivalent
$1/N$	0.0017	0.9577	0.0017	-0.4772
Min-Var	0.0250	0.8165	0.0276 (p=0)	-0.3833
Mean-Var	0.2516	79.9915	0.0281 ($p = 3.9527 \times 10^{-4}$)	-39.7442
VW	-0.0110	1.1763	-0.0101 (p=0)	-0.5991

Tabela 15

Kada je došlo do bitnog povećanja vremenskog okvira M, sa 120 na 1260, Markovicovi modeli (Min-Var i Mean-Var) su znatno poboljšani. Kao što je već nekoliko puta u radu navedeno razlog tome je što se na većoj vremeskoj seriji podataka momenti (očekivanje i varijansa) mogu bolje oceniti a ovi modeli optimizacije se oslanjaju na ocene momenata. Iz tabele možemo zaključiti da je Min-Var i Mean-Var strategije daju najbolje rezultate.

$\boldsymbol{N = 7}$
$\boldsymbol{M = 2520}$

Model	Očekivanje	Varijansa	Šarpov količnik	Sigurnosni ekvivalent
$1/N$	0.0194	0.7870	0.0218	-0.3741
Min-Var	0.0356	0.8236	0.0392 (p=0)	-0.3762
Mean-Var	0.0514	1.6466	0.0401 ($p = 8.9209 \times 10^{-222}$)	-0.7719
VW	0.0191	0.6488	0.0237 (p=0)	-0.3053

Tabela 16

U ovom slučaju rezultati su raznoliki, ne možemo ni za jednu strategiju tvrditi da je najbolja. Ako posmatramo očekivanje, najveće ima Mean-Var portfolio. Najmanju varijansu daje VW portfolio. Najveći Šarpov količnik daje Mean-Var strategija i on se statistički značajno razlikuje od Šarpovog količnika $1/N$

strategije tako da se po tom kriterijumu može smatrati boljim od $1/N$. Međutim, najbolji sigurnosni ekvivalent ima VW portfolio. Dakle, ni jedan model ne može biti smatran najboljim za ovaj skup podataka.

Pogledajmo sada rezultate u uzorku za ovu seriju podataka od 7 indeksa.

Rezultati u uzorku

$\boldsymbol{N = 7}$

$\boldsymbol{T = 3113}$

Model	Očekivanje	Varijansa	Šarpov količnik	Sigurnosni ekvivalent
$1/N$	0.0192	0.7693	0.0219	-0.3654
Min-Var	0.0379	0.6071	0.0487	-0.2656
Mean-Var	0.0451	0.9926	0.0452	-0.4512
VW	0.0229	1.4306	0.0191	-0.6924

Tabela 17

Kada posmatramo dobijene rezultate u uzorku vidimo da $1/N$ strategija daje najlošije rezultate. Ono što sa sigurnošću možemo za sada da tvrdimo jeste da $1/N$ pravilo daje bolje rezultate u odnosu na druge strategije samo u slučaju da se radi van uzorka.

5 Zaključak

U radu je izvršena analiza portfolija na četiri različite strategije sa ciljem da se utvrdi koliko je efikasna $1/N$ strategije u poređenju sa ostalim portfolio strategijama koje smo posmatrali (Markovicovi portfoliji i vrednosno ponderisani portfolio). Pokazano je da efikasnost svake od strategija zavisi od dužine serije podataka (T), veličine uzorka na kom ocenjujemo parametre (M) i od broja aktiva u portfoliju (N).

Iz rezultata koji su izloženi na kraju rada možemo zaključiti da ukoliko poredimo strategije u uzorku, portfolio optimizacija koja se oslanja na ocene momenata uvek daje bolje rezultate od $1/N$ portfolija. Razlog tome je što na čitavom uzorku ocenjujemo parametre tako da dobijamo dobre ocene. Rezultati vrednosno ponderisanog portfolija nisu uvek bolji od rezultata koje daje $1/N$ portfolio u uzorku. Takođe, vidimo da sa povećanjem serije podataka (T) $1/N$ strategija daje lošije rezultate.

Kao što smo već rekli i uočili u rezultatima, kada računamo van uzorka, rezultati zavise od dužine serije podataka na kojoj poredimo strategije (T), od veličine uzorka na kom ocenjujemo parametre (M) kao i od broja aktiva koje su uključene u portfolio (N).

Ukoliko posmatramo dužinu serije podataka (T) van uzorka, situacija je ista kao kada poredimo rezultate u uzorku. Odnosno, ukoliko imamo dužu seriju podataka T rezultati za jednakoponderisani portfolio su lošiji nego u slučaju kada je T manje.

Što se tiče okvira za ocene parametara (M) zaključujemo da Markovicovi modeli (Min-Var i Mean-Var) daju bolje rezultate sa porastom M.

Još jedan od zaključaka koji se nameće kroz analizu rezultata je da ukoliko imamo veći broj aktiva i ukoliko radimo optimizaciju van uzorka rezultati koje dobijamo su lošiji za Min-Var i Mean-Var strategiju nego kada imamo manje aktiva. Možemo zaključiti da je potreban veći uzorak za ocene parametara da bi optimalne strategije bile bolje kada imamo više aktiva. Kada imamo 7 aktiva već za $M = 60$ Markovicovi portfoliji daju bolje rezultate, a kada imamo 30 aktiva za $M = 1260$ ovi modeli postaju bolji.

Možemo zaključiti da su modeli optimizacije bolji od $1/N$ strategije ukoliko imamo mali broj aktiva i dug period posmatranja. Ukoliko se broj aktiva poveća i period smanji veće su šanse za dobru diverzifikaciju $1/N$ strategije.

Literatura

[1] Andersen C.C., Musajev M.M., *Can modern portfolio optimization strategies outperform 1/N on the Danish Stock market?*, Master thesis, Copenhagen Business School, 2010.

[2] Best, M. J., and R. R. Grauer.1992. ,*Positively Weighted Minimum-Variance Portfolios and the Structure of Asset Expected Returns*, Journal of Financial and Quantitative Analysis 27:513-37.

[3] Black, F., and R. Litterman. 1992., *Global Portfolio Optimization*, Financial Analysts Journal 48:28–43.

[4] Cvitanić J., Zapatero F., *Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 2004.

[5] DeMiguel V., Garlappi L., Uppal R., *Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy?*, Oxford University Press, 2007 .

[6] DeMiguel V., Garlappi L., Uppal R., *How Inefficient is the 1/N* Asset-Allocation Strategy?, 2005.

[7] Hadžić O.,Takači Đ., *Matematičke metode*, Novi Sad, 2000.

[8] Jobson, J. D., and R. Korkie, 1981, *Performance Hypothesis Testing with the Sharpe and Treynor Measures*, Journal of Finance, 36, 889–908.

[9] Luenberger David G., *Investment Science*, Oxford University Press, 1998.

[10] Maddala, G.S., *Introduction to Econometrics*, New York, 2002.

[11] Markowitz, H. M. 1952., *Portfolio Selection*, Journal of Finance 7:77–91.

[12] Rajter-Ćirić D., *Verovatnoća*, Novi Sad 2008.

[13] Steinbach, Marc C.: *Markowitz Revisited: Single-Period and Multi-Period Mean-Variance Models*, Preprint SC 99-30 (August 1999)

[14] http://finance.yahoo.com/

[15] http://research.stlouisfed.org/fred2/series/DTB3/

[16] http://www.investopedia.com/terms/r/risk-freerate.asp#axzz26SoeqVVo

Biografija

Jelena Ilkić je rođena 16.09.1987. u Novom Kneževcu. Osnovnu školu „Jovan Jovanović Zmaj“ završila je u Srpskom Krsturu kao nosilac Vukove diplome. Srednju školu, gimnaziju u Novom Kneževcu, završila je 2006. godine takođe kao nosilac Vukove diplome. Iste godine upisala je Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer finansijska matematika. Osnovne studije je završila 2010. godine sa prosečnom ocenom 9,00. Iste godine upisala je master studije na Prirodno-matematičkom fakultetu, modul Finansijska matematika i položila je sve ispite predviđene planom i programom zaključno sa septembarskim ispitnim rokom 2011. godine sa prosečnom ocenom 9,67. Pored toga, od januara do jula 2012. godine obavljala je stručnu praksi u Vladi AP Vojvodine u Sekretarijatu za kulturu i javno informisanje gde je radila poslove interne kontrole.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: **RBR**	
Identifikacioni broj: **IBR**	
Tip dokumentacije: **TD**	monografska dokumentacija
Tip zapisa: **TZ**	tekstualni štampani materijal
Vrsta rada: **VR**	master rad
Autor: **AU**	Jelena Ilkić
Mentor: **MN**	dr Miloš Božović
Naslov rada: **NR**	Portfolio optimizacija nasuprot jednostavne diverzifikacije: da li je 1/N dovoljno dobra strategija na duži rok?
Jezik publikacije: **JP**	srpski (latinica)
Jezik izvoda: **JI**	s/en
Zemlja publikovanja: **ZP**	Republika Srbija
Uže geografsko područje: **UGP**	Vojvodina
Godina: **GO**	2012
Izdavač: **IZ**	autorski reprint
Mesto i adresa: **MA**	Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

Fizički opis rada: **FOR**	(5/60/13/16/0/9/0) (broj poglavlja, strana, lit.citata, tabela, slika, grafika, priloga)
Naučna oblast: **NO**	Matematika
Naučna disciplina: **ND**	primanjena matematika
Predmetne odrednice, ključne reči: **PO,UDK**	Markovicov portfolio, value-weight portfolio, jednostavna diverzifikacija, izbor portfolija.
Čuva se: **ČU**	U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku
Važna napomena: **VN**	
Izvod: **IZ**	U radu su poređene performanse 1/N strategije i još tri portfolio optimizacije. Cilj je da se utvrdi koliko je efikasna 1/N strategiji, odnosno da li moderna portfolio optimizacija uvek nadjačava jednostavnu 1/N diverzifikaciju. Performanse su poređene u uzorku i van njega i nameće se zaključak da u uzorku 1/N strategija nikada nije bolja od ostalih modela. Koja je strategija bolja van uzork zavisi od veličine uzorka na kome se računaju ocene i od broja aktiva.
Datum prihvatanja teme: **DP**	30.04.2012.
Datum odbrane: **DO**	28.09.2012.
Članovi komisije: **KO**	
Predsednik:	dr Nataša Krejić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član:	dr Zorana Lužanin, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor:	dr Miloš Božović, docent Ekonomskog fakulteta u Beogradu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Serial number: **SNO**	
Identification number: **INO**	
Document type: **DT**	monograph type
Type of record: **TR**	printed text
Content code: **CC**	master's thesis
Author: **AU**	Jelena Ilkić
Menthor: **MN**	dr Miloš Božović
Title: **TI**	Portfolio optimization versus simple diversification: is 1/N always a good strategy in the long run?
Language of text: **LT**	Serbian (Latin)
Language of abstract: **LA**	s/en
Country of publication: **CP**	Republic of Serbia
Locality of publication: **LP**	Vojvodina
Publication year: **PY**	2012
Publisher: **PU**	author's reprint

Publication place: **PP**	Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
Physical description: **PD**	(5/60/13/16/0/9/0) (chapters/pages/literature/tables/pictures/ graphs/add.lists)
Science field: **SF**	Mathematics
Scientific discipline: **SD**	Applied Mathematics
Subject, Key word: **SKW**	Markowitz portfolio, value-weight portfolio, naive diversification, portfolio choice
Holding data: **HD**	In library of Department of Mathematics and Informatics
Note: **N**	
Abstract: **AB**	In the thesis I compared performances of the 1/N strategy relative to the other three optimal portfolio models. The goal is to conclude how efficient 1/N diversification is, respectively does the modern portfolio theory always outperform naive diversification. Performances were compared in a sample and out-of-sample and we can conclude that in sample the 1/N rule is never better than other models. Which strategy is better out-of-sample depends on the length of the estimation window and number of assets.
Accepted on Scientific Board on: **AS**	30.04.2012.
Defended: **DE**	28.09.2012.
Thesis defended board: **DB**	
President:	dr Natašsa Krejić, full professor , Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member:	dr Zorana Lužanin, full professor, Faculty of

	Sciences, University of Novi Sad
Mentor:	dr Miloš Božović, assistant professor, Faculty of Economics, University of Belgrade