Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Jasna Mitrović

Vrednovanje opcija polisa osiguranja za katastrofe

Master rad

Novi Sad, 2013

Sadržaj

Predgovor

Jedan od problema koji unosi veliki strah među osiguravajuća i reosiguravajuća društva, jesu prirodne katastrofe i teroristički napadi, koji su poslednjih godina sve učestaliji. Koristeći potencijale tržišta, a u cilju smanjenja rizika od gubitaka koji upravo nastaju kao posledica velikih katastrofa, osiguravajuće kompanije su uvele finansijske derivate kojima se može trgovati. Ovi derivati prikazani su osnovnim indeksom koji predstavlja osiguranje imovine od gubitaka u slučaju prirodnih katastrofa, i u ovom radu će upravo biti obrađen indeks gubitaka, odnosno PCS opcije koje su date ovim indeksom. Takođe, razmatran je problem cena Evropskih opcija koje su date indeksom gubitaka i eksplicitno su izračunate cene za tipove opcija kojima se najčešće trguje na tržištu.

Svom mentoru, dr Dori Seleši, se zahvaljujem na predloženoj temi kojom sam proširila i obogatila svoje znanje stečeno na osnovnim a kasnije i na master studijama, kao i na izuzetnoj saradnji, savetima i razumevanju koje mi je pružila tokom izrade master rada.

Takođe, zahvaljujem se članovima komisije, prof. Danijeli Rajter Ćirić i prof. Sanji Konjik, na pruženom znanju i savetima tokom osnovnih i master studija.

Na kraju, želim bezuslovno da se zahvalim svojoj porodici, prijateljima, a posebno mojoj mami Svetlani, koja mi je bila velika podrška i snaga tokom izrade ovog rada i master studija.

Novi Sad, septembar 2013. godine *Jasna Mitrović*

1

Uvod

Osiguravajuće i reosiguravajuće kompanije izražavaju sve veću zabrinutost zbog prirodnih katastrofa, koje se poslednjih godina događaju povećanim intenzitetom stvarajući veoma velike finansijske gubitke. Ukupna šteta prouzrokovana prirodnim katastrofama, na globalnom nivou, u 2012. godini iznosi 160 milijardi dolara, od čega će 65 milijardi dolara biti nadoknađeno iz osiguravajućih društava, objavio je nemački reosiguravač Munich Re. Oko 67 odsto štete izazvane prirodnim katastrofama dogodilo se na području Sjedinjenih Američkih Država, kojoj pripada 90 odsto osiguranih gubitaka. Najveću štetu pričinio je uragan Sandy, koji je u oktobru prošle godine pogodio istočnu obalu Sjedinjenih Američkih Država. Ekiket (Eqecat), kompanija za procenu rizika od katastrofa, je saopštio da se procenjuje da bi ekonomski gubici prouzrokovani uraganom Sandy mogli biti između 30 i 50 milijardi dolara, a da bi troškovi osiguravajućih kompanija tada bili između 10 i 20 milijardi dolara, pri čemu je kasnije i utvrđeno da su ukupni troškovi nastali zbog uragana Sandy 25 milijardi dolara. Međutim, gubici u 2012. godini su bili znatno manji u odnosu na gubitke u 2011. godini, kada su zemljotresi u Japanu i na Novom Zelandu, te velike poplave na Tajlandu, prouzrokovale ukupne materijalne gubitke od 400 milijardi dolara, dok su osigurane štete iznosile 119 milijardi dolara. Drugi veliki gubitak u 2012. godini osiguravači su pretrpeli zbog enormnih suša u SAD koje su uništile useve kukuruza i soje, a osigurana šteta iznosi od 15 do 17 milijardi dolara. U saopštenju Munich Re se navodi da je 2012. godina pokazatelj na koje vrste šteta prouzrokovane prirodnim katastrofama će se osiguravači u budućnosti suočavati. Međutim, ovakve velike prirodne katastrofe događale su se i ranije. Uragan Andrew je 1992. godine prouzrokovao gubitke u vrednosti od 16 biliona dolara zbog čega je više od šesnaest osiguravajućih kompanija bankrotiralo.

U cilju smanjenja rizika od katastrofa osiguravajuće kompanije se trude da iskoriste potencijale tržišta kapitala uvodeći finansijske derivata[1] kojima se može trgovati. Ovi derivati zasnovani su na indeksu koji predstavlja osiguranje imovine u slučaju prirodnih katastrofa.

[1] **Finansijski derivati** su specifičan oblik vrednosnih papira koji su izvedeni iz neke baze (deonice, obveznice, valute itd). Derivati su jedna vrsta tržišno regulisanih ugovora u kojem dve strane unapred određuju predmet, cenu i termin kupoprodaje. Osnovna namena derivata je osiguranje od tržišnih rizika, ali ujedno i jedan od najšpekulatnijih vrsta vrednosnih papira kojima se trguje na tržištu. Postoji više vrsta finansijskih instrumenata a najčešće se trguje forvard ugovorima i opcijskim ugovorima.

Chicago Board of Trade (CBOT) je 1992. godine prvi uveo finansijske derivate za katastrofe, odnosno CAT [2]fjučers ugovore. Zbog veoma male trgovinske aktivnosti na tržištu ovi ugovori su 1995. godine zamenjeni PCS opcijama koje su zasnovane na indeksu gubitaka. PCS opcije je uvela nezavisna statistička agencija Property Claim Services (PCS). Ukupni kapaciteti kreirani ovom verzijom opcija osiguranja iznose 89 miliona dolara po godini. Trgovanje PCS opcijama je opalo u 1999. godini zbog nelikvidnosti tržišta i nedostatka kvalifikovanih ljudi. Struktura PCS opcija katastrofa je opisana na sledeći način. Opcija je data indeksom koji prolazi kroz dva perioda, period gubitaka i period događaja. Tokom perioda gubitaka $[0, T_1]$ indeks broji katastrofe koje se mogu desiti. Uz period gubitaka, korisnici opcija biraju period događaja $[T_1, T_2]$. Tokom perioda događaja, štete koje su se desile u periodu gubitaka se ponovo ocenjuju i nastavljaju da utiču na indeks. Ugovor ističe na kraju izabranog perioda događaja.

Određivanje cena derivata za katastrofe zbog nekompletnog tržišta predstavlja veliki problem ali i veliki izazov. Prirodne katastrofe prouzrokuju skokove slučajne veličine na indeksu gubitaka u slučajnom vremenskom trenutku i zbog toga nije moguće odrediti jedinstvenu cenu procesa derivate za katastrofe, uz pretpostavku da arbitraža nije moguća.

Do sada, u literaturi je uvođeno nekoliko aproksimacija modela indeksa gubitaka za katastrofe i cena opcija date ovim indeksom. U pojedinoj literaturi indeks gubitaka za katastrofe je predstavljen kao složen Poasonov proces sa nenegativnim skokovima. Međutim, tu nije napravljena razlika između perioda gubitaka i perioda događaja. S druge strane, neki autori prave razliku između perioda gubitaka i period događaja, gde je model indeksa gubitaka predstavljen kao Lévijev proces nad svakim periodom. Dok tehničke pojedinosti za određivanje cena su pojednostavljene, pretpostavka eksponencijalnog modela za nagomilane gubitke tokom perioda gubitaka je prilično nerealna. Na primer, ovo implicira da je kasnija katastrofa mnogo veća nego prethodna, i tada indeks gubitaka startuje u pozitivnoj vrednosti umesto u nuli.

U ovom radu razmatraćemo razlike između perioda gubitka i perioda događaja, pri čemu se predlaže mnogo realniji model za indeks gubitka. Pretpostavićemo da je tokom perioda gubitka indeks gubitaka opisan nehomogenim složenim Poasonovim procesom, dok tokom perioda događaja indeks je ponovo procenjen ali sada faktorom koji je dat nehomogenim Lévijevim procesom. Takođe, razmatraćemo problem određivanja cena Evropskih opcija pisane na in-

[2] **Fjučers ugovori** (ili budući ugovori) su tržišni ugovori kojima se ekonomska lica obavezuju na isporuku određene količine neke robe u budućnosti.

deksu gubitaka za katastrofe. Posmatranjem isplate opcija na dvodimenzionalnom skupu možemo dobiti analitičku formulu za cene pomoću Furijeovih transformacija.

2

Osnovni pojmovi verovatnoće i stohastičke analize

U ovom delu podsetićemo se određenih definicija i teorema iz verovatnoće i stohastičke analize, koje ćemo koristiti kasnije u radu.

2.1 Prostor verovatnoće

Označimo sa $P(\Omega)$ partitivni skup skupa Ω.

Definicija 2.1.1 Neka je $\Omega \neq \varnothing$ i $P(\Omega)$ partitivni skup skupa Ω. Topologija $\mathcal{T}$ na skupu Ω je familija skupova sa osobinama:

1. $\varnothing, \Omega \in \mathcal{T}$;
2. $O_1, O_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$;
3. $O_\alpha \in \mathcal{T}, \alpha \in \Lambda \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Lambda} O_\alpha \in \mathcal{T}$.

Skup Ω sa topologijom $\mathcal{T}$ je topološki prostor, označavamo ga sa $(\Omega, \mathcal{T})$.

Definicija 2.1.2 Neka je F podskup partitivnog skupa $P(\Omega)$. Ako su zadovoljeni uslovi:

1. $\Omega \in F$;
2. $A \in F \Rightarrow \bar{A} \in F$;
3. $A_n \in F, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in F$

tada je F σ - algebra nad Ω.

Skup Ω sa σ - algebrom F nazivamo prostor sa σ - algebrom i označavamo ga sa (Ω, F). Elemente σ - algebre F nazivamo *merljivim skupovima*.

Definicija 2.1.3 *Borelova* σ *- algebra* je najmanja σ - algebra koja sadrži zatvorene skupove. Sa $B(\mathbb{R})$ označava se Borelova σ - algebra definisana nad skupom realnih brojeva $\mathbb{R}$.

Definicija 2.1.4 Neka je (Ω, F) prostor sa σ - algebrom F. Mera μ na F je funkcija $\mu : F \to [0, \infty]$ za koju važi da ako je $A_n \in F$, $n \in \mathbb{N}$ disjunktna familija skupova, tada je

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \ (\sigma\text{ - aditivnost}).$$

Uređena trojka (Ω, F, μ) se naziva *merljiv prostor* ili *prostor sa merom*. Ako bar za jedno $A \in F,\ \mu(A) < \infty,$ tada kažemo da je *mera netrivijalna*. Mera je konačna ako za svako $A \in F,\ \mu(A) < \infty.$

Definicija 2.1.5 Neka je μ netrivijalna mera na prostoru sa $\sigma -$ algebrom (Ω, F).

Tada važi:

1. $\mu(\varnothing) = 0$;
2. Ako je $A, B \in F$ i $A \bigcap B = \varnothing$, tada je $\mu(A \bigcup B) = \mu(A) + \mu(B)$;

   Sledi konačna aditivnost: Ako su $A_i \in F,\ i = 1, \ldots, n$ disjunktni, tada važi

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i);$$

3. Ako je $A, B \in F$ i $A \subset B$ tada je $\mu(A) \leq \mu(B)$;
4. Ako $A_i \in F,\ i \in \mathbb{N}$, tada je $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$;

Definicija 2.1.6 Neka je G neopadajuća desno neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$. Tada postoji jedinstvena mera μ na $B(\mathbb{R})$ tako da je

$$\mu((a,b]) = \mu_G((a,b]) = G(b) - G(a)$$

za svaki ograničeni interval $(a,b]$.

Ako je $G \equiv Id$ (Id je identičko preslikavanje), tada se odgovarajuća mera naziva *Lebegova mera* na $B(\mathbb{R})$ i predstavlja najvažniju meru na realnoj pravoj.

Teorema 2.1.7 *Neka su (X, F, μ) i (Y, G, ν) prostori sa σ - algebrama F i G i konačnim merama μ i ν. Postoji jedinstvena mera η na $H = F \otimes G$ tako da je*

$$\eta(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

za sve pravougaonike $A \times B, A \in F, B \in G$.

Generalizacija za beskonačne proizvode je takođe moguća.

Definicija 2.1.8 Neka je $F \subset X \times Y$. Definišimo za date $x \in X, y \in Y$,

$$F_x = \{y \in Y : (x,y) \in F\};\ \mathrm{F}^y = \{x \in X ; (x,y) \in F\}.$$

F_x se naziva x - *odsečak* skupa F, a F^y se naziva y - *odsečak* skupa F.

Ako je $f : X \times Y \to C$, definišemo

$$f_x(y) = f(x,y),\ y \in Y \ \ (x \in X \text{ je fiksirano}),$$

$$f^y(x) = f(x,y),\ x \in X \ \ (y \in Y \text{ je fiksirano}).$$

Teorema 2.1.9 *(Fubinijeva teorema) Neka su* (X, F, μ) *i* (Y, G, ν) *prostori sa* σ *- algebrama F i G i konačnim merama i neka je* $\eta = \mu \otimes \nu$ *mera na* $F \otimes G$. *Ako je funkcija f na* $X \times Y$ *u* $\mathbb{R}$ η *- integrabilna, tada*

$$\int_X \left(\int_Y f_x d\nu \right) d\mu = \int_{X \times Y} f d\eta = \int_Y \left(\int_X f^y d\mu \right) d\nu.$$

Dalje, neka je μ mera na (Ω, F, μ) koja ima osobinu da je $\mu(\Omega) = 1$. Mera sa ovakvom osobinom normiranosti se naziva *mera verovatnoće* ili *verovatnosna mera,* a prostor verovatnoće se obično označava sa (Ω, F, P). Aksiomatska teorija verovatnoće upravo se zasniva na teoriji mere i integrala. Elementi prostora Ω su svi mogući ishodi nekog procesa, ili sva moguća stanja, a merljivi skupovi se nazivaju događajima. Na dalje, u radu mera će se odnositi na meru verovatnoće.

Neka je (Ω, F, P) prostor verovatnoće. Funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$, takva da za svako $x \in \mathbb{R}$ skup $(\omega \in \Omega : X(\omega) < x)$ pripada $\sigma -$ algebri F, naziva se *slučajna promenljiva*.

Kada opisujemo osobine slučajnih promenljivih koje važe za (skoro) sve $\omega \in \Omega$, na skupu mere 1, kažemo da važe *skoro sigurno* (ili P-skoro sigurno, ako želimo da naglasimo u kojoj meri).

Slučajne promenljive mogu biti diskretnog tipa i neprekidnog tipa. Svakoj slučajnoj promenljivoj X odgovara funkcija raspodele F_X u kojoj su sadržane sve informacije vezane za slučajnu promenljivu X.

Funkcija raspodele $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ slučajne promenljive X definisana je sa

$$F_X(x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}.$$

Sada ćemo uvesti pojam karakteristične funkcije k_X slučajne promenljive X, koja je po svom značaju i upotrebi veoma bliska funkciji raspodele. Naime, svakoj funkciji raspodele F_X odgovara jedna i samo jedna karakteristična funkcija k_X.

Definicija 2.1.10 Ako je X slučajna promenljiva $X : \Omega \to \mathbb{R}$, tada funkciju $k_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definisanu sa

$$k_X(t) = E\left(e^{itX}\right)$$

tj.

$$k_X(t) = \begin{cases} \sum_n e^{itx_n} p(x_n), & \text{ako je } X \text{ diskretnog tipa} \\ \int_{\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi_X(x)\,dx, & \text{ako je } X \text{ neprekidnog tipa} \end{cases}$$

nazivamo karakterističnom funkcijom slučajne promenljive *X*.

Karakteristična funkcija je zapravo Furijeova transformacija funkcije gustine kod slučajnih promenljivih neprekidnog tipa.

Osnovne osobine karakteristične funkcije su:

1. $|k_X(t)| \leq 1$;
2. $k_X(-t) = \overline{k_X(t)}$;
3. $k_{aX+b}(t) = e^{itb} k_X(at)$;
4. Ako su *X* i *Y* nezavisne, onda je $k_{X+Y}(t) = k_X(t) k_Y(t)$;
5. $k_X(0) = 1$.

Definicija 2.1.11 Matematičko očekivanje $E(X)$ slučajne promenljive *X* je definisano na sledeći način:

- *X* je diskretnog tipa sa zakonom raspodele $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p(x_1) & p(x_2) & \cdots \end{pmatrix}$

$$E(X) = \sum_i x_i p(x_i),$$

- *X* je neprekidnog tipa sa gustinom φ_X

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi_X(x) dx .$$

Definicija 2.1.12 Uslovno očekivanje slučajne promenljive X iz prostora (Ω, F, P) za datu σ- algebru G je skoro sigurno jedinstveno određena G- merljiva slučajna promenljiva $E[X|G]$ za koju važi

$$\int_A E[X|G] dP = \int_A X dP$$

za svako $A \in G$.

Propozicija 2.1.13 Uslovno očekivanje ima sledeće osobine:

1. $E\left[aX+bY|G\right]=aE\left[X|G\right]+bE\left[Y|G\right]$ *(linearnost)*;
2. $E\left[E\left[X|G\right]\right]=E\left[X\right]$;
3. $\mathrm{E}\left[XY|G\right]=XE\left[Y|G\right]$ ako je X G *- merljivo*;
4. $E\left[X|G\right]=E\left[X\right]$ *ako je* X *nezavisno od* G;
5. $E\left[E\left[X|G\right]|H\right]=E\left[X|H\right]$ za $H\subset G$.

U finansijskoj matematici se često javlja potreba za promenom mere verovatnoće. Zato sada dajemo pregled osnovnih definicija i teorema koje omogućavaju prelazak sa jedne mere na drugu.

Definicija 2.1.14 Dve mere verovatnoće P i Q definisane nad istim prostorom (Ω,F) su ekvivalentne, u oznaci $P\sim Q,$ ako imaju iste skupove mere nula, tj.

$$P(A)=0\Leftrightarrow Q(A)=0,\ \text{za sve}\ A\in F.$$

Teorema 2.1.15 *(Radon-Nikodym) Neka su P i Q ekvivalentne mere verovatnoće na prostoru* (Ω,F). *Tada postoji nenegativna slučajna promenljiva Z takva da važi*

$$Q(A)=\int_A ZdP,\quad A\in F. \qquad (2.1)$$

Slučajna promenljiva Z *je jedinstveno određena na skupu mere nula u odnosu na P.*

Takva slučajna promenljiva se naziva *Radon-Nikodimov izvod* mere Q u odnosu na meru P i označava se sa dQ/dP. Iz jednakosti (2.1) sledi da za svaku slučajnu promenljivu X iz prostora (Ω,F) važi

$$E_Q\left[X\right]=E_Z\left[X\,\frac{dQ}{dP}\right]. \qquad (2.2)$$

Radon-Nikodimov izvod se može interpretirati kao odnos gustina raspodela neke slučajne promenljive u merama Q i P, respektivno.

Da bismo odredili uslovno očekivanje slučajne promenljive X u odnosu na σ - algebru $G\subset F$ u ekvivalentnoj meri Q, primenjujući osobinu 2 iz propozicije 2.1.13 dobijamo

$$E_Q\left[E_Q\left[X|G\right]Y\right]=E_Q\left[XY\right] \qquad (2.3)$$

za sve $Y\in G$. Izraz sa leve strane jednakosti (2.3) se može napisati kao

$$E_P\left[E_Q\left[X|G\right]Y\frac{dQ}{dP}\right]=E_P\left[E_Q\left[X|G\right]E_P\left[\frac{dQ}{dP}|G\right]Y\right].$$

Izraz sa desne strane jednakosti (2.3) je zapravo

$$E_P\left[XY\frac{dQ}{dP}\right]=E_P\left[E_P\left[X\frac{dQ}{dP}|G\right]Y\right].$$

Sledi da (2.3) važi za sve $Y\in G$ ako i samo ako

$$E_Q\left[X|G\right]E_P\left[\frac{dQ}{dP}|G\right]=E_P\left[X\frac{dQ}{dP}|G\right],$$

pa se uslovno očekivanje u ekvivalentnoj meri *Q* definiše kao

$$E_Q\left[X|G\right]=\frac{E_P\left[X\frac{dQ}{dP}|G\right]}{E_{\mathbb{P}}\left[\frac{dQ}{dP}|G\right]}.$$

2.2 Stohastički procesi

Pretpostavimo da treba formirati matematički model za slučajni sistem i njegovo ponašanje tokom nekog vremenskog intervala. Kao primer takvog sistema možemo uzeti sistem od *k* sijalica od kojih svaka ima slučajnu dužinu rada. Kako vreme protiče, neke od njih će prestati da rade, pregoreće. U svakom momentu *t*, stanje sistema tj. broj ispravnih sijalica će biti slučajna promenljiv X_t. Matematički model ovog sistema je beskonačna familija slučajnih promenljivih $X_t,\ t\in[0,T]$ tzv. slučajni proces. Mnoge pojave u finansijskoj matematici su stohastički procesi, npr. cene akcija, kretanje kamatnih stopa, finansijski derivati itd.

Definicija 2.2.1 *Realni stohastički proces* je familija realnih slučajnih promenljivih $X_t,\ t\in T\subseteq\mathbb{R}$ definisanih na fiksiranom prostoru verovatnoće (Ω,F,P). Promenljiva *t* prolazi skupom $T\subseteq\mathbb{R}$ i obično je interpretiramo kao vreme.

Slučajna promenljiva preslikava Ω u $\mathbb{R}$ što znači da je slučajni proces $X_t,\ t\in T\subseteq\mathbb{R}$ funkcija dve promenljive, $X_t(\omega),\ t\in T,\ \omega\in\Omega$. Ako fiksiramo *t* tada je $X_t(\omega)$ slučajna promenljiva koju nazivamo zaseokom slučajnog procesa, a ako fiksiramo ω tada je $X_t(\omega)$ realna funkcija realne promenljive koju nazivamo realizacijom, trajektorijom ili uzoračkom funkcijom. Isto kao i kod slučajnih promenljivih, uobičajeno je da se promenljiva ω izostavlja u zapisu, tako da umesto $X_t(\omega)$ pisaćemo samo X_t. Skup T kojim prolazi realna promenljiva t nazivamo indeksnim ili parametarskim skupom, a promenljivu t indeksom ili parametrom. Ukoliko je T diskretan beskonačan skup, tada proces nazivamo slučajnim nizom ili lancem. Specijalno, ako je T konačan interval tada imamo konačno mnogo slučajnih promenljivih.

Mi ćemo dalje za parametarski skup T uzeti skup $\{0,1,\ldots,T\}$ jer je to vreme koje ćemo posmatrati, tj. vreme od početka osiguranja do njegovog isteka.

Definicija 2.2.2 Neka je A događaj na skupu Ω. Funkcija definisana na sledeći način

$$I_A^{\Omega} = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

je slučajna promenljiva koja se zove indikator događaja A. Kada je jasno šta je skup Ω, ovu funkciju možemo zapisivati samo sa I_A.

Definicija 2.2.3 Familija σ- algebra $(F_t)_{t\in T}$ na Ω naziva se *filtracija stohastičkog procesa* ako je

$$F_S \subseteq F_t$$

za sve $s,t \in T$ takve da je $s \le t$.

σ-algebra F_t će predstavljati informacije dostupne u trenutku *t*, odnosno istoriju stohastičkog procesa do trenutka *t*, uključujući i *t*. F_t sadrži sve događaje čija je mera u trenutku *t* poznata. Kako *t* raste, tih događaja je sve više.

Ako je pored toga zadovoljeno i da je:

1. F_0 „najgrublja“ moguća particija, tj. $F_0 = \{\Omega\}$,
2. F_N „najfinija“ moguća particija, tj. $F_N = \{\{\omega_1\},...,\{\omega_m\}\}$ u kojoj je svaki blok veličine jedan,

tada filtraciju *F* nazivamo informaciona struktura.

Informaciona struktura počinje sa tim da nemamo informaciju o konačnom stanju osim da je u Ω, u svakom narednom trenutku *t* možda dobijemo dodatne informacije (i nikada ih ne gubimo) i na kraju imamo kompletno znanje o konačnom stanju.

Za proces $(S_t)_{t\in T}$ kažemo da je adaptiran filtraciji $(F_t)_{t\in T}$ ako je slučajna promenljiva S_t F_t-merljiva za svako $t \in T$.

Definicija 2.2.4 Neka je (Ω, F, P) prostor verovatnoće i $(S_t)_{t\in T}$ stohastički proces adaptiran filtraciji $(F_t)_{t\in T}$. Proces $(S_t)_{t\in T}$ je *martingal* u meri *P* ako je

$$E\left[S_t \middle| F_{t-1}\right] = S_{t-1} \; P\text{-skoro sigurno, } t = 1, 2, ..., T,$$

što je ekvivalentno sa

$$\int_A S_t dP = \int_A S_{t-1} dP \text{ za svako } A \in F_{t-1}, t = 1, 2, ..., T.$$

Pošto osobina martingala zavisi od mere verovatnoće, reći ćemo da je proces *S P*-martingal, kada je potrebno naglasiti u kojoj verovatnoći. Martingal je matematički izraz koji zapravo označava fer igru. Prema definiciji, za martingal se očekuje da ostane na trenutnom nivou. Na primer, ako je martingal bogatstvo jednog investitora, to znači da je očekivanje njegovog budućeg bogatstva jednako trenutnom bogatstvu.

Neke klase slučajnih procesa

U ovom odeljku daćemo neke definicije i osnovna svojstva klasa slučajnih procesa koji se najčešće koriste u praksi.

Nezavisni proces

Ako su slučajne promenljive $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$ nezavisne za svako $n \in \mathbb{N}$ i svako $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ tada je proces $X_t,\ t \in T$ *nezavisan proces sa nezavisnim vrednostima* u svakoj tački.

Proces sa nezavisnim priraštajima

Slučajni proces $X_t,\ t \in [0, \infty)$ je *proces sa nezavisnim priraštajima* ako za svaki izbor $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ iz $[0, \infty)$ važi da su $X_0,\ X_{t_1} - X_0,\ X_{t_2} - X_{t_1},\ \ldots,\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ nezavisne slučajne promenljive.

Ako je X_t proces sa nezavisnim priraštajima i ako za svako $s, t, a \in [0, \infty),\ s < t,$ važi da slučajne promenljive $X_t - X_s$ i $X_{t+a} - X_{s+a}$ imaju istu raspodelu, tada kažemo da je X_t proces sa stacionarnim nezavisnim priraštajima.

Stacionarni procesi

Razlikujemo strogo stacionarne i slabo stacionarne procese.

Slučajni proces $X_t,\ t \in T$ je *strogo stacionaran* ako su sve njegove raspodele konačnog reda invarijantne u odnosu na translaciju vremena. Odnosno, za svako $n \in \mathbb{N}$, svaki mogući izbor $t_1, t_2, ..., t_n \in T$ i svako $c \in \mathbb{R}$ za koje $t_1 + c, t_2 + c, ..., t_n + c \in T$, n-dimenzionalne slučajne promenljive $X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}$ i $X_{t_1+c}, X_{t_2+c}, ..., X_{t_n+c}$ imaju iste funkcije raspodele, tj.

$$F_{X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}}(x_1, x_2, ..., x_n) = F_{X_{t_1+c}, X_{t_2+c}, ..., X_{t_n+c}}(x_1, x_2, ..., x_n),$$

za sve $x_1, x_2, ... x_n \in \mathbb{R}$.

Slučajni proces $X_t,\ t \in T$ je *slabo stacionaran* ako je:

$$E(X_t) = m = const.$$

Procesi Markova

Slučajni proces $X_t,\ t \in T$ je *proces Markova* sa diskretnim skupom stanja S ako za svako $n \in \{2, 3, ...\}$ i svaki izbor $t_1 < t_2 < ... < t_n$ iz T i sve $x_1, x_2, ..., x_n \in S$

$$P\left(X_{t_n} = x_n \middle| X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, ..., X_{t_1} = x_1\right) = P\left(X_{t_n} = x_n \middle| X_{t_{n-1}} = x_{n-1}\right).$$

Poslednjom relacijom izraženo je tzv. svojstvo Markova koje znači da ako su poznate "prošlost" tj. $\left(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_{n-2}}\right)$ i "sadašnjost" tj. $X_{t_{n-1}}$ onda budućnost X_{t_n} zavisi samo od "sadašnjosti" a ne od "prošlosti".

Primeri slučajnih procesa

Poasonov proces

Definicija 2.2.5 Neka je $N(t)$ ukupan broj događaja koji se desi u interval $[0, t]$. Stohastički proces $\{N(t), t \geq 0\}$ zove se proces brojanja događaja ili proces prebrajanja.

Procesi prebrajanja imaju sledeće osobine:

1. Za fiksirano t, $N(t)$ je slučajna promenljiva čije su vrednosti iz skupa $\mathbb{N}_0$.

2. Funkcija $N(t)$ je neopadajuća, tj.

$$N(t_2)-N(t_1)\geq 0, \text{ako je } t_2\geq t_1\geq 0,$$

gde je $N(t_2)-N(t_1)$ broj događaja koji se desi u intervalu $(t_1,t_2]$.

Definicija 2.2.6 *Homogeni Poasonov proces* sa stopom rasta λ, $\lambda>0$ je proces prebrajanja $\{N(t),\ t\geq 0\}$ za koji važi:

1. $N(0)=0$,
2. Proces $N(t)$ ima nezavisne priraštaje,
3. Broj događaja u proizvoljnom intervalu dužine t ima Poasonovu raspodelu sa parametrom λt, tj.

$$P\{N(t+s)-N(s)=n\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \text{ za svako } t\geq 0 \text{ i } n\in\mathbb{N}_0.$$

Definicija 2.2.7 (*Složen Poasonov proces*) Neka je $\{N(t),\ t\geq 0\}$ Poasonov proces sa stopom rasta λ, a $X_1,X_2,...$ nezavisne i jednako raspoređene slučajne promenljive koje su nezavisne od procesa $\{N(t),\ t\geq 0\}$. Stohastički proces $\{Y(t),\ t\geq 0\}$ definisan kao

$$Y(t)=\sum_{k=1}^{N(t)}X_k, \text{ za svako } t\geq 0,$$

gde važi da je $Y(t)=0$ ako je $N(t)=0$, zove se složen Poasonov proces.

Očekivanje i disperzija složenog Poasonovog procesa:

$$E(Y(t))=E(N(t))\cdot E(X_1)=\lambda t\cdot E(X_1),$$

$$D(Y(t))=E(N(t))\cdot D(X_1)+D(N(t))\cdot(E(X_1))^2=\lambda t\cdot\left(D(X_1)+(E(X_1))^2\right)=\lambda t\cdot E(X_1^2).$$

Braunovo kretanja

Definicija 2.2.8 Standardno Braunovo kretanje (Vinerov proces) je stohastički proces $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ koji ima sledeće osobine:

- $X(0)=0;$
- za svako $t=t_0\leq t_1\leq ...\leq t_n$ priraštaji $X(t_1)-X(t_0),...,X(t_n)-X(t_{n-1})$ su nezavisne slučajne promenljive;

- $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ ima stacionarne priraštaje;
- za svako $0\leq s\leq t$ slučajna promenljiva $X(t)-X(s)$ ima normalnu raspodelu $\mathrm{N}(0,t-s)$;

Standardno Braunovo kretanje ćemo označavati sa W_t .

Jednodimenziona Itova formula

Teorema 2.2.9 *Neka je X_t stohastički proces zadat svojim stohastičkim diferencijalom*

$$dX_t=\mu_t dt+\sigma_t dW_t.$$

Neka je g dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija. Onda je $Y_t=g(t,X_t)$ stohastički proces i njegov stohastički diferencijal je dat sa:

$$dY_t=g_t dt+g_x dX_t+\frac{1}{2}g_{xx}(dX_t)^2.$$

2.3 Prostori $L^p(\Omega)$, $p\in[1,\infty]$

Neka je $1\leq p<\infty$, i neka je $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ otvoren, povezan skup. Prostor $L^p(\Omega)$, $p\in[1,\infty)$ je definisan na sledeći način

$$L^p(\Omega)=\left\{f:\Omega\to\mathbb{R}: f \text{ je merljiva, } \int_\Omega |f(x)|^p\,dx<\infty\right\}.$$

Takođe, ovo je Banahov prostor sa normom

$$\|f\|_{L^p(\Omega)}=\left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Za $p=2$ dobijamo prostor $L^2(\Omega)$ koji je i Hilbertov, pri čemu je unutrašnji proizvod $(f|g)$ definisan sa

$$(f|g)=\int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx,$$

gde $\overline{g(x)}$ označava kompleksno konjugovanu vrednost od $g(x)$. Ako radimo sa funkcijama čije vrednosti pripadaju skupu realnih brojeva, onda je unutrašnji proizvod $(f|g)$ definisan sa

$$(f|g)=\int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

Za $p=\infty$ imamo malo drugačiju definiciju:

$$L^{\infty}(\Omega)=\{ f:\Omega\to\mathbb{R} : f \text{ je merljiva i postoje } \mathrm{M}>0,\ \mathrm{N}\subseteq\Omega,$$

$$\text{tako da važi da je } \mathrm{m}(N)=0 \text{ i } S(N):=\sup_{x\in\Omega\setminus N}\left|f(x)\right|\le M \Big\}.$$

$L^{\infty}(\Omega)$ je takođe Banahov prostor sa normom

$$\|f\|_{L^{\infty}}=\inf\{S(N): N\subseteq\Omega,\ m(N)=0\}.$$

Značajno mesto u $L^{p}(\Omega)$ prostorima zauzima Helderova nejednakost:

$$\int_{\Omega}\left|u(x)v(x)\right|dx\le\|u\|_{L^{p}}\|v\|_{L^{q}},\ \ \mathrm{u}\in L^{p}(\Omega), v\in L^{q}(\Omega),\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Specijalan slučaj ove nejednakosti, za $p=q=2$, je Švarcova nejednakost.

2.4 Furijeova transformacija

Furijeova transformacija predstavlja uopštenje (granični slučaj) Furijeovih redova, a inverzna Furijeova transformacija uopštenje Furijeovih koeficijenata.

Sada ćemo definisati klasičnu Furijeovu transformaciju na prostorima $L^{p}(\Omega)$, $1\le p\le 2$, $\Omega=\mathbb{R}^{n}$.

Definicija 2.4.1 Neka je $f\in L^{p}(\mathbb{R}^{n}), 1\le p\le 2$

$$F(f)(x)=f(x):=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int f(y)e^{ixy}dy\in L^{q}(\mathbb{R}^{n}),$$

gde je q određeno iz relacije $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Definišimo formulu koja radi obrnuto, uzima Furijeovu transformaciju i pod izvesnim uslovima vraća originalnu funkciju.

Definicija 2.4.2 Inverzna Furijeova transformacija je definisana sa

$$F^{-1}(\phi)(x)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int e^{-ixy}\phi(y)\,dy.$$

Treba napomenuti da definicija Furijeove i inverzne Furijeove transformacije nije jedinstvena.

Primer 2.4.3 Odredimo Furijeovu transformaciju sledeće funkcije $h(y)=\begin{cases} A, & |y|<T \\ 0, & |y|>T \end{cases}$.

Rešenje:

Primenom Furijeove transformacije na funkciju $h(y)$ dobijamo

$$F\left(h(y)\right)(x)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}h(y)e^{ixy}dy=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}A\int_{-T}^{T}e^{ixy}dy.$$

Sledi da je

$$F\left(h(y)\right)(x)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\frac{A}{ix}\left(e^{ixT}-e^{-ixT}\right).$$

Odnosno, ako iskoristimo jednakost

$$\sin(y)=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i},$$

dobijamo

$$F\left(h(y)\right)(x)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\frac{2A}{x}\sin(xT).$$

Definicija 2.4.4 Neka su $f,g\in L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$. Konvolucija ove dve funkcije je data sa

$$f*g(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)dy,\ x\in\mathbb{R}^n.$$

Teorema 2.4.5 *Neka su* $f,g\in L^p\left(\mathbb{R}^n\right),\ p\in[1,2]$ *i neka su njihove Furijeove transformacije označne sa F i G, respektivno. Tada važi:*

1. $F\left(af(y)+bg(y)\right)(x)=aF(x)+bG(x)$; (linearnost)
2. $F(f*g)=(2\pi)^{\frac{n}{2}}F(f)F(g)$;
3. $F(fg)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}F(f)*F(g)$;
4. $F^{-1}\left(F(f)\right)=F\left(F^{-1}(f)\right)=f$;
5. $F^{-1}(f)(x)=F(f)(-x)$;
6. $F\left(F(f)\right)(x)=f(-x)$;

Dokaz:

1.

$$F\left[af(y)+bg(y)\right](x)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int\left[af(y)+bg(y)\right]e^{ixy}dy$$

$$=a(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int f(y)e^{ixy}dy+b(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int g(y)e^{ixy}dy$$

$$=aF(x)+bG(x).$$

2.

$$F(f*g)(y)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{ixy}\int_{\mathbb{R}^n}f(t)g(x-t)dtdx$$

$$=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ity}f(t)\left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-t)y}g(x-t)\,dx\right]dt$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n} e^{ity}f(t)\,dt\cdot F(g)(y)$$

$$=(2\pi)^{\frac{n}{2}}F(f)(y)F(g)(y).$$

3. Na osnovu 2. osobine imamo da je

$$F\big(F(f)*F(g)\big)(x)=(2\pi)^{\frac{n}{2}}F\big(F(f)\big)(x)F\big(F(g)\big)(x)$$

$$=(2\pi)^{\frac{n}{2}}f(-x)g(-x).$$

Odavde sledi

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}}F\big(F(f)*F(g)\big)(-x)=f(x)g(x).$$

Primenjujući Furijeovu transformaciju na levu i desnu stranu dobijamo

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}}F(f)*F(g)(x)=F\big(f(x)g(x)\big).$$

4. Ova osobina se dokazuje primenom Fubinijeve teoreme slično kao i 2. osobina.
5. i 6. osobina slede direktno iz definicije.

□

Teorema 2.4.6

1. Ako je $f\in L^1\left(\mathbb{R}^n\right)$, tada je $\hat{f}\in C^0\left(\mathbb{R}^n\right)$.
2. Ako je $y_j f(y)\in L^q\left(\mathbb{R}^n\right), 1\le q\le 2$, tada postoji $\partial_{x_j}\hat{f}$, $\hat{f}\in L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, i važi

$$\partial_{x_j}\hat{f}(x)=i y_j f(y)(x), x\in\mathbb{R}^n.$$

3. Ako je $\partial_{y_j} f(y)\in L^p\left(\mathbb{R}^n\right), 1\le p\le 2$, tada je

$$\partial_{y_j} f(y)(x)=-ix_j\hat{f}(x), x\in\mathbb{R}^n.$$

Napomena: $C^k(\Omega)$ je skup svih funkcija $u:\Omega\to\mathbb{R}$ (ili $\mathbb{C}$) koja ima sve neprekidne izvode zaključno sa redom $0\le k\le\infty$.

Dokaz: Dokazaćemo 3. osobinu.

Bez ograničenja opštosti pretpostavićemo da je $n=1$.

Parcijalnom integracijom dobijamo

$$F\left[f'(y)\right](x)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\left[f(y)e^{ixy}\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty} f(y)ixe^{ixy}dy\right].$$

Kako je

$$\lim_{x\to+\infty} f(y)=0 \text{ i } \lim_{x\to-\infty} f(y)=0$$

(što važi jer je *f* apsolutno integrabilna funkcija) prvi izraz nestaje i dobijamo

$$F\left[f'(y)\right](x)=(-ix)(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{ixy}dy=(-ix)F\left[f(y)\right](x). \qquad \square$$

Sledeća teorema je poznata kao Parsevalova jednakost.

Teorema 2.4.7 *Ako su* $f\in L^p(\mathbb{R}^n), g\in L^q(\mathbb{R}^n), \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ p,q\in[1,2],$ *tada važi:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)F(g(y))dx=\int_{\mathbb{R}^n} F(f(x))g(y).$$

Specijalno, za $p=q=2$ imamo da je

$$\|F(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\|F^{-1}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Prethodni identitet nas motiviše da definišemo Furijeovu transformaciju temperiranih distribucija na sledeći način:

Definicija 2.4.8 Za $f\in S'(\mathbb{R}^n)$ definišemo $F(f)$ dato preko dejstva na test funkciju $\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle F(f),\varphi\rangle=\langle f,F(\varphi)\rangle,\ \ \varphi\in S(\mathbb{R}^n)$$

gde je $F(\varphi)$ definisano kao u definiciji 2.4.1.

Primer 2.4.9 Nađimo Furijeovu transformaciju *Delta funkcije,* δ.
Koristeći osnovne osobine distribucije i primenom Furijeove transformacije dobijamo

$$\begin{aligned}&\langle F[\delta],\phi\rangle=\langle\delta,F[\phi]\rangle\\&=F(\phi(0))\\&=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{0x}\phi(x)dx\\&=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}1\phi(x)dx=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\langle 1,\phi(x)\rangle.\end{aligned}$$

Odavde sledi da je $F(\delta)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

3 Lévijevi procesi

U finansijskoj matematici Lévijevi procesi su veoma popularani i pridaje im se veliki značaj, jer u obzir uzimaju modele koji su fleksibilniji u odnosu na modele izvedene pomoću Braunovog kretanja. U ovom delu rada ćemo se detaljnije upoznati sa Lévijevim procesima i nekim njihovim osobinama.

Neka je $X = \left(X(t), t \geq 0\right)$ stohastički proces definisan na prostoru verovatnoće $\left(\Omega, F, P\right)$. X je Lévijev proces ako važi:

(A) $X(0) = 0$;

(B) X ima nezavisne i stacionarne priraštaje;

(C) X je stohastički neprekidno tj. za svako $a > 0$ i svako $s > 0$

$$\lim_{t \to s} P\left(\left|X(t) - X(s)\right| > a\right) = 0.$$

Neka je karakteristična funkcija oblika $k_{X(t)}(u) = e^{\eta(t,u)}$, $t \geq 0, u \in \mathbb{R}^d$. Tada preslikavanje $\eta(t,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ zovemo Lévijev simbol. Mnogi autori η nazivaju karakteristični eksponent ili Lévijev eksponent. Sada ćemo objasniti vezu između Lévijevih procesa i beskonačno deljivih slučajnih promenljivih.

Definicija 3.1.1 Kažemo da je $X \in \mathbb{R}^n$ beskonačno deljiva slučajna promenljiva ako za $\forall n \in \mathbb{N}$, postoje slučajne promenljive $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ takve da je $X = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$ i važi $p_X = p_Y^{*n}$

Lema 3.1.2 Ako je X Lévijev proces, onda je $X(t)$ beskonačno deljiva slučajna promenljiva za $t \geq 0$.

Teorema 3.1.3 *Ako je X Lévijev proces, onda je*

$$k_{X(t)}(u) = e^{t\eta(u)}$$

za svako $u \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$, *gde je* η *Lévijev simbol za* $X(1)$.

Dokaz: Pretpostavimo da je X Lévijev proces za svako $u \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$. Definišimo da je $k_u(t) = k_{X(t)}(u)$.

Tada na osnovu (B) sledi da za svako $s \geq 0$

$$\begin{aligned} k_u(t+s) &= k_{X(t+s)}(u) = \mathrm{E}\left(e^{i(u,X(t+s))}\right) \\ &= \mathrm{E}\left(e^{i(u,X(t+s)-X(s))}e^{i(u,X(s))}\right) \\ &= \mathrm{E}\left(e^{i(u,X(t+s)-X(s))}e^{i(u,X(s))}\right)\mathrm{E}\left(e^{i(u,X(s))}\right) \qquad (3.1) \\ &= k_u(t)k_u(s). \end{aligned}$$

Sada, iz (A) sledi da je

$$k_u(0) = 1 \qquad (3.2)$$

dok iz (C) i leme 3.1.2 imamo da je preslikavanje $t \to k_u(t)$ neprekidno. Jedinstveno neprekidno rešenje za (3.1) i (3.2) je dato sa $k_u(t) = e^{t\alpha(u)}$, gde je $\alpha : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$. Sada na osnovu leme 3.1.2 imamo da je $X(1)$ beskonačno deljiva slučajna promenljiva. Kako je α Lévijev simbol dobijamo traženi rezultat. □

Lévy-Khintchine formula

Paul Lévy i A. Ya. Khintchine su 1930. godine prvi predstavili lepu formulu kojom je data karakterizacija beskonačno deljivih slučajnih promenljivih preko njihove karakteristične funkcije.

Neka je ν Borelova mera definisana na $\mathbb{R}^d - \{0\} = \{x \in \mathbb{R}^d, x \neq 0\}$. Tada kažemo da je ν Lévijeva mera ako je

$$\int_{\mathbb{R}^d - \{0\}} \left(|y|^2 \wedge 1\right)\nu(dy) < \infty.$$

Teorema 3.1.4 (Lévy–Khintchine) *$\mu \in \mathrm{M}_1\left(\mathbb{R}^d\right)$ je beskonačno deljivo ako postoji vektor $b \in \mathbb{R}^d$, simetrična pozitivno definitna matrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i Lévijeva mera ν na $\mathbb{R}^d - \{0\}$ tako da za svako $u \in \mathbb{R}^d$*

$$k_\mu(u) = \exp\left\{ i(b,u) - \frac{1}{2}(u, Au) + \int\limits_{\mathbb{R}^d - \{0\}} \left[e^{i(u,y)} - 1 - i(u,y)\chi_{\hat{B}}(y) \right] \nu(dy) \right\}, \qquad (3.3)$$

gde je $\hat{B} = B_1(0)$.

Obrnuto, svako preslikavanje oblika (3.3) je karakteristična funkcija beskonačno deljivih mera verovatnoće na $\mathbb{R}^d$.

Sada ćemo navesti Lévy-Khintchine formulu za Lévijev proces $X = \left(X(t), t \geq 0 \right)$:

$$\mathrm{E}\left(e^{i(u, X(t))} \right) = \exp\left(t \left\{ i(b,u) - \frac{1}{2}(u, Au) + \int_{\mathbb{R}^d - \{0\}} \left[e^{i(u,y)} - 1 - i(u,y)\chi_{\hat{B}}(y) \right] \nu(dy) \right\} \right) \quad (3.4)$$

za svako $t \geq 0,\ u \in \mathbb{R}^d,$ gde je (b, A, ν) karakteristika od $X(1)$.

Primeri Lévijevih procesa

Braunovo kretanje

Standardno Braunovo kretanje u $\mathbb{R}^d$ je Lévijev proces $B = \left(B(t), t \geq 0 \right)$ za koji važi

1. $B(t) \sim N(0, tI)$ za svako $t \geq 0$;
2. B ima neprekidne putanje;

Iz prve osobine sledi da ako je B standardno Braunovo kretanje onda je njegova karakteristična funkcija data sa

$$k_{B(t)}(u) = e^{\left(-\frac{1}{2}t|u|^2 \right)}$$

za svako $u \in \mathbb{R}^d, t \geq 0$.

Poasonov proces

Poasonov proces sa gustinom $\lambda > 0$ je Lévijev proces N uzimajući vrednosti u skupu $\mathbb{N} \bigcup \{0\}$ u kome svako $N(t) \sim \pi(\lambda t)$, tako da imamo da je

$$P\left(N(t) = n \right) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Složen Poasonov proces

Neka je $\left(Z(n), n \in \mathbb{N} \right)$ familija nezavisnih slučajnih promenljivih sa vrednostima u $\mathbb{R}^d$ i istim odstupanjem μ_Z, i neka je N Poasonov proces sa gustinom λ nezavisan od $Z(n)$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Složen Poasonov proces Y je definisan na sledeći način:

$$Y(t) = Z(1) + ... + Z\left(N(t) \right) \quad (3.5)$$

za svako $t \geq 0$, pri čemu važi $Y(t) \sim \pi(\lambda t, \mu_Z)$.

Lema 3.1.5 Složen Poasonov proces *Y* je Lévijev proces.

Y ima Lévijev symbol

$$\eta_Y(u) = \left[\int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i(u,y)} - 1\right) \lambda \mu_Z(dy)\right].$$

Složen Poasonov proces ima veliku ulogu i primenu u modelima koji se primenjuju za određivanje rizika osiguranja.

Pre nego što navedemo sledeći primer Lévijevih procesa definisaćemo stabilnu slučajnu promenljivu.

Definicija 3.1.6 Neka su X_1, X_2 nezavisne kopije od slučajne promenljive *X*. Kažemo da je slučajna promenljiva *X* stabilna ako za proizvoljne konstante $a, b > 0$ važi da $aX_1 + bX_2$ i $cX + d$ imaju iste raspodele, za neku konstantu $c > 0$ i proizvoljno *d*.

Stabilan Lévijev proces

Stabilan Lévijev proces je Lévijev proces *X* u kom svako $X(t)$ je stabilna slučajna promenljiva.

Lévijev simbol za stabilan Lévijev proces je dat sa

$$\eta(u) = -\sigma^\alpha |u|^\alpha$$

gde je $0 \leq \alpha \leq 2$ indeks stabilnosti i važi $\sigma > 0$.

Subordinatori

Subordinator je jednodimenzionalni neopadajući Lévijev proces. Ovakav proces se može shvatiti kao slučajan model koji se razvija tokom vremena, odnosno ako je $T = (T(t), t \geq 0)$ subordinator, imamo sledeće

$$T(t) \geq 0 \text{ za svako } t > 0,$$

i

$$T(t_1) \leq T(t_2) \text{ gde je } t_1 \leq t_2.$$

Teorema 3.1.7 *Ako je T subordinator, tada je Lévijev simbol oblika*

$$\eta(u) = ibu + \int_0^\infty \left(e^{iuy} - 1\right) \lambda(dy), \quad (3.6)$$

gde je $b \geq 0$ *a Lévijeva mera* λ *zadovoljava dodatni uslov*

$$\lambda(-\infty,0)=0 \;\; i \;\; \int_0^{\infty}(y\wedge 1)\lambda(dy)<\infty.$$

Obrnuto, svako preslikavanje $\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *oblika (3.6) je Lévijev simbol za subordinator T.*

Uređeni par (b,λ) nazivamo karakteristikama za subordinator T.

Primeri subordinatora

Poasonov proces

Poasonov proces je subordinator, što je očigledno. Uopšteno, složen Poasonov proces će biti subordinator ako i samo ako $Z(n)$ u jednačini (3.5) ima sve vrednosti u $\mathbb{R}^+$.

α *- stabilni subordinator*

Za $0<\alpha<1$ i $u\geq 0$

$$u^{\alpha}=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty}\left(1-e^{-ux}\right)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}.$$

Lévijev subordinator

$\frac{1}{2}-$stabilan subordinator ima gustinu datu Lévijevom raspodelom ($\mu=0$ i $\sigma=\frac{t^2}{2}$) sa

$$F_{T(t)}(s)=\left(\frac{t}{2\sqrt{\pi}}\right)s^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{t^2}{(4s)}},$$

za svako $s\geq 0$. Lévijev subordinator ima lepu interpretaciju verovatnoće kao vreme prvog odstupanje za jednodimenzionalno standardno Braunovo kretanje $B(t), t\geq 0$.

Preciznije,

$$T(t)=\inf\left\{s>0; B(s)=\frac{t}{2}\right\}.$$

Jedna od najvažnijih primena verovatnoće za subordinatore je takozvano "vreme promena". Neka je *X* proizvoljan Lévijev proces i neka je *T* subordinator definisan na istom prostoru verovatnoće kao i *X*, pri čemu su *X* i *T* nezavisni. Definisaćemo novi stohastički proces $Z=(Z(t), t\geq 0)$ na sledeći način

$$Z(t) = X(T(t)),$$

za svako $t \geq 0$, tako da za svako $\omega \in \Omega,\ Z(t)(\omega) = X(T(t)(\omega))(\omega)$.

Teorema 3.1.8 *Z je Lévijev proces.*

Konvoluciona semigrupa za meru verovatnoće

U ovom delu ćemo razmotriti važnu karakteristiku Lévijevih procesa.

Definicija 3.1.9 Kažemo da familija mera verovatnoće $(P_t, t \geq 0)$ na $\mathbb{R}^d$ slabo konvergira ka δ_0 ako

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) P_t(dy) = f(0)$$

za svako $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$.

Familija mera verovatnoće $(P_t, t \geq 0)$ gde je $P_0 = \delta_0$ će biti konvoluciona semigrupa ako je

$$P_{s+t} = P_s * P_t \text{ za sve } s, t \geq 0.$$

Ovakva semigrupa je slabo neprekidna ako slabo konvergira ka δ_0.

Modifikacija Lévijevog procesa

Neka su $X = (X(t), t \geq 0)$ i $Y = (Y(t), t \geq 0)$ stohastički procesi definisani na istom prostoru verovatnoće. Tada kažemo da je Y modifikacija od X ako za svako $t \geq 0,\ P(X(t) \neq Y(t)) = 0$. Odavde sledi da X i Y imaju iste konačno dimenzionalne raspodele.

Lema 3.1.10 Ako je *X* Lévijev proces i *Y* modifikacija od *X*, tada je *Y* Lévijev proces sa istim karakteristikama kao *X*.

Dokaz: (A) je očigledno. Da bismo pokazali da i (B) važi, fiksiraćemo $0 \leq s < t < \infty$ i neka je

$$N(s,t) = \{\omega \in \Omega; X(s)(\omega) = Y(s)(\omega) \text{ i } X(t)(\omega) = Y(t)(\omega)\}.$$

Sledi da je $P(N(s,t)) = 1$ pošto je

$$\begin{aligned} P\left(N(s,t)^C\right) &= \{\omega \in \Omega; X(s)(\omega) \neq Y(s)(t) \text{ ili } X(t)(\omega) \neq Y(t)(\omega)\} \\ &\leq P(X(s) \neq Y(s)) + P(X(t) \neq Y(t)) = 0 \end{aligned}$$

Da bismo pokazali da *Y* ima stacionarne priraštaje pretpostavićemo da $A \in \mathrm{B}(\mathbb{R}^d)$.

Tada je

$$
\begin{aligned}
&P\big(Y(t)-Y(s)\in A\big)\\
&=P\big(Y(t)-Y(s)\in A, N(s,t)\big)+P\Big(Y(t)-Y(s)\in A, N(s,t)^{C}\Big)\\
&=P\big(X(t)-X(s)\in A, N(s,t)\big)\\
&\le P\big(X(t)-X(s)\in A\big)\\
&=P\big(X(t-s)\in A\big)=P\big(Y(t-s)\in A\big).
\end{aligned}
$$

Slični argumenti se mogu koristiti da se pokaže da Y ima nezavisne priraštaje i da se dokaže (C).

Odavde se lako može uočiti da X i Y imaju iste karakteristične funkcije i takođe iste karakteristike.

□

Lokalno vreme

Lokalno vreme Lévijevog procesa je slučajno polje, koje za svako $x\in\mathbb{R}^d$ opisuje ukupno vreme koje proces provede u tački x u intervalu $[0,t]$. Preciznije, definisaćemo merljivo preslikavanje $L:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+\times\Omega\to\mathbb{R}^+$ sa

$$L(x,t)=\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t \chi_{\{|X(s)-x|<\varepsilon\}}ds,$$

i imamo formulu gustine zauzimanje oblasti

$$\int_0^t f\big(X(s)\big)ds=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)L(x,t)dx$$

za sve nenegativne $f\in B_b\left(\mathbb{R}^d\right)$. Iz ovoga dobijamo intuitivno shvatanje lokalnog vremena kao slučajnu raspodelu

$$L(x,t)=\int_0^t \delta\big(|x-X(s)|\big)ds,$$

gde je δ Dirakova delta funkcija.

Regularna varijacija i subeksponenti

Kao poslednju temu ovog poglavlja razmotrićemo važnu oblast u teoriji verovatnoće iz koje su i nastali Lévijevi procesi i stohastički integrali.

Pretpostavimo da je X realna slučajna promenljiva. Nas u stvari zanima asimptotsko ponašanje za $\bar{F}(x) = P\left(|X| > x\right)$ kada $x \to \infty$, pri čemu je $\lim_{x\to\infty} \bar{F}\left(x\right) = 0$. Međutim, postavlja se pitanje koliko je ova konvergencija $\lim_{x\to\infty} \bar{F}\left(x\right) = 0$ brza? Za Gausovu slučajnu promenljivu ovo konvergiranje ka nuli je eksponecijalno brzo, što je tipično za "lake repove". Sa druge strane, za stabilne slučajne promenljive opadanje ka nuli je sporije od polinomne brzine i ovo je karakteristično za takozvane "teške repove".

Da bismo generalizovali ponašanje "teških repova" za stabilne slučajne promenljive, uvodimo sledeće:

Fiksiraćemo $d \geq 0$ i neka je preslikavanje $g : \left[d, \infty\right] \to \left[0, \infty\right)$ merljiva funkcija. Tada kažemo da je g regularno varirajuća za stepen $\alpha \in \mathbb{R}$ ako je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g\left(cx\right)}{g\left(x\right)} = c^{\alpha}$$

za svako $c > 0$. Klasu funkcija koje regularno variraju za stepen $\alpha \in \mathbb{R}$ na $\mathbb{R}^{+}$ označićemo sa $\Re_{\alpha}$. Za elemente klase $\Re_0$ kažemo da su *sporo promenljivi*. Jedan od primera funkcije u $\Re_0$ je $x \to \log\left(1+x\right)$. Jasno, $g \in \Re_{\alpha}$ ako i samo ako postoji $I \in \Re_0$ takvo da je

$$g\left(x\right) = I\left(x\right)x^{\alpha}$$

za svako $x \in \mathbb{R}^{+}$.

U teoriji verovatnoće takođe se istražuju regularne varijacije za $\alpha < 0$ na $\bar{F}$ za nenegativnu slučajnu promenljivu X. U ovom slučaju pišemo da $X \in \Re_{-\alpha}$ za neko $\alpha > 0$ kad god $\bar{p}_X \in \Re_{-\alpha}$. Tipičan primer je Pareto raspodela sa parametrima $K, \beta > 0$ koji imaju gustinu $f\left(x\right) = \beta K^{\beta} / \left(K + x\right)^{1+\beta}$. Ovde imamo da je $\bar{F}\left(x\right) = \left(K / K + x\right)^{\beta}$ pri čemu je zadovoljeno da $\bar{F} \in \Re_{-\beta}$ za svako $K > 0$.

Da bismo stekli bolju sliku uvodimo drugu definiciju. Neka je μ mera verovatnoće definisana na $\mathbb{R}^{d}$ i F funkcija raspodele, takva da za svako $x \geq 0$, $F\left(x\right) = \mu\left(\left[0, x\right]\right)$. Kažemo da je μ subeksponencijalno ako je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F * F}\left(x\right)}{\bar{F}\left(x\right)} = 2. \qquad (3.7)$$

Ako je X slučajna promenljiva sa raspodelom μ, kaže se da je X subeksponencijalna ako je μ subeksponencijalno. U ovom slučaju, ako su X_1, X_2 nezavisne kopije od X, tada gornja jednačina postaje

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P\left(X_1+X_2>x\right)}{P\left(X>x\right)}=2.$$

Na prvi pogled ova definicija može delovati popriličnu nejasno.
Zato ćemo prvo označiti da je

$$\begin{aligned}P\left(\max\left\{X_1,X_2\right\}>x\right)&=P\left(\left\{X_1>x\right\}\cup\left\{X_2>x\right\}\right)\\&=P\left(X_1>x\right)+P\left(X_2>x\right)-P\left(X_1>x\right)P\left(X_2>x\right)\\&=2P\left(X>x\right)-P\left(X>x\right)^2\\&\sim 2P\left(X>x\right),\end{aligned}$$

tako da X je subeksponencijalno ako i samo ako je

$$P\left(X_1+X_2>x\right)\sim P\left(\max\left\{X_1,X_2\right\}>x\right). \quad (3.8)$$

U stvari μ je subeksponencijalno ako i samo ako je

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F^{*n}}\left(x\right)}{\overline{F}\left(x\right)}=n, \quad (3.9)$$

za neko $n\geq 2$.
Međutim, sledeći uslov je dovoljan za subeksponencijalnost

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F^{*2}}\left(x\right)}{\overline{F}\left(x\right)}\leq 2, \quad (3.10)$$

gde proširenje (3.8) na n slučajnih promenljivih (3.9) daje jasniji uvid u značaj verovatnoće za subeksponencijalne raspodele.
Ovde se mogu postaviti dva pitanja. Prvo, zašto se ove raspodele zovu subeksponencijalne i drugo, zašto se povezuje sa regularnim varijacijama? Odgovor na prvo pitanje se može dati na sledeći način: ako je μ subeksponencijalno tada za svako $\varepsilon>0$ imamo

$$\lim_{x\to\infty}e^{\varepsilon x}\overline{F}\left(x\right)=\infty,$$

odakle sledi da $\overline{F}\left(x\right)$ opada u nuli mnogo sporije nego bilo koji negativan eksponencijal, pa otuda sledi i prefiks “sub” u nazivu (subeksponencijal je ubedljivo manje od samo eksponencijal). Odgovor na drugo pitanje dobijamo iz sledeće teoreme.

Teorema 3.1.11 *Ako* $X\in\Re_{-\alpha}$ *za neko* $\alpha\geq 0$, *tada je X subeksponencijal.*

Dokaz: Neka su X_1 i X_2 nezavisne kopije od X. Za bilo koje dato $\varepsilon > 0$, i za svako $x > 0$ imamo

$$
\begin{aligned}
&P\left(X_1 + X_2 > x\right) \\
&\leq P\left(X_1 > (1-\varepsilon)x\right) + P\left(X_2 > (1-\varepsilon)x\right) + P\left(X_1 > \varepsilon x, X_2 > \varepsilon x\right) \\
&= 2P\left(X > (1-\varepsilon x)\right) + P\left(X > \varepsilon x\right)^2 .
\end{aligned}
$$

Takođe,

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{x\to\infty} \frac{P\left(X_1 + X_2 > x\right)}{P\left(X > x\right)} \\
&\leq 2\limsup_{x\to\infty} \frac{P\left(X > (1-\varepsilon)x\right)}{P\left(X > x\right)} + \limsup_{x\to\infty} \frac{P\left(X > \varepsilon x\right)^2}{P\left(X > x\right)^2} P\left(X > x\right) \\
&= 2\left(1-\varepsilon\right)^{-\alpha} + \varepsilon^{-2\alpha}.
\end{aligned}
$$

Sada ako iskoristimo ograničenje da $\varepsilon \to 0$ i primenimo (3.10) dobijamo željeni rezultat. □

4

Modelovanje indeksa gubitka

Neka je (Ω, F, P) kompletan prostor verovatnoće. Posmatraćemo bezrizično finansijsko tržište sa determinističkom kamatnom stopom r_t uz pretpostavku da je dozvoljena trgovina opcijama osiguranja od katastrofa koje su date indeksom gubitka.

Kod osnovnog indeksa gubitaka pravimo razliku između dva vremenska perioda, period gubitka $[0, T_1]$ i period razvoja $[T_1, T_2]$, $T_1 < T_2 < \infty$. Period gubitka je period u kome se katastrofa može dogoditi pri čemu se nastali gubici gomilaju i određuju vrednost indeksa. U periodu razvoja gubici nastali u periodu gubitka se ponovo procenjuju i utiču na prvobitnu vrednost indeksa.

Preciznije, indeks gubitka modelovaćemo pomoću stohastičkog procesa $L = (L_t)_{0 \le t \le T_2}$ na sledeći način:

i. Za $t \in [0, T_1]$,

$$L_t = \sum_{j=1}^{N_t} Y_j$$

je nehomogeni složen Poasonov procesa, gde je:

- N_t nehomogeni složen Poasonov proces sa determinističkom gustinom $\lambda(t) > 0$,
- Y_j, $j = 1, 2, \ldots,$ su pozitivne slučajne promenljive sa funkcijom raspodele G nezavisnom od N_t

ii. Za $t \in [T_1, T_2]$

$$L_t = L_{T_1 + u} = L_{T_1} Z_u, \; u = t - T_1 \in [0, T_2 - T_1]$$

gde je Z_u proces koji predstavlja faktor ponovne procene za koji važi:

- $Z_0 = 0,$
- $(L_t)_{t \le T_1}$ i $(Z_u)_{0 \le u \le T_2 - T_1}$ su nezavisne.

Pretpostavićemo da svi investitori na tržištu uzimaju u obzir ponašanje indeksa gubitka u prošlosti uključujući i njegovu sadašnju vrednost. Takođe, protok informacija je dat filtracijom $(F_t^0)_{0 \le t \le T_2}$ koja je generisana procesom L i to na sledeći način:

- $F_0^0 = \{\emptyset, \Omega\}$,
- $F_t^0 := \sigma\left(L_u, u \le t\right) = \sigma\left(\sum_{j=1}^{N_u} Y_j, u \le t\right)$, za $t \in [0, T_1]$,
- $F_t^0 := \sigma\left(L_u, u \le t\right) = \sigma\left(L_S, s \le T_1\right) \vee \sigma\left(Z_{u-T_1}, T_1 < u < t\right)$, za $(T_1, T_2]$,
- $F_{T_2}^0 \subseteq F$.

Pretpostavićemo da je filtracija $\left(F_t^0\right)_{0 \le t \le T_2}$ neprekidna sa desne strane i da je $\left(F_t\right)_{0 \le t \le T_2}$ kompletiranje filtracije $\left(F_t^0\right)_{0 \le t \le T_2}$ sa skupovima mere nula. Takođe, pretpostavićemo da je $\left(Z_t\right)_{0 \le t \le T_2 - T_1}$ oblika $Z_t = e^{X_t}$, gde je $X = \left(X_t\right)_{0 \le t \le T_2 - T_1}$ nehomogeni Lévijev proces takav da je $X_0 = 0$ pozitivni martingal u odnosu na filtraciju $\left(F_t^0\right)_{0 \le t \le T_2}$

Dalje, pretpostavićemo da je zadovoljen eksponencijalni uslov integrabilnosti.

1. Postoji $\varepsilon > 0$ takvo da za svako $u \in \left[-(1+\varepsilon), 1+\varepsilon\right]$ važi

$$E\left[e^{uX_t}\right] < \infty, \forall t \in [0, T].$$

Ovo je ekvivalentno sa zahtevom sledećeg uslova integrabilnosti za F_s :

2. Postoji $\varepsilon > 0$ takvo da za svako $u \in \left[-(1+\varepsilon), 1+\varepsilon\right]$

$$\int_0^T \int_{\{|x|>1\}} e^{ux} F_s(dx)\, ds < \infty.$$

Praktično, imamo da je $E\left[Z_t\right] < \infty$ za svako $t \in [0, T]$ na osnovu (1.).

Pored prethodna dva uslova, zahtevaćemo i treći uslov za karakteristike:

3.

$$0 = \int_0^t b_s ds + \frac{1}{2} \int_0^t c_s ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(e^x - 1 - h(x)\right) F_s(dx)\, ds,$$

na osnovu kog sledi da je $Z_t = E^{X_t}$ martingal.

Takođe, X_t možemo posmatrati kao

$$X_t = \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sqrt{c_s}\, dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x\left(\mu(ds, dx) - F_s(dx)\, ds\right),$$

gde je W_t standardno Barunovo kretanje a μ vrednost mere koja predstavlja skokove za X_t .

5

Cena osiguranja derivata za katastrofe

Mera cena

Na tržištu osiguranja od katastrofa indeksom L se ne trguje, jer je tržište nekompletno i postoji beskonačno mnogo ekvivalentnih mera martingala. Ovde ćemo pretpostaviti da je klasa za cenu derivata mere Q određena pomoću Radon-Nykodym na sledeći način:

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left\{\sum_{j=1}^{N_{T_1}} \beta\left(Y_j\right) - \int_0^{T_1} \lambda_s ds E\left[e^{\beta(Y_1)} - 1\right]\right\} \cdot$$
$$\cdot \exp\left\{\int_0^T \gamma(s) dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma^2(s) ds\right\} \cdot$$
$$\cdot \exp\left\{\int_0^T \ln\phi(s,x)\left(\mu(ds,dx) - F_s(dx)ds\right) - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\phi(s,x) - 1 - \ln\phi(s,x)\right) F_s(dx) ds\right\}$$

za neku Borel funkciju β takvu da je $E\left[e^{\beta(Y_1)}\right] < \infty$ i nenegativne funkcije $\phi(t,x)$ i $\gamma(t)$

takve da je $E\left[\frac{dQ}{dP}\right] = 1.$

Praktično, za meru Q proces $L_t, t \in [0,T_1]$ je opet nehomogen složen Poasonov proces sa gustinom

$$\lambda_t^Q = \lambda_t E\left[e^{\beta(Y_1)}\right]$$

i funkcijom raspodele za skokove

$$dG^Q(y) = \frac{e^{\beta(y)}}{E\left[e^{\beta(Y_1)}\right]} dG(y).$$

Takođe, za meru Q proces X je i dalje nehomogen Lévijev proces nezavisan od L_t, $t \in [0,T_1]$ sa karakteristikama $\left(b^Q, c^Q, F^Q\right)$ datim na sledeći način:

$$b_t^Q = b_t - \gamma_t \sqrt{c_t},$$
$$c_t^Q = c_t,$$
$$F_t^Q(dx) = k(t,x) F_t(dx).$$

Jedna od mogućih metoda za određivanje cena mere Q jeste podešavanje parametara β, ϕ i γ sa cenama posmatranog tržišta. Na primer, cene su prilagođene cenama portfolia osiguranja (na osnovu premija) i cenama derivata katastrofa.

Određivanje cena pomoću tehnike Furijeovih transformacija

Sada ćemo razmatrati Evropske derivate koji su dati indeksom gubitka sa dospećem T_2 i isplatom

$$h\left(L_{T_2}\right) > 0,$$

gde je $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ neprekidna funkcija isplata. Pošto smo pretpostavili da je kamatna stopa r deterministička, bez gubitaka opštosti cenu procesa derivata osiguranja možemo izraziti u diksontovanoj vrednosti tj. $r \equiv 0$. Neka je data bezrizična cena mere Q. Tada je cena procesa za opcije data sa

$$\begin{aligned}\pi_t^Q &= E^Q\left[h\left(L_{T_2}\right) | F_t\right] \\ &= E^Q\left[h\left(L_{T_1} Z_{T_2 - T_1}\right) | F_t\right] \\ &= E^Q\left[h\left(L_{T_1} e^{X_{T_2 - T_1}}\right) | F_t\right].\end{aligned}$$

Ako potraživanja predstavimo kao isplatu koja zavisi od dva faktora, cenu procesa tada možemo napisati kao

$$\pi_t^Q = E^Q\left[g\left(L_{T_1}, X_{T_2 - T_1}\right) | F_t\right], \qquad (5.1)$$

gde je $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ funkcija takva da je

$$g\left(x_1, x_2\right) = h\left(x_1 e^{x_2}\right) \text{ za svako } \left(x_1, x_2\right) \in \mathbb{R}^2. \qquad (5.2)$$

U nastavku ćemo izračunati očekivanu isplatu pomoću Furijeovih transformacija.

Zahtevaćemo da sledeći uslovi budu zadovoljeni:

i.

$$I_1 := \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\alpha x_1 - \beta x_2} g\left(x_1, x_2\right) dx_1 dx_2 < \infty \right\} \neq 0$$

ii.

$$I_2 := \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}^2} e^{\alpha x_1 + \beta x_2} G^Q_{\left(L_{T_1}, X_{T_2 - T_1}\right)}\left(dx_1, dx_2\right) < \infty \right\},$$

gde je $G^Q_{\left(L_{T_1}, X_{T_2-T_1}\right)}$ kumulativna funkcija raspodele za $\left(L_{T_1}, X_{T_2-T_1}\right)$ nad Q, i neka je $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$.

Kako L_{T_1} i $X_{T_2-T_1}$ ostaju nezavisne nad Q, sledi da je

$$I_2 = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \middle| E^Q\left[e^{\alpha L_{T_1}}\right] < \infty \text{ i } E^Q\left[e^{\beta X_{T_2-T_1}}\right] < \infty \right\}. \quad (5.\ 3)$$

Sada, funkcija isplata je oblika

$$f(x_1, x_2) = e^{-\alpha x_1 - \beta x_2} g(x_1, x_2) \text{ za } (\alpha, \beta) \in I_1 \cap I_2. \qquad (5.4)$$

Na osnovu prve pretpostavke imamo da

$$(iii) \qquad f(\cdot) \in L^1\left(\mathbb{R}^2\right)$$

za $(\alpha, \beta) \in I_1 \cap I_2$. Takođe, Furijeova transformacija

$$\hat{f}(u_1, u_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x_1 u_1 + x_2 u_2)} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2, \qquad (5.5)$$

je dobro definisana za svako $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

Na osnovu pretpostavke da $\hat{f}(\cdot) \in L^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ i primenom inverzne Furijeove transformacije dobijamo

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x_1 u_1 + x_2 u_2)} \hat{f}(u_1, u_2)\, du_1 du_2. \qquad (5.6)$$

Sada ako se vratimo u jednakost (5.1), dobijamo

$$\begin{aligned}
\pi_t^Q &= E^Q\left[g\left(L_{T_1}, X_{T_2-T_1}\right) \middle| F_t \right] = E^Q\left[e^{\alpha L_{T_1} + \beta X_{T_2-T_1}} f\left(L_{T_1}, X_{T_2-T_1}\right) \middle| F_t \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} E^Q\left[e^{\alpha L_{T_1} + \beta X_{T_2-T_1}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\left(u_1 L_{T_1} + u_2 X_{T_2-T_1}\right)} \hat{f}(u_1, u_2)\, du_1 du_2 \middle| F_t \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} E^Q\left[\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\left\{(u_1 + i\alpha) L_{T_1} + (u_2 + i\beta) X_{T_2-T_1}\right\}} \hat{f}(u_1, u_2)\, du_1 du_2 \middle| F_t \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} E^Q\left[e^{-i\left\{(u_1 + i\alpha) L_{T_1} + (u_2 + i\beta) X_{T_2-T_1}\right\}} \middle| F_t \right] \hat{f}(u_1, u_2)\, du_1 du_2 \qquad (5.7) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} E^Q\left[e^{-i(u_1 + i\alpha) L_{T_1}} \middle| F_t \right] E^{\mathbb{Q}}\left[e^{-i(u_2 + i\beta) X_{T_2-T_1}} \middle| F_t \right] \cdot \hat{f}(u_1, u_2)\, du_1 du_2,
\end{aligned}$$

pri čemu na jednakost (5.7) možemo da primenimo Fubinievu teoremu jer je uslov $\hat{f}(\cdot) \in L^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ zadovoljen. Takođe je i poslednja jednakost zadovoljena što proizilazi iz nezavisnosti L_{T_1} i $X_{T_2-T_1}$ i prve pretpostavke

$$I_1 := \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \middle| \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\alpha x_1 - \beta x_2} g(x_1, x_2) dx_1 dx_2 < \infty \right\} \neq 0.$$

Kako je L nehomogeni složen Poasonov proces nad T_1 a X nehomogeni Lévijev proces nezavisan od $L_t,\ t\in[0,T_1]$, možemo tačno odrediti uslovno matematičko očekivanje koristeći osobine karakteristične funkcije:

1. Ako je $t<T_1$ imamo

$$
\begin{aligned}
&E^Q\left[e^{-i(u_1+i\alpha)L_{T_1}}\,|F_t\right]\\
&=e^{-i(u_1+i\alpha)L_t}E^Q\left[e^{-i(u_1+i\alpha)\left(L_{T_1}-L_t\right)}\right]\\
&=e^{-i(u_1+i\alpha)L_t}\exp\left\{-\int_t^{T_1}\lambda_s^Q ds\int_0^\infty\left(1-e^{-i(u_1+i\alpha)x}\right)G^Q(dx)\right\}\\
&=e^{-\int_t^{T_1}\lambda_s^Q ds}e^{-i(u_1+i\alpha)L_t}\exp\left\{\int_t^{T_1}\lambda_s^Q ds\int_0^\infty e^{-i(u_1+i\alpha)x}G^Q(dx)\right\},
\end{aligned}
$$

i

$$
\begin{aligned}
&E^Q\left[e^{-i(u_2+i\beta)X_{T_2-T_1}}\,|F_t\right]=E^Q\left[e^{-i(u_2+i\beta)X_{T_2-T_1}}\right]\\
&=\exp\left\{\int_0^{T_2-T_1}\left(i(u_2+i\beta)b_s^Q-\frac{1}{2}c_s^Q(u_2+i\beta)^2\right)ds\right\}\\
&\cdot\exp\left\{\int_0^{T_2-T_1}\int_{\mathbb{R}}\left(e^{i(u_2+i\beta)x}-1-i(u_2+i\beta)xI_{\{|x|\le1\}}\right)F_s^Q(dx)ds\right\}.
\end{aligned}
$$

2. Ako $t\in[T_1,T_2]$,

$$
E^Q\left[e^{-i(u_1+i\alpha)L_{T_1}}\,|F_t\right]=e^{-i(u_1+i\alpha)L_{T_1}};
$$

i

$$
\begin{aligned}
&E^Q\left[e^{-i(u_2+i\beta)X_{T_2-T_1}}\,|F_t\right]\\
&=e^{-i(u_2+i\beta)X_{t-T_1}}E^Q\left[e^{-i(u_2+i\beta)(X_{T_2-T_1}-X_{t-T_1})}\right]\\
&=e^{-i(u_2+i\beta)X_{t-T_1}}\exp\left\{\int_{t-T_1}^{T_2-T_1}\left(i(u_2+i\beta)b_s^Q-\frac{1}{2}c_s^Q(u_2+i\beta)^2\right)ds\right\}\\
&\qquad\cdot\exp\left\{\int_{t-T_1}^{T_2-T_1}\int_{\mathbb{R}}\left(e^{i(u_2+i\beta)x}-1-i(u_2+i\beta)xI_{\{|x|\le1\}}\right)F_s^Q(dx)ds\right\}.
\end{aligned}
$$

Takođe, da bismo izračunali cenu procesa $\left(\pi_t^Q\right)_{t\in[0,T_2]}$ potrebno je da izračunamo Furijeovu transformaciju za zavisnu funkciju plaćanja f. Naš rezultat sumiraćemo u sledećoj teoremi.

Teorema 5.1.1 *Neka su zadovoljeni uslovi (i)-(iii). Cena procesa π_t^Q za opcije osiguranja od katastrofa date indeksom gubitka sa dospećem T_2 i isplatom $h\left(L_{T_2}\right)>0$ je data sa*

1. Za $t \in [0, T_1]$

$$\pi_t^Q = \frac{1}{2\pi} e^{-\int_t^{T_1} \lambda_s^Q ds} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(u_1, u_2) e^{-i(u_1 + i\alpha)L_t}$$
$$\exp\left\{ \int_t^{T_1} \lambda_s^Q ds \int_0^{\infty} e^{-i(u_1 + i\alpha)x} G^Q(dx) \right\}$$
$$\exp\left\{ \int_0^{T_2 - T_1} \left(i(u_2 + i\beta) b_s^Q - \frac{1}{2} c_s^Q (u_2 + i\beta)^2 \right) ds \right\}$$
$$\exp\left\{ \int_0^{T_2 - T_1} \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i(u_2 + i\beta)x} - 1 - i(u_2 + i\beta) x I_{\{|x| \le 1\}} \right) F_s^Q(dx) ds \right\} du_1 du_2,$$

i $t > T_1$

$$\pi_t^Q = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(u_1, u_2) e^{-i(u_1 + i\alpha)L_{T_1}} e^{-i(u_2 + i\beta)X_{t - T_1}}$$
$$\exp\left\{ \int_{t - T_1}^{T_2 - T_1} \left(i(u_2 + i\beta) b_s^Q - \frac{1}{2} c_s^Q (u_2 + i\beta)^2 \right) ds \right\}$$
$$\exp\left\{ \int_{t - T_1}^{T_2 - T_1} \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i(u_2 + i\beta)x} - 1 - i(u_2 + i\beta) x I_{\{|x| \le 1\}} \right) F_s^Q(dx) ds \right\} du_1 du_2$$

gde je f funkcija isplate data u (5.4) , $\hat{f}$ Furijeova transformacija data izrazom (5.5).

U ovom delu smo za model izabrali nehomogeni Lévijev proces Z_t. Ova grupa procesa je veoma bogata i fleksibilna za široki spektar modela kojima su opisane prirodne pojave a takođe je i analitički lako obradljiva.

6

Opcije

Iako se ne zna precizno kada se prvi ugovor ovog tipa pojavio, zna se da su Rimljani i Feničani koristili slične ugovore prilikom trgovanja. Takođe, postoje dokazi da je grčki matematičar i filozof Tales koristio ovakve ugovore da osigura nisku cenu maslina pre berbe. U Holandiji su se ovakvi ugovori koristili oko 1600. godine pri čemu im je cilj bio obezbeđivanje odgovarajuće cene lala. Trgovci lalama su koristili call opcije da osiguraju nisku cenu lala da bi mogli da zadovolje tražnju. U isto vreme, proizvođači lala su koristili put opcije da osiguraju odgovarajuću prodajnu cenu. U Americi opcije su se pojavile negde u isto vreme kada i akcije. U 19. veku, call i put opcije su bili ugovori između dve strane i njima se nije moglo trgovati na sekundarnom tržištu. Uslovi su zavisili od ugovora do ugovora, pa se broj ovakvih ugovora povećavao jako sporo.

Godine 1968. CBOT (Chicago Board of Trade) uvidevši mnoga neslaganja u ovim ugovorima i u cilju njihovog jačanja predložio je dve mere, da se standardizuju bitni uslovi u ugovorima kao što su strike cena, datum dospeća i da se stvori organizacija koja će biti posrednik i garant dobrog funkcionisanja tržišta opcija. Taj posrednik je danas poznat pod imenom Option Clearing Corporation. Godine 1973. osnovan je Chicago Board Options Exchange (CBOE). Da su predložene mere dale rezultate, govori i činjenica da je do kraja 1974. godine broj ovakvih ugovora bio oko 200 000 dnevno. Poređenja radi, do1968. godine broj ovakvih ugovora na godišnjem nivou nije prelazio 300 000. Takođe, godina 1973. je značajna i zbog toga što su se tada pojavili radovi Black i Scholesa koji su imali ogroman uticaj na povećanje broja ovih ugovora.

6.1 Osnovni tipovi opcija

Neki finansijski instrumenti imaju osobinu da njihova vrednost zavisi od vrednosti drugog finansijskog instrumenta. Prvi finansijski instrumenti se nazivaju *derivati*, a drugi *podloga* (eng. underlying) za derivat.

Generalno, opcije su ugovori koji daju pravo, ali ne i obavezu da se neka podloga kupi ili proda po unapred definisanoj ceni, u unapred definisanoj količini i na unapred definisan datum. Podloga mogu biti akcije, deonice, obveznice, roba i valute.

Postoje dva osnovna tipa opcija a to su *call* opcije i *put* opcije.

Definicija 6.1.1 *Call opcija* je ugovor koji daje pravo kupcu opcije (eng. buyer) da kupi određenu podlogu od onoga ko je napisao opciju (eng. writer, seller), na određen datum (koji se naziva datum dospeća), po unapred utvrđenoj ceni (koja se naziva strike cena ili cena izvršenja).

Definicija 6.1.2 *Put opcija* je ugovor koji daje pravo kupcu opcije da proda određenu podlogu, na određen datum, po unapred utvrđenoj ceni.

Prodavac opcije (eng. writer, seller) prima novac unapred, ali ima potencijalne obaveze kasnije. Datum dospeća ćemo obeležavati sa *T*, a strike cenu sa *K*. U zavisnosti od toga kada ih možemo izvršiti opcije se dele na *američke opcije* i *evropske opcije*. *Američke opcije* mogu biti izvršene u bilo kom trenutku od datuma kupovine do datuma dospeća. Za razliku od njih *evropske opcije* mogu biti izvršene samo na datum dospeća.

Napomena 6.1.3 Američke i evropske opcije nemaju veze sa područjem na kojem se trguje. Evropskim opcijama se trguje u Americi i obrnuto.

Evropske opcije je generalno lakše analizirati nego američke i neke osobine američkih opcija su izvedene baš iz evropskih opcija. Pored američkih i evropskih opcija postoje i drugi tipovi opcija.

Evropske opcije

Definicija 6.1.4 *Evropska call opcija* daje pravo njenom vlasniku da kupi podlogu na datum dospeća po strike ceni *K*.

Vlasnik ove opcije očekuje da će cena podloge rasti i biti veća od strike cene na datum dospeća. Sa druge strane pisac opcije očekuje da će cena podloge pasti ispod strike cene na datum dospeća.

Cenu podloge u trenutku *t* ćemo označavati sa $S(t)$ a na datum dospeća *T* sa $S(T)$.

Prihod vlasnika evropske call opcije je dat sa:

$$f(S,K)=\begin{cases} S(T)-K, & za \;\; S(T)>K \\ 0, & inače \end{cases}$$

Prihod pisca opcije, kada je $S(T) > K$, je dat sa:

$$f(S,K) = \begin{cases} K - S(T), & za \;\; S(T) > K \\ 0, & inače \end{cases}$$

Generalno, kada god je cena podloge veća od strike cene (na datum dospeća) call opciju ima smisla izvršiti.

Definicija 6.1.5 *Evropska put opcija* daje pravo njenom vlasniku da proda podlogu na datum dospeća po strike ceni *K*.

Vlasnik ove opcije očekuje da će cena podloge padati i biti niža od strike cene na datum dospeća. Sa druge strane, pisac opcije očekuje da će cena podloge biti iznad strike cene na datum dospeća.

Prihod vlasnika evropske put opcije je dat sa:

$$f(S,K) = \begin{cases} K - S(T), & za \; K > S(T) \\ 0, & inače \end{cases}$$

Prihod pisca opcije, kada je $K > S(T)$, je dat sa:

$$f(S,K) = \begin{cases} S(T) - K, & za \; K > S(T) \\ 0, & inače \end{cases}.$$

Američke opcije

Američke opcije su finansijski instrumenti (ugovori) koji kupcu opcije daju pravo, ali ne i obavezu, da kupi ili proda određenu podlogu u bilo kom trenutku pre datuma dospeća *T* za unapred određenu cenu.

Definicija 6.1.6 *Američka call opcija* daje pravo vlasniku call opcije, ali ne obavezu, da kupi određenu podlogu u bilo kom trenutku pre datuma dospeća *T* za unapred određenu strike cenu *K*.

Prihod vlasnika američke call opcije je dat sa:

$$f(S,K)=\begin{cases} S(t)-K, & ako\ je\ S(t)>K,\ t\le T \\ 0, & inače \end{cases}.$$

Američku call opciju ima smisla izvršiti samo kada je cena podloge veća od strike cene *K*.

Definicija 6.1.7 *Američka put opcija* daje pravo vlasniku put opcije, ali ne i obavezu, da proda određenu podlogu u bilo kom trenutku pre datuma dospeća *T*, za unapred određenu strike cenu *K*.

Prihod vlasnika američke put opcije je dat sa:

$$f(S,K)=\begin{cases} K-S(t), & ako\ je\ K>S(t),\ t\le T \\ 0, & inače \end{cases}.$$

Učesnici na tržištu

Opcije se primarno koriste za hedžing i špekulaciju (naravno i arbitraža je dobra ako ju je moguće ostvariti). Zbog toga se investitori, odnosno učesnici na tržištu opcija dele na-hedžere (eng. hedgers), špekulante (eng. speculators) i arbitražere (eng. arbitrageurs).

Hedžeri žele da smanje rizik svoje investicije pomoću druge investicije. Na primer, pretpostavimo da investitor trenutno poseduje 1000 akcija čija je trenutna cena 88$ po akciji. Ako dođe do većeg pada cene akcija u narednoj godini, investitor bi bio na većem gubitku. On zbog toga kupuje američku put opciju sa strike cenom od 88$ i rokom dospeća godinu dana. Neka je cena ovakvog ugovora 1.5$ po akciji. To znači da će investitor potrošiti 1 500$ da bi zaštitio investiciju od 88 000 $.

Za razliku od hedžera koji kupuju opcije da bi se zaštitili od neprijatnih pomeranja na tržištu, špekulanti žele da zauzmu poziciju na tržištu tako što se klade da li će cena podloge otići gore ili dole. Na primer, ako predviđaju da će cena podloge otići gore, kupuju call opciju pa pokušavaju da zarade kasnije.

Arbitražeri pokušavaju da ostvare profit tako što kupuju i prodaju na različitim tržištima. Najčešće su to London i Njujork, ali same mogućnosti arbitraže traju kratko.

6.2 Call, put i spread opcije za katastrofe

U ovom delu razmatraćemo opcije osiguranja za katastrofa. Opcije ovog tipa kojima se najčešće trguje na tržištu su *call, put* i *spread opcije*. Eksplicitnim računanjem Furijeove transformacije za isplate i korišćenjem teoreme 5.1.1 možemo dobiti formule za cene ovih opcija, što ćemo i pokazati.

Call opcije

Neka je funkcija isplate call opcije za katastrofe oblika

$$h_{call}(x) = (x - K)^{+} \qquad (6.1)$$

za neku strajk cenu $K > 0$. Tada odgovarajuća isplata na dvodimenzionalom skupu za funkciju $g(x_1, x_2) = h\left(x_1 e^{x_2}\right)$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ (kao što smo uveli u (5.2)) je

$$g_{call}(x_1, x_2) = \left(x_1 e^{x_2} - K\right)^{+} I_{\{x_1 > 0\}} = \left(x_1 e^{x_2} - K\right) I_{\left\{x_1 > 0,\ x_2 > \ln \frac{K}{x_1}\right\}}$$

a zavisna funkcija isplate je

$$\begin{aligned} f_{call}(x_1, x_2) &= e^{-\alpha x_1 - \beta x_2} g_{call}(x_1, x_2) \\ &= e^{-\alpha x_1 - \beta x_2} \left(x_1 e^{x_2} - K\right) I_{\left\{x_1 > 0,\ x_2 > \ln \frac{K}{x_1}\right\}} \end{aligned} \qquad (6.2)$$

što pripada prostoru $L^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ za svako $(\alpha, \beta) \in I_1 = (0, \infty) \times (1, \infty)$.

Za Furijeovu transformaciju $\tilde{f}_{call}$ dobijamo:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{call}(u_1,u_2) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x_1u_1+x_2u_2)} f_{call}(x_1,x_2)\,dx_1dx_2 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_{\ln\frac{K}{x_1}}^\infty e^{-(\alpha-iu_1)x_1-(\beta-iu_2)x_2}\left(x_1e^{x_2}-K\right)dx_2dx_1 \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^\infty x_1e^{-(\alpha-iu_1)x_1}\int_{\ln\frac{K}{x_1}}^\infty e^{-(\beta-1-iu_2)x_2}dx_2dx_1 - K\int_0^\infty e^{-(\alpha-iu_1)x_1}\int_{\ln\frac{K}{x_1}}^\infty e^{-(\beta-iu_2)x_2}dx_2dx_1\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{\beta-1-iu_2}\int_0^\infty x_1e^{-(\alpha-iu_1)x_1}e^{-(\beta-1-iu_2)\ln K/x_1}dx_1 - \frac{K}{\beta-iu_2}\int_0^\infty e^{-(\alpha-iu_1)x_1}e^{-(\beta-iu_2)\ln K/x_1}dx_1\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{(\beta-1-iu_2)K^{(\beta-1-iu_2)}}\int_0^\infty x_1^{\beta-iu_2}e^{-(\alpha-iu_1)x_1}dx_1 - \frac{1}{(\beta-iu_2)K^{(\beta-1-iu_2)}}\int_0^\infty x_1^{\beta-iu_2}e^{-(\alpha-iu_1)x_1}dx_1\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(\beta-1-iu_2)(\beta-iu_2)K^{(\beta-1-iu_2)}}\int_0^\infty x_1^{\beta-iu_2}e^{-(\alpha-iu_1)x_1}dx_1 \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(\beta-1-iu_2)(\beta-iu_2)(\alpha-iu_1)^{(\beta+1-iu_2)}K^{(\beta-1-iu_2)}}\Gamma(\beta+1-iu_2),
\end{aligned}$$

gde je $\Gamma(\cdot)$ Gamma funkcija.

Da bismo dokazali da funkcija isplate call opcija za katastrofe (6.1) zadovoljava uslove teoreme 5.1.1, treba pokazati da

$$\tilde{f}_{call}(u_1,u_2)\in L^1\left(\mathbb{R}^2\right). \qquad (6.3)$$

Odnosno, da bismo dokazali (6.3) dovoljno je da posmatramo asimptotsko ponašanje $\left|\tilde{f}_{call}(u_1,u_2)\right|$, kada $|u_1|,|u_2|\to\infty$.

Kako je

$$\lim_{|u_2|\to\infty}\left|\Gamma(\beta+1-iu_2)\right|e^{\frac{\pi}{2}|u_2|}|u_2|^{-\beta-\frac{1}{2}}=\sqrt{2\pi}$$

dobijamo

$$\left|\tilde{f}_{call}(u_1,u_2)\right| = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{K^{\beta-1}\left|e^{-iu_2\ln K}\right|}\cdot\frac{\left|\Gamma(\beta+1-iu_2)\right|\left|e^{iu_2\left(\ln|\alpha-iu_1|-i\arctan\frac{u_1}{\alpha}\right)}\right|}{\left|(\beta-1-iu_2)(\beta-iu_2)(\alpha-iu_1)^{(\beta+1)}\right|}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{K^{\beta-1}}\frac{\left|\Gamma(\beta+1-iu_2)\right|e^{u_2\arctan\frac{u_1}{\alpha}}}{\left|(\beta-1-iu_2)(\beta-iu_2)(\alpha-iu_1)^{(\beta+1)}\right|}\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{K^{\beta-1}}\frac{e^{-\frac{\pi}{2}|u_2|}|u_2|^{\beta-\frac{3}{2}}e^{u_2\arctan\frac{u_1}{\alpha}}}{|u_1|^{\beta+1}}, \qquad (6.4)$$

gde je

$$f_1(u_1,u_2) \sim f_2(u_1,u_2) :\Leftrightarrow \lim_{|u_1|,|u_2|\to\infty} \frac{|f_1(u_1,u_2)|}{|f_2(u_1,u_2)|} = 1$$

Sada ćemo razmotriti sledeće slučajeve:

1. Ako je $u_1u_2 < 0$, onda (6.4) zadovoljava

$$\left|\tilde{f}_{call}(u_1,u_2)\right| \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{K^{\beta-1}} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}|u_2|} |u_2|^{\beta-\frac{3}{2}} e^{-\left|u_2 \arctan\frac{u_1}{\alpha}\right|}}{|u_1|^{\beta+1}}$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{K^{\beta-1}} \frac{e^{-\pi|u_2|} |u_2|^{\beta-\frac{3}{2}}}{|u_1|^{\beta+1}}, \tag{6.5}$$

gde desna strana (6.5) pripada $L^1(\mathbb{R}^2)$.

2. Ako je $u_1u_2 > 0$ onda je (6.4) ekvivalentno sa

$$\left|\tilde{f}_{call}(u_1,u_2)\right| \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{K^{\beta-1}} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}|u_2|} |u_2|^{\beta-\frac{3}{2}} e^{|u_2|\arctan\frac{|u_1|}{\alpha}}}{|u_1|^{\beta+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{K^{\beta-1}} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}|u_2|} |u_2|^{\beta-\frac{3}{2}} e^{|u_2|\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{\alpha}{|u_1|}\right)}}{|u_1|^{\beta+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{K^{\beta-1}} \frac{|u_2|^{\beta-\frac{3}{2}} e^{-|u_2|\arctan\frac{\alpha}{|u_1|}}}{|u_1|^{\beta+1}}$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{K^{\beta-1}} \frac{|u_2|^{\beta-\frac{3}{2}} e^{-|u_2|\frac{\alpha}{|u_1|}}}{|u_1|^{\beta+1}}. \tag{6.6}$$

Kako

$$\int_0^\infty \frac{u_2^{\beta-\frac{3}{2}} e^{-u_2\frac{\alpha}{|u_1|}}}{|u_1|^{\beta+1}} du_2 = \alpha^{\frac{1}{2}-\beta}\Gamma\left(\beta-\frac{1}{2}\right)|u_1|^{-\frac{3}{2}}$$

pripada $L^1(\mathbb{R}^2)$, sledi da desna strana (6.6) pripada $L^1(\mathbb{R}^2)$ kad $|u_1|,|u_2| \to \infty$.

Možemo primeniti teoremu 5.1.1 i eksplicitno dobijamo cenu za call opciju.

Sada kada znamo cenu call opcije, cene put i spread opcije koje se odnose na osiguranje od katastrofa možemo svesti na cenu call opcije sa standardnim argumentima.

Put opcije

Neka je

$$h_{put}(x) = (K - x)^{+}$$

isplata put opcije osiguranja od katastrofa. Tada isplate put i call opcija sa strike cenom K se mogu prikazati sledećom formulom:

$$h_{put}(x) = h_{call}(x) + K - L_{T_2}.$$

Cenu $\pi^Q_{put}(t)$ put opcije možemo odrediti preko cene $\pi^Q_{call}(t)$ call opcije, i kroz sledeći *call-put paritet*

$$\begin{aligned}\pi^Q_{put}(t) &= \pi^Q_{call}(t) + K - E^Q\left[L_{T_2} \middle| F_t\right] \\ &= \pi^Q_{call} + K - E^Q\left[L_{T_1} Z_{T_2-T_1} \middle| F_t\right].\end{aligned}$$

Iz nezavisnosti $(L_t)_{t \le T_1}$ i $(Z_{T_1+u})_{u \le T_2-T_1}$, za uslovno matematičko očekivanje $E^Q\left[L_{T_1} Z_{T_2-T_1} \middle| F_t\right]$ dobijamo:

1. ako je $t \le T_1$

$$\begin{aligned}&E^Q\left[L_{T_1} Z_{T_2-T_1} \middle| F_t\right] \\ &= E^Q\left[L_{T_1} \middle| F_t\right] E^Q\left[Z_{T_2-T_1} \middle| F_t\right] \\ &= \left(L_t + E^Q\left[L_{T_1} - L_t\right]\right) E^Q\left[e^{X_{T_2-T_1}}\right] \\ &= \left(L_t + E^Q[Y_1] \int_t^{T_1} \lambda_s^Q ds\right) \cdot \exp\left\{\int_0^{T_2-T_1} \left(b_s^Q + \frac{1}{2} c_s^Q + \int_{\mathbb{R}} \left(e^x - 1 + x I_{\{|x| \le 1\}}\right) F_s^Q(dx)\right) ds\right\};\end{aligned}$$

2. ako je $t \in [T_1, T_2]$

$$\begin{aligned}&E^Q\left[L_{T_1} Z_{T_2-T_1} \middle| F_t\right] \\ &= E^Q\left[L_{T_1} e^{X_{T_2-T_1}} \middle| F_t\right] = L_{T_1} Z_{t-T_1} E^Q\left[\exp\left\{X_{T_2-T_1} - X_{t-T_1}\right\}\right] \\ &= L_{T_1} Z_{t-T_1} \cdot \exp\left\{\int_{t-T_1}^{T_2-T_1} \left(\left(b_s^Q + \frac{1}{2} c_s^Q + \int_{\mathbb{R}} \left(e^x - 1 + x I_{\{|x| \le 1\}}\right) F_s^Q(dx)\right) ds\right)\right\}.\end{aligned}$$

Call i put spread opcije

Call spread opcije su proširene call opcije koje omogućavaju kupovinu call opcije sa strajk cenom K_1 i zatim prodaju call opcije na isti datum dospeća ali sa strajk cenom $K_2 > K_1$. Odgovarajuća funkcija isplate na datum dospeća je oblika

$$\begin{aligned} h_{spread}(x) &= (x-K_1)^+ - (x-K_2)^+ \\ &= \begin{cases} 0, & ako \quad 0 \le x \le K_1; \\ x-K_1, & ako \quad K_1 < x \le K_2; \\ K_2-K_1, & ako \quad x > K_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Napomena 6.2.1 Iz (5.3) sledi da raspodela G^Q za broj potraživanja $Y_i,\ i=1,2,...$ zadovoljava

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{\alpha x} G^Q(dy) < \infty, \text{za neko } \alpha > 0. \qquad (6.7)$$

Tipični primeri raspodela koje zadovoljavaju gornju nejednakost (6.7) su eksponencijalna i Gamma raspodela. Važna klasa funkcija raspodela koja takođe zadovoljava (6.7), je klasa funkcija raspodela ekvivalentnih konvolucija $\Im(\alpha),\ \alpha > 0$, koje su pogodne za modelovanje broja potraživanja. Inverzna Gauss-ova raspodela je jedna od najvažnijih primera klase funkcija raspodela ekvivalentnih konvolucija.

Sa druge strane, raspodela G^Q sa teškim repom definisana u (6.7) nije potpuna jer smo izostavili uslov kada je $\alpha \le 0$.

7

Cene gubitaka sa teškim repom

Da bismo mogli da govorimo o gubicima teškog repa, tj. da bismo mogli da koristimo prigušeni parametar $\alpha = 0$ (5.3), pretpostavićemo da funkcija raspodele G^Q za Y_i, $i = 1, 2, \ldots$, pripada (ε, ∞) za neko $\varepsilon > 0$. Drugim rečima, pretpostavićemo da ako se katastrofa desi tada odgovarajući iznos gubitak veći je od proizvoljno malog $\varepsilon > 0$. Međutim, ako u obzir uzmemo činjenicu da PCS definišu katastrofu (veštačku ili prirodnu) kao pojedinačni događaj ili kao seriju povezanih događaja, što implicira osiguranje imovine na najmanje 25 miliona dolara, onda je ova pretpostavka očigledno neozbiljno ograničenje. Označimo

$$\left\{L_{T_1} > 0\right\} = \left\{L_{T_1} > \varepsilon\right\}, \qquad (7.1)$$

gde je L nehomogeni složen Poasonov proces nad T_1.

U ovom delu pokušaćemo da primenimo tehniku Furijeovih transformacija na cenu put opcije za katastrofe. Da bismo ovo uradili prvo ćemo uraditi sledeće transformacije. Cena procesa put opcija za katastrofe je data sa

$$\pi_t^Q = E^Q\left[\left(K - L_{T_1} e^{X_{T_2 - T_1}}\right)^+ \middle| F_t\right]. \qquad (7.2)$$

Kako je L nehomogeni složen Poasonov procesa po T_1 nad Q, gornji izraz (7.2) možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}\pi_t^Q &= E^Q\left[\left(K - L_{T_1} e^{X_{T_2 - T_1}}\right)^+ I_{\{N_{T_1} = 0\}} \middle| F_t\right] \\ &+ E^Q\left[\left(K - L_{T_1} e^{X_{T_2 - T_1}}\right)^+ I_{\{N_{T_1} > 0\}} \middle| F_t\right] \\ &= KQ\left(N_{T_1} = 0 \middle| F_t\right) + E^Q\left[\left(K - L_{T_1} e^{X_{T_2 - T_1}}\right)^+ I_{\{L_{T_1} > 0\}} \middle| F_t\right],\end{aligned} \qquad (7.3)$$

pri čemu smo koristili da je $L_{T_1} I_{\{N_{T_1} = 0\}} = 0.$

Neka je $\bar{L}_{T_1} := L_{T_1} - \varepsilon.$ Tada iz (7.1) sledi

$$\left\{L_{T_1} > 0\right\} = \left\{L_{T_1} > \varepsilon\right\} = \left\{\bar{L}_{T_1} + \varepsilon\right\} = \left\{\bar{L}_{T_1} > 0\right\}.$$

Dobijamo

$$
\begin{aligned}
&E^{Q}\left[\left(K-L_{T_1}e^{X_{T_2-T_1}}\right)^{+} I_{\{L_{T_1}>0\}}\,|F_t\right] \\
&=E^{Q}\left[\left(K-\left(\bar{L}_{T_1}+\varepsilon\right)e^{X_{T_2-T_1}}\right)^{+} I_{\{\bar{L}_{T_1}>0\}}\,|F_t\right]. \qquad (7.4)
\end{aligned}
$$

Definišimo sada funkciju isplate kao

$$
g\left(x_1,x_2\right)=\left(K-\left(x_1+\varepsilon\right)e^{x_2}\right)^{+} I_{\{x_1>0\}}.
$$

Da bismo mogli da primenimo Furijeovu metodu iz teoreme 5.1.1, funkciju isplate $g\left(x_1,x_2\right)$ proširićemo iz $\mathbb{R}_{+}\times\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}^2$ na sledeći način

$$
\bar{g}\left(x_1,x_2\right)=\left(K-\left(|x_1|+\varepsilon\right)e^{x}\right)^{+}.
$$

Tada imamo

$$
\begin{aligned}
E^{Q}\left[\bar{g}\left(\bar{L}_{T_1},X_{T_2-T_1}\right)|F_t\right]&=E^{Q}\left[\left(K-\left(\bar{L}_{T_1}+\varepsilon\right)e^{X_{T_2-T_1}}\right)^{+} I_{\{\bar{L}_{T_1}>0\}}\,|F_t\right] \\
&+E^{Q}\left[\left(K-\left(|\bar{L}_{T_1}|+\varepsilon\right)e^{X_{T_2-T_1}}\right)^{+} I_{\{\bar{L}_{T_1}\le 0\}}\,|F_t\right]. \qquad (7.5)
\end{aligned}
$$

Kako je $\left\{\bar{L}_{T_1}\le 0\right\}=\left\{L_{T_1}=0\right\}=\left\{\bar{L}_{T_1}=-\varepsilon\right\}$, drugi član sa desne strane gornje jednakosti (7.5) je

$$
\begin{aligned}
&E^{Q}\left[\left(K-\left(|\bar{L}_{T_1}|+\varepsilon\right)e^{X_{T_2-T_1}}\right)^{+} I_{\{\bar{L}_{T_1}|F_t>0\}}\,|F_t\right] \\
&=E^{Q}\left[\left(K-2\varepsilon e^{X_{T_2-T_1}}\right)^{+} I_{\{\bar{L}_{T_1}=-\varepsilon\}}\,|F_t\right] \\
&=E^{Q}\left[\left(K-2\varepsilon e^{X_{T_2-T_1}}\right)^{+}|F_t\right]Q\left(\bar{L}_{T_1}=-\varepsilon|F_t\right) \qquad (7.6) \\
&=E^{Q}\left[\left(K-2\varepsilon e^{X_{T_2-T_1}}\right)^{+}|F_t\right]Q\left(L_{T_1}=0|F_t\right) \\
&=E^{Q}\left[\left(K-2\varepsilon e^{X_{T_2-T_1}}\right)^{+}|F_t\right]Q\left(N_{T_1}=0|F_t\right).
\end{aligned}
$$

Zajedno, jednačine (7.3)-(7.6) nas dovode do sledećeg izraza za cenu procesa put opcija.

Teorema 7.1.1 *Cena procesa put opcija za katastrofe je data sa*

$$
\pi_t^{Q}=KP_t^{0}+P_t^{1}P_t^{0}+P_t^{2}
$$

gde je

$$
P_t^{0}=e^{-\int_t^{T_1}\lambda^{\mathbb{Q}}(s)ds} I_{\{N_t=0\}},
$$

$$P_t^1 = E^Q\left[\left(K - 2\varepsilon e^{X_{T_2 - T_1}}\right)^+ |F_t\right],$$

$$P_t^2 = E^Q\left[\left(K - \left(\left|\bar{L}_{T_1}\right| + \varepsilon\right) e^{X_{T_2 - T_1}}\right)^+ |F_t\right].$$

Dokaz: Na osnovu datih jednačina (7.3)-(7.6) lako možemo potvrditi izraz za P^0. Pošto je N_t nehomogeni Poasonov proces sa determinističkom gustinom $\lambda^Q(t) > 0$ nad Q, imamo

$$\begin{aligned} Q\left(N_{T_1} = 0 | F_t\right) &= Q\left(\left(N_{T_1} - N_t\right) + N_t = 0 | F_t\right) \\ &= Q\left(\left(N_{T_1} - N_t\right) + n = 0 | F_t\right) | n = N_t \\ &= e^{-\int_t^{T_1} \lambda^Q(s)ds} I_{\{N_t = 0\}}. \end{aligned}$$

Označićemo da je P_t^1 cena procesa put opcije na jednodimenzionalnom prostoru, koja je data eksponencijalnim Lévijevim procesom. Pomoću metode Furijeovih transformacija možemo dobiti cenu procesa put opcije, odnosno primenom iste u jednodimenzionalnom prostoru isplata data sa

$$f_2(x_2) := \left(K - 2\varepsilon e^{x_2}\right)^+ e^{\beta x_2} \text{ za } \beta > 1,$$

ima Furijeovu trasformaciju

$$\begin{aligned} \hat{f}_2(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln\frac{K}{2e}} e^{iux_2} e^{\beta x_2} \left(K - 2\varepsilon e^{x_2}\right) dx_2 \\ &= \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{K}{2\varepsilon}\right)^{\beta + iu} \frac{1}{(\beta + iu)(\beta + 1 + iu)} \in L^1(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Da bismo izračunali poslednji član P_t^2 za cenu procesa π_t^Q možemo iskoristiti teoremu 5.1.1 sa parametrom prigušivanja $\alpha = 0$. Prvo treba proveriti da li aksiome (A1)-(A3) važe. Razmotrićemo zavisnu funkciju

$$f_1(x_1, x_2) := e^{\beta x_2} \bar{g}(x_1, x_2) = e^{\beta x_2}\left(K - \left(|x_1| + \varepsilon\right) e^{x_2}\right)^+ \text{ za } \beta > 1.$$

Kako $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ imamo $(0, -\beta) \in I_1$ za svako $\beta > 1$. Takođe pretpostavka (A1) je zadovoljena za $\beta > 1$ i $\alpha = 0$. Pretpostavićemo da je $E^Q\left[e^{\beta X_{T_2 - T_1}}\right] < \infty$ za neko $\beta > 1$. Tada iz (5.3), imamo $(0, \beta) \in I_2 \cap I_1$. Na ovaj način je i (A2) takođe zadovoljeno.

Primedba: Primetimo da sada možemo dopustiti raspodelu gubitka sa teškim repom, jer nam više nije potrebna zavisna x_1, pošto je $\alpha = 0$.

Da bismo dokazali aksiomu (A3) razmotrićemo Furijeovu transformaciju za f_1:

$$\hat{f}_1(u_1,u_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{i(u_1x_1+u_2x_2)} f_1(x_1,x_2)\,dx_1dx_2$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{i(u_1x_1+u_2x_2)}e^{\beta x_2}\left(K-\left(|x_1|+\varepsilon\right)e^{x_2}\right)I_{\left\{|x_1|\le Ke^{-x_2}-\varepsilon,\,x_2\le \ln\frac{K}{e}\right\}}dx_1dx_2$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\ln\frac{K}{e}}\int_{-Ke^{-x_2}+\varepsilon}^{Ke^{-x_2}-\varepsilon} e^{i(x_1u_1+x_2u_2)}e^{\beta x_2}\left(K-\left(|x_1|+\varepsilon\right)e^{x_2}\right)dx_1dx_2$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\ln\frac{K}{\varepsilon}} e^{iu_2x_2}e^{(\beta+1)x_2}\,\frac{1-\cos u_1\left(Ke^{-x_2}-\varepsilon\right)}{u_1^2}dx_2.$$

Lema 7.1.2 *Postoji* $C>0$ *takvo da je*

$$\left|\hat{f}_1(u_1,u_2)\right|\left(1+u_2^2|u_1|^{\beta-1}+u_1^2+u_2^2\right)\le C \text{ za svako } u_1,u_2\in\mathbb{R}. \qquad (7.7)$$

Dokaz:

Lemu 7.1.2 ćemo dokazati u četiri koraka.

1. Pošto $f_1\in L^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, postoji $0<C_1<\infty$ takvo da je

$$\left|\hat{f}(x_1,x_2)\right|\le C_1 \text{ za svako } u_1,u_2\in\mathbb{R}.$$

2. Tada imamo

$$\left|\hat{f}_1(u_1,u_2)\right|u_1^2\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\ln\frac{K}{\varepsilon}}2e^{(\beta+1)x_2}dx_2=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\beta+1}\left(\frac{K}{\varepsilon}\right)^{\beta+1}=:C_2<\infty.$$

3. Parcijalnom integracijom dobijamo

$$\left|\hat{f}_1(u_1,u_2)\right|u_2^2=\frac{1}{2\pi u_1^2}\left|\int_{-\infty}^{\ln\frac{K}{\varepsilon}}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(e^{iu_2x_2}\right)\cdot e^{(\beta+1)x_2}\left(1-\cos u_1\left(Ke^{-x_2}-\varepsilon\right)\right)dx_2\right|$$

$$=\frac{1}{2\pi u_1^2}\left|\int_{-\infty}^{\ln\frac{K}{\varepsilon}}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(e^{iu_2x_2}\right)\cdot e^{(\beta+1)x_2}\left(\left(\beta+1\right)\left(1-\cos u_1\left(Ke^{-x_2}-\varepsilon\right)\right)-\sin u_1\left(Ke^{-x_2}-\varepsilon\right)u_1Ke^{-x_2}\right)dx_2\right|$$

$$=\frac{1}{2\pi u_1^2}\cdot\left|\int_{-\infty}^{\ln\frac{K}{\varepsilon}}e^{iu_2x_2}\left\{(\beta+1)^2e^{(\beta+1)x_2}\left(1-\cos u_1\left(Ke^{-x_2}-\varepsilon\right)\right)-2(\beta+1)e^{\beta x_2}u_1K\sin u_1\left(Ke^{-x_2}-\varepsilon\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+e^{\beta x_2}u_1K\left(\sin u_1\left(Ke^{-x_2}-\varepsilon\right)+u_1Ke^{-x_2}\cos u_1\left(Ke^{-x_2}-\varepsilon\right)\right)\right\}dx_2\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi u_1^2}\int_{-\infty}^{\ln\frac{K}{\varepsilon}}\Big|(\beta+1)^2 e^{(\beta+1)x_2}\left(1-\cos u_1\left(Ke^{-x_2}-\varepsilon\right)\right)$$

$$-(2\beta+1)e^{\beta x_2}K\sin u_1\left(Ke^{-x_2}-\varepsilon\right)+u_1^2K^2e^{(\beta-1)x_2}\cos u_1\left(Ke^{-x_2}-\varepsilon\right)\Big|dx_2$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\ln\frac{K}{\varepsilon}}\left((\beta+1)^2 e^{(\beta+1)x_2}\frac{u_1^2\left(Ke^{-x_2}-\varepsilon\right)^2}{2u_1^2}+(2\beta+1)e^{\beta x_2}\left|\frac{\sin u_1\left(Ke^{-x_2}-\varepsilon\right)}{u_1}\right|+K^2e^{(\beta-1)x_2}\left|\cos u_1\left(Ke^{-x_2}-\varepsilon\right)\right|\right)dx_2$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\ln\frac{K}{\varepsilon}}\left((\beta+1)^2 e^{(\beta+1)x_2}\frac{K^2e^{-2x_2}+\varepsilon^2}{2}+(2\beta+1)e^{\beta x_2}\left|Ke^{-x_2}-\varepsilon\right|+K^2e^{(\beta-1)x_2}\right)dx_2=:C_3<\infty.$$

4. Dalje razmatramo $\left|\hat{f}_1(u_1,u_2)\right|u_2^2|u_1|^{1-\beta}$. Pošto za $0<|u_1|<1$ imamo

$$\left|\hat{f}_1(u_1,u_2)\right|u_2^2|u_1|^{1-\beta}\leq\left|\hat{f}_1(u_1,u_2)\right|u_2^2\leq C_3,$$

možemo pretpostaviti da je $|u_1|>1$. Kao gore dobijamo

$$\left|\hat{f}_1(u_1,u_2)\right|u_2^2|u_1|^{1-\beta}\leq\frac{|u_1|^{1-\beta}}{2\pi u_1^2}\int_{-\infty}^{\ln\frac{K}{\varepsilon}}\Big|(\beta+1)^2e^{(\beta+1)x_2}\cdot$$

$$\left(1-\cos u_1\left(Ke^{-x_2}-\varepsilon\right)\right)-(2\beta+1)e^{\beta x_2}u_1K\sin u_1\left(Ke^{-x_2}-\varepsilon\right)$$

$$+u_1^2K^2e^{(\beta-1)x_2}\cos u_1\left(Ke^{-x_2}-\varepsilon\right)\Big|dx_2=:G(u_1).$$

Označićemo da je $G(-u_1)=G(u_1)$ tako da je dovoljno da pokažemo da je $G(u_1)$ ograničen za $u_1>0$. Ako je $s:=u_1\left(Ke^{-x_2}-\varepsilon\right)$ tada $G(u_1)$ možemo ponovo zapisati kada je $u_1>0$ kao

$$G(u_1)=\frac{u_1^{-1-\beta}}{2\pi}\int_0^{\infty}\Bigg|(\beta+1)^2\left(\frac{Ku_1}{u_1\varepsilon+s}\right)^{\beta+1}(1-\cos s)-(2\beta+1)u_1K\left(\frac{Ku_1}{u_1\varepsilon+s}\right)^{\beta}\sin s$$

$$+u_1^2K^2\left(\frac{Ku_1}{u_1\varepsilon+s}\right)^{\beta-1}\cos s\Bigg|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\Bigg|(\beta+1)^2\left(\frac{K}{u_1\varepsilon+s}\right)^{\beta+1}(1-\cos s)$$

$$-(2\beta+1)K\left(\frac{K}{u_1\varepsilon+s}\right)^{\beta}\sin s+K^2\left(\frac{K}{u_1\varepsilon+s}\right)^{\beta-1}\cos s\Bigg|\frac{ds}{u_1\varepsilon+s}$$

$$<\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left(2(\beta+1)^2\left(\frac{K}{\varepsilon+s}\right)^{\beta+1}+(2\beta+1)K\left(\frac{K}{\varepsilon+s}\right)^{\beta}+K^2\left(\frac{K}{\varepsilon+s}\right)^{\beta-1}\right)\frac{ds}{\varepsilon+s}$$

$$=\frac{K^{\beta+1}}{2\pi}\left(\frac{2(\beta+1)}{\varepsilon^{\beta+1}}+\frac{2\beta+1}{\beta\varepsilon^{\beta}}+\frac{1}{(\beta-1)\varepsilon^{\beta-1}}\right)=:C_4<\infty.$$

Sada izraz (7.7) dobijamo kao $C := \sum_{i=1}^{4} C_i$. □

Posledica 7.1.3 Furijeova transformacija $\hat{f}_1$ pripada prostoru $L^1(\mathbb{R}^2)$.

Dokaz: Iz leme 7.1.2 imamo

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| \hat{f}_1(u_1, u_2) \right| du_1 du_2 \leq C \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1 + u_2^2 \left(1 + |u_1|^{\beta - 1}\right) + u_1^2} du_2 du_1$$

$$= 2\pi C \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\left(1 + u_1^2\right)\left(1 + u_1^{\beta - 1}\right)}} du_1 < \infty,$$

pošto je $\beta > 1$. □

Zaključak

Značaj matematike u savremenom društvu, u kom veliki problem predstavljaju finansijski gubici nastali kao posledica prirodnih katastrofa, svakim danom je sve veći. Zahvaljujući postojanju i daljem usavršavanju različitih matematičkih modela kao i njihovoj primeni, gubici ovog tipa se mogu predvideti. U ovom radu je upravo prikazano na koji način se pomoću stohastičkih procesa i Furijeovih transformacija mogu vrednovati opcije polisa osiguranja za katastrofe. Naime, posmatrane su opcije osiguranja za katastrofe koje su date indeksom gubitka, uz pretpostavku da indeks gubitaka prolazi kroz dva vremenska perioda, period gubitaka i period događaja. Tokom perioda gubitaka $\left[0,T_1\right]$ indeks broji događaje katastrofe koji se mogu desiti, a tokom perioda događaja $\left[T_1,T_2\right]$, štete katastrofe koje su se desile u periodu gubitaka se ponovo ocenjuju i nastavljaju da utiču na indeks. Zatim je prikazano na koji način se indeks gubitaka može modelovati pomoću stohastičkog procesa $L=\left(L_t\right)_{0\le t\le T_2}$, u zavisnosti da li indeks prolazi kroz perioda događaja ili perioda gubitaka. Dalje u radu, pokazali smo na koji način se primenom tehnike Furijeovih transformacija mogu odrediti cene procesa derivata koji su dati indeksom gubitaka, što je i sumirano u teoremi 5.1.1, koja se ujedno izdvaja i kao najvažnija teorema ovog rada. Takođe, poseban osvrt je napravljen na call, put i spread opcije osiguranja za katastrofe, pri čemu je za svaku od njih pojedinačno prikazana funkcija isplate. Kao poslednja tema ovog rada, ali ne manje bitna, je predstavljen problem određivanja cene procesa gubitaka sa teškim repom.

Iako gore prikazani rezultati ne odgovaraju stvarnosti u potpunosti, jer su pojedini faktori poput arbitraže isključeni, ovakvi i slični modeli predstavljaju veliki značaj za nauku i civilizaciju podstičući na dalja usavršavanja matematičkih modela ovakvog tipa.

Dodatak

Normalna raspodela $N\left(m,\varepsilon\right)$

Slučajna promenljiva X ima Normalnu raspodelu sa parametrima m i ε ako je njena funkcija gustine oblika

$$\varphi\left(x\right)=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(x-m\right)^2}{2\varepsilon^2}},x\in\mathbb{R},$$

a funkcija raspodele

$$F\left(x\right)=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{\left(t-m\right)^2}{2\varepsilon^2}}dt.$$

Poasonova raspodela $P\left(\lambda\right)$

Slučajna promenljiva X ima Poasonovu raspodelu ako je skup vrednosti $\mathbb{R}_X=\left\{0,1,2,...,n,...\right\}$ i

$$p\left(x_k\right)=p\left(k\right)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,2,...$$

Poasonova raspodela predstavlja realan model za mnoge slučajne fenomene kao što su broj saobraćajnih nesreća u nekom period, broj telefonskih poziva u jedinici vremena i sl.

Gamma raspodela $\Gamma\left(k,\theta\right)$

Slučajna promenljiva X ima Gamma raspodelu sa parametrima k i θ ako je njena funkcija gustine oblika

$$f\left(x;k,\theta\right)=\frac{1}{\theta^k}\frac{1}{\Gamma\left(k\right)}x^{k-1}e^{-\frac{x}{\theta}}$$

za $x,k,\theta>0$.

Pareto raspodela

Slučajna promenljiva X ima Pareto raspodelu sa parametrom α ako je njena funkcija gustine oblika

$$f_X\left(x\right)=\begin{cases}\alpha\dfrac{x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}}, & x\geq x_m\\ 0, & x\leq x_m\end{cases}$$

i funkcija raspodele

$$F(x) = 1 - \begin{cases} \left(\dfrac{x_m}{x}\right)^{\alpha} & x \geq x_m \\ 1 & x < x_m \end{cases};$$

Dirakova* δ *funkcija

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases},$$

i

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1.$$

***Hevisajdova funkcija* $H(x)$**

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Literatura

[1] Carr P., Madan D., *Option valuation using the fast Fourier transform., J.Comp. Finance, 2(4),* 61–73, (1999).

[2] Christensen C.V., *A new model for pricing catastrophe insurance derivatives. CAF Working Paper Series No. 28.,* (1999).

[3] Jacod J. and Shiryaev A.N., *Limit theorems for stochastic processes. Springer,* Berlin, (2003).

[4] Kallsen J., *Optimal portfolios for exponential Levy processes. Math. Meth. Oper. Res. 51, 357-374,* (2003).

[5] Kluge W., *Time-inhomogeneous Levy processes in interest rate and credit risk models. Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades,* Albert-Ludwing- Universitat Freiburg, (2005).

[6] Konigsberger K., *Analysis 2. Springer-Lehrbuch,* Berlin, (1993).

[7] Moller M., *Pricing PCS-Options with the Use of Esscher-Transforms. Afir Colloquium Nurnberg, Oct.1-3,* (1996).

[8] Mürmann A., *Pricing Catastrophe Insurance Derivatives, Financial Markets Group Discussion Paper No. 400,* (2001).

[9] Mürmann A., *Actuarially Consistent Valuation of Catastrophe Derivatives,* Working paper, (2003).

[10] Mürmann A., *Market Price of Insurance Risk Implied by Catastrophe Derivatives,* (2006).

[11] Applebaum D., *Levy Processes and Stochastic Calculus, University of Sheffield,* (2004).

[12] Pilipović S., Seleši D., *Teorija mera, skripte,* Univerzitet u Novom Sadu (2007).

[13] Stojaković M., *Verovatnoća, statistika i slučajni procesi,* Univerzitet u Novom Sadu (2007).

[14] Nedeljkov M., *Parcijalne diferencijalne jednačine,* Univerzitet u Novom Sadu (2004).

[15] http://eng.wikipedia.org

[16] www.google.rs

Biografija

Jasna Mitrović je rođena u Subotici, 08. juna 1984. godine. Završila je osnovnu školu "Ivan Goran Kovačić" u Subotici kao nosilac Vukove diplome, a potom kao odličan učenik i gimnaziju "Svetozar Marković" u Subotici, prirodno matematički smer. Nakon završene srednje škole, 2003. godine, upisuje studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer matematika finansija, koje završava u maju 2008. godine, odbranom diplomskog rada iz verovatnoće i statistike pod nazivom "Modeli rizika". Godinu dana kasnije, 2009. godine, upisuje master studije na istom fakultetu, smer primenjena matematika. U septembru 2012. godine polaže poslednji ispit predviđen nastavnim planom i programom.

UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TP

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Jasna Mitrović

AU

Mentor: Dr. Dora Seleši

MN

Naslov rada: Vrednovanje opcija polisa osiguranja za katastrofe

NR

Jezik publikacije: srpski

JP

Jezik izvoda: s/e

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2013.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ
Mesto i adresa: Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
MA
Fizički opis rada:
FOR
Naučna oblast: Matematika finansija
NO
Naučna disciplina: Aktuarska matematika
ND
Ključne reči: Furijeove transformacije, indeks gubitaka, Lévijevi procesi, Poasonov proces, prirodne katastrofe
PO
UDK
Čuva se: Biblioteka departmana za matematiku i informatiku, Prirodno matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
ČU
Važna napomena: Nema
VN
Izvod (IZ): U radu je obrađen indeks gubitaka, odnosno PCS opcije koje su date ovim indeksom koji predstavlja osiguranje imovine od gubitaka u slučaju prirodnih katastrofa. Prikazan je jedan od načina na koji se indeks gubitaka može modelovati preko stohastičkih procesa. Takođe, razmatran je problem cena Evropskih opcija koje su date indeksom gubitaka i eksplicitno su izračunate cene za tipove opcija kojima se najčešće trguje na tržištu.
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 06.10.2011.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Presednik: dr Danijela Rajter Ćirić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor: dr Dora Seleši, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Sanja Konjik, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph documentation
DT
Type of record: Textual printed material
TR
Contents code: Master thesis
CC
Author: Jasna Mitrović
AU
Mentor: Dora Seleši Ph.D.
MN
Title: Pricing of catastrophe insurance options
TI
Language of text: Serbian
LT
Language of abstract: en/s
LT
Country of publication: R Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2013

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića

PP

Physical description:

PD

Scientific field: Mathematics Finance

SF

Scientific disclipine: Actuarial Mathematics

SD

Subject Key words: Index of loss, stochastic processes, Lévy processes, natural disaster, Poison processes

SKW

UC

Holding date: Library of the Department of Mathematics and Computer Sciences, Facult of-Natural Sciences, Trg Dositeja Obradovića, Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract: This paper deals with the index of loss actually the options given by this index that represents the insurance of property from the loss in case of any natural disaster. One of the ways of modelling of this loss index through the stochastic processes is also shown here. What is also considered here is the problem of prices of European options given by this loss index; the prices were also calculated explicitly for those types of options which are mostly present in the market.

AB

Accepted on Scientific board on: 06.10.2011.

AS

Defended:

DE

Thesis Defend board:

DB

President: Danijela Rajter Ćirić Ph.D., Professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Novi Sad
Mentor: Dora Seleši Ph.D., Associate Professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Novi Sad, mentor
Member: Sanja Konjik Ph.D., Assistant Professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Novi Sad