UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

OPERATORI AGREGACIJE I NJIHOVA KOMPARACIJA KROZ PRIMERE

– MASTER RAD –

Mentor:
Prof. dr Ivana Štajner – Papuga

Student:
Jasmina Dulić 469m/10

Novi Sad, 2015.

Sadržaj

1.Predgovor

Agregacija i fuzija informacije koje za cilj imaju dobijanje novih, zbirnih informacija prikladnijih za dalju obradu, od velikog su značaja u mnogim oblastima kao što su teorija odlučivanja, obrade slika, prepoznavanje oblika, itd. Može se smatrati da agregacija omogućava istovremenu upotrebu različitih delova informacije (prikupljenih iz nekoliko izvora) kako bi se došlo do zaključka, pa samim tim i do optimalne odluke. Razvijeno je više pristupa problemu agregacije. Svi pristupi su zasnovani na nekom numeričkom operatoru agregacije. Drugim rečima, postoji potreba agregacije numeričkih vrednosti i tada numerička agregacija preuzima osnovnu ulogu.

Uopšteno, operatori agregacije su matematički objekti koji imaju funkciju da preslikaju niz brojeva u jedinstveni reprezentativan broj. Insistira se na matematičkom aspektu agregacije pošto se bavimo agregacijom realnih brojeva, a ne fuzijom informacija na višem nivou. Neophodno je da se napomene da bilo koji proces agregacije ili fuzije omogućava obradu koja u osnovi ima numeričku agregaciju. Drugim rečima, matematički operatori agregacije su ključ ove vrste procesa.

Ovaj master rad je podeljen u tri povezane celine. U prvom delu data je osnovna definicija matematičkog operatora agregacije. Kroz teoreme i definicije (date u [1],[2],[6],[9]), navedene su i objašnjene osobine koje nisu u sklopu definicije, ali koje se zbog svojih svojstava vrlo često zahtevaju pri radu sa operatorima agregacije.

U drugom delu dat je pregled najčešće korišćenih matematičkih operatora agregacije. Opisane su njihove glavne osobine i karakteristike. Predstavićemo i neke značajnije posebne slučajeve. Prvo su predstavljeni osnovni operatori agregacije, opisani u [1]: aritmetička sredina, ponderisana sredina, medijana, (ponderisani) minimum i (ponderisani) maksimum. Zatim je predstavljena kvazi-aritmetička sredina (videti [2]), veoma značajna grupa operatora zasnovana na transformacijama osnovne aritmetičke sredine. Dalje je predstavljen uređeni ponderisani operator usrednjavanja (*eng. OWA - ordered weighted averaging operators*) uključujući i neke posebne slučajeve ([1],[2],[10]). Zatim se dolazi do diskretnih fazi integrala: Choquet-ovog i Sugeno-ovog integral navedenih u [2],[3],[4],[11]. Ovi integrali, koji se mogu posmatrati kao operatori agregacije, imaju široku primenu. Nakon toga, predstavljene su t-norme i t-konorme, predstavljene u [1],[2],[5]. Ovi operatori “ne daju” srednju vrednost, ali modeluju presek i uniju (respektivno) fazi skupova. I na kraju drugog dela predstavljeni su kompenzacioni operatori i uninorme ([1],[2]).

U trećem delu rada data je poređenje najčešće korišćenih operatora agregacije kroz primere (videti [2],[7],[8]).

***

Ovom prilikom želela bih da se zahvalim svom mentor, dr Ivani Štajner – Papuga, na svim sugestijama, pomoći i razumevanju tokom izrade ovog master rada. Takođe, zahvalila bih se članovima komisije, dr Arpadu Takač i dr Tatjani Došenović.

Veliku zahvalnost dugujem porodici za podršku i razumevanje tokom celog školavanja.

Novi Sad, 2015. *Jasmina Dulić*

2. Definicija i osobine matematičkog operatora agregacije

Problem agregacije se sastoji od toga da agregacionu *n*-torku objekata, koji pripadaju datom skupu, preslika u jedan objekat iz istog skupa. U slučaju matematičkog operatora agregacije to je skup realnih brojeva. Operator agregacije je jednostavna funkcija koja dodeljuje realan broj y svakoj *n*-torki $(x_1, \dots, x_n)$ realnih brojeva:

$$y = A(x_1, \dots, x_n)$$

Operator agregacije se uvodi jer se prilikom agregacije podataka u aplikacijama svakoj n-torki elemenata dodeljuje jedinstven broj. U ovom delu su prezentovane definicije i osobine navedene u [1],[2],[6]. Sledi definicija operatora agregacije uz odgovarajuće uslove.

Definicija 2.1 [1] Operator agregacije je funkcija $A: \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[0,1]^n \to [0,1]$ takva da je:

(i) $A(x) = x$ za sve $x \in [0,1]$;

(ii) $A(0, \dots, 0) = 0$ i $A(1, \dots, 1) = 1$;

(iii) $A(x_1, \dots, x_n) \leq A(y_1, \dots, y_n)$ ako je $(x_1, \dots, x_n) \leq (y_1, \dots, y_n)$.

Ovi uslovi se ponavaljaju u svim definicijama operatora agregacije. Osim ovih osnovnih, postoje i druge osobine. Sada ćemo predstaviti osobine koje možemo očekivati od operatora agregacije.

Ali ćemo pre toga definisati i funkciju agregacije opisane u [2]. Neprazan realan interval (ograničen ili neograničen) označava će se u radu sa $\mathbb{I}$.

Definicija 2.2 [2] Funkcija agregacije na $\mathbb{I}^n$ je funkcija $A^{(n)}: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ koja je neopadajuća i ispunjava granične uslove

$$\inf_{x\in\mathbb{I}^n} A^{(n)}(x) = \inf \mathbb{I} \text{ i } \sup_{x\in\mathbb{I}^n} A^{(n)}(x) = \sup \mathbb{I}.$$

Funkcija agregacije se može proširiti kako bi se dobila proširena funkcija agregacije. Proširena funkcija na $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n$ preslikava

$$F: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}.$$

Operator agregacije je ustavari proširena funkcija agregacije na datom intervalu pod uslovom da je $A(x) = x$ za $x \in [0,1]$.

Prirodan broj *n* predstavlja broj promenljivih. Neka je u daljem radu sa $[n]$ označen skup $\{1, \dots, n\}$.

2.1 Granični uslovi

Operator agregacije treba da ispunjava :

$$A(0,\dots,0) = 0 \qquad (1)$$

$$A(1,\dots,1) = 1 \qquad (2)$$

Uslov (1) znači da ako se posmatra samo potpuno loš, lažni ili nezadovoljavajući kriterijum, ukupna agregacija mora takođe biti potpuno loša, lažna ili nezadovoljavajuća. Uslov (2) kaže da ako se posmatraju samo pravi i potpuno zadovoljavajući kriterijumi, tada ukupna agregacija mora biti potpuno tačna ili zadovoljavajuća. Ova osobina je osnovna u definisanju operatora agregacije.

Ova osobina se može proširiti. Uslovi funkcije agregacije mogu biti sledeći:

$$A(x,0) = A(1,0)\cdot x \text{ za svako } x \in [0,1] \qquad (3)$$

$$A(x,1) = \big(1 - A(1,0)\big)\cdot x + A(1,0) \text{ za svako } x \in [0,1] \qquad (4)$$

Možemo primetiti da je vrednost $A(x,0)$ ponderisana aritmetička sredina za x i 0. Isto tako, vrednost $A(x,1)$ je ponderisana aritmetička vrednost za x i 1. Ova dva uslova ograničavaju više operatora agregacije. Zapravo, (1) i (2) su specijalni slučajevi (3) i (4), respektivno.

2.2 Monotonost

U ovom delu razmotrićemo sledeća svojstva monotonosti (opisanih u [2]): neopadajuća monotonost, strogo rastuća monotonost, jednoglasna rastuća monotonost.

Definicija 2.3 [2] Funkcija $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je neopadajuća (za svaki argument) ako je, za svako $x, x' \in \mathbb{I}^n$,

$$x \le x' \Rightarrow F(x) \le F(x').$$

Neopadajuća funkcija predstavlja nenegativan odgovor na svako povećanje argumenta. Drugim rečima, povećanje svake ulazne vrednosti ne može da smanji izlaznu vrednost.

Podsetimo se da je po definiciji, neopadajuća monotonost osnovna osobina koju dele svi operatori agregacije (pogledati definiciju 2.1.)

Definicija 2.4 [2] Funkcija $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je strogo rastuća (za svaki argument) ako je, za svako $x, x' \in \mathbb{I}^n$,

$$x \le x' \; i \; x \ne x' \Rightarrow F(x) \le F(x').$$

Dakle, funkcija je strogo rastuća ako je neopadajuća i ako predstavlja pozitivnu reakciju na proizvoljno povećanje od najmanje jedne ulazne vrednosti. Primećujemo da strogo rastuća monotonost predstavlja neopadajuću monotonost.

Definicija 2.5 [2] Funkcija $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je osetljiva ako, za proizvoljni indeks $i \in [n]$ i proizvoljni realni broj $\lambda \neq 0$, imamo

$$F(x) \neq F(x + \lambda 1_{\{i\}}).$$

Iz predhodne dve definicije možemo izvesti sledeći zaključak:

Tvrđenje 2.6 [2] Neopadajuća funkcija $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je strogo rastuća ako i samo ako je osetljiva.

Jednoglasna rastuća funkcija, takođe poznata kao zajednička funkcija rastuće monotonosti, je neopadajuća funkcija koja predstavlja pozitivan odgovor kad su sve ulazne vrednosti strogo rastuće.

Definicija 2.7 [2] Funkcija $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je jednoglasno rastuća ako je neopadajuća i ako je, za proizvoljno $x, x' \in \mathbb{I}^n$,

$$x_i < x_i', \forall \in [n] \Rightarrow F(x) < F(x').$$

Jasno, strogo rastuća monotonost omogućava jednoglasnu rastuću monotonost. Na primer, aritmetička sredina *AM* je strogo rastuća,pa je otuda i osetljiva i jednoglasno rastuća. Funkcije *Min* i *Max* su jednoglasno rastuće, ali ne i strogo rastuće. Proizvod $\prod$ je jednoglasno rastući na $[0,1]^n$. Međutim, ako se 0 nađe među inputima, osetljivost kod proizvoda je narušena. Ograničena suma $S_L(x) = min(\sum_{i=1}^{n} x_i, 1)$ na $[0,1]^n$ je neopadajuća, ali ne i jednoglasno rastuća.

2.3 Neprekidnost

Neprekidnost je važna osobina operatora agregacije koja je prikazana na osnovu [2].

Definicija 2.8 [2] $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je neprekidna funkcija ako je

$$\lim_{\substack{x \to x^* \\ x \in \mathbb{I}^n}} F(x) = F(x^*), x^* \in \mathbb{I}^n.$$

Osobina neprekidnosti u suštini znači da bilo kakve promene u argumentima (moguće manje greške) ne bi trebale da dovedu do velikih promena u agregacionim vrednostima (output greške).

Za neopadajuće funkcije, neprekidnost može biti drugačije okarakterisana, što i sledeće tvrđenje pokazuje.

Tvrđenje 2.9 [2] Za neopadajuću funkciju $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) F je neprekidna,

(ii) F je neprekidna za svaku promenljivu, odnosno, za proizvoljno $x \in \mathbb{I}^n$ i proizvoljno $i \in [n]$ unarna funkcija $u \longmapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, u, x_{i+1}, \dots, x_n)$ je neprekidna.

(iii) za svako $x, y \in \mathbb{I}^n$ pri čemu je $x \leq y$ i svako $c \in [F(x)F(y)]$ postoji $z \in \mathbb{I}^n$ pri čemu je $x \leq y \leq z$, tako da je $F(z) = c$.

Dokaz. Iz (i) sledi (ii) trivijalno.

Iz (ii) sledi (i) Neka je $x^* \in \mathbb{I}^n$ fiksno, $\varepsilon > 0$ i neka je $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathbb{I}^n$ koji konvergira ka x^*. Tada možemo napraviti nizove $\left(a^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ i $\left(b^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ u $\mathbb{I}^n$ koji konvergiraju ka x^* i tako da je $a^{(k)} < a^{(k+1)}, b^{(k)} < b^{(k+1)}$ i $a^{(k)} < x^{(k)} < b^{(k)}$

pri čemu je $k \in \mathbb{N}$.

Neprekidnost od F za *i*-tu promenljivu znači da postoji $K_i \in \mathbb{N}$, tako da je, za svako $k \geq K_i$,

$$F(x^*) - \varepsilon \leq F\left(\left(a_i^{K_i}\right)_{\{i\}} x^*\right) \leq F\left(\left(x_i^{(k)}\right)_{\{i\}} x^*\right)$$

$$\leq F\left(\left(b_i^{K_i}\right)_{\{i\}} x^*\right) \leq F(x^*) + \varepsilon.$$

Iz toga sledi da za svako $k \geq K \coloneqq \max_{i\in[n]} K_i$ imamo $F(x^*) - n\varepsilon \leq F\left(x^{(k)}\right) \leq F(x^*) + n\varepsilon$ i otuda je *F* neprekidno.

Iz (i) sledi (iii) Poznato je da neprekidne unarne funkcije imaju osobinu srednje vrednosti (nezavisno od toga da li su opadajuće ili ne). Sada, za proizvoljno $x, y \in \mathbb{I}^n$ tako da je $x \leq y$ i $x \neq y$ (ovo je jedini netrivijalni slučaj), možemo definisati unarnu funkciju $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ na sledeći način:

$$f(t) = F\big((1-t)x + ty\big).$$

Ova funkcija je neprekidna i za svako $c \in [F(x)F(y)] = [f(0), f(1)]$ postoji neko $t_0 \in [0,1]$ tako da je $f(t_0) = c$. Tada postoji $z = (1-t_0)x + t_0 y$ pri čemu je $x \leq y \leq z$ tako da je $F(z) = c$.

Iz (iii) sledi (ii). Kada bi se fiksirale sve promenljive funkcije *F* osim jedne promenljive, iz osobine srednje vrednosti bi sledila sirjektivnost funkcije *F* kao funkcije jedne slobodne promenljive, uzimajući za kodomen najmanji interval koji sadrži prihvatljive vrednosti. Sirjektivnost je zbog neopadajuće monotonosti ekvivalentna neprekidnosti od *F* u slobodnoj promenljivoj. ■

Neprekidnost je topološka osobina realnih funkcija. Kao što je već pomenuto, neprekidnost funkcije *F* sprečava da imamo velike greške izlaznih vrednosti usled malih greški ulaznih vrednosti. Uopšteno za neprekidne funkcije ne postoji određen odnos između greški izlaznih vrednosti i ulaznih vrednosti. Da bismo izbegli ovaj problem, predloženo je nekoliko vrsta jačih oblika neprekidnosti. Prvo, posmatramo uniformnu neprekidnost. Zatim posmatramo i apsolutnu neprekidnost, koja je u bliskoj vezi sa integracijom i diferencijacijom. Možda najpoznatiji jači oblik neprekidnosti je osobina Lipšicove neprekidnosti (ili kraće Lipšicova osobina) koja opisuje odnos između greški izlaznih i ulaznih vrednosti.

Kao što ćemo videti u nastavku, sve ove osobine mogu se urediti na sledeći način. Svaka Lipšicova funkcija je apsolutna neprekidnost. Svaka apsolutno neprekidna funkcija je uniformna

neprekidnost. Svaka uniformno neprekidna funkcija je neprekidna. Svaka neprekidna funkcija ima osobinu srednje vrednosti.

Definicija 2.10 [2] Neka je $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ norma i neka je $\mathcal{D} \in \mathbb{I}^n$. Funkcija $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je uniformno neprekidna na $\mathcal{D}$ (u odnosu na $\|\cdot\|$) ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$ kada $\|x - y\| < \delta$ i $x, y \in \mathcal{D}$.

Poznato je da je uniformna neprekidna funkcija neprekidna, dok obrnuto ne važi (na primer $F(x) = x^2$ u $\mathbb{R}$). Međutim, obe osobine se poklapaju za funkcije u posebnim domenima kao što su zatvoreni i ograničeni intervali.

Tvrđenje 2.11 [2] Funkcija $F: [a, b]^n \to \mathbb{R}$ je uniformna neprekidna na $[a, b]^n$ ako i samo ako je neprekidna na $[a, b]^n$.

Dokaz. Predpostavimo da je F neprekidno na $[a, b]^n$, ali nije uniformno neprekidno. Tada postoji $\varepsilon > 0$ tako da za svako $k \in \mathbb{N}$ postoji $x^{(k)}, y^{(k)} \in [a, b]^n$ koji zadovoljavaju $\left\|x^{(k)} - y^{(k)}\right\| \leq \frac{1}{k}$ i $\left|F\left(x^{(k)}\right) - F\left(y^{(k)}\right)\right| > \varepsilon$.

Od niza $x^{(k)}$, može se uzeti podniz $x^{(k_m)}$ koji konvergira ka granici $x^* \in [a, b]^n$. Tada podniz $y^{(k_m)}$ takođe konvergira ka x^* jer $[a, b]^n$

$$\left\|y^{(k_m)} - x^*\right\| \leq \left\|y^{(k_m)} - x^{(k_m)}\right\| + \left\|x^{(k_m)} - x^*\right\|.$$

Dakle, neprekidnost $F\left(x^{(k_m)}\right) - F\left(y^{(k_m)}\right)$ konvergira ka $F(x^*) - F(x^*) = 0$. Dolazi se do kontradikacije, jer

$$\left|F\left(x^{(k_m)}\right) - F\left(y^{(k_m)}\right)\right| > \varepsilon \qquad \blacksquare$$

Pre nego što spomenemo definiciju apsolutne vrednosti, prvo ćemo se podsetiti pojma varijacije za unarne funkcije.

Definicija 2.12 [2] Neka je $f: \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ funkcija i neka je $\mathcal{D}$ podskup iz $\mathbb{R}$. Varijacija od f na $\mathcal{D}$, u oznaci $Var_{\mathcal{D}}(f)$, definiše se na sledeći način: ako je $\mathcal{D} \cap \mathbb{I} = \emptyset$ tada je $Var_{\mathcal{D}}(f) = 0$. U suprotnom, $Var_{\mathcal{D}}(f)$, je dato sa

$$sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |f(a_i) - f(a_{i-1})| : a_0, \dots, a_n \in \mathcal{D} \cap \mathbb{I}, a_0 \leq \cdots \leq a_n\right\},$$

gde supremum prolazi kroz konačan broj familija $\{a_0, \dots, a_n\}$ za $n \in \mathbb{N}$. Ako je $Var_{\mathcal{D}}(f)$ konačan, kažemo da je f ograničena varijacija na $\mathcal{D}$. Jedna od osnovnih osobina ograničene varijacije je sadržana u sledećoj teoremi.

Teorema 2.13 [2] Neka je $f: \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ funkcija ograničene permutacije. Tada je f diferencijabilno skoro svuda u $\mathbb{I}$, i f' (stavljamo $f' = 0$ na svim mestima gde izvod f ne postoji) je integral u $\mathbb{I}$,

$$\int_{\mathbb{I}} |f'(t)| dt \leq Var_{\mathbb{I}}(f).$$

Definicija 2.14 [2] Kažemo da je unarna funkcija $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ apsolutno neprekidna ako, za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za bilo koji uređen sistem neopadajućih intervala $(a_i, b_i) \subset (a, b), i = 1, \dots, n$ za koje je

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$$

nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n} (f(b_i) - f(a_i)) < \varepsilon$$

važi.

Svaka apsolutno neprekidna funkcija na zatvorenom intervalu je neprekidna na ovom intervalu. Zaista, uzevši u obzir samo jedan proizvoljan, ali fiksni podinterval (x, y) u (a, b) pri čemu je $|x - y| < \delta$, dobijamo

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Tvrđenje 2.15 [2] Apsolutno neprekidna funkcija $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ je granična varijacija na $[a, b]$.

Dokaz. Neka je dato $\varepsilon > 0$. Za proizvoljnu, ali fiksiranu podelu $\mathcal{D}$ intervala $[a, b]$, mogu se dodavanjem novih intervala podele, grupisati svi podintervali $\mathcal{D}'$, polazeći od leve granice a ka desnoj b, tako da je dužina svih podintervala ekvivalentna δ iz definicije 2.14. Maksimalan broj takvih podintervala je

$$C := \left\lfloor \frac{2(b-a)}{\delta} \right\rfloor + 1.$$

Pošto je f apsolutna neprekidnost, imamo da je $\sum |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ na svakoj podgrupi podintervala, što implicira

$$\sum_{\mathcal{D}'} |f(b_i) - f(a_i)| < C_\varepsilon$$

Takođe

$$\sum_{\mathcal{D}} |f(b_i) - f(a_i)| < C_\varepsilon. \blacksquare$$

Dajemo primer neprekidne funkcije, koja nije ograničena varijacija, pa samim tim , na osnovu tvrđenja 2.15, nije ni apsolutna neprekidnost.

Primer 2.16 [2] Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{\pi}{2x}, ako\ je\ x \in (0,1] \\ 0, ako\ je\ x = 0 \end{cases}$$

neprekidna je na $[0,1]$ (za dato $\varepsilon > 0$ imamo da $0 < |x| < \delta = \varepsilon$ implicira $\left|x\cos\frac{\pi}{2x}\right| < |x| < \varepsilon$), ali za svaki podinterval intervala $[0,1]$:

$$0 < \frac{1}{2i} < \frac{1}{2i-1} < \cdots < \frac{1}{2} < 1$$

za $i \in \mathbb{N}$ ispunjeno je

$$Var_{[0,1]}(f) = \frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1.$$

Kada $i \to \infty$ tada $Var_{[0,1]}(f) \to \infty$, odnosno f nije ograničena varijacija.

Osnovna svojstva apsolutno neprekidnih funkcija su sadržana u sledeća 3 tvrđenja.

Tvrđenje 2.17 [2] Neka je $\mathbb{I} = [a, b]$.

(i) Apsolutno neprekidna funkcija na $\mathbb{I}$ je uniformna neprekidna,
(ii) Ako je $f: \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ apsolutno neprekidna funkcija, tada je ona ograničena varijacija na $\mathbb{I}$, tako da je diferencijabilna gotovo svugde na $\mathbb{I}$ i nejgov izvod je integrabilan na $\mathbb{I}$,
(iii) Ako su $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ apsolutno neprekidne tada je $f + g$ i cf za svako $c \in \mathbb{R}$,
(iv) Ako su $f, g: \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ apsolutno neprekidne, tada je fg,
(v) Ako su $g: \mathbb{I} \to [c, d]$ i $f: [c, d] \to \mathbb{R}$ apsolutno neprekidne, i g je neopadajuća, tada je kompozicija $f \circ g: \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ apsolutno neprekidna.

Teorema 2.18 [2] Neka je $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) Postoji integrabilna funkcija realnih vrednosti $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ tako da je

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt, \qquad x \in [a, b],$$

(ii) $\int_a^x f'(t)dt$ postoji i jednak je $f(x) - f(a)$ za svako $x \in [a, b]$,
(iii) f je apsolutno neprekidno.

Tvrđenje 2.19 [2] Neka je $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija koja je diferencijabilna na $]a, b[$. Ako je f' integrabilan na $[a, b]$, tada je f apsolutno neprekidno i

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, dt.$$

Osobina neprekidnost može se pojačati pomoću Lipšicovog uslova.

Definicija 2.20 [2] Neka je $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ norma. Ako funkcija $f: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ zadovoljava nejednakost

$$|F(x) - F(y)| \leq c\|x - y\| \qquad x, y \in \mathbb{I}^n$$

za konstantu $c \in (0, +\infty)$, tada kažemo da F ispunjava Lipšicov uslov ili da je Lipšicova. Preciznije, bilo koja funkcija $f: \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava uslov (od malopre) je c-Lipšicova.

c- Lipšicov uslov ima zanimljivu interpretaciju kada se primenjuje u agregaciji. On omogućava procenu greške izlazne vrednosti u poređenju sa greškama ulaznih vrednosti.

$$|F(x) - F(y)| \leq c\varepsilon$$

svaki put kada je $\|x - y\| \leq \varepsilon$ za $\varepsilon > 0$.

U svim slučajevima kada je $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$, Lipšicova osobina za unarne funkcije implicira apsolutnu neprekidnost. Međutim, obrnuto ne važi. Na primer, $\sqrt{x}$ na $[0,1]$ je apsolutno neprekidna, ali nije Lipšicova.

Norma Minkovskog se definiše za $p \in [0,1]$ kao $\|x\|_p := (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ zove se još i L_p- norma.

Tvrđenje 2.21 [2] Najmanja i najveća funkcija agregacije definisana na $[a, b]$ koja je 1-Lipšicova u odnosu na normu $\|\cdot\|_p$ su redom date kao $A_*^{(n)}: [a, b]^n \to [a, b]$ pri čemu je

$$A_*^{(n)} := Max\big(b - \|n \cdot b - x\|_p, a\big)$$

i $A^{*(n)}: [a, b]^n \to [a, b]$ pri čemu je $A^{*(n)} := Min\big(a + \|x - n \cdot a\|_p, b\big)$.

Dokaz. Neka je $B: [a, b]^n \to [a, b]$ 1-Lipšicova (u odnosu na normu $\|\cdot\|_p$) funkcija agregacije. Tada za svako $x \in [a, b]^n$ važi

$$|B(x) - B(n \cdot a)| \leq \|x - n \cdot a\|_p$$

odnosno $B \leq A^{*(n)}$. Sada, trivijalno se pokazuje da je $A^{*(n)}$ funkcija agregacije. Štaviše, $A^{*(n)}$ je 1-Lipšicova jer je

$$\|x - n \cdot a\|_p - \|y - n \cdot a\|_p \leq \|x - y\|_p.$$

Sumirajući, $A^{*(n)}$ je najveća 1-Lipšicova n-arna funkcija agregacije na $[a, b]^n$. Slučaj za funkciju $A_*^{(n)}$ može se dokazati na sličan način. ■

Primer 2.22 [2] (i)Proizvod $\prod: [0,1]^2 \to [0,1]$ je 1-Lipšicov. Zato je na osnovu tvrđenja 2.11 i uniformno neprekidan na $[0,1]^n$. Posebno, za normu $\|\cdot\|_1$ u definiciji 2.10 za proizvoljno $\varepsilon > 0$ biramo $\delta = \varepsilon$.

(ii) Geometrijska sredina $GM: [0,1]^2 \to [0,1]$ nije Lipšicova. Međutim, ona je neprekidna, pa je samim tim i uniformno neprekidna.

Za proširenu funkciju agregacije $A: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$, neprekidnost za A podrazumeva i neprekidnost za svako $A^{(n)}$. Međutim, Lipšicova funkcija A je ograničena sa postojanjem konstante $c \in (0, \infty)$ tako da je svaka $A^{(n)}$ c-Lipšicova.

Primer 2.23 [2] Aritemtička sredina $AM: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$je 1-Lipšicova nezavisno od intervala $\mathbb{I}$. Proširena funkcija agregacije $\mathrm{Q}: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0,1]^n \to [0,1]$ data sa $\mathrm{Q}(x) \coloneqq \prod_i x_i^i$ nije Lipšicova, iako je svaka Q^n Lipšicova. Za Lipšicovu konstantu kod aritmetičke sredine $AM^{(n)}$ najbolje je da se uzme $\frac{1}{n}$.

Definicija 2.24 [2] Funkcija $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ se zove donje poluneprekidna ili levo neprekidna ako za svako $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset (\mathbb{I}^n)^{\mathbb{N}}$ tako da je $\bigwedge_k x^{(k)} \in \mathbb{I}^n\left(\bigvee_k x^{(k)}\right)$, važi

$$\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} F\left(x^{(k)}\right) = F\left(\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} x^{(k)}\right).$$

Definicija 2.25 [2] Funkcija $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ se zove gornje poluneprekidna ili desno neprekidna ako za svako $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset (\mathbb{I}^n)^{\mathbb{N}}$ tako da je $\bigwedge_k x^{(k)} \in \mathbb{I}^n\left(\bigvee_k x^{(k)}\right)$, važi

$$\bigvee_{k\in\mathbb{N}} F\left(x^{(k)}\right) = F\left(\bigvee_{k\in\mathbb{N}} x^{(k)}\right).$$

Tvrđenje 2.26 [2] Neopadajuća funkcija $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je donje poluneprekidna (odnosno gornje poluneprekidna) ako i samo ako je F donje poluneprekidna (odnosno gornje poluneprekidna) za svaku promenljivu.

Dokaz. Dokazaćemo samo slučaj donje poluneprekidnosti, jer se slučaj gornje poluneprekidnosti pokazuje na sličan način. Potreban uslov je očigledan, pokazaćemo samo dovoljan uslov. Predpostavimo da je F donje poluneprekidna za svaku promenljivu i neka je $\left(x^{(k)}\right)_k$ neopadajući niz elemenata iz $\mathbb{I}^n$ tako da je $x = \bigvee x^{(k)} \in \mathbb{I}^k$. Tada je $\left(x_i^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ neopadajući niz elemenata iz $\mathbb{I}$ tako da je $\bigvee x_i^{(k)} = x_i$ za svako $i \in [n]$. Neka je $\varepsilon > 0$ dato. Donja poluneprekidnost i neopadajuća monotonost od F za prvu promenljivu omogućava postojanje $j_1 \in \mathbb{N}$ tako da je

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) - F\left(x_1^{(k_1)}, x_2, \dots, x_n\right) < \frac{\varepsilon}{n}$$

za svako $k_1 \geq j_1$. Slično, zbog donje poluneprekidnosti i neopadajuće monotonosti za F postoji $j_2 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $k_2 \geq j_2$ važi

$$F\left(x_1^{(j_1)}, x_2, \dots, x_n\right) - F\left(x_1^{(j_1)}, x_2^{(k_2)}, \dots, x_n\right) < \frac{\varepsilon}{n},$$

itd. Sumirajući svih n nejednakosti, definišući $j \coloneqq max\,\{j_1, \dots, j_n\}$ i koristeći da je F monotono dobijamo da je $F(x) - F\left(x^{(k)}\right) < \varepsilon$ za svako $k \geq j$. Pošto su x i ε proizvoljni, imamo da gore navedene činjenice podrazumevaju donju polunepreki dnost za F. ■

Sledi tvrđenje koje povezuje predhodno opisane pojmove.

Tvrđenje 2.27 [2] Funkcija agregacije $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je neprekidna ako i samo ako i donje i gornje polunepreki dna.

2.4 Simetričnost

Sledeća osobina koju navodimo je simetričnost [2]. Naziva se još i komutativnost, neutralnost ili anonimnost. Standardna komutativnost za binarne operacije $x * y = y * x$ koja je poznata iz algebre, može se lako generalizovati do n-arnih funkcija.

Definicija 2.28 [2] $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je simetrična funkcija ako je

$$F(x) = F([x]_\sigma), \qquad x \in \mathbb{I}^n, \sigma \in \mathfrak{S}_{[n]}.$$

Osobina simetrije znači u suštini da agregaciona vrednost ne zavisi od rasporeda ulaznih vrednosti u procesu agregacije.

Mnoge funkcije agregacije su simetrične. Npr. aritmetička sredina (koja je u radu označena sa *AM* i u delu 3.1 biće detaljno razjašnjena), geometrijska sredina (ili *GM* koja će takođe u delu 3.1 biti objašnjena) i uređeni ponderisani operator usrednjavanja (ili operator koji će biti u delu 3.3 biti razjašnjen) su simetrične funkcije. Primer agregacione funkcije koja nije simetrična je ponderisana aritmetička sredina u oznaci WAM_w.

Tvrđenje 2.29 [2] $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je simetrična funkcija ako i samo ako, za svako $x \in \mathbb{I}^n$, imamo

(i) $F(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$,

(ii) $F(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1) = F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

Ovaj jednostavan test je veoma efikasan, posebno kada se simetrija ne pojavi odmah, kao u izrazu sa 4 promenljive

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge x_4),$$

koji nije ništa drugo nego 4-oro redna statistika $x_{(2)}$.

Tvrđenje 2.30 [2] $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je simetrična funkcija ako i samo ako postoji funkcija $G: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ tako da je

$$F(x_1, \dots, x_n) = G\left(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}\right), \qquad x \in \mathbb{I}^n.$$

2.5 Idempotentnost

U algebri, x je idempotentan elemenat u određenom skupu ako je za binarnu operaciju $*$ definisanu na tom skupu ispunjeno $x * x = x$. Ovo algebarsko svojstvo može se proširiti do n-arnih funkcija, što definiše osobinu idempotentnosti za n proizvoljnih funkcija. Idempotenstnost se naziva i jednaglasnost, podudarnost ili refleksivnost. Navedena osobina znači da ako su svi x_i jednaki (identični), $F(x_1, \dots, x_n)$ vraća istu vrednost.

U nastavku dajemo definiciju idempotentnosti.

Definicija 2.31 [2] $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je idempotentna funkcija ako je $\delta_F = id$, tj.

$$F(n \cdot x) = x, x \in \mathbb{I}.$$

Evidentno je da su *AM*, WAM_w, OWA_w, *Min*, *Max i Med* idempotentne funkcije, dok $\sum$ i $\prod$ nisu. Takođe svaka neopadajuća i idempotentna funkcija $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je funkcija agregacije.

Definicija 2.32 [2] Funkcija $F: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ je jako idempotentna ako za svako $n \in \mathbb{N}$ i za sve $x \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^m$ važi $F(n \cdot x) = x$.

Na primer, ako je $F: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ jako idempotentna tada važi $F(x_1, x_2, x_1, x_2) = F(x_1, x_2)$.

Definicija 2.33[2] Elemenat $x \in \mathbb{I}$ je idempotentni elemenat za $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ ako je $\delta_F(x) = x$.

Lako se vidi da su jedini idempotentni elementi za $A_{\{c\}}$ 0, 1 i c.

Definicija 2.34 [2] Element $x \in \mathbb{I}$ je trivijalni idempotentni elemenat za $F: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ ako je

$$\lim_{n\to+\infty} \delta_{F^{(n)}}(x) = x.$$

Na primer, 0 i 1 su jedini trivijalni elementi za prošireni proizvod $\prod: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0,1]^n \to \mathbb{R}$.

Dalje, objašnjavamo kodomen idempotentne funkcije.

Definicija 2.35 [2] $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je kodomen idempotentna funkcija ako je $\delta_F \circ F = F$, tako da je

$$F(n \cdot F(x)) = F(x), \qquad x \in \mathbb{I}^n.$$

Naravno, svaka idempotentna funkcija $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ je kodomen idempotentna. Obrnuto, ako je $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ kodomen idempotentna onda je F idempotentna ako i samo ako je $ran(F) = \mathbb{I}$.

Primer 2.36 [2] Za proizvoljne brojeve $a, b \in \mathbb{I}$, pri čemu je $a \leq b$, i proizvoljnu idempotentnu funkciju $G: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$, funkcija $F: \mathbb{I}^n \to [a, b]$ definisana na sledeći način:

$$F(x) = Med(a, G(x), b)$$

je kodomen idempotentna, ali nije idempotentna (osim ako je $\mathbb{I} = [a, b]$). Specijalno, svaka konstantna funkcija je kodomen idempotentna, ali nije idempotentna.

Tvrđenje 2.37 [2] Funkcija $f: \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ zadovoljava jednačinu $f \circ f = f$ ako i samo ako

$$f|_{ran(f)} = id|_{ran(f)}.$$

Osim toga, ako je $\mathbb{I}$ otvoren interval, tako da je funkcija neprekidna i neopadajuća ako i samo ako postoje $a, b \in \mathbb{I}$, pri čemu je $a \leq b$, tada je

$$f(x) = Med(a, x, b).$$

Dokaz. Dokazujemo prvi deo.

($\Rightarrow$) Neka je $f \circ f = f$, pri čemu je $ran(f) \subseteq \mathbb{I}$. Ako $x \in ran(f)$ tada postoji $z \in \mathbb{I}$ tako da je $x = f(z)$ i otuda $f(x) = f\big(f(z)\big) = f(z) = x$.

($\Leftarrow$) Za svako $x \in \mathbb{I}$, $f(x) \in ran(f)$ i otuda je $f\big(f(x)\big) = f(x)$.

Sada dokazujemo drugi deo.

($\Rightarrow$) Pošto je *f* neprekidna, $ran(f)$ je otvoreni interval $[a, b]$. Dokaz potom sledi iz prvog dela i neopadajuće monotonosti funkcije *f*.

($\Leftarrow$) Trivijalno. ■

Napomena 2.38 [2] Primeri neneprekidnih i neopdajućih funkcija $f: \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ koje zadovoljavaju $f \circ f = f$, su signum funkcija $f(x) = sign(x)$ i funkcija apsolutne vrednosti $f(x) = |x|$.

2.6 Konjunkcija, disjunkcija i unutrašnjost

Za date *n*-arne funkcije $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ i $G: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$, kažemo da G dominira nad F ako je $F \leq G$ na $\mathbb{I}^n$. S obzirom da su funkcije *Min* i *Max* dominatne funkcije dolazimo do tri glavne klase funkcija agregacije [2]: konjunktivne funkcije, disjunktivne funkcije i funkcije unutrašnjosti.

Definicija 2.39 [2] $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je konjunktivna funkcija ako je $inf\, \mathbb{I} \leq F \leq Min$.

Konjunktivne funkcije kombinuju vrednosti kao da su povezane logičkim operatorom „i“. Prema tome, rezultat kombinacije može biti visok samo ako su sve vrednosti visoke. Otuda, niska vrednost ne može nikad da nadoknadi visoku vrednost. T-norme su pogodne funkcije (definisane na $[0,1]^n$) za obavljanje konjunktivne agregacije.

Definicija 2.40 [2] $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je disjunktivna funkcija ako je $Max \leq F \leq sup\, \mathbb{I}$.

Disjunktivne funkcije kombinuju vrednosti kao operator „ili“, tako da je rezultat kombinacije visok ako je bar jedna vrednost visoka. Otuda, visoka vrednost ne može kompenzovati niske vrednosti. Takve funkcije su dual konjunktivne funkcije. Najčešće disjunktivne funkcije su t-konorme (definisane na $[0,1]^n$).

Sledeće tvrđenje pokazuje da, zbog monotonosti funkcije agregacije, konjunktivnost (odnosno disjunktivnost) funkcije agregacije na domenu $[a,b]^n$ se može proveriti samo na gornjoj (odnosno donjoj) granici tog domena.

Tvrđenje 2.41 [2] Funkcija agregacije $A: [a,b]^n \to \mathbb{R}$ je konjunktivna (odnosno disjunktivna) ako i samo ako je $A\left(x_{\{i\}}b\right) \leq x$ (odnosno $A\left(x_{\{i\}}a\right) \geq x$) za svako $x \in [a,b]$ i za svako $i \in [n]$.

Dokaz. Dokazaćemo samo slučaj konjunktivnih funkcija. Dokaz za slučaj disjunktivnih funkcija je isti.

($\Rightarrow$) Trivijalno.

($\Leftarrow$) Neka je $x \in [a,b]^n$ i izaberimo $i \in [n]$ tako da je $x_i = Min(x)$. Tada je

$$inf\mathbb{I} \leq A(x) \leq A\left(x_{\{i\}}b\right) \leq x = Min(x). \blacksquare$$

Definicija 2.42 [2] $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je unutrašnja funkcija ako je $Min \leq F \leq Max$.

Unutrašnjost je osobina koju imaju aritmetička sredina, geometrijska sredina kao i funkcije za računanje proseka koje se najviše koriste za agregaciju.

U problemu donošenja grupne odluke može se kompenzovati loš rezultat pomoću dobrog rezultata, tako što će rezultat agregacije biti srednja vrednost.

Jasno je da osobina $ran(F) \subseteq \mathbb{I}$ važi za bilo koju unutrašnju funkciju $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$. Sledeći rezultat neposredno govori da su unutrašnjost i idempotencija blisko povezani.

Tvrđenje 2.43 [2] Ako je $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ unutrašnja funkcija, tada je i idempotentna. Obrnuto, ako je $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ neopadajuća i idempotentna, onda je unutrašnja.

Dokaz. Prvi deo se trivijalno dokazuje. Imamo

$$id = \delta_{Min} \leq \delta_F \leq \delta_{Max} = id.$$

Drugi deo neposredno sledi iz nejednakosti

$$\delta_F(\min(x_1, \dots, x_n)) \leq F(x) \leq \delta_F(\max(x_1, \dots, x_n)).$$

Imamo

$$Min = \delta_F \circ Min \leq F \leq \delta_F \circ Max = Max. \blacksquare$$

Po definiciji, unutrašnja funkcija se nalazi između Min i Max. Prema tome, može se predstaviti na sledeći način.

Tvrđenje 2.44 [2] $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je unutrašnja funkcija ako i samo ako postoji funkcija $G: \mathbb{I}^n \setminus diag(\mathbb{I}^n) \to [0,1]$ tako da je

$$F(x) = Min(x) + G(x)\big(Max(x) - Min(x)\big).$$

2.7 Asocijativnost

Asocijativnost binarne operacije $*$ znači $(x * y) * z = x * (y * z)$ što možemo da zapišemo i kao $x * y * z$. Ako bi se binarna operacija zapisala u obliku funkcije $f(a, b) = a * b$, tada bi asocijativnost značila $f(f(a, b), c) = f(a, f(b, c))$, i takav zapis se zove asocijativna funkcionalna jednačina.

Definicija 2.45 [2] $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ je asocijativna funkcija ako, za svako $x \in \mathbb{I}^3$, važi

$$F(F(x_1, x_2), x_3) = F\big(x_1, F(x_2, x_3)\big).$$

Veliki broj radova bavi se asocijativnim funkcionalnim jednačinama i u oblasti realnih brojeva.

U osnovi, asocijativnost se bavi agregacijom samo dva argumenta. Međutim, kako je navedeno u sledećoj definiciji, pomoću asocijativnosti funkcija može vršiti agregaciju bilo kojeg konačnog broja argumenata.

Za vektore $x = (x_1, \dots, x_n)$ i $x' = (x'_1, \dots, x'_m)$ koristićemo oznaku $F(x, x')$ koja predstavlja $F = (x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_m)$. Slično je i za više od dva vektora. Ako je $x \in \mathbb{I}^0$ prazan vektor tada ga možemo jednostavno izostaviti iz funkcije. Na primer, $F(x, x') = F(x')$ i $F\big(F(x), F(x')\big) = F(F(x'))$.

Definicija 2.46 [2] $F: \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ je asocijativna funkcija ako $F(x) = x$ za sve $x \in \mathbb{I}$ i ako

$$F(x, x') = F(F(x), F(x'))$$

za sve $x, x' \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathbb{I}^n$.

Kao što sledeće tvrđenje pokazuje, asocijativnost znači da svaki podskup od uzastopnih argumenata može biti zamenjen sa njihovom delimičnom agregacijom bez menjanja ukupne agregacije.

Tvrđenje 2.47 [2] $F: \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ je asocijativna funkcija ako i samo ako je $F(x) = x$ za sve $x \in \mathbb{I}$ i

$$F(x, F(x'), x'') = F(x, x', x'')$$

za sve $x, x', x'' \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathbb{I}^n$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Za sve $x, x', x'' \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathbb{I}^n$ važe sledeće jednakosti

$$\begin{aligned} F(x, F(x'), x'') &= F(F\big(x, F(x')\big), F(x'')) \\ &= F(F\big(F(x), F(x')\big), F(x'')) \\ &= F(F(x, x'), F(x'')) \\ &= F(x, x', x''). \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Trivijalno. ■

Asocijativnost je takođe poznata algebarska osobina koja omogućava da izostavite „zagrade“ u skupu od najmanje tri elementa. Pod predpostavkom asocijativnosti se podrazumeva da ako funkcija vrši agregaciju od n argumenata onda ta funkcija može da vrši agregaciju i $n+1$ argumenata. Zato sledi da je bilo koja asocijativna funkcija, određena pomoću binarne funkcije F^2. To se vidi na osnovu sledećeg primera : $F(x_1, \dots, x_{n+1}) = F(F(x_1, \dots, x_n), x_{n+1})$.

Primeri asocijativnih funkcija su *Min*, *Max*, $\sum$, $\prod$, P_F, P_L. Funkcije poput *AM* i *GM* nisu asocijativne.

Takođe može se primetiti da se spajanjem osobina asocijativnosti i idempotencije poništava ponavljanje argumenata u proceduri agregacije, zato što je:

$$F(m \cdot x, n \cdot y) = F\big(F(m \cdot x), F(n \cdot y)\big) = F(x, y)$$

za sve $m, n \in \mathbb{N}$.

Važi da je $F(x, y, \dots, y) = F(x, y)$ bez obzira na broj argumenta y.

2.8 Dekompozabilnost

Može se proveriti da aritmetička sredina kao proširena funkcija ne zadovoljava asocijativnu jednačinu (ne ispunjava uslov asocijativnosti). Zanima nas da li postoji funkcionalna jednačina, slična asocijativnosti, koja može da zadovoljava geometrijska sredina, kvadratna sredina, itd.

Zato uvodimo novu osobinu, sličnu asocijativnosti, koju ima aritmetička sredina [2].

$$F(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = F(k \cdot F(x_1, \dots, x_k), x_{k+1}, \dots, x_n)$$

za svaki ceo broj $0 \leq k \leq n$, pri čemu je $n \geq 1$. To je ekvivalentno sledećem zapisu

$$F(x, x') = F(k \cdot F(x), x')$$

za svako $k \in \mathbb{N}_0$, za svako $x \in \mathbb{I}^k$ i za svako $x' \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathbb{I}^n$.

Definicija 2.48 [2] $F: \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ je dekompozabilna funkcija ako je $F(x) = x$ za svako $x \in \mathbb{I}$ i ako je

$$F(x, x') = F(k \cdot F(x), k' \cdot F(x'))$$

za svako $k, k' \in \mathbb{N}_0$, za svako $x \in \mathbb{I}^k$ i za svako $x' \in \mathbb{I}^{k'}$.

Uzevši u obzir da je $k = 0$ ili $k' = 0$ u jednačini iz definicije 2.45, vidimo da je svaka dekompozabilna funkcija kodomen idempotenta. Štaviše, sledeća osobina pokazuje da dekompozabilnost znači da svaki element proizvoljnog podskupa uzastopnih argumenata može biti zamenjen sa njihovom delimičnom agregacijom bez menjanja ukupne agregacije.

Tvrđenje 2.49 [2] $F\colon \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ je dekompozabilna funkcija ako i samo ako je $F(x) = x$ za sve $x \in \mathbb{I}$ i

$$F(x, k' \cdot F(x'), x'') = F(x, x', x'')$$

za sve $k' \in \mathbb{N}_0$, za sve $x' \in \mathbb{I}^{k'}$ i za sve $x, x'' \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{I}^n$.

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu teoreme 2.47.

($\Rightarrow$) Za proizvoljne $k, k', k'' \in \mathbb{N}_0$ i proizvoljne $x \in \mathbb{I}^k, x' \in \mathbb{I}^{k'}, x'' \in \mathbb{I}^{k''}$ je ispunjeno

$$\begin{aligned} F(x, k' \cdot F(x'), x'') &= F((k + k') \cdot F\big(x, k' \cdot F(x')\big), k'' \cdot F(x'')) \\ &=^{(*)} F((k + k') \cdot F\big(k \cdot F(x), k' \cdot F(x')\big), k'' \cdot F(x'')) \\ &= F((k + k') \cdot F(x, x'), k'' \cdot F(x'')) \\ &= F(x, x', x'') \end{aligned}$$

pri čemu smo, u $(*)$ koristili činjenicu da je F kodomen idempotentna.

($\Leftarrow$) Trivijalno. ■

Primeri dekompozabilnih funkcija su *Min*, *Max*, *AM*, *GM*, P_F, P_L. Funkcije kao što su $\sum$ i $\prod$ nisu dekompozitivne.

Sledeće tvrđenje obezbeđuje dovoljan uslov da asocijativna funkcija bude dekompozabilna.

Tvrđenje 2.50 [2] Ako je $F\colon \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ kodomen idempotentna i asocijativna funkcija, tada je i dekompozabilna.

Dokaz. Neka je $k, k' \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{I}^k$ i $x' \in \mathbb{I}^{k'}$. Tada je ispunjeno

$$\begin{aligned} F\big(k \cdot F(x), k' \cdot F(x')\big) &= F(F\big(k \cdot F(x)\big), F(k' \cdot F(x'))) && \text{(asocijativnost)} \\ &= F\big(F(x), F(x')\big) && \text{(kodomen idempotentnost)} \\ &= F(x, x') && \text{(asocijativnost).} \end{aligned}$$

Prema tome, F je dekompozabilna. ■

Definicija 2.51 [2] Funkcija $F\colon \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ je jače dekompozabilna ako je $F(x) = x$ za svako $x \in \mathbb{I}$ i ako je

$$F(x) = F\left(\sum_{i\in K} F(x|_K) 1_{\{i\}} + \sum_{j\in K^c} F(x|_{K^c}) 1_{\{j\}}\right)$$

za svako $n \in \mathbb{N}$, svako $K \subseteq [n]$ i svako $x \in \mathbb{I}^n$.

2.9 Autodistributivnost

Sada ćemo razmotriti osobinu autodistributivnosti navedenu u [2]. Definisaćemo prvo za dva argumentna, a onda se definicija lako može proširiti do *n* argumenata.

Definicija 2.52 [2] $F: \mathbb{I}^2 \to \mathbb{I}$ je autodistributivna funkcija ako je, za sve $x \in \mathbb{I}^3$, ispunjeno

$$F\big(x_1, F(x_2, x_3)\big) = F(F(x_1, x_2), F(x_1, x_3))$$

$$F\big(F(x_1, x_2), F(x_3)\big) = F\big(F(x_1, x_3), F(x_2, x_3)\big).$$

Autodistributivne jednačine su ispitivane kako u opštim algebarskim strukturama, tako i za realne brojeve.

2.10 Bisimetrija

Definisaćemo sada osobinu bisimetrije opisanu u [2].

Definicija 2.53 [2] $F: \mathbb{I}^2 \to \mathbb{I}$ je bisimetrična funkcija ako je, za sve $x \in \mathbb{I}^4$, ispunjeno

$$F\big(F(x_1, x_2), F(x_3, x_4)\big) = F\big(F(x_1, x_3), F(x_2, x_4)\big).$$

Neposredna posledica ove definicije je da je idempotentna i bisimetrična funkcija $F: \mathbb{I}^2 \to \mathbb{I}$ nužno autodistributivna.

Za *n* argumenata, bisimetrija ima sledeću formu:

Definicija 2.54 [2] $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ je bisimetrična funkcija ako je

$$F\big(F(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, F(x_{n1}, \dots, x_{nn})\big)$$
$$= F\big(F(x_{11}, \dots, x_{n1}), \dots, F(x_{1n}, \dots, x_{nn})\big)$$

za sve kvadratne matrice $\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{I}^{n \times n}$.

Bisimetrija pokazuje da se agregacija za sve elemente u kvadratnoj matrici može primeniti prvo na redove, a potom na kolone, ali i obrnuto. Međutim, pošto je ovo primenljivo samo kod kvadratnih matrica, ova osobina nema veliku primenu u agregaciji. Njena upotrebljivost ostaje samo u domenu teorije.

Definicija 2.55 [2] $F: \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ je strogo bisimetrična funkcija ako je $F(x) = x$ za sve $x \in \mathbb{I}$ i ako je za sve $n, p \in \mathbb{N}$, ispunjeno

$$F\left(F(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, F\big(x_{p1}, \dots, x_{pn}\big)\right)$$

$$= F\left(F(x_{11}, \dots, x_{p1}), \dots, F(x_{1n}, \dots, x_{pn})\right)$$

za sve matrice $\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & \cdots & x_{pn} \end{pmatrix} \in \mathbb{I}^{p\times n}$.

Ako je operator agregacije komutativan i asocijativan, onda je on nužno bisimetričan. Ali obrnuto, ne mora da važi.

2.11 Neutralni elemenat i annihilator

Neutralni elemenat je pojam poznat iz oblasti binarnih operacija. Podsetimo se binarne operacije $*$ definisane na domenu X: elemenat $e \in X$je neutralni elemenat (za operaciju $*$) ako je

$$x * e = e * x = x.$$

Svaka binarna operacija $*$ može imati najviše jedan neutralni elemenat. Iz predhodne jednakosti može se zapaziti da neutralni elemenat u binarnim operacijama ima isti efekat kao i izostavljanje. Slede definicije i tvrđenja koja su opisana u [2].

Definicija 2.56 [2] Neka je $F: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ proširena funkcija. Element $e \in \mathbb{I}$ je prošireni neutralni elemenat od F ako je, za svako $i \in [n]$ i svako $x \in \mathbb{I}^n$ tako da $x_i = e$, važi

$$F(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Dakle proširen neutralni elemenat može biti izostavljen iz vrednosti argumenta i neće uticati na agregacionu vrednost.

Sada ćemo za n-arne funkcije definisati neutralni elemenat.

Definicija 2.57 [2] Elemenat $e \in \mathbb{I}$ je neutralni elemenat funkcije $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ ako, za svako $i \in [n]$ i svako $x \in \mathbb{I}$, važi

$$F\left(x_{\{i\}}e\right) = x.$$

Jasno, ako je $e \in \mathbb{I}$ prošireni neutralni elemenat proširene funkcije $F: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ gde je $F^{(1)}(x) = x$, tada je e neutralni elemenat za sve $F^{(n)}, n \in \mathbb{N}$. Na primer, $e = 0$ je prošireni neutralni elemenat proširene suma funkcije $\sum$. To je takođe neutralni elemenat n-arne suma funkcije $\sum^n$.

Tvrđenje 2.58 [2] Posmatrajmo funkciju agregacije $A: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ sa neutralnim elementom $e \in \mathbb{I}$. Tada je A konjunktivna i $b \coloneqq sup\mathbb{I} \in \mathbb{I}$ ako i samo ako je $e = b$. Takođe, A je disjunktivna i $a \coloneqq inf\mathbb{I} \in \mathbb{I}$ ako i samo ako je $e = a$.

Dokaz. Razmotrićemo samo slučaj konjunktivne funkcije. Slučaj disjunktivne funkcije se dokazuje na isti način. Predpostavimo da je A konjunktivna i $b \coloneqq sup\mathbb{I} \in \mathbb{I}$. Tada za svako $i \in [n]$ važi

$$b = A\left(b_{\{i\}}e\right) \leq Min\left(b_{\{i\}}e\right) = e \leq b$$

i otuda je $e = b$. Obrnuto direktno sledi iz tvrđenja 2.41. ■

Definicija 2.59 [2] Elemenat $a \in \mathbb{I}$ je annihilator funkcije $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ ako za svako $x \in \mathbb{I}^n$ tako da $a \in \{x_1, \dots, x_n\}$, važi $F(x) = a$.

Tvrđenje 2.60 [2] Neka je $A: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ funkcija agregacije. Ako je A konjunktivna i $a \coloneqq inf\mathbb{I} \in \mathbb{I}$, tada je a anhhilator elemenat. Dualno, Ako je A disjunktivna i $b \coloneqq sup\mathbb{I} \in \mathbb{I}$, tada je b anhhilator elemenat.

Dokaz. Razmotrićemo slučaj konjunktivne funkcije. Slučaj disjunktivne funkcije se dokazuje na isti način. Neka $x \in \mathbb{I}^n$ tako da $a \in \{x_1, \dots, x_n\}$. Kako je A konjunktivna, ispunjeno je

$$a \leq A(x) \leq Min(x) = a$$

što dokazuje tvrđenje. ■

Obrnuti smer u tvrđenju 2.60 ne važi. Na primer, na $[0,1]^n$, *0* je annihilator geometrijske sredine *GM*, koja nije konjunktivna.

Definicija 2.61 [2] Proširena funkcija agregacije $A: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ se zove Arhimedova ako, za svako $x \in \mathbb{I}$, važi

$$\lim_{n\to\infty} \delta_{A^{(n)}}(x) \in \{inf\mathbb{I}, sup\mathbb{I}\} \subset E_A \cup A_A,$$

gde je E_A skup proširenih neutralnih elemenata od A i A_A skup anhhilator elemenata od A.

2.12 Aditivnost

Razmotrićemo jednačine koje ispunjavaju određene funkcionalne jednačine u formi

$$F(x * x') = F(x) * F(x'), \qquad x, x' \in \mathbb{I}^n,$$

gde je $*$ asocijativna operacija. Fokusiraćemo se na sledeće operacije: $+$, $\wedge$ i $\vee$.

Definicije i tvrđenja koja slede opisani su u [2].

Definicija 2.62 [2] $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je aditivna funkcija ako

$$F(x + x') = F(x) + F(x') \qquad (2.1)$$

za sve $x, x' \in \mathbb{I}^n$ gde $x + x' \in \mathbb{I}^n$.

Za unarne funkcije, funkcionalna jednačina (2.1) je poznata kao Košijeva jednačina. Uzimajući u obzir neprekidnost i neopadajuću monotonost, njena rešenja u $\mathbb{R}$ su linearne funkcije.

Tvrđenje 2.63 [2] Neka $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava Košijevu osnovnu jednačinu

$$f(x + x') = f(x) + f(x').$$

Tada je f ili forme $f(x) = cx$ za neko $c \in \mathbb{R}$ ili je grafik od f svuda gust na $\mathbb{R}^2$.

Dokaz. Iz (2.1) sledi pomoću indukcije

$$f(x_1 + \cdots + x_n) = f(x_1) + \cdots + f(x_n)$$

i takođe $f(nx) = nf(x)$ za sve realne brojeve x i prirodne brojeve n. Zatim se dobija proširenje $f\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{m}{n}f(x)$ za sve prirodne brojeve m i n na sledeći način

$$mf(x) = f(mx) = f\left(n\frac{m}{n}x\right) = nf\left(\frac{m}{n}x\right).$$

Tako je $f(rx) = rf(x)$ za sve pozitivne racionalne brojeve r. Za $r = 0$ takođe važi jednakost zato što iz

$$F(x_1, x_2, x_3) = F(F(x_1, x_3), x_2, F(x_1, x_3))$$

sledi da $f(0 + 0) = f(0) + f(0)$, odnosno $f(0) = 0$. Za negativno r važi ista jednakost

$$\{r_1(x_1, f(x_1)) + r_2(x_2, f(x_2)) | r_1, r_2 \in \mathbb{Q}\}$$

gust na $\mathbb{R}^2$. Takođe,

$$r_1\big(x_1, f(x_1)\big) + r_2\big(x_2, f(x_2)\big) = (r_1x_1 + r_2x_2, f(r_1x_1 + r_2x_2))$$

je tačka na grafiku f i zato grafik mora biti gust na $\mathbb{R}^2$. ■

Za *n*-arne funkcije jednačina (2.1) se zove generalizovana Košijeva jednačina.

Tvrđenje 2.64 [2] $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je aditivna funkcija ako i samo ako postoje aditivne unarne funkcije $f_i: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ tako da je za sve $x \in \mathbb{R}^n$

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i).$$

Usled neprekidnosti (tj. neopadajuće monotonosti) svakog $F\big(x1_{\{i\}}\big)$, funkcija F je oblika

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

za sve $x \in \mathbb{R}^n$, pri čemu su $c_1, \dots, c_n$ proizvoljne (nenegativne) realne konstante.

Pri dokazu kombinujemo jednakost

$$x = \sum_{i=1}^{n} F\left(x1_{\{i\}}\right)$$

i jednačinu

$$F(x_1, x_2, x_3) = F(F(x_1, x_3), x_2, F(x_1, x_3))$$

i dobijamo

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} F\left(x1_{\{i\}}\right) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

pri čemu je svaka unarna funkcija $f_i(x_i) \coloneqq F\left(x1_{\{i\}}\right)$ aditivna.

Definicija 2.65 [2] $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je minitivna funkcija ako je

$$F(x \wedge x') = F(x) \wedge F(x')$$

za sve $x, x' \in \mathbb{I}^n$.

Važno je napomenuti da je neopadajuća unarna funkcija $F: \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ rešenje funkcionalne jednačine $f(x \wedge x') = f(x) \wedge f(x')$. Klasa neopadajućih unarnih funkcija se može identifikovati sa klasom minitivnih unarnih funkcija.

Definicija 2.66 [2] $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je maksitivna funkcija ako je

$$F(x \vee x') = F(x) \vee F(x')$$

za sve $x, x' \in \mathbb{I}^n$.

3. Pregled esencijalnih operatora agregacije

U drugom delu master rada, predstavljamo pregled već postojećih matematičkih operatora. Objasnićemo njihove glavne osobine i karakteristike. Takođe ćemo predstaviti i neke značajnije posebne slučajeve.

Počinjemo predstavljanjem nekih od najčešće korišćenih operatora agregacije. Nazvali smo ih osnovnim. U ovu grupu spadaju sledeći operatori agregacije, opisani u [1],[6]: aritmetička sredina, ali i medijana, (ponderisani) minimum i (ponderisani) maksimum, kao i neki klasični oblik generalizacije kao što je ponderisana sredina.

Nastavljamo sa predstavljanjem kvazi-aritmetičke sredine [2], veoma značajne grupe operatora zasnovane na transformacijama klasične aritmetičke sredine. Dalje, predstavljamo određeni ponderisani operator usrednjavanja (*OWA* operator) [1], koji u sklopu aditivne forme uključuje minimum i maksimum kao posebne slučajeve. Zatim prelazimo na diskretne fazi integrale: Choquet i Sugeno integrali ([2],[3],[4],[11]). Choquet integral generalizuje „dodatne" operatore kao OWA ili kao ponderisana sredina, dok Sugeno integral generalizuje „minimalne-maksimalne" operatore. Ovi operatori daju reprezentativnu vrednost „kao središnju" na skupu agregacije.

Nakon toga, predstavljamo dve grupe specijalizovane za agregaciju proisteklu usled neizvesnosti: t-norme i t-konorme (definisani u [1],[2],[5]). Ovi operatori „ne daju" srednju vrednost, već umesto toga izračunavaju presek i uniju (respektivno) fazi skupova. Ovi operatori se često koriste, jer se mogu posmatrati kao generalizacija logičkih operatora agregacije: „i" (t-norme) i „ili" (t-konorme).

Uočeno je da se prilikom grupnog odlučivanja ne korisiti logika agregacije t-norme i t-konorme. To proizilazi iz činjenice da klasični operatori koriste, ali ne kompenzuju „niske" sa „visokim" numeričkim vrednostima. Predstavićemo neke od predloženih rešenja zasnovanih na t-normi i t-konormi: kompenzacione operatore [1].

Druge vrste operatora su se pojavile nakon otpuštanja aksioma koji se inače razlikuje od t-norme i t-konorme: uninorme [1].

U ovom delu predstavljen je objektivan pregled grupe operatora agregacije, kao i karakteristike, prednosti i mane svakog od operatora.

3.1 Osnovni operatori agregacije

U ovom delu navešćemo osnovne operatore agregacije opisane u [1]. Najpoznatiji operatori agregacije su aritmetička sredina *AM*, geometrijska sredina *GM*, harmonijska sredina *HM*, kvadratna sredina *QM* i za $p \in (0, \infty)$ sredina M_p koji su dati redom:

$$AM(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$GM(x_1, \dots, x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$HM(x_1, \dots, x_n) = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}},$$

$$QM(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$M_p(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Svi ovi operatori su komutativni, neprekidni i idempotentni, nisu asocijativni i nemaju neutralni elemenat. Operatori $AM, QM\ i\ M_p$ su strogo monotoni i nemaju annihilator. GM i HM imaju annhilator i to je 0, i zbog toga nisu strogo monotoni.

3.1.1 Aritmetička sredina

Najjednostavniji i najčešći način agregacije jeste upotreba aritmetičke sredine (poznate još i kao prosečna sredina). Matematički gledano, aritmetička sredina se definiše na sledeći način [1]:

$$AM(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n} \cdot x_i\right).$$

Ovaj operator je interesantan zato što daje vrednost agregacije koja je manja od najvećeg argument,a veća od najmanjeg. Aritmetička vrednost je često korištena zato što je jednostavna i zadovoljava osobine monotonosti, neprekidnosti, simetrije, idempotentnosti i stabilnosti za linearne transformacije. Međutim, nema annhilator niti neutralni elemenat.

3.1.2 Ponderisana sredina

Ponderisana sredina, klasično proširenje aritmetičke sredine, omogućava dodavanje ponderisanih koeficijenata argumentima. Time se gubi osobina simetričnosti. Ovaj operator se izražava matematičkom formulom [1]:

$$M_{w_1,\dots,w_n}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}(w_i \cdot x_i),$$

pri čemu su težinski koeficijenti nenegativni i važi $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

Ponderisana sredina zadovoljava osobine monotonosti (rastuća je i jednoglasno rastuća), neprekidnosti, idempotentnosti, aditivnosti i bisimetričnosti. Ovaj operator nije simetričan.

3.1.3 Medijana

Još jedan operator koji prati ideju postojanja "srednje vrednosti" jeste medijana, navedena u [1]. Pomoću medijane vrši se agregacija vrednosti tako što se iz niza argumenata poredjanih od najmanje do najveće vrednosti uzima elemenat koji je u sredini. U slučaju da je kardinalnost skupa argumenata paran broj, tada ne postoji argumenat koji je u sredini, nego par u sredini. Tada se uzima srednja vrednost tog para.

Ovakav operator agregacije zadovoljava granične uslove, monotonost, simetričnost i idempotentnost.

Postoji uopštenje ovog operatora: statistika poretka reda *k*, kojim možemo da odaberemo elemenat na *k*-toj poziciji u nizu u kojem su vrednosti poređane od najmanje do najveće.

3.1.4 Minimum i maksimum

Minimum i maksimum su, takođe, osnovni operatori agregacije navedeni u [1]. Minimum daje najmanju vrednost skupa, dok maksimum daje najveću vrednost.

Oni ne daju reprezentativnu "srednju vrednost", ali mogu biti od velikog značaja u različitom kontekstu. Na primer, u procesu grupnog odlučivanja minimum se prevodi u konjunktivnu osobinu (to je t-norma). A maksimumu je t-konorma i ima disjunktivnu osobinu.

Kao operatori agregacije oni zadovoljavaju aksiome definicije (identitet kada se pojedinačni granični uslovi ne povećavaju). Osim ovih osnovnih osobina, ova dva operatora imaju osobinu monotonosti, simetričnosti, asocijativnosti, idempotentnosti. Koristeći ove operatore nikada se neće dobiti “ vrednost u sredini”.

Ako se radi o ograničenom intervalu [*a, b*], minimum daje vrednost *a*, a neutralni element je *b*, dok će za maksimum biti obrnuto: uvek se dobija vrednost *b*, a neutralni element je *a*.

3.1.5 Ponderisani minimum i ponderisani maksimum

Ponderisani minimum i ponderisani maksimum su operatori agregacije koji su dati na sledeći način [1]:

$$min_{w_1,\dots,w_n}(x_1,\dots,x_n) = min_{i=1}^{n}[max\ (1-w_i, x_i)]$$

$$max_{w_1,\dots,w_n}(x_1,\dots,x_n) = max_{i=1}^{n}[min\ (w_i, x_i)]$$

pri čemu su težinski koeficijenti nenegativni i važi $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

Ova dva operatora imaju interesantna svojstva. Na primer, ako se ponderisani koeficijent w_i izjednači sa nulom tada argument x_i neće biti uključen u proces agregacije. Takođe, ako su ponderisani koeficijenti jednaki, tada se dobija minimum i maksimum, redom.

Ovi operatori imaju manu zbog postojanja mogućnosti povećanja jednog ponderisanog koeficijenta, a da to nema nikakvog efekta na rezultat agregacije. To je zbog činjenice da ovi operatori nisu striktno monotoni u odnosu na ponderisane koeficijente, koji jesu striktno monotoni.

Uvođenjem druge vrste ponderisanog minimum i maksimuma dobija se osobina striktne monotonosti u odnosu na ponderisane koeficijente. Oni se definišu na sledeći način [1]:

$$min_{w_1,\dots,w_n}(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\left[i\cdot\left(w_{\sigma(i)} - w_{\sigma(i+1)}\right)\cdot min\left(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(i)}\right)\right]$$

$$max_{w_1,\dots,w_n}(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\left[i\cdot\left(w_{\sigma(i)} - w_{\sigma(i+1)}\right)\cdot max\left(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(i)}\right)\right]$$

pri čemu su ponderisani koeficijenti nenegativni, važi $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ i σ je permutacija za koju važi sledeće: $w_{\sigma(1)} \geq w_{\sigma(2)} \geq \cdots \geq w_{\sigma(n)}$ i $w_{\sigma(n+1)} = 0$.

Znači, ovi operatori imaju iste osobine kao prethodna dva definisana operatora, ali su oni striktno monotoni u odnosu na ponderisane koeficijente. Drugim rečima, varijacija bilo kojeg ponderisanog koeficijenta menja rezultat agregacije. Ovi operatori su stabilni za bilo koju linearnu transformaciju.

3.2 Kvazi – aritmetička sredina

U ovom delu ćemo predstaviti kvazi-aritmetičku sredinu i opisati neke njene osobine (videti [2],[6]). Kvazi-aritmetička sredina predstavlja značajnu grupu operatora koja se bazira na transformacijama klasične aritmetičke sredine.

Definicija 3.1 [2] Neka je $f: \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ neprekidna i strogo monotona funkcija. *n*-arna kvazi-aritmetička sredina generisana sa *f* je funkcija $M_f: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ definisana na sledeći način:

$$M_f(x) = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right). \qquad (3.1)$$

Proširena kvazi-aritmetička sredina generisana sa *f* je funkcija $M_f: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ ograničena na $\mathbb{I}^n$, to je *n*-arna kvazi-aritmetička sredina generisana sa *f*.

Napomena 3.2 [2] U pojedinim aplikacijama može biti zgodno proširiti rang od f na proširen realni interval $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. Očigledno, u ovom slučaju potrebno je definisati izraz $\infty - \infty$ koji će često biti predstavljen kao $-\infty$.

Klasa kvazi-aritmetičke sredine obuhvata većinu sredina za opštu upotrebu, kao što su aritmetička sredina, geometrijska sredina, itd. Sledeća tabela prikazuje najpoznatije slučajeve kvazi-aritmetičke sredine.

$f(x)$	$M_f(x)$	Vrsta
x	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	Aritmetička sredina
x^2	$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$	Kvadratna sredina
$\log x$	$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$	Geometrijska sredina
x^{-1}	$\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$	Harmonična sredina
$e^{\alpha x}(\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$	$\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{\alpha x_i}\right)$	Eksponencijalna sredina

Tabela 3.1

Tvrđenje 3.3 [2] Neka su $f, g: \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ neprekidne i strogo monotone funkcije. Predpostavimo takođe da je g neopadajuća (odnosno opadajuća). Tada

(i) $M_f \leq M_g$ ako i samo ako je $g \circ f^{-1}$ konveksna (odnosno konkavna);

(ii) $M_f = M_g$ ako i samo ako je $g \circ f^{-1}$ linearna, tako da je

$$g(x) = rf(x) + s \qquad r, s \in \mathbb{R}, r \neq 0.$$

Dokaz. Predpostavimo da je bez umanjenja opštosti g neopadajuća. Stavljajući $u_i = f(x_i)$, imamo

$$M_f \leq M_g \Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right) \leq g^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\right)$$

$$\Leftrightarrow g \circ f^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(g \circ f^{-1})(u_i).$$

Ovo je Jensen-ova nejednakost za funkciju $g \circ f^{-1}$, koja je zadovoljena samo ako je ova funkcija konveksna, čime je dokazano (i).

Sada ćemo dokazati (ii). Na osnovu (i), imamo $M_f = M_g$ ako i samo ako su funkcije $g \circ f^{-1}$ i $f \circ g^{-1} = (g \circ f^{-1})^{-1}$ konveksne. Ovo pokazuje da je $g \circ f^{-1}$ i konveksna i konkavna, odakle sledi da je ona ustvari linearna. ■

Primer 3.4 [2] Predpostavimo da je $\mathbb{I} = (0,1)$ i razmotrimo funkciju $M: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ definisanu kao

$$M(x) = \frac{GM(x)}{GM(x) + GM(1-x)}$$

gde je *GM* geometrijska sredina. Lako možemo videti da je funkcija *M* kvazi-aritmetička sredina generisana sa neopadajućom funkcijom $g(x) = \log\frac{x}{1-x}$, čija je inverzna funkcija $g^{-1}(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

Uporedimo *M* sa geometrijskom sredinom *GM*, koja je generisana sa $f(x) = \log(x)$. Pošto je $(g \circ f^{-1})(x) = \log\frac{e^x}{1-e^x}$ konveksna, iz tvrđenja 3.3 dobijamo da je $GM \leq M$.

Sada predstavljamo aksiomatizaciju klase kvazi-aritmetičke sredine kao proširene funkcije agregacije.

Lema 3.5 [2] Ako je $F: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ idempotentna, simetrična i dekompozabilna funkcija, tada za svaki ograničen interval $[a, b] \subseteq \mathbb{I}$, postoji funkcija $\psi: [0,1] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ pri čemu je $\psi(0) = a$ i $\psi(1) = b$, tako da je

$$F(\psi(z_1), \dots, \psi(z_n)) = \psi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i\right) \qquad \left(z \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}([0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n)\right).$$

Štaviše, ako je *F* neopadajuća (ili strogo rastuća), tada je i ψ.

Dokaz ove leme se može pogledati u [2]. Ideja je da za proizvoljan racionalan broj $z = \frac{p}{q} \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, posmatramo

$$\psi(z) \coloneqq F(p \cdot b, (q-p) \cdot a).$$

Teorema 3.6 [2] $F: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je simetrična, neprekidna, strogo rastuća, idempotentna i dekompozabilna ako i samo ako postoji neprekidna i strogo monotona funkcija $f: \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ takva da je $F = M_f$ proširena kvazi-aritmetička sredina generisana sa *f*.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Trivijalno.

($\Leftarrow$) Prvo ćemo predpostaviti da je $\mathbb{I}$ zatvoreni interval $[a,b]$. Na osnovu Leme 3.5, postoji strogo rastuća funkcija $\psi\colon [0,1] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, pri čemu je $\psi(0) = a$ i $\psi(1) = b$, tako da je

$$F\big(\psi(z_1), \dots, \psi(z_n)\big) = \psi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i\right) \quad (3.2)$$

za svako $z \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}([0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n)$.

Pokazaćemo da funkcija ψ može biti prošireno neprekidna na $[0,1]$. Predpostavimo suprotno, da postoji $x \in (0,1)$ tako da je

$$\psi(x-0) = u, \qquad \psi(x+0) = v, \qquad u < v.$$

Neka su $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ i $(z'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ nizovi u $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ koji konvergiraju ka x, takvi da je $z_m < m < z'_m$ i $\frac{1}{2}(z_m + z'_m) < x$. Tada, koristeći (3.2), dobijamo da je

$$u = \lim_{m\to\infty} \psi\left(\frac{z_m + z'_m}{2}\right) = \lim_{m\to\infty} F(\psi(z_m), \psi(z'_m)) = F(u,v) > F(u,u) = u$$

kontradikcija. Isti zaključak važi i za *x=0* ili *x=1*.

Vidimo da je skup $\{\psi(z)\colon z \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}$ gust svugde na $[a,b] = [\psi(0), \psi(1)]$. Prema tome, na osnovu neprekidnosti, možemo proširiti funkciju ψ u svakoj tački intervala $[a,b]$ i definisati njenu inverznu funkciju na $[a,b]$ što dokazuje rezultat kada je $\mathbb{I} = [a,b]$.

Sada ćemo dokazati rezultat za opšti interval $\mathbb{I}$, koji može biti ograničen. Razmatramo interval $[a_m, b_m]$, gde je $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ (odnosno $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$) proizvoljan monoton opadajući (odnosno rastući) niz koji konvergira ka a (odnosno b). Zatim, prema onom što je već dokazano, imamo $F = M_{f_m}$ na $[a_m, b_m]^n$, gde je f_m generator od F na $[a_m, b_m]$. Slično tome, imamo $F = M_{f_{m+1}}$ na $[a_{m+1}, b_{m+1}]^n$, gde je f_{m+1} generator od F na $[a_{m+1}, b_{m+1}]$. Pošto je $M_{f_m} = M_{f_{m+1}}$, na osnovu Tvrđenja 3.3 , možemo izabrati $f_{m+1} = f_m$ na $[a_m, b_m]$. Konačno, definišući

$$f(x) = \lim_{m\to+\infty} f_m(x)$$

dobijamo $F = M_{f_m}$ na $\mathbb{I}$, gde je $f\colon \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ neprekidna i strogo monotona.■

Posledica 3.7 [2] $F\colon \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ je neprekidna, strogo rastuća, idempotentna i strogo dekompozabilna ako i samo ako postoji neprekidna i strogo monotona funkcija $f\colon \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ tako da je $F = M_f$ proširena kvazi-aritmetička sredina generisana sa *f*.

3.3 Uređeni ponderisani operator usrednjavanja - OWA operator

OWA (*eng. ordered weighted averaging*) operatore je uveo Ronald R. Yager da obezbedi sredstva za agregaciju rezultata pridružene sa satisfakcijom u višekriterijumskom odlučivanju i pomoću ovog operatora dolazi do sjedinjavanja konjunktivnih i disjunktivnih osobina. OWA operator se definiše na sledeći način [1]:

$$OWA(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j x_{\sigma(j)},$$

gde je σ permutacija tako da je $x_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq x_{\sigma(n)}$. Težinski koeficijenti su nenegartivni $(w_i \geq 0)$ i njihov zbir jednak je 1 $(\sum_{i=1}^{n} w_i = 1)$.

Pomoću OWA operatora se dobija parametrizovana grupa operatora agregacije koja obuhvata mnoge poznate operatore kao što su maksimum, minimum, statistika poretka reda *k*, medijana i aritmetička sredina. Da bi se dobio neki od ovih operatora, treba izabrati odgovarajući težinski koeficijent.

	OWA operator
Minimum	$\begin{cases} w_1 = 1 \\ w_i = 0, ako\ je\ i \neq 1 \end{cases}$
Maksimum	$\begin{cases} w_n = 1 \\ w_i = 0, ako\ je\ i \neq n \end{cases}$
Medijana	$\begin{cases} w_{\frac{n+1}{2}} = 1, ako\ je\ n\ neparno \\ w_{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}\ i\ w_{\frac{n}{2}+1} = \frac{1}{2}, ako\ je\ n\ parno \\ w_i = 0, ostalo. \end{cases}$
k-redosled statistika	$\begin{cases} w_k = 1 \\ w_i = 0, ako\ je\ i \neq k \end{cases}$
Aritmetička sredina	$w_i = \frac{1}{n}$ za svako *i*

Tabela 3.2: Specifični slučajevi OWA operatora

OWA operatori su komutativni, monotoni, idempotentni i stabilni su za pozitivne linearne transformacije. Agregacija dobijena OWA operatorima je uvek između maksimalne i minimalne vrednosti. Kako OWA operator generalizuje minimum i maksimum, može se posmatrati kao

parametrizovan način prelaženja od minimum do maksimuma. U tom kontekstu, R. R. Yager uvodi operator maxness koji se definiše na sledeći način [1]:

$$maxness(w_1, \dots, w_n) = \sum_{j=1}^{n} w_{n-j+1} \cdot \frac{n-j}{n-1} = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot \frac{j-1}{n-1}.$$

Može se primetiti da za minimum važi $maxness(1,0,\dots,0) = 0$, a za maksimum $maxness(0,\dots,0,1) = 1$.

Drugi operator su uveli R. R. Yager i O'Hagan u [1]. Ovaj operator opisuje disperziju težinskih koeficijenata i bazira se na ideji entropije:

$$dispersion(w_1, \dots, w_n) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \cdot ln(w_j).$$

Jedna od najvažnijih primena OWA operatora je razvijanje odgovarajuće metodologije za izvođenje težinskih koeficijenata koji se koriste u OWA agregaciji. Koriste se dva glavna pristupa.

Prvi pristup koristi meru maksimuma i meru disperzije. Ideja je da se maksimizuje disperzija težinskih koeficijenata uz uslov fiksnog maxness-a. Težinski koeficijenti se izračunavaju, koristeći dato $\alpha \in [0,1]$, na sledeći način [1]:

$$\text{Maksimum} - \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot \ln(w_j) \text{ (disperzija)}$$

gde su uslovi:

- $maxness(w_1, \dots, w_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot \frac{j-1}{n-1} = \alpha$,
- $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$,
- $0 \leq w_j \leq 1$.

Drugi pristup koristi informacije lingvističkog kvantifikatora radi agregacije. Koriste se kvantifikatori definisani na sledeći način:

- $Q(0) = 0$ i $Q(1) = 1$,
- ako je $x \leq y$ tada je $Q(x) \leq Q(y)$.

Na osnovu pristupa ove vrste kvantifikatora, R. R. Yager uvodi formulu kojom se izračunavaju težinski koeficijenti [1]:

$$w_j = Q\left(\frac{n-j+1}{n}\right) - Q\left(\frac{n-j}{n}\right).$$

Da bi se došlo do rešenja Q kriterijum mora da bude zadovoljen. Na primer, ako želimo da kriterijum "najmanje 100%" bude zadovoljen, koristi se operator minimum. A kada je minimum zadovoljen, tada su svi kriterijumi zadovoljeni.

3.4 Choquet i Sugeno integrali

U ovom delu daćemo temeljnu studiju funkcije agregacije stvorene od integrala koji su definisani u odnosu na neaditivne mere, sa naglaskom na Choquet integral i Sugeno integral. Prvo ćemo se upoznati sa neaditivnim merama (koje nazivamo kapacitet u celom poglavlju). A zatim ćemo predstaviti Choquet i Sugeno integrale, opisane u [2],[3],[4],[11].

Definicija 3.8 [2] (i) Skupovna funkcija ξ na $[n]$ je funkcija iz $[n]^2$ u $\mathbb{R}$.

(ii) Igra $v: 2^{[n]} \to \mathbb{R}$ na $[n]$ je skupovna funkcija za koji važi $v(\emptyset) = 0$.

(iii) Kapacitet $\mu: 2^{[n]} \to \mathbb{R}_+$ na $[n]$ je igra tako da je $\mu(A) \leq \mu(B)$ kad god je $A \subseteq B$ (monotonost). Kapacitet je normalizovan ako je $\mu([n]) = 1$. Skup kapaciteta na $[n]$ je označen sa $\mathcal{F}(n)$, dok je $\mathcal{F}^*(n)$ podskup normalizovanog kapaciteta.

U celom poglavlju, ξ (odnosno v, μ) će označavati skupovne funkcije (odnosno igru, kapacitet). Podskup $A \subseteq [n]$ je ekvivalentan oznaci $1_A 0 \in [0,1]^n$ ili je definisan na $[n]$ karakterističnom funkcijom 1_A.To je zbog bijekciju između granica iz $[0,1]^n$ i podgrupe iz $[n]$.

Svaka skupovna funkcija ξ bijektivno odgovara pseudo-Bulovoj funkciji $f_\xi: \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ koja je definisana na sledeći način

$$f_\xi(x) \coloneqq \xi(A_x), \forall x \in \{0,1\}^n$$

gde je $A_x \coloneqq \{i \in [n] | x_i = 1\}$. Nasuprot tome, pseudo-Bulovoj funkciji f odgovara jedinstvena skupovna funkcija ξ_f takav da je $\xi_f(A) \coloneqq f(1_A)$. Pseudo-Bulove funkcije imaju široku primenu u operacionim istraživanjima.

Konjunkcija ili dual skupovne funkcije ξ definiše se kao

$$\bar{\xi}(A) \coloneqq \xi([n]) - \xi(A^c), \forall A \in 2^{[n]}.$$

Skupovna funkcija je samokonjunktivni (*eng. self – conjugate*) ako je $\bar{\xi} = \xi$.

Kada je rang od μ $\{0,1\}$, kažemo da je μ 0-1 kapacitet (slično je za igru i skupovnu funkciju). Skup 0-1 kapaciteta označava se sa $\mathcal{F}_{0-1}(n)$.

Definicija 3.9 [2] Neka je μ kapacitet na $[n]$. Kažemo da je μ:

(i)aditivno ako za svaki disjunktni podskup $A, B \subseteq [n]$ važi $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$;

(ii)simetrično ako za svako $A, B \subseteq [n]$, $|A| = |B|$ implicira $\mu(A) = \mu(B)$;

(iii)maksitivno ako za svaki podskup $A, B \subseteq [n]$ važi $\mu(A \cup B) = \mu(A) \vee \mu(B)$;

(iv)minitivno ako za svaki podskup $A, B \subseteq [n]$ važi $\mu(A \cap B) = \mu(A) \wedge \mu(B)$;.

Gornja definicija važi za svaki kapacitet. U nastavku navodimo neke primere.

Primer 3.10 [2] (i) Najmanji normalizovani kapacitet je $\mu_{min}(A) \coloneqq 0, \forall A \subsetneq [n]$.

(ii) Najveći normalizovan kapacitet je $\mu_{max}(A) \coloneqq 1, \forall A \subseteq [n], A \neq \emptyset$.

(iii) Za svako $i \in [n]$, Dirak mera *(eng. Dirac measure)* centrirana na i definiše se za svaki $A \subseteq [n]$ na sledeći način

$$\delta_i = \begin{cases} 1, ako\ i \in A \\ 0, inače \end{cases}.$$

(iv) Za svaki ceo broj k, takav da je $1 \leq k \leq n$ početna mera *(eng. Threshold measure)* τ_k definiše se kao

$$\tau_k(A) \coloneqq \begin{cases} 1, ako\ je\ |A| \geq k \\ 0, inače \end{cases}$$

(v) Za svako $A \subseteq [n]$ jednoglasna igra u_A na $[n]$ definiše se sa

$$u_A(B) \coloneqq \begin{cases} 1, ako\ B \supseteq A \\ 0, inače \end{cases}.$$

Takođe možemo uvesti blažu varijantu definisanu na sledeći način

$$\hat{u}_A(B) \coloneqq \begin{cases} 1, ako\ B \supset A \\ 0, inače \end{cases}.$$

(vi)Uniformni kapacitet μ_{unif} se definiše kao

$$\mu_{unif}(A) = \frac{|A|}{n}, \forall A \subseteq [n].$$

3.4.1 Choquet integral

Kapaciteti, posmatrani kao neaditivna mera, mogu da posluže za definisanje novih intregrala. Takozvani Choquet integral je sinonim za Lebegov integral kada je mera neaditivna. Pojam Choquet integrala prvi je uveo francuski matematičar Gustavo Choquet 1953. godine.

Definisaćemo Choquet integral kao agregacionu funkciju nad $\mathbb{I}^n$. Samim tim ćemo zameniti uobičajenu oznaku $\int$. Posmatraćemo nenegativne vektore.

Definicija 3.11 [2] Neka je μ kapacitet na $[n]$ i $x \in \mathbb{R}_+^n$. Choquet integral od x u odnosu na μ definiše se sa

$$\mathcal{C}_\mu(x) \coloneqq \sum_{i=1}^{n}\left(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i-1)}\right)\mu\left(A_{\sigma(i)}\right) \qquad (3.3)$$

gde je σ permutacija na $[n]$ takva da je $x_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq x_{\sigma(n)}$, pri čemu je $x_{\sigma(0)} \coloneqq 0$ i $A_{\sigma(i)} \coloneqq \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$.

Postoji i ekvivalentna formula:

$$\mathcal{C}_\mu(x) \coloneqq \sum_{i=1}^{n}\left(\mu\left(A_{\sigma(i)}\right) - \mu\left(A_{\sigma(i+1)}\right)\right) \qquad (3.4)$$

pri čemu je $A_{\sigma(n+1)} \coloneqq \emptyset$.

U ovom delu često ćemo koristiti oznaku $x_{(i)}$, umesto $x_{\sigma(i)}$.

Napomena 3.12 [2] Važno je napomenuti da μ ne mora biti monotono da bi se Choquet integral definisao, a to znači da smo mogli uzeti u obzir i igru umesto kapaciteta. Monotonost od μ je ekvivalentna sa monotonošću integrala.Ograničićemo ovaj slučaj samo na kapacitet.

Definicija 3.13 [2] Neka je $\Omega \coloneqq [n], f: \Omega \to \mathbb{R}_+$ i neka je μ kapacitet na Ω. Choquet integral od f u odnosu na μ definiše se kao

$$(C)\int f\, d\mu \coloneqq \int_0^\infty \mu(\{\omega \in \Omega | f(\omega > \alpha)\}) d\alpha.$$

Definicija 3.14 [2] Neka je $x \in \mathbb{R}^n$, μ kapacitet na $[n]$ i neka su x^+ i x^- oznake za apsolutne vrednosti pozitivnih i negativnih delova x, npr. $x^+ := x \vee 0$ i $x^- := (-x)^+$, gde 0 predstavlja nula vektor na $\mathbb{R}^n$.

(i) Simetrični Choquet integral od f u odnosu na μ definiše se na sledeći način:

$$\check{\mathcal{C}}_\mu(x) \coloneqq \mathcal{C}_\mu(x^+) - \mathcal{C}_\mu(x^-).$$

(ii) Asimetrični Choquet integral od f u odnosu na μ definiše se kao:

$$\mathcal{C}_\mu(x) \coloneqq \mathcal{C}_\mu(x^+) - \mathcal{C}_{\bar{\mu}}(x^-).$$

Dalje pokazujemo dva načina uvođenja Choquet integrala, u smislu agregacije. Počinjemo interpolacijom. Počećemo sa ponderisanom aritmetičkom sredinom (*WAM*). $WAM_w(x)$ u odnosu na neki ponderisani vektor $w \in [0,1]^n$, za proizvoljno $x \in [0,1]^n$ može se dobiti kao linearna interpolacija između svih $WAM_w\left(1_{\{i\}}\right), i = 1, \dots, n,$, pri čemu važi $WAM_w\left(1_{\{i\}}\right) = w_i$.

S obzirom da postoje mnoge vrste interpolacije, mi ćemo ovde posmatrati samo linearnu interpolaciju koristeći najmanje moguće poene. Za dato $x \in [0,1]^n$, neka je $\mathcal{V}(x)$ oznaka za skup temena koje se koriste kod linearne interpolacije, što se zapisuje na sledeći način:

$$A_\mu(x) = \sum_{A\subseteq[n]|1_A\in\mathcal{V}(x)} \left(\alpha_0(A) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(A)x_i\right) A_\mu(1_A) \qquad (3.5)$$

gde je $\alpha_i(A) \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n;\ \forall A \subseteq [n]$.

Postoji mnogo različitih triangulacija, ali je jedna od posebnog značaja, jer dovodi do interpolacije gde su svi konstatni termini $\alpha_0(A)$ jednaki nuli. Ova triangulacija koristi $n!$ kanoničkih simpleksa na $[0,1]^n$:

$$conv(\mathcal{V}_\sigma) = [0,1]^n_\sigma := \{x \in [0,1]^n | x_{\sigma(1)} \le \cdots \le x_{\sigma(n)}\},$$

za neku permutaciju σ od $[n]$.

Tvrđenje 3.15 [2] Koristeći kanonički simpleks, linearna interpolacija se zapisuje

$$A_\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i-1)}\right)\mu(\{\sigma(i), \dots, \sigma(n)\}), \forall x \in conv(\mathcal{V}_\sigma).$$

Štaviše, A_μ je neprekidna na $[0,1]^n$.

Dokaz. Neka je $x \in [0,1]^n$ i neka je σ oznaka za permutaciju od $[n]$ pri čemu je

$$x_{\sigma(1)} \le \cdots \le x_{\sigma(n)}.$$

Uzmimo da je $\mathcal{V}(x) = \mathcal{V}_\sigma = \{1_{A\sigma(1)}, \dots, 1_{A\sigma(n)}, 1_\emptyset\}$, pri čemu je $A_{\sigma(i)} := \{\sigma(i), \sigma(i+1), \dots, \sigma(n)\}$. Zapisujemo da se A_μ kada se granične vrednosti od $\mathcal{V}(x)$ moraju poklopiti sa fiksnim vrednostima $A_\mu(1_A), A \in \mathcal{V}(x)$. Prvo primećujemo da su svi konstantni termini $\alpha_0(A)$ jednaki nuli jer temena $1_\emptyset = (0, \dots, 0)$ pripadaju $\mathcal{V}_\sigma$, i $A_\mu(x) = 0$. To nas dovodi do *n* sistema od *n* linearnih jednačina, identifikacijom sa jednačinom $A_\mu(x) = \sum_{A\subseteq[n]|1_A\in\mathcal{V}(x)}(\alpha_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(A)x_i)A_\mu(1_A)$:

$$\sum_{i\in A_{\sigma(j)}} \alpha_i\left(A_{\sigma(j)}\right) = 1$$

$$\sum_{i\in A_{\sigma(j)}} \alpha_i\left(A_{\sigma(k)}\right) = 0, \forall k = 1, \dots, n; k \ne j$$

za svako $j = 1, \dots, n$. Grupisanjem svih jednačina koje se odnose na isti vektor $\alpha\left(A_{\sigma(j)}\right)$ dovodi do n linearnih sistema sa *n* jednačina sa *n* nepoznatih

$$\sum_{i\in A_{\sigma(j)}} \alpha_i\left(A_{\sigma(j)}\right) = 1$$

$$\sum_{i \in A_{\sigma(j)}} \alpha_i\left(A_{\sigma(k)}\right) = 0, \forall k = 1, \dots, n; k \neq j$$

za svako $j = 1, \dots, n$. To su sistemi triangulacije čije se rešenje može lako naći

$$\alpha_{\sigma(1)}\left(A_{\sigma(j)}\right) = \alpha_{\sigma(2)}\left(A_{\sigma(j)}\right) = \cdots = \alpha_{\sigma(j-2)}\left(A_{\sigma(j)}\right) = 0$$

$$\alpha_{\sigma(j-1)} = -1$$

$$\alpha_{\sigma(j)} = 1$$

$$\alpha_{\sigma(j+1)}\left(A_{\sigma(j)}\right) = \alpha_{\sigma(j+2)}\left(A_{\sigma(j)}\right) = \cdots = \alpha_{\sigma(n)}\left(A_{\sigma(j)}\right) = 0$$

za svako $j = 1, \dots, n$. Stoga, dobijamo

$$A_\mu(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(x_{\sigma(j)} - x_{\sigma(j-1)}\right) A\left(1_{A_{\sigma(j)}}\right)$$

što je očekivani rezultat. ■

n-redna funkcija rešetke polinoma $p: [0,1]^n \to [0,1]$ je funkcija definisana za proizvoljno formirane izraze od *n* realnih promenljivih $x_1, \dots, x_n$ povezanih sa $\wedge, \vee$ i proizvoljnom kombinacijom zagrada. Npr. $p(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee x_3$ je 3-redna funkcija rešetke polinoma.

Za datu pseudo-Bulovu funkciju $f: \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$, Lovasz proširenje $\hat{f}: [0,1]^n \to \mathbb{R}$ je jedinstvena neprekidna funkcija, linearna za svaki kanonski simpleks, i poklapa se sa *f* na $\{0,1\}^n$. Tvrđenje 3.15 pokazuje da takvo proširenje uvek postoji i dato je izrazom koji zapisujemo u oznaci pseudo-Bulove funkcije:

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i-1)}\right) f\left(1_{\{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}}\right), \forall x \in [0,1]^n.$$

Sledeće tvrđenje pokazuje odnos između funkcije rešetke polinoma i Lovasz proširenja (otuda i Choquet integrali).

Tvrđenje 3.16 [2] Klasa Lovasz proširenja poklapa se sa linearnom kombinacijom funkcija rešetke polinoma.

Dokaz. Razmotrićemo svaku linearnu kombinaciju funkcija rešetke polinoma

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i(x), \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Ovo je neprekidna funkcija čije je ograničenje kononskog simpleksa linearna funkcija. Dakle, *h* je Lovasz prošrenje ograničeno na $[0,1]^n$.

Nasuprot tome, svaka neprekidna funkcija $h: [0,1]^n \to \mathbb{R}$ koja smanjuje linearnu funkciju na svakom kanonskom simpleksu je linearna kombinacija funkcije rešetke polinoma

$$h(x) = \sum_{A \subseteq [n]} m^h(A) \bigwedge_{i \in A} x_i \,, \forall x \in [0,1]^n$$

gde je m^h Mobius transformacija od $\xi_{h|_{\{0,1\}^n}}$ – skupovna funkcija koja odgovara pseudo-Bulovoj funkciji $h|_{\{0,1\}^n}$. Ovaj izraz je linearan u svakom kanonskom kompleksu i poklapa se sa h za svako 1_B, $B \subseteq [n]$ zbog Mobius transformacije koja se definiše na sledeći način:

$$\xi(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B), \forall A \subseteq [n].$$

U nastavku ćemo predstaviti neke specifične osobine Choquet integrala, a zatim ćemo osobine povezati sa agregacijom.

Definicija 3.17 [2] Neka $x, x' \in \mathbb{R}^n$. Kažemo da su x, x' komonotivni ako postoji permutacija σ od $[n]$ pri čemu je $x_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq x_{\sigma(n)}$ i $x'_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq x'_{\sigma(n)}$ (ekvivalentno ako ne postoje $i, j \in [n]$ tako da je $x_i > x_j$ i $x'_i < x'_j$).

Tvrđenje 3.18 [2] Choquet integral ima sledeće osobine:

(i)Za svako $A \subseteq [n]$ i svaku igru v na $[n]$, važi $\mathcal{C}_v(1_A) = v(A)$.

(ii) Choquet je linearan u odnosu na igru: za proizvoljne igre $v_1, v_2 \in [n]$, proizvoljno $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ važi

$$\mathcal{C}_{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

Za kapacitete, osobina važi za $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$ (pozitivan konus), a za normalizovan kapacitet, važi ako je $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ (konveksna kombinacija).

(iii) Choquet ispunjava komonotivnu aditivnost: za proizvoljne komonotivne vektore $x, x' \in \mathbb{R}$ i proizvoljnu igru v, važi

$$\mathcal{C}_v(x + x') = \mathcal{C}_v(x) + \mathcal{C}_v(x').$$

(iv)Neka su v, v' igre na $[n]$. Tada je $v \leq v'$ ako i samo ako $\mathcal{C}_v \leq \mathcal{C}_{v'}$.

(v)Ako je μ 0-1 kapacitet, tada je

$$C_\mu(x) = \bigvee_{\substack{A \subseteq [n] \\ \mu(A)=1}} \bigwedge_{i \in A} x_i \,, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Ove osobine su očigledne na osnovu definicije Choquet integrala (3.11). Dok (v) važi jer je

$$\mu(\{i|x_i > \alpha\}) = \begin{cases} 1, ako\ je\ \alpha < a \\ 0, ako\ je\ \alpha > a \end{cases}$$

pri čemu je $\alpha = \bigvee_{\substack{T\subseteq[n] \\ \mu(T)=1}} \bigwedge_{i\in T} x_i$. Ideje za dokaz uzete su u [2].

Tvrđenje 3.19 [2] Neka je $\mathbb{I} \coloneqq \mathbb{R}$. Choquet integral $\mathcal{C}_\mu$ i simetrični Choquet integral $\check{\mathcal{C}}_\mu$ ispunjavaju sledeće osobine:

(i) Simetričnost (ili neutralnost, komutativnost) ako i samo ako je μ simetrično.
(ii) Aditivnost ako i samo ako je μ aditivno.

Neka je $\mathbb{I} \coloneqq \mathbb{R}_+$. Tada Choquet integral ispunjava:

(iii) Maksitivnost ako i samo ako je μ 0-1 kapacitet.
(iv) Minitivnost ako i samo ako je μ 0-1 kapacitet.

Dokaz. (i) Dokazujemo osobinu samo za nenegativne vektore. Za proizvoljno $x \in \mathbb{R}_+^n$, ispunjeno je

$$A_\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i-1)}\right)\mu\left(A_{\sigma(i)}\right).$$

Permutacija τ dovodi nas do

$$\mathcal{C}_\mu\left(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i-1)}\right)\mu\left(A_{\sigma\circ\tau^{-1}(i)}\right).$$

Ako važi simetričnost, tada imamo $\mu\left(A_{\sigma(i)}\right) = \mu\left(A_{\sigma\circ\tau^{-1}(i)}\right)$, za svaku permutaciju τ na $[n]$. Jasno, to je moguće ako i samo ako $\mu(A)$ zavisi od kardinalnosti skupa A.

(ii)Predpostavimo da je $\mathcal{C}_\mu$ aditivno. Ako je $A, B \subset [n]$ pri čemu je $A \cap B = \emptyset$ dobijamo na osnovu tvrđenja 3.18 (i) $\mathcal{C}_\mu(1_A + 1_B) = \mathcal{C}_\mu(1_{A\cup B}) = \mu(A \cup B)$. Pošto je $\mathcal{C}_\mu$ aditivno, dobijamo $\mathcal{C}_\mu(1_A + 1_B) = \mathcal{C}_\mu(1_A) + \mathcal{C}_\mu(1_B) = \mu(A) \cup \mu(B)$, čime dokazujemo aditivnost za μ.

Obrnut smer: rezultat je očigledan jer se Choquet integral svodi na ponderisanu aritmetičku sredinu gde je $w_i = (\{i\})$ za svako i.

(iii)Potreban uslov: predpostavimo da μ nije 0-1 kapacitet. Tada postoji $\emptyset \neq A \subsetneq [n]$ gde je $0 < \mu(A) < 1$ i svaki $A' \supset A$ takav da je $\mu(A') = 1$. Neka je $0 < \alpha < \mu(A)$. Tada je za svako $A' \supset A$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\mu(1_A \vee \alpha 1_{A'}) &= \alpha\mu(A') + (1-\alpha)\mu(A) \\ &= \alpha + (1-\alpha)\mu(A) > \mu(A) \end{aligned}$$

$$\mathcal{C}_\mu(1_A) \vee \mathcal{C}_\mu(\alpha 1_{A'}) = \mu(A) \vee \alpha = \mu(A)$$

Došli smo do kontradikcije jer jednakost ne može da važi, tj. predpostavka ne važi. Dovoljan uslov direktno sledi iz uzajamne distributivnosti $\wedge,\vee$.

(iv)Dokaz je sličan kao kod (iii). ■

Sada ćemo navesti odnos Choquet integrala sa nekim funkcijama agregacije.

Tvrđenje 3.20 [2] Neka je μ normalizovan kapacitet i $\mathbb{I} = \mathbb{R}$. Važi sledeće:

(i) $\mathcal{C}_\mu = Min$ ako i samo ako je $\mu = \mu_{min}$.

(ii) $\mathcal{C}_\mu = Max$ ako i samo ako je $\mu = \mu_{max}$.

(iii) $\mathcal{C}_\mu = \mathrm{WAM_w} = \check{\mathcal{C}}_\mu$ ako i samo ako je μ aditivno pri čemu je $\mu(\{i\}) = w_i, \forall i \in [n]$.

(iv) $\mathcal{C}_\mu = \mathrm{OWA_w}$ ako i samo ako je μ simetrično pri čemu je $w_i = \mu(A_{n-i+1}) - \mu(A_{n-i}), i = 1,\ldots,n$ i $w_1 = 1 - \sum_{i=2}^{n} w_i$ gde je A_i svaki podskup od X takav da je $|A_i| = i$ (ekvivalentno $\mu(A) = \sum_{j=0}^{i-1} w_{n-j}, \forall A, |A| = i$).

(v) $\mathcal{C}_\mu$ je funkcija rešetke polinoma ako i samo ako je μ 0-1 kapacitet. Štaviše, svaka funkcija rešetke polinoma u $\mathbb{R}$ je Choquet integral u odnosu na 0-1 kapacitet.

3.4.2 Sugeno integral

Sugeno integral je uveo japanski naučnik Mihio Sugeno 1972. god. kao način da se izračuna očekivana vrednost funkcije u odnosu na neaditivnu verovatnoću (poznata kao Sugeno kapacitet, sa namerom da pruži subjektivno svojstvo verovatnoće). Kao što ćemo videti u nastavku, ovaj integral je formalno sličan Choquet integralu i ima slične osobine.

Iako je matematički veoma sličan, grubo rečeno oni se razlikuju samo po matematičkim operatorima (zbir i proizvod se zamenjuju maksimumom i minimumom, respektivno).

Najpogodniji način da se definiše Sugeno integral je da se koriste funkcije rešetke polinoma, koje predstavljaju kombinaciju izraza sa maksimumom i minimumom uključujući promenljive i konstante.

Definicija 3.21 [2] Klasa funkcija rešetke polinoma iz $\mathbb{I}^n$ na $\mathbb{I}$ je definisana na sledeći način:

(i)Za svako $k \in [n]$, projekcija P_k je funkcija rešetke polinoma iz $\mathbb{I}^n$ na $\mathbb{I}$;

(ii)Ako su p,q funkcije rešetke polinoma iz $\mathbb{I}^n$ na $\mathbb{I}$, tada su $p \vee q$ *i* $p \wedge q$ funkcije rešetke polinoma iz $\mathbb{I}^n$ na $\mathbb{I}$;

(iii)Svaka funkcija rešetke polinoma iz $\mathbb{I}^n$ na $\mathbb{I}$ se formira od konačno mnogo kombinacija pravila (i) i (ii).

Funkcije rešetke polinoma mogu imati nekoliko ekvivalentnih oblika. Na primer, $x_1 \vee (x_1 \wedge x_2)$ i x_1 su ekvivalentne.

Funkcija reštke polinoma je neopadajuća u svakoj promenljivoj. Može se primetiti da se funkcija rešetke polinoma jednoglasno povećava.

Funkcija rešetke polinoma može biti u disjunktnom i konjunktivnom obliku.

Tvrđenje 3.22 [2] Neka je $p: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ funkcija rešetke polinoma. Tada postoje celi brojevi $k, l \geq 1$ i familije $\{A_j\}_{j=1}^{k}$ i $\{B_j\}_{j=1}^{l}$ nepraznih podskupova od $[n]$ tako da je

$$p(x) = \bigvee_{j=1}^{k} \bigwedge_{i \in A_j} x_i = \bigwedge_{j=1}^{l} \bigvee_{i \in B_j} x_i \,.$$

Ekvivalentno, postoji nekonstantna skupovna funkcija $\alpha: 2^{[n]} \to \{0,1\}$ i $\beta: 2^{[n]} \to \{0,1\}$ pri čemu je $\alpha(\emptyset) = 0, \beta(\emptyset) = 0$, tako da je

$$p(x) = \bigvee_{\substack{A \subseteq [n] \\ \alpha(A)=1}} \bigwedge_{i \in A} x_i = \bigwedge_{\substack{A \subseteq [n] \\ \beta(A)=0}} \bigvee_{i \in B} x_i \,.$$

Napomena 3.23 [2] Skupovne funkcije α i β nisu jedinstvene. Na primer, $x_1 \vee (x_1 \wedge x_2)$ i x_1 su ekvivalentne. Uvek možemo da izaberemo α (odnosno β) tako da bude monotono neopadajuća (respektivno nerastuća) u odnosu na uključivanje i u ovom slučaju to je najviše (odnosno najmanje) jednom.

Koncept funkcije rešetke polinoma može se generalizovati tako što se fiksira jedna promenljiva.

Definicija 3.24 [2] Klasa ponderisanih funkcija rešetke polinoma iz $\mathbb{I}^n$ na $\mathbb{I}$ definiše se na sledeći način:

(i)Za svako $k \in [n]$ i svako $c \in \mathbb{I}$, projekcija P_k i konstantna funkcija c je ponderisana funkcija rešetke polinoma iz $\mathbb{I}^n$ na $\mathbb{I}$;

(ii)Ako su p,q ponderisane funkcije rešetke polinoma iz $\mathbb{I}^n$ na $\mathbb{I}$, tada su $p \vee q$ i $p \wedge q$ ponderisane funkcije rešetke polinoma iz $\mathbb{I}^n$ na $\mathbb{I}$;

(iii)Svaka ponderisana funkcija rešetke polinoma se formira kao konačna kombnacija pravila (i) i (ii).

Sada ćemo sve to izraziti u konjunktivnom i disjunktivnom obliku, koristeći tvrđenje 3.22. Dobijamo

$$p(x) = \bigvee_{j=1}^{k}\left(a_j \wedge \bigwedge_{i\in A_j} x_i\right) = \bigvee_{j=1}^{l}\left(b_j \wedge \bigwedge_{i\in B_j} x_i\right), \forall x \in \mathbb{I}^n.$$

Ekvivalentno, postoje skupovne funkcije $\alpha, \beta: 2^{[n]} \to \mathbb{I}$ pri čemu je

$$p(x) = \bigvee_{A\subseteq[n]}\left(\alpha(A) \wedge \bigwedge_{i\in A} x_i\right) = \bigvee_{A\subseteq[n]}\left(\beta(A) \wedge \bigwedge_{i\in B} x_i\right).$$

Sledi da je *n*-arna ponderisana funkcija rešetke polinoma potpuno određena sa najviše 2^n parametara. Skup funkcija α i β nisu nužno jedinstveni.

Kao i kod Choquet integrala, posmatraćemo Sugeno integral kao agregacionu funkciju na $\mathbb{I}^n$ i samim tim usvojiti oznaku $\mathcal{S}_\mu(x)$ umesto uobičajene $(S)\int f\, d\mu$. Takođe ograničićemo se na slučaj kapaciteta, iako definicija važi i za nenegativne igre. Kao i kod Choquet integrala, monotonost kapaciteta je neophodna da bi dobili neopadajuću funkciju agregacije.

Posmatraćemo nenegativne vektore.

Definicija 3.25 [2] Neka je μ kapacitet na $[n]$ i $x \in [0, \mu([n])]^n$. Sugeno integral od *x* u odnosu na μ definiše se kao

$$\mathcal{S}_\mu(x) := \bigvee_{i=1}^{n}\left(x_{\sigma(i)} \wedge \mu(A_{\sigma(i)})\right)$$

gde je σ permutacija na $[n]$ takva da je $x_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq x_{\sigma(n)}$ gde je $A_{(i)} := \{\sigma(i), \dots, \sigma(n)\}$.

Sledi definicija koja se primenjuje u neprekidnim prostorima.

Definicija 3.26 [2] Neka je μ kapacitet na $\Omega := [n]$ i $f: \Omega \to [0, \mu(\Omega)]$. Sugeno integral od *f* u odnosu na μ definiše se kao

$$(S)\int f\, d\mu = \sup_{\alpha\in[0,\mu(\Omega)]}\left(\alpha \wedge \mu(\{\omega | f(\omega) > \alpha\})\right) \qquad (3.6)$$

$$= \inf_{\alpha\in[0,\mu(\Omega)]}\left(\alpha \vee \mu(\{\omega | f(\omega) > \alpha\})\right) \qquad (3.7)$$

Tvrđenje 3.27 [2] Za proizvoljno $x \in [0, \mu([n])]^n$ i proizvoljni kapacitet μ na $[n]$, Sugeno integral od *x* u odnosu na μ može biti zapisan kao

$$\mathcal{S}_\mu(x) = \bigvee_{A\subseteq[n]}\left(\bigwedge_{i\in A} x_i \wedge m(A)\right)$$

$$\mathcal{S}_\mu(x) = \bigwedge_{A\subseteq[n]} \left(\bigvee_{i\in A} x_i \vee \overline{m}(A) \right)$$

gde je m proizvoljna skupovna funkcija takva da je $m_* \leq m \leq m^*$, pri čemu je $m^* \coloneqq \mu$ i

$$m_*(A) \coloneqq \begin{cases} \mu(A), ako\ je\ \mu(A) > \mu(A\backslash i), \forall i \in A \\ 0, inače \end{cases}, \quad \forall A \subseteq [n]$$

i $\overline{m}$ proizvoljna skupovna funkcija takva da je $\overline{m}_* \leq \overline{m} \leq \overline{m}^*$, pri čemu je $\overline{m}_*(A) \coloneqq \mu([n]\backslash A), A \subseteq [n]$ i

$$\overline{m}^*(A) \coloneqq \begin{cases} \mu([n]\backslash A), ako\ je\ \mu([n]\backslash A) < \mu\big(([n]\backslash A) \cup i\big), \forall i \in A \\ 1, inače \end{cases}, \qquad \forall A \subseteq [n].$$

Dokaz. Pošto je Sugeno integral ponderisana funkcija rešetke polinoma, postoji skupovna funkcije m na $[n]$ takva da je $\mathcal{S}_\mu = p_m^\vee$ za svako $m_* \leq m \leq m^*$ pri čemu m_*, m^* odgovara α_*, α^* iz tvrđenja 3.26. Pošto je $\mathcal{S}_\mu(1_A) = \mu(A)$, za svako $A \subseteq [n]$, ovim je dokazana prva jednačina. Drugi deo se dokazuje na sličan način.

Sledeća teorema pokazuje odnos ponderisanih funkcija rešetke polinoma i Sugeno integrala.

Teorema 3.28 [2] Neka je $\mathbb{I} \coloneqq [0,1]$ i neka je $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ funkcija. Sledeće tvrdnje su ekvivalentne.

(i)Postiji jedinstveni normalizovani kapacitet μ tako da je $F = \mathcal{S}_\mu$.

(ii)F je idempotentna ponderisana funkcija rešetke polinoma.

(iii)F je ponderisana funkcija rešetke polinoma za koju važi $F(0) = 0$ i $F(1) = 1$.

Dokaz teoreme se može pogledati u [2]. (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) je trivijalno. A u (iii) ⇒ (i) ideja je da se pokaže da za svaku ponderisanu funkciju rešetke polinoma p postoji normalizovani kapacitet μ tako da je, za svako $x \in [0,1]^n$,

$$p(x) = Med\left(p(0), \mathcal{S}_\mu(x), p(1)\right).$$

Tvrđenje 3.29 [2] Neka je μ kapacitet. Slede ekvivalentne formule za Sugeno integral $\mathcal{S}_\mu$:

$$\mathcal{S}_\mu(x) = y \bigwedge_{i=1}^{n} \left(x_{\sigma(i)} \vee \mu(A_{\sigma(i+1)})\right) \tag{3.8}$$

$$= \bigvee_{i=1}^{n} \left(x_i \wedge \mu\left(\{j | x_j \geq x_i\}\right)\right) \tag{3.9}$$

$$= Med\big(x_1, \dots, x_n, \mu(A_{\sigma(2)}), \dots, \mu(A_{\sigma(n)})\big) \quad (3.10)$$

Dokaz. (3.8) se može dobiti direktno iz (3.7). Formula (3.9) je samo prevod diskretnog slučaja (3.8).

Dokazujemo (3.10). da bismo izbegli komplikovane oznake, koristićemo $x_{(i)}$ i uvesti $\mu_i := \mu(A_{(i)})$. Primetimo da je $\mathcal{S}_\mu(x)$ jednak ili sa $x_{(k)}$ ili sa $\mu_{(k)}$ za neko $k \in [n]$ i tada imamo $x_{(1)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$ i $1 = \mu_{(1)} \geq \cdots \geq \mu_{(n)}$. Korišćenjem definicije 3.26, indeks k odgovara mestu gde je $x_{(i)}$ i $\mu_{(i)}$. Predpostavimo da je $\mathcal{S}_\mu(x) = x_{(k)}$. Tada je $x_{(k)} \leq \mu_{(k)}$ i $x_{(1)}, \dots, x_{(k-1)}, \mu_{(k+1)}, \dots, \mu_{(n)}$ su manji ili jednaki od $\mathcal{S}_\mu$ (otuda $n-1$ vrednosti). Slično tome, $x_{(k)}, \dots, x_{(n)}, \mu_{(2)}, \dots, \mu_{(k)}$ su veći ili jednaki od $\mathcal{S}_\mu$ (ponovo $n-1$ vrednosti). Shodno tome, $\mathcal{S}_\mu$ je srednja vrednost promenljivih $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}, \mu_{(2)}, \dots, \mu_{(n)}$. Kada je $\mathcal{S}_\mu(x) = \mu_{(k)}$, dokaz je gotovo isti.■

Tvrđenje 3.30 [2] Neka je $x \in [0, \mu([n])]$. Sugeno integral ima sledeće osobine:

(i)Za svako $A \subseteq [n]$ i svaku igru v na $[n]$, važi $\mathcal{S}_\mu(1_A) = v(A)$.

(ii)Sugeno integral komutira sa max-min kombinacijama nenegativnih igara: za svaku nenegativnu igru v_1, v_2 na $[n]$ i svako $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$, važi

$$\mathcal{S}_{(\lambda_1 \wedge v_1) \vee (\lambda_2 \wedge v_2)} = \big(\lambda_1 \wedge \mathcal{S}_{v_1}\big) \vee \big(\lambda_2 \wedge \mathcal{S}_{v_2}\big)$$

$$\mathcal{S}_{(\lambda_1 \vee v_1) \wedge (\lambda_2 \vee v_2)} = \big(\lambda_1 \vee \mathcal{S}_{v_1}\big) \wedge \big(\lambda_2 \vee \mathcal{S}_{v_2}\big).$$

(iii)Sugeno integral ima osobinu komonotone maksitivnosti i komonotone minitivnosti: za svaki komonotoni vektor $x, x' \in \mathbb{I}^n$ i svaku nenegativnu igru v, važi

$$\mathcal{S}_v(x \vee x') = \mathcal{S}_v(x) \vee \mathcal{S}_v(x')$$

$$\mathcal{S}_v(x \wedge x') = \mathcal{S}_v(x) \wedge \mathcal{S}_v(x').$$

(iv)Neka su v, v' dve nenegativne igre na $[n]$. Tada je $v \leq v'$ ako i samo ako je $\mathcal{S}_v \leq \mathcal{S}_{v'}$.

(v) $\mathcal{C}_\mu = \mathcal{S}_\mu$ ako i samo ako je μ 0-1 kapacitet.

(vi)Za svaki normalizovani kapacitet μ i svako $x \in \mathbb{I}^n$, važi $\left|\mathcal{C}_\mu(x) - \mathcal{S}_\mu(x)\right| \leq \frac{1}{4}$.

Za prvu, drugu i četvrtu osobinu prilikom dokazivanja koriste se osobine za $\wedge$,$\vee$. A ostatak dokaza može se pronaći u [2].

Sada ćemo razmotriti neke osobine Sugeno integrala $\mathcal{S}_\mu$ opisane u [2]. Sugeno integral je simetričan, aditivan, ima osobinu maksitivnoti i minitivnosti ako postoji simetričan, aditivan, maksitivan i minitivan kapacitet μ. Naravno, predpostavljamo da je $\mathbb{I} = [0, \mu([n])]$. Važi i obrnuto. Pošto je μ 0-1 kapacitet, to implicira jednakost $\mathcal{C}_\mu = \mathcal{S}_\mu$. Na osnovu tvrđenja 3.19 (ii)

znamo da je $\mathcal{C}_\mu$ aditivno ako i samo ako je μ aditivan kapacitet. Na osnovu toga se može zaključiti da je Sugeno integral simetričan ako i samo ako je μ simetričan kapacitet.

U nastavku ćemo pokazati odnos Sugeno integrala sa drugim funkcijama agregacije. Ali pre toga moramo definisati neke funkcije agregacije.

Definicija 3.31 [2] Neka za $w \in [0,1]^n$ važi $\bigvee_{i=1}^{n} w_i = 1$ i posmatrajmo $\mathbb{I} = [0,1]$.

(i)Ponderisani maksimum u odnosu na **w** je funkcija agregacije definisana kao

$$WMax_w(x) \coloneqq \bigvee_{i=1}^{n} (w_i \wedge x_i), \forall x \in \mathbb{I}^n.$$

(ii) Ponderisani minimum u odnosu na ***w*** je funkcija agregacije definisana kao

$$WMin_w(x) \coloneqq \bigwedge_{i=1}^{n} \big((1 - w_i) \vee x_i\big), \forall x \in \mathbb{I}^n.$$

(iii)Određeni ponderisani maksimum u odnosu na ***w*** je funkcija agregacije definisana kao

$$OWMax_w(x) \coloneqq \bigvee_{i=1}^{n} \big(w_i \wedge x_{(i)}\big), \forall x \in \mathbb{I}^n.$$

pri čemu je $x_{(1)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$.

(iv)Određeni ponderisani minimum u odnosu na ***w*** je funkcija agregacije definisana kao

$$OWMin_w(x) \coloneqq \bigwedge_{i=1}^{n} \Big((1 - w_i) \vee x_{(i)}\Big), \forall x \in \mathbb{I}^n.$$

Jasno, $WMax_w$i $WMin_w$ su respektivno maksitivna i minitivna funkcija.

Tvrđenje 3.32 [2] Neka je μ kapacitet i neka je $\mathbb{I} = [0, \mu([n])]$. Tada važi sledeće:

(i) $\mathcal{S}_\mu = Min$ ako i samo ako je $\mu = \mu_{min}$.

(ii) $\mathcal{S}_\mu = Max$ ako i samo ako je $\mu = \mu_{max}$.

(v) $\mathcal{S}_\mu = WMax_w$ ako i samo ako je μ normalizovani maksitivni kapacitet pri čemu je $\mu(\{i\}) = w_i$ za svako $i \in [n]$.

(vi) $\mathcal{S}_\mu = WMin_w$ ako i samo ako je μ normalizovani minitivni kapacitet pri čemu je $\mu([n] \setminus \{i\}) = \mu([n]) - w_i$ za svako $i \in [n]$.

(vii) $\mathcal{S}_\mu = OWMax_w$ ako i samo ako je μ normalizovani simetrični kapacitet pri čemu je $\mu(A) = w_{n-|A|+1}$ za svak $A \subset [n], A \neq \emptyset$.

(viii) $\mathcal{S}_\mu = OWMin_w$ ako i samo ako je μ normalizovani maksitivni kapacitet pri čemu je $\mu(A) = w_{n-|A|}$ za svako $A \subsetneq [n]$.

(ix)Skup Sugeno integrala u odnosu na 0-1 kapacitete poklapa se sa skupom funkcija rešetke polinoma.

3.5 t-norme i t-konorme

Najpoznatija klasa konjunktivnih funkcija agregacije su trougaone norme, ili kraće t-norme. Karl Menger je prvi put uveo u matematičku literaturu pojam trougaone norme. Upotreba ovih operatora se koristila za fuziju distributivnih funkcija koje su potrebne za generalizaciju trougaonih nejednakosti od klasičnih metričkih normi do statističkih metričkih normi. Međutim, postoje I mnoge druge primene ovih operatora. Ovo poglavlje se oslanja na [1],[2],[5].

Mengerova definicija je glasila: Neka je data funkcija $T(\alpha, \beta)$ definisana za $0 \leq \alpha \leq 1$ i $0 \leq \beta \leq 1$. T je trougaona norma ako važi:

- $0 \leq T(\alpha, \beta) \leq 1$,
- T je neopadajuća funkcija za obe promenljive;
- $T(\alpha, \beta) = T(\beta, \alpha)$,
- $T(1,1) = 1$,
- Ako je $\alpha > 0$, tada je $T(\alpha, 1) > 0$.

Sadašnji pojam t-normi i njegovog duala (t-konorme) uveli su B. Schweizer i A. Sklar.

Definicija 3.33 [1] Trougaona norma (t-norma) je funkcija $T: [0,1]^2 \to [0,1]$ takva da za sve $x, y, z \in [0,1]$ važi sledeće:

- $T(x, y) = T(y, x)$ (T1) Komutativnost
- $T(x, y) \leq T(u, v)$akoje $x \leq u$ i $y \leq v$ (T2) Monotonost
- $T\big(x, T(y, z)\big) = T(T(x, y), z)$ (T3) Asocijativnost
- $T(x, 1) = x$ (T4) Jedan (1) je neutralni element

Tvrđenje 3.34 [1] T-norme imaju sledeću osobinu:

$$T(x, y) \leq \min\,(x, y).$$

Dokaz. Koristeći monotonost (T2) i aksiom (T4), dobijamo $T(x, y) \leq T(x, 1) = x$. Koristeći komutativnost (T1) dobijamo $T(x, y) \leq T(1, y) = y$. Sledi da je $T(x, y) \leq \min\,(x, y)$.

Trougaone konorme ili kraće t-konorme su uvedene kao dualne operacije t-normi.One spadaju u grupu disjunktivnih opertora agregacije. Opisane su u [1] i [5].

Definicija 3.35 [1] T-konorma je funkcija $S: [0,1]^2 \to [0,1]$ takva da za sve $x, y, z \in [0,1]$ važi sledeće:

- $S(x, y) = S(y, x)$ (S1) Komutativnost
- $S(x, y) \leq S(u, v)$akoje $x \leq u$ i $y \leq v$ (S2) Monotonost
- $S\big(x, S(y, z)\big) = S(S(x, y), z)$ (S3) Asocijativnost
- $S(x, 0) = x$ (S4) Nula (0) je neutralni element

Može se primetiti da se t-norme i t-konorme razlikuju jedino u pogledu graničnih uslova (sa aksiomatske tačke gledišta).

Tvrđenje 3.36 [1] T-konorme imaju sledeću osobinu:

$$S(x, y) \geq \max(x, y).$$

Dokaz. Ova osobina je posledica aksioma (S1), (S2) i (S4).

U početku je t-konorma uvedena kao dualna operacija za t-normu:

$$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y), \qquad (x, y) \in [0,1].$$

T-norme i t-konorme definisane su za dva elementa. Ali kako su ovi operatori asocijativni, lako se generalizuju na slučaj sa n elemenata.

Primeri osnovnih t-normi i t-konormi (definisanih za dva elementa) dati su u tabeli.

	t-norme	t-konorme
Minimum / maksimum	$T_M(x, y) = \min(x, y)$	$S_M(x, y) = \max(x, y)$
Algebarski proizvod / zbir	$T_P(x, y) = x \cdot y$	$S_P(x, y) = x + y - x \cdot y$
Lukaševicova t – norma /t – konorma	$T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$	$S_L(x, y) = \min(x + y, 1)$
Drastičan proizvod/suma	$T_D(x, y) = \begin{cases} x, ako\ je\ y = 1 \\ y, ako\ je\ x = 1 \\ 0, \quad inače \end{cases}$	$S_D(x, y) = \begin{cases} x, ako\ je\ y = 0 \\ y, ako\ je\ x = 0 \\ 1, \quad inače \end{cases}$

Tabela 3.3

Asocijativnost operacija T_L i T_D nije sasvim trivijalna. Za T_L važi:

$$T_L\big(x, T_L(y,z)\big) = \max(0, x+y+z-2) = T_L(T_L(x,y),z).$$

T_D je različito od nule samo ako su najmanje od dve vrednosti x, y i z jednake 1, u suprotnom je očigledno $min(x,y,z)$.

Definicija 3.37 [4] T-norma T_1 je slabija od t-norme T_2, što se piše $T_1 \leq T_2$, ako važi da je $T_1(x,y) \leq T_2(x,y)$ za svako $(x,y) \in [0,1]^2$. Ekvivalentno, T_2 je jače od T_1.

Za osnovne t-norme važi:

$$T_D \leq T_L \leq T_P \leq T_{M.}$$

Znači, drastičan proizvod T_D i minimum T_M su najslabija i najjača t – norma. Minimum T_M je jedina t-norma gde je svako $x \in [0,1]$ neutralni element. Minimum T_M je idempotentna t-norma.

Za t-konormu S kaže se da je dualna t-normi T, i obrnuto. Upoređujuću osnovne t-norme i t-konorme primećuje se da su jedna drugoj dualne. Upravo zbog te dualnosti menja se poredak koji važi za t-norme, pa za osnovne t-konorme važi:

$$S_M \leq S_P \leq S_L \leq S_{D.}$$

Znači, S_M je najslabija t-konorma, a S_D najjača. Maksimum S_M je idempotentna t-konorma.

Spomenućemo i parametrizovane t-norme i t-konorme. Primeri parametrizovanih t-normi i t-konormi dati su u sledećoj tabeli.

	t-norme	t-konorme
Hamacher $(\gamma \geq 0)$	$\dfrac{x \cdot y}{\gamma - (1-\gamma)\cdot(x+y-x\cdot y)}$	$\dfrac{x+y-x\cdot y-(1-\gamma)\cdot x\cdot y}{1-(1-\gamma)\cdot x\cdot y}$
Yager $(p > 0)$	$max\left(1-[(1-x)^p+(1-y)^p]^{1/p}, 0\right)$	$min\left([x^p+y^p]^{1/p}, 1\right)$
Weber – Sugeno $(\lambda_T, \lambda_S > -1)$	$max\left(\dfrac{x+y-1+\lambda_T\cdot x\cdot y}{1+\lambda_T}, 0\right)$	$min(x+y+\lambda_S\cdot x\cdot y, 1)$
Schweizer i Sklar $(q > 0)$	$1-[(1-x)^q+(1-y)^q-(1-x)^q(1-y)^q]^{\frac{1}{q}}$	$[x^q+y^q-x^q y^q]^{\frac{1}{q}}$

Frank $(s > 0, s \neq 1)$	$log_s\left[1 + \frac{(s^x - 1)\cdot(s^y - 1)}{s - 1}\right]$	$1 - log_s\left[1 + \frac{(s^{1-x} - 1)\cdot(s^{1-y} - 1)}{s - 1}\right]$

Tabela 3.4

Primećujemo da su sve t-norme i t-konorme duali, osim u slučaju Weber – Sugeno. Ovde dualnost važi ako parametri ispunjavaju uslov: $\lambda_S = \frac{\lambda_T}{1+\lambda_T}$.

Definicija 3.38 [1] T-norma je Arhimedova ako za svako $(x, y) \in (0,1)^2$ postoji broj n tako da je

$$T\underbrace{(x,\ldots,x)}_{n-puta} < y\,.$$

Podskup neprekidnih Arhimedovih t-normi (kao i t-konormi) je interesantna jer se može predstaviti pomoću funkcije koju nazivamo aditivni generator.

Tvrđenje 3.39 [1] Za svaku neprekidnu Arhimedovu t-normu *T*, postoji neprekidna opadajuća funkcija f tako da je:

$$T(x_1, \ldots, x_n) = f^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right)$$

pri čemu za funkciju $f: [0,1] \to [0, +\infty]$ važi $f(1) = 0$ i $f^{(-1)}$ je pseudo inverzna funkcija od *f*, definisana formulom:

$$f^{(-1)}(z) = \begin{cases} f^{-1}(z)\ ako\ je\ z \in [0, f(0)] \\ 0\ ako\ je\ z \in (f(0), +\infty] \end{cases}$$

Slično tvrđenje važi i za t-konorme.

Možemo zaključiti da minimum i maksimum nisu Arhimedove, ali mogu biti granični slučajevi Arhimedovih parametrizovanih slučajeva.

3.6 Kompenzacioni operatori

T-norme i t-konorme imaju nedostatak kompenzatorske osobine, a ova osobina je od velikog značaja u procesu agregacije. U donošenju odluka ljudi ne prate tačne osobine t-norme (niti t-konorme) u agregaciji. U cilju da se čoveku približi proces agregacije, postoji operator u jedinici

intervala u odnosu na t-norme i t-konorme, a to je kompenzacioni operator definisan na sledeći način [1]:

$$Z_\gamma(x_1, \dots, x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1-\gamma} \cdot \left(1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i)\right)^{\gamma}.$$

Parametar γ pokazuje stepen kompenzacije. Ovakav operator je poseban slučaj eksponencijalnih kompenzacionih operatora [1]**:**

$$E_\gamma^{T,S}(x_1, \dots, x_n) = \big(T(x_1, \dots, x_n)\big)^{1-\gamma} \cdot \big(S(x_1, \dots, x_n)\big)^{\gamma}$$

gde *T* predstavlja t-normu, a *S* t-konormu.

Eksponencijalni kompenzacioni operatori nisu asocijativni za γ različito od 0 ili 1.

Još jedna vrsta neasocijativnih t-normi i t-konormi, koja se zasniva na kompenzacionom operatoru je konveksno-linearan kompenzacioni operator [1]:

$$L_\gamma^{T,S}(x_1, \dots x_n) = (1 - \gamma) \cdot T(x_1, \dots, x_n) + \gamma \cdot S(x_1, \dots, x_n).$$

Postavlja se pitanje kako odrediti vrednost parametra γ. Metod, zasnovan na fazi tehnikama modelovanja, koja izračunava parameter γ je [1]:

$$\gamma = \frac{T(x_1, \dots, x_n)}{T(x_1, \dots, x_n) + T(1 - x_1, \dots, 1 - x_n)}$$

gde se $T(x_1, \dots, x_n)$ naziva uzvišenost *(eng. highness)* i $T(1 - x_1, \dots, 1 - x_n)$ niskost *(eng. lowness).*

Drugi pristup konstukciji kompenzacionih operatora, koji se bazira na t-normama i t-konormama, zasnovan je na dodatnim generatorima neprekidnih Arhimedovih t-normi i t-konormi. Asocijativni kompenzacioni operator se definiše na sledeći način [1]:

$$C(x, y) = f^{-1}(f(x) + f(y))$$

pri čemu je funkcija *f* definisana formulom:

$$f(x) = \begin{cases} -g\left(\dfrac{x}{e}\right) \text{ ako je } x \le e \\ h\left(\dfrac{x - e}{1 - e}\right) \text{ ako je } x \ge e \end{cases}$$

g je aditivni generator t-norme, h aditivni generator t-konorme i e neutralni element. Ovakav operator je poseban slučaj uninormi o kojima će biti reč u narednom poglavlju.

3.7 Uninorme i nulanorme

T-norme i t-konorme igraju zapaženu ulogu u fazi logičkoj teoriji. T-norme ne dozvoljavaju kompenzovanje niske vrednosti sa visokim vrednostima i t-konorme ne dozvoljavaju da se kompenzuju visoke vrednosti sa niskim vrednostima (neutralni element t-norme je 1, dok je neutralni element t-konorme 0). Postoje mnoge važne operacije čiji je neutralni element unutrašnja tačka intervala $(0,1)$. Iz tog razloga uvodi se nova grupa binarnih operacija usko povezanih sa t-normom i t-konormom. U pitanju su uninorme, opisane u [1],[2],[5] . Ovaj operator ima neutralan element koji je unutrašnja tačka posmatranog interval, a to je interval $(0,1)$.

Definicija 3.42 [1] Uninorma je funkcija U: $[0,1]^2 \to [0,1]$ koja ispunjava sledeće uslove:

- $U(x,y) = U(y,x)$ (U1) Komutativnost
- $U(x,y) \leq U(u,v)$akoje $x \leq u$ i $y \leq v$ (U2) Monotonost
- $U\big(x, U(y,z)\big) = U(U(x,y),z)$ (U3) Asocijativnost
- $\exists E \in [0,1], \forall X \in [0,1], U(x,e) = x$ (U4) e je neutralni element

Možemo primetiti da su prva tri uslova zajednički za uninorme, t-norme i t-konorme, ali četvrti uslov (U4) važi samo za uninorme. Ove osobine su posebno karakteristične za agregaciju. Asocijativnost uninorme implicira da $U(x,y) \in \{0,1\}$. U slučaju da je $U(0,1) = 0$, tada se radi o komutativnoj, asocijativnoj i monotonoj konjunktivnoj uninormi. A ako je $U(0,1) = 0$, tada je u pitanju disjunktivna uninorma.

Jedna od karakteristika uninormi je kompletno pojačanje *(eng. full reinforcement)*. Uninorme su kompletno pojačane samo ukoliko je neutralni element e različit od nule ili jedinice. Konkretno, uninorme koje imaju $e = 1$ kao neutralni element predstavljaju t-norme, a koje imaju za neutralni element $e = 0$ su t-konorme.

Uninorma se ponaša kao t-norma na $[0,e]^2$,a kao t-konorma na $[e,1]^2$. Uninorma sa neutralnim elementom $e \in (0,1)$ može se predstaviti na sledeći način [1]:

$$\forall (x,y) \in [0,e]^2 \qquad U(x,y) = e \cdot T\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right)$$

$$\forall (x,y) \in [e,1]^2 \qquad U(x,y) = e + (1-e) \cdot S\left(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}\right)$$

gde je T odgovarajuća t-norma i S t-konorma.

Sledeća interesantna karakteristika je kompenzaciono ponašanje. Ni t-norme ni t-konorme ne pokazuju kompenzaciono ponašanje. Ako je $[0,e) \times (e,1] \cup (e,1] \times [0,e)$, tada uninorma zadovoljava sledeći uslov:

$$min(x,y) \leq U(x,y) \leq max(x,y).$$

Ako želimo pronaći kompletno pojačanje za operator, uninorma mora imati neutralni element različit od 0 ili 1. Iz tog razloga uvodimo dve klase uninormi za proizvoljno *e*. U pitanju su minimalna uninorma i maksimalna uninorma.

Definicija 3.40 [1] Minimalna uninorma je najslabija uninorma *U* data sa t-normom *T*, t-konormom *S* i neutralnim elementom *e*. Ovaj operator se definiše na sledeći način [1]:

$$U_{min}(x,y) = \begin{cases} e \cdot T\left(\frac{x}{e},\frac{y}{e}\right) \; za\; x \leq e \; i \; y \leq e \\ e + (1-e) \cdot S\left(\frac{x-e}{1-e},\frac{y-e}{1-e}\right) za\; x \geq e \; i \; y \geq e \\ \min(x,y)\,, inače \end{cases}$$

Definicija 3.41 [1] Maksimalna uninorma je najjača uninorma *U* data sa t-normom *T*, t-konormom *S* i neutralnim elementom *e*. Ovaj operator se definiše na sledeći način:

$$U_{max}(x,y) = \begin{cases} e \cdot T\left(\frac{x}{e},\frac{y}{e}\right) \; za\; x \leq e \; i \; y \leq e \\ e + (1-e) \cdot S\left(\frac{x-e}{1-e},\frac{y-e}{1-e}\right) za\; x \geq e \; i \; y \geq e \\ \max(x,y)\,, inače \end{cases}$$

Nula norme su dobijene iz rešenja Frankove jednačine za uninorme [1]:

$$U(x,y) + N(x,y) = x + y.$$

Nulanorma *N* je komutativni, asocijativni i rastući operator, annihilator je element $\alpha \in [0,1]$. Nulanorma ispunjava sledeće uslove: $\forall x \in [0,a]$ važi $N(x,0) = x$ i $\forall x \in [a,1]$ važi $N(x,1) = x$.

Nulanorma može biti zapisana na sledeći način [1]:

$$N(x,y) = \begin{cases} a \cdot S\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a}\right) \; ako\; je\; x \leq a \; i \; y \leq a \\ a + (1-a) \cdot T\left(\frac{x-a}{1-a},\frac{y-a}{1-a}\right) \; za\; x \geq a \; i \; y \geq a \\ a, inače \end{cases}$$

Iz ovoga se jasno vidi da su klasa t-normi (za $\alpha = 0$) i t-konormi (za $\alpha = 1$) specijalni slučajevi.

4. Komparacija operatora agregacije

U tabeli (4.1) predstavljeni su operatori agregacije i njihove osobine koje su opisane u [2] i [6].

Operator agregacije	***Osobine operatora agregacije***
Aritmetička sredina (AM)	– Strogo monotona (strogo rastuća → osetljiva i jednoglasno rastuća) – Neprekidna – Simetrična – Idempotentna – Unutrašnjost – Nije asocijativna – Dekompozabilna – Nema neutralni elemenat niti annihilator
Geometrijska sredina (GM)	– Nije strogo monotona – Neprekidna (uniformno neprekidna) – Simetrična – Unutrašnjost – Nije asocijativna – Dekompozabilna – Nije konjunktivna – Annihilator u $[0,1]^n$ je 0,a neutralni elemenat nema
Ponderisna aritemtička sredina (WAM)	– Monotona (rastuća i jednoglasno rastuća) – Neprekidna – Nije simetrična – Idempotentna – Aditivna – Bisimetrična

Medijana	– Granični uslovi su zadovoljeni – Monotona – Simetrična – Idempotentna
Minimum (Min) i makismum (Max)	– Monotoni (jednoglasno rastuće, ali ne i strogo rastuće) – Simetrični – Idempotentni – Asocijativni – Dekompozabilni
Uređeni ponderisani operator usrednjavanja (OWA)	– Monoton (rastuća i jednoglasno rastuća) – Simetričan – Neprekidan – Idempotentan – Komonotivno aditivan – Bisimetričan
Choquet integral	– Monoton – Neprekidan – Nije simetričan – Idempotentan – Nije asocijativan – Choquet integral je pogodan za osnovnu agregaciju jer je važno rastojanje između brojeva
Sugeno integral	– Monoton – Neprekidan – Nije simetričan – Idempotentan – Nije asocijativan – Sugeno integral je pogodan za rednu agregaciju jer je jedino niz elemenata važan
t-norma	– Simetrična

	– Asocijativna – Neutralni elemenat je 1
t-konorma	– Simetrična – Asocijativna – Neutralni elemenat je 0
Kompenzacioni operatori	– Asocijativni ako je $\gamma = 0$ ili $\gamma = 1$
Uninorma	– Neutralni elemenat pripada $(0,1)$
Nulanorma	– Komutativna – Asocijativna – Monotona (rastuća) – Annihilator je elemenat $\alpha \in [0,1]$

Tabela 4.1

Kao što se može videti, monotoni operatori su: *AM*, WAM, medijana, *Min*, *Max*, OWA operator, Choquet i Sugeno integrali i nulanorma, dok *GM* nije monotona. Osobinu neprekidnosti imaju: *AM*, *GM*, *WAM*, OWA operator, Choquet i Sugeno integral. *AM*, *GM*, medijana, Min, Max, OWA operator, t-norma, t-konorma, nulanorma su simetrični, dok u opštem slučaju nisu simetrični: WAM, Choquet i Sugeno integral. Idempotenti operatori su AM, WAM, medijana, *Min*, *Max*, OWA operator, Choquet i Sugeno integral. Svojstvo asocijativnosti imaju Min, Max, t-norma, t-konorma, kompenzacioni operator (ukoliko je $\gamma = 0$ ili $\gamma = 1$), nulanorma, dok je u opštem slučaju nemaju: *AM*, *GM*, Choquet i Sugeno integral. Dekompozabilni operatori su: *AM*, *GM*, *Min*, *Max*. Aditivni operatori su WAM i OWA operator (komonotivno aditivan). Osobinu bisimetrije imaju WAM i OWA operator. Neutralni elemenat imaju t-norma (1), t-konorma (0), uninorma (pripada unutrašnjosti intervala $(0,1)$), a nemaju ga u opštem slučaju *AM* i *GM*. Annihilator ima *GM* (u $[0,1]^n$ je 0) i nulanorma (pripada intervalu $[0,1]$), dok ga *AM* nema.

Svaki operator agregacije se može nameštanjem odgovarajućeg koeficijenta svesti na neki od osnovnih matematičkih operatora agregacije. U tabeli 4.2, koja sledi, predstavljeni su primeri kvazi-aritmetičke sredine, OWA operatora, Choquet i Sugeno integrala i na kraju primeri t-norme i t-konorme [1].

Operatori agregacije	***Primeri operatora agregacije***
Kvazi-aritmetička sredina	Za $f: x \to x^\alpha$ kvazi-aritemtička sredina se može definisati na sledeći način: $M_f(x) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Stavljajući određene vrednosti za α dobijaju se različite srednje vrednosti:

	– za $\alpha = 1$ dobija se aritmetička sredina – za $\alpha = 2$ dobija se kvadratna sredina – za $\alpha = -1$ dobija se harmonična sredina – kad $\alpha \to -\infty$ navedena formula teži maksimalnom operatoru – kad $\alpha \to +\infty$ navedena formula teži minimalnom operatoru kad $\alpha \to 0$ navedena formula teži geometrijskoj sredini.
Određeni ponderisani operator usrednjavanja (OWA)	Odabirom odgovarajućeg ponderisanog vektora dobijaju se već navedeni operatori. Specijalni slučajevi OWA operatora: • minimum – $\begin{cases} w_1 = 1 \\ w_i = 0, ako\ je\ i \neq 1 \end{cases}$ • maksimum – $\begin{cases} w_n = 1 \\ w_i = 0, ako\ je\ i \neq n \end{cases}$ • medijana – $\begin{cases} w_{\frac{n+1}{2}} = 1, ako\ je\ n\ neparno \\ w_{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}\ i\ w_{\frac{n}{2}+1} = \frac{1}{2}, ako\ je\ n\ parno \\ w_i = 0, ostalo. \end{cases}$ • aritmetička sredina – $w_i = \frac{1}{n}$ za svako i
Choquet integral	Generalizuje ponderisanu sredinu i OWA operator. Specijalni slučajevi Choquet integrala: • minimum – $\begin{cases} \mu(A) = 1, ako\ je\ A = \Omega \\ \mu(A) = 0, inače \end{cases}$, gde je Ω skup kriterijuma • maksimum – $\begin{cases} \mu(A) = 0, ako\ je\ A = \emptyset \\ \mu(A) = 1, inače \end{cases}$ • ponderisani minimum – $\mu(A) = 1 - \max_{x_i \notin A}[\mu(\{x_i\})]$ i $\mu(\{x_i\}) = w_i$ za svako i • ponderisani maksimum – $\mu(A) = \max_{x_i \in A}[\mu(\{x_i\})]$ i $\mu(\{x_i\}) = w_i$ za svako i.
Sugeno integral	Generalizuje ponderisani minimum i ponderisani maksimu.

	Specijalni slučajevi Sugeno integrala: • minimum – $\begin{cases}\mu(A) = 1, ako\ je\ A = \Omega \\ \mu(A) = 0, inače\end{cases}$, gde je Ω skup kriterijuma • maksimum – $\begin{cases}\mu(A) = 0, ako\ je\ A = \emptyset \\ \mu(A) = 1, inače\end{cases}$ • aritmetička sredina – $\mu(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$ • ponderisana sredina – $\mu(A) = \sum_{x_i} \mu(\{x_i\})$ i $\mu(\{x_i\}) = w_i$ za svako i • OWA operator – $\mu(A) = \sum_{j=0}^{card(A)-1} w_{n-j}$.
t-norme	Primeri t-norme: • minimum – $T_M(x, y) = \min(x, y)$ • proizvod verovatnoće – $T_P(x, y) = x \cdot y$ • Lukaševicova t-norma – $T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$ • drastičan proizvod – $T_D(x, y) = \begin{cases} x, ako\ je\ y = 1 \\ y, ako\ je\ x = 1 \\ 0, \quad inače \end{cases}$
t-konorme	Primeri t-konorme: • maksimum – $S_M(x, y) = \max(x, y)$ • zbir verovatnoće – $S_P(x, y) = x + y - x \cdot y$ • Lukaševicova t-konorma – $S_L(x, y) = \min(x + y, 1)$ • drastična suma – $S_D(x, y) = \begin{cases} x, ako\ je\ y = 0 \\ y, ako\ je\ x = 0 \\ 1, \quad inače \end{cases}$
Nulanorma	Iz definicije za nulanormu (3.11) jasno se vidi da u slučaju da je $\alpha = 0$ nulanorma predstavlja klasu t-normi, a u slučaju da je $\alpha = 1$ nulanorma predstavlja klasu t-konormi.

Tabela 4.2

Primer 4.1 Sada ćemo dati konkretan primer kako operatori agregacije mogu da se iskoriste u praksi ([7],[8]). Neka su u pitanju ocene lokacije za letovanje. Donosioc odluke treba da se odluči za jednu od dve ponuđene lokacije na osnovu tri karakteristike. One će nam biti alternative. A karakteristike na osnovu kojih procenjuje lokaciju su: blizina mora (A), prirodna hladovina (B) i usluga u hotelu (C). Procenu ćemo vršiti upravo na osnovu ovih karakteristika. Procena se vrši za svaku od osobina. Sada ćemo oceniti svaku od ovih karakteristika kod prve lokacije. Svakoj karakteristici dodeljujemo po jedan broj iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Neka je blizina mora ocenjena sa 2, prirodna hladovina sa 5 i usluga u hotelu sa 4. Ocene kod druge lokacije su: blizina mora – 3, prirodna hladovina – 3 i usluga u hotelu – 4. Ove ocene su dodeljivane na osnovu kriterijuma donosioca odluke. Konačan rezultat se izračunava na osnovu operatora agregacije.

a) Maksumum izbacuje najbolju ocenu od unete tri: $Max(2, 5, 4) = 5$ za prvu lokaciju i $Max(3, 3, 4) = 4$ za drugu lokaciju. Pošto maksimum izbacuje najbolju ocenu, donosilac odluke, koji je optimista, smatra da će najbolji faktor prevagnuti. Minimum izbacuje najgoru ocenu: $Min(2, 5, 4) = 2$ za prvu lokaciju i $Min(3, 3, 4) = 3$ za drugu lokaciju. U slučaju minimuma donosilac odluke posmatra najgore ocene, pa od dva zla bira bira najmanje. Ovde je reč o pesimizmu. Ako pogledamo rezultate ova dva operatora, ukoliko je donosioc odluke veći optimista odlučiće se za prvu lokaciju, a ukoliko je veći pesimista odlučiće se za drugu lokaciju.
b) Ako posmatramo medijanu za ove dve lokacije, primećujemo da prva lokacija ima veću medijanu. Prva lokacija: $Med(2, 4, 5) = 4$, a druga lokacija: $Med(3, 3, 4) = 3$.

Sada ćemo pokazati kakve rezultate daju i drugi operatori agregacije.

c) Prvo ćemo izračunati aritmetičku vrednost ocena za ove dve lokacije. Prva lokacija ima aritmetičku vrednost: $AM(2, 4, 5) = \frac{1}{3}(2 + 4 + 5) = \frac{1}{3} \cdot 11 \approx 3.67$, dok druga lokacija ima sledeću aritmetičku vrednost: $AM(3, 3, 4) = \frac{1}{3}(3 + 3 + 4) = \frac{1}{3} \cdot 10 \approx 3.33$. Možemo primetiti da prva lokacija ima veću aritmetičku vrednost.
d) Posmatrajući drugu lokaciju, primećujemo da su sve karakteristike podjednako važne, pa bi iz tog razloga trebala biti bolja od prve. Ali takvo rangiranje se ne može postići, jer se u obzir moraju uzeti i interakcije između datih karakteristika, tj. razlike u karakteristikama, što aritemtička sredina ne može da pokaže. Šta ustvari ovde tražimo? Tražimo: 1. blizina mora i prirodna hladovina su jednako važne karakteristike; 2. lokacija koja je blizu mora je podjenako dobra koliko i lokacija koja ima puno hlada i iz tog razloga ne treba previše favorizovati jednu od te dve lokacije; i 3. lokaciju koja je blizu mora (ili koja ima dosta hladovine) i koja ima vrhunsku uslugu u hotelu treba favorizovati. Ovi uslovi odeđuju kapacitet μ na skupu $P(\Omega), \Omega = \{A, B, C\}$ na sledeći način (kapacitet μ nije aditivan, ali je monoton) :

1. $\mu(\{A\}) = \mu(\{B\}) = 0.35, \mu(\{C\}) = 0.2$;

2. $\mu(\{A,B\}) = 0.5 < \mu(\{A\}) + \mu(\{B\}) = 0.7$;
3. $\mu(\{A,C\}) = \mu(\{B,C\}) = 0.95 > \mu(\{A\}) + \mu(\{C\}) = 0.55$;
4. $\mu(\Omega) = 1, \mu(\emptyset) = 0$.

Primenjujući Choquet integral u odnosu na ovako definisan kapacitet μ i funkciju ocena dobija se:

Prva lokacija – $f(A) = 2, f(B) = 5\ i\ f(C) = 4$, pa je $x_0 = 0 < x_1 = 2 < x_2 = 4 < x_3 = 5$.

Neka je $C_i = \{x | f(x) \geq x_i\}$. Tada je

$C_1 = \{x | f(x) \geq x_1\} = \{A, B, C\} \Longrightarrow\ \mu(C_1) = 1$

$C_2 = \{x | f(x) \geq x_2\} = \{B, C\} \Longrightarrow\ \mu(C_2) = 0.95$

$C_3 = \{x | f(x) \geq x_3\} = \{B\} \Longrightarrow\ \mu(C_3) = 0.35$

Sada se prosečna ocena karakteristika za prvu lokaciju dobija na sledeći način:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_\mu(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{i=1}^{3} (x_i - x_{i-1}) \cdot \mu(C_i) \\ &= (x_1 - x_0) \cdot \mu(C_1) + (x_2 - x_1) \cdot \mu(C_2) + (x_3 - x_2) \cdot \mu(C_3) \\ &= (2 - 0) \cdot 1 + (4 - 2) \cdot 0.95 + (5 - 4) \cdot 0.35 = 4.25\end{aligned}$$

Druga lokacija – $f(A) = 3, f(B) = 3\ i\ f(C) = 4$, pa je $x_0 = 0 < x_1 = 3 \leq x_2 = 3 < x_3 = 4$.

Neka je $C_i = \{x | f(x) \geq x_i\}$. Tada je

$C_1 = \{x | f(x) \geq x_1\} = \{A, B, C\} \Longrightarrow\ \mu(C_1) = 1$

$C_2 = \{x | f(x) \geq x_2\} = \{A, B, C\} \Longrightarrow\ \mu(C_2) = 1$

$C_3 = \{x | f(x) \geq x_3\} = \{C\} \Longrightarrow\ \mu(C_3) = 0.2$

Sada se prosečna ocena karakteristika za drugu lokaciju dobija na sledeći način:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_\mu(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{i=1}^{3} (x_i - x_{i-1}) \cdot \mu(C_i) \\ &= (x_1 - x_0) \cdot \mu(C_1) + (x_2 - x_1) \cdot \mu(C_2) + (x_3 - x_2) \cdot \mu(C_3) \\ &= (3 - 0) \cdot 1 + (3 - 3) \cdot 1 + (4 - 3) \cdot 0.2 = 3.2\end{aligned}$$

Vrednost za prvu lokaciju je veća od vrednosti za drugu. Što bi značilo da se donosioc odluke treba opredeliti za prvu lokaciju.

Choquet integral može se svesti na minimum, maksimum, aritmetičku sredinu, ponderisanu sredinu ili OWA operator, zavisno od kapaciteta μ (pogledati tabelu 4.2 u radu – deo Choquet integral).

e) Možemo da primenimo i Sugeno integral, ali samo ako prilagodimo ulazne vrednosti definiciji Sugeno integrala, tj. ako ulazne vrednosti svedemo na interval [0,1]:

Prva lokacija: $x_1 = 0.4, x_2 = 1, x_3 = 0.8$

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_\mu(x_1, x_2, x_3) &= max_{i=1}^{3}\left(min\big(x_i, \mu(C_i)\big)\right)\\ &= max\left(min\big(x_1, \mu(C_1)\big), min\big(x_2, \mu(C_2)\big), min\big(x_3, \mu(C_3)\big)\right)\\ &= max\big(min(0.4, 1), min(1, 0.95), min(0.8, 0.35)\big) = max(0.4, 0.95, 0.35)\\ &= 0.95\end{aligned}$$

Druga lokacija: $x_1 = 0.6, x_2 = 0.6, x_3 = 0.8$

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_\mu(x_1, x_2, x_3) &= max_{i=1}^{3}\left(min\big(x_i, \mu(C_i)\big)\right)\\ &= max\left(min\big(x_1, \mu(C_1)\big), min\big(x_2, \mu(C_2)\big), min\big(x_3, \mu(C_3)\big)\right)\\ &= max\big(min(0.6, 1), min(0.6, 1), min(0.8, 0.2)\big) = \max(0.6, 0.6, 0.2) = 0.6\end{aligned}$$

Na osnovu novih ocena karakteristika vidimo da je vrednost izračunata pomoću Sugeno integral veća kod prve lokacije.

Sugeno integral može se svesti na (ponderisani) minimum i (ponderisani) maksimum, zavisno od kapaciteta μ (pogledati tabelu 4.2 u radu – deo Sugeno integral).

f) Dalje, primenjujemo OWA operator (na prvobitne ocene). Ako karakteristikama lokacija dodelimo koeficijente, moguće je izračunati vrednosti za OWA operator za obe lokacije. Neka blizina mora i prirodna hladovina imaju koeficijent $w_1 = w_2 = 0.4$, a usluga u hotelu $w_3 = 0.3$. Podrazumeva se da je $w_1 + w_2 + w_3 = 1$.

Prva lokacija (važi: $x_1 = 2 < x_2 = 4 < x_3 = 5$):

$$OWA(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} w_i \cdot x_i = 0.4 \cdot 2 + 0.3 \cdot 4 + 0.4 \cdot 5 = 4$$

Druga lokacija (važi: $x_1 = 3 < x_2 = 3 < x_3 = 4$):

$$OWA(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} w_i \cdot x_i = 0.4 \cdot 3 + 0.4 \cdot 3 + 0.3 \cdot 4 = 3.6$$

Ponovo se može zaključiti (čak i kada smo uveli koeficijente za karakteristike lokacije na osnovu toga koliko je neka karakteristika bitna) da donosilac odluke treba da odabere prvu lokaciju.

Kod OWA operatora, odabirom odgovarajućeg ponderisanog vektora dobijaju se sledeći operatori: minimum, maksimum, medijana i aritmetička sredina (pogledati tabelu 4.2 – OWA operatori).

Zaključujemo da su sve vrednosti između *Min* i *Max*. Rekli smo da minimum daje najgori rezultat (pesimizam), a maksimum najbolji (optimizam). Upravo je to razlog zbog kog se sve vrednosti nalaze između *Min* i *Max*. Na osnovu svih dobijenih rezultata možemo zaključiti da se donosilac odluke treba odlučiti za prvu lokaciju. Treba primetiti da je prva lokacija bolja iako je jedna karakteristika dobila najnižu ocenu. Rezultate dobijene pomoću operatora agregacije u ovom primeru priodikutovćemo u tabeli 4.3 (koncentrisaćemo se na prvu lokaciju).

Operator agregacije	Rezultati za prvu lokaciju
Minimum	Minimum daje najgoru ocenu (2) – pesimizam.
Maksimum	Maksimum daje najbolju ocenu (5) – optimizam.
Medijana	Medijana za prvu lokaciju ima vrednost 4, što znači da naginje optimizmu, tj. najboljoj oceni.
Aritmetička sredina	*AM* za prvu lokaciju iznosi 3.65. Ova vrednost takođe naginje optimizmu, tj. najboljoj oceni.
Choquet integral	$\mathcal{C}_\mu(x_1, x_2, x_3) = 4.25$ – „vuče“ ka optimizmu (najboljoj oceni).
Sugeno integral	Sugeno integral kod prve lokacije naginje optimizmu, tj. najboljoj oceni.
OWA operator	OWA operator ima vrednost 4 i očigledno naginje optimizmu, tj. najboljoj oceni.

Tabela 4.3

Primer 4.2 Sada ćemo pokazati još jedan primer ([5],[7],[8]). Alternative će nam i dalje biti lokacije za odmor. Donosilac odluke treba da se odluči između dve lokacije gde će putovati. Posmatraćemo dve nove karakteristike: temperatura vazduha i cena aranžmana. Svakoj od ove dve karakteristike dodeljujemo jedan broj iz skupa $[0,1]$. Neka je temperatura vazduha kod prve lokacije ocenjena sa 0.5, a kod druge sa 0.45. Cena aranžmana kod prve lokacije ima ocenu 0.85, a kod druge 0.95.

a) Prvi operator koji posmatramo je t-norma. Vrednosti koje smo odabrali uvrstićemo u osnovne primere t-norme.

Prva lokacija:

1. Minimum: $T_M(0.5, 0.85) = min(0.5, 0.85) = 0.5$
2. Proizvod verovatnoće $T_P(0.5, 0.85) = 0.5 \cdot 0.85 = 0.425$
3. Lukaševicova t-norma $T_L(0.5, 0.85) = max(0.5 + 0.85 - 1{,}0) = max(0.35, 0) = 0.35$
4. Drastičan proizvod $T_D(0.5, 0.85) = 0$

Druga lokacija:

1. Minimum: $T_M(0.45, 0.95) = min(0.45, 0.95) = 0.45$
2. Proizvod verovatnoće $T_P(0.45, 0.95) = 0.45 \cdot 0.95 = 0.4275$
3. Lukaševicova t-norma $T_L(0.45, 0.95) = max(0.45 + 0.95 - 1{,}0) = max(0.4, 0) = 0.4$
4. Drastičan proizvod $T_D(0.45, 0.95) = 0$

Primećujemo da su Lukaševicova t-norma i drastičan proizvod isti za obe lokacije. T_M je veće kod prve lokacije, dok je T_P veće kod druge lokacije. S obzirom da je T_M jača t-norma (definicija 3.37), donosilac odluke treba da se odluči za prvu lokaciju.

b) Drugi operator koji posmatramo je t-konorma. Vrednosti koje smo odabrali uvrstićemo u osnovne primere t-konorme.

Prva lokacija:

1. Maksimum: $S_M(0.5, 0.85) = max(0.5, 0.85) = 0.85$
2. Zbir verovatnoće $S_P(0.5, 0.85) = 0.5 + 0.85 - 0.5 \cdot 0.85 = 0.925$
3. Lukaševicova t-konorma $S_L(0.5, 0.85) = min(0.5 + 0.85, 1) = min(1.35, 1) = 1$
4. Drastična suma $S_D(0.5, 0.85) = 1$

Druga lokacija:

1. Maksimum: $S_M(0.45, 0.95) = max(0.45, 0.95) = 0.95$
2. Zbir verovatnoće $S_P(0.45, 0.95) = 0.45 + 0.95 - 0.45 \cdot 0.95 = 0.9725$
3. Lukaševicova t-konorma $S_L(0.45, 0.95) = min(0.45 + 0.95, 1) = min(1.4, 1) = 1$
4. Drastična suma $S_D(0.45, 0.95) = 1$

Primećujemo da su Lukaševicova t-konorma i drastična suma isti za obe lokacije. S_M je veće kod druge lokacije, dok je S_P veće kod prve lokacije. S obzirom da je S_P jača t-konorma, donosilac odluke treba da se odluči za prvu lokaciju (definicija 3.35 i dualnost t-norme i t-konorme).

Jasno je da se donosilac odluke treba odlučiti za prvu lokaciju. Daćemo tabelarni prikaz ovih rezultata (tabela 4.4). Poredimo ponašanje dualne t-norme i t-konorme za drugu lokaciju.

	Rezultat t-norme	Rezultat t-konorme
T_M/S_M	$T_M = 0.45$ – pesimizam.	$S_M = 0.95$ - „vuče“ ka optimizmu.
T_P/S_P	T_P naginje pesimizmu, tj. najgoroj oceni.	S_P naginje optimizmu, tj najboljoj oceni.
T_L/S_L	T_L ima vrednost 0.4, što takođe naginje pesimizmu.	S_L ima vrednost 1 – optimizam.
T_D/S_D	T_D ima vrednost 0 – pesimizam.	$S_D = 1$ – optimizam.

Tabela 4.4

Na osnovu ove tabele može se zaključiti da sve osnovne t-norme naginju pesimizmu, dok osnovne t-konorme naginju optimizmu, što i odgovara teorijskim rezultatima datim tvrđenjima 3.34 i 3.36.

4.1 Neke primene operatora agregacije

Analiziraćemo listu domena primene ([2],[7],[8]).

Prvi deo se odnosi na grupu teorije odlučivanja. Donošenje odluka često donosi agregacione rezultate ili prioritet datog skupa alternative ili rezultata koji se dobijaju od nekoliko donosioca odluka, birača, stručnjaka, itd. Ili predstavljaju različite tačke gledišta, kriterijuma, ciljeva, itd. Ovde se ubrajaju donošenje odluka na osnovu višestrukog kriterijuma ili karakteristika, multiobjektivna optimizacija i multipersonalno odlučivanje.

Drugi deo se zasniva na informacijama ili podacima fuzije. Cilj je da se informacija datog skupa objekata preradi, spajanjem nekoliko izvora. Često, to dovodi do neke vrste odluke, kao u prvoj grupi primena. Tipične aplikacije su šablon za prepoznavanje i klasifikaciju, obrada slika i sistemi zasnovani na ako-onda pravilu.

Primer 4.3 **Donošenje odluka na osnovu višestrukog kriterijuma ili osobina** [2] – Neka X predstavlja skup alternativa (predmeti interesovanja na kojima treba da se zasniva odluka ili izbor, npr. zapošljavanje kandidata, projekti za finansiranje, izdavanje stanova, itd.). Svaka alternativa $x \in X$ predstavlja skup karakteristika (npr. za posao može biti zapošljavanje, otkaz, situacija u firmi/ustanovi, itd.), a procenjuje se na osnovu svojih osobina. Procena daje rezultat za svaku karakteristiku, što odražava karakteristike donosioca odluke među mogućim vrednostima koje ima alternativa (npr. stručna sprema, godine radnog staža, iskustvo, itd.). Način određivanja osobina na osnovu tih karakteristika se naziva kriterijum. Konačan rezultat se

izračunava pomoću funkcija agregacije, koji predstavlja ukupnu ocenu donosioca odluke u vezi sa alternativom, uzimajući u obzir sve kriterijume.

Bez obzira na način koji se koristi, glavni korak u višekriterijumskom odlučivanju je agregacijski korak, gde je najveći broj agregacija najčešće rezultat kriterijuma za dati rezultat. Najčešće korišćena agregaciona funkcija je ponderisana aritmetička sredina. U principu, bilo koja unutrašnja agregaciona funkcija se može koristiti, kao što je na primer aritmetička sredina, ali se mogu koristiti i integralne agregacione funkcije. Choquet integral posebno ovde mora biti spomenut, jer dovodi do mnogih primena.

Primer 4.4 **Multiobjektivna optimizacija** [2] – Situacija je slična za multiobjektivnu optimizaciju (MOP), iako ova oblast ima svoje specifičnosti. U MOP-u, suprotno multikriterijumskom donošenju odluka, postoji veliki broj alternativa (koje se nazivaju rešenja), to je najčešće neprekidan skup. Problem je da se nađe najbolje rešenje maksimalnog skupa objektivnih funkcija $f_1, \dots, f_n$. Svako rešenje $x \in X$ se predstavlja vektorom $f(x) \coloneqq (f_1(x), \dots, f_n(x))$ koji sadrži vrednosti objektivnih funkcija tog rešenja. Ključni pojam je Pareto dominacija: x je Pareto optimalan ako ne postoji $y \in X$ tako da je $f(x) > f(y)$, tj. $f_i(x) \geq f_i(y)$ za svako $i = 1, \dots, n$ i stroga nejednakost važi bar za jedno i. Metode u MOP-u manje ili više znače istraživanje skupa Pareto optimalnih rešenja na efikasan način. Jedna popularna metoda je korištena za parametrizaciju agregacione funkcije A, zamenjujući vektor $f(x)$ sa svojom agregacionom vrednošću, $A(f(x))$. Međutim, funkcija agregacije mora da zadovolji dva uslova "efikasnosti". Prvi uslov govori da maksimizirano $A(f(x))$ daje rešenje koje je Pareto optimalno. Drugi uslov, koji je mnogo teže ispuniti, je da svako Pareto optimalno rešenje mora odgovarati maksimiziranom $A(f(x))$ za neki vektor parametra θ od A. Klasičan rezultat kaže da ponderisana aritmetička sredina zadovoljava ova dva uslova ako je domen $\{f(x)\}_{x \in X}$ koveksan. Za nekonveksan domen, Chebysheva norma se koristi u odnosu na referentnu tačku x_0 na sledeći način:

$$\psi_{w,x_0}(x) = max_{i=1}^{n}\{\omega_i | f_i(x) - f_i(x_0)\}$$

gde je w ponderisani vektor, i ona zadovoljava dva uslova "efikasnosti". Choquet integral može da se koristi kao nekonveksan domen, ali je ova tema slabo istražena do sada.

Primer 4.5 **Multipresonalno odlučivanje** [2] – Teorijski okvir za odlučivanje nekoliko osoba je teorija socijalnog izbora, čiji koreni potiču još iz vremena francuske revolucije kada je istraživana procedura glasanja. Poznata procedura iz ovog vremena je opšte pravo glasa u dva kruga, Borda račun i Condorcet pravilo. Uobičajeni način da se izgradi procedura glasanja je da se uzme u obzir da svaki glasač daje prednost omiljenoj grupu kandidata. Tada se izvrši agregacija ovog reda, da bi se dobio konačan poredak koji daje najboljeg kandidata. Čuvena Arrow-a teorema je uništila svaku nadu da se izabere kandidat koristeći ovaj pristup na racionalan način. To pokazuje da ako neko želi kao rezultat agregacije ukupan red, tada on želi da izbegne diktatore, da zadovolji pravilo jednoglasnosti, i onda ne postoji funkcija agregacije koja zadovoljava ove uslove.

Ovaj rezultat tiče se se agregacije ukupnih redova, a ne numeričkih ocena. To još jednom pokazuje da je priroda „objekata“ za agregaciju u velikoj meri uslovaljena postojanjem agregacionih funkcija. S obzirom da birači daju rezultate kandidatima, što predstavlja njihove želje,to formalno znači da se koristi metoda višekriterijumskog odlučivanja tako da su birači anonimni i tada se bira simetrična agregaciona funkcija. U tom smislu, interesantno je primetiti da način za postizanje rezultata sportista na olimpijskim igrama, je da se uzme aritmetička sredina nakon odbacivanja oba ekstremna rezultata (minimum i maksimum) da bi se izbegla pristrasna procena. Ovo predstavlja poseban slučaj OWA operatora agregacije.

Primer 4.6 **Šablon prepoznavanja i klasifikacije** [2] – Popularan pristup klasifikaciji objekata i prepoznavanje oblika je podatak ili senzor fuzija. Označićemo ponovo sa X skup objekata koji nas interesuju (cveće, životinje, avioni, reči, bolesti, i sl.) koji se svrstavaju u nekom skupu unapred definisanih klasa $\{C_1, \dots, C_n\}$. Svaki objekat iz kompleksne strukture je opisan skupom atributa, koji može da bude veoma velik ili u zavisnosti od domena aplikacije može da bude „izmeren“ skupom senzora, gde svaki od njih daje delimičan opis objekta. Pozivajući se na gornje primere, osobine cveća mogu biti boje latica, listova i prašnika, zatim visina, broj latica, oblik, itd. Avion se može detektovati pomoću nekoliko radara ili posmatranjem dvogledom. U prvom slučaju, klase su različite vrste cveća (na primer, iris Versicolor i iris Virginica) ili u drugom slučaju, klase mogu biti različite vrste aviona.

Za datu klasifikaciju (nepoznatog) objekta, transformacija merenja je data senzorima $S_1, \dots, S_n$ ili vrednostima atributa u poverljivim stepenima pripadnosti nekoj klasi. Specijalno, $d(S_i, C_j, x)$ je stepen poverenja tako da x pripada klasi C_j u odnosu na senzor S_i (ili atribut i). Konačno, agregacija stepena poverenja $d(S_1, C_j, x), \dots, d(S_n, C_j, x)$ je izvršena, što daje ukupan stepen poverenja za x koji pripada klasi C_j. Strogo gledano, funkcija agregacija treba da zavisi od klase tako da je p različitih funkcija agregacije korišteno. To je zato što neki senzori mogu biti diskriminisani za određene klase, a ne mogu da razlikuju neke druge. Stoga, težina datog senzora treba da zavisi od klase.

Unutrašnja ponderisana (nesimetrična) funkcija agregacije je najbolji izbor u ovoj situaciji. Choquet integral zbog svoje raznovrsnosti uspešno se koristi u praktičnoj primeni.

Primer 4.7 **Obrada slike** [2] – Ovaj domen je povezan sa prethodnim, i slični pristupi se koriste. Analiza slike je težak zadatak da se senzor (ili metoda) fuzije koristi. Ovde se takođe Choquet integral može koristiti.

Još jedno mesto gde se funkcija agregacije koristi u obradi slike je filtriranje. Razmotrimo jednostavno sivi nivo slike i piksel (element slike) x od toga. Označavamo sa $h(x)$ sivi nivo piksela x. Filtriranje se sastoji od menjanja vrednosti $h(x)$, uzimajući sive nivoe suseda od x. Sa W_x označavamo skup suseda od x i nalazimo $h'(x) = A(y|y \in W_x)$, koristeći funkciju agregacije A. Linearni filteri (tj. ponderisana aritmetička sredina) su popularni, ali su najpopularniji među njima uređeni statistički filteri – ponderisana aritmetička sredina primenjena na uređenom skupu suseda (u našoj terminologiji to su OWA operatori agregacije) i, ponovo, Choquet integral. Choquet integral filteri se koriste takodje za prepoznavanje tekstura.

Primer 4.8 **Sistemi zasnovani na ako-onda pravilu** [2] – U klasičnoj (binarnoj) logici, pravilo zaključka ima sledeći oblik

$$\text{AKO } p_1 \; I \; p_2 \; I \; \dots I \; p_n, ONDA \; q,$$

gde su $p_1, p_2, \dots, p_n, q$ predikati, istiniti ili lažni. *AKO-ONDA* implikacija je materijalna implikacija $p \to q$ definisana sa $\neg p \vee q$ gde $\vee$ označava logičko ILI. Ako se „laž“ i „istina“ označe sa 0 i 1, redom, tada se istinita vrednost izračunava na sledeći način

$$t = Max(1 - Min(p_1, \dots, p_n), q)$$

Ako je kao u fazi logici, istinita vrednost predikata u intervalu [0,1], gornja formula sadrži agregaciju istinitih vrednosti $p_1, \dots, p_n$ po minimumu, koja je konjunktivna agregaciona funkcija modelovanja. Treba imati na umu da $Max(- \cdot, \cdot)$ nije funkcija agregacije jer opada na prvom mestu, ali je maksimum disjunktivna funkcija agregacije modelovanja. U fazi logici, konjunkcija i disjunkcija su generalno modeleovani od t-norme i t-konorme. Koristeći t- konorme za disjunkciju i različite negacije dovode do šire familije implikacija.

5. Zaključak

U prvom delu master rada data je definicija operatora agregacije. Agregacija je proces spajanja i sjedinjavanja nekoliko vrednosti u jednu. Insistira se upravo na matematičkom aspektu ove agregacije, jer informacija prevedena u broj omogućava daleko lakšu obradu. Dakle, pomoću operatora agregacije se od više ulaznih vrednosti dobija jedna izlazna vrednost. Operatori agregacije imaju značajnu ulogu u mnogim tehnološkim zadacima sa kojima su suočeni naučnici. Imaju široku primenu u opštoj matematici (npr. funkcionalne jednačine, teorija srednjih vrednosti, teorija integracije), u primenjenoj matematici (npr. verovatnoća, statistika), u kompjuterskim i inžinjerskim naukama (npr. veštačka inteligencija, operacija istraživanja, analiza slika), u ekonomiji i finansijama (npr. teorija igara, teorija glasanja, donošenje odluka), zatim u društvenim naukama (npr. matematička psihologija), kao i u mnogim drugim oblastima fizike i prirodnih nauka. U ovom delu su još i navedene i objašnjene osobine koje možemo očekivati od operatora agregacije. Podrazumeva se da nisu sve osobine jednako važne. Npr. rastuća monotonost je neophodna za agregaciju preferencija. Idempotentnost je neophodna kada agregaciona procena predstavlja prosečnu vrednost.

Zatim su u drugom delu predstavljeni primeri matematičkih operatora agregacije koji se najčešće koriste. Najpoznatiji operatori agregacije su aritmetička sredina, medijana, maksimum, minimum, itd. OWA operatori koriste ponderisane koeficijente. Klasa OWA operatora se poklapa sa klasom Choquet integrala ako ispunjava osobinu simetričnosti. Klasa Sugeno integrala se podudara sa familijom ponderisanog minimuma i ponderisanog maksimuma. Choquet i Sugeno integrali se zasnivaju na neaditivnim merama i pokazali su se veoma pogodnim prilikom rešavanja problema u kojima je potrebno doneti odluku na osnovu više kriterijuma i njihove međusobne interakcije. Na kraju drugog delu predstavljene su t-norme, t-konorme, uninorme i nulanorme. Može se zaključiti da su uninorme najbolje za proces agregacije jer im se neutralni element nalazi u intervalu $(0,1)$.

U poslednjem delu navedeni su matematički operatori i osobine koje zadovoljavaju, kao i one koje ne ispunjavaju. Takođe, predstavljene su mogućnosti generalizacije različitih operatora. Takođe, ovaj deo kroz primere posmatra kako operatori agregacije utiču na donosioca odluke, tj. na njegovu krajnju odluku. Minimum daje najgoru ocenu, pa se bira ona bolja (od dva zla treba izabrati ono manje). Kod maksimuma se posmatraju najbolje ocene i optimista smatra da će najbolji faktor preovladati. Medijana posmatra samo karakteristiku koja je u sredini (ona koja ima ocenu koja je u sredini). Aritmetička sredina izračunava srednju vrednost ocena karakteristika. Nijedan od ovih operatora agregacije nije dovoljno dobar, jer ne uvažava i interakcije između karakteristika, kao ni razlike. Choquet integral se pokazao kao najbolji operator agregacije jer donosi odluku na osnovu više karakteristika, ali i interakcija između njih. Sugeno integral je takođe pogodan operator agregacije kod donošenja odluke, ali je potrebno da ocene karakteristika budu u intevalu $[0,1]$. OWA operator je, takođe, vrlo pogodan operator agregacije, jer uključuje i koeficijente karakteristika (koje donosilac odluke dodeljuje

karakteristikama na osnovu svojih prioriteta). Drugi primer se odnosi na t-norme i t-konorme. Može zaključiti da je t-norma dual t-konormi, i obrnuto.

Sama tema rada je zanimljiva i ima veliku primenu u praksi. Predstavljeni materijal je dobar za čitaoca koji želi da stekne osnovna znanja o operatorima agregacije i njihovim osobinama, kao i o njihovoj primeni u donošenju odluka.

Literatura

[1] Marcin Detynieck – *Fundamentals on Aggregation Operators*, http://www-poleia.lip6.fr/~marcin/papers/Detynieck_AGOP_01.pdf

[2] Michel Grabisch, Jean-Luc Marichal, Radko Mesiar, Endre Pap – *Aggregation Functions*, Cambridge University Press, 2009.

[3] Michel Grabisch, Toshiaki Murofushi, Michio Sugeno (eds.) – *Fuzzy Measures and Integrals* – Theory and applications, Physica Verlag, 2000.

[4] Endre Pap – *Fazi mere i njihova primena*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno matematički fakultet Novi Sad, 1999.

[5] Erich Peter Klement, Radko Mesiar, Endre Pap – *Triangular norms*, Kluwer Academic Publichers, 2000.

[6] Ronald R. Yager – *Aggregation Operators*, Physica-Verlag,2002.

[7] Gleb Beliakov, Ana pradera, Tomasa Calvo – *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners*, Springer Publishing Company, 2008.

[8] Tomasa Calvo, Gaspar Mayor, Radko Mesiar – *Aggregation Operators: New Trends and Applications*, Physica-Verlag, Heidelberg, 2002.

[9] Zhenyuan Wang, George J. Klir – *Generalized Measure Theory*, http://link.springer.com/book/10.1007%2F978-0-387-76852-6

[10] Jose M. Merigo – *Decision making with distance measures, OWA operator and weighted averages*, http://gandalf.fee.urv.cat/sigef/english/congressos/congres15/045_Merigo.pdf

[11] Michio Sugeno – Theory of Fuzzy Integrals and its Applications, Ph.D. dissertation, Tokyo, Institute of Technology, 1974.

Biografija

Dulić Jasmina je rođena u Subotici, 13.1.1987. godine. Završila je osnovnu školu „Ivan Milutinović“ u Subotici kao nosilac Vukove diplome. Potom upisuje gimanziju „Svetozar Marković“ u Subotici, prirodno-matematički smer, koju završava 2006. godine sa odličnim uspehom. Iste godine je upisala osnovne akademske studije matematike finansija na departmanu za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu. Zaključno sa septembarskim ispitnim rokom 2010. godine položila je sve predviđene ispite i stekla zvanje Diplomirani matematičar. Nakon toga, oktobra 2010. godine upisuje master studije primenjene matematike, modul – matematika finansija, i sve ispite predviđene planom i programom, kao i grupu pedagoško-psihološko-metodičkih predmeta, položila je zaključno sa septembarskim rokom 2014. godine, i time stekla uslov za odbranu master rada.

Od septembra 2010. godine radi kao nastavnik matematike u osnovnoj školi „Ivan Milutinović” u Subotici.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Jasmina Dulić
AU

Mentor: dr Ivana Štajner-Papuga
MN

Naslov rada: Operatori agregacije i njihova komparacija kroz primere
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski / engleski
JI

Zamlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2015.
GO

Izdavač: autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, PMF, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: 3 poglavlja, 72 strane, 8 tabela, 0 slika, 11 referenci
FOR

Naučna oblast: matematika
NO

Naučna disciplina: primenjena matematika
ND

Predmetna odrednica/ključne reči: operatori agregacije, OWA operator, Choquet integral, Sugeno integral, t-norme, t-konorme, primena operatora agregacije
(**PO**, **UDK**)

Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, PMF, Univerzitet u Novom Sadu
ČS

Važna napomena: nema
VN

Izvod (**IZ**): U radu je predstavljen operator agregacije i njegove osobine koje se zbog svojih svojstava vrlo često zahtevaju pri radu sa operatorima agregacije. Zatim je dat pregled najčešće korišćenih operatora agregacije, opisane su njihove glavne osobine i karakteristike. I na kraju su dati primeri i navedene su neke primene operatora agregacije. U primerima su poređeni rezultati koji su dobijeni pomoću operatora agregacije i navedeno je koliko je neki operator “pozitivan” ili “negativan”.

Datum prihvatanja teme

od strane NN veća: april 2012.
DP

Datum odbrane: februar 2015.
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik: dr Arpad Takači, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Tatjana Došenović, vanredni profesor Tehnološkog fakulteta u Novom Sadu

Mentor: dr Ivana Štajner-Papuga, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Jasmina Dulić
AU

Mentor: Ivana Štajner-Papuga
MN

Title: The Aggregation Operators and comparison through examples
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2015.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: 3 chapters, 72 pages, 8 tables, 0 picture, 11 references
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Decision theory
SD

Subject/Key word: aggregation operators, OWA operator, Choquet integral, Sugeno integral, t-norms, t-conorms, applications of the aggregation operators
SKW

UC:
Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract (**AB**): The paper presents the aggregation operator and its properties which are due to its properties very often require when working with operators aggregation. Then there is an overview of commonly used aggregation operators, described their main features and characteristics. And in the end they give examples and lists some application aggregation operators. In the examples were compared to results which are obtained by using aggregation operators and noted how the operator a "positive" or "negative".

Accepted by the Scientific Board on: April 2012.
ASB

Defended: February 2015.
DE

Thesis defend board:
DB

President: Arpad Takači, PhD, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: Tatjana Došenović, PhD, associate professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Mentor: Ivana Štajner-Papuga, PhD, associate professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad