

UNIVERZITET U NOVOM SADU  
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Jelena Đokić

## **Prebrojavanje 2-faktora u nekim mrežnim grafovima**

- master rad -

Novi Sad, 2017.

# Sadržaj

<b>Predgovor</b>	<b>4</b>
<b>1. 2-faktori i Hamiltonove konture</b>	<b>5</b>
1.1. Uvod	5
1.2. Osnovni pojmovi i tvrđenja	6
1.3. Egzistencija 2-faktora istaknutih mrežnih grafova	9
1.3.1. Slučaj grafa $P_{m+1} \times P_{n+1}$ (sa $m \cdot n$ kvadratića)	9
1.3.2. Slučaj grafa $T_{m,n}$ (sa $2 \cdot m \cdot n$ trouglova)	9
1.3.3. Slučaj grafa $C_m \times P_{n+1}$ (sa $m \cdot n$ kvadratića)	10
1.3.4. Slučaj grafa $TC_{m,n}$ (sa $2 \cdot m \cdot n$ trouglova)	11
1.3.5. Egzistencija 2-faktora u grafovima $P_{m+1} \times P_{n+1}$ , $T_{m,n}$ , $C_m \times P_{n+1}$ i $TC_{m,n}$	12
1.4. Generativne funkcije	12
<b>2. Metodologija pristupa rešavanju problema prebrojavanja 2-faktora</b>	<b>14</b>
2.1. Određivanje orijentisanih puteva fiksne dužine u digrafu	14
2.2. Karakterizacija objekata prebrojavanja i transfer matična metoda	16
2.3. Redukovanje matrice prelaza	17
<b>3. Prebrojavanje 2-faktora u mrežnim grafovima <math>P_{m+1} \times P_{n+1}</math>, <math>C_m \times P_{n+1}</math>, <math>T_{m,n}</math> i <math>TC_{m,n}</math></b>	<b>18</b>
3.1. 2-faktori u grafu $P_{m+1} \times P_{n+1}$ - Kodiranje čvorova	18
3.1.1. Karakterizacija 2-faktora	18
3.1.2. Slučaj $m = 1$ : Prebrojavanje 2-faktora u grafu $P_2 \times P_{n+1}$	20
3.1.3. Slučaj $m = 2$ : Prebrojavanje 2-faktora u grafu $P_3 \times P_{n+1}$	20
3.1.4. Slučaj $m = 3$ : Prebrojavanje 2-faktora u grafu $P_4 \times P_{n+1}$	21
3.2. 2-faktori u grafu $P_{m+1} \times P_{n+1}$ - Kodiranje oblasti	23
3.2.1. Karakterizacija 2-faktora	23
3.2.2. Slučaj $m = 1$ : Prebrojavanje 2-faktora u grafu $P_2 \times P_{n+1}$	24
3.2.3. Slučaj $m = 2$ : Prebrojavanje 2-faktora u grafu $P_3 \times P_{n+1}$	25
3.2.4. Slučaj $m = 3$ : Prebrojavanje 2-faktora u grafu $P_4 \times P_{n+1}$	25
3.3. 2-faktori u grafu $C_m \times P_{n+1}$ - Kodiranje čvorova	26
3.3.1. Karakterizacija 2-faktora	26
3.3.2. Slučaj $m = 2$ : Prebrojavanje 2-faktora u grafu $C_2 \times P_{n+1}$	27
3.3.3. Slučaj $m = 3$ : Prebrojavanje 2-faktora u grafu $C_3 \times P_{n+1}$	27
3.4. 2-faktori u grafu $C_m \times P_{n+1}$ - Kodiranje oblasti	29
3.4.1. Karakterizacija 2-faktora	29
3.4.2. Slučaj $m = 2$ : Prebrojavanje 2-faktora u grafu $C_2 \times P_{n+1}$	30
3.4.3. Slučaj $m = 3$ : Prebrojavanje 2-faktora u grafu $C_3 \times P_{n+1}$	31
3.4.4. Slučaj $m = 4$ : Prebrojavanje 2-faktora u grafu $C_4 \times P_{n+1}$	31
3.5. 2-faktori u grafu $T_{m,n}$ - Kodiranje čvorova	33
3.5.1. Karakterizacija 2-faktora	33
3.5.2. Slučaj $m = 1$ : Prebrojavanje 2-faktora u grafu $T_{1,n}$	34

3.6.	<b>2-faktori u grafu <math>T_{m,n}</math> - Kodiranje oblasti</b>	36
3.6.1.	<b>Karakterizacija 2-faktora</b>	36
3.6.2.	<b>Slučaj <math>m = 1</math>: Prebrojavanje 2-faktora u grafu <math>T_{1,n}</math></b>	36
3.6.3.	<b>Slučaj <math>m = 2</math>: Prebrojavanje 2-faktora u grafu <math>T_{2,n}</math></b>	38
3.7.	<b>2-faktori u grafu <math>TC_{m,n}</math> -Kodiranje čvorova</b>	40
3.7.1.	<b>Karakterizacija 2-faktora</b>	40
3.7.2.	<b>Slučaj <math>m = 2</math>: Prebrojavanje 2-faktora u grafu <math>TC_{2,n}</math></b>	41
3.8.	<b>2-faktori u grafu <math>TC_{m,n}</math> -Kodiranje oblasti</b>	43
3.8.1.	<b>Karakterizacija 2-faktora</b>	43
3.8.2.	<b>Slučaj <math>m = 2</math>: Prebrojavanje 2-faktora u grafu <math>TC_{2,n}</math></b>	43
<b>4.</b>	<b>Zaključak</b>	<b>45</b>
	<b>Literatura</b>	<b>46</b>

# Predgovor

2-faktor nekog grafa predstavlja pokrivajući 2-regularni podgraf posmatranog grafa. U specijalnom slučaju, kada je 2-faktor kao graf povezan govorimo o Hamiltonovoj konturi. Hamiltonove konture se izučavaju kako u matematici, tako i u fizici i hemiji, gdje nalaze veliku primjenu. U fizici polimera Hamiltonove konture se povezuju sa problemom savijanja proteina, a broj Hamiltonovih kontura nekog grafa je povezan sa entropijom pridruženog polimernog sistema [14]. U prvoj glavi pored osnovnih pojmova i tvrđenja koja se odnose na 2-faktore i Hamiltonove konture dati su i potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju 2-faktora, odnosno Hamiltonovih kontura u nekim mrežnim grafovima kao što su: kvadratna i trougaona mreža oblika pravougaonika, cilindrična kvadratna i trougaona mreža.

Druga glava se bavi metodologijom pristupa rješavanju problema prebrojavanja 2-faktora u mrežnim grafovima  $P_m \times P_n$ ,  $C_m \times P_n$  i njihovim triangularnim variantama. Posebna pažnja je posvećena transfer matričnoj metodi kao i postupku dobijanja generativnih funkcija za nizove brojeva 2-faktora  $\mathcal{F}_m(n)$ . Postoji više pristupa rješavanju ovog problema. Ovdje obrađujemo dva moguća pristupa koji se odnose na načine kodiranja: po čvorovima mreže ili, pak, po oblastima (ćelijama) posmatrane mreže a koji su primjenjivani u nedavnim radovima koji se odnose na prebrojavanje Hamiltonovih kontura na ovim grafovima.

Sada, umjesto Hamiltonovih kontura posmatraju se proizvoljni 2-faktori. U trećoj glavi dajemo nove karakterizacije 2-faktora za navedene grafove i primjenjujemo opisani postupak za dobijanje generativnih funkcija ovih nizova za neke početne vrijednosti od  $m$ , a što do sada, prema našim saznanjima, još nije izvedeno.

Većinu crteža u tezi je autor sam nacrtao. Pojedini crteži su preuzeti iz radova koji se citiraju uz dozvolu autora tih radova.

Na ovom mjestu koristim priliku da se zahvalim svom mentoru, Dr Olgi Bodroža-Pantić, redovnom profesoru PMF-a u N.Sadu, na nesebičnoj, svestranoj pomoći i usmjeravanju prilikom izrade ovog rada.

Posebnu zahvalnost dugujem svojim roditeljima na kompletnoj podršci tokom studiranja.

Novi Sad, 2017.

Jelena Đokić

# 1 . 2-faktori i Hamiltonove konture

## 1.1. Uvod

U nauci o polimerima, Hamiltonovi lanci<sup>1</sup>, specijalno Hamiltonove konture mogu da posluže kao jednostavan model za globularne proteine zbijene strukture [18, 19, 21]. Za ispitivanje termodinamike savijanja ovih proteina korisno je znati postupak generisanja i prebrojavanja Hamiltonovih kontura. Takođe, Hamiltonove konture mogu biti i matematički model topljenja polimera [25]. Broj Hamiltonovih kontura se dovodi u vezu sa entropijom polimernog sistema [14].

Funkcije proteina zavise od njihovih različitih trodimenzionalnih struktura. Ove specifične strukture nastaju usljed savijanja određenih nizova aminokiselina polipeptidnog lanca. Za riješavanje takozvanog *problema savijanja lanaca (the protein folding problem)* potrebno je: a) razviti model proteina koji sadrži bitne osobine sistema, ali koji je, u isto vrijeme, dovoljno jednostavan da nam omogućava izračunavanje različitih dinamičkih i statičkih osobina sistema, b) prepoznati činjenicu da je neophodno uprostiti sile koje djeluju između aminokiselina [6]. U pojednostavljenom mrežnom modelu, protein je predstavljen kao niz čvorova raspoređenih na kubnoj mreži. Izučavanje Hamiltonovih lanaca je prihvaćeno kao prva aproksimacija za kvalitativno razumijevanje mehanizma savijanja proteina, pri čemu se zapremina zanemaruje. [14, 26].

Radijus obrtanja  $R$  polimera dužine  $l \gg 1$  se očekuje da raste kao i

$$R \sim l^\nu,$$

gdje je  $\nu$  standardni kritični eksponent. Odnos broja  $C_1$  Hamiltonovih otvorenih lanaca i broja  $C_0$  Hamiltonovih kontura u hiperkocki  $L^d$  u  $d$  dimenzija iznosi:

$$\frac{C_1}{C_0} \sim l^{\gamma+1} \sim L^{(\gamma+1)d},$$

gdje je  $\gamma$  neki drugi kritični eksponent.

Vjerovatnoća da će se dva otvorena kraja polimera spojiti kako bi formirali polimerski prsten je

$$P_{adj} = \frac{C_0 L^d}{C_1}.$$

S druge strane, Hamiltonove konture su matamatička idealizacija topljenja polimera. Broj Hamiltonovih kontura na grafu odgovara entropiji polimerskog sistema. Entropija po čvoru je

$$\frac{S}{N} = \frac{1}{N} \ln C_{N,P},$$

gdje je  $C_{N,P}$  broj Hamiltonovih kontura u mreži sa  $N$ -tačaka sa periferijom  $P$ .

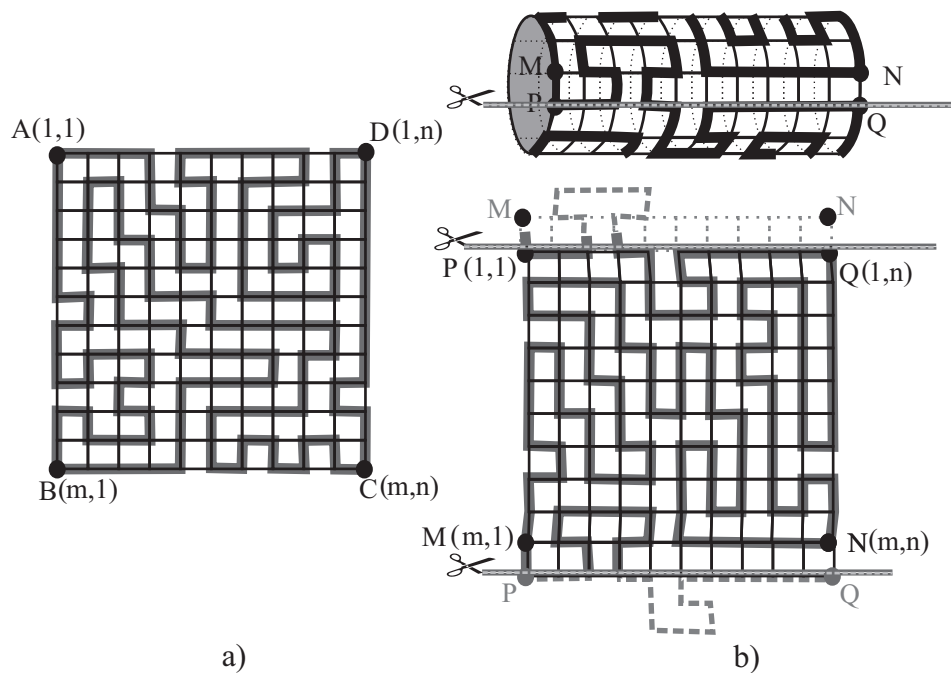
Iz ovih razloga, radovi [14, 18, 19, 21, 25, 20] su posvećeni , između ostalog, i problemu prebrojavanja Hamiltonovih kontura u dvodimenzionalnoj i trodimenzionalnoj mreži korišćenjem transfer-matričnog pristupa [27]. Problem prebrojavanja Hamiltonovih kontura na  $m \times n$  cilindrima, tj.  $C_m \times P_n$  je diskutovan u [25] i [20] (primjetimo da je  $2 \times 2 \times n$  mreža (Slika 1b) izomorfna sa  $4 \times n$  cilindrom).

Matematičari su se, takođe, bavili ovim problemom prebrojavanja za dvodimenzionalne mreže (Slika 1a), tj.  $m \times n$  mrežnim grafom ( $m, n \in N$ ). Prebrojavanje Hamiltonovih kontura,

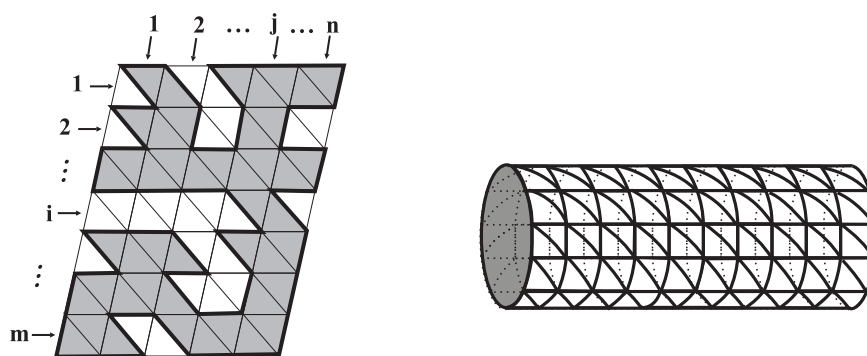
---

<sup>1</sup>Hamiltonov lanac grafa je lanac koji prolazi kroz svaki čvor grafa tačno jedanput. Zatvoren Hamiltonov lanac je Hamiltonova kontura.

skraćeno HK, za male vrijednosti  $m$ , fiksirajući  $m$  i puštajući  $n$  da raste, je istraženo *ad hoc* metodama [23, 22, 24, 29]. Algoritam koji nam omogućuje da sistematski izračunavamo generativne funkcije za ove nizove (sa brojačem  $n$ ) za bilo koje  $m$  je bio prvi put opisan u [1] i nešto kasnije, nezavisno u [28]. Problem je zatim istražen na drugim mrežnim grafovima kao što su kvadratni cilindar [5] i torus [11, 16], kao i trougaoni mrežni graf oblika paralelograma [3, 17] i trougaoni cilindar [4].



**Slika 1.** Mrežni graf pravougaonog i cilindričnog oblika (svaki) sa jednom od svojih Hamiltonovih kontura



**Slika 2.** Trougaoni mrežni graf oblika paralelograma i cilindričnog oblika

## 1.2. Osnovni pojmovi i tvrđenja

*Prost graf*  $G = (V, E)$  se sastoji od konačnog nepraznog skupa elemenata  $V = V(G)$  koje nazivamo *čvorovima* i skupa  $E = E(G)$  dvočlanih podskupova skupa  $V(G)$  koje nazivamo *granama*. Kada se dozvoli višestruko pojavljivanje iste grane govorimo o *multigrafu*, odnosno

opštem grafu ako dozvolimo i pojavu *petlji*, tj. jednočlanih podskupova skupa  $V(G)$ .

*Put* je naizmjeničan niz čvorova i njima incidentnih grana. Dužina puta je broj grana u njemu. Ako se put sastoji od različitih grana tada se on naziva *lanac*. Lanac u kome su svi čvorovi različiti izuzev, možda, prvog i posljednjeg čvora (u tom slučaju govorimo o *zatvorenom lancu*) nazivamo *prost lanac*. Prost otvoren lanac sa  $n$  čvorova označavamo sa  $P_n$ . Prost zatvoren lanac nazivamo *kontura* i označavamo  $C_n$ .

*Prost digraf*  $D = (V, E)$  se sastoji od konačnog nepraznog skupa elemenata  $V = V(D)$  koje nazivamo *čvorovima* i skupa  $E = E(D)$  uređenih parova  $(u, v)$  čvorova iz  $V(D)$  gdje je  $u \neq v$  koje nazivamo *granama* digrafa  $D$ . Ako  $(u, v) \in E$ , tada zapisujemo  $u \rightarrow v$ . Kada se dozvoli višestruko pojavljivanje istog uređenog para kao i pojava *petlji* (u slučaju kada je  $u = v$ ), govorimo o *opštem digrafu*.

*Orijentisani put dužine  $l$*  u digrafu je naizmjeničan niz čvorova i njima incidentnih grana  $v_{i_1}, (v_{i_1}, v_{i_2}), v_{i_2}, (v_{i_2}, v_{i_3}), v_{i_3}, \dots, v_{i_l}, (v_{i_l}, v_{i_{l+1}}), v_{i_{l+1}}$ , gdje je  $v_{i_k} \in V(G)$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, l+1\}$ . Dužina orijentisanog puta je broj grana u njemu.

Dva čvora su povezana ako postoji put koji počinje u jednom a završava u drugom čvoru. Graf je *povezan* ako su svaka dva čvora povezana. Relacija povezanosti u skupu  $V(G)$  predstavlja relaciju ekvivalencije. Klase te relacije ekvivalencije nazivamo *komponentama*.

Za čvorove kažemo da su *susjedni* ako postoji grana sa krajevima u ta dva čvora. Dvije grane su *susjedne* ako su incidentne sa istim čvorom.

*Šuma* je graf bez kontura. *Stablo* je povezana šuma.

*Stepen čvora*  $\delta(v)$  je broj grana incidentnih sa  $v$  (višestrukost se računa kod multigrafa i opšteg grafa). Graf je *regularan* stepena regularnosti  $r$  ako su svi čvorova grafa jednakog stepena  $r$ . *Kompletan graf*  $K_n$  je  $(n-1)$ -regularan prost graf sa  $n$  čvorova (svaka dva čvora su susjedna).

*Unija grafova*  $G_1 = (V_1, E_1)$  i  $G_2 = (V_2, E_2)$ , u oznaci  $G_1 \cup G_2$ , je graf  $G = (V, E)$  gdje je  $V = V_1 \cup V_2$ , a  $E = E_1 \cup E_2$  pri čemu se podrazumeva da  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .

Za dva grafa  $G_1$  i  $G_2$  sa istim skupom čvorova ( $V(G_1) = V(G_2)$ ) koji su granski disjunktni ( $E(G_1) \cap E(G_2) = \emptyset$ ) graf  $G = G_1 \oplus G_2 = (V(G_1), E(G_1) \cup E(G_2))$  nazivamo *granska suma* grafova  $G_1$  i  $G_2$ .

Graf  $G_1 = (V_1, E_1)$  je *podgraf* grafa  $G = (V, E)$  akko je  $V_1 \subseteq V$  a  $E_1 \subseteq E$ .

Graf  $G_1 = (V_1, E_1)$  je *pokrivajući podgraf* grafa  $G = (V, E)$  akko je  $V_1 = V$  a  $E_1 \subseteq E$ .

Graf  $G_1 = (V_1, E_1)$  je *indukovani podgraf* grafa  $G = (V, E)$  akko je  $V_1 \subseteq V$ , a  $E_1 = \{\{v_1, v_2\} \in E | v_1 \in V_1 \wedge v_2 \in V_1\}$ .

*Dekartov proizvod grafova*  $G_1 = (V_1, E_1)$  i  $G_2 = (V_2, E_2)$  je graf  $G = (V, E)$ , u oznaci  $G_1 \times G_2$ , gdje je  $V = V_1 \times V_2 = \{(v_1, v_2) | v_1 \in V_1 \wedge v_2 \in V_2\}$  i  $E = \{\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} | (\{x_1, x_2\} \in E_1 \wedge y_1 = y_2) \vee (x_1 = x_2 \wedge \{y_1, y_2\} \in E_2)\}$

Na Slici 1a) je prikazan Dekartov proizvod lanaca  $P_{12}$  i  $P_{11}$ , tj. graf  $P_{12} \times P_{11}$ , dok je Dekartov proizvod konture  $C_{10}$  i prostog lanca  $P_{11}$ , tj. mrežni cilindar  $C_{10} \times P_{11}$  prikazan u gornjem dijelu Sl. 1 b).

**Definicija 1.1.** *Matrica susjedstva opšteg grafa (digrafa) sa skupom čvorova  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  je kvadratna, cijelobrojna matrica  $A = [a_{i,j}]$  reda  $n$  gdje je  $a_{i,j}$  jednako višestrukosti grane  $\{v_i, v_j\}$  grafa (odn. grane  $(v_i, v_j)$  digrafa) u slučaju da ona postoji, a jednako nuli u slučaju da ne postoji.*

**Definicija 1.2.**  *$r$ -faktor nekog grafa ( $r \in \mathbb{N}$ ) je pokrivajući podgraf koji je regularan stepena regularnosti  $r$ .*

Jasno, 1-faktor nekog grafa predstavlja uniju grafova  $K_2$  (ili  $P_2$ ), dok 2-faktor nekog grafa predstavlja uniju kontura (Slika 3).



**Slika 3.** Tri moguća 2-faktora grafa  $P_4 \times P_3$ . Prva dva su Hamiltonove konture dok treći nije.

Pod *faktorizacijom* nekog grafa podrazumevamo prikazivanje polaznog grafa kao granske sume nekih njegovih faktora. Tako za neki graf kažemo da ima  *$r$ -faktorizaciju* ako se može prikazati kao granska suma nekih  $r$ -faktora. Jasno, takav graf je takođe regularan.

**Definicija 1.3.** *Hamiltonova kontura nekog grafa ( $r \in \mathbb{N}$ ) je kontura koja sadrži sve čvorove grafa.*

Drugim riječima, povezan 2-faktor predstavlja Hamiltonovu konturu.

Podsjetimo se sada samo nekih tvrđenja koja se odnose na faktorizaciju potpunog grafa  $K_n$  kao i egzistenciju Hamiltonove konture u nekom grafu.

**Teorema 1.1.** *Kompletan graf  $K_n$ , gde je  $n$  paran broj ima 1-faktorizaciju, dok kompletan graf  $K_n$ , gde je  $n$  neparan broj ima 2-faktorizaciju.*

U slučaju kada je  $n$  neparan broj, graf  $K_n$  se može razložiti na Hamiltonove konture, tj. prikazati kao granska suma Hamiltonovih kontura. Takav graf ne sadrži nijedan 1-faktor zbog broja čvorova. U slučaju da je  $n$  paran broj, graf  $K_n$  sadrži Hamiltonovu konturu (koja može biti određena proizvoljnom permutacijom čvorova), ali nema 2-faktorizaciju jer je stepen svakog čvora neparan (jednak  $n - 1$ ).

Koristeći prethodna tvrđenja može se lako dokazati da kompletan graf  $K_{4n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ima 4-faktorizaciju, dok kompletan graf  $K_{6n-2}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ima 3-faktorizaciju.

**Teorema 1.2.** *[Ore] Ako je zbir stepena svaka dva nesusedna čvora jednak barem broju čvorova u grafu, tada graf sadrži Hamiltonovu konturu.*

**Teorema 1.3.** *[Diraka] Ako je stepen svakog čvora u grafu jednak barem polovini ukupnog broja čvorova u grafu, tada graf sadrži Hamiltonovu konturu.*



Nažalost, navedeni dovoljni uslovi za egzistenciju Hamiltonove konture u grafu nisu i potrebni uslovi. Jedan od potrebnih uslova za egzistenciju Hamiltonove konture je da graf ne sadrži artikulacioni čvor (čvor čijim brisanjem se povećava broj komponenti grafa). Takođe, važi i sledeće tvrđenje:

**Teorema 1.4.** *Ako graf  $G$  sadrži Hamiltonovu konturu, tada za svaki neprazan podskup  $S$  ( $S \subseteq V(G)$ ) važi da je broj komponenti grafa dobijenog od  $G$  brisanjem čvorova iz  $S$  najviše jednak broju čvorova skupa  $S$ .*

Tvrđenja poput ovog, koja daju potrebne uslove za egzistenciju Hamiltonovih kontura, mogu da posluže za dokazivanje da neki konkretni graf nema Hamiltonovu konturu.

### 1.3. Egzistencija 2-faktora istaknutih mrežnih grafova

Sledeće četiri teoreme govore o egzistenciji Hamiltonovih kontura u posmatranim mrežnim grafovima.

#### 1.3.1. Slučaj grafa $P_{m+1} \times P_{n+1}$ (sa $m \cdot n$ kvadratića)

**Teorema 1.5.** *U grafu  $P_{m+1} \times P_{n+1}$  Hamiltonova kontura (HK) postoji akko je bar jedan od brojeva  $m$  ili  $n$  neparan.*

Dokaz:

( $\Leftarrow$ ) U slučaju da je  $m$  ili  $n$  neparno konstruišemo HK kao na Slici 4.

( $\Rightarrow$ )

*Prvi dokaz:*

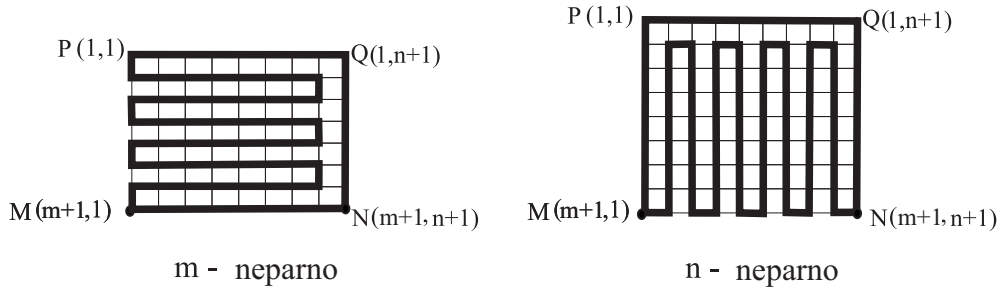
Neka postoji HK. Pretpostavimo suprotno, da su i  $m$  i  $n$  parni brojevi. S jedne strane dužina pomenute HK je jednaka broju čvorova u grafu  $(m+1) \cdot (n+1)$ , dakle, neparna. S druge strane, ako bismo orijentisali HK i krenuli da je obilazimo, broj koraka „na lijevo” mora biti jednak broju koraka „na desno”, dok broj koraka „na dole” mora biti jednak broju koraka „na gore” obzirom da se moramo vratiti u početni čvor. Dakle, dužina HK mora biti parna. Kontradikcija.  $\square$

*Drugi dokaz:*

Pretpostavimo suprotno, da su i  $m$  i  $n$  parni brojevi. Obojimo čvorove u dvije boje: bijelo i crno, tako da su susjedni čorovi obojeni različitom bojom. Ne umanjujući opštost, pretpostavimo da su čvorovi stepena 2 svi crni. Primetimo da je broj crnih čvorova za jedan veći od broja bijelih čvorova. U cilju primjene potrebnog uslova za egzistenciju HK (teorema 2.4) izaberimo za skup  $S$  skup bijelih čvorova. Kako je broj komponenti grafa dobijenog brisanjem bijelih čvorova jednak broju crnih, dobijamo da je taj broj veći od kardinalnosti skupa  $S$  što je u kontradikciji sa tvrđenjem pomenute teoreme.  $\square$

#### 1.3.2. Slučaj grafa $T_{m,n}$ (sa $2 \cdot m \cdot n$ trouglova)

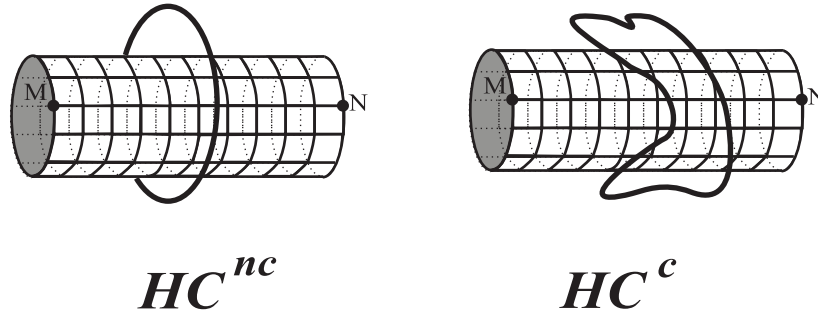
Pravougaoni mrežni graf  $P_{m+1} \times P_{n+1}$  ima  $m \cdot n$  kvadratića. Njegove čvorove označimo sa  $(i, j)$ , gdje  $1 \leq i \leq m+1$  a  $1 \leq j \leq n+1$ . Trougaoni mrežni graf  $T_{m,n}$  konstruišemo tako što dodajemo dijagonale dobijene spajanjem čvorova  $(i, j)$  i  $(i+1, j+1)$ , za  $i \leq m$  i  $j \leq n$ . Svaka dijagonala dijeli kvadratić na dva trougla, koje ćemo označiti sa  $u_{i,j}$  i  $d_{i,j}$  (od ”up” i ”down”), iznad i ispod dijagonale respektivno. Ovako konstruisan graf ima  $2 \cdot m \cdot n$  trouglova. Lako se dokazuje (konstrukcijom primera) da u  $T_{m,n}$  uvijek postoji bar jedna Hamiltonova kontura.



**Slika 4.** Egzistencija Hamiltonovih kontura za  $P_{m+1} \times P_{n+1}$ .

### 1.3.3. Slučaj grafa $C_m \times P_{n+1}$ (sa $m \cdot n$ kvadratića)

Posmatramo mrežni graf  $C_m \times P_{n+1}$  cilindričnog oblika za fiksirano  $m \geq 2$  i različite vrijednosti  $n \geq 1$ . Ako  $m$  fiksiramo, dobijamo niz grafova (po  $n$ ) čije članove niza nazivamo *uski mrežni cilindar*, za razliku od slučaja kada fiksiramo  $n$  i dobijamo niz grafova po  $m$  čije članove nazivamo *široki mrežni cilindar*.



**Slika 5.** Dva tipa Hamiltonovih kontura.

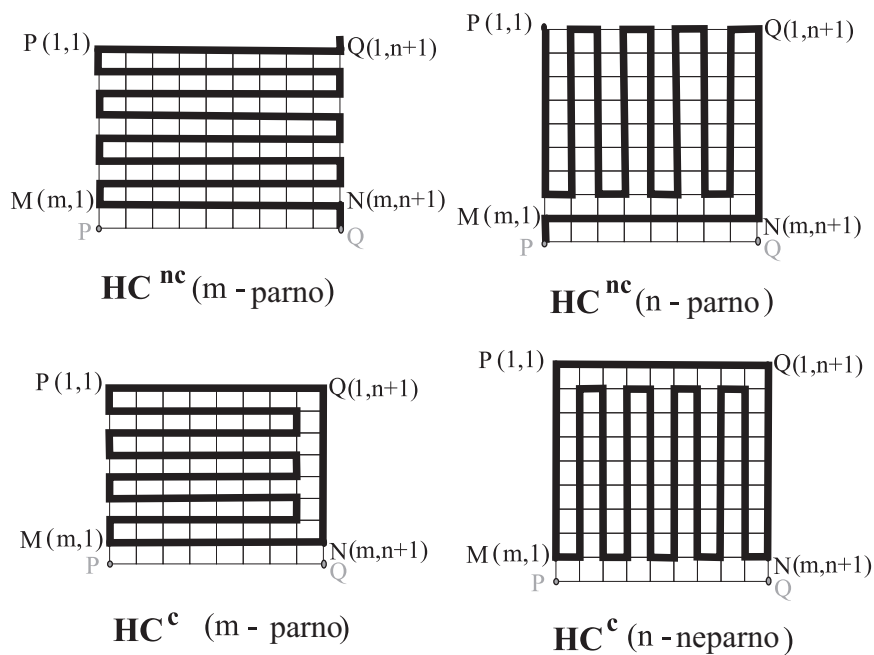
Razlikujemo dvije vrste HK u ovim grafovima (Slika5). U smislu homotopije: jedna vrsta Hamilton-ovih kontura je kontraktibilna u tački (kao Žordanova kriva koja leži na cilindričnoj površi), a druga nije. Označićemo ih sa  $HK^c$  i  $HK^{nc}$ , respektivno.  $HK^{nc}$  je ona koja omotava cilindar, kao narukvica ruku i dijeli beskonačnu cilindričnu površ na kojoj se nalazi naš graf na dvije neograničene oblasti. S druge strane,  $HK^c$  se može „nalijepiti“ na cilindričnu površ, preciznije, ona razbija cilindričnu površ na jednu ograničenu oblast i jednu neograničenu oblast. Ako sa  $h_m^{nc}(n)$  i  $h_m^c(n)$  označimo redom broj  $HK^{nc}$  i  $HK^c$ , tada imamo da je ukupan broj HK u grafu  $C_m \times P_{n+1}$  jednak  $h_m(n) = h_m^{nc}(n) + h_m^c(n)$ . Sada nas interesuje koji uski mrežni cilindri imaju Hamiltonovu konturu.

**Teorema 1.6** Za  $m \geq 2$  i  $n \geq 1$ , imamo da je  $h_m^{nc}(n) = 0$  ako i samo ako su  $i$   $m$  i  $n$  neparni brojevi, a  $h_m^c(n) = 0$  ako i samo ako je  $m$  neparno i  $n$  parno.

*Dokaz:* Lako se konstruiše  $HK^{nc}$  za parno  $m$  ili parno  $n$ , kao i  $HK^c$  za parno  $m$  ili neparno  $n$  (mogući načini za sve slučajeve prikazani su na Slici 6). Ostaje da se pokaže pod kojim uslovima u datom grafu ne postoji  $HK^{nc}$ , odnosno  $HK^c$ . Jasno, HK za proizvoljno  $m$  i  $n$  ( $m \geq 2$  i  $n \geq 1$ ) uvijek postoji.

Posmatrajmo “vertikalne” grane koje spajaju čvorove  $(m, i)$  i  $(1, i)$ , gdje je  $1 \leq i \leq n + 1$ . Broj tih grana koje pripadaju nekoj HK je neparan za slučaj  $HK^{nc}$ , odnosno paran za  $HK^c$ .

Krećući se po nekontraktibilnoj Hamiltonovoj konturi, broj koraka koje napravimo “na lijevo” jednak je broju koraka “na desno”, dok razlika u broju koraka “na gore” i “na dole” mora



**Slika 6.** Konstrukcija dva različita tipa Hamiltonovih kontura.

biti  $m$ . Kako je dužina  $HK^{nc}$   $m(n+1)$ , zaključujemo da mora biti  $m(n+1) \equiv m \pmod{2}$ . Ovo znači da  $HK^{nc}$  u slučaju da su  $i$  i  $n$  neparni ne postoji.

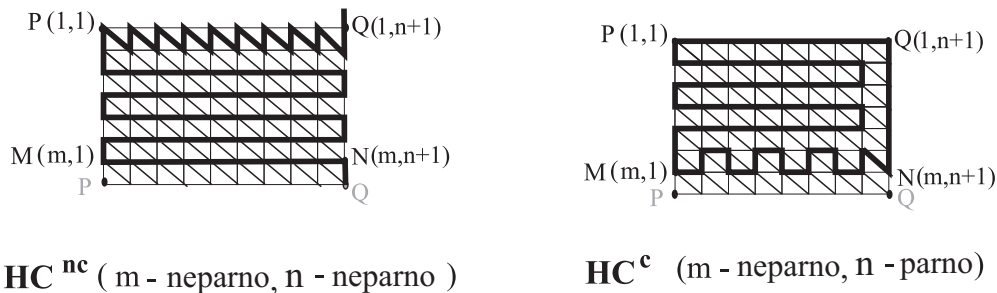
Slično, ako postoji kontraktibilna Hamiltonova kontura, onda  $m(n+1)$  mora biti parno, jer je jednak broj koraka na lijevo i desno, kao i broj koraka na gore i dole. Iz ovoga slijedi da  $HK^c$  ne postoji ako je  $m$  neparno, a  $n$  parno.  $\square$

### 1.3.4. Slučaj grafa $TC_{m,n}$ (sa $2 \cdot m \cdot n$ trouglova)

Slično kao i za graf  $T_{m,n}$ , dodavanjem dijagonala koje spajaju čvorove  $(i, j)$  i  $(i+1, j+1)$ , za  $i \leq m$  i  $j \leq n$  ali sada na kvadratnoj mreži cilindričnog oblika  $C_m \times P_{n+1}$ , uzimajući da je  $(m+1, j)$  ustvari čvor  $(1, j)$  za svako  $j \leq n$  dobijamo trougaoni cilindrični mrežni graf  $TC_{m,n}$ .

Hamiltonove konture za ovaj graf takođe dijelimo na dvije grupe: kontraktibilne  $HK^c$  i nekontraktibilne  $HK^{nc}$ .

Za razliku od grafa  $C_m \times P_{n+1}$ , u  $TC_{m,n}$  uvijek možemo konstruisati  $HK^c$  i  $HK^{nc}$ . Primjer na Slici 7. prikazuje jednu  $HK^{nc}$  za graf  $C_m \times P_{n+1}$  gde su  $m$  i  $n$  neparni i jednu  $HK^c$  za graf  $C_m \times P_{n+1}$  gde je  $m$  neparno a  $n$  parno.



**Slika 7.** Konstrukcija dva različita tipa Hamiltonovih kontura.

### 1.3.5. Egzistencija 2-faktora u grafovima $P_{m+1} \times P_{n+1}$ , $T_{m,n}$ , $C_m \times P_{n+1}$ i $TC_{m,n}$

**Teorema 1.7.** U grafu  $P_{m+1} \times P_{n+1}$  2-faktor postoji akko je bar jedan od brojeva  $m$  ili  $n$  neparan, dok za grafove  $T_{m,n}$ ,  $C_m \times P_{n+1}$  i  $TC_{m,n}$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ) uvijek postoji 2-faktor.

*Dokaz:* Egzistencije Hamiltonovih kontura (u slučajevima kada postoje) garantuju i egzistenciju 2-faktora. Slučaj u kome ne postoji Hamiltonova kontura (za graf  $P_{m+1} \times P_{n+1}$ , kad je broj čvorova  $(m+1) \times (n+1)$  neparan) je takodje i jedinstveni slučaj kad ne postoji ni 2-faktor i dokaz ide potpuno analogno prvom dokazu Teoreme 2.5. Naime, ako bi postojao 2-faktor, on bi bio unija konačnog broja kontura parnih dužina, te bi i ukupan broj grana tog 2-faktora a time i broj čvorova grafa morao biti paran, što nije tačno.  $\square$

## 1.4. Generativne funkcije

Obzirom da je matematički aparat za rad sa funkcijama i stepenim redovima dobro razvijen, za rješavanje kombinatornih problema često se koriste generatriše. Na ovaj način, niz kao beskonačni skup objekata se zamijenjuje jednim objektom- stepenim redom.

**Definicija 1.4.** Funkcija  $g(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots$  pridružena nizu brojeva  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  ( $a_n \in \mathbb{C}$ ) naziva se generativna funkcija ili generatriša niza  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ .

Navedimo neka jednostavna ali korisna tvrđenja koja se odnose na generativne funkcije.

**Teorema 1.8.** Ako funkcije  $g_1(x)$  i  $g_2(x)$  generišu redom nizove  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  i  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ , tada funkcija  $\alpha g_1(x) + \beta g_2(x)$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ ) generiše niz  $\{\alpha a_n + \beta b_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ .

**Teorema 1.9.** Ako funkcija  $g(x)$  generiše niz  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ , tada funkcija  $x^k g(x)$  generiše niz  $0, 0, \dots, 0, a_0, a_1, a_2, \dots$  sa  $k$  nula ispred člana  $a_0$  (ceo niz je translatorno pomijeren).

**Teorema 1.10.** Ako su funkcije  $g_1(x)$  i  $g_2(x)$  generatriše redom nizova  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  i  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ , tada funkcija  $g_1(x)g_2(x)$  generiše niz  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ , gde je  $c_n = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}$ .

**Teorema 1.11.** Ako je  $g(x)$  generatriša niza  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ , tada funkcija  $xg'(x)$  generativna funkcija (sa pretpostavkom da postoji) niza  $\{na_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ , a  $\frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt$  generativna funkcija (sa pretpostavkom da postoji) niza  $\{\frac{1}{n+1} a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ .

**Teorema 1.12.** Generativna funkcija niza  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  koji je određen rekurentnom formulom  $m$ -tog reda  $a_n = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2} + \dots + k_m a_{n-m}$  ( $k_m \neq 0$ ) je racionalna funkcija

$$g(x) = \frac{P(x)}{1 - k_1 x - k_2 x^2 - \dots - k_m x^m}, \text{ pri čemu je } P(x) \text{ polinom najviše } (m-1)\text{-og reda.}$$

*Dokaz:*

Množenjem  $g(x)$  redom sa  $-k_1 x, -k_2 x^2, -k_3 x^3, \dots, -k_m x^m$ , dobijamo:

$$\begin{array}{rcll}
g(x) = & a_0 & +a_1x & +a_2x^2 + \dots + a_mx^m + \dots + a_nx^n + \dots \\
-k_1xg(x) = & & -k_1a_0x & -k_1a_1x^2 - \dots -k_1a_{m-1}x^m - \dots -k_1a_{n-1}x^n - \dots \\
-k_2x^2g(x) = & & & -k_2a_0x^2 - \dots -k_2a_{m-2}x^m - \dots -k_2a_{n-2}x^n - \dots \\
& \vdots & & \dots \qquad \qquad \dots \\
& & & \dots \\
-k_mx^mg(x) = & & & -k_ma_0x^m - \dots -k_ma_{n-m}x^n - \dots
\end{array}$$

Sabirajući lijeve i desne strane gornjeg izraza dobijamo

$$(1 - k_1x - k_2x^2 - \dots - k_mx^m)g(x) = a_0 + (a_1 - k_1a_0)x + (a_2 - k_1a_1 - k_2a_0)x^2 + \dots + (a_{m-1} - k_1a_{m-2} - \dots - k_{m-1}a_0)x^{m-1}, \text{ što je i trebalo da se dokaže. } \square$$

Ilustrujemo ovo poslednje tvrđenje sledećim primjerom.

**Primjer 1** Za niz  $f_3(n)$  ( $n \geq 2$ ) koji predstavlja broj 2-faktora grafa  $P_4 \times P_{n+1}$  odrediti generativnu funkciju  $\mathcal{F}_3(x)$  koja zadovoljava rekurentnu formulu niza  $f_3(n)$  ( $n \geq 2$ )

$$f_3(n) - 2f_3(n-1) - 7f_3(n-2) + 2f_3(n-3) + 3f_3(n-4) - f_3(n-5) = 0.$$

Poznati su početni uslovi:

$$f_3(1) = 2, f_3(2) = 3, f_3(3) = 18, f_3(4) = 54, f_3(5) = 222, f_3(6) = 779, \dots$$

Sličnim postupkom kao u dokazu prethodne teoreme dobijamo:

$$\begin{array}{rcll}
\mathcal{F}_3(x) = & +2x^1 & +3x^2 & +18x^3 + 54x^4 + 222x^5 + 779x^6 + \dots \\
-2x\mathcal{F}_3(x) = & & -4x^2 & -6x^3 - 36x^4 - 108x^5 - 444x^6 + \dots \\
-7x^2\mathcal{F}_3(x) = & & & -14x^3 - 21x^4 - 126x^5 - 378x^6 + \dots \\
2x^3\mathcal{F}_3(x) = & & & +4x^4 + 6x^5 + 36x^6 + \dots \\
3x^4\mathcal{F}_3(x) = & & & +6x^5 + 9x^6 + \dots \\
-x^5\mathcal{F}_3(x) = & & & -2x^6 + \dots
\end{array}$$

$(1 - 2x - 7x^2 + 2x^3 + 3x^4 - x^5)\mathcal{F}_3(x) = x(2 - x - 2x^2 + x^3)$ , odakle dobijamo

$$\mathcal{F}_3(x) = x \frac{2 - x - 2x^2 + x^3}{1 - 2x - 7x^2 + 2x^3 + 3x^4 - x^5}. \text{ (Ovim smo potvrdili rezultat iz [1].)}$$

Sada, proizvoljni član niza  $f_3(n)$  možemo dobiti sa  $f_3(n) = \frac{\mathcal{F}_3^{(n)}(0)}{n!}$ .  $\square$

## 2. Metodologija pristupa rešavanju problema prebrojavanja 2-faktora

U većini radova koji se odnose na određivanje broja Hamiltonovih kontura koristi se ista metodologija koju ćemo primijeniti i na naš postupak određivanja 2-faktora. Stoga ga izložimo u kraćim crtama.

### 2.1. Određivanje orijentisanih puteva fiksne dužine u digrafu

Neka nam je dat neki (opšti) digraf  $\mathcal{D} = (V, E)$  ( $E \subseteq V^2$ ) sa skupom čvorova  $V(\mathcal{D}) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  i matricom susjedstva  $[a_{i,j}]_{n \times n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

**Teorema 2.1** Broj orijentisanih puteva koji počinju u čvoru  $v_i$  a završavaju u čvoru  $v_j$ , za proizvoljno  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  zadovoljavaju istu rekurentnu formulu koja je određena matricom susjedstva digrafa.

Dokaz:

Označimo sa  $f_{v_i}^{v_j}(k)$  broj svih orijentisanih puteva dužine  $k$  koji polaze iz  $v_i$ , a završavaju u  $v_j$ . Naš zadatak je da se odrede brojevi  $f_{v_i}^{v_j}(k)$  za  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Radi kraćeg zapisa označimo dalje sa  $f_i(k)$  vrijednost  $f_{v_i}^{v_j}(k)$  (tretiramo da je čvor  $v_j$  fiksiran). Lako se vidi da važi:

$$\begin{bmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \\ \vdots \\ f_n(k) \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} f_1(k-1) \\ f_2(k-1) \\ \vdots \\ f_n(k-1) \end{bmatrix}, k \in \mathbb{N}$$

gdje se uzima da je

$$f_i(0) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Iz ovoga slijedi, da za svako  $p, 1 \leq p \leq k$ , važi:

$$\begin{bmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \\ \vdots \\ f_n(k) \end{bmatrix} = A^p \cdot \begin{bmatrix} f_1(k-p) \\ f_2(k-p) \\ \vdots \\ f_n(k-p) \end{bmatrix}, k \in \mathbb{N}$$

Iz Kejli-Hamiltonove teoreme slijedi da svaka matrica, pa i naša  $A = [a_{i,j}]_{n \times n}$ , zadovoljava svoju karakterističnu jednačinu koja je reda  $n$ .

Ako je  $P(\lambda) = \lambda^n - b_1\lambda^{n-1} - b_2\lambda^{n-2} - \dots - b_{n-1}\lambda - b_n$  karakteristični polinom matrice  $A$  tada važi:  $A^n - b_1A^{n-1} - b_2A^{n-2} - \dots - b_{n-1}A - b_nE = 0$

( $E$ -jedinična matrica, 0-nula matrica).

Ako ovu jednačinu pomnožimo vektorom  $[f_1(k-n), f_2(k-n), \dots, f_n(k-n)]^T$  ( $k \geq n$ ) i primijenimo za  $p = n, n-1, \dots, 1$  redom, dobijamo:

$$\begin{bmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \\ \vdots \\ f_n(k) \end{bmatrix} - b_1 \begin{bmatrix} f_1(k-1) \\ f_2(k-1) \\ \vdots \\ f_n(k-1) \end{bmatrix} - b_2 \begin{bmatrix} f_1(k-2) \\ f_2(k-2) \\ \vdots \\ f_n(k-2) \end{bmatrix} - \dots - b_n \begin{bmatrix} f_1(k-n) \\ f_2(k-n) \\ \vdots \\ f_n(k-n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

odakle slijedi da za svako  $i, 1 \leq i \leq n$  važi:  $f_i(k) = \sum_{j=1}^n b_j \cdot f_i(k-j), k \geq n$ .

Odnosno broj orijentisanih puteva iz  $v_i$  u  $v_j$  dužine  $k$  računamo po istoj rekurentnoj formuli za proizvoljno  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .  $\square$

**NAPOMENA:** Prethodna teorema bi se mogla uopštiti, tako da posmatramo broj  $f_F^L(k)$  orijentisanih puteva dužine  $k$  ( $k \geq 0$ ) koji počinju u nekom skupu  $F \subseteq V(D)$ , a završavaju se u nekom skupu  $L \subseteq V(D)$ .

Tada imamo da je  $f_F^L(k) = \sum_{v_i \in F} f_i(k)$ , pri čemu sada  $f_i(k)$  predstavlja ukupan broj svih puteva dužine  $k$  koji počinju u čvoru  $v_i$  a završavaju u nekom od čvorova iz skupa  $L$ . Jasno, vrijednost za  $f_i(0)$  se određuje sa:

$$f_i(0) = \begin{cases} 1, & v_i \in L \\ 0, & v_i \notin L \end{cases}$$

Primjenjujući sada prethodnu teoremu dobijamo  $f_F^L(k) = \sum_{j=1}^n b_j \cdot f_F^L(k-j), k \geq n$ . Dakle, niz

cijelih brojeva  $f_F^L(k)$  ( $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ) zadovoljava istu rekurentnu formulu kao i niz brojeva orijentisanih puteva koji počinju u jednom i završavaju se u drugom proizvoljnom čvoru digrafa - formulu koja je određena karakterističnom jednačinom matrice susjedstva digrafa.

## Primjer 2

Za niz  $f_3(n)$  ( $n \geq 2$ ) koji predstavlja broj 2-faktora grafa  $P_4 \times P_{n+1}$  pridruženi digraf ima matricu susjedstva

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Broj  $f_3(n)$  se dobija kao broj orijentisanih puteva dužine  $n-1$  koji počinju i završavaju se u  $v_6$  ili  $v_8$  (skup početnih čvorova, a ujedno i skup završnih čvorova).

Odrediti rekurentnu formulu niza  $f_3(n)$  ( $n \geq 2$ ) i početne uslove.

Karakteristični polinom matrice  $M_3$  može se dobiti korišćenjem programskog paketa *Wolfram Mathematica*:  $1 - 2z - 6z^2 + 7z^3 + 14z^4 - 4z^5 - 10z^6 - z^7 + z^8 =$

$(-1+z)(1+z)^2(-1+3z+2z^2-7z^3-2z^4+z^5)$ , dok se početni uslovi dobijaju stepenovanjem matrice  $M_3$ . Naime, za  $n \geq 2$  vrijednost  $f_3(n)$  se dobija kao zbir četiri elementa matrice  $M_3^{n-1}$  koji se nalaze u šestoj ili osmoj vrsti a takođe i u šestoj ili osmoj koloni. Tako dobijamo da je  $f_3(0) = 0, f_3(1) = 2, f_3(2) = 3, f_3(3) = 18, f_3(4) = 54, f_3(5) = 222, f_3(6) = 779, f_3(7) = 2953, f_3(8) = 107712, f_3(9) = 40043, \dots$

Možemo primijetiti da je dobijena rekurentna formula (za  $n \geq 10$ ) osmog reda:

$$f_3(n) = f_3(n-1) + 10f_3(n-2) + 4f_3(n-3) - 14f_3(n-4) - 7f_3(n-5) + 6f_3(n-6) + 2f_3(n-7) - f_3(n-8).$$

Međutim, to ne znači da se ne može dobiti i rekurentna formula manjeg reda za posmatrani niz. Naime, za dobijenu rekurentnu formulu i početne uslove, poznatim postupkom opisanim gore dobijamo generativnu funkciju ovog niza:

$$\mathcal{F}_3(x) = \frac{2x + x^2 - 5x^3 - 2x^4 + 4x^5 + x^6 - x^7}{(-1+x)(1+x)^2(-1+2x+7x^2-2x^3-3x^4+x^5)} = -\frac{(-2+x)(-1+x)x(1+x)}{-1+2x+7x^2-2x^3-3x^4+x^5}.$$

Jasno, zaključujemo da naš niz zadovoljava rekurentnu formulu petog reda

$$f_3(n) - 2f_3(n-1) - 7f_3(n-2) + 2f_3(n-3) + 3f_3(n-4) - f_3(n-5) = 0,$$

što je u saglasnosti sa već dobijenom formulom u [1].  $\square$

## 2.2 . Karakterizacija objekata prebrojavanja i transfer matična metoda

U osnovi našeg zadatka - zadatka određivanja broja 2-faktora (specijano, Hamiltonovih kontura) leži tzv. „transfer matični metod” (metod matrice prelaza) [9, 27].

Primijetimo da nam struktura posmatranih mrežnih grafova omogućava da skup čvorova ili elementarnih ćelija - pločica (kvadratića ili trouglova) posmatramo kao elemente matrice  $m \times n$ , odnosno da svakom čvoru (ili ćeliji) pridružimo jednoznačno određenu vrstu i kolonu. Na taj način mi pokušavamo da izvršimo kodiranje izabranih objekata, te tako razlikujemo kodiranje čvorova i kodiranje oblasti (ćelija).

Postupak kodiranja elemenata grafa, koji zavisi od 2-faktora (specijalno, Hamiltonove konture) treba tako izvršiti da se

- sa jedne strane, obezbijedi bijekcija između skupa svih 2-faktora (Hamiltonovih kontura) i skupa svih mogućih (obično  $m \times n$  ili  $(m+1) \times n$ ) binarnih (cijelobrojnih) matrica  $B = B_{m,n} = [b_{ij}]$  dobijenih tim kodiranjem (ovo nazivamo *karakterizacijom* 2-faktora, odn. Hamiltonovih kontura), a

- s druge strane, obezbijedi prebrojavanje svih navedenih matrica tako što se odredi

a) skup svih mogućih cijelobrojnih riječi dužine  $m$  koje se mogu pojaviti kao prve kolone, recimo,  $b_{11}b_{21} \dots b_{m1}$  matrice  $B$ , zatim,

b) za svaku riječ dužine  $m$  koja se može pojaviti kao  $k$ -ta kolona matrice  $B$  ( $b_{1k}b_{2k} \dots b_{mk}$ ,  $k \geq 1$ ) skup svih mogućih reči dužine  $m$  koje se mogu pojaviti u istoj matrici kao  $k+1$  kolona ( $b_{1(k+1)}b_{2(k+1)} \dots b_{m(k+1)}$ ,  $k \geq 1$ ), ona koja neposredno slijedi iza  $k$ -te kolone, i na samom kraju,

c) skup svih mogućih cijelobrojnih reči dužine  $m$  koje se mogu pojaviti kao posljednje kolone  $b_{1n}b_{2n} \dots b_{mn}$  matrice  $B$ .

Kada se to postigne, formira se pomoćni digraf  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_m$  čiji se skup čvorova sastoji od svih mogućih cijelobrojnih riječi dužine  $m$  koje se mogu pojaviti kao kolone matrice  $B$ , dok je skup grana određen na sledeći način: iz čvora  $u$  ( $u \in V(\mathcal{D})$ ) ide grana u čvor  $v$  ( $v \in V(\mathcal{D})$ ) akko se riječi  $u$  i  $v$  mogu pojaviti tim redom kao dvije uzastopne kolone u matrici  $B$ . Matricu susjedstva ovog digrafa nazivamo *matricom prelaza*. Na ovaj način, uspostavlja se bijekcija između svih mogućih matrica  $B_{m,n}$  i svih mogućih orijentisanih puteva dužine  $n-1$  (sa  $n$  čvorova koje predstavljaju kolone matrice  $B$ ) koji počinju u podskupu skupa  $V(\mathcal{D})$  koji se sastoji od svih mogućih riječi koje se mogu javiti kao prve kolone matrice  $B = B_{m,n}$ , a završavaju u podskupu skupa  $V(\mathcal{D})$  koji se sastoji od svih mogućih riječi koje se mogu javiti kao posljednje iste matrice  $B$ .

Dakle, na ovaj način se problem prebrojavanja Hamiltonovih kontura sveo u datom mrežnom grafu na problem određivanja svih orijentisanih puteva koji polaze i završavaju se u određenim



skupovima čvorova pridruženog pomoćnog digrafa  $\mathcal{D}_m$ . Ovim se garantuje linearna rekurzija za brojeve 2-faktora, odn. Hamiltonovih kontura kao nizove  $f_m(n)$ , odnosno  $h_m(n)$  koji zavise od reda karakteristične jednačine matrice susjedstva ovog digrafa. Red ovih matrica susjedstva digrafa  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_m$  eksponencijalno raste sa brojem  $m$ . Međutim, moguće je i ove matrice redukovati sažimanjem čvorova digrafa. Tako se omogućava postizanje rekurentnih formula manjeg reda posmatranog niza  $f_m(n)$ , odnosno  $h_m(n)$  za fiksno  $m$  kojima se i dalje isti niz pokorava. Na ovaj način je omogućeno dobijanje rekurentnih formula i za neke vrijednosti  $m$  za koje se zbog kardinalnosti skupa čvorova digrafa to nije moglo uraditi ni kompjuterskim putem, zbog ograničenja memorije.

### 2.3 . Redukovanje matrice prelaza

Primjećeno je da se primenom gore opisanog postupka dobijaju matrice susjedstva pridruženih digrafova koje su često velikog reda, ali sadrže identične vrste. To znači da se čvorovi pridruženi tim vrstama mogu sažeti u jedan čvor i na taj način dobiti digraf sa matricom susjedstva manjeg reda koja i dalje nosi informaciju o traženoj rekurentnoj formuli.

Redukcija matrice prelaza se vrši na sledeći način: Skup ( $S$ ) svih čvorova digrafa  $\mathcal{D}_m$  koji imaju za svoje moguće sljedbenike iste čorove iz  $\mathcal{D}_m$  zamijenimo sa jedinstvenim čvorom  $s$  koji zadržava grane jednog od sažetih čvorova (bez dupliranja). Međutim, ako imamo granu koja ide iz istog čvora u više čvorova koji se sažimaju, tada se višestrukost grane koja se dobija nakon sažimanja ura v cunava.

Matrica susjedstva redukovanog digrafa  $\mathcal{D}'$  digrafa ne mora biti binarna matrica. Ipak, i komplikovanija forma takve matrice omogućava dobijanje rekurentne formule manjeg reda nego što se u startu očekuje.

Nije teško uočiti da je broj puteva zadate dužine sa datim početnim i krajnjim čvorovima u digrafu  $\mathcal{D}_m$  jednak broju puteva iste dužine u redukovanom digrafu  $\mathcal{D}'_m$  ali sa pridruženim čvorovima kao početnim i krajnjim, vodeći računa da ukoliko se sažima veći broj početnih čvorova taj broj se sa tom višestrukošću uračunava.

### 3 . Prebrojavanje 2-faktora u mrežnim grafovima $P_{m+1} \times P_{n+1}$ , $C_m \times P_{n+1}$ , $T_{m,n}$ i $TC_{m,n}$

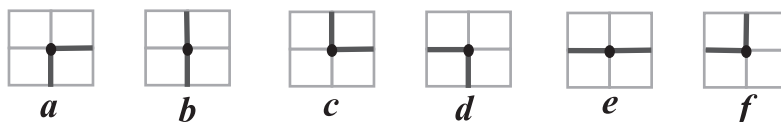
Za svaki od četiri mrežna grafa, primijenjujući najprije pristup kodiranja po čvorovima, a zatim i pristup kodiranja po oblastima, dajemo po jednu karakterizaciju 2-faktora posmatranog mrežnog grafa. Korišćenjem te karakterizacije moguće je za svako fiksno  $m \in \mathbb{N}$  odrediti niz  $f_m(n)$  brojeva 2-faktora (istu oznaku koristimo u sva četiri slučaja, a isto važi i za oznake pridruženih digrafova i specijanih podskupova čvorova). Za neke od početnih vrednosti  $m \in \mathbb{N}$  određujemo generativne funkcije.

#### 3.1 . 2-faktori u grafu $P_{m+1} \times P_{n+1}$ - Kodiranje čvorova

Označeni graf  $P_{m+1} \times P_{n+1}$  ima  $(m+1) \cdot (n+1)$  čvorova i  $m \cdot n$  kvadratnih oblasti (ćelija, prozora). Kako se kodiranje može vršiti i po čvorovima i po oblastima, u sadržaju koji slijedi izložemo oba načina.

##### 3.1.1. Karakterizacija 2-faktora

Svaki čvor grafa  $P_{m+1} \times P_{n+1}$  je označen uređenim parom  $(i, j)$  ( $1 \leq i \leq m+1, 1 \leq j \leq n+1$ ). Posmatrajmo proizvoljni 2-faktor ovog grafa. Svaki čor je incidentan sa bar dvije a najviše četiri grane, od kojih tačno dvije pripadaju tom 2-faktoru. Stoga kod svakog čvora  $(i, j)$  moguća je jedna od 6 mogućih situacija, prikazanih na Slici 8. po pitanju položaja te dvije grane. Slovne oznake  $a, b, c, d, e$  i  $f$  nazivamo *alfa-slova*. Za svaki čvor  $(i, j)$  pridruženo alfa-slovo označavamo sa  $\alpha_{i,j}$ .



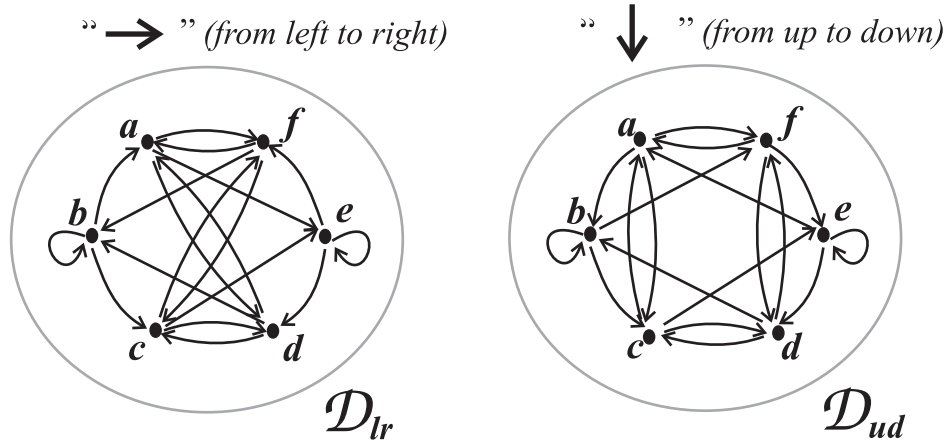
**Slika 8.** Šest mogućih situacija za dati 2-faktor u bilo kom čvoru.

Primijetimo da ukoliko znamo alfa-slovo čvora  $(i, j)$ , tada alfa-slovo njegovog susjednog čvora ne može biti bilo koje od slova iz skupa  $\{a, b, c, d, e, f\}$ , već je određeno digrafovima  $\mathcal{D}_{lr}$  i  $\mathcal{D}_{ud}$ , kao što je prikazano na Slici 9., u zavisnosti od uzajamne pozicije ta dva susjedna čvora. Na primjer, ako je  $\alpha_{i,j} = a$ , tada  $\alpha_{i+1,j} \in \{b, c, f\}$  i  $\alpha_{i,j+1} \in \{d, e, f\}$ .

Za graf  $P_{m+1} \times P_{n+1}$  alfa-slova za ugaone čvorove (stepena 2) moraju biti  $\alpha_{1,1} = a$ ,  $\alpha_{m+1,1} = c$ ,  $\alpha_{1,n+1} = d$  i  $\alpha_{m+1,n+1} = f$ . Riječ  $\alpha_{1,j}\alpha_{2,j}\alpha_{3,j}\dots\alpha_{m,j}\alpha_{m+1,j}$ , gdje je  $1 \leq j \leq n+1$  se naziva alfa-riječ za  $j$ -tu kolonu. Primijetimo da se ona može dobiti konkatencijom (nadovezivanjem) više riječi sledećeg tipa:  $ab^t c, ab^t f, db^t c, db^t f$  i  $e$ , gdje je  $t \geq 0$ .

Ovim kodiranjem čvorova, na ovaj način smo zapravo svakom 2-faktoru grafa  $P_{m+1} \times P_{n+1}$  pridružili jednu  $(m+1) \times (n+1)$  matricu nad azbukom  $\{a, b, c, d, e, f\}$  sa osobinama koje su iskazane u sledećoj teoremi.

**Teorema 3.1 (karakterizacija 2-faktora grafa  $P_{m+1} \times P_{n+1}$  pristupom kodiranja čvorova)** Svaki 2-faktor grafa  $P_{m+1} \times P_{n+1}$  određuje jedinstvenu  $(m+1) \times (n+1)$  matricu  $[\alpha_{i,j}]$  (alfa-matricu) nad azbukom  $\{a, b, c, d, e, f\}$  sa osobinama:



Slika 9. Susjednost stanja dva čvora, slijeva na desno i odozgo na dole

**(1) Uslov prve kolone:** Alfa-riječ za prvu kolonu je iz skupa  $\{a, b, c\}^{m+1}$ , pri čemu je  $\alpha_{1,1} = a$  i  $\alpha_{m+1,1} = c$ .

**(2) Uslov kolone:**

Za svako fiksno  $j$  ( $1 \leq j \leq n+1$ ) važi da je uređen par  $(\alpha_{i,j}, \alpha_{i+1,j})$ , gdje je  $1 \leq i \leq m$ , orijentisana grana u digrafu  $\mathcal{D}_{ud}$  pri čemu je  $\alpha_{1,j} \in \{a, d, e\}$  i  $\alpha_{m+1,j} \in \{c, e, f\}$ .

**(3) Uslov susjednosti kolona:**

Za svako  $j$ , gdje je ( $2 \leq j \leq n+1$ ), uređeni parovi  $(\alpha_{i,j-1}, \alpha_{i,j})$ , gdje je  $1 \leq i \leq m+1$ , su orijentisane grane u digrafu  $\mathcal{D}_{lr}$ .

**(4) Uslov poslednje kolone:**

Alfa-riječ za poslednju kolonu je iz skupa  $\{b, d, f\}^{m+1}$ , pri čemu je  $\alpha_{1,n+1} = d$  i  $\alpha_{m+1,n+1} = f$ . Važi i obrnuto: svaka matrica  $[\alpha_{i,j}]_{m+1 \times n+1}$  sa elementima iz skupa  $\{a, b, c, d, e, f\}$  koja zadovoljava uslove (1)-(4) određuje jedan 2-faktor u označenom grafu  $P_{m+1} \times P_{n+1}$ .

### Dokaz.

Iz gore opisanog načina kodiranja lako se dobijaju osobine (1)-(4), tj. jedinstvenost alfa-matrice. Razmotrimo sada slučaj kad je data matrica  $[\alpha_{i,j}]_{m+1 \times n+1}$  sa elementima iz skupa  $\{a, b, c, d, e, f\}$  koja zadovoljava uslove (1)-(4). Ovi uslovi obezbeđuju da istaknute dvije grane (boldirano) na slici alfa slova koje je pridruženo čvoru grafa  $P_{m+1} \times P_{n+1}$  budu među granama ovog grafa, a takođe i da dobijeni podgraf određen ovim istaknutim granama bude pokrivajući 2-regularni graf, tj. 2-faktor  $\square$

Algoritam je sledeći: Formiramo najprije skup  $\mathcal{F}_m$  - skup svih alfa riječi koje se mogu javiti kao prve kolone alfa-matrice, zatim za svaku od tih riječi određujemo sve moguće sledeće kolone u alfa-matrici ali i sve moguće sljedbenike za novoformirane alfa-riječi. Na ovaj način formiramo pomoćni digraf  $\mathcal{D}_m = (V_m, E_m)$  sa skupom čvorova  $V(\mathcal{D}_m) = V_m$  i skupom grana  $E(\mathcal{D}_m) = E_m$  koji je određen uslovima (2) i (3). Broj svih mogućih alfa-matrice, tj. traženi broj 2-faktora grafa  $P_{m+1} \times P_{n+1}$  predstavlja broj svih orijentisanih puteva dužine  $n$  koji počinju u čvoru iz  $\mathcal{F}_m$  a završavaju u čvoru iz  $\mathcal{L}_m$ , koji se određuje kao podskup skupa čvorova koji zadovoljavaju i uslov (4).

### 3.1.2. Slučaj $m = 1$ : Prebrojavanje 2-faktora u grafu $P_2 \times P_{n+1}$

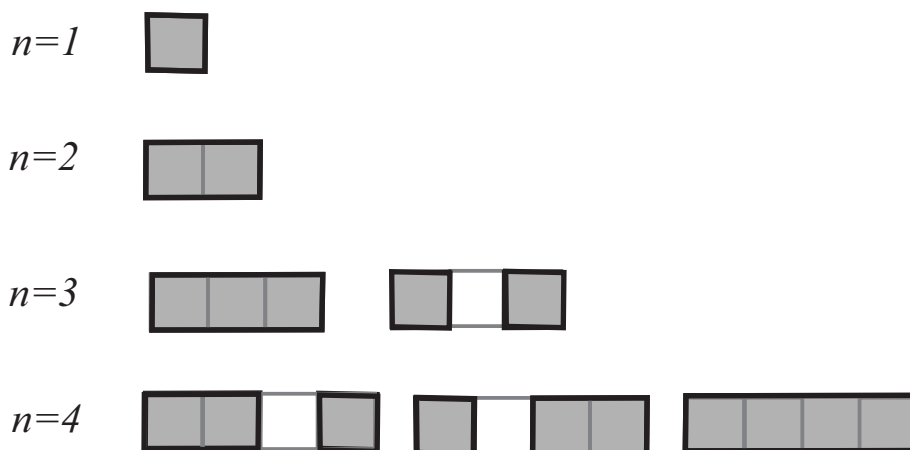
Koristeći naprijed opisanu karakterizaciju 2-faktora, za slučaj  $m = 1$  dobijamo da su moguće alfa-riječi (kolone u pridruženoj alfa-matrici) iz skupa  $V_1 = \{ac, df, ee\}$  pri čemu je prva kolona iz skupa  $\mathcal{F}_1 = \{ac\}$ , a posljednja iz skupa  $\mathcal{L}_1 = \{df\}$ . Formiramo (opšti) digraf  $\mathcal{D}_1 = (V_1, E_1)$  sa skupom čvorova  $V(\mathcal{D}_1) = V_1$  i skupom grana  $E(\mathcal{D}_1) = E_1$  koji je određen uslovima (2) i (3). Tako dobijamo da je matrica susjedstva digrafa  $\mathcal{D}_1$  jednaka

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(redosljed vrsta i kolona odgovara redosljedu navedenih čvorova grafa). Broj svih mogućih alfa-matrice, tj. traženi broj 2-faktora grafa  $P_2 \times P_{n+1}$  predstavlja broj svih orijentisanih puteva dužine  $n$  koji počinju u čvoru iz  $\mathcal{F}_1$  a završavaju u čvoru iz  $\mathcal{L}_1$ . Lako se dobijaju početni uslovi (crtajući sve mogućnosti ili stepenovanjem matrice):  $f_1(0) = 0, f_1(1) = f_1(2) = 1, f_1(3) = 2, f_1(4) = 3, f_1(5) = 5, \dots$  Kako je karakteristični polinom matrice  $M_1$  jednak  $z(z^2 - z - 1)$ , tj. kako važi

$$f_1(n) = f_1(n-1) + f_1(n-2), \text{ za } n \geq 2$$

a imajući u vidu početne uslove, vidimo da se radi o Fibonačijevom nizu.



Slika 10. 2-faktori grafa  $P_2 \times P_{n+1}$

Dakle,  $f_1(n) = F_n$ , gde je  $F_n$   $n$ -ti član Fibonačijevog niza. Jasno, generativna funkcija  $\mathcal{F}_1(x) = \sum_{k \geq 0} f_1(n)x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$ .

### 3.1.3. Slučaj $m = 2$ : Prebrojavanje 2-faktora u grafu $P_3 \times P_{n+1}$

Naš digraf je sada  $\mathcal{D}_2 = (V_2, E_2)$  sa skupom čvorova  $V_2 = \{abc, dbf, eaf, dce, afe, edc\}$  i matricom susjedstva (redosljed vrsta i kolona odgovara redosljedu pojavljivanja čvorova u

zapisu skupa  $V_2$ ):

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pri tome je skup  $\mathcal{F}_2 = \{abc\}$ , dok je skup završnih čvorova  $\mathcal{L}_2 = \{dbf\}$ . Digraf se može redukovati sažimanjem najprije čvorova  $abc, afe, edc$  pri čemu se dobija digraf  $\mathcal{D}'_2 = (V'_2, E'_2)$  sa skupom čvorova  $V'_2 = \{abc, dbf, eaf, dce\}$  i matricom susjedstva

$$M'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kako su druga, treća i četvrta vrsta jednake, to se sada i čvorovi iz  $dbf, eaf$  i  $dce$  mogu sažeti. Tako da se dobija novi digraf  $\mathcal{D}''_2 = (V''_2, E''_2)$  sa skupom čvorova  $V''_2 = \{abc, dbf\}$  i matricom susjedstva

$$M''_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lako se dobija da je niz  $f_2(n)$  određen rekurentnom formulom

$$\boxed{f_2(n) = 3f_2(n-2) \text{ za } n \geq 2}$$

i početnim uslovima  $f_2(0) = 0, f_2(1) = 1$ . Tako sada dobijamo da je

$$f_2(n) = \begin{cases} 3^k, & \text{ako je } n \text{ neparan broj} \\ 0, & \text{ako je } n \text{ paran broj} \end{cases}$$

### 3.1.4. Slučaj $m = 3$ : Prebrojavanje 2-faktora u grafu $P_4 \times P_{n+1}$

Skup čvorova digrafa  $\mathcal{D}_3$  jeste

$V(\mathcal{D}_3) = \{v_1, v_2, \dots, v_{19}\} = \{abbc, acac, dbbf, dbce, dcaf, eabf, eace, dfdf, dfee, eedf, eeee, edfe, abfe, acdf, acee, afdff, dfac, eeac, edbc,$

sa skupom polaznih čvorova  $\mathcal{F}_3 = \{v_1, v_2\} = \{abbc, acac\}$  i skupom završnih čvorova  $\mathcal{L}_3 = \{v_3, v_8\} = \{dbbf, dfdf\}$ . Dobijena matrica susjedstva je 19-og reda. Međutim, zbog jednakosti nekih vrsta moguće je redukovati digraf i sažeti čvorove:  $v_1, v_{12}, v_{13}, v_{16}$  i  $v_{19}$ ; zatim čvorove:  $v_2, v_7, v_{11}, v_{15}$  i  $v_{18}$ ; čvorove:  $v_3$  i  $v_8$ ; čvorove:  $v_4, v_9$  i  $v_{17}$  i čvorove:  $v_6, v_{10}$  i  $v_{14}$ . Tako dobijamo digraf  $\mathcal{D}'_3$  sa skupom čvorova  $V(\mathcal{D}'_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ . Skup  $\mathcal{F}'_3 = \mathcal{F}_3 = \{v_1, v_2\}$ , dok je  $\mathcal{L}_3 = \{v_3\}$ . Redukovana matrica susjedstva je

$$M'_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sa karakterističnim polinomom

$-1 + 2z + 5z^2 - 5z^3 - 9z^4 - z^5 + z^6 = (1+z)(-1+3z+2z^2-7z^3-2z^4+z^5)$ . Početni uslovi su dati u razvoju generativne funkcije koja se dobija:

$$\mathcal{F}_3(x) = -\frac{(-2+x)(-1+x)x(1+x)}{-1+2x+7x^2-2x^3-3x^4+x^5} =$$

$$2x^1 + 3x^2 + 18x^3 + 54x^4 + 222x^5 + 779x^6 + 2953x^7 + 10771x^8 + 40043x^9 + 147462x^{10} +$$

$$545603x^{11} + 2013994x^{12} + 7442927x^{13} + 27490263x^{14} + 101563680x^{15} + 375176968x^{16} +$$

$$1386004383x^{17} + 5120092320x^{18} + 18914660608x^{19} + 69873991466x^{20} + \dots$$

Vidimo da je rekurentna formula za brojeve  $f_3(n)$  petog reda:

$$\boxed{f_3(n) - 2f_3(n-1) - 7f_3(n-2) + 2f_3(n-3) + 3f_3(n-4) - f_3(n-5) = 0, \quad \text{za } n \geq 5}$$

## 3.2. 2-faktori u grafu $P_{m+1} \times P_{n+1}$ - Kodiranje oblasti

### 3.2.1. Karakterizacija 2-faktora

Graf  $P_{m+1} \times P_{n+1}$  ima  $m \cdot n$  kvadratića (prozora). Svakom prozoru grafa pridružujemo jedan elemenat iz skupa  $\{0, 1\}$  na sledeći način: ako se prozor  $w$  nalazi u unutrašnjosti parnog broja kontura datog 2-faktora ili u spoljašnjosti svih, tada mu se pridružuje 0 dok se u ostalim slučajevima prozoru pridružuje 1 (Slika 11).

1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1

Slika 11. Kodiranje po oblastima grafa  $P_{m+1} \times P_{n+1}$

Na ovaj način smo datom 2-faktoru ovog označenog grafa pridružili jednoznačno određenu binarnu matricu  $M_m = [a_{i,j}]$  formata  $m \times n$  koja zadovoljava uslove iskazane u sledećoj teoremi:

**Teorema 3.2 (karakterizacija 2-faktora grafa  $P_{m+1} \times P_{n+1}$  pristupom kodiranja oblasti)**  
Svaki 2-faktor grafa  $P_{m+1} \times P_{n+1}$  određuje jedinstvenu binarnu  $m \times n$  matricu  $[a_{i,j}]$  nad azbukom  $\{0, 1\}$  sa osobinama:

**(1) Uslovi prve i poslednje kolone:**

Za prvu i poslednju kolonu važi:  $(a_{1,1} = a_{m,1} = a_{1,n} = a_{m,n} = 1)$  kao i  $(\forall i)(1 \leq i \leq m - 1) \neg (a_{i,1} = a_{i+1,1} = 0 \vee a_{i,n} = a_{i+1,n} = 0)$

(dviye uzastopne nule ne mogu da se pojave niti u prvoj niti u poslednjoj koloni)

**(2) Uslovi susjednosti kolona:**

$(\forall j)(1 \leq j \leq n - 1) \neg (a_{1,j} = a_{1,j+1} = 0 \vee (a_{m,j} = a_{m,j+1} = 0))$

(dviye uzastopne nule ne mogu da se pojave niti u prvoj niti u poslednjoj koloni) i

$(\forall i)(1 \leq i \leq m - 1)(\forall j)(1 \leq j \leq n - 1)$

$(a_{i,j}, a_{i+1,j}, a_{i,j+1}, a_{i+1,j+1}) \notin ((0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0))$

Važi i obrnuto: svaka binarna matrica  $[a_{i,j}]_{m \times n}$  koja zadovoljava uslove (1) i (2) određuje jedinstven 2-faktor u označenom grafu  $P_{m+1} \times P_{n+1}$ .

**Dokaz.**

Kako je svaki 2-faktor grafa unija kontura koje su zatvorene Žordanove krive (proste zatvorene krive) to je njima ravan našeg planarnog grafa razbijena na oblasti i pridruživanje tim oblastima vrijednost 0 ili 1 na opisani način zaista daje binarnu matricu koja zadovoljava osobine (1) i (2) zbog regularnosti grafa i njegovog stepena regularnosti 2.

Obrnuto, ako je data binarna matrica koja zadovoljava osobine (1) i (2), uočavanjem svih grana grafa  $P_{m+1} \times P_{n+1}$  koje pripadaju kvadratićima sa različitim vrijednostima dobijamo jedan podgraf našeg grafa. Uslovi (1) i (2) obezbeđuju da se ne može pojaviti čvor sa kojim je incidentno

4 ili 0 grana (pojava neparnog broja grana je nemoguća iz razloga što se kod svakog čvora sastaje isti broj 1 regija i 0 regija koje se alternativno mijenjaju u krug, te je broj grana koje ih u tom čvoru razdvajaju paran). Dakle, uočene grane određuju jedinstven 2-faktor grafa  $P_{m+1} \times P_{n+1}$ .  $\square$

Na ovaj način je uspostavljena bijekcija između skupa svih 2-faktora označenog grafa  $P_{m+1} \times P_{n+1}$  i skupa svih binarnih matrica tipa  $m \times n$  koje zadovoljavaju gore navedene uslove. Problem prebrojavanja se, dakle, sveo na problem prebrojavanja ovakvih matrica.

**Definicija 3.1.** *Binarna reprezentacija broja  $p$  ( $p \in \mathbb{N}_0$ ) dužine  $m$  je riječ  $\overline{p_1 p_2 \cdots p_m}$  nad azbukom  $\{0, 1\}$  gdje je*

$$p = \sum_{i=1}^m p_i \cdot 2^{m-i}$$

Sada formiramo pomoćni digraf  $\mathcal{D}_m$  za dato  $m$  sa skupom čvorova

$V(\mathcal{D}_m) = \{0, 1, \dots, 2^m - 1\}$  gdje se susjednost definiše na sledeći način: čvorovi  $p$  i  $q$  su susjedni akko binarna reprezentacija broja  $p$  dužine  $m$  i binarna reprezentacija broja  $q$  dužine  $m$  zadovoljavaju uslove susjednosti dvije kolone redom, tj. akko se mogu pojaviti kao susedne kolone u binarnoj matrici opisanoj u prethodnoj teoremi. Primijetimo da je matrica susjedstva  $M_m$  digrafa  $\mathcal{D}_m$  uvijek simetrična zbog specifičnosti uslova (1) i (2).

Skup svih mogućih prvih kolona  $\mathcal{F}_m$  je jednak skupu svih mogućih poslednjih kolona  $\mathcal{L}_m$ . Predstavlja skup svih binarnih riječi sa zabranjenom podriječi 00 i kardinalnosti je  $F_m$ , gdje je  $F_m$   $m$ -ti član Fibonačijevog niza (poznati zadatak sa kursa Kombinatorike). Takođe, do ovog broja možemo doći i koristeći izomorfizam grafa  $P_{m+1} \times P_2$  sa grafom  $P_2 \times P_{m+1}$  i vrijednost broja 2-faktora ovog poslednjeg.

Na ovaj način problem prebrojavanja svih binarnih matrica formata  $m \times n$  koje zadovoljavaju uslove prve i posljednje kolone i uslove susjednosti kolona dalje svodimo na prebrojavanje svih puteva dužine  $n - 1$  u opštem digrafu  $\mathcal{D}_m$  sa početnim i krajnjim čvorovima u skupu istaknutih čvorova  $\mathcal{F}_m = \mathcal{L}_m$  ovog digrafa.

NAPOMENA: Iako nulti član niza postoji u smislu kao broj 2-faktora u grafu  $P_{m+1} \times P_1$ , tj.  $f_m(0) = 0$ , ipak karakterizacija 2-faktora preko binarnih matrica važi za  $n \geq 1$ , te ako je dobijena rekurentna formula  $k$ -tog reda, za nju možemo da garantujemo tek počevši od  $k + 1$ -og člana (na osnovu ovog pristupa). Da se u tu rekurentnu formulu uklapa i nulti član, tj. da formula važi za sve članove niza počevši od  $k$ -og člana slijedi iz činjenice  $f_m(0)$  jednak broju orijentisanih puteva dužine 0 u digrafu koji se formira pristupom po čvorovima i iz činjenice da su skupovi  $\mathcal{F}_m$  i  $\mathcal{L}_m$  u tom pristupu disjunktni. Kao potvrda da se nulti član kao vrijednost 0 uklapa u rekurentnu formulu može poslužiti činjenica da je brojilac generativne funkcije polinom manjeg stepena od imenioca generativne funkcije.

### 3.2.2. Slučaj $m = 1$ : Prebrojavanje 2-faktora u grafu $P_2 \times P_{n+1}$

Skup čvorova digrafa  $\mathcal{D}_1$  je  $\{0, 1\}$ , dok je matrica susjedstva

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

, a skup istaknutih čvorova  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{L}_1 = \{1\}$ . Karakteristična jednačina  $z^2 - z - 1 = 0$  određuje rekurentnu formulu:



$$f_1(n) = f_1(n-1) + f_1(n-2) \text{ za } n \geq 2$$

što sa početnim uslovima  $f_1(0) = 0, f_1(1) = 1, f_1(2) = 1 \dots$  daje

$f_1(n) = F_n$ , gdje je  $F_n$   $n$ -ti član Fibonačijevog niza. Jasno, generativna funkcija

$$\mathcal{F}_1(x) = \sum_{k \geq 0} f_1(n)x^n = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

### 3.2.3. Slučaj $m = 2$ : Prebrojavanje 2-faktora u grafu $P_3 \times P_{n+1}$

Skup čvorova digrafa  $\mathcal{D}_2$  jeste  $V(\mathcal{D}_2) = \{00, 01, 10, 11\}$ , pri tome je skup  $\mathcal{F}_2 = \mathcal{L}_2 = \{11\}$ .  
Matricom susjedstva

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kako su prva, druga i treća vrsta jednake, to se sada i čvorovi iz 00, 01 i 10 mogu sažeti. Tako da se dobija novi digraf  $\mathcal{D}'_2$  sa skupom čvorova  $\{11, 00\}$  i matricom susjedstva

$$M'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lako se dobija da je niz  $f_2(n)$  određen rekurentnom formulom

$$f_2(n) = 3f_2(n-2) \text{ za } n \geq 2$$

i početnim uslovima  $f_2(0) = 0, f_2(1) = 1, f_2(2) = 0, f_2(3) = 3 \dots$ . Tako sada dobijamo, kao i u slučaju kodiranja čvorova, da je

$$f_2(n) = \begin{cases} 3^k, & \text{ako je } n \text{ neparan broj} \\ 0, & \text{ako je } n \text{ paran broj} \end{cases}, \text{ dok je generativna funkcija } \mathcal{F}_3(x) = \frac{x}{1-3x^2}.$$

### 3.2.4. Slučaj $m = 3$ : Prebrojavanje 2-faktora u grafu $P_4 \times P_{n+1}$

Skup čvorova digrafa  $\mathcal{D}_3$  jeste  $V(\mathcal{D}_3) = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 111\}$ , pri tome je skup  $\mathcal{F}_3 = \mathcal{L}_3 = \{101, 111\}$ .

Matrica susjedstva je  $M_3$  je formata  $8 \times 8$  i data je u (1). Početni uslovi, rekurentna formula i generativna funkcija su dati u Primjeru 1 i Primjeru 2.

### 3.3. 2-faktori u grafu $C_m \times P_{n+1}$ - Kodiranje čvorova

Najprije se cilindrična površ datog grafa  $C_m \times P_{n+1}$  "isiječe i razvije u ravan", Slika 1b., tj. posmatra se pridruženi pravougaoni mrežni graf, pri čemu je izvedena identifikacija svakog čvora u vrsti ispod  $m$ -te (ispod dijela  $MN$ ) sa pridruženim čvorom u prvoj vrsti (dio  $PQ$ ). Za razliku od grafa  $P_{m+1} \times P_{n+1}$  ovdje je broj 2-faktora za  $n = 0$  ( $m \geq 2$ ) jednak 1.

#### 3.3.1. Karakterizacija 2-faktora

Svaki čvor grafa  $C_m \times P_{n+1}$  je označen uređenim parom  $(i, j)$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n+1$ ). Posmatrajmo proizvoljni 2-faktor ovog grafa. Kao i kod grafa  $P_{m+1} \times P_{n+1}$ , postoji 6 mogućih situacija zastupljenosti grana 2-faktora kod proizvoljnog čvora  $(i, j)$ , Slika 8. Analogno kao i u poglavlju 3.1.1 definišemo pojmove alfa-slovo i alfa-riječ, stom razlikom što se alfa-riječ se tretira kao ciklična riječ, tj.  $(\alpha_{m,j}, \alpha_{1,j})$  mora biti orijentisana grana u digrafu  $\mathcal{D}_{ud}$  koji je dat na Slici 9.

**Teorema 3.3 (karakterizacija 2-faktora grafa  $P_{m+1} \times P_{n+1}$  pristupom kodiranja čvorova)** Svaki 2-faktor grafa  $C_m \times P_{n+1}$  određuje jedinstvenu  $m \times (n+1)$  matricu  $[\alpha_{i,j}]$  (alfa-matricu) nad azbukom  $\{a, b, c, d, e, f\}$  sa osobinama:

(1) **Uslov prve kolone:** Alfa-riječ za prvu kolonu je ciklična riječ iz skupa  $\{a, b, c\}^m$ .

(2) **Uslov kolone:** Za svako fiksno  $j$  ( $1 \leq j \leq n+1$ ) važi da uređen par  $(\alpha_{i,j}, \alpha_{i+1,j})$ , gdje je  $1 \leq i \leq m$ ,  $(\alpha_{m+1,j} = \alpha_{1,j})$ , jeste orijentisana grana u digrafu  $\mathcal{D}_{ud}$  sa Slike 9.

(3) **Uslov susjednosti kolona:**

Za svako  $j$ , gdje je ( $2 \leq j \leq n+1$ ), uređeni parovi  $(\alpha_{i,j-1}, \alpha_{i,j})$ , gdje je  $1 \leq i \leq m$ , su orijentisane grane u digrafu  $\mathcal{D}_{lr}$  sa Slike 9.

(4) **Uslov poslednje kolone:**

Alfa-riječ za poslednju kolonu je ciklična riječ iz skupa  $\{b, d, f\}^m$ .

Važi i obrnuto: svaka matrica  $[\alpha_{i,j}]_{m \times (n+1)}$  sa elementima iz skupa  $\{a, b, c, d, e, f\}$  koja zadovoljava uslove (1)-(4) određuje jedan 2-faktor u označenom grafu  $C_m \times P_{n+1}$ .

#### Dokaz.

Iz naprijed opisanog načina kodiranja, kao i u slučaju grafa  $P_{m+1} \times P_{n+1}$  lako se dobijaju osobine (1)-(4), tj. jedinstvenost alfa-matrice. Razmotrimo sada slučaj kad je data matrica  $[\alpha_{i,j}]_{m \times (n+1)}$  sa elementima iz skupa  $\{a, b, c, d, e, f\}$  koja zadovoljava uslove (1)-(4). Ovi uslovi obezbeđuju da istaknute dvije grane (boldirano) na slici alfa slova koje je pridruženo čvoru grafa  $C_m \times P_{n+1}$  budu među granama ovog grafa, a takođe i da dobijeni podgraf određen ovim istaknutim granama bude pokrivajući 2-regularni graf, tj. 2-faktor  $\square$

Ovom teoremom smo uspostavili bijekciju između svih 2-faktora grafa  $C_m \times P_{n+1}$  i svih alfa-matrica formata  $m \times (n+1)$ . Skup svih mogućih prvih i poslednjih kolona tih matrica označavamo sa  $\mathcal{F}_m$  i  $\mathcal{L}_m$ , redom.

Formiramo pomoćni digraf  $\mathcal{D}_m = (V_m, E_m)$  kao skup svih alfa (cikličnih) riječi koje se mogu javiti kao kolone alfa-matrice koristeći osobine iskazane u prethodnoj teoremi.

Broj svih mogućih alfa-matrica, tj. traženi broj 2-faktora grafa  $C_m \times P_{n+1}$  sada predstavlja broj svih orijentisanih puteva dužine  $n$  koji počinju u čvoru iz  $\mathcal{F}_m$  a završavaju u čvoru iz  $\mathcal{L}_m$ .

### 3.3.2. Slučaj $m = 2$ : Prebrojavanje 2-faktora u grafu $C_2 \times P_{n+1}$

Koristeći naprijed opisanu karakterizaciju 2-faktora, za slučaj  $m = 2$  dobijamo da su moguće alpha-riječi iz skupa  $V_2 = \{ac, ca, bb, df, fd, ee\}$  pri čemu su skupovi  $\mathcal{F}_2 = \{ac, bb, ca\}$  i  $\mathcal{L}_2 = \{df, fd, bb\}$ . Opšti digraf  $\mathcal{D}_2$  sa skupom čvorova  $V(\mathcal{D}_2) = V_2$  ima matricu susjedstva

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(redosljed vrsta i kolona odgovara redosljedu navedenih čvorova digrafa). Broj svih mogućih alfa-matrica, tj. traženi broj 2-faktora grafa  $C_2 \times P_{n+1}$  predstavlja broj svih orijentisanih puteva dužine  $n$  koji počinju u čvoru iz  $\mathcal{F}_2$  a završavaju u čvoru iz  $\mathcal{L}_2$ .

Lako se dobijaju početni uslovi (crtajući sve mogućnosti ili stepenovanjem matrice):  $f_2(0) = 1, f_2(1) = 5, f_2(2) = 13, f_2(3) = 41, f_2(4) = 121, \dots$ . Karakteristični polinom matrice  $M_2$  je  $z^4(-3 - 2z + z^2) = z^4(1 + z)(-3 + z)$ , te standardnim postupkom dobijamo generativnu funkciju

$$\mathcal{F}_2(x) = -\frac{1 + 3x}{(1 + x)(-1 + 3x)} = 1 + 5x + 13x^2 + 41x^3 + 121x^4 + 365x^5 + 1093x^6 + 3281x^7 + 9841x^8 + 29525x^9 + 88573x^{10} + 265721x^{11} + 797161x^{12} + 2391485x^{13} + 7174453x^{14} + 21523361x^{15} + 64570081x^{16} + 193710245x^{17} + 581130733x^{18} + 1743392201x^{19} + 5230176601x^{20} + \dots$$

Do istog rezultata smo mogli doći sažimanjem čvorova  $ac, ca$  i  $ee$ , a takođe i sažimanjem čvorova  $bb, df, fd$ , redukujući na taj način digraf  $\mathcal{D}_2$  na digraf  $\mathcal{D}'_2$  čija matrica susjedstva sada izgleda

$$M'_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

i čiji karakteristični polinom  $-3 - 2z + z^2$  određuje rekurentnu formulu za  $f_2(n)$ :

$$\boxed{f_2(n) = 2f_2(n-1) + 3f_2(n-2), \text{ za } n \geq 2.}$$

### 3.3.3. Slučaj $m = 3$ : Prebrojavanje 2-faktora u grafu $C_3 \times P_{n+1}$

Skup čvorova digrafa  $\mathcal{D}_3$  jeste

$$V(\mathcal{D}_3) = \{v_1, v_2, \dots, v_{13}\} = \{abc, bbb, bca, cab, dbf, dce, eaf, bfd, ced, afe, fdb, edc, fea\}$$

pri tome je skup  $\mathcal{F}_3 = \{abc, bbb, bca, cab\}$ , a skup  $\mathcal{L}_3 = \{bbb, dbf, bfd, fdb\}$ .

Matrica susjedstva  $M_3$  je reda 13. Moguće je sažimanje čvorova iz sledećih grupa (svaka grupa se sažima u jedan čvor):

$\{v_1, v_{10}, v_{12}\}$ ,  $\{v_2, v_5, v_8, v_{11}\}$ ,  $\{v_3, v_6, v_{13}\}$  i  $\{v_4, v_7, v_9\}$ . Tako dobijamo matricu susjedstva

$$M'_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

redukovanog digrafa  $\mathcal{D}'_3$ , sa karakterističnim polinomom  $(1+z)^2(-1-3z+z^2)$  (koji garantuje rekurentnu formulu četvrtog reda) a broj  $f_3(n)$  ( $n \geq 0$ ) je određen brojem orijentisanih puteva dužine  $n$  koji počinju u  $\mathcal{F}'_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  a završavaju se u čvoru  $v_2$ . Početni uslovi su dati u razvoju dobijene generativne funkcije:

$$\mathcal{F}_3(x) = -\frac{1+x}{-1+3x+x^2} = 1 + 4x + 13x^2 + 43x^3 + 142x^4 + 469x^5 + 1549x^6 + 5116x^7 + 16897x^8 + 55807x^9 + 184318x^{10} + 608761x^{11} + 2010601x^{12} + 6640564x^{13} + 21932293x^{14} + 72437443x^{15} + 239244622x^{16} + 790171309x^{17} + 2609758549x^{18} + 8619446956x^{19} + 28468099417x^{20} + \dots$$

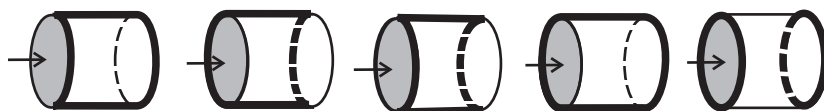
Zaključujemo da rekurentna formula za traženi niz izgleda:

$$\boxed{f_3(n) = 3f_3(n-1) + f_3(n-2), \text{ za } n \geq 2.}$$

### 3.4. 2-faktori u grafu $C_m \times P_{n+1}$ - Kodiranje oblasti

Za prebrojavanje 2-faktora u grafu  $P_{m+1} \times P_{n+1}$  koristili smo karakterizaciju tog grafa koja mu pridružuje binarnu matricu sa  $m \times n$  elemenata, tj. onoliko koliko ima i kvadratića posmatrani graf. U slučaju grafa  $C_{m+1} \times P_{n+1}$  to nije dovoljno. Naime, svakom 2-faktoru grafa  $C_{m+1} \times P_{n+1}$  možemo pridružiti jedinstvenu binarnu matricu koja se formira slično kao i u slučaju grafa  $P_{m+1} \times P_{n+1}$  vodeći računa o tome da svaka grana 2-faktora pripada kvadratićima koji su različito kodirani. Svakom prozoru grafa pridružujemo jedan element iz skupa  $\{0,1\}$  na sledeći način: ako se prozor  $w$  nalazi u unutrašnjosti parnog broja kontura datog 2-faktora tada mu se pridružuje 0 (isto važi i za prozore koji se nalaze u spoljašnjoj oblasti svih kontura) dok se u ostalim slučajevima prozoru pridružuje 1.

No, ovo pridruživanje svakom 2-faktoru jedne takve matrice nije injektivno. Primjer za to je dat na Slici 11. Graf  $C_2 \times P_2$  ima pet 2-faktora, dok je broj binarnih matrica formata  $2 \times 1$ , tj. binarnih riječi dužine 2 samo 4. Naime, na ovaj opisani način pridruživanja dva 2-faktora bi bila pridružena koloni 01, dva 2-faktora koloni 10, a jedan 2-faktor koloni 11.



Slika 12. 2-faktori grafa  $C_2 \times P_2$

Ipak, moguće je „doskočiti” ovom problemu. O tome govori sledeća teorema:

#### 3.4.1. Karakterizacija 2-faktora

##### **Teorema 3.4 (karakterizacija 2-faktora grafa $C_m \times P_{n+1}$ pristupom kodiranja oblasti)**

Svaki 2-faktor grafa  $C_m \times P_{n+1}$  određuje jedinstvenu binarnu  $m \times (n+1)$  matricu  $[a_{i,j}]$  nad azbukom  $\{0,1\}$  sa osobinama:

##### **(1) Uslovi prve i poslednje kolone:**

Prva kolona je ciklična binarna riječ dužine  $m$  sa zabranjenom podriječi 00, dok je poslednja kolona ciklična riječ  $00 \dots 0$  ili  $11 \dots 1$  (sve nule ili sve jedinice).

##### **(2) Uslovi susjednosti kolona** ( $a_{m+1,j} \stackrel{\text{def}}{=} a_{1,j}$ , za sve $j(1 \leq j \leq n+1)$ ):

$(\forall i)(1 \leq i \leq m)(\forall j)(1 \leq j \leq n)$

$(a_{i,j}, a_{i+1,j}, a_{i,j+1}, a_{i+1,j+1}) \notin \{(0,0,0,0), (1,1,1,1), (1,0,0,1), (0,1,1,0)\}$ .

Važi i obrnuto: svaka binarna matrica  $[a_{i,j}]_{m \times (n+1)}$  koja zadovoljava uslove (1) i (2) određuje jedinstven 2-faktor u označenom grafu  $P_{m+1} \times P_{n+1}$  dobijen razdvajanjem 0-oblasti od 1-oblasti.

##### **Dokaz.**

Svaki 2-faktor grafa jeste unija kontura koje su zatvorene Žordanove krive (proste zatvorene krive). Svakom tom konturom neograničena cilindrična površ na kojoj leži naš graf razbijena je ili na dve neograničene površi ( $i$  za takvu konturu kažemo da je *nekontraktibilna*) ili na jednu ograničenu i jednu neograničenu oblast (za takvu konturu kažemo da je *kontraktibilna*). Primijetimo da nekontraktibilne konture su uređene slijeva-nadesno. Ako je njihov broj paran imamo samo jednu neograničenu oblast koju možemo tretirati kao 0-oblast, dok u slučaju neparnog broja tih nekontraktibilnih kontura imamo dvije neograničene oblasti i one će biti različitim brojem označene (prvoj pridružujemo 0 a drugoj 1). Dakle, svakom 2-faktoru

sa parnim brojem nekontraktibilnih kontura pridružujemo binarnu matricu koja će se završiti riječju:  $00\dots 0$ , dok preostalim 2-faktorima pridružujemo binarnu matricu koja će se završiti riječju:  $11\dots 1$ . I dalje važi da su različitim oblastima sa zajedničkim dijelom ruba pridruženi različiti brojevi. Npr., za slučaj grafa sa Slike 11. tim 2-faktorima pridružujemo redom matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da dobijena binarna matrica zadovoljava uslove (1) i (2) se lako dokazuje.

Obrnuto, ako je data binarna matrica koja zadovoljava osobine (1) i (2), uočavanjem svih grana grafa  $C_m \times P_{n+1}$  koje pripadaju kvadratičima sa različitim vrijednostima dobijamo jedan podgraf našeg grafa (posljednja kolona  $00\dots 0$  ili  $11\dots 1$  se piše iza duži  $QN$  sa Slike 1). Uslovi (1) i (2) obezbeđuju da je dobijeni podgraf 2-regularni pokrivajući graf. Dakle, uočene grane određuju jedinstven 2-faktor grafa  $C_m \times P_{n+1}$ .  $\square$

Na ovaj način je uspostavljena bijekcija između skupa svih 2-faktora označenog grafa  $C_m \times P_{n+1}$  i skupa svih binarnih matrica tipa  $m \times (n+1)$  koje zadovoljavaju gore navedene uslove. Problem prebrojavanja se, dakle, sveo na problem prebrojavanja ovakvih matrica, tj. na određivanje svih orijentisanih puteva dužine  $n$  u pridru v zenom digrafu  $\mathcal{D}_m$ , koji počinju u skupu  $\mathcal{F}_m$  (mogućih prvih kolona), a završavaju u skupu  $\mathcal{L}_m$  (mogućih poslednjih kolona), pri čemu su ovi skupovi određeni gornjom teoremom. Primijetimo, da je skup  $\mathcal{L}_m$  dvočlani, tj.  $\mathcal{L}_m = \{00\dots 0, 11\dots 1\}$ , dok skup  $\mathcal{F}_m$  predstavlja skup svih sljedbenika prvog čvora  $00\dots 0$ . Tako da se za određivanje početnih vrijednosti broja  $f_m(n)$  može koristiti i zbir dva elementa: elementa prve vrste i prve kolone i elementa prve vrste i poslednje kolone  $(n+1)$ -og stepena matrice  $M$ .

### 3.4.2. Slučaj $m = 2$ : Prebrojavanje 2-faktora u grafu $C_2 \times P_{n+1}$

Skup čvorova digrafa  $\mathcal{D}_2$  čine ciklične binarne riječi dužine 2:  $00, 01, 10, 11$ , sa matricom susjedstva:

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

čiji je karakteristični polinom:  $(-3+z)(-1+z)(1+z)^2$ .

Broj 2-faktora  $f_2(n)$  grafa  $C_2 \times P_{n+1}$ , se dobija kao broj orijentisanih puteva dužine  $n$  koji počinju u  $\mathcal{F}_2 = \{01, 10, 11\}$  a završavaju se u prvom (00) ili poslednjem (11) čvoru, tj. kao zbir šest elemenata  $n$ -tog stepena matrice  $M_2$  koji se nalaze u drugoj, trećoj ili četvrtoj vrsti, a prvoj ili četvrtoj koloni. Generativna funkcija je

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(x) &= -\frac{1+3x}{(1+x)(-1+3x)} = \frac{1+3x}{1-2x-3x^2} = \\ &1 + 5x + 13x^2 + 41x^3 + 121x^4 + 365x^5 + 1093x^6 + 3281x^7 + 9841x^8 + 29525x^9 + 88573x^{10} + \\ &265721x^{11} + 797161x^{12} + 2391485x^{13} + 7174453x^{14} + 21523361x^{15} + 64570081x^{16} + \\ &193710245x^{17} + 581130733x^{18} + 1743392201x^{19} + 5230176601x^{20} + \dots \end{aligned}$$

nam daje rekurentnu formulu drugog reda:

$$f_2(n) = 2f_2(n-1) + 3f_2(n-2), \text{ za } n \geq 2.$$

### 3.4.3. Slučaj $m = 3$ : Prebrojavanje 2-faktora u grafu $C_3 \times P_{n+1}$

Digraf  $\mathcal{D}_3$  ima za svoj skup čvorova sve moguće ciklične binarne riječi dužine 3, tj.  $|V(\mathcal{D}_3)| = 8$ , a matrica susjedstva tog digrafa je:

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Broj 2-faktora grafa  $C_3 \times P_{n+1}$ , tj. broj  $f_3(n)$  se dobija kao broj orijentisanih puteva dužine  $n$  koji počinju u čvoru iz skupa  $\mathcal{F}_4$  kojeg čine binarni zapisi brojeva 3, 5, 6 i 7, a završavaju se u prvom ili poslednjem čvoru (binarni zapis broja 0 i 7) ili, pak, kao broj orijentisanih puteva dužine  $n+1$  koji počinju u čvoru 000 a završavaju se u čvori 111.

Iako je karakteristični polinom osmog reda:

$$(-1+z)^2(1+z)^2(-1-3z+z^2)(-1+3z+z^2),$$

dobijena generativna funkcija

$$\mathcal{F}_3(x) = -\frac{1+x}{-1+3x+x^2} = 1 + 4x + 13x^2 + 43x^3 + 142x^4 + 469x^5 + 1549x^6 + 5116x^7 + 16897x^8 + 55807x^9 + 184318x^{10} + 608761x^{11} + 2010601x^{12} + 6640564x^{13} + 21932293x^{14} + 72437443x^{15} + 239244622x^{16} + 790171309x^{17} + 2609758549x^{18} + 8619446956x^{19} + 28468099417x^{20} + \dots$$

nam daje rekurentnu formulu drugog reda:

$$f_3(n) = 3f_3(n-1) + f_3(n-2), \text{ za } n \geq 2.$$

### 3.4.4. Slučaj $m = 4$ : Prebrojavanje 2-faktora u grafu $C_4 \times P_{n+1}$

Digraf  $\mathcal{D}_4$  ima za svoj skup čvorova sve moguće ciklične binarne riječi dužine 4, tj.  $|V(\mathcal{D}_4)| = 16$  a matrica susjedstva tog digrafa se može redukovati na matricu  $M'_4$  14.-tog reda sa čvorovima koji predstavljaju binarne zapise redom brojeva:

0, 1, 2, 4, 8, 3, 5, 9, 10, 7, 11, 13, 14, 15:

$$M'_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Broj  $f_4(n)$  se dobija kao broj orijentisanih puteva dužine  $n$  koji počinju u čvoru iz skupa  $\mathcal{F}_4$  kojeg čine binarni zapisi brojeva 5, 10, 7, 11, 13, 14 i 15, a završavaju se u prvom ili poslednjem čvoru (binarni zapis broja 0 i 15). Primijetimo da su čvorovi skupa  $\mathcal{F}_4$  zapravo sljedbenici prvog čvora  $00\dots 0$ , te se do istog broja može doći i traženjem broja orijentisanih puteva dužine  $n + 1$  koji počinju u čvoru  $00\dots 0$  a završavaju ili u istom ili u čvoru  $11\dots 1$ . Karakteristični polinom gornje matrice je:

$$(-2 + z)z^3(1 + z)(2 + z)^3(4 - 7z + z^2)(-2 - 3z + z^2)(-2 + 3z + z^2),$$

i garantuje rekurentnu formulu 11 stepena. Međutim, izvođenjem generativne funkcije za traženi niz dobijamo :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_4(x) &= \frac{1 + 3x - 4x^2}{1 - 6x - 3x^2 + 4x^3} = -\frac{(-1 + x)(1 + 4x)}{(1 + x)(1 - 7x + 4x^2)} = \\ &= 1 + 9x + 53x^2 + 341x^3 + 2169x^4 + 13825x^5 + 88093x^6 + 561357x^7 + 3577121x^8 + \\ &+ 22794425x^9 + 145252485x^{10} + 925589701x^{11} + 5898117961x^{12} + 37584466929x^{13} + \\ &+ 239498796653x^{14} + 1526153708861x^{15} + 9725080775409x^{16} + 61970950592425x^{17} + \\ &+ 394896331045333x^{18} + 2516390514947637x^{19} + 16035148280452121x^{20} + \dots \end{aligned}$$

vidimo da se radi o rekurentnoj formuli trećeg reda:

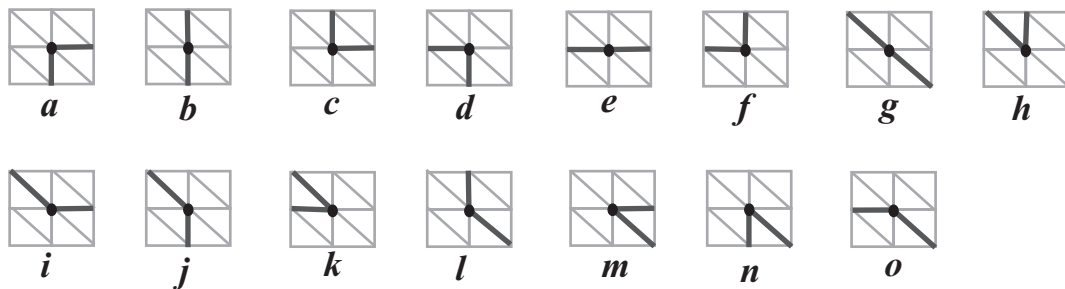
$$\boxed{f_4(n) = 6f_4(n - 1) + 3f_4(n - 2) - 4f_4(n - 3), \text{ za } n \geq 3.}$$



### 3.5. 2-faktori u grafu $T_{m,n}$ - Kodiranje čvorova

Označeni graf  $T_{m,n}$  ima  $2mn$  trouglova i  $(m+1)(n+1)$  čvorova.

Svaki čvor grafa  $T_{m,n}$  je označen uređenim parom  $(i, j)$  ( $1 \leq i \leq m+1, 1 \leq j \leq n+1$ ). Posmatrajmo proizvoljni 2-faktor ovog grafa. Svaki čvor je incidentan sa bar dvije, a najviše sa 6 grana, od kojih tačno dvije pripadaju tom 2-faktoru. Stoga, postoji 15 mogućih situacija pridruženih čvoru  $(i, j)$  zavisno od položaja te dvije grane. Moguće situacije ćemo označiti slovima:  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n$  i  $o$  kao što je prikazano na Slici 12.



Slika 13. Kodiranje čvorova trougaone mreže

Oznake ovih mogućih situacija nazivamo *alfa-slova* nekog čvora i označavamo sa  $\alpha_{i,j}$ .

Ukoliko znamo alfa-slovo čvora  $(i, j)$ , tada alfa-slovo njegovog susjednog čvora ne može biti bilo koje od slova iz skupa  $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o\}$ , već je određeno na sledeći način:

**(Uslov 1):** „gore - dole”:

Ako je čvor  $(i, j)$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n+1$ ) kodiran sa elementima iz  $\{a, b, d, j, n\}$ , tada i samo tada je čvor  $(i+1, j)$  kodiran sa elementima iz  $\{b, c, f, h, l\}$ .

**(Uslov 2):** „lijevo-desno”:

Ako je čvor  $(i, j)$  ( $1 \leq i \leq m+1, 1 \leq j \leq n$ ) kodiran sa elementima iz  $\{a, c, e, i, m\}$ , tada i samo tada je čvor  $(i, j+1)$  kodiran sa elementima iz  $\{d, e, f, k, o\}$ .

**(Uslov 3):** „gore lijevo - dole desno”:

Ako je čvor  $(i, j)$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ ) kodiran sa elementima iz  $\{g, l, m, n, o\}$ , tada i samo tada je čvor  $(i+1, j+1)$  kodiran sa elementima iz  $\{g, h, i, j, k\}$ .

Za graf  $T_{m,n}$  alfa-slova za ugaone čvorove stepena 2 moraju biti  $\alpha_{m+1,1} = c$ ,  $\alpha_{1,n+1} = d$ , dok za ugaone čvorove stepena 3 moraju biti iz skupova  $\alpha_{1,1} \in \{a, m, n\}$  i  $\alpha_{m+1,n+1} \in \{f, h, k\}$ .

#### 3.5.1. Karakterizacija 2-faktora

Slično kao i u slučaju grafa  $P_{m+1} \times P_{n+1}$ , uspostavljamo bijekciju između svih 1-faktora grafa  $T_{m,n}$  i specijalnih matrica formata  $(m+1) \times (n+1)$  sa elementima iz skupa alfa-slova koje su opisane sledećom teoremom:

**Teorema 3.5 (karakterizacija 2-faktora grafa  $T_{m,n}$  pristupom kodiranja čvorova)**

Svaki 2-faktor grafa  $T_{m,n}$  određuje jedinstvenu  $(m+1) \times (n+1)$  matricu  $[\alpha_{i,j}]$  nad azbukom  $\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o\}$  sa osobinama:

**(1) Uslov prve kolone:**

Alfa-riječ za prvu kolonu se sastoji od slova iz skupa  $\{a,b,c,l,m,n\}$ ,  $\alpha_{1,1} \in \{a,m,n\}$  i  $\alpha_{m+1,1} = c$ .

**(2) Uslov kolone:**

Za svako fiksno  $j$  ( $1 \leq j \leq n+1$ )

a) uređeni parovi  $(\alpha_{i,j}, \alpha_{i+1,j})$ , gdje je  $1 \leq i \leq m$ , zadovoljavaju Uslov 1 („gore - dole”)

b)  $\alpha_{1,j} \in \{a,d,e,m,n,o\}$  i  $\alpha_{m+1,j} \in \{c,e,f,h,i,k\}$ .

**(3) Uslov susjednosti kolona:**

a) Za svako  $j$ , gdje je ( $1 \leq j \leq n$ ), uređeni parovi  $(\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j+1})$ , gdje je  $1 \leq i \leq m+1$ , zadovoljavaju Uslov 2 („lijevo - desno”)

b) Za svako  $j$ , gdje je ( $1 \leq j \leq n$ ) i svako  $i$ , gdje je  $1 \leq i \leq m$ , uređeni parovi  $(\alpha_{i,j}, \alpha_{i+1,j+1})$  zadovoljavaju Uslov 3 („gore lijevo - dole desno”).

**(4) Uslov posljednje kolone:**

Alfa-riječ za posljednju kolonu je riječ koja sadrži samo slova iz  $\{b,d,f,h,j,k\}$ , za koju važi još da je  $\alpha_{1,n+1} = d$  i  $\alpha_{m+1,n+1} \in \{f,h,k\}$ .

Važi i obrnuto: svaka matrica  $[\alpha_{i,j}]_{m+1 \times n+1}$  sa elementima iz skupa  $\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o\}$  koja zadovoljava uslove (1)-(4) određuje jedan 2-faktor u označenom grafu  $T_{m,n}$ .

**3.5.2. Slučaj  $m = 1$ : Prebrojavanje 2-faktora u grafu  $T_{1,n}$** 

Koristeći naprijed opisanu karakterizaciju 2-faktora, za slučaj  $m = 1$  dobijamo da su moguće alfa riječi iz skupa  $V_1 = \{ac, nc, df, oe, ee, mk, dh, oi, ei\}$  gdje su  $\mathcal{F}_1 = \{ac, nc\}$  i  $\mathcal{L}_1 = \{dh, df\}$ . Matrica susjedstva  $M_1$  je reda 9.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

. Moguće je sažimanje čvorova iz sledećih grupa:  $\{ac, ee, ei\}$ ,  $\{nc, oe, oi\}$  i  $\{df, dh\}$ . Dobijeni digraf  $\mathcal{D}'_1$  ima skup čvorova  $V'_1 = \{ac, nc, df, mk\}$  i matricu susjedstva

$$M'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kako su prva i četvrta vrsta jednake, to se sada čvorovi  $ac$  i  $mk$  mogu dalje sažeti. Tako se dobija novi digraf  $\mathcal{D}'' = (V_1'', E_1'')$  sa skupom čvorova  $V_1'' = \{ac, nc, df\}$  i matricom susjedstva

$$M_1'' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

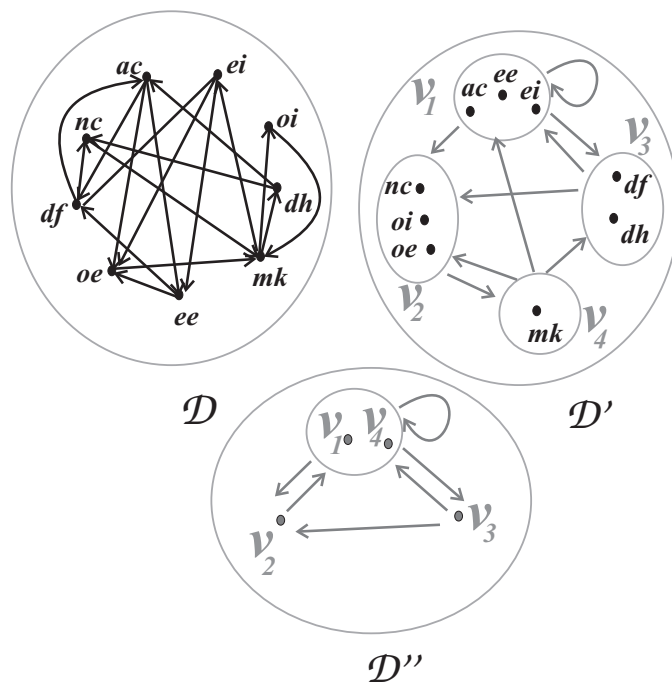
sa karakterističnim polinomom  $1 + 2z + z^2 - z^3$ . Gore opisano sažimanje čvorova je ilustrovano na Slici 13.

Broj  $f_1(n)$  ( $n \geq 0$ ) je određen brojem orijentisanih puteva dužine  $n$  koji počinju u  $\mathcal{F}_1'' = \{ac, nc\}$  i završavaju u čvoru  $\{df\}$ . Početni uslovi su dati u razvoju generativne funkcije koja se dobija na poznati način:

$$\mathcal{F}_1(x) = -\frac{x(1+x)}{-1+x+2x^2+x^3} = x + 2x^2 + 4x^3 + 9x^4 + 19x^5 + 41x^6 + 88x^7 + 189x^8 + 406x^9 + 872x^{10} + 1873x^{11} + 4023x^{12} + 8641x^{13} + 18560x^{14} + 39865x^{15} + 85626x^{16} + 183916x^{17} + 395033x^{18} + 848491x^{19} + 1822473x^{20} + \dots$$

Vidimo da je rekurentna formula za  $f_1(n)$  trećeg reda:

$$f_1(n) = f_1(n-1) + 2f_1(n-2) + f_1(n-3), \text{ za } n \geq 3.$$



Slika 14. Sažimanje čvorova digrafa

### 3.6. 2-faktori u grafu $T_{m,n}$ - Kodiranje oblasti

Graf  $T_{m,n}$  ima  $2m \cdot n$  trouglova (prozora). Zvaćemo ih gornji ( $a_{i,j}^u$ ) i donji prozor ( $a_{i,j}^d$ ) zavisno da li se nalaze iznad ili ispod dijagonale kvadratića, respektivno. Tada se  $j$ -ta kolona zapisuje kao riječ  $a_{1,j}^u a_{1,j}^d a_{2,j}^u a_{2,j}^d \dots a_{m,j}^u a_{m,j}^d$ . Svakom prozoru grafa pridružujemo jedan element iz skupa  $\{0, 1\}$  na sledeći način: ako se prozor nalazi u unutrašnjosti parnog broja kontura datog 2-faktora, tada mu se pridružuje 0 (isto važi i za prozore koji se nalaze u spoljašnjoj oblasti svih kontura), dok se u ostalim slučajevima prozoru pridružuje 1.

Pridružujemo 2-faktoru ovog označenog grafa jednoznačno određenu binarnu matricu  $A = [a_{i,j}^u]_{2m \times n}$  tako da su trouglovi iz unutrašnjosti parnog broja kontura (ili iz spoljašnjosti svih) označeni sa 0, dok su ostali trouglovi označeni sa 1. Ova matrica zadovoljava uslove opisane sledećom teoremom:

#### 3.6.1. Karakterizacija 2-faktora

##### **Teorema 3.6 (karakterizacija 2-faktora grafa $T_{m,n}$ pristupom kodiranja oblasti)**

Svakom 2-faktoru grafa  $T_{m,n}$  jednoznačno je pridružena binarna matrica  $A = [a_{i,j}^*]_{2m \times n}$  koja zadovoljava:

##### **(1) Uslov prve kolone:**

$a_{m,1}^d = 1$ ,  $a_{1,1}^d + a_{1,1}^u \neq 0$ , i za sve  $1 \leq i < m$  ako  $a_{i,1}^d = a_{i+1,1}^d$ , onda  $a_{i+1,1}^u = 1$ .

##### **(2) Uslov susjedstva**

Za  $1 \leq i < m$  i  $1 \leq j < n$ , binarna ciklična riječ  $a_{i,j}^d a_{i,j}^u a_{i,j+1}^d a_{i+1,j+1}^u a_{i+1,j+1}^d a_{i+1,j+1}^u a_{i+1,j}^d a_{i+1,j}^u$  formirana od 6 trouglića oko čvora  $(i+1, j+1)$  (na Slici predstavljeni kao šestouglovi u  $W_{m,n}$ ) sadrži tačno jedan niz uzastopnih pojavljivanja nula i tačno jedan niz uzastopnih pojavljivanja jedinica.

##### **(3) Uslov poslednje kolone:**

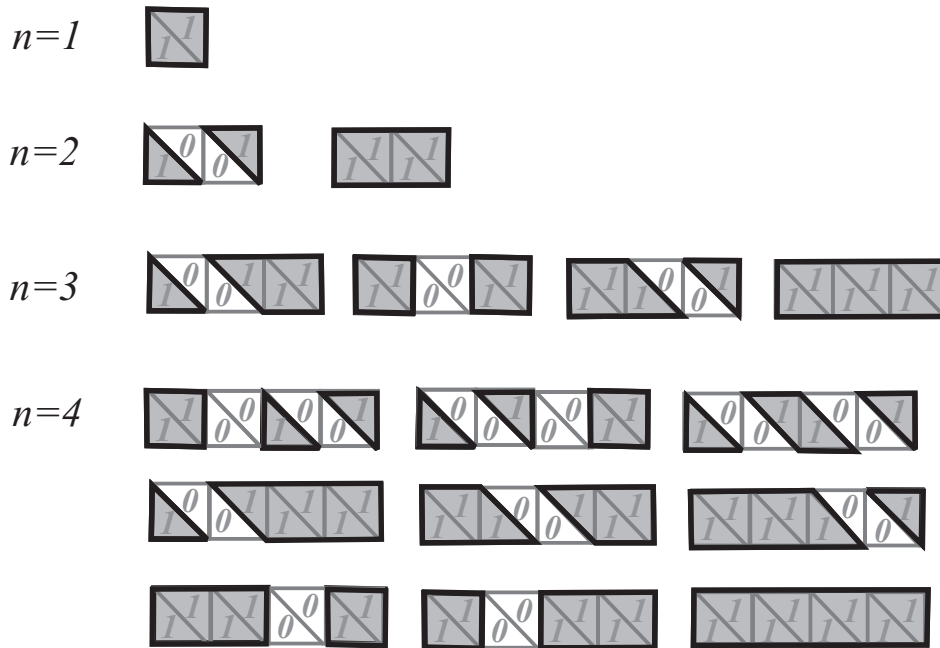
$a_{1,n}^u = 1$ ,  $a_{m,n}^d + a_{m,n}^u \neq 0$ , i za sve  $1 \leq i < m$  ako  $a_{i,n}^u = a_{i+1,n}^u$ , onda  $a_{i,n}^d = 1$ .

Važi i obrnuto: svaka binarna matrica  $A = [a_{i,j}^*]_{2m \times n}$  koja zadovoljava uslove (1)-(3) određuje jedan 2-faktor u označenom grafu  $T_{m,n}$ .

#### 3.6.2. Slučaj $m = 1$ : Prebrojavanje 2-faktora u grafu $T_{1,n}$

Skup čvorova digrafa  $\mathcal{D}_1$  je  $V(\mathcal{D}_1) = \{1^1, 1^0, 0^1, 0^0\}$ , gdje su  $\mathcal{F} = \{1^1, 1^0\}$  i  $\mathcal{L} = \{1^1, 0^1\}$ . Matrica susjedstva je formata  $4 \times 4$ :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

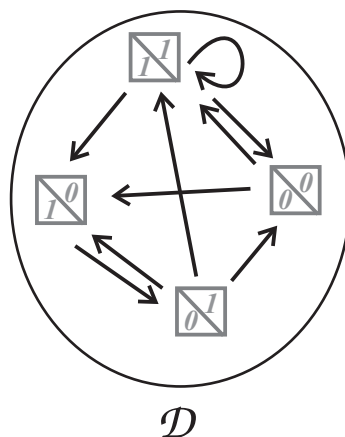


Slika 15. 2-faktori grafa  $T_{1,n}$

ali se može redukovati na  $3 \times 3$  sažimanjem čvorova  $\{1^1, 0^1\}$ . Dobijena matrica izgleda ovako:

$$M'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sa karakterističnim polinomom  $1 + 2z + z^2 - z^3$ . Broj  $f_1(n) (n \geq 1)$  je određen brojem orijentisanih puteva dužine  $n - 1$  koji počinju u  $\mathcal{F}'_1 = \{1^1, 0^1\}$  i završavaju u čvoru  $\{1^1\}$ .



Slika 16. DigrafPoOblastiM1.eps

Generativna funkcija jeste

$$\mathcal{F}_1(x) = -\frac{x(1+x)}{-1+x+2x^2+x^3} = x + 2x^2 + 4x^3 + 9x^4 + 19x^5 + 41x^6 + 88x^7 + 189x^8 + 406x^9 + 872x^{10} + 1873x^{11} + 4023x^{12} + 8641x^{13} + 18560x^{14} + 39865x^{15} + 85626x^{16} + 183916x^{17} + 395033x^{18} + 848491x^{19} + 1822473x^{20} + \dots,$$

a rekurentna formula za  $f_1(n)$  je trećeg reda:

$$f_1(n) = f_1(n-1) + 2f_1(n-2) + f_1(n-3), \text{ za } n \geq 3.$$

### 3.6.3. Slučaj $m = 2$ : Prebrojavanje 2-faktora u grafu $T_{2,n}$

Označićemo čvorove pridruženog digrafa  $\mathcal{D}_2$  sa  $V(\mathcal{D}_2) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{16}\} = \{1^11^1, 1^11^0, 1^10^1, 1^10^0, 1^01^1, 1^01^0, 1^00^1, 1^00^0, 0^11^1, 0^11^0, 0^10^1, 0^10^0, 0^01^1, 0^01^0, 0^00^1, 0^00^0\}$ . Skup  $\mathcal{F}_2 = \{v_1, v_5, v_9, v_{10}\}$ , a skup  $\mathcal{L}_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_{10}\}$ . Podijelimo sada skup čvorova u grupe sa istim skupom sljedbenika:  $\{v_1, v_3\}$ ,  $\{v_2, v_{10}\}$ ,  $\{v_4, v_9, v_{11}, v_{12}\}$ ,  $\{v_{16}\}$ ,  $\{v_6\}$ ,  $\{v_8\}$ ,  $\{v_5, v_7, v_{13}, v_{15}\}$  i  $\{v_{14}\}$ . Matrica susjedstva je formata  $16 \times 16$ , ali kako ima čvorova sa istim sljedbenicima, matrica se može redukovati na  $M'_2$  formata  $8 \times 8$ .

$$M'_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karakteristični polinom redukovane matrice  $M'_2$  je:

$$4z^3 - 10z^5 - 9z^6 - 2z^7 + z^8 = z^3(1+z)(4-4z-6z^2-3z^3+z^4).$$

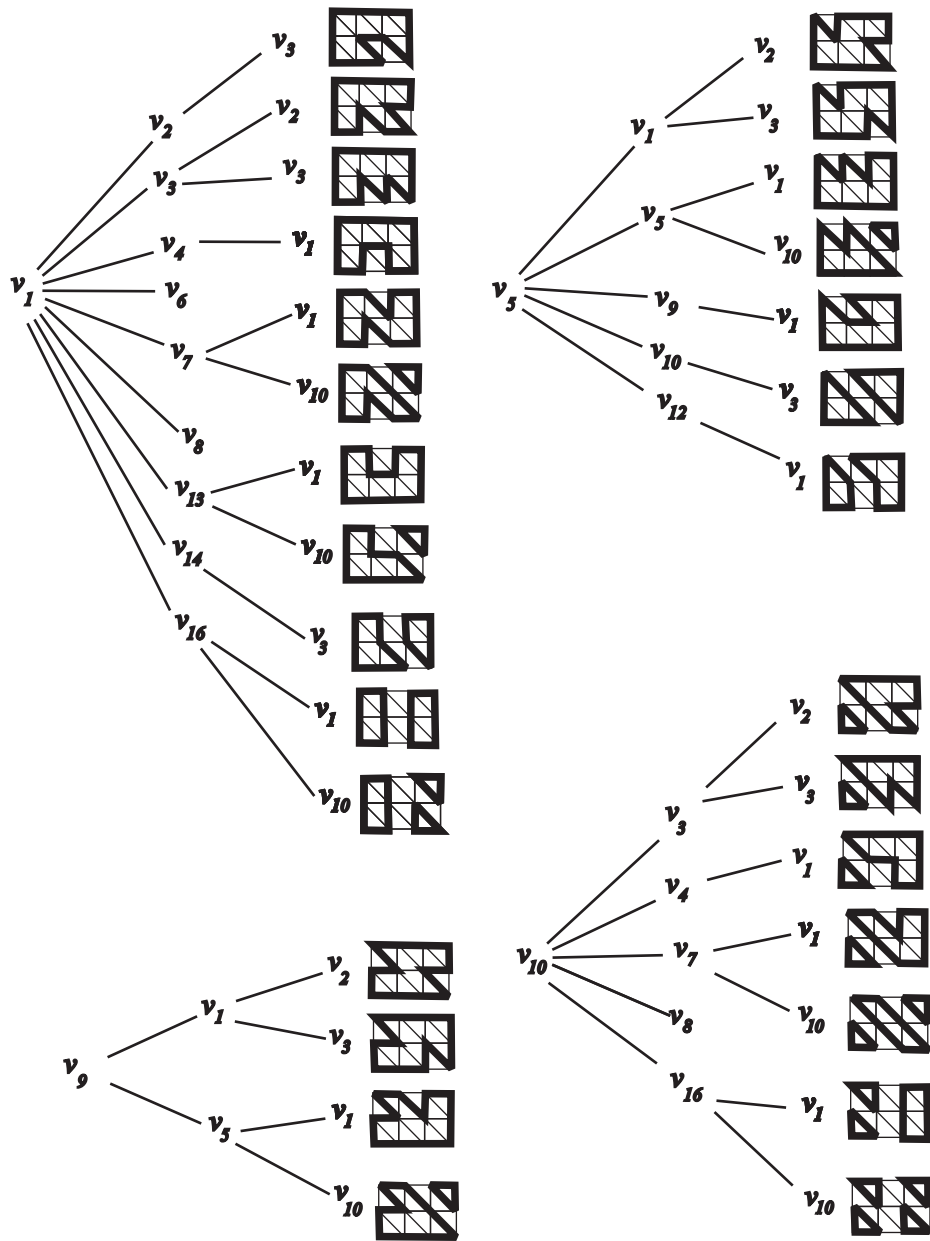
Broj  $f_2(n)$  ( $n \geq 0$ ) je određen brojem orijentisanih puteva dužine  $n-1$  koji počinju u  $\mathcal{F}'_2 = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ , a završavaju u  $\mathcal{L}'_2 = \{v_1, v_2\}$  (Slika 17).

Generativna funkcija datog niza je:

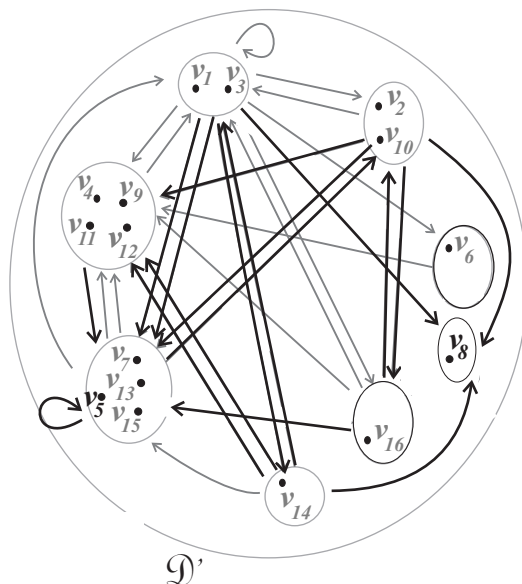
$$\mathcal{F}_2(x) = \frac{x(-2-2x+x^2+4x^3)}{-1+2x+9x^2+10x^3-4x^5} = 2x + 6x^2 + 29x^3 + 128x^4 + 577x^5 + 2588x^6 + 11625x^7 + 52196x^8 + 234385x^9 + 1052476x^{10} + 4726025x^{11} + 21221684x^{12} + 95293569x^{13} + 427905004x^{14} + 1921459065x^{15} + 8628094756x^{16} + 38743484401x^{17} + 173973237980x^{18} + 781207163113x^{19} + 3507922475796x^{20} + \dots$$

Rekurentna formula je oblika:

$$f_2(n) = 2f_2(n-1) + 9f_2(n-2) + 10f_2(n-3) - 4f_2(n-5), \text{ za } n \geq 5.$$



Slika 17. Formiranje 2-faktora grafa  $T_{2,3}$  pomoću orijentisanih puteva dužine 2



Slika 18. Susjednost čvorova digrafa pridruženih grafu  $T_{2,m}$

### 3.7. 2-faktori u grafu $TC_{m,n}$ -Kodiranje čvorova

Za određivanje broja 2-faktora u grafu  $TC_{m,n}$ , kodiranjem po čvorovima, odnosno oblastima grafa, koristimo postupke izložene za graf  $T_{m,n}$  uz male modifikacije.

#### 3.7.1. Karakterizacija 2-faktora

Svaki čvor grafa  $TC_{m,n}$  je označen uređenim parom  $(i, j)$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n + 1$ ). Analogno kao za  $T_{m,n}$ , razlikujemo 15 mogućih situacija pridruženih čvoru  $(i, j)$  (Slika 13). Sada, umjesto riječi nad azbukom  $\{a, b, \dots, o\}$  mi sada koristimo ciklične takve riječi koje se mogu javiti kod nekog 2-faktora i te riječi su sada čvorovi pridruženog digrafa. Susjednost se opet određuje preko uslova „gore - dole”, „lijevo-desno „gore lijevo - dole desno” iz poglavlja 3.5, vodeći računa o tome da je  $a_{m+1,1}^d = a_{1,1}^d$  i  $a_{m+1,1}^d = a_{1,1}^d$ .

Dakle, osnovna razlika između kodiranja 2-faktora u grafovima  $T_{m,n}$  i  $TC_{m,n}$  je u načinu na koji se tretira alfa-riječ, jer u  $TC_{m,n}$  zahtijeva se da je ona ciklična. Ova razlika dovodi do promjene u kodnoj matrici, te se analogno odgovarajućoj teoriji koja se odnosi na graf  $T_{m,n}$  dokazuje sledeća teorema:

#### **Teorema 3.7 (karakterizacija 2-faktora grafa $TC_{m,n}$ pristupom kodiranja čvorova)**

Svaki 2-faktor grafa  $T_{m,n}$  određuje jedinstvenu  $(m+1) \times (n+1)$  matricu  $[\alpha_{i,j}]$  nad azbukom  $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o\}$  sa osobinama:

**(1) Uslov prve kolone:**

Ciklična alfa-riječ za prvu kolonu se sastoji od slova iz skupa  $\{a, b, c, l, m, n\}$ .

**(2) Uslov kolone:**

Za svako fiksno  $j$  ( $1 \leq j \leq n + 1$ )

uređeni parovi  $(\alpha_{i,j}, \alpha_{i+1,j})$ , gdje je  $1 \leq i \leq m$ , zadovoljavaju Uslov 1 („gore - dole”).

**(3) Uslov susjednosti kolona:**

a) Za svako  $j$ , gdje je ( $1 \leq j \leq n$ ), uređeni parovi  $(\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j+1})$ , gdje je  $1 \leq i \leq m$ , zadovoljavaju Uslov 2 („lijevo - desno”)



b) Za svako  $j$ , gdje je  $(1 \leq j \leq n)$  i svako  $i$ , gdje je  $1 \leq i \leq m$ , uređeni parovi  $(\alpha_{i,j}, \alpha_{i+1,j+1})$  zadovoljavaju Uslov 3 („gore lijevo - dole desno”).

**(4) Uslov poslednje kolone:**

Alfa-riječ za poslednju kolonu je riječ koja sadrži samo slova iz  $\{b, d, f, h, j, k\}$ .

Važi i obrnuto: svaka matrica  $[\alpha_{i,j}]_{m+1 \times n+1}$  sa elementima iz skupa  $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o\}$  koja zadovoljava uslove (1)-(4) određuje jedan 2-faktor u označenom grafu  $TC_{m,n}$ .

Broj 2-faktora  $f_m(n)$  ( $n \geq 0$ ) je određen brojem orijentisanih puteva dužine  $n$  koji počinju u  $\mathcal{F}_m$  i završavaju u skupu čvorova  $\mathcal{F}_m$ . No, iz praktičnih razloga je moguće taj broj dobiti traženjem broja svih orijentisanih puteva dužine  $n+1$  koji počinju i završavaju se u cikličnoj riječi  $bb\dots b$ .

**3.7.2. Slučaj  $m = 2$ : Prebrojavanje 2-faktora u grafu  $TC_{2,n}$**

Koristeći naprijed opisanu karakterizaciju 2-faktora, za slučaj  $m = 2$  dobijamo da su moguće početne (ciklične) alfa riječi  $\mathcal{F}_2 = \{ac, ca, bb, mm, nc, cn, la, al, nl, ln\}$ , a završne  $\mathcal{L}_2 = \{dh, df, fd, fj, hd, hj, jf, jh, kk, bb\}$ . Ostali čorovi se dobijaju kao sljedbenici čvorova iz  $\mathcal{F}_2$  i sljedbenici ovih novodobijenih. Tako se dobija digraf  $\mathcal{D}_1$  sa  $|V(\mathcal{D}_2)| = 37$  čvorova. Uočavanjem istih vrsta u matrici susjedstva  $M_1$  moguće je sažimanje čvorova. Dobijene klase čvorova (koje se sažimaju) određuju redukovanu matricu  $M'_2$  sa vrstama i kolonama redom pridruženih sledećim klasama:

$$\{bb, df, fd, jh, hj, dh, fj, jf, hd, kk\}, \{ac, ca, ee, ii, ei, ie\}, \{la, oe, oi, nc, gi, ge\}, \\ \{al, eo, eg, ig, io, cn\}, \{ln, nl, oo, og, go, gg\}, \{mm\}, \{mk\}, \{km\}.$$

$$M'_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matricu je moguće i dalje redukovati, te se dobija

$$M''_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sa karakterističnim polinomom  $2 - 4z - 9z^2 - 3z^3 + z^4$  koji određuje rekurentnu formulu

$$f_2(n) = 3f_2(n-1) + 9f_2(n-2) + 4f_2(n-3) - 2f_2(n-4), \text{ za } n \geq 4.$$

Početni uslovi su dati u razvoju dobijene generativne funkcije:

$$\mathcal{F}_2(x) = \frac{1 + 7x + 4x^2 - 2x^3}{1 - 3x - 9x^2 - 4x^3 + 2x^4} =$$
$$1 + 10x + 43x^2 + 221x^3 + 1088x^4 + 5405x^5 + 26805x^6 + 132970x^7 + 659599x^8 + 3271937x^9 +$$
$$16230472x^{10} + 80511305x^{11} + 399376713x^{12} + 1981109898x^{13} + 9827304387x^{14} +$$
$$48748386485x^{15} + 241816585104x^{16} + 1199532231429x^{17} + 5950284897389x^{18} +$$
$$29516414342474x^{19} + 146416302859431x^{20} + \dots$$

### 3.8. 2-faktori u grafu $TC_{m,n}$ -Kodiranje oblasti

Graf  $TC_{m,n}$  ima  $2mn$  trouglova (prozora). Zadržaćemo oznake za gornji ( $a_{i,j}^u$ ) i donji prozor ( $a_{i,j}^d$ ).

#### 3.8.1. Karakterizacija 2-faktora

Prozori  $a_{m,j}^u, a_{m,j}^d$  se nalaze u četvorouglu određenom čvorovima  $(m, j), (m, j + 1), (1, j)$  i  $(1, j + 1)$ . Svakom prozoru grafa pridružujemo jedan elemenat iz skupa  $\{0, 1\}$  na sledeći način: ako se prozor nalazi u unutrašnjosti parnog broja kontraktibilnih kontura datog 2-faktora, koji se nalaze prije (lijevo od) prve nekontraktibilne konture, ili između druge i treće nekontraktibilne konture, ili četvrte i pete nekontraktibilne konture, ...ili, pak, ako se prozor nalazi u unutrašnjosti neparnog broja kontraktibilnih kontura datog 2-faktora, koji se nalaze između prve i druge nekontraktibilne konture, ili treće i četvrte nekontraktibilne konture, ... tada mu se pridružuje 0, dok se u ostalim slučajevima prozoru pridružuje 1. Takođe, kao i u slučaju kvadratnog cilindra, potrebno je još dodati  $n + 1$ -vu cikličnu riječ:  $0^00^0 \dots 0^0$  ili  $1^11^1 \dots 1^1$  u zavisnosti da li imamo paran broj ili neparan broj nekontraktibilnih kontura u posmatranom 2-faktoru.

Pridružujemo 2-faktoru ovog označenog grafa jednoznačno određenu binarnu matricu  $A = [a_{i,j}^*]_{2m \times (n+1)}$  koja zadovoljava uslove zapisane u sledećoj teoremi:

#### **Teorema 3.8 (karakterizacija 2-faktora grafa $TC_{m,n}$ pristupom kodiranja oblasti)**

*Svakom 2-faktoru grafa  $TC_{m,n}$  jednoznačno je pridružena binarna matrica  $A = [a_{i,j}^*]_{2m \times (n+1)}$  koja zadovoljava:*

##### **(1) Uslov prve kolone:**

*Za sve  $1 \leq i \leq m$  ako  $a_{i,1}^d = a_{i+1,1}^d$ , onda  $a_{i+1,1}^u = 1$ .*

##### **(2) Uslov susjedstva:**

*Za  $1 \leq i \leq m$  i  $1 \leq j \leq n$ , binarna ciklična riječ  $a_{i,j}^d, a_{i,j}^u, a_{i,j+1}^d, a_{i+1,j+1}^u, a_{i+1,j+1}^d, a_{i+1,j}^u$  formirana od 6 trouglića oko čvora  $(i + 1, j + 1)$  sadrži tačno jedan niz uzastopnih pojavljivanja nula i tačno jedan niz uzastopnih pojavljivanja jedinica.*

##### **(3) Uslov poslednje kolone:**

*Za sve  $1 \leq i \leq m$  važi  $a_{i,n+1}^u = 0$  i  $a_{i,n+1}^d = 0$  ili za sve  $1 \leq i \leq m$   $a_{i,n+1}^u = 1$  i  $a_{i,n+1}^d = 1$ .*

*Važi i obrnuto: svaka binarna matrica  $A = [a_{i,j}^*]_{2m \times (n+1)}$  koja zadovoljava uslove (1)-(3) određuje jedan 2-faktor u označenom grafu  $TC_{m,n}$ .*

#### 3.8.2. Slučaj $m = 2$ : Prebrojavanje 2-faktora u grafu $TC_{2,n}$

Čvor (cikličnu riječ)  $a_{1j}^u, a_{1j}^d, a_{2j}^u, a_{2j}^d$  digrafa  $\mathcal{D}_2$  označavamo sa  $v_k$  ako je binarna riječ  $a_{1j}^u, a_{1j}^d, a_{2j}^u, a_{2j}^d$  binarni zapis broja  $k$ . Tako je čvor  $v_0$  reč  $0^00^0$  <sup>3</sup> Tako dobijamo matricu susjedstva  $M_2$  kao binarnu matricu reda 16. No, i ova se može redukovati sažimanjem čvorova  $v_2, v_3, v_6$  i  $v_7$  u jedan,

<sup>2</sup>Oznaka „\*” je zamjena za  $d$  ili  $u$ .

<sup>3</sup>Ako je  $d = a_{ij}^d$  a  $u = a_{ij}^u$ , tada pišemo  $d^u$ .

kao i čvorova  $v_8, v_9, v_{12}$  i  $v_{13}$  u jedan. U sledećem koraku možemo sažeti i čvorove  $v_{14}$  i  $v_4$ . Dobijamo digraf  $\mathcal{D}'_2$  sa matricom susjedstva devetog reda:

$$M'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sa karakterističnim polinomom  $-z(-2+z^2)(1+z+z^2)(2-4z-9z^2-3z^3+z^4)$ . Koristeći početne uslove koji se dobijaju stepenovanjem matrice dobijamo generativnu funkciju za traženi niz:

$$\mathcal{F}_2(x) = \frac{1+7x+4x^2-2x^3}{1-3x-9x^2-4x^3+2x^4} =$$

$$1 + 10x + 43x^2 + 221x^3 + 1088x^4 + 5405x^5 + 26805x^6 + 132970x^7 + 659599x^8 + 3271937x^9 +$$

$$16230472x^{10} + 80511305x^{11} + 399376713x^{12} + 1981109898x^{13} + 9827304387x^{14} +$$

$$48748386485x^{15} + 241816585104x^{16} + 1199532231429x^{17} + 5950284897389x^{18} +$$

$$29516414342474x^{19} + 146416302859431x^{20} + \dots$$

Vidimo da je rekurentna formula četvrtog reda, tj.

$$f_2(n) = 3f_2(n-1) + 9f_2(n-2) + 4f_2(n-3) - 2f_2(n-4), \text{ za } n \geq 4.$$

## 4 . Zaključak

U ovom radu je opisan postupak prebrojavanja 2-faktora u mrežnim grafovima:  $P_{m+1} \times P_{n+1}$ ,  $C_{m+1} \times P_{n+1}$  kao i trougaonim varijantama ova dva grafa koje označavamo sa  $T_{m,n}$  i  $TC_{m,n}$ . Postupak koji koristimo ovdje je primjenjivan u nedavnim radovima koji su se bavili prebrojavanjem povezanih 2-faktora, tj. Hamiltonovih kontura na ovim grafovima. Slično, i mi ovde dajemo karakterizacije 2-faktora ovih grafova, i to za svaki tip grafa po dvije, shodno pristupu koji se primjenjuje. Ove karakterizacije obezbeđuju svođenje osnovnog problema prebrojavanja 2-faktora na problem prebrojavanja orijentisanih puteva u pridruženom digrafu.

U slučaju grafa  $P_{m+1} \times P_{n+1}$ , za  $m = 2, 3, 4$  ponovljeni su poznati rezultati koji su dobijeni u referenci [1] primjenom jednog pristupa (kodiranjem oblasti), dok su isti rezultati (generativne funkcije za tražene nizove) dobijeni i primjenom drugog pristupa (kodiranjem čvorova grafa). U slučaju preostala tri niza grafova  $C_{m+1} \times P_{n+1}$ ,  $T_{m,n}$  i  $TC_{m,n}$ , za početne vrijednosti  $m$  su dobijeni novi rezultati. Dobijanje istih generativnih funkcija nizova brojeva 2-faktora grafa  $C_m \times P_{n+1}$  (za slučaj  $m = 2$  i  $m = 3$ ), kao i dobijanje istih generativnih funkcija kod grafova  $T_{mn}$  (slučaj  $m = 1$ ) i  $TC_{m,n}$  (slučaj  $m = 2$ ) primjenom oba opisana pristupa potvrđuju ispravnost dobijenih rezultata. Za grafove  $C_4 \times P_{n+1}$ ,  $T_{2,n}$  izvedene su generativne funkcije nizova brojeva 2-faktora samo drugim pristupom. Problem je u velikom povećanju broja čvorova pridruženog digrafa kad vrijednost  $m$  raste, posebno u prvom pristupu, te postaje veoma teško određivanje digrafova bez primjene računara. Na primjer, u slučaju grafa  $TC_{2,n}$  dobijena matrica susjedstva pridruženog digrafa je reda 37.

Opisani postupak omogućava implementaciju putem računara što se očekuje u perspektivi da se i uradi, tj. postignu generativne funkcije ovih nizova i za veće vrijednosti broja  $m$ ).

## Literatura

- [1] O. Bodroža-Pantić, R. Tošić, On the number of 2-factors in rectangular lattice graphs, *Publications De L'Institut Mathématique*, **56 (70)** (1994), 23-33.
- [2] O. Bodroža-Pantić, B. Pantić, I. Pantić and M. Bodroža-Solarov, Enumeration of Hamiltonian cycles in some grid graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **70:1** (2013), 181–204.
- [3] O. Bodroža-Pantić, H. Kwong and M. Pantić, Some new characterizations of Hamiltonian cycles on triangular grid graphs, *Discrete Appl. Math.* **201** (2016), 1–13.
- [4] O. Bodroža-Pantić, H. Kwong, R. Doroslovački, and M. Pantić, A limit conjecture on the number of Hamiltonian cycles on thin triangular grid cylinder graphs, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, in press.
- [5] O. Bodroža-Pantić, H. Kwong and M. Pantić, A conjecture on the number of Hamiltonian cycles on thin grid cylinder graphs, *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* **17** (2015) 219–240
- [6] R.A. Broglia, G. Tiana, D.Provasi, L. Sutto, Molecular recognition through local elementary structures: Transferability of simple models to real proteins, *Protein Folding and Drug Design, PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL SCHOOL OF PHYSICS ENRICO FERMI Course CLXV* (2007)
- [7] K.L. Collins, L.B. Krompart, The number of Hamiltonian paths in a rectangular grid, *Discrete Mathematics*, **169** (1997), 29–38.
- [8] J. des Cloizeaux, G. Jannik, *Polymers in solution:their modelling and structure*, Clarendon Press, Oxford, 1990.
- [9] D. M. Cvetković, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of Graphs - Theory and Application* , VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1982.
- [10] Gennes P-G de, *Scaling Concepts in Polymer Physics*, Cornell University Press, Ithaca, NY, 1979.
- [11] M.J. Golin, Y.C. Leung, Y. Wang and X. Yong, Counting structures in grid-graphs, cylinders and tori using transfer matrices: survey a new results (extended abstract), *The Proceedings of SIAM ALLENEX/ANALCO Workshop–Analytic Algorithmics and Combinatorics (ANALCO05)*, Canada, Jan. 2005.
- [12] F. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley, 1969.
- [13] W. Imrich, S.Klavar, D.F. Rall, *Topics in Graph Theory: Graphs and Their Cartesian Product*, AKPeters, Ltd. (2008)
- [14] J.L. Jacobsen, Exact enumeration of Hamiltonian circuits, walks and chains in two and three dimensions, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** (2007) 14667–14678.
- [15] A.M. Karavaev, <http://flowproblem.ru/>

- [16] A.M. Karavaev, Kodirovanie sostoyanii v metode matricy perenosa dlya podscheta gamiltonovyh ciklov na pryamougolnyh reshetkah, cilindrah i torah, *Informacionnye processy*, **11** (2011), 4, 476–499.
- [17] A. Karavaev and S. Perepechko, Counting Hamiltonian cycles on triangular grid graphs, *SIMULATION-2012*, May, Kiev, <http://www.flowproblem.ru/references>, (2012), 16–18.
- [18] A. Kloczkowski, R.L. Jernigan, Computer generation and enumeration of compact self-avoiding walks within simple geometries on lattices, *Comp. and Ther. Polymer Science* **7** (1997) 163-173.
- [19] A. Kloczkowski, R.L. Jernigan, Transfer matrix method for enumeration and generation of compact self-avoiding walks. I. Square lattices, *J. Chem. Phys* **109** (1998) 5134-46.
- [20] A. Kloczkowski, R.L. Jernigan, Transfer matrix method for enumeration and generation of compact self-avoiding walks. II. Cubic lattices, *J. Chem. Phys* **109** (1998) 5147-59.
- [21] A. Kloczkowski, T.Z. Sen, R.L. Jernigan, The transfer matrix method for lattice proteins—an application with cooperative interactions, *Polymer* **45** (2004) 707–716.
- [22] G. Kreweras, Dénombrement des Cycles Hamiltoniens dans un Rectangle Quadrillé, *European Journal of Combinatorics*, **13** (1992), 473–467.
- [23] Y. H. Harris Kwong and D.G. Rogers, A matrix method for counting hamiltonian cycles on grid graphs, *European Journal of Combinatorics*, **15** (3) (1994), 277–283.
- [24] Y. H. H. Kwong, Enumeration of Hamiltonian cycles in  $P_4 \times P_n$  and  $P_5 \times P_n$ , *Ars Combinatoria*, **33** (1992), 87–96.
- [25] T.G. Schmalz, G.E. Hite, D.J. Klein, Compact self-avoiding circuits on two dimensional lattice, *J. Phys. A: Math. Theor.* **17** (1984) 445-453.
- [26] E. Shakhnovich, A. Gutin, Enumeration of all compact conformations of copolymers with random sequence of links, *J. Chem. Phys.*, **93**(1990), 5967–71.
- [27] R.P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Vol. I, Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, California 1986.
- [28] R. Stoyan and V. Strehl, Enumeration of Hamiltonian circuits in rectangular grids, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, **21** (1996), 109–127.
- [29] R. Tošić, O. Bodroža, Y. H. H. Kwong and H.J. Straight, On the number of Hamiltonian cycles of  $P_4 \times P_n$ , *Indian J. Pure Appl. Math.*, **21** (1990), 403–409.

## Kratka biografija

Rođena sam 23. augusta 1993. godine u Bijeljini. Kao učenik generacije završila sam osnovnu školu 2008. godine. U Gimnaziji „Filip Višnjić” u Bijeljini 2012. godine stičem Vukovu diplomu. Učestvovala sam na brojnim regionalnim i republičkim takmičenjima iz matematike i fizike, gdje sam osvajala značajne nagrade. Izdvojila bih prvu nagradu na republičkom takmičenju iz fizike 2008. godine.

Na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, na Departmanu za matematiku i informatiku, završila sam osnovne studije 2015. godine. Iste godine na pomenutom fakultetu upisujem master studije primjenjene matematike.

Novi Sad, 30. 10. 2017.

Jelena Đokić



UNIVERZITET U NOVOM SADU  
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: *Monografska dokumentacija*

TD

Tip zapisa: *Tekstualni štampani materijal*

TZ

Vrsta rada: *Master rad*

VR

Autor: *Jelena Đokić*

AU

Mentor: *Dr Olga Bodroža-Pantić*

MN

Naslov rada: *Prebrojavanje 2-faktora u nekim mrežnim grafovima*

NR

Jezik publikacije: *Srpski*

JP

Jezik izvoda: *Srpski/engleski*

JI

Zemlja publikacije: *Srbija*

ZP

Uže geografsko područje: *Vojvodina*

UGP

Godina: *2017*

GO

Izdavač: *Autorski reprint*

IZ

Mesto i adresa: *Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4.*

MA

Fizički opis rada: *(4, 53, 29, -, 18, -, -)*

*(broj poglavlja/strana/lit.citata/tabela/slika/grafika/priloga/)*

FO

Naučna oblast: *Matematika*

NO

Naučna disciplina: *Diskretna matematika*

ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: *Pravougaoni mrežni graf, Cilindrični mrežni graf, 2-faktor, Hamiltonova kontura*

PO

UDK:

Čuva se:

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod:

IZ

Master rad se bavi prebrojavanjem 2-faktora (pokrivajućih 2-regularnih podgrafova) u mrežnim grafovima :  $P_{m+1} \times P_{n+1}$ ,  $C_m \times P_{n+1}$ ,  $T_{m,n}$  i  $TC_{m,n}$  ( $T_{m,n}$  and  $TC_{m,n}$  su označeni trougaoni mrežni grafovi koji su dobijeni od kvadratnih mrežnih grafova  $P_{m+1} \times P_{n+1}$  and  $C_m \times P_{n+1}$ , redom dodavanjem dijagonale na svaki kvadratić.). Prezentujemo nove karakterizacije 2-faktora u ovim grafovima. Njihovim korišćenjem i primenom metoda izračunavanja izvedenog ovde dobijamo neke nove rezultate (specijalne slučajeve za neke vrednosti  $m$ )

Datum prihvatanja teme od strane NN veća:

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO Predsednik: *Dr Ivica Bošnjak, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu*

Mentor: *Dr Olga Bodroža-Pantić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu*

Član: *Dr Petar Đapić, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu*

UNIVERSITY OF NOVI SAD  
FACULTY OF NATURAL SCIENCES & MATHEMATICS  
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: *Monograph type*

DT

Type of record: *Printed text*

TR

Contents code: *Master thesis*

CC

Author: *Jelena Đokić*

AU

Mentor: *Prof. dr Olga Bodroža-Pantić*

MN

Title: *Enumeration of 2-factors in some grid graphs*

TI

Language of text: *Serbian*

LT

Language of abstract: *Serbian/english*

LA

Country of publication: *Serbia*

CP

Locality of publication: *Vojvodina*

LP

Publication year: *2017*

PY

Publisher: *Author's reprint*

PU

publ. place: *Novi Sad, Department of Mathematics and informatics, Faculty of Sciences and Mathematics,*

*Trg Dositeja Obradovića 4.*

PP

Physical description: *((4, 53, 29, -, 18, -, - )*

*(chapters/pages/literature/charts/pictures/graphs/additional lists)*

PD

Scientific field: *Mathematics*

SF

Scientific discipline:

SD

Subject/Key words:

SKW

*Hamiltonian cycles, generating functions, thin triangular grid cylinder graph*

UC:

Holding date:

HD

Note:

N

Abstract:

AB

This master's thesis deals with the enumeration of 2-factors (spanning 2-regular subgraphs) in the grid graphs:  $P_{m+1} \times P_{n+1}$ ,  $C_m \times P_{n+1}$ ,  $T_{m,n}$  and  $TC_{m,n}$  ( $T_{m,n}$  and  $TC_{m,n}$  are labeled triangular grid graphs, which are graphs constructed from rectangular grids  $P_{m+1} \times P_{n+1}$  and  $C_m \times P_{n+1}$ , respectively by adding a diagonal to each cell). We present new characterizations of the 2-factors in these graphs. By using these characterizations and implementing the computational method outlined here, we obtain some new results (special cases for some values of  $m$ ).

Accepted by the Scientific Board on:

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

(Degree/name/surname/title/faculty)

DB President: *Dr Dr Ivica Bošnjak, Associated Professor, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Novi Sad*

Mentor: *Dr Olga Bodroža-Pantić, Full Professor, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Novi Sad*

Member: *Dr Petar Đapić, Assistant Professor, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Novi Sad, University of Novi Sad*