



Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i
informatiku



Ivana Višekruna 93m/14

Ljapunovljeva inverzna iteracija sa primenom na detekciju Hopfove bifurkacije

Master rad

Mentor

Prof. dr Vladimir Kostić

2017, Novi Sad

Sadržaj

Predgovor	5
1 Motivacija i neophodni koncepti	7
1.1 Dinamički sistemi	7
1.1.1 Definicija dinamičkog sistema	8
1.1.2 Linearizacija autonomnih nelinearnih sistema	9
1.1.3 Stabilnost dinamičkog sistema	10
1.1.4 Klasifikacija ekvilibrija	11
1.2 Pojam bifurkacije	13
1.2.1 Hopfova bifurkacija	18
1.3 Predstavljanje posmatranog problema i uvođenje neophodnih pojmova	19
1.3.1 Kronekerov proizvod	22
1.3.2 Bialternativni proizvod	23
1.3.3 Kronekerov i bialternativni proizvod primenjeni na posmatrani problem	28
1.3.4 Primena Kronekerovog proizvoda u rešavanju Ljapunovljevih jednačina	30
1.3.5 Povezivanje različitih oblika problema karakterističnih korena	32
2 Spoljašnja i unutrašnja iteracija	36
2.1 Spoljašnja - Ljapunovljeva inverzna iteracija	36
2.1.1 Slučaj kad tačka (u^*, α^*) nije u okolini kritične	36
2.1.2 Inverzna iteracija u slučaju da je odabrana tačka u okolini kritične	39
2.2 Unutrašnja iteracija - Ljapunovljevi solveri	41
3 Implementacija u MATLAB®-u	48
3.1 O MATLAB®-u	48
3.2 Implementacija	49
3.2.1 Funkcija <i>Arnoldi.m</i>	49
3.2.2 Funkcije <i>inverse1.m</i> i <i>inverse2.m</i>	50
4 Numerički primeri	55
4.1 Primeri dimenzija 3×3 i 4×4	55
4.2 Bruselatorov model	61

Zaključak	67
Kratka biografija	71

Slike

1.1.1 Fazni portreti različitih vrsta ekvilibrijuma	12
1.2.1 Fazni portret	14
1.2.2 Dijagram bifurkacije	14
1.2.3 Transkritična bifurkacija	14
1.2.4 Portret transkritične bifurkacije	15
1.2.5 Superkritična bifurkacija	15
1.2.6 Portret superkritične bifurkacije	16
1.2.7 Supkritična bifurkacija	16
1.2.8 Grafici dve funkcije	17
1.2.9 Nesavršena bifurkacija	18
4.1.1 Primer 3x3, funkcija inverse2.m	57
4.1.2 Primer dimenzije 3x3, funkcija inverse1.m	59
4.1.3 Primer 4x4, funkcija inverse2.m	60
4.1.4 Primer dimenzije 4x4, funkcija inverse2.m	60
4.2.1 Bruselatorov model dimenzije 40×40 ; rešenje dobijeno funkcijom inverse2.m	63
4.2.2 Bruselatorov model dimenzije 40×40 ; karakteristični koreni . . .	63
4.2.3 Bruselatorov model dimenzije 1000×1000 , uz korišćenje funkcije inverse2.m	64
4.2.4 Bruselatorov model, funkcija inverse1.m	65
4.2.5 Bruselatorov model dimenzije 1000×1000 , primenjena funkcija inverse1.m	66

Predgovor

Čista matematika je, na svoj način, poezija logičkih ideja.

Albert Einstein (1879 - 1955),
nemački fizičar, zaslužan za
otkriće teorije relativnosti

Većina ljudi ima pogrešnu predstavu o matematici. Kažu kako je ona komplikovana, nerazumljiva, nezanimljiva i nema veliku praktičnu primenu. Smatram da je takvo mišljenje proisteklo iz nedovoljnog poznavanja dotične problematike. Da, svakako može biti teška, ali ne i nemoguća, a osećaj koji nastupi kada napokon razumete nešto što vam je zadavalo probleme ili kad rešite komplikovan zadatak je neopisiv. Primena matematike možda nije vidljiva na prvi pogled, ali kad se zagrebe malo ispod površine, ona se može uočiti u pozadini informacionih sistema, finansijskih modela, predviđanja vremenskih prilika ili realizacije građevinskih projekata. To je egzaktna nauka, koja uliva određenu sigurnost u smislu da je $2 + 2$ uvek bilo i biće 4 i gde rešenje može biti ili tačno ili netačno. Matematika razvija mentalne sposobnosti čoveka i podstiče ga da bude pažljiv i precizan, ali ono što je najbitnije je da utiče na stvaranje analitičkog načina razmišljanja koje je posle primenjivo u različitim sferama života.

Linearna algebra je u drugoj godini studija privukla moju pažnju i nakon izučavanja interesantnih modela i problema koje ona obuhvata tokom godina studiranja, odlučila sam se da moj master rad bude vezan za tu oblast matematike. Uz preporuku profesora Vladimira Kostića izabrala sam ovu temu, koja se pokazala kao interesantan, ali nimalo naivan problem.

Rad je osmišljen na sledeći način. U prvoj glavi je obrađen teorijski deo problema, kao i osnovni koncepti koji su neophodni da bi se on razumeo, kao što su pojam dinamičkog sistema, bifurkacije, Kronekerovog i bialternativnog problema i Ljapunovljeve jednačine. Pored toga je detaljno izloženo šta se dešava kad u sistemu diferencijalnih jednačina figuriše neki parametar i na koji način njegova promena utiče na stabilnost rešenja. U sledećoj glavi smo se pozabavili spoljašnjom i unutrašnjom iteracijom i obradili različite algoritme koji pronalaze kritične vrednosti parametra i odgovarajuće karakteristične korene i vektore problema, u zavisnosti od veličine i kompleksnosti istog.

U trećoj glavi smo se fokusirali implementaciju ranije pomenutih algoritama u programskom paketu *MATLAB*[®], dok je četvrta glava rezervisana za numeričke primere i tumačenje dobijenih rezultata.

Želela bih da iskoristim priliku da se zahvalim mom mentoru, dr Vladimiru Kostiću na pomoći prilikom odabira teme, kao i na svim korisnim sugestijama i preporukama koje mi je uputio prilikom izrade ovog rada. Njegova stručnost i poznavanje teme su mi u velikoj meri olakšali posao.

Takođe bih želela da se zahvalim svima koji su tokom ovih pet godina u Novom Sadu bili deo mog života, kolegama, koleginicama, dragim prijateljima i svima od kojih sam imala priliku nešto da naučim.

Na kraju, ali nikako najmanje važno, veliko hvala mojim roditeljima i sestri za neograničenu podršku, ljubav i poverenje koje mi ceo život ukazuju.

Novi Sad, januar 2017.

Ivana Višekruna

Glava 1

Motivacija i neophodni koncepti

Stvari kojih se najviše plašimo -
fluktuacije, poremećaji,
neravnotežna stanja -
predstavljaju primarne izvore
kreativnosti.

*LEADERSHIP AND THE
NEW SCIENCE: Discovering
Order in a Chaotic World
(2006)
Margaret J. Wheatley*

1.1 Dinamički sistemi

Ljudima od nauke je oduvek bilo interesantno da posmatraju različite prirodne pojave i da pokušaju da otkriju zašto se nešto dešava onako kako se dešava. I danas postoji želja da se pronikne u sve što nam je nepoznato i da se pronađe odgovarajući zapis problema, njegovo rešanje, a posebno zanimljivo polje istraživanja je pokušaj predviđanja kako će se predmet posmatranja ponašati u budućnosti. Posmatrano sa matematičkog aspekta, ovakvi problemi se mogu prevesti na jezik dinamičkih sistema.

Dinamički sistem se može posmatrati kao vremenska evolucija modela nekog fizičkog sistema, odnosno, on predstavlja objekat ili proces čije je stanje u nekom trenutku jedinstveno definisano i čije se ponašanje u toku vremena menja u skladu sa određenim zakonom koga nazivamo zakon evolucije [1]. Jedan primer dinamičkog sistema bi bio model kretanja planeta u određenom vremenskom periodu, ukoliko se u obzir uzmu i njihova gravitaciona polja. Ono što bismo se pitali u ovom slučaju bi bilo šta bi se desilo u dužem vremenskom periodu. Da li bi došlo do sudara planeta ili bi sistem opstao [2]?

1.1.1 Definicija dinamičkog sistema

Matematički model dinamičkog sistema se definiše tako što se uvedu dinamičke promenljive (koordinate), koje na jedinstven način određuju stanje sistema, i tako što se uspostavi zakon evolucije. U zavisnosti od linearnosti evolucione funkcije, sistem može biti **linearan** ili **nelinearan**. Rad sa nelinearnim sistemima je mnogo komplikovaniji od rada sa linearnim, pa iz tog razloga pribegavamo postupcima linearizacije, da bismo mogli da koristimo rezultate poznate za linearne sisteme.

Definicija 1.1.1. *Dinamički sistem predstavlja uređenu trojku (X, T, Φ) , gde je*

- X skup stanja sistema, odnosno, fazni prostor;
- T skup vremenskih trenutaka;
- Φ operator evolucije, koji predstavlja preslikavanje $\Phi : (X, T) \rightarrow (X, T)$ takvo da se svako $x_0 \in X$ posmatrano u trenutku $t_0 \in T$, može preslikati u odgovarajuće $x_t \in X$ u trenutku $t = t_0 + \tau \in T$.

Ukoliko je $T = \mathbb{R}$ (ili jednak nekom realnom intervalu) i operator $\Phi(\cdot, t)$ neprekidan $\forall \tau \in T$, dinamički sistem je **neprekidan**. Prilikom rada sa fluidima, ovakvi problemi se nazivaju **tokovi**. Ako je T prebrojiv, onda sistem **diskretan**.

Problem možemo sagledati iz drugačije perspektive, uvodeći elemente diferencijalnih jednačina. Posmatramo objekat čija su stanja opisana vrednostima $x_1, \dots, x_n$ u trenutku $t = t_0$. Ovo predstavlja jedan dinamički sistem čiji zakon evolucije možemo predstaviti sistemom običnih diferencijalnih jednačina prvog reda na sledeći način:

$$\frac{dx_i}{dt} = x'_i(t) = f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), i = 1 \dots, n. \quad (1.1.1)$$

Ako bismo vrednosti $x_1, \dots, x_n$ posmatrali kao koordinate tačke x u n - dimenzionalnom prostoru, stanje sistema bismo mogli geometrijski predstaviti ovom tačkom, koja se naziva **fazna tačka**. Prostor u kojem se odvija ovaj proces nazivamo **fazni prostor (ravan)** dinamičkog sistema. Pomeranje fazne tačke tokom vremena po krivoj koju nazivamo **trajektorija** ili **orbita** odgovara vremenskoj evoluciji stanja sistema. Geometrijska reprezentacija trajektorije u faznoj ravni predstavlja **fazni portret**. Konačno, dinamički sistem možemo predstaviti početnim problemom

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(t, x(t)) = F(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ x|_{t=0} &= x_0 \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

gde je

$$F(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) = [f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \dots, f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t))]$$

vektor funkcija dimenzije n .

Ako je $F(t, x(t)) = F(x(t))$, sistem diferencijalnih jednačina je **autonoman**. S obzirom da je u našem slučaju vreme varijabla od koje autonomni sistem eksplicitno ne zavisi, ovakav autonomni sistem nazivamo **vremenski invarijantan**. Sistem koji nije vremenski invarijantan nazivamo **vremenski varijantnim**. Ukoliko je $F(t, x(t)) = 0, \forall t \in T$, onda je sistem **homogen**. Tačka $x^* \in \mathbb{R}$ za koju važi $F(x^*) = 0$ se naziva **kritična tačka** dinamičkog sistema, odnosno **ekvilibrijum ili stacionarna tačka**. U narednim poglavljima govorićemo o autonomnim dinamičkim sistemima. Radi skraćivanja zapisa, zvaćemo ih samo dinamički sistemi.

1.1.2 Linearizacija autonomnih nelinearnih sistema

Napomenuli smo da u zavisnosti od linearnosti funkcije F razlikujemo linearne i nelinearne dinamičke sisteme. Pošto nelinearne funkcije u velikoj meri komplikuju nalaženje rešenja sistema, cilj nam je da aproksimiramo problematičnu funkciju linearnom, za koju smo već naveli određene osobine.

Naime, ako posmatramo nelinearni autonomni dinamički sistem oblika

$$\dot{x} = F(x), \quad (1.1.3)$$

možemo definisati **Jakobijan** funkcije F u tački $x \in \mathbb{R}^n$ kao matricu $Df(x) = [a_{ij}]$ gde je

$$a_{ij} = \frac{\partial f^i}{\partial x_j}(x), i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.1.4)$$

Ako je x^* kritična tačka sistema (1.1.3), a $A = Df(x^*)$ Jakobijan u kritičnoj tački, možemo da definišemo *linearizaciju* originalnog sistema u x^* na sledeći način

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

odnosno, zapisano u matričnom obliku

$$\dot{x} = Ax, x \in \mathbb{R}^n \quad (1.1.5)$$

Karakteristične korene matrice definišemo kao skup brojeva λ takvih da je

$$Ax = \lambda x, \quad (1.1.6)$$

za vektor $x \neq 0$ koji pri tome nazivamo **karakteristični vektor**. Ako bismo ovu jednačinu alternativno zapisali u obliku $(A - \lambda I)x = 0$, gde I predstavlja jediničnu matricu reda n , da bi vektor x bio različit od nule mora da važi

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (1.1.7)$$

Dakle, rešavanjem jednačine (1.1.7) dobijamo karakteristične korene sistema (1.1.5).

Jedna od interesantnih osobina karakterističnih korena je njihova višestrukost. Razlikujemo algebarsku i geometrijsku višestrukost korena. Algebarska višestrukost korena λ_i matrice A nam govori koliko se puta koren λ_i pojavljuje u spektru, dok je geometrijska višestrukost korena λ_i dimenzija jezgra prostora $(A - \lambda_i I)$. Koren je prost ukoliko mu je algebarska višestrukost jedan, inače je složen.

Karakteristični koreni i vektori igraju izuzetno značajnu ulogu u radu sa dinamičkim sistemima. Pomoću njih se mogu naći rešenja i odrediti tip i stabilnost ekvilibrijuma, kao što ćemo razmatrati u nastavku.

1.1.3 Stabilnost dinamičkog sistema

Bitnu temu istraživanja dinamičkih sistema predstavlja stabilnost. Naime, interesuje nas kako se ponašaju rešenja i trajektorije dinamičkih sistema prilikom malih perturbacija početnih uslova. Postoje različiti oblici stabilnosti rešenja:

- Za stacionarnu tačku x^* kažemo da je **stabilna u smislu Ljapunova** ako za svaku okolinu $U(x^*)$, postoji okolina $V(x^*) \subset U(x^*)$, tako da svako rešenje koje počne u $V(x^*)$ ostane unutar $U(x^*)$, odnosno, matematički zapisano

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \|x_0 - x^*\| < \delta \Rightarrow \forall t \geq 0, \|x(t) - x^*\| < \epsilon. \quad (1.1.8)$$

Ovo znači da rešenja koja nastanu “dovoljno blizu” ekvilibrijuma, zauvek ostaju “dovoljno blizu”. Stacionarna tačka je **nestabilna**, ako nije stabilna.

- Stacionarna tačka x^* je **asimptotski stabilna**, ako je stabilna i važi

$$\exists \delta_0 > 0, \|x_0 - x^*\| < \delta_0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| = 0. \quad (1.1.9)$$

Ovo znači da rešenja koja nastanu “dovoljno blizu” ekvilibrijuma, konvergiraju ka istom.

- Stacionarna tačka x^* je **eksponencijalno stabilna** ako važi

$$\exists \alpha, \beta, \delta > 0, \|x_0 - x^*\| < \delta \Rightarrow \forall t \geq 0, \|x(t) - x^*\| \leq \alpha \|x_0 - x^*\| e^{-\beta t}. \quad (1.1.10)$$

Ovo znači da rešenja konvergiraju ka ekvilibrijumu brzinom ne manjom od $\alpha \|x_0 - x^*\| e^{-\beta t}$.

Poznata je tzv. Teorema linearizacije ([3]) koja nam govori nešto više o stabilnosti linearizovanog sistema.

Teorema 1.1.1. *Neka je x^* kritična tačka linearizovanog sistema dimenzije n i važi da svi koreni Jakobijana u toj tački imaju nenula realni deo. Tada važi da ako je x^* asimptotski stabilna, onda je i linearizacija asimptotski stabilna i nijedan koren Jakobijana nema pozitivan realan deo. U slučaju da su svi koreni Jakobijana nepozitivni (ima i čisto imaginarnih ili nula korena), sistem može biti ili stabilan ili nestabilan.*

1.1.4 Klasifikacija ekvilibrijuma

Na osnovu faznog portreta možemo da zaključimo kog je tipa ekvilibrijum, tj. da li mu se rešanja približavaju tokom vremena, udaljavaju od njega ili su možda skoncentrisana na određenoj udaljenosti od ekvilibrijuma. Ova saznanja nam govore nešto više o stabilnosti sistema. Objasnimo to na primeru linearnog dvodimenzionalnog sistema jednačina

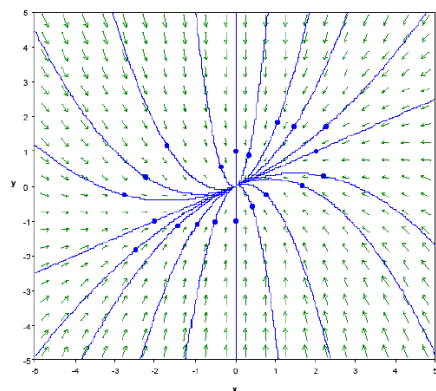
$$\begin{aligned}x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy\end{aligned}\tag{1.1.11}$$

odnosno

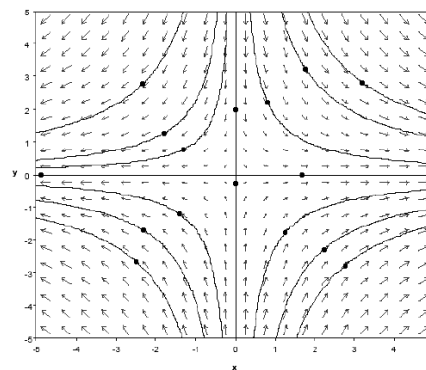
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\tag{1.1.12}$$

gde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Poznato je da na osnovu karakterističnih korena ovog sistema, tj. korena λ_1, λ_2 matrice koeficijenata možemo odrediti tip ekvilibrijuma. Razlikujemo sledeće vrste:

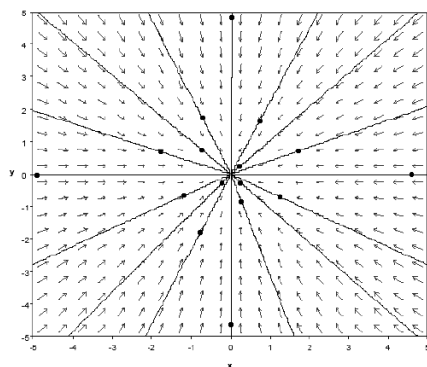
- **Čvor** je kritična tačka predstavljena na slici (1.1.1a). Ona se javlja u slučaju čisto realnih i različitih korena λ_1, λ_2 i može biti asimptotski stabilna (ako su oba karakteristična korena negativna) ili nestabilna (ukoliko su oba korena pozitivna). Rešenje sistema sa ovim ekvilibrijumom izgleda ovako: $x = C_1 k_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 k_2 e^{\lambda_2 t}$, gde su C_1, C_2 konstante, a k_1, k_2 karakteristični vektori.
- **Sedlo** je kritična tačka prikazana na (1.1.1b). Javlja se u slučaju dva realna karakteristična korena suprotnog znaka. Ovaj tip kritične tačke je uvek nestabilan. Rešenje sistema u ovom slučaju izgleda isto kao i za ekvilibrijum čvor.
- **Zvezda** (prikazana na (1.1.1c)) je podvrsta kritične tačke čvor koja se javlja u slučaju dva jednaka, realna korena, uz postojanje dva linearno nezavisna vektora. Važi da je asimptotski stabilna ako su koreni negativni, a ako su pozitivni, onda je nestabilna. Rešenje sistema se dobija izrazom $x = e^{\lambda t}(C_1 k_1 + C_2 k_2)$.
- **Nepravilni čvor** (1.1.1d) se javlja ako imamo dva jednaka, realna korena, ali uz postojanje samo jednog linearno nezavisnog vektora. Za stabilnost važi što važi i za zvezdu. Rešenje u ovom slučaju ima oblik $x = e^{\lambda t}(C_1 k + C_2(kt + \nu))$.
- **Centar** (1.1.1e) je kritična tačka koja se javlja kad imamo par čisto imaginarnih karakterističnih korena $\lambda_{1,2} = \pm ib$, sa odgovarajućim vektorima k_1 i k_2 . Ovaj ekvilibrijum je uvek stabilan, ali nije i asimptotski stabilan.
- **Spirala** (1.1.1f) se javlja u slučaju para kompleksnih korena čiji realni deo nije nula, odnosno $\lambda_{1,2} = a \pm ib$. Ukoliko je realni deo pozitivan spirala je nestabilna, a ako je negativan, onda je asimptotski stabilna.



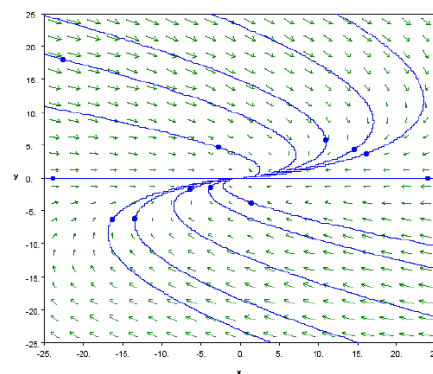
(a) Čvor



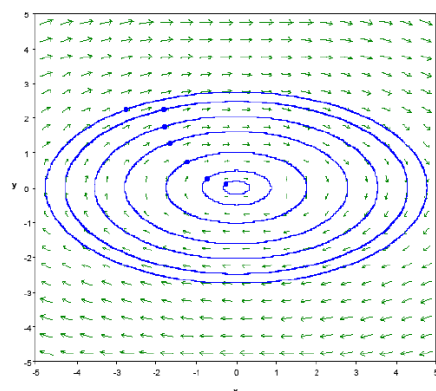
(b) Sedlo



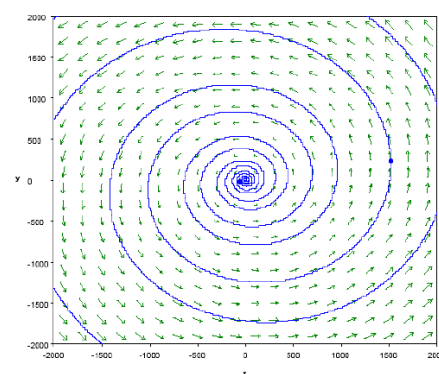
(c) Zvezda čvor



(d) Nepravilni čvor



(e) Centar



(f) Spirala

Slika 1.1.1: Fazni portreti različitih vrsta ekvilibrjuma

Generalno rešenje za poslednja dva slučaja kad dobijemo konjugovano kompleksne karakteristične korene ima oblik

$$x = C_1 e^{at}(k_1 \cos(bt) + k_2 \sin(bt)) + C_2 e^{at}(k_1 \sin(bt) + k_2 \cos(bt)).$$

1.2 Pojam bifurkacije

Različite pojave iz oblasti fizike se mogu opisati posmatranjem dinamičkih sistema, kako jednodimenzionalnih, tako i višedimenzionalnih koji zavise od jednog ili više parametara.

U jednodimenzionalnim sistemima rešenja se mogu podeliti u tri grupe: ravnotežna rešenja, rešenja koja konvergiraju ka ravnotežnim stanjima i divergentna rešenja ([6]). Ono što ove sisteme čini zanimljivijima jeste da vrednosti parametara utiču na kvalitativnu strukturu toka, što znači da se rešenja mogu pojaviti i nestati, a njihova stabilnost se može promeniti kako se menjaju parametri. Ovakve promene se nazivaju bifurkacije i predstavljaju izuzetno interesantan pojam za istraživanje.

Bifurkacija se javlja u problemima sistema diferencijalnih jednačina zavisnih od jednog ili više parametara koji utiču na rešenje sistema. Ako, na primer, posmatramo jednačinu

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \mu) \quad (1.2.1)$$

gde je μ parametar koji figuriše u problemu, kažemo da sistem ima bifurkaciju u $\mu = \mu_0$, ako dolazi do promene u trajektoriji u momentu prolaska μ kroz μ_0 ([5]). Drugim rečima, u tom momentu dolazi do promene u stabilnosti i/ili broju ravnotežnih tačaka (tj. tačaka ekvilibrijuma).

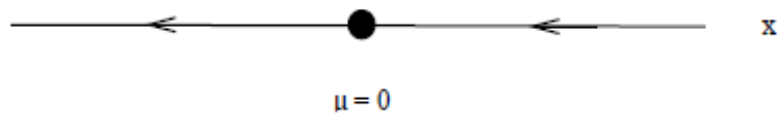
Razlikujemo više tipova bifurkacija ([4]). **Sedlo - čvor bifurkacija** je poznata još i kao **fold bifurkacija** ili **bifurkacija sa tačkom preokreta**¹. Ovo je ujedno najjednostavniji primer u kom može da se desi da fiksna tačka ne postoji za sve vrednosti parametra. Upravo to je slučaj u sledećem primeru.

Primer 1.2.1. *Posmatramo jednačinu*

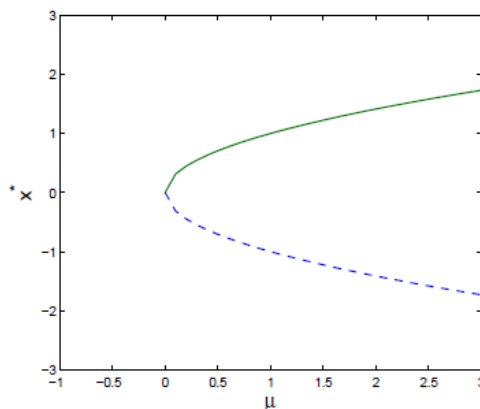
$$\dot{x} = \mu - x^2$$

Tražimo ekvilibrijume u zavisnosti od μ . Ravnotežne tačke ove jednačine se nalaze rešavanjem jednačine $\dot{x} = 0$. Vidimo da, ako je $\mu > 0$, imamo dva ekvilibrijuma, $x^ = \pm\sqrt{\mu}$. Zamenom dobijenih rešenja u $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu) = -2x$ dobijamo da je ekvilibrijum $x^* = \sqrt{\mu}$ stabilan, dok u drugom slučaju, za $x^* = -\sqrt{\mu}$, dobijamo nestabilnost. Ako je $\mu = 0$, ravnotežna tačka je $x^* = 0$, a za $\mu < 0$ ravnotežna tačka ne postoji. Iz činjenice da je izvod u tački $(0, 0)$ takođe nula, o njenoj stabilnosti ne znamo ništa. Međutim, postoji mogućnost grafičkog prikaza faznog portreta ovog sistema (1.2.1) iz kojeg možemo zaključiti da je sporna tačka nestabilna sedlasta tačka i onda kažemo da jednačina ima sedlastu bifurkaciju u $\mu = 0$.*

¹eng. turning - point bifurcation



Slika 1.2.1: Fazni portret vezan za Primer 1.2.1



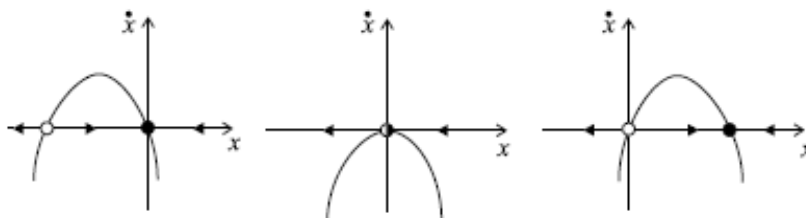
Slika 1.2.2: Dijagram bifurkacije za Primer 1.2.1

Razlikujemo i **transkritičnu bifurkaciju** za koju važi da fiksna tačka postoji za sve vrednosti parametra. Takođe, bitna razlika u odnosu na prethodni tip je i to što u ovom slučaju dve fiksne tačke ne nestaju u tački bifurkacije, već im se samo stabilnost menja.

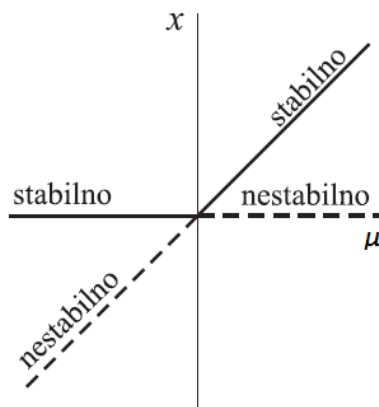
Primer 1.2.2. Posmatrajmo sledeću ODJ

$$\dot{x} = \mu x - x^2. \quad (1.2.2)$$

Ova jednačina ima dva ekvilibrijuma u $x = 0$ i $x = \mu$. Kako je $\frac{\partial f}{\partial x}(0, \mu) = \mu$ i $\frac{\partial f}{\partial x}(\mu, \mu) = -\mu$, vidimo da je ekvilibrijum $x = 0$ stabilan ako je $\mu < 0$ i nestabilan ako je $\mu > 0$, dok za ekvilibrijum $x = \mu$ važi obrnuto, odnosno da je stabilan za $\mu > 0$, a nestabilan za $\mu < 0$.



Slika 1.2.3: Transkritična bifurkacija sistema (1.2.2) za a) $\mu > 0$, b) $\mu = 0$ i c) $\mu < 0$



Slika 1.2.4: Bifurkacioni portret transkritične bifurkacije sistema (1.2.2)

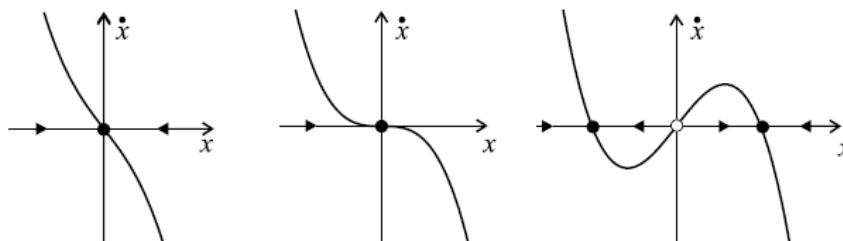
Dakle, transkritična bifurkacija nastaje u sistemima kod kojih postoji trivijalna grana rešenja nezavisno od vrednosti parametra μ , za razliku od bifurkacije sedlo-čvor gde grane rešenja postoje lokalno samo sa jedne strane bifurkacione tačke. U našem primeru trivijalna grana rešenja je $x = 0$. Druga grana rešenja $x = \mu$ prolazi kroz prvu u bifurkacionoj tački $(x, \mu) = (0, 0)$ i tada dolazi do takozvane razmene stabilnosti, gde jedno rešenje iz stabilnog prelazi u nestabilno, a za drugo važi obrnuto.

Sledeći slučaj je **vilasta ili viljuškasta bifurkacija**² gde se fiksne tačke pojavljuju i nestaju u simetričnim parovima. Razlikujemo superkritičnu i supkritičnu viljuškastu bifurkaciju.

Primer 1.2.3. Posmatrajmo sistem

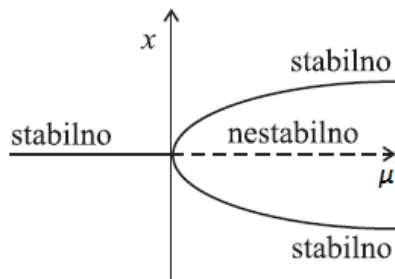
$$\dot{x} = \mu x - x^3 \quad (1.2.3)$$

Vidimo da ova jednačina ima jedan globalni, asimptotski stabilan ekvilibrijum u $x = 0$, ako je $\mu \leq 0$ i tri ekvilibrija $x = 0, x = \pm\sqrt{\mu}$, ukoliko je $\mu > 0$. U tački bifurkacije, stabilni ekvilibrijum 0 gubi svoju stabilnost, a rađaju se dva nova stabilna ekvilibrija $\pm\sqrt{\mu}$ (kako parametar prelazi iz negativnog u pozitivan broj).


 Slika 1.2.5: Superkritična bifurkacija sistema (1.2.3) za a) $\mu < 0$, b) $\mu = 0$ i c) $\mu > 0$.

²eng. pitchfork bifurcation

Ovaj primer viljuškaste bifurkacije u kom iz jednog stabilnog rešenja nastaju dve nove stabilne grane rešenja kako parametar μ raste se naziva *superkritična bifurkacija*.

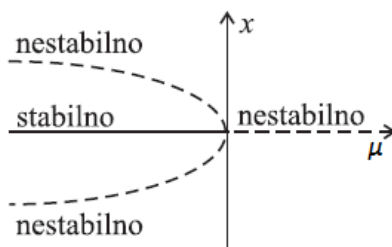


Slika 1.2.6: Bifurkacioni portret superkritične bifurkacije sistema (1.2.3).

Primer 1.2.4. *Primer sistema koji ima supkritičnu viljuškastu bifurkaciju je ODJ*

$$\dot{x} = \mu x + x^3. \quad (1.2.4)$$

Za fiksnu tačku $x = 0$ važi ista analiza kao i ranije, dok su druge dve $x = \pm\sqrt{-\mu}$ nestabilne i postoje samo za $\mu < 0$. Ovo možemo uočiti na sledećoj slici.



Slika 1.2.7: Bifurkacioni portret supkritične bifurkacije sistema (1.2.4).

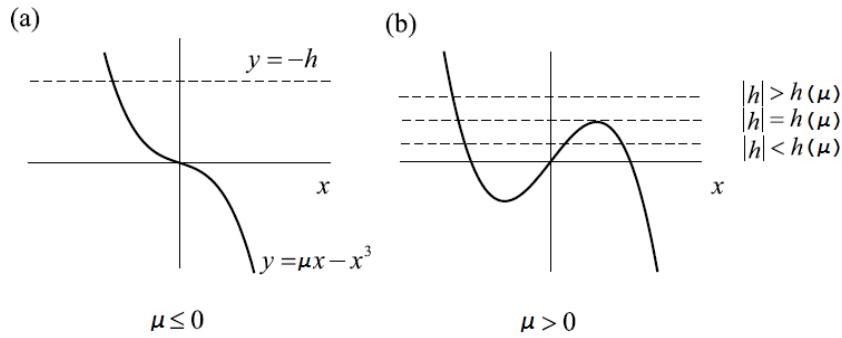
Do sada smo razmatrali kako se jednodimenzionalni sistem ponaša prilikom varijacije jednog parametra. Međutim, možemo posmatrati i slučajeve kad sistem zavisi od dva ili više parametara. U tom slučaju, imamo bifurkacije *kodimenzijske* - n . U sledećem primeru ćemo predstaviti bifurkaciju kodimenzijske - 2 ([6]).

Primer 1.2.5. *Posmatrajmo ODJ*

$$\dot{x} = h + \mu x - x^3. \quad (1.2.5)$$

Kada je $h = 0$, imamo superkritičnu viljuškastu bifurkaciju, a funkcija $\dot{x}$ je neparna. Za $h \neq 0$ gubi se simetrija i stoga se h naziva parametrom narušavanja simetrije.

Posmatramo grafike funkcija $y = \mu x - x^3$ i $y = -h$, za fiksirano μ . Preseci ovih grafika su fiksne tačke sistema (1.2.5), a njihov broj zavisi od vrednosti parametra μ . Naime, za $\mu \leq 0$ seku se u samo jednoj tački, jer je prva kriva opadajuća, a



Slika 1.2.8: Odnos grafika funkcija $y = \mu x - x^3$ i $y = -h$ za različite vrednosti h i μ .

za $\mu > 0$ mogu se seći u jednoj, dve ili tri tačke u zavisnosti toga kako se kreće vrednost h .

Sedlo-čvor bifurkacija se javlja kada $y = -h$ predstavlja tangentu na lokalni minimum ili lokalni maksimum krive $y = \mu x - x^3$. Ekstremi ove krive se nalaze u tački u kojoj je prvi izvod jednak 0, odnosno

$$\frac{d}{dx}(\mu x - x^3) = \mu - 3x^2 = 0$$

Sledi da je lokalni maksimum u

$$(x_{max}, y_{max}) = \left(\sqrt{\frac{\mu}{3}}, \frac{2\mu}{3} \sqrt{\frac{\mu}{3}} \right)$$

dok je minimum u

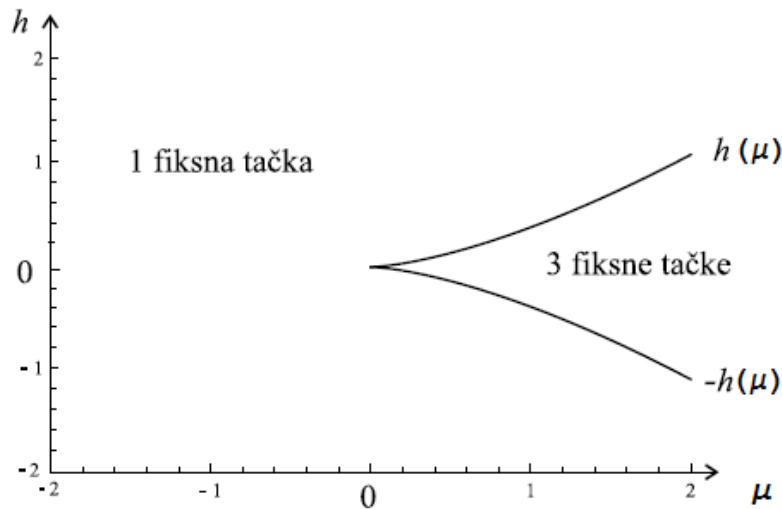
$$(x_{min}, y_{min}) = \left(-\sqrt{\frac{\mu}{3}}, -\frac{2\mu}{3} \sqrt{\frac{\mu}{3}} \right).$$

Možemo da zaključimo da će se bifurkacija pojaviti kad je

$$h = h(\mu) = \pm \frac{2\mu}{3} \sqrt{\frac{\mu}{3}}. \quad (1.2.6)$$

Ako bismo u ravni (μ, h) nacrtali bifurkacione krive (1.2.6), uočili bismo da se one seku u tački $(0, 0)$. Ova tačka se naziva šiljak. U njoj se pojavljuje bifurkacija kodimenzijske - 2 (koja nastaje uticajem dva parametra), a duž samih krivih se javljaju sedlo-čvor bifurkacije.

Prelaskom na višedimenzionalne sisteme, naš problem se usložnjava, ali je ideja ista. Fiksne tačke mogu da nestaju i da se pojavljuju, kao i da menjaju stabilnost, slično kao u jednodimenzionalnim sistemima. U višedimenzionalnom slučaju kažemo da dolazi do bifurkacije kad fazni portret menja svoju topološku strukturu na sličan način kao i u jednodimenzionalnim primerima. Takođe, razlikujemo više tipova bifurkacija, kao što su, od ranije poznate, sedlo - čvor, transkritične i vilaste (superkritične i supkritične) kao i još neke koje nisu pomenute, npr. globalne bifurkacije ciklusa i, od posebne važnosti za ovaj rad, Hopfove bifurkacije.



Slika 1.2.9: Bifurkacione krive u ravni (μ, h) .

1.2.1 Hopfova bifurkacija

Hopfova bifurkacija (poznata još i pod nazivom Poincare - Andronov - Hopfova bifurkacija) nastaje kada se periodično rešenje ili granični ciklus pojavljuje ili nestaje oko tačke ekvilibrijuma kako parametar μ prelazi svoju kritičnu vrednost ([7]). Ovo je najjednostavniji primer dinamičke bifurkacione teorije. U problematici diferencijalnih jednačina, za bifurkaciju sedlo - čvor važi da Jakobijan ocenjen u tački ekvilibrijuma ima jedan prost nula karakteristični koren, dok do Hopfove bifurkacije dolazi kada par konjugovano - kompleksnih karakterističnih korena sistema linearizovanog u fiksnoj tački postaje čisto imaginaran kako parametar prelazi kritičnu vrednost. Ovo nam predstavlja pokazatelj da se Hopfova bifurkacija javlja samo u višedimenzionalnim sistemima.

I u ovom slučaju razlikujemo superkritičnu i supkritičnu Hopfov bifurkaciju.

Sledeća teorema nam govori o uslovima pod kojima dolazi do Hopfove bifurkacije u slučaju dvodimenzionalnog sistema ([7]).

Teorema 1.2.1. *Posmatramo sistem*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_{\mu}(x, y) \\ \dot{y} &= g_{\mu}(x, y)\end{aligned}\tag{1.2.7}$$

gde je μ proizvoljan parametar. Pretpostavimo da postoji fiksna tačka $(x, y) = (x_0, y_0)$ koja može da zavisi od μ . Neka su karakteristični koreni sistema linearizovanog oko fiksne tačke dati sa $\lambda(\mu)$, $\bar{\lambda}(\mu)$, gde je $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\beta(\mu)$. Dalje, pretpostavimo da za konkretnu vrednost $\mu = \mu_0$ važe sledeći uslovi:

1. uslov nehiperboličnosti: par imaginarnih karakterističnih korena $\alpha(\mu_0) = 0, \beta(\mu_0) = \omega \neq 0$ gde je $\text{sgn}(\omega) = \text{sgn}((\frac{\partial g_{\mu}}{\partial x})|_{\mu=\mu_0}(x_0, y_0))$
2. uslov transversalnosti: karakteristični koreni prelaze imaginarnu osu sa nenula brzinom $\frac{d\alpha(\mu_0)}{d\mu}|_{\mu=\mu_0} = d \neq 0$

3. generički uslov

$a \neq 0$ za

$$a = \frac{1}{16}(f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}) + \frac{1}{16\omega}[f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}], \text{ gde je } f_{xy} = \left(\frac{\partial^2 f_\mu}{\partial x \partial y}\right)|_{\mu=\mu_0}(x_0, y_0) \text{ itd.}$$

Tada se oko ekvilibrijuma rađa jedinstvena kriva periodičnih rešenja u oblasti gde je $\mu > \mu_0$, ako je $ad < 0$ ili u oblasti gde je $\mu < \mu_0$, ako je $ad > 0$. Ekvilibrijum je stabilna fiksna tačka za $\mu > \mu_0$ (resp. $\mu < \mu_0$), a nestabilna fiksna tačka za $\mu < \mu_0$ (resp. $\mu > \mu_0$), ako je $d < 0$ (resp. $d > 0$). Periodična rešenja su stabilna (resp. nestabilna) ako je ekvilibrijum nestabilan (resp. stabilan) sa one strane jednačine $\mu = \mu_0$ gde periodična rešenja postoje. Javljaju se periodične orbite koje predstavljaju rešenja sistema koja se ponavljaju tokom vremena i čije se amplitude ponašaju kao $\sqrt{|\mu - \mu_0|}$, dok periodi teže ka $\frac{2\pi}{\omega}$ kada $\mu \rightarrow \mu_0$. Bifurkacija je superkritična ako su periodična rešenja stabilna, a supkritična ako su nestabilna.

Prve sugestije o ovoj teoremi u dvodimenzionalnom slučaju je imao Poincare oko 1890., dok su do konkretne formulacije i dokaza došli Andronov i njegovi saradnici oko 1930. godine. Hopf je 1942. godine dokazao ovu teoremu za sistem konačne dimenzije.

Sam pojam Hopfove bifurkacije zvuči komplikovano i apstraktno. Međutim, ova teorija se primenjuje u mnogim realnim problemima. Ima svoju primenu u ispitivanjima raznih oscilacija izazvanih udarima vetra (što je od velikog značaja u oblasti građevine), LCR oscilacijama u električnim kolima, periodičnim kreiranjem nervnih impulsa u nervnom sistemu, kao i, npr. u epidemiološkim modelima koji opisuju fluktuacije broja obolelih od neke zarazne bolesti. Zaključujemo da je spektar primene ove teorije prilično širok.

U ovom radu će biti obrađen problem nestabilnosti višedimenzionalnih dinamičkih sistema koji zavise od jednog parametra, uzrokovane pojavom Hopfove bifurkacije. Videćemo kako se taj problem formuliše matematički i koji alati se koriste za njegovo rešavanje. Ceo ovaj postupak se izvodi sa ciljem da identifikujemo sve nepoznanice koje figurišu u nastanku Hopfove bifurkacije.

1.3 Predstavljjanje posmatranog problema i uvođenje neophodnih pojmova

Uočavanje Hopfove bifurkacije u višedimenzionalnim dinamičkim sistemima koji zavise od nekog parametra nije lak zadatak. Mnogi savremeni naučnici se i dalje bave pronalaženjem najboljih i softverski najpogodnijih načina da bi se došlo do rešenja, odnosno da bi se aproksimirao parametar koji odgovara Hopfovoj tački. Osnovni pristup ovom problemu se temelji na karakterističnim korenima matrice sistema i svojstvima Kronekerovog proizvoda. Naravno, postoje razne varijacije u postupcima i metodima računanja, ali osnovna ideja je uvek ista.

Detekcija Hopfove tačke se svodi na posmatranje najdešnijih karakterističnih korena određenog sistema, najčešće predstavljenog u obliku matričnih jednačina

u kojima figurišu retke matrice³. Zatim treba odrediti kritičnu vrednost parametra koji uzrokuje gubitak stabilnosti. Naime, kada se sistem nalazi u stabilnom stanju, svi koreni leže u levoj imaginarnoj poluravni. Kako se rešenja približavaju kritičnoj vrednosti (dok vrednosti parametra idu ka kritičnoj), ona se kreću ka imaginarnoj osi. U kritičnoj tački koreni postaju čisto imaginarni, a zatim prelaze u desnu poluravan dovodeći sistem u nestabilno stanje. Iz ovoga zaključujemo da su upravo ti najdešniji koreni interesantni, jer njihovo pomeranje dovodi do narušavanja stabilnosti.

Za rešavanje ovog tipa problema nije adekvatno koristiti direktne metode detekcije karakterističnih korena, jer nisu efikasni, zahtevaju previše vremena, ali i memorije računara. Iz tog razloga su pojedini autori (npr. u [19]) predstavili modele koji računaju vrednost parametra u traženoj tački, s tim da se odgovarajući karakteristični koreni ne računaju u međuprocesu. Međutim, ispostavilo se da su ovi modeli nepraktični kad se primenjuju na sisteme izuzetno velikih dimenzija. Dalja proučavanja su pokazala da ako izaberemo dobre početne vrednosti za nepoznati parametar i čisto imaginarne karakteristične korene u Hopfovoj tački, postoje izuzetno efikasni algoritmi koji će nas, iterativno, dovesti do traženog rešenja. Algoritam koji će biti opisan u ovom radu je Ljapunovljeva inverzna iteracija, a problem će biti formulisani u obliku Ljapunovljevih jednačina na takav način da se mogu dobiti rešenja i za probleme velikih dimenzija.

Prilikom analiziranja hemijskih reakcija ili stabilnosti u mehanici fluida dobijaju se složeni sistemi parcijalnih diferencijalnih jednačina za koje treba pronaći rešenja. Ovaj problem nije trivijalan, pogotovo ako se radi sa velikim dimenzijama. Iz tog razloga se pribegava raznim aproksimacijama i bitno je da dobijena rešenja budu dovoljno blizu tačnog. Diskretizacijom ovih komplikovanih sistema dobijamo sistem koji je lakše rešiti i zapisujemo ga u obliku

$$Mu_t = f(u, \alpha) \quad (1.3.1)$$

gde je $f : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ nelinearna funkcija, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrica mase sistema, $u \in \mathbb{R}^n$ promenjiva koja opisuje neko svojstvo (npr. brzinu), α parametar, a n dimenzija diskretizacije (može biti izuzetno veliki broj).

Neka je u takvo da za sistem (1.3.1) važi $u_t = 0$. Ako je ekvilibrijumska jednačina oblika $f(u, \alpha) = 0$, onda sa $\mathcal{S} = \{(u, \alpha) | f(u, \alpha) = 0\}$ obeležavamo skup njenih rešenja. Kako se parametar α menja, može se pronaći tačka $(u^*, \alpha^*) \in \mathcal{S}$ za koju rešenje prelazi iz stabilnog u nestabilno. Mi želimo da pronađemo kritičnu vrednost parametra, odnosno α^* , ako nam je poznat skup $\mathcal{S}$. Drugim rečima, pretpostavićemo da je skup $\mathcal{S}$ poznat i da se na osnovu njega može definisati funkcija $u(\alpha)$, takva da je $f(u(\alpha), \alpha) = 0$, te je tada $u^* = u(\alpha^*)$. Dakle, tačke ekvilibrijuma posmatramo kao funkcije od parametra α i pretpostavljamo da se mogu izraziti na jedinstven način iz jednačine $f(u, \alpha) = 0$.

Funkcija $f(u, \alpha)$ je uglavnom nelinearna, a to dovodi do komplikacija u računici. Iz tog razloga pribegavamo linearizaciji sistema (1.3.1) za fiksirano α . U tom slučaju stabilnost rešenja zavisi od toga kakvi su karakteristični koreni λ ,

³eng. *Sparse matrix*. Retka matrica je matrica kojoj je većina elemenata 0. Suprotni slučaj se naziva gusta matrica.

dobijeni iz

$$\det(J(\alpha) - \lambda M) = 0 \quad (1.3.2)$$

gde je $J(\alpha)$ Jakobijan ocenjen u $u(\alpha)$, odnosno $J(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial u}(u(\alpha), \alpha)$.

Ako su dobijeni karakteristični koreni realni i negativni, tada je rešenje stabilno, a ako su neki od korena nenegativni, rešenje je nestabilno, što znači da ukoliko se zbog promene parametra α desi da realni koreni pređu iz negativnih u pozitivne (prođu kroz 0), dolazi do gubitka stabilnosti. U slučaju da su koreni kompleksni, situacija je analogna. Ukoliko koreni imaju negativne realne delove, rešenje je stabilno, inače je nestabilno. Najzanimljiviji slučaj, odnosno slučaj Hopfove bifurkacije je šta se događa kad se par karakterističnih korena nađe na imaginarnoj osi, odnosno kada je čisto imaginaran.

Kao što je pomenuto, osnovni princip pronalaženja Hopfove tačke se sastoji u traženju problematičnih karakterističnih korena sistema (1.3.2), ako fiksiramo diskretan skup parametara α . Ovo znači da bi se za svako fiksirano α rešavao sistem sa ciljem nalaženja njegovih korena, što je u slučaju rada sa velikim dimenzijama neefikasno.

Značajan pristup pronalaženju Hopfove tačke je obrađen u [19],[20]. Autori su predložili metod računanja tražene tačke bez računanja najdešnijih korena. Za matricu mase su uzeli jediničnu matricu reda n i sistem doveli u vezu sa Kronekerovim proizvodom i na taj način dobili problem koji bi se mogao rešiti Njutnovim postupkom. Međutim, problem je što su dimenzije ovog sistema $n^2 \times n^2$, što znači da za veliko n postupak zahteva previše vremena i memorije. Zbog toga je moralo doći do unapređenja ovih ideja.

Vraćamo se na sistem (1.3.2) i pretpostavljamo da je $(u_0, \alpha_0) \in \mathcal{S}$ stabilna kritična tačka, a tražena tačka $(u^*, \alpha^*) \in \mathcal{S}$ je u okolini kritične ([18]). Tada možemo da aproksimiramo Jakobijan u nepoznatoj tački

$$J(\alpha^*) \approx J(\alpha_0) + \frac{dJ(\alpha_0)}{d\alpha}(\alpha^* - \alpha_0) \quad (1.3.3)$$

Ako obeležimo $A = J(\alpha_0)$, $B = \frac{dJ}{d\alpha} = J'(\alpha_0)$ i $\mu = (\alpha^* - \alpha_0)$ dobijamo sledeći generalizovani problem karakterističnih korena

$$(A + \mu B)x = \lambda Mx. \quad (1.3.4)$$

Obično su A i B velike, retke, antisimetrične matrice, a B može biti i singularna.

Vidimo da, za $\alpha^* = \alpha_0$ odnosno $\mu = 0$, dobijamo stabilan sistem. Drugim rečima, svi karakteristični koreni sistema $Ax = \lambda Mx$ se nalaze u stabilnoj, levoj poluravni. Ideja je pronaći najmanje $|\mu|$ za koje bi naš problem imao par čisto imaginarnih korena, tj. imao karakteristične parove (λ, x) i $(-\lambda, \bar{x})$, gde je $\lambda = bi, b \in \mathbb{R}$. Jasno je da će koreni biti neprekidne funkcije od μ , a prvo μ za koje će λ biti na imaginarnoj osi ćemo uzeti za aproksimaciju parametra u kom dolazi do pojave Hopfove bifurkacije.

Bitno je napomenuti da može da se desi i slučaj da je tražena tačka $(u^*, \alpha^*) \in \mathcal{S}$ proizvoljno udaljena od izabrane stabilne, odnosno, da se ne nalazi u njenoj okolini. U tom slučaju Jakobijan $J(\alpha^*)$ nije moguće razviti u Tejlorov red u kritičnoj tački i izraziti kao u (1.3.3). Uprkos tome, moguće je dobiti informacije

o udaljenosti tačke (u^*, α^*) od izabrane na osnovu procene udaljenosti između najdešnjeg korena sistema i imaginarne ose ([12]). U produžetku će biti razmotren i ovaj slučaj. Međutim, napominjemo da je glavni fokus ovog rada usmeren na početno razmatranje, tj. posmatranje tačke iz okoline kritične.

Za početak, da se upoznamo sa osnovnim konceptima koji će biti korišćeni da bi se dobili rezultati ovog rada.

1.3.1 Kronekerov proizvod

Definicija i osnovne osobine

Kronekerov proizvod je izuzetno značajan koncept u oblastima linearne algebre. Naziv je dobio po Leopoldu Kronekeru⁴ ([37]). Često se koristi za rešavanje problema izraženih preko matrice jednadžina, jer ima povoljne osobine koje olakšavaju proces rešavanja ([11]).

Definicija 1.3.1. *Kronekerov proizvod definisan kao*

$$(v \otimes w) \rightarrow (A \otimes B)(v \otimes w) = Av \otimes Bw$$

predstavlja linearnu transformaciju na $\mathbb{C}^{n^2}$. Matrica te transformacije, u bazi $e^i \otimes e^j$, je definisana sa

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B \end{bmatrix} \quad (1.3.5)$$

za $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Važi da je Kronekerov proizvod dve dijagonalne matrice dijagonalna, proizvod dve donje (resp. gornje) trougaone matrice donja (resp. gornja) trougaona matrica, a proizvod dve simetrične matrice simetrična matrica.

U sledećim tvrđenjima navešćemo osnovna svojstva ovog proizvoda bez dokaza, jer to nije predmet ovog rada. Za dodatne informacije pogledati [8], [9], [29].

Teorema 1.3.1. *Neka su $A, B, C, D \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Tada važi*

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD \quad (1.3.6)$$

Teorema 1.3.2. *Za matrice A i B važi:*

- a) $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$
- b) *Ako su regularne, tada $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.*
- c) *Ako su kvadratne i normalne, tada je i $A \otimes B$ normalna.*
- d) *Ako su kvadratne i ortogonalne, tada je i $A \otimes B$ ortogonalna.*
- e) *Postoji permutaciona matrica P takva da $P(A \otimes B)P^T = (B \otimes A)$.*

⁴ger. Leopold Kronecker (7.12.1823. - 29.12.1891.), nemački matematičar koji se pretežno bavio celim brojevima. Mnogi pojmovi u matematici su nazvani po njemu, tako da osim proizvoda imamo još i npr. Kronekerovu deltu ili Kroneker-Veberovu teoremu.

Spektar Kronekerovog proizvoda

Najjednostavniji način uočavanja karakterističnih korena i vektora je određivanje neke od faktORIZACIJA matrice. Generalizacija dekompozicije po karakterističnim vrednostima za pozitivno - definitne, normalne matrice dimenzije $m \times n$ je SVD⁵. **SVD**, odnosno dekompozicija po singularnim vrednostima, predstavlja faktORIZACIJU matrice na matrice koje sadrže singularne vrednosti, odnosno singularne vektore početne. Singularna vrednost matrice $T : X \rightarrow Y$ gde su X i Y Hilbertovi prostori, predstavlja kvadratni koren karakterističnih korena matrice $T^*T : X \rightarrow X$.

SVD matrice T dimenzije $m \times n$ ima oblik

$$T = U\Sigma V^*, \quad (1.3.7)$$

gde su U i V unitarne matrice dimenzija $m \times m$, odnosno $n \times n$ čije kolone predstavljaju leve, respektivno desne singularne vektore matrice T , dok je Σ pravougaona dijagonalna matrica dimenzije $m \times n$, čiji su dijagonalni elementi nenegativni realni brojevi i predstavljaju singularne vrednosti matrice T .

Teorema 1.3.3. *Neka je $U_A \Sigma_A V_A^T$ SVD za matricu $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i $U_B \Sigma_B V_B^T$ SVD za matricu $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$. Tada je*

$$(U_A \otimes U_B)(\Sigma_A \otimes \Sigma_B)(V_A^T \otimes V_B^T) \quad (1.3.8)$$

SVD za matricu $A \otimes B$.

Teorema 1.3.4. *Neka su $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ karakteristični koreni matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, a $\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ karakteristični koreni matrice $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Tada su*

$$\lambda_1 \xi_1, \dots, \lambda_1 \xi_m, \lambda_2 \xi_1, \dots, \lambda_2 \xi_m, \dots, \lambda_n \xi_m$$

karakteristični koreni matrice $A \otimes B$. Dalje, ako su $\{x_1, \dots, x_p | p \leq n\}$ i $\{y_1, \dots, y_q | q \leq m\}$ redom desni karakteristični vektori A i B , koji odgovaraju korenima $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, odnosno $\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$, onda su $x_i \otimes y_j$ desni karakteristični vektori matrice $A \otimes B$, koji odgovaraju korenima $\{\lambda_1 \xi_1, \dots, \lambda_n \xi_m\}$.

1.3.2 Bialternativni proizvod

Definicija i osobine

Bialternativni proizvod⁶ je efikasan alat koji je primenu našao u analizi polinomne i matrične stabilnosti i izuzetno je bitan u postupcima otkrivanja Hopfovih bifurkacija, što ćemo videti kasnije.

Da bismo uveli pojam bialternativnog proizvoda, prvo moramo da se upoznamo sa konceptima *second compound matrix* i klinastog proizvoda ([10],[11]).

⁵eng. *Singular Value Decomposition*

⁶eng. *Bialternate product*

Definicija 1.3.2. Za matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m,n}$, operator second compound matrix (SCM) se definiše kao $C_2(A) \in \mathbb{C}^{\binom{m}{2} \times \binom{n}{2}}$, gde je

$$C_2(A)_{ij,kl} = \det \begin{bmatrix} a_{ik} & a_{il} \\ a_{jk} & a_{jl} \end{bmatrix}_{\binom{m}{2} \times \binom{n}{2}}, (i,j) \in Q_{2,m}, (k,l) \in Q_{2,n} \quad (1.3.9)$$

gde je $Q_{2,n}$ skup svih parova (i,j) , takvih da je $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i < j$.

Definicija 1.3.3.

- a) Dva para indeksa (i,j) i (p,q) su u leksikografskom poretku, ako je $i < p$ ili $(i = p \text{ i } j < q)$.
- b) Klinasti proizvod dva vektora $v, w \in \mathbb{C}^n$ je vektor

$$v \wedge w \in \mathbb{C}^m, m = \frac{1}{2}n(n-1)$$

čije su komponente date sa

$$(v \wedge w)_{i,j} = v_i w_j - v_j w_i$$

i poredane u leksikografskom poretku.

Definicija 1.3.4. Bialternativni proizvod matrica predstavlja linearnu transformaciju prostora $\mathbb{C}^n$. Njegova matrica u bazi $e^i \wedge e^j$ se definiše kao $F = A \cdot B \in \mathbb{C}^{\binom{n}{2} \times \binom{n}{2}}$, za $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Elementi matrice F su dati sa

$$f_{ij,kl} = \frac{1}{2} \left(\det \begin{bmatrix} a_{ik} & a_{il} \\ b_{jk} & b_{jl} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} b_{jk} & a_{il} \\ a_{jk} & a_{jl} \end{bmatrix} \right) \quad (1.3.10)$$

gde $(i,j), (k,l) \in Q_{2,n}$.

Lema 1.3.1.

$$(2A \cdot I_n)_{ij,kl} = \begin{cases} -a_{il} & j = k \\ a_{ik} & k \neq i, j = l \\ a_{ii} + a_{jj} & i = k, j = l \\ a_{jl} & k = i, j \neq l \\ -a_{jk} & l = i \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \quad (1.3.11)$$

Teorema 1.3.5. Neka su $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Tada važi:

- a) $A \cdot B = B \cdot A$
- b) $(\alpha A) \cdot (\beta B) = \alpha \beta (A \cdot B)$
- c) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- d) $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$
- e) $(A \cdot B)^H = A^H \cdot B^H$

$$f) AB \cdot AB = (A \cdot A)(B \cdot B)$$

$$g) (A \cdot A)^k = A^k \cdot A^k$$

$$h) \text{ Ako je } A \text{ regularna, onda je i } A \cdot A \text{ regularna i važi } (A \cdot A)^{-1} = A^{-1} \cdot A^{-1}$$

i) Ako su A i B gornje trougaone matrice (donje trougaone, dijagonalne), sa dijagonalnim elementima a_{ii} i b_{ii} , $i = 1, \dots, n$, tada je i $C = A \cdot B$ gornja trougaona (donja trougaona, dijagonalna) matrica sa dijagonalnim elementima

$$c_{ij,ij} = \frac{1}{2}(a_{ii}b_{jj} + a_{jj}b_{ii}), (i, j) \in Q_{2,n} \quad (1.3.12)$$

Lema 1.3.2. Neka su $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Tada

$$2(A \cdot B) = C_2(A + B) - C_2(A) - C_2(B) \quad (1.3.13)$$

Teorema 1.3.6. Ako su matrice $A, B, C, D \in \mathbb{C}^{n \times n}$, onda važi:

$$(A \cdot B)(C \cdot D) = \frac{1}{2}(AC \cdot BD + AD \cdot BC) \quad (1.3.14)$$

Posledica 1.3.1. Ako je $A = B$, odnosno $C = D$, onda je

$$(A \cdot A)(C \cdot D) = AC \cdot AD \quad (1.3.15)$$

odnosno

$$(A \cdot B)(C \cdot C) = AC \cdot AC \quad (1.3.16)$$

Spektar bialternativnog proizvoda

Ako imamo bialternativni proizvod u kom figurišu samo matrica A i njeni stepeni, za očekivati je da se karakteristični koreni tog proizvoda mogu dovesti u vezu sa korenima same matrice A . Upravo to je pokazano u sledećoj teoremi.

Teorema 1.3.7. (Stephanos, 1900.) Neka je $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ i $h_{pq} \in \mathbb{C}$, $p, q = 0, 1, \dots, m$. Ako su $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ karakteristični koreni matrice A , onda važi da su koreni

$$\sum_{p,q=0}^m h_{pq} A^p \cdot A^q$$

dati sa

$$\frac{1}{2} \sum_{p,q=0}^m h_{pq} (\lambda_i^p \lambda_j^q + \lambda_i^q \lambda_j^p)$$

gde je $(i, j) \in Q_{2,n}$.

Dokaz. Koristimo osobinu da svaka matrica ima Šurovu dekompoziciju, tj, postoji unitarna matrica $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, takva da je $T = U^*AU$ gornja trougaona. Zajedno sa rezultatima posledice (1.3.1), dobijamo

$$\begin{aligned} (U \cdot U)^* \left(\sum_{p,q=0}^m h_{pq} A^p \cdot A^q \right) (U \cdot U) &= \sum_{p,q=0}^m h_{pq} (U^* A^p U) \cdot (U^* A^q U) \\ &= \sum_{p,q=0}^m h_{pq} T^p \cdot T^q. \end{aligned}$$

Kako su T^p i T^q gornje trougaone, njihovi koreni, respektivno $\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p$ i $\lambda_1^q, \dots, \lambda_n^q$, se nalaze na dijagonalama, pa na osnovu (1.3.12) vidimo da su traženi koreni zaista

$$\frac{1}{2} \sum_{p,q=0}^m h_{pq} (\lambda_i^p \lambda_j^q + \lambda_i^q \lambda_j^p).$$

Specijalno, ako izaberemo $h_{pq} = 1$ i $p = q = 1$ dobijamo da matrica $A \cdot A$ ima korene $\lambda_i \lambda_j$. Ukoliko uzmemo da su $h_{pq} = 2, p = 1$ i $q = 0$ vidimo da su koreni matrice $2A \cdot I_n$ dati sa $\lambda_i + \lambda_j$. Ove matrice će nam biti od koristi u razmatranjima koja slede. $\square$

Veza bialternativnog i Kronekerovog proizvoda

Videćemo kakva veza se može uspostaviti između bialternativnog i Kronekerovog proizvoda. Pre toga ćemo uvesti neke od neophodnih pojmova.

Definicija 1.3.5.

- a) $G_{2,n}$ predstavlja skup svih parova (i, j) , takvih da je $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \leq j$.
- b) Operator $\gamma(p, q)$ definišemo kao

$$\gamma(p, q) = \begin{cases} 2 & p = q \\ 1 & p \neq q \end{cases}$$

- c) Permanentna funkcija u oznaci **per** se definiše kao

$$\text{per} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = ad + bc$$

Lema 1.3.3. Neka je $\mathbb{C}^{n^2}$ generisan vektorima $\{e^i \otimes e^j, 1 \leq i, j \leq n\}$, a P permutaciona matrica za koju važi $P(e^i \otimes e^j) = e^j \otimes e^i$. Tada su karakteristični koreni matrice P

- -1 ; algebarska i geometrijska višestrukost ovog korena su jednake i iznose $\frac{1}{2}n(n-1)$.
- $+1$; algebarska i geometrijska višestrukost ovog korena su jednake i iznose $\frac{1}{2}n(n+1)$.

Karakteristični prostori koji odgovaraju ovim korenima su dati sa

$$E_{-1} = \text{span}\{e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i, (i, j) \in Q_{2,n}\},$$

$$E_{+1} = \text{span}\{e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i, (i, j) \in Q_{2,n}\}$$

i predstavljaju ortogonalne komplemente prostora $\mathbb{C}^{n^2}$, tj. važe sledeća dva uslova

$$\begin{aligned} E_{-1} \cap E_{+1} &= \{0\}, \\ E_{-1} \oplus E_{+1} &= \mathbb{C}^{n^2}, \end{aligned}$$

gde je se $\oplus$ obeležena direktna suma.

Lema 1.3.4. *Potprostori E_{-1} i E_{+1} prostora $\mathbb{C}^{n^2}$, definisani u prethodnoj lemi, predstavljaju invarijantne potprostore od $(A \otimes B + B \otimes A)$.*

Dokaz. Uvodimo matrice V i W , gde su kolone od V date sa

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i), (i, j) \in Q_{2,n},$$

a kolone od W sa

$$\frac{1}{\sqrt{2\gamma(i, j)}}(e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i), (i, j) \in G_{2,n}.$$

$Q_{2,n}$ je definisano u Definiciji 1.3.2, a $\gamma(i, j)$ i $G_{2,n}$ u Definiciji 1.3.5. Poredak kolona matrica V i W odgovara leksikografskom poretku parova (i, j) u $Q_{2,n}$, odnosno $G_{2,n}$. Neka je $U = [V|W]$.

Kolone matrice U predstavljaju ortonormiranu bazu prostora E_{-1} i E_{+1} , tako da je $U^T U = I$. Ako je $x \in E_{-1}$, važi $Px = -x$, gde je P ranije definisana permutaciona matrica i koristeći osobinu e) Teoreme 1.3.2 $P(A \otimes B) = (B \otimes A)P$, dobijamo

$$P(A \otimes B + B \otimes A)x = -(A \otimes B + B \otimes A)x$$

Slično, za $x \in E_{+1}$, važi $Px = x$, pa dobijamo

$$P(A \otimes B + B \otimes A)x = (A \otimes B + B \otimes A)x$$

Iz ovih jednačina zaključujemo da su E_{-1} i E_{+1} invarijantni potprostori $A \otimes B + B \otimes A$. $\square$

Da bismo dobili sledeći rezultat neophodno je da uvedemo još jedan pojam koji će poslužiti prilikom dokazivanja teoreme.

Definicija 1.3.6. *Permanentni bialternativni proizvod matrica $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}] \in \mathbb{C}^n$ se definiše kao matrica $G = A \times B$, gde su elementi matrice G dati sa*

$$g_{ij,kl} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma(i, j)\gamma(k, l)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{ik} & a_{il} \\ b_{jk} & b_{jl} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{jk} & a_{il} \\ a_{jk} & a_{jl} \end{bmatrix} \right) \quad (1.3.17)$$

gde su $(i, j), (k, l) \in G_{2,n}$.

Teorema 1.3.8. *Neka $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}] \in \mathbb{C}^n$. Tada postoji ortogonalna matrica U takva da je*

$$U^T(A \otimes B + B \otimes A)U = 2 \begin{bmatrix} A \cdot B & 0 \\ 0 & A \times B \end{bmatrix} \quad (1.3.18)$$

Dokaz. U dokazu Leme 1.3.3 smo uveli matricu $U = [V|W]$. Pokazaćemo da je ovo, u stvari, tražena matrica. Koristeći činjenicu da je $V^T W = 0$ i $W^T V = 0$, dobijamo da je

$$\begin{aligned} V^T(A \otimes B + B \otimes A)W &= 0 \\ W^T(A \otimes B + B \otimes A)V &= 0 \end{aligned}$$

Ostaje da se pokaže da je

$$V^T(A \otimes B + B \otimes A)V = 2A \cdot B \quad (1.3.19)$$

$$W^T(A \otimes B + B \otimes A)W = 2A \times B \quad (1.3.20)$$

Za $(i, j), (k, l) \in Q_{2,n}$ u redu ij i koloni kl od $V^T(A \otimes B + B \otimes A)V$ se nalazi element

$$\begin{aligned} & (V^T(A \otimes B + B \otimes A)V)_{ij,kl} \\ &= \frac{1}{2}(e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i)^T(A \otimes B + B \otimes A)(e^k \otimes e^l - e^l \otimes e^k) \\ &= \frac{1}{2}(e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i)^T(Ae^k \otimes Be^l - Ae^l \otimes Be^k + Be^k \otimes Ae^l - Be^l \otimes Ae^k) \\ &= \frac{1}{2}(a_{ik}b_{jl} - a_{il}b_{jk} + b_{ik}a_{jl} - b_{il}a_{jk}) \end{aligned}$$

Analogno, za $(i, j), (k, l) \in G_{2,n}$ odgovarajući element koji se nalazi u redu ij i koloni kl od $W^T(A \otimes B + B \otimes A)W$ je dat sa

$$\begin{aligned} & (W^T(A \otimes B + B \otimes A)W)_{ij,kl} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\gamma(i, j)\gamma(k, l)}}(e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i)^T(A \otimes B + B \otimes A)(e^k \otimes e^l - e^l \otimes e^k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\gamma(i, j)\gamma(k, l)}}(a_{ik}b_{jl} - a_{il}b_{jk} + b_{ik}a_{jl} - b_{il}a_{jk}) \end{aligned}$$

Ako uporedimo dva poslednja rezultata sa jednadžinama (1.3.10) i (1.3.17), respektivno, dobijamo jednačinu (1.3.18) i time je tvrđenje dokazano. $\square$

Na osnovu prethodno dokazane teoreme, dobijamo sledeći rezultat:

Posledica 1.3.2. *Neka su $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Tada važi*

$$A \cdot B = \frac{1}{2}(A \otimes B + B \otimes A)|_{E_{-1}} \quad (1.3.21)$$

Specijalno,

$$\begin{aligned} A \cdot A &= (A \otimes A)|_{E_{-1}} \\ 2A \cdot I_n &= (A \otimes I_n + I_n \otimes A)|_{E_{-1}} \end{aligned}$$

Zaista, na osnovu izbora matrice $U = [V|W]$, uočavamo da se dobija $A \otimes B + B \otimes A = 2(A \cdot B)$, kao i da je izvršena restrikcija prostora $\mathbb{C}^{n^2}$ na invarijantni potprostor E_{-1} .

1.3.3 Kronekerov i bialternativni proizvod primenjeni na posmatrani problem

Pomenuli smo da nas interesuje slučaj kad imamo dva čisto imaginarna karakteristična korena, odnosno kad su karakteristični parovi oblika $(\nu i, x)$ i $(-\nu i, \bar{x})$, $\nu \in$

$\mathbb{R}$. Ako uvedemo oznaku $\lambda = \nu i$, jednačine koje odgovaraju ovim parovima možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}(A + \mu B)x &= \lambda Mx \\ (A + \mu B)\bar{x} &= -\lambda M\bar{x}\end{aligned}$$

U sledećem tvrđenju će biti uspostavljena veza između gore pomenutog problema, Kronekerovog i bialternativnog proizvoda. Na ovaj način dobijamo modifikaciju koja olakšava računicu ([13],[31]).

Teorema 1.3.9. *Rešenje dvoparametarskog problema karakterističnih korena oblika*

$$(A + \mu B)x = \lambda Mx \quad (1.3.22)$$

$$(A + \mu B)\bar{x} = -\lambda M\bar{x} \quad (1.3.23)$$

je, takođe, i rešenje problema

$$((A + \mu B) \otimes M + M \otimes (A + \mu B))x \otimes \bar{x} = 0. \quad (1.3.24)$$

Dokaz. Koristeći osobine Kronekerovog proizvoda, možemo srediti jednačinu (1.3.24) i dobiti

$$\begin{aligned}((A + \mu B) \otimes M)(x \otimes \bar{x}) + (M \otimes (A + \mu B))(x \otimes \bar{x}) &= 0 \\ ((A + \mu B)x \otimes M\bar{x}) + (Mx \otimes (A + \mu B)\bar{x}) &= 0\end{aligned}$$

Zamenom odgovarajućih jednakosti (1.3.22) i (1.3.23) i daljim sređivanjem dobija se

$$\begin{aligned}\lambda Mx \otimes M\bar{x} - Mx \otimes \lambda M\bar{x} &= 0 \\ \lambda(Mx \otimes M\bar{x} - Mx \otimes M\bar{x}) &= 0\end{aligned}$$

Sledi da problem zapisan jednačinama (1.3.22) i (1.3.23) možemo zapisati pomoću Kronekerovog proizvoda. $\square$

Ukoliko obeležimo $z = x \otimes \bar{x}$, gde je z karakteristični vektor problema (1.3.24), dobijamo njegov ekvivalentan zapis

$$((A \otimes M + M \otimes A) + \mu(B \otimes M + M \otimes B))z = 0, \quad (1.3.25)$$

a ukoliko iskoristimo vezu bialternativnog i Kronekerovog proizvoda iz jednačine (1.3.21) Teoreme 1.3.2, dobijamo da se ovaj problem može izraziti i uz pomoć bialternativnog proizvoda i to kao

$$2((A + \mu B) \cdot M)z = 0 \Leftrightarrow ((A + \mu B) \cdot M)z = 0. \quad (1.3.26)$$

Znamo da ako (1.3.4) ima par čisto imaginarnih korena, onda $(A + \mu B) \otimes M + M \otimes (A + \mu B)$ ima par nula korena. Međutim, i ovaj problem, iako linearan, nije efikasan prilikom rada sa velikim n , jer je njegova dimenzija $n^2 \times n^2$. Zbog toga uvodimo i Ljapunovljeve jednačine u priču i pokazaćemo da se (1.3.25) može i preko njih zapisati, kao i da je taj problem najoptimalniji za rešavanje, čak i u sistemima velikih dimenzija.

1.3.4 Primena Kronekerovog proizvoda u rešavanju Ljapunovljevih jednačina

Definicija 1.3.7. *Linearna matricna jednačina oblika*

$$AX + XB = C \quad (1.3.27)$$

pri čemu su $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ i $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$ se naziva *Silvesterova jednačina*.

Definicija 1.3.8. *Specijalni oblik Silvesterove jednačine za $B = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se naziva Ljapunovljeva jednačina. Ona je oblika*

$$AX + XA^T = C. \quad (1.3.28)$$

Bitno je napomenuti da ukoliko je C simetrična matrica i rešenje $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je simetrično. Ova jednačina nosi ime po ruskom matematičaru Aleksandru Mihajloviču Ljapunovu⁷, koji je najpoznatiji po razvoju teorije stabilnosti dinamičkih sistema ([37]).

Inicijalno je razvoj i istraživanje teorije Ljapunovljevih jednačina podstaknuto njihovom primenom u sistemima jednačina. Međutim, danas je polje njihove primene ekstremno veliko i raznoliko. Mogu se koristiti u razne svrhe. Neke od njih su, na primer:

- * Proučavanje stabilnosti i kontrole sistema;
- * Rešavanje sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina;
- * Metodi za proveravanje prečnika stabilnosti u teoriji robustne stabilnosti velikih, retkih sistema.

Da bismo dobili ideju kako da povežemo ove jednačine sa Kronekerovim proizvodom, (1.3.27) možemo zapisati preko kolona

$$Ax_i + Xb_i = c_i = Ax_i + \sum_{j=1}^m b_{ji}x_j, i = 1, \dots, m.$$

Ako zapišemo ceo sistem

$$\begin{bmatrix} A + b_{11}I & b_{21}I & \cdots & b_{m1}I \\ b_{12}I & A + b_{22}I & \cdots & b_{m2}I \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{1m}I & b_{2m}I & \cdots & A + b_{mm}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \quad (1.3.29)$$

uočavamo da se matrica koeficijenata može zapisati pomoću Kronekerovog proizvoda i to kao

$$\begin{bmatrix} A + b_{11}I & b_{21}I & \cdots & b_{m1}I \\ b_{12}I & A + b_{22}I & \cdots & b_{m2}I \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{1m}I & b_{2m}I & \cdots & A + b_{mm}I \end{bmatrix} = (I_m \otimes A) + (B^T \otimes I_n). \quad (1.3.30)$$

⁷rus. Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (6.06.1857-3.11.1918)

Dakle, Silvesterova jednačina (1.3.29) se može zapisati u linearnom obliku

$$((I_m \otimes A) + (B^T \otimes I_n))\text{vec}(X) = \text{vec}(C), \quad (1.3.31)$$

gde je sa $\text{vec}(X)$ označen vektor koji sadrži kolone matrice X , naslagane jedna na drugu, tj.

$$\text{vec}(X) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Jedinstveno rešenje jednačine (1.3.31) postoji ako je $(I_m \otimes A) + (B^T \otimes I_n)$ regularna, tj. ako nema nula karakterističnih korena. Znamo, iz osobina Kronekerovog proizvoda, da su koreni oblika $\xi_i + \psi_j$, gde su $\xi_i \in \Lambda(A)$, $\psi_j \in \Lambda(B^T)$. Iz ove činjenice izvlačimo zaključak da Silvesterova jednačina ima jedinstveno rešenje ako i samo ako A i $-B^T$ nemaju zajednički karakteristični koren.

Slično bi važno i za Ljapunovljevu jednačinu. Odnosno, i ona ima jedinstveno rešenje ako i samo ako A i $-A^T$ nemaju zajedničkih korena. Ako su koreni matrice A označeni sa $\xi_1, \dots, \xi_n$, koreni matrice $-A^T$ su $-\xi_1, \dots, -\xi_n$. Iz toga sledi da je dovoljan uslov za postojanje jedinstvenog rešenja da matrica A bude asimptotski stabilna, odnosno da su svi karakteristični koreni u levoj poluravni.

Bitno je napomenuti i da se mogu odrediti jedinstvena analitička rešenja Silvesterove i Ljapunovljeve jednačine. Rešenje Silvesterove jednačine (1.3.27) izgleda ovako:

$$X = - \int_0^{+\infty} e^{tA} C e^{tB} dt, \quad (1.3.32)$$

dok je rešenje Ljapunovljeve jednačine (1.3.28)

$$X = - \int_0^{+\infty} e^{tA} C e^{tA^T} dt \quad (1.3.33)$$

i njihov značaj je više teorijske prirode.

Teorema 1.3.10. *Za matrice A, B, C za koje je definisan proizvod ABC važi*

$$\text{vec}(ABC) = (C^T \otimes A)\text{vec}(B) \quad (1.3.34)$$

Koristeći osobinu (1.3.34), problem (1.3.25) možemo povezati sa Ljapunovljevom jednačinom na sledeći način

$$MZA^T + AZM^T + \mu(MZB^T + BZM^T) = 0 \quad (1.3.35)$$

gde je Z matrica dimenzije $n \times n$ za koju važi $\text{vec}(Z) = z$ i nju nazivamo karakterističnim vektorom problema (1.3.35).

Kada odredimo μ , možemo da ocenimo parametar od interesa α^* kao $\alpha_0 + \mu$. Zatim je lako pronaći i ocenu za karakteristični koren λ . Ono što sada sledi je teorija o tome kakva je tačno veza između rešenja problema (1.3.25) i našeg posmatranog problema (1.3.4).

1.3.5 Povezivanje različitih oblika problema karakterističnih korena

Napomenuli smo da želimo da uspostavimo vezu između rešenja problema (1.3.25)

$$((A \otimes M + M \otimes A) + \mu(B \otimes M + M \otimes B))z = 0$$

i originalnog problema (1.3.4)

$$(A + \mu B)x = \lambda Mx,$$

a samim tim ćemo, indirektno zbog pokazane ekvivalencije sledeća dva zapisa

$$\begin{aligned} ((A \otimes M + M \otimes A) + \mu(B \otimes M + M \otimes B))z &= 0 \\ MZA^T + AZM^T + \mu(MZB^T + BZM^T) &= 0 \end{aligned}$$

pronaći vezu između rešenja posmatranog problema $(A + \mu B)x = \lambda Mx$ i ovog zadatog preko Ljapunovljevih jednačina. Najpre, zbog pojednostavljivanja zapisa, obeležimo da je $\Delta_0 = A \otimes M + M \otimes A$ i $\Delta_1 = B \otimes M + M \otimes B$, pa problem (1.3.25) zapisujemo kao

$$(\Delta_0 + \mu\Delta_1)z = 0. \quad (1.3.36)$$

Koristimo izuzetno značajne rezultate iz [13],[14].

Teorema 1.3.11. *Za fiksiranu vrednost parametra μ , neka je (λ_j, x_j) karakteristični par problema (1.3.4). Tada važi:*

- a) *Ako je $\lambda_1 = 0$ prost koren i nema drugih korena na imaginarnoj osi, onda je μ prost koren problema (1.3.36), a karakteristični vektor je $z = x_1 \otimes x_1$.*
- b) *Ako su $\lambda_{1,2} = \pm\beta i, \beta \in \mathbb{R}$ dva prosta čisto imaginarna karakteristična korena i nema drugih korena na imaginarnoj osi, onda je μ koren algebarske višestrukosti 2 problema (1.3.36), sa karakterističnim vektorom $z = \xi_1 x_1 \otimes \bar{x}_1 + \xi_2 \bar{x}_1 \otimes x_1$, za proizvoljne $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}$.*
- c) *Ako su $\lambda_{1,2} = \pm\alpha \in \mathbb{R}$ dva prosta realna karakteristična korena i nema drugih korena na imaginarnoj osi, onda je μ koren algebarske višestrukosti 2 problema (1.3.36), sa karakterističnim vektorom $z = \xi_1 x_1 \otimes x_2 + \xi_2 x_2 \otimes x_1$, za proizvoljne $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}$.*

Dokaz. Ako je $\lambda_1 = 0$, zamenom $z = x_1 \otimes x_1$ u (1.3.36) dobijamo

$$\begin{aligned} (\Delta_0 + \mu\Delta_1)x_1 \otimes x_1 &= (A + \mu B)x_1 \otimes Mx_1 + Mx_1 \otimes (A + \mu B)x_1 = \\ &= \lambda_1 Mx_1 \otimes Mx_1 + Mx_1 \otimes (\lambda_1 Mx_1) = 0 \end{aligned}$$

i time dokazujemo deo pod a). Delovi pod b) i c) slede iz činjenice da je $(A + \mu B)x_1 = \lambda Mx_1$ i $(A + \mu B)x_2 = -\lambda Mx_2$, odakle sledi da je $\lambda = \lambda_1 = -\lambda_2$. Važi

$$\begin{aligned} (\Delta_0 + \mu\Delta_1)x_1 \otimes x_2 &= (A + \mu B)x_1 \otimes Mx_2 + Mx_1 \otimes (A + \mu B)x_2 \\ &= \lambda Mx_1 \otimes Mx_2 + Mx_1 \otimes (-\lambda M)x_2 \\ &= \lambda Mx_1 \otimes Mx_2 - \lambda Mx_1 \otimes Mx_2 = 0. \end{aligned}$$

Usled ekvivalencije posmatranih problema, znamo da jedinstveno rešenje jednog problema implicira postojanje jedinstvenog rešenja drugog i obrnuto. Iz ove činjenice slede zaključci o višestrukosti korena. $\square$

Obrnuto važi ako je matrica M regularna, što vidimo u sledećoj teoremi.

Teorema 1.3.12. *Ako je (μ, z) karakteristični par problema (1.3.36), $\mu \in \mathbb{R}$, i M je regularna matrica, onda za rešenja problema (1.3.4) važi sledeće:*

- a) *Ako je μ prost koren, onda je $z = \xi x_1 \otimes x_1, \xi \in \mathbb{C}$, gde $(\lambda_1 = 0, x_1)$ predstavlja karakteristični par problema (1.3.4).*
- b) *Ako je μ dupli koren, onda postoje $\lambda \in \mathbb{C}$ i $x_1, x_2 \in \mathbb{C}^n$ tako da su (λ, x_1) i $(-\lambda, x_2)$ prosti karakteristični parovi problema (1.3.4) i postoje $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}$ tako da je $z = \xi_1 x_1 \otimes x_2 + \xi_2 x_2 \otimes x_1$.*

Dokaz. Neka je $A + \mu B = MX\Gamma X^{-1}$ Žordanova kanonička forma ([29]) vezana za (1.3.4), gde je $X = [x_1, \dots, x_n]$ invertibilna, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ se nalaze na glavnoj dijagonali blok - dijagonalne matrice Γ oblika

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & 0 & \lambda_k & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & 0 & 0 & \lambda_k & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix},$$

(λ_i, x_i) predstavljaju karakteristične parove problema (1.3.4), a $\lambda_i, 1 \leq i \leq k$ se javljaju onoliko puta kolika im je algebarska višestrukost. Tada možemo izvesti ekvivalentan oblik problema (1.3.36). Naime,

$$\begin{aligned} (\Delta_0 + \mu\Delta_1)z &= ((A \otimes M + M \otimes A) + \mu(B \otimes M + M \otimes B))z = \\ &= ((A + \mu B) \otimes M + M \otimes (A + \mu B))z = \\ &= (MX\Gamma X^{-1} \otimes M + M \otimes MX\Gamma X^{-1})z = \\ &= (MX\Gamma X^{-1} \otimes MX X^{-1} + MX X^{-1} \otimes MX\Gamma X^{-1})z = \\ &= [(MX\Gamma \otimes MX) + (MX \otimes MX\Gamma)](X^{-1} \otimes X^{-1})z = \\ &= [(MX \otimes MX)(\Gamma \otimes I) + (MX \otimes MX)(I \otimes \Gamma)](X^{-1} \otimes X^{-1})z, \end{aligned}$$

odnosno

$$(\Delta_0 + \mu\Delta_1)z = (MX \otimes MX)(\Gamma \otimes I + I \otimes \Gamma)(X^{-1} \otimes X^{-1})z = 0. \quad (1.3.37)$$

Iz činjenice da su matrice M i X regularne važi da su i $MX \otimes MX$ i $X^{-1} \otimes X^{-1}$ regularne, pa imaju pun rang. Sledi da $\Gamma \otimes I + I \otimes \Gamma$ mora imati bar jedan nula

element koji se nalazi na glavnoj dijagonali. Znamo da se na glavnoj dijagonali $\Gamma \otimes I + I \otimes \Gamma$ nalaze elementi $\lambda_i + \lambda_j$. $\Gamma \otimes I + I \otimes \Gamma$ je gornja trougaona, pa su $\lambda_i + \lambda_j$ koreni $(A + \mu B) \otimes M + M \otimes (A + \mu B)$, a odgovarajući vektori su $z = x_i \otimes x_j$ i $z = x_j \otimes x_i$.

Ako je μ dupli koren, važi da je $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ i $\lambda_2 + \lambda_1 = 0$. Kako su A, B i M realne matrice, mora da važi ili $\lambda_{1,2} = \pm\alpha$ ili $\lambda_{1,2} = \pm\beta i$ ili su oba jednaka 0. Vektori korena koji su jednaki 0 su oblika $z = \xi_1 x_1 \otimes x_2 + \xi_2 x_2 \otimes x_1$, a ako su koreni čisto imaginarni, važi da je $x_2 = \bar{x}_1$, pa je karakteristični vektor oblika $z = \xi_1 x_1 \otimes \bar{x}_1 + \xi_2 \bar{x}_1 \otimes x_1$.

Ako je μ prost koren, $\lambda_i + \lambda_j$ može biti prost samo kad je $i = j = 1$ i $\lambda_1 = 0$. Odgovarajući vektor je $z = \xi x \otimes x$, gde je x karakteristični vektor problema (1.3.4). $\square$

Sada nas interesuje kako izgleda karakteristični vektor problema (1.3.35), odnosno koje su osobine matrice Z . O tome nam govori sledeća teorema.

Teorema 1.3.13. *Neka je μ realan karakteristični koren problema (1.3.36) i važe uslovi Teoreme 1.3.11. Tada matrica Z ima sledeće osobine:*

- a) *Ako je $\lambda = 0$, Z je simetrična matrica ranga 1, odnosno $Z = xx^T$ i ona je jedinstvena do na množenje skalarom.*
- b) *Ako su $\lambda_{1,2} = \pm\beta i$, Z je realna, simetrična, semi-definitna matrica oblika $Z = xx^* + \bar{x}x^T$, jedinstvena do na množenje skalarom. Takođe, postoji i jedinstveni koso-simetrični karakteristični vektor ranga dva, $Z = xx^* - \bar{x}x^T$, koji ima iste osobine.*
- c) *Ako su $\lambda_{1,2} = \pm\alpha \in \mathbb{R}$, Z je simetričan vektor oblika $Z = x_1 x_2^T + x_2 x_1^T$, jedinstven do na množenje skalarom i nedefinitan, a jedinstveni koso-simetrični karakteristični koren ranga dva, $Z = x_1 x_2^T - x_2 x_1^T$ ima iste osobine.*

Dokaz. Ako je $\lambda = 0$, onda iz $z = x \otimes x$ sledi $Z = xx^T$. Ako je λ realno ili čisto imaginarno, znamo da su karakteristični vektori oblika $Z = \xi_1 x_1 x_2^T + \xi_2 x_2 x_1^T$, gde x_1 i x_2 nisu paralelni. Ako je $\xi_1 = 0$ ili $\xi_2 = 0$, Z je ranga 1. Još treba pokazati da je za slučajeve pod b) i c) Z simetrična i ima rang dva. Iz $Z - Z^T = 0$ dobijamo $(\xi_1 - \xi_2)x_1 x_2^T + (\xi_2 - \xi_1)x_2 x_1^T = 0$, pa sledi da je $\xi_1 = \xi_2$, što implicira da je Z uvek ranga dva.

Za slučaj pod b) uzimamo $x_1 = x$ i $x_2 = \bar{x}$ i onda matricu Z zapisujemo na sledeći način

$$Z = x_1 x_2^T + x_2 x_1^T = \frac{1}{2}((x_1 + x_2)(x_1 + x_2)^T - (x_1 - x_2)(x_1 - x_2)^T) \quad (1.3.38)$$

Ako su x_1 i x_2 realni, Z ima jedan pozitivan i jedan negativan koren, kao i $n - 2$ nula korena. Ako je $x_2 = \bar{x}_1$, onda je $Z = xx^* + \bar{x}x^T$ suma dva kompleksna, hermitska, pozitivno-definitna izraza, što dokazuje teoremu. $\square$

Na osnovu ovih teorema zaključujemo da ako su karakteristični parovi originalnog problema

$$(A + \mu B)x = \lambda Mx$$

(λ, x) i $(-\lambda, \bar{x})$, gde je $\lambda = \nu i, \nu \in \mathbb{R}$ za fiksirano μ , onda za to isto μ , matrica

$$(A + \mu B) \otimes M + M \otimes (A + \mu B)$$

ima dupli nula koren sa vektorom $\xi_1 x \otimes \bar{x} + \xi_2 \bar{x} \otimes x$. Važi i obrnuto. Stoga zaključujemo da je naš problem nalaženja μ koje je najbliže nuli takvo da (1.3.4) ima par čisto imaginarnih korena ekvivalentan sa nalaženjem μ koje je najbliže nuli tako da $(A + \mu B) \otimes M + M \otimes (A + \mu B)$ ima dupli nula koren. Da zaključimo, posmatrani problem možemo formulisati i tako da tražimo karakteristični koren μ najbliži nuli za problem

$$(\Delta_0 + \mu \Delta_1)z = 0,$$

čiji je karakteristični vektor oblika $\xi_1 x \otimes \bar{x} + \xi_2 \bar{x} \otimes x$. Međutim, ovakvi zadaci se rešavaju korišćenjem iterativnih algoritama, kao npr. inverzne iteracije, koji su nepraktični za probleme velikih dimenzija. Stoga ipak koristimo formulaciju

$$MZA^T + AZM^T + \mu(MZB^T + BZM^T) = 0$$

za koju smo pokazali da je ekvivalentna sa $((A \otimes M + M \otimes A) + \mu(B \otimes M + M \otimes B))z = 0$ i vidimo da je još jedan način za posmatranje tog problema i nalaženje μ koje je najbliže nuli za problem formulisano preko Ljapunovljeve jednačine.

Bitno je napomenuti da se mogu napraviti restrikcije prostora karakterističnih vektora na simetrične i anti-simetrične. Anti-simetričan prostor ćemo zanemariti jer na osnovu Teoreme 1.3.13a) vidimo da za prosto $\lambda = 0$ ne možemo izračunati koren ovog prostora μ , jer bi odgovarajući karakteristični vektor Z bila simetrična matrica, što je kontradikcija sa prostorom u kom radimo. Zbog toga ipak biramo restrikciju na simetrične vektore, jer je tada metod inverzne iteracije koji ćemo koristiti povezan sa simetričnim rešenjem Ljapunovljeve jednačine.

Glava 2

Spoljašnja i unutrašnja iteracija

2.1 Spoljašnja - Ljapunovljeva inverzna iteracija

Inverzna iteracija je jedan od najmoćnijih alata numeričke analize. Ona je predstavljena 1944. godine od strane Helmuta Vilanta¹ kao metod za računanje karakterističnih funkcija linearnih operatora. Kasnije ju je Džim Wilkinson² transformisao u dobar metod za računanje karakterističnih vektora matrica ([37]). Danas se najčešće koristi upravo u te svrhe, da bi se izračunali karakteristični vektori matrice kad imamo aproksimaciju za jedan ili više korena ([32]).

2.1.1 Slučaj kad tačka (u^*, α^*) nije u okolini kritične

Pomenuli smo da u slučaju da je tačka $(u^*, \alpha^*) \in \mathcal{S}$ proizvoljno udaljena od kritične tačke (u_0, α_0) nije lako oceniti Jakobijan u njoj. Stoga je nerealan problem razmatrati u istom obliku kao i do sada, jer Jakobijan ne možemo predstaviti u obliku $A + \mu B$. Zbog toga je neophodno odrediti kolika je udaljenost između odabrane i kritične tačke. U slučaju da je udaljenost velika, koristi se proces numeričke kontinuirane³ sve dok se ne stigne u okolinu (u^*, α^*) .

Na osnovu rezultata iz [12], [15], vidimo da se distanca između odabrane i kritične tačke može povezati sa udaljenošću najdešnjeg korena sistema od imaginarne ose i to na sledeći način: ukoliko je najdešnji vektor daleko od imaginarne ose, možemo pretpostaviti da je i tačka (u^*, α^*) udaljena od kritične tačke i obrnuto. Kako nam ovo saznanje pomaže u rešavanju problema?

Neka je, kao i ranije, $(u_0, \alpha_0) \in \mathcal{S}$ proizvoljna tačka, matrica M regularna, $(\lambda_j, x_j), j = 1, 2, \dots, n$ karakteristični parovi problema (1.3.2)

$$Jx = \lambda Mx \quad (2.1.1)$$

¹ger. *Helmut Wielandt* (19.12.1910-14.02.2001), nemački matematičar koji se pretežno bavio permutacionim grupama.

²eng. *James (Jim) Hardy Wilkinson* (27.09.1919-5.10.1986), britanski matematičar koji je ostvario značajne rezultate u oblasti numeričke analize, primenjene matematike, kao i u računarskim naukama. Razvio je takozvani metod analize grešaka unazad, koji se danas često primenjuje u radu sa matricama.

³Metodi numeričke kontinuirane se koriste za rešavanje sistema $F(U, \lambda) = 0, F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Neki od sinonima za ove metode su *metodi homotopije*, *metodi varijacije parametra* ili *inkrementalni metodi*.

gde je sa J obeležen Jakobijan u tački α_0 , a realni delovi korena, $Re(\lambda_j)$, su napisani u opadajućem poretku, odnosno $0 > Re(\lambda_1) \geq Re(\lambda_2) \geq \dots \geq Re(\lambda_n)$. Na osnovu ove notacije uočavamo da je distanca između najdešnjeg korena i imaginarne ose jednaka $-Re(\lambda_1)$. Ako bismo sa S označili proizvod $J^{-1}M$, možemo formulisati problem čiji je karakteristični koren sa najmanjim modulom upravo $-Re(\lambda_1)$. Taj problem izgleda ovako:

$$((S \otimes I + I \otimes S) + 2\mu S \otimes S)z = 0 \quad (2.1.2)$$

Da bismo pokazali ovo, iskoristićemo tvrđenje koje nam govori o karakterističnim parovima problema (2.1.2). Videćemo da se može povući paralela između tvrđenja koje dolazi i rezultata dobijenih u Teoremi 1.3.11.

Teorema 2.1.1. *Ako je (λ, x) realan karakteristični par problema (2.1.1), tada je $(\mu = \lambda, z = x \otimes x)$ karakteristični par problema (2.1.2).*

U slučaju da su koreni λ oblika $\lambda = a \pm ib$, odgovarajući karakteristični parovi problema (2.1.2) su $(\mu = a, z = x \otimes \bar{x})$ i $(\mu = a, z = \bar{x} \otimes x)$.

Ako posmatramo zavisnost drugog problema od prvog, važi da za koren μ jednačine (2.1.2) postoje koreni jednačine (2.1.1), λ_1 i λ_2 , tako da važi $-2\mu = \lambda_1 + \lambda_2$. Odgovarajući karakteristični vektor je $z = \xi_1 x_1 \otimes x_2 + \xi_2 x_2 \otimes x_1$, gde su x_1 i x_2 vektori jednačine (2.1.1).

Dokaz. Uočavamo da je ovo tvrđenje u velikoj meri ekvivalentno sa onim što smo pokazali u Teoremi 1.3.11.

Što se tiče dela koji se odnosi na to da je $-2\mu = \lambda_1 + \lambda_2$, gde su λ_1 i λ_2 koreni jednačine (2.1.1), ukoliko pomnožimo (2.1.2) sa $S^{-1} \otimes S^{-1}$ dobijamo

$$((I \otimes S^{-1} + S^{-1} \otimes I) + 2\mu)z = 0.$$

Kako se može odrediti Šurova dekompozicija matrice S^{-1} u obliku $S^{-1} = QRQ^T$, zamenom ovoga u poslednju jednačinu, dobijamo

$$\begin{aligned} ((I \otimes (QRQ^T) + (QRQ^T) \otimes I) + 2\mu)z &= 0 \\ (I \otimes R + R \otimes I)(Q^T \otimes Q^T)z &= -2\mu(Q^T \otimes Q^T)z \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Na osnovu činjenice da su koreni matrice $(I \otimes R + R \otimes I)$ sve kombinacije $\lambda_i + \lambda_j$, dokaz je gotov. $\square$

Sledeće tvrđenje nam govori o načinu pronalaženja udaljenosti između najdešnjeg korena i imaginarne ose, odnosno $-Re(\lambda_1)$.

Teorema 2.1.2. *Ako svi koreni problema $Jx = \lambda Mx$ leže u levoj imaginarnoj poluravni $\mathbb{C}^-$, važi da je karakteristični koren sa najmanjim modulom problema (2.1.2) upravo $-Re(\lambda_1)$.*

Dokaz. Ako je λ_1 realan, tada

$$-Re(\lambda_1) = -\lambda_1 = -\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_1) = \mu.$$

Ako su $\lambda_{1,2}$ par kompleksnih korena, $\lambda_{1,2} = a \pm ib$, koristeći prethodnu teoremu dobijamo

$$\mu = -\frac{1}{2}(a + ib + a - ib) = -\frac{1}{2}(2a) = -a = -Re(\lambda_1) = -Re(\lambda_2).$$

Iz prikazanog vidimo da je $-Re(\lambda_1)$ zaista koren problema (2.1.2). Još treba pokazati da mu je moduo najmanji.

Neka je $\lambda_j = a_j + ib_j$ i važi $0 > a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$. Prvo razmotrimo slučaj u kom je najdešnji koren λ_1 realan. Tada je $-Re(\lambda_1) = \mu_1$, a

$$|\mu_1|^2 = |\mu_{1,1}|^2 = \frac{1}{4}(a_1 + a_1)^2 \leq \frac{1}{4}((a_i + a_j)^2 + (b_i + b_j)^2) = |\mu_{i,j}|^2. \quad (2.1.4)$$

Ako su najdešnji koreni $\lambda_{1,2}$ konjugovano kompleksni par, onda je $-Re(\lambda_1) = -Re(\lambda_2) = \mu_{1,2} = \mu_{2,1}$, pa je

$$\begin{aligned} |\mu_{1,1}|^2 &= \frac{1}{4}((a_1 + a_1)^2 + (b_1 - b_1)^2) \leq \\ &\leq \frac{1}{4}((a_i + a_j)^2 + (b_i + b_j)^2) = |\mu_{i,j}|^2. \end{aligned}$$

□

Ideja je primeniti algoritam inverzne iteracije na (2.1.2) i na taj način dobiti vrednost njegovog korena $-Re(\lambda_1)$, odnosno rastojanje najdešnjeg korena problema (2.1.1) od imaginarne ose. Zbog kompleksnosti rada sa Kronekerovim proizvodom, možemo iskoristiti već poznate osobine i formulisati sistem (2.1.2) u obliku Ljapunovljeve matrice jednačine i dobiti sledeće:

$$SZ + ZS^T + 2\mu SZS^T = 0 \quad (2.1.5)$$

gde je $vec(Z) = z$ od ranije poznat oblik karakterističnog vektora problema (2.1.5) i ima osobine pokazane u Teoremi 1.3.13. Zaključujemo da se i ovde posmatra prostor simetričnih vektora. Simetričnu matricu Z možemo predstaviti preko njene EVD⁴ dekompozicije, odnosno $Z = VDV^T$, gde je D dijagonalna, a V ortonormirana matrica i važi $span\{V\} = span\{x, \bar{x}\}$ (iz Teoreme 1.3.13 b)).

Algoritmi inverzne iteracije za slučajeve kad je izabrana tačka u okolini kritične i kad to nije slučaj se razlikuju u nijansama, što ćemo videti iz onoga što sledi. Bitno je napomenuti da se u ovim situacijama vrši i redukcija ranga da bi se problem dodatno pojednostavio, odnosno da bi se dobili karakteristični vektori ranga 1 ili 2, kao što je predstavljeno Teoremom 1.3.13.

⁴eng. Eigenvalue decomposition - FaktORIZACIJA matrice na matrice koje sadrže karakteristične korene, odnosno vektore početne.

Ljapunovljeva inverzna iteracija za problem $SZ + ZS^T + 2\mu SZS^T = 0$

1. Neka je dato $\Upsilon_0 \in \mathbb{R}^n$, $\|\Upsilon_0\|_2 = 1$ i $Z_{(0)} = \Upsilon_0 \Upsilon_0^T$.

2. Za $j = 1, 2, \dots$

(a) Rešiti Ljapunovljevu jednačinu

$$SY_j + Y_j S^T + 2SZ_{(j-1)}S^T = 0 \quad (2.1.6)$$

po Y_j u obliku $Y_j = V_j D_j V_j^T$, $V_j \in \mathbb{R}^{n \times n_j}$, $n_j = \text{rank}(Y_j)$.

(b) Izvršiti redukciju ranga na sledeći način: za $\hat{S} = V_j^T S V_j$ rešiti

$$\hat{S} \hat{Z} + \hat{Z} \hat{S}^T + 2\hat{\mu} \hat{S} \hat{Z} \hat{S}^T = 0 \quad (2.1.7)$$

po $\hat{\mu}_1$, koje predstavlja koren sa najmanjim modulom, i odgovarajućem vektoru $\hat{Z}_1 = \hat{\Upsilon} \hat{D} \hat{\Upsilon}^T$.

(c) $\mu_{(j)} = \hat{\mu}_1$ i $Z_j = \Upsilon_j \hat{D} \Upsilon_j^T$ gde je $\Upsilon_j = V_j \hat{\Upsilon}$.

(d) Ako je $(\mu_{(j)}, Z_{(j)})$ iskonvergiralo, stati. Inače se postupak ponavlja.

Vidimo da u delu algoritma 2b, moramo da rešimo još jednu Ljapunovljevu jednačinu. Međutim, zbog redukcije ranga dobijamo jednačinu znatno manjih dimenzija od dimenzija posmatranog problema, tako da možemo da iskoristimo Bartels - Stjuartov algoritam za dobijanje rešenja. O ovom algoritmu će biti više reči u narednom poglavlju.

Krajnji rezultat algoritma Ljapunovljeve inverzne iteracije treba da bude par $(-Re(\lambda_1), \Upsilon D \Upsilon^T)$ gde je $\|D\|_2 = 1$, a $\Upsilon = x_1 \in \mathbb{R}^n$, odnosno $\Upsilon \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ u zavisnosti od toga da li je λ_1 realan ili ne.

Navedeni algoritam se može iskoristiti i da bi se odredile aproksimacije para (λ_1, x_1) rešavanjem jednačine

$$(\Upsilon_j^T S \Upsilon_j) y = \frac{1}{\lambda_j} y \quad (2.1.8)$$

gde je $x_{(j)} = \Upsilon_j y$, Kad Υ_j iskonvergira ka Υ , dobiće se zadovoljavajuća aproksimacija (λ_1, x_1) .

Sada ćemo pokazati algoritam inverzne iteracije za problem (1.3.25).

2.1.2 Inverzna iteracija u slučaju da je odabrana tačka u okolini kritične

Rekli smo da posmatramo prostor simetričnih karakterističnih korena Z malog ranga i pomenuli smo da se one mogu predstaviti preko svoje EVD dekompozicije, odnosno $Z = V D V^T$, gde je D dijagonalna, a V ortonormirana matrica. Ako je Z ranga dva, onda je D matrica dimenzije 2×2 , a V je dimenzije $n \times 2$.

Da bismo dobili koren najbliži nuli za problem

$$MZA^T + AZM^T + \mu(MZB^T + BZM^T) = 0,$$

primenjujemo algoritam inverzne iteracije na sledeći način.

Algoritam inverzne iteracije:

1. Neka je $V_1 \in \mathbb{R}^n$, $\|V_1\|_2 = 1$ i $D_1 = 1$. Neka je, za početak $k = 1$.

2. Za $j = 1, 2, \dots$

(a) Odrediti

$$\hat{A}_j = V_j^T A V_j, \hat{B}_j = V_j^T B V_j, \hat{M}_j = V_j^T M V_j. \quad (2.1.9)$$

(b) Rešiti projektovani problem

$$\hat{A}_j \hat{Z}_j \hat{M}_j^T + \hat{M}_j \hat{Z}_j \hat{A}_j^T + \hat{\mu}_j (\hat{B}_j \hat{Z}_j \hat{M}_j^T + \hat{M}_j \hat{Z}_j \hat{B}_j^T) = 0 \quad (2.1.10)$$

po korenu najbližem nuli, $\hat{\mu}_1$, i odgovarajućem vektoru $\hat{Z}_j = \hat{V}_j \hat{D}_j \hat{V}_j^T$, $\hat{V}_j \in \mathbb{R}^{k \times r}$, $\hat{D}_j \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $r \in \{1, 2\}$.

(c) $\mu_j = \hat{\mu}_j$ i $Z_j = \Upsilon_j \hat{D}_j \Upsilon_j^T$ gde je $\Upsilon_j = V_j \hat{V}_j$.

(d) Ako je (μ_j, Z_j) dovoljno tačno, onda je postupak gotov.

(e) Ako nije, onda treba rešiti

$$A Y_j M^T + M Y_j A^T = B Z_j M^T + M Z_j B^T = F_j \quad (2.1.11)$$

gde je $Y_j = V_{j+1} D_{j+1} V_{j+1}^T$.

Jednačinu (2.1.11) nije jednostavno rešiti i stoga pribegavamo određenim transformacijama, da bismo dobili oblik u kom bismo lakše pronašli rešenje. Naime, ako je A regularna, onda je (2.1.11) ekvivalentno Ljapunovljevoj jednačini oblika

$$S Y_j + Y_j S^T = A^{-1} (B Z_j M^T + M Z_j B^T) A^{-T} = A^{-1} F_j A^{-T} \quad (2.1.12)$$

gde je $S = A^{-1} M$. Na početku smo pretpostavili da je matrica M regularna, a tačka (u_0, α_0) stabilna, pa važi da svi karakteristični koreni matrice S leže u levoj kompleksnoj poluravni, što znači da (2.1.12) ima jedinstveno rešenje.

Važi da, ako je Z_j simetrično, onda su i F_j i Y_j simetrične matrice, pa pošto krećemo od simetrične Z_1 , a ostale računamo pomoću matrica F i Y , vidimo da se u svakom koraku j dobijaju simetrični rezultati Z_j , a u krajnjem slučaju, kada proces iskonvergira, dobija se simetričan vektor Z , što odgovara tvrđenju Teoreme 1.3.13. I u ovom slučaju smo se poslužili redukcijom ranga, odnosno projektovanjem problema na $\text{Range}(V_i \otimes V_j)$. Da nismo, matrica Y_j koja bi se dobila u međuprocusu bi bila punog ranga i to bi otežalo rad sa velikim dimenzijama. Vodeći se rezultatima Teoreme 1.3.13, nama bi najviše odgovarao rad sa matricama malih rangova, po mogućnosti 1 ili 2, što i dobijemo kao rezultat predstavljenog algoritma. Ako pretpostavimo da je $\text{rank}(Z_j) = k$ i odredimo EVD za desnu stranu jednačine (2.1.12), dobijamo

$$A^{-1} (B Z_j M^T + M Z_j B^T) A^{-T} = A^{-1} F_j A^{-T} = P_j C_j P_j^T \quad (2.1.13)$$

što ima rang najviše $2k$. EVD dekompozicija se računa lako korišćenjem odgovarajućih funkcija u softverima. Matematički zapisano, tražena EVD bi bila oblika

$$\begin{aligned} A^{-1}(BZ_jM^T + MZ_jB^T)A^{-T} = \\ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}[TV_j + SV_j, TV_j - SV_j] \right) \begin{bmatrix} D_j & \\ & -D_j \end{bmatrix} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}[TV_j + SV_j, TV_j - SV_j] \right)^T \end{aligned}$$

gde je $T = A^{-1}B$. Tom logikom, ako Z ima rang 2, kao u Teoremi 1.3.13, tada (2.1.13) ima rang 4.

Napominjemo i da je nakon određivanja para (μ, Z) pomoću algoritma inverzne iteracije navedenog u ovom delu moguće iskoristiti dobijeno za računanje karakterističnog para (λ, x) drugog problema. Njega ćemo dobiti rešavanjem dvodimenzionalnog sistema

$$(\hat{A} + \mu\hat{B})y = \lambda\hat{M}y, \quad (2.1.14)$$

gde je $x = Vy$.

Ako bismo odredili EVD i za poznati deo jednačine (2.1.6) iz algoritma Ljapunovljeve inverzne iteracije kad odabrana tačka nije u okolini kritične, vidimo da se i u jednom i u drugom algoritmu traži rešenje istog oblika Ljapunovljeve jednačine. Stoga ćemo postupak unutrašnje iteracije objašnjavati na primeru algoritma navedenog u ovom poglavlju.

2.2 Unutrašnja iteracija - Ljapunovljevi solveri

Dobili smo problem izražen preko Ljapunovljeve jednačine, pa moramo da iskoristimo neki od poznatih algoritama za njegovo rešavanje. U slučaju da su dimenzije sistema male, najčešće se koristi Bartels - Stjuartov algoritam i modifikacije, dok za sisteme velikih dimenzija koristimo metode koji se baziraju na potprostorima Krilova.

Problemi manjih dimenzija ($n \leq 50$) su znatno istraženiji i za njih postoje razni načini rešavanja, od iterativnih aproksimacija, preko Žordanovih dekompozicija, do korišćenja Kronekerovog proizvoda. Međutim, najefikasniji i najčešće korišćen algoritam za rešavanje ovih jednačina je Bartels-Stjuartov metod ([21], [22]). Ideja ovog postupka je da se iskoristi Šurova dekompozicija da bi se posmatrani Ljapunovljev problem sveo na trougaoni sistem jednačina, koji se rešava na relativno lak način supstitucijom unazad uz konačan broj operacija.

Ceo Bartels-Stjuartov algoritam zahteva oko $32n^3$ elementarnih operacija. Ovaj nivo kompleksnosti je sasvim zadovoljavajući, jer radimo sa sistemima malih dimenzija, pa softver nije previše opterećen. Metod je numerički stabilan unazad i implementiran je u *MATLAB*[®]-u u okviru rutine *lyap* u obliku pokazanom u [22], stoga ga nećemo detaljno izlagati.

Tehnike potprostora Krilova ([23],[27]) su iterativni metodi koji igraju značajnu ulogu u rešavanju raznih naučnih problema. Svoju primenu su prvenstveno našle u rešavanju problema karakterističnih korena velikih dimenzija i iz tog razloga se koriste u raznim oblastima hemije, fizike i teorije kontrole. Sa teorijske

strane, upotreba ovih tehnika se vezuje za sisteme linearnih jednačina oblika $AX = b$.

Za razliku od stepenog metoda kojim se dobija najdominantniji koren i odgovarajući vektor matrice velikih dimenzija, Krilovljev metod projekcije koristi sve moguće linearne kombinacije vektora koji se dobiju stepenim metodom i obezbeđuje više informacija o karakterističnim vrednostima.

Za početak, da se upoznamo sa nekim osnovnim pojmovima ([29]).

Definicija 2.2.1. *Potprostor Krilova reda k je prostor generisan na sledeći način*

$$K_k(A, v) := \text{span}\{v, Av, A^2v, \dots, A^{k-1}v\} \quad (2.2.1)$$

Odgovarajući karakteristični parovi (λ, x) se obrazuju poštujući Galrekinov uslov

$$w^*(Ax - x\lambda) = 0, w \in K_k(A, v) \quad (2.2.2)$$

*i nazivaju se **Ritzov** vektor x i **Ritzov** koren λ .*

Do sada smo uspeali da svedemo naš posmatrani problem (1.3.4) na alternativni način posmatranja preko Ljapunovljevih jednačina i na osnovu (2.1.12) i (2.1.13) dobili matričnu jednačinu

$$SY + YS^T = PCP^T = F \quad (2.2.3)$$

gde je $S = A^{-1}M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P \in \mathbb{R}^{n \times s}$ ortonormirana, a $C \in \mathbb{R}^{s \times s}$ dijagonalna matrica, $s \ll n$. S obzirom da je $S = A^{-1}M$, mi bismo, u suštini, želeli da rešimo s linearnih sistema oblika

$$Ax = My$$

po x . U ovom delu želimo da rešimo jednačinu koristeći metod potprostora Krilova.

Neka je $K_k \subseteq \mathbb{R}^n$ dimenzije k , a V matrica ortonormirane baze za K_k . Ideja je pronaći rešenje jednačine (2.2.3) oblika $\hat{Y}(Q) = VQV^T$ za $Q \in \mathbb{R}^{k \times k}$ koje zadovoljava Garlekinov uslov

$$\langle Z, R(Q) \rangle = \text{tr}(ZR(Q)^T) = 0,$$

gde je

$$R(Q) = S\hat{Y}(Q) + \hat{Y}(Q)S^T - PCP^T,$$

$Z = VGV^T$ i $G \in \mathbb{R}^{k \times k}$ proizvoljno. Važi da ako je r rang matrice V , onda je rang matrice P između r i $2r$.

Jedino Q koje zadovoljava Garlekinov uslov je rešenje projektovanog problema

$$(V^T SV)Q + Q(V^T SV)^T = (V^T P)C(V^T P)^T \quad (2.2.4)$$

Obzirom da rešavamo sistem linearnih jednačina, zajednički potprostor Krilova K_k u ovom slučaju biramo na sledeći način:

$$K_k(S, P) = \text{span}\{P, SP, S^2P, \dots, S^{k-1}P\} \quad (2.2.5)$$

Ustanovili smo da se karakteristični koreni matrice S nalaze u levoj kompleksnoj poluravni. Koristeći tu osobinu, kao i činjenicu iz (1.3.33), možemo izraziti analitičko rešenje jednačine (2.2.3), kao

$$\int_0^\infty e^{St} P C P^T e^{S^T t} dt.$$

Međutim, ovakvo rešenje nije upotrebljivo, stoga moramo iskoristiti neki drugi alat za dobijanje optimalnog rešenja. Za računanje ortonormalne baze prostora Krilova $K_k(S, P)$ koristićemo blok - Arnoldijev metod.

U najvećem broju slučajeva, Arnoldijevim procesom nije moguće izračunati sve korene, već samo one ekstremne. Ali, s obzirom da takve korene i analiziramo u radu, ovo nam ne predstavlja problem.

Arnoldijev metod

Najčešći metodi računanja QR dekompozicije matrice A su Hausholderova trijangularizacija, gde se do trijangularizacije matrice A stiže primenom ortogonalnih operacija, i Gram-Šmitova ortogonalizacija prilikom koje se primenjuju trougaone operacije da bi se ortogonalizovala A . Ako bismo želeli da odredimo Hesenbergovu formu matrice A u obliku QHQ^* , ponovo bismo mogli da koristimo Hausholderove reflektore, ali i Arnoldijevu iteraciju ([30]). Ona predstavlja analogiju Gram-Šmitovom postupku gde se transformacijama sličnosti dolazi do Hesenbergove forme, a ne do QR dekompozicije. Njena prednost je što može da se obustavi pre izračunavanja krajnje forme i na taj način se dobija redukovana Hesenbergova forma koja se koristi prilikom formiranja iterativnih algoritama za računanje karakterističnih korena sistema jednačina. Takođe, bitna primena je i u računanju faktORIZACIJE Krilovljeve matrice, kao i u projekciji na potprostore Krilova.

Neka je A proizvoljna matrica, a b vektor koji koristimo kao startnu vrednost u algoritmu Arnoldijeve iteracije. Hesenbergova forma $\hat{H}_n$ dimenzije $(n+1) \times n$ se dobija na sledeći način

$$AQ_n = Q_{n+1}\hat{H}_n \quad (2.2.6)$$

odnosno

$$\left[\begin{array}{c} A \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c|c} q_1 & \cdots & q_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c} q_1 & \cdots & q_{n+1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & \cdots & h_{2n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & h_{n+1,n} \end{array} \right] \quad (2.2.7)$$

Matrica Q koja se dobija kao nusproizvod algoritma je unitarna. Njenih prvih n kolona izgleda ovako

$$Q_n = \left[\begin{array}{c|c|c|c} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{array} \right]$$

Ova matrica predstavlja bazu potprostora Krilova

$$K_n(A, b) := \langle b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b \rangle = \langle q_1, q_2, \dots, q_n \rangle \subseteq \mathbb{C}^m. \quad (2.2.8)$$

Iz tog razloga se Arnoldijev metod može opisati i kao proces konstrukcije ortonormirane baze za potprostore Krilova. Krilovljeva matrica K_n , odnosno matrica čije su kolone vektori iz (2.2.5), ima svoju QR dekompoziciju $K_n = Q_n R_n$. Matrice K_n i R_n su loše uslovljene, ali one prilikom rada nisu od velikog značaja (za razliku od Q_n), pa se ne formiraju do kraja.

Napomenuli smo da se Arnoldijev metod može koristiti i za projektovanje na sukcesivne potprostore Krilova. Ideja je sledeća: neka se matrica H_n dobija od matrice $\hat{H}_n$ iz (2.2.6) kad iz nje uklonimo poslednji red. Matematički zapisano, H_n izgleda ovako

$$H_n = Q_n^* Q_{n+1} \hat{H}_n.$$

Ubacujući u priču i jednačinu (2.2.6) vidimo da je $H_n = Q_n^* A Q_n$, odnosno H_n je reprezentacija ortogonalne projekcije matrice A na potprostor Krilova K_n izražen u bazi $\{q_1, \dots, q_n\}$.

Pošto je H_n projekcija od A , možemo zaključiti da su njeni karakteristični koreni povezani sa korenima od A . Ove korene nazivamo **Arnoldijevim ocenama** korena matrice A .

Blok - Arnoldijev solver Ljapunovljeve jednačine

Napomenuli smo da koristimo blok - Arnoldijev metod da bismo odredili bazu prostora $K_k(S, P)$. Odnosno, želimo da iskoristimo ovaj metod za projekciju našeg problema Ljapunovljeve jednačine na odgovarajući potprostor Krilova, u cilju snižavanja reda iste i lakšeg dolaska do rešenja, izraženog u bazi tog potprostora ([14],[17],[24],[25]).

Ovaj metod funkcioniše na sledeći način. Računamo dekompoziciju

$$SV_k = V_k H_k + \Upsilon_{k+1} H_{k+1,k} E_k^T \quad (2.2.9)$$

gde je $V_k = [\Upsilon_1, \dots, \Upsilon_k] \in \mathbb{R}^{n \times ks}$ ortonormirana baza prostora $K_k(S, P)$, $E_k \in \mathbb{R}^{ks \times s}$ sadrži poslednjih s kolona jedinične matrice reda ks , a $H_k \in \mathbb{R}^{ks \times ks}$ je blok gornja Hesenbergova matrica, sa $s \times s$ blokova $H_{i,j}$. Nakon izračunavanja, možemo da iskoristimo dobijeno zamenom u projektovani problem (2.2.4):

$$\begin{aligned} (V_k^T S V_k) Q_k + Q_k (V_k^T S V_k)^T &= (V_k^T P) C (V_k^T P)^T, \text{ tj.} \\ (V_k^T (V_k H_k + \Upsilon_{k+1} H_{k+1,k} E_k^T)) Q_k + Q_k (V_k^T V_k H_k + \Upsilon_{k+1} H_{k+1,k} E_k^T)^T &= (V_k^T P) C (V_k^T P)^T \end{aligned}$$

Iz činjenice da je V_k matrica ortonormirane baze važi da je $V_k^T V_k = I$, a pošto je Υ_{k+1} ortogonalan na sve vektore iz V_k , dobijamo da je $V_k^T \Upsilon_{k+1} = 0$. Daljim sređivanjem izraza dobijamo jednostavniji problem

$$H_k Q_k + Q_k H_k^T = \begin{bmatrix} C & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \hat{C}_k. \quad (2.2.10)$$

Rešavajući ovu prostiju jednačinu, dobijamo elemente neophodne za računanje reziduala

$$\|R(Q_k)\|_F = \|H_k Q_k + Q_k H_k^T - \hat{C}_k\|_F, \quad (2.2.11)$$

jer na osnovu njega zaključujemo koliko nam je rešenje dobro i koristimo ga kao zaustavni kriterijum u algoritmu.

Algoritam blok Arnoldijevog metoda za rešavanje (2.2.3) izgleda ovako:

Blok-Arnoldijev algoritam

1. Neka je $\epsilon > 0$ tolerancija i $\Upsilon_1 = V_1 = P$.
2. Za $k = 1, 2, \dots$
 - (a) $W = S\Upsilon_k$.
 - (b) Za $i = 1, 2, \dots, k$
 - i. $H_{i,k} \leftarrow \Upsilon_i^T W$
 - ii. $W \leftarrow W - \Upsilon_i H_{i,k}$
 - (c) Rešiti Ljapunovljevu jednačinu nižeg reda (2.2.10).
 - (d) Izračunati redukovanu QR faktorizaciju za W , $W = \Upsilon_{k+1} H_{k+1,k}$.
 - (e) Odrediti normu reziduala $\|R(Q_k)\|_F = \|H_k Q_k + Q_k H_k^T - \hat{C}\|_F$.
 - (f) Ako je $\|R(Q_k)\|_F < \epsilon$, postupak je gotov.
 - (g) Inače, $V_{k+1} \leftarrow [V_k, \Upsilon_{k+1}]$.

■

Na osnovu sledeće teoreme ćemo videti važne osobine reziduala. Naime, ovako dobijen rezidual zadovoljava Garlekinov uslov i njegova norma, koju u algoritmu implementiramo kao zaustavni kriterijum, se može izraziti i na drugačiji način.

Teorema 2.2.1. *Pretpostaviti da posle k koraka Arnoldijeve iteracije računamo rezidual (2.2.11). Tada, ako je $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$, $\lambda_i, \lambda_j \in \Lambda(H_k)$, za sve i, j , važi:*

- a) $V_k^T R_k(Q_k) V_k = 0$ ako Q_k zadovoljava jednačinu

$$H_k Q_k + Q_k H_k^T - \hat{C}_k = 0.$$

- b) Ako važe uslovi iz a), onda je norma reziduala data sa

$$\|R_k(Q_k)\|_F = \sqrt{2} \|H_{k+1,k} E_k^T Q_k\|_F. \quad (2.2.12)$$

Dokaz. Rezidual jednačine (2.2.3) u koraku k možemo zapisati na sledeći način:

$$R_k(Q_k) = S(V_k Q_k V_k^T) + (V_k Q_k V_k^T) S^T - V_k F V_k^T \quad (2.2.13)$$

gde smo i traženo rešenje i matricu $F = PCP^T$ predstavili u bazi V_k potprostora Krilova $K_k(S, P)$ sa oznakom $\hat{C}_k$. Ako iskoristimo jednačine (2.2.9), (2.2.10) i ubacimo ih u gore dobijenu jednačinu reziduala, dobijamo

$$R_k(Q_k) = V_{k+1} \begin{bmatrix} H_k Q_k + Q_k H_k^T - \hat{C}_k & Q_k E_k H_{k+1,k}^T \\ H_{k+1,k} E_k^T Q_k & 0 \end{bmatrix} V_{k+1}^T \quad (2.2.14)$$

gde je $V_{k+1} = [V_k, Y_{k+1}]$. Na osnovu ovoga možemo da vidimo da li je rezidual ortogonalan na potprostor Krilova, odnosno da li je zadovoljen Garlekinov uslov.

$$\begin{aligned} V_k^T R_k(Q_k) V_k &= V_k^T V_{k+1} \begin{bmatrix} H_k Q_k + Q_k H_k^T - \hat{C}_k & Q_k E_k H_{k+1,k}^T \\ H_{k+1,k} E_k^T Q_k & 0 \end{bmatrix} V_{k+1}^T V_k \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_k Q_k + Q_k H_k^T - \hat{C}_k & Q_k E_k H_{k+1,k}^T \\ H_{k+1,k} E_k^T Q_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= H_k Q_k + Q_k H_k^T - \hat{C}_k \end{aligned}$$

Na ovaj način smo dokazali deo pod a). Ako zamenimo

$$H_k Q_k + Q_k H_k^T - \hat{C}_k = 0$$

kao prvi element ranije uvedene blok matrice, vidimo da važi:

$$R_k(Q_k) = V_{k+1} \begin{bmatrix} 0 & Q_k E_k H_{k+1,k}^T \\ H_{k+1,k} E_k^T Q_k & 0 \end{bmatrix} V_{k+1}^T \quad (2.2.15)$$

pa je norma reziduala

$$\begin{aligned} \|R_k(Q_k)\|_F &= \sqrt{\|Q_k E_k H_{k+1,k}^T\|_F^2 + \|H_{k+1,k} E_k^T Q_k\|_F^2} \\ &= \sqrt{\text{tr}(Q_k E_k H_{k+1,k}^T H_{k+1,k} E_k^T Q_k^T) + \text{tr}(H_{k+1,k} E_k^T Q_k Q_k^T E_k H_{k+1,k}^T)} \\ &= \sqrt{2} \sqrt{\text{tr}(H_{k+1,k} E_k^T Q_k Q_k^T E_k H_{k+1,k}^T)} \\ &= \sqrt{2} \|H_{k+1,k} E_k^T Q_k\|_F. \end{aligned}$$

□

Bitno je napomenuti da računanje norme reziduala na kraju svakog iterativnog ciklusa zahteva oko $\frac{25}{2}(ks)^3$ operacija, kao i to da algoritam konvergira za najviše $\text{mod}(\frac{n}{s} + 1)$ koraka ([16]). Takođe se može pokazati da je preciznost rešenja projektovanog problema vezana za norme reziduala na sledeći način

$$S\widetilde{Y}_j + \widetilde{Y}_j S^T = \mathcal{O}(\|r_1\|_2) + \mathcal{O}(\|r_2\|_2).$$

gde su

$$r_i = A^{-1}(A + \mu_j B - \lambda_i M)x_i = x_i + \mu_j T x_i - \lambda_i S x_i \quad (2.2.16)$$

za $i = 1, 2, T = A^{-1}B, S = A^{-1}M$.

U prethodnoj teoremi smo pokazali kako računamo rezidual koji koristimo u algoritmu. Mana ovog algoritma je to što prilikom povećavanja koraka k postaje sve teže i skuplje manipulirati matricom V_k . Razmatrani su alternativni načini

rešavanja, kao npr. nepotpuna ortogonalizacija, gde od Υ_{k+1} zahtevamo da bude ortogonalna samo na poslednjih l kolona od V_k , gde je l proizvoljan ceo broj. Prednost ovog postupka je što bi se u tom slučaju pamtilo samo poslednjih l kolona matrice V_k . S druge strane, jednostavna formula za rezidual iz Teoreme 2.2.1 više ne bi važila i on bi se računao na komplikovaniji način ([16]).

Do sada smo se bavili teorijskom stranom problema. Uveli smo pojmove dinamičkih sistema, bifurkacija, Kronekerovog i bialternativnog proizvoda i pokazali zavisnost između tri načina zapisivanja posmatranog problema

$$(A + \mu B)x = \lambda Mx$$

sve u cilju nalaženja rešenja na što jednostavniji način. Videli smo kako postupkom spoljne iteracije dolazimo do ocene parametra μ , a zatim korišćenjem unutrašnje iteracije, odnosno raznih Ljapunovljevih solvera dobijamo krajnje rešenje.

U sledećoj glavi nam je cilj da implementiramo ovu priču u odgovarajućem softveru. U našem slučaju to će biti *MATLAB*[®](*R2011a*). Pokazaćemo na koji način se dobija rešenje i koliko brzo program dolazi do istog. Na kraju, u četvrtoj glavi ćemo na numeričkim primerima pokazati gde se ovi procesi zaista koriste, kao i značaj njihovih rezultata.

Glava 3

Implementacija u *MATLAB*[®]-u

3.1 O *MATLAB*[®]-u

MATLAB[®] je izuzetno atraktivan programski jezik u svetu inženjera i naučnika i koristi se za analizu i dizajniranje sistema i proizvoda širom sveta. Primenu je našao u raznim oblastima, kao što su procesiranje slika i signala, upravljanje, regulacija i identifikacija sistema, niz izračunavanja i simulacija u komunikacijama, finansijama, robotici...

MATLAB, u stvari, predstavlja akronim za "**Matrix Laboratory**", jer mu je namena prvenstveno bila rad sa matricama. Prva verzija je napisana krajem 1970. godine na Univerzitetu Novi Meksiko, od strane Kliva Molera¹. On potom otpočinje saradnju sa inženjerima Džekom Litlom² i Stivom Bangertom³ sa Stanford Univerziteta i oni 1984. reprogramiraju *MATLAB*[®] u programskom jeziku *C* i u Kaliforniji osnivaju *MathWorks*, korporaciju koja se specijalizovala za izradu i održavanje matematičkog softvera, čiji su najpoznatiji proizvodi *MATLAB*[®] i Simulink⁴ ([36]).

MATLAB[®] je interaktivno okruženje za razvoj algoritama, vizuelizaciju i analizu podataka i numeričke proračune. On znatno brže od *C*-a ili *C++* daje rezultate numeričkih problema, jer sadrži dosta praktičnih komponenti tradicionalnih jezika, kao što je npr. objektno orijentisano programiranje, a ne zahteva deklaraciju promenljivih ili rezervisanje memorije. Takođe, on funkcioniše bez kompajlera.

U *MATLAB*[®]-u možemo naći izuzetno veliki broj funkcija koje su neophodne za rešavanje numeričkih problema. Te funkcije su grupisane u odgovarajuće biblioteke funkcija. Npr. jedna od osnovnih biblioteka je LAPACK (*eng. Linear Algebra Package*) i ona sadrži funkcije i metode namenjene rešavanju sistema linearnih jednačina, problema najmanjih kvadrata i karakterističnih korena, kao i za računanje raznih faktorizacija matrica, kao što su SVD, LU ili QR dekompozicije.

¹ *eng. Cleve Moler*

² *eng. Jack Little*

³ *eng. Steve Bangert*

⁴ Simulink je okolina integrisana u *MATLAB*[®]-u koja omogućava uključivanje algoritama u modele i, nakon simulacije, korišćenje dobijenih rezultata za dalje analize.

Videli smo da nam se u radu javljaju problemi vezani za rešavanje Ljapunovljevih jednačina, tako da je neophodno pomenuti da u *MATLAB*[®]-u postoji biblioteka LYAPACK (*eng. **Lyapunov Package***) koja sadrži set funkcija namenjen rešavanju problema velikih dimenzija koji su blisko povezani sa Ljapunovljevima jednačinama. Drugim rečima, ovaj paket se bavi sa tri vrste problema: rešavanje Ljapunovljevih jednačina, redukcija modela velikih dimenzija i Rikatijske jednačine ([33]).

U ovom delu ćemo prikazati i analizirati *MATLAB*[®] kod koji će rešavati probleme predstavljene u prethodnoj glavi, a zatim na numeričkim primerima u sledećoj glavi objasniti značaj dobijenih rezultata.

3.2 Implementacija

Problematiku smo podelili na više segmenata radi lakšeg manipulisanja kodom. Predstavili smo različite algoritme za rešavanje sistema Ljapunovljevih jednačina i svaki od njih smestili u posebnu funkciju. Krajnji postupak traženja vrednosti kritičnog parametra i odgovarajućih karakterističnih korena i vektora, odnosno sama inverzna iteracija je predstavljena funkcijama *inverse1.m* i *inverse2.m*.

3.2.1 Funkcija *Arnoldi.m*

Ova funkcija, u stvari, predstavlja implementaciju metoda potprostora Krilova u cilju dobijanja rešenja Ljapunovljeve jednačine

$$SY + YS^T = N,$$

uz zapisivanje matrice N preko njene EVD, odnosno $N = PCP^T$. Ovaj algoritam smo implementirali u funkciji *Arnoldi.m* na sledeći način:

Implementacija funkcije *Arnoldi.m*

```
function [Y,V,H]=Arnoldi(S,P,C,tol,Kvector)
k=1;
V1=P;
V=P;
bool=false;
W=S*V1;
[n,s]=size(P);
H=zeros((k+1)*s,k*s);
while (~bool && k<=Kvector && k*s<=n)
    L=zeros(k*s);
    L(1:s,1:s)=C;
    I=eye(k*s);
    E=I(:,(k-1)*s+1:k*s);
    for i=1:k
        H((i-1)*s+1:i*s,(k-1)*s+1:k*s)=V(:,(i-1)*s+1:i*s)'*W;
        W=W-V(:,(i-1)*s+1:i*s)*H((i-1)*s+1:i*s,(k-1)*s+1:k*s);
    end
    Hk=H(1:k*s,1:k*s);
    Q=lyap(Hk,L);
    [V2,Hnovo]=qr(W,0); %redukovani oblik QR dekompozicije
    H(k*s+1:(k+1)*s,(k-1)*s+1:k*s)=Hnovo;
    N=Q*E*Hnovo';
    res_norm=sqrt(2)*norm(N,'fro');
    if (res_norm<tol)
        bool=true;
    else
        V=[V,V2];
        H=[H;zeros(s,k*s)];
        k=k+1;
        H=[H zeros((k+1)*s,s)];
        W=S*V2;
    end
end
if bool==true
    Y=V*Q*V';
else
    l=size(V,2);
    Y=V(:,1:(l-size(V2,2)))*Q*V(:,1:(l-size(V2,2)))';
end
```

Ulazni parametar *tol* predstavlja nivo tolerancije norme reziduala, dok je *Kvector* broj vektora baze potprostora Krilova $K(S, P)$ takav da je $Kvector \ll n$.

Vidimo da nam, osim traženog rešenja Y , ova funkcija vraća i dve dodatne matrice: matricu V ortonormirane baze potprostora Krilova $K_k(S, P)$ i matricu H koja predstavlja gornju Hessenbergovu formu. Ranije smo naveli da je rutina *lyap* već implementirana u *MATLAB*[®]-u, te njen kod nećemo prikazati.

3.2.2 Funkcije *inverse1.m* i *inverse2.m*

Sada predstavljamo *MATLAB*[®] implementaciju same Ljapunovljeve inverzne iteracije, čiji je pseudokod pokazan u poglavljima koja govore o slučajevima kad

se odabrana tačka ne nalazi, respektivno, nalazi u okolini kritične.

Implementacija funkcije *inverse1.m*

```
function [mi,Z,Lambda,x,r]=inverse1(A,B,M,tol,br_iteracija,Kvector)
%trazimo korene i vektore problema Jx=mi Mx,
%gde je J Jakobijan za proizvoljno alpha_0,
%u cilju nalazenja kriticne vrednosti parametra alpha*
S=J\M;
n=size(S,1);
V0=rand(n,1);
V0=V0/norm(V0);
Z0=V0*V0';
j=1;
bool=false;
while (~bool && j<=br_iteracija)
    %resiti SY+YS'+2SZ0S'=0 koristeći Ljapunovljeve solvere
    if (n<50)
        X=lyap(S,2*S*Z0*S'); %Bartels – Stewart algoritam
    else %implementiran u rutinu lyap
        T=2*S*Z0*S';
        rk=rank(T);
        [P,C]=eigs(T,rk);
        [X,V,H]=Arnoldi(S,P,C,tol,Kvector); %koriscenje Arnoldijeve
    end %iteracije da bi se
        %doslo do resenja
    rang=rank(X);
    [V1,D1]=eigs(X,rang);
    S1=V1'*S*V1;
    s=size(S1,1);
    %resavanje redukovano problema malih dimenzija (1 ili 2)
    %-> mil i Z1
    I=eye(s);
    L=kron(I,S1)+kron(S1,I);
    LJ=2*kron(S1,S1);
    [Z1,MI]=eig(L,-LJ);
    if size(MI,1)==1
        mi=MI;
        Zj=Z1;
    else
        d=diag(MI);
        l=size(d);
        mil=[];
        rbr=[];
        for i=1:l
            if (abs(imag(MI(i,i)))<=tol)
                mil=[mil real(MI(i,i))];
                rbr=[rbr i];
            end
        end
        [m,p]=min(abs(imag(d)));
        %u slucaju da ima vise onih sa imaginarnim delovima skoro
        %jednakim nuli poredimo njih i trazimo onaj sa najmanjim
        %modulom, kao i odgovarajuci karakteristicni vektor
        if size(mil,2)==0
```

```
mi=real(d(p));
Z2=Z1(:,p);
else
mi=mi1(1);
Z2=Z1(:,rbr(1));
for o=2:size(rbr,2)
    if (abs(mi1(o))<abs(mi))
        Z2=Z1(:,o);
        mi=mi1(o);
    end
end
end
Zj=[];
for i=0:(sqrt(1)-1)
    Zj=[Zj,Z2(i*sqrt(1)+1:(i+1)*sqrt(1),1)];
end
end
rnk=rank(Zj);
[W,D]=eigs(Zj,rnk);
U=V1*W;
Z=U*D*U';
[y,lambda]=eig(S1);
k=diag(lambda);
k=ones(size(k,1),1)./k;
Lambda=diag(k);
x=V1*y;
r=norm(J*x-M*x*Lambda);
if r<=tol
    bool=true;
    hold on;
    plot(0,imag(diag(Lambda)), '*r' );
else
    j=j+1;
    hold on;
    plot(real(diag(Lambda)), imag(diag(Lambda)), 'o' );
end
end
end
```

Uočavamo da su nam ulazni parametri J : vrednost Jakobijana za neki proizvoljan parametar, M : matrica mase, tol : nivo tolerancije norme reziduala i $br_iteracija$: maksimalan broj iteracija koji namećemo, kao i $Kvector$: broj vektora baze potprostora Krilova, neophodan za rad funkcije *Arnoldi.m*, u slučaju matrica velikih dimenzija.

Funkcija vraća vrednosti karakterističnih korena i odgovarajućih vektora i unutrašnjeg i spoljašnjeg iterativnog problema, gde je mi kritična vrednost parametra u kojoj dolazi do pojave Hopfove bifurkacije. Takođe, vraća i krajnju vrednost reziduala procesa.

Implementacija funkcije *inverse2.m*

```
function [mi,Z,Lambda,x,r]=inverse2(A,B,M,tol,br_iteracija,Kvector)
%trazimo korene i vektore problema (A+mi*B)x=lambda*Mx
n=size(A,1);
```

```
S=A\M;
V1=rand(n,1);
V1=V1/norm(V1);
D=1;
Z1=V1*D*V1';
j=1;
bool=false;
x=[];
while (~bool && j<=br_iteracija)
    A1=V1'*A*V1;
    B1=V1'*B*V1;
    M1=V1'*M*V1;
    L=kron(M1,A1)+kron(A1,M1);
    LJ=kron(M1,B1)+kron(B1,M1);
    [Z1,MI]=eig(L,-LJ);
    if size(MI,1)==1
        mi=MI;
        Zj=Z1;
    else
        d=diag(MI);
        l=size(d);
        [m,p]=min(abs(imag(d))); %trazimo onaj sa najmanjim modulom i
        mil=[]; %odgovarajuci karakteristikni vektor
        rbr=[];
        for i=1:l
            if (abs(imag(MI(i,i)))<=tol)
                mil=[mil real(MI(i,i))];
                rbr=[rbr i];
            end
        end
        if size(mil,2)==0
            mi=real(d(p));
            Z2=Z1(:,p);
        else
            mi=mil(1);
            Z2=Z1(:,rbr(1));
            for o=2:size(rbr,2)
                if (abs(mil(o))<abs(mi))
                    Z2=Z1(:,o);
                    mi=mil(o);
                end
            end
        end
        Zj=[];
        for i=0:(sqrt(l)-1)
            Zj=[Zj,Z2(i*sqrt(l)+1:(i+1)*sqrt(l),1)];
        end
    end
    if j==1
        [Vj,Dj]=eigs(Zj,1);
    else
        [Vj,Dj]=eigs(Zj,2);
    end
    Q=V1*Vj;
    Z=Q*Dj*Q';
    [y,Lambda]=eig(Q'*(A+mi*B)*Q,Q'*M*Q);
```

```
x=Q*y;
r=norm((A+mi*B)*x-x*Lambda); %rezidual
if (r<=tol)
    bool=true;
    hold on;
    plot(0,imag(diag(Lambda)), '*r');
else
    if (n<50)
        F=B*Z*M'+M*Z*B';
        Y=lyap(S, -(A\F)/A'); %Bartels – Stewart algoritam
    else %implementiran u rutinu lyap
        F=B*Z*M'+M*Z*B';
        T=(A\F)/A';
        rk=rank(T);
        [P,C]=eigs(T, rk);
        [Y,V,H]=Arnoldi(S,P,C,tol,Kvector);
    end
    rang=rank(Y);
    [Vel,L1]=eigs(Y, rang);
    V1=Vel;
    D=L1;
    hold on;
    plot(real(diag(Lambda)), imag(diag(Lambda)), 'o');
    j=j+1;
end
end
```

Izlazne vrednosti u ovoj, alternativnoj implementaciji algoritma inverzne iteracije su identične onima u prethodnoj, odnosno predstavljaju korene i vektore spoljašnje i unutrašnje iteracije, kao i krajnju vrednost reziduala. Ulazni parametri su matrice A i B , koje se dobijaju razvijanjem Jakobijana u Tejlorov red kao što smo dobili u (1.3.3), matrica mase M , nivo tolerancije norme reziduala tol , maksimalni broj iteracija $br_iteracija$ i broj vektora baze potprostora Krilova $K(S, P)$, $Kvector$.

U sledećoj glavi ćemo da vidimo primenu implementiranih algoritama na dva jednostavna primera, kao i na Bruselatorovom modelu hemijskih reakcija. Bitno je napomenuti da je bilo neophodno napisati i par funkcija specijalno za ovaj primer, ali njih ćemo samo dostaviti u prilogu ovog rada, jer akcenat nije na njima i služe samo kao pomoćno sredstvo za dolaženje do rešenja.

Glava 4

Numerički primeri

U prve dve glave smo videli matematički model rešavanja problema u kojima figuriše određeni parametar da bi se odredio njegov uticaj i uočila pojava Hopfove bifurkacije. Prikazali smo ideju Ljapunovljeve inverzne iteracije, kao i razne algoritme koji se koriste unutar iste, da bi se pronašle tražene kritične vrednosti parametra, korena i vektora.

U trećoj glavi smo se upoznali sa implementacijom svih pomenutih algoritama u programskom paketu *MATLAB*[®]. Sada je red na numeričku primenu dobijenih, teorijskih rezultata. Prvo ćemo pokazati na primerima dimenzije 3×3 i 4×4 , a zatim i na komplikovanijem Bruselatorovom modelu kakvi se rezultati dobijaju.

4.1 Primeri dimenzija 3×3 i 4×4

Primer 4.1.1.

a) *Neka je*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

*Za toleranciju ćemo uzeti $tol = 10^{-6}$, a za maksimalan broj iteracija $br_iteracija = 100$. S obzirom da u ovom primeru neće doći do korišćenja funkcije *Arnoldi.m*, jer su dimenzije problema male, za *Kvector* uzimamo proizvoljnu vrednost.*

Pošto smo definisali sve neophodne promenljive, detaljno ćemo opisati postupak Ljapunovljeve inverzne iteracije predstavljen algoritmom na strani 40. Za odgovarajuće vrednosti pokrećemo funkciju

$$[\mu, Z, \lambda, x, r] = inverse2(A, B, M, tol, br_iteracija, Kvector).$$

Kao početnu vrednost matrice V koja zadovoljava uslov $\|V_0\| = 1$ uzimamo

$$V_0 = \begin{bmatrix} 0,2450 \\ 0,8471 \\ 0,4716 \end{bmatrix}.$$

Nakon toga ulazimo u prvi ciklus inverzne iteracije i u koraku 2a vršimo projekciju početnih matrica i dobijamo konstante

$$\tilde{A}_1 = 0,8880 \quad \tilde{B}_1 = 0,7776, \quad \tilde{M}_1 = 1.$$

Sada prelazimo na korak 2b, odnosno na rešavanje projektovanog problema dimenzije 1×1 datog u obliku Ljapunovljeve jednačine

$$\tilde{A}_j \tilde{Z}_j \tilde{M}_j^T + \tilde{M}_j \tilde{Z}_j \tilde{A}_j^T + \tilde{\mu}_j (\tilde{B}_j \tilde{Z}_j \tilde{M}_j^T + \tilde{M}_j \tilde{Z}_j \tilde{B}_j^T) = 0$$

za koren najbliži nuli i njegov vektor. Iako smo u ovom slučaju dobili dimenzije 1×1 i lako možemo pronaći odgovarajuće korene i vektore, ipak problem rešavamo preko Ljapunovljeve jednačine, jer ne znamo kakvi sistemi će se dobiti u idućim iteracijama. Da bismo dobili odgovarajuća rešenja, gornju jednačinu preformulišemo u ekvivalentan oblik preko Kronekerovog proizvoda

$$(\tilde{M}_j \otimes \tilde{A}_j + \tilde{A}_j \otimes \tilde{M}_j + \tilde{\mu}_j (\tilde{M}_j \otimes \tilde{B}_j + \tilde{B}_j \otimes \tilde{M}_j))z = 0$$

i uz pomoć funkcije `eig.m` dobijamo koren $\tilde{\mu} = -1,1419$ i vektor $\tilde{Z} = -1$. Sledi određivanje EVD faktORIZACIJE za konstantu $\tilde{Z} = -1$, gde dobijamo

$$\tilde{V}_1 = 1 \quad \tilde{D}_1 = -1.$$

Za matricu Z uzimamo aproksimaciju $(V_1 \tilde{V}_1) \tilde{D}_1 (V_1 \tilde{V}_1)^T = Q \tilde{D}_1 Q^T$, a zatim se u koraku 2d proverava tačnost dobijenog tako što se računa norma i proverava da li je ona manja od zadate tolerancije. Da bismo to uspešili neophodno je iz jednačine

$$Q(A + \mu B)Q^T y = QMQ^T \lambda y$$

odrediti korene λ i vektor y , a zatim dobijemo iskoristiti u računanju norme reziduala

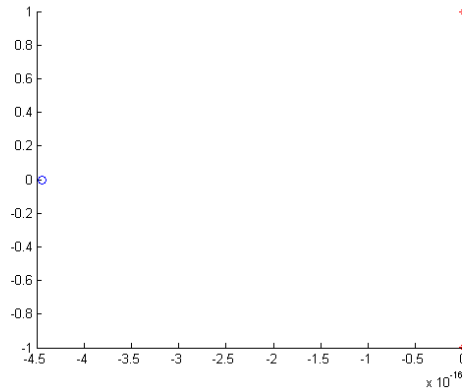
$$r = \|(A + \mu B)x - Mx\lambda\|,$$

gde je $x = Qy$. U ovoj iteraciji je norma reziduala 1,8308, stoga je neophodno započeti novi ciklus iteracije. S obzirom da su dimenzije našeg sistema male, primenjuje se rutina `lyap`, odnosno Bartels Stjuartov algoritam za rešavanje koraka 2e, odnosno Ljapunovljeve jednačine 2.1.12. Kao rezultat rutine dobijamo matricu

$$Y = \begin{bmatrix} -0,0472 & -0,0812 & -0,0344 \\ -0,0812 & -0,2095 & -0,0918 \\ -0,0344 & -0,0918 & 0 \end{bmatrix}$$

ranga 3, a njenom EVD faktORIZACIJOM vektore baze Krilovljevog potprostora

$$V_1 = \begin{bmatrix} -0,1044 & -0,1488 & -0,1420 \\ -0,1488 & -0,2844 & 0,2575 \\ -0,1420 & 0,2575 & 0 \end{bmatrix}$$



Slika 4.1.1: Prikazani najdešnji koreni problema iz primera 4.1.1 dobijeni primenom Ljapunovljeve inverzne iteracije implementirane funkcijom *inverse2.m*. Element označen plavim kružićem se dobije u prvoj iteraciji, a do traženog rešenja, odnosno čisto imaginarnog karakterističnog para $\lambda_{1,2} = \pm i$ dolazimo u drugoj iteraciji i on je označen crvenim zvezdicama.

koji se koristi u narednom ciklusu iteracije. Analognim procesima se u drugom ciklusu dolazi do odgovarajućeg rešenja. Dobijamo čisto imaginaran karakteristični par $\lambda_{1,2} = \pm i$ za parametar $\mu = -2$. Ovo znači da za kritičnu vrednost parametra $\mu = -2$ dolazi do Hopfove bifurkacije. Vrednost norme reziduala iznosi $r = 3,5638 \cdot 10^{-15}$.

- b) Sada želimo da iskoristimo funkciju *inverse1.m* u kojoj je implementirana Ljapunovljeva inverzna iteracija prikazana na strani 39. Testiraćemo parametar $p_0 = -3$. Želimo da vidimo iz kog puta ćemo dobiti kritičnu vrednost parametra. Za potrebe ovog primera formiramo funkciju koja vraća kritičnu vrednost parametra p , par interesantnih karakterističnih korena i vrednost reziduala, dobijene pomoću funkcije *inverse1.m*. Za početnu vrednost parametra p_0 računamo vrednost matrice J , koja nam služi kao matrica Jakobi-jana i izgleda

$$J = \begin{bmatrix} 2 + p_0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 + p_0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Tu vrednost, zajedno sa ostalim poznatima ubacujemo u funkciju

$$[\mu, Z, \lambda, x, r] = \text{inverse1}(J, M, \text{tol}, \text{br_iteracija}, K\text{vector}),$$

gde je $K\text{vector}$ ulazni parametar koji je neophodan u radu funkcije *Arnoldi.m* kada testiramo sisteme većih dimenzija, stoga nam on u ovom primeru ne igra nikakvu ulogu i za njega uzimamo proizvoljan broj.

Kad izračunamo vrednost parametra μ , dodajemo ga na početnu vrednost p_0 i ponavljamo ovaj postupak sve dok ne dobijemo parametar za koji imamo čisto imaginaran par karakterističnih korena.

Opisaćemo na koji način funkcioniše algoritam implementiran u *inverse1.m*.

Za vrednost parametra -3 , vrednost matrice J je

$$J = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Funkcija `inverse1.m` se pokreće za tu vrednost, kao i za već poznate $M, tol, br_iteracija$ i proizvoljno K vektor. Za početnu vrednost vektora baze Kri-
lovljevog potprostora je uzet vektor $\|\Upsilon_0\| = 1$

$$\Upsilon_0 = \begin{bmatrix} 0,3991 \\ 0,4910 \\ 0,7744 \end{bmatrix}$$

i za njega je izračunata aproksimacija

$$Z_0 = \Upsilon_0 \Upsilon_0^T = \begin{bmatrix} 0,1593 & 0,1959 & 0,3090 \\ 0,1959 & 0,2411 & 0,3802 \\ 0,3090 & 0,3802 & 0,5997 \end{bmatrix}.$$

Zatim se prelazi na rešavanje Ljapunovljeve jednačine prikazane u koraku
2a algoritma. S obzirom da je sistem malih dimenzija, rešavamo ga rutinom
`lyap`, odnosno dobijamo rešenje

$$Y_1 = \text{lyap}(S, 2SZ_0S^T) = \begin{bmatrix} -0,5407 & -0,1111 & 0,1083 \\ -0,1111 & -0,2599 & 0,3475 \\ 0,1083 & 0,3475 & 0,1999 \end{bmatrix}$$

čiji je rang 3 i za koju određujemo EVD dekompoziciju

$$D_1 = \begin{bmatrix} -0,6512 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3886 & 0 \\ 0 & 0 & -0,3382 \end{bmatrix} V_1 = \begin{bmatrix} -0,8076 & 0,0473 & -0,5878 \\ -0,5029 & 0,4654 & 0,7284 \\ 0,3080 & 0,8838 & -0,3521 \end{bmatrix}.$$

Prelaskom na korak 2b vršimo redukciju ranga problema, tj. za $\hat{S} = V_1^T S V_1$
rešavamo $\hat{S}\hat{Z} + \hat{Z}\hat{S}^T + 2\hat{\mu}\hat{S}\hat{Z}\hat{S}^T = 0$ pomoću zapisa preko Kronekerovog
proizvoda

$$(I \otimes \hat{S} + \hat{S} \otimes I) + 2\hat{\mu}(\hat{S} \otimes \hat{S}) = 0$$

i korišćenjem

$$[\tilde{Z}, \tilde{\mu}] = \text{eig}((I \otimes \hat{S} + \hat{S} \otimes I), 2\hat{S} \otimes \hat{S}).$$

Iz dobijenog se može izvući realni koren sa najmanjim modulom $\hat{\mu} = 1$ i
njegov simetrični vektor

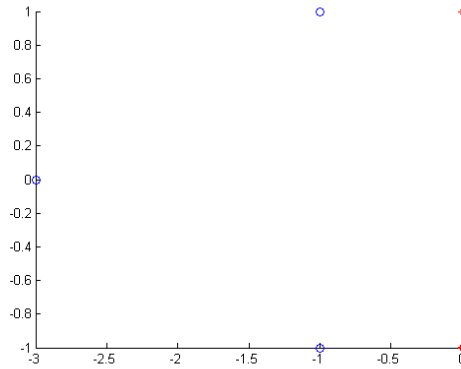
$$\hat{Z}_1 = \begin{bmatrix} -0,0197 + 0,8405i & 0,3329 - 0,2452i & 0,8184 + 0,1200i \\ 0,3329 - 0,2452i & -0,1955 - 0,0557i & -0,1995 - 0,3544i \\ 0,8184 + 0,1200i & -0,1955 - 0,0557i & 0,2152 - 0,7848i \end{bmatrix}$$

ranga 2 u faktorisanom obliku $\hat{Z}_1 = \hat{\Upsilon} \hat{D} \hat{\Upsilon}^T$.

Prelazimo na korak 2c i računamo aproksimaciju vektora za koren $\mu = 1$ na sledeći način

$$Z_1 = (V_1 \hat{Y}) \hat{D} (V_1 \hat{Y})^T.$$

Sada, rešavanjem drugog problema karakterističnih korena, odnosno $V_1^T S V_1 y = y \lambda$, dobijamo korene $\lambda_i = \{-3, -1 \pm i\}$ i vrednost reziduala $r = 1,5029 \cdot e - 15 < tol$, stoga zaključujemo da smo pronašli par najdešnjih koren i da su to gore spomenuti λ_i i njih prikazujemo na slici. Vidimo da -3 nije parametar u kom dolazi do čisto imaginarnih korena, pa se postupak nastavlja analogno za vrednosti $p = p_0 + \mu = -2$. U sledećem ciklusu dobijamo da je upravo $p = -2$ tražena kritična vrednost parametra, uz čisto imaginaran par korena $\pm i$ i rezidual $r = 7,5059 \cdot 10^{-16} < tol$.



Slika 4.1.2: Prikazani najdešnji koreni problema iz primera 4.1.1 dobijeni postupkom Ljapunovljeve inverzne iteracije implementirane funkcijom *inverse1.m*. Plavim kružićima su označene vrednosti koje se dobiju uz vrednost parametra $p = -3$, a rešenja $\pm i$ dobijena u sledećem ciklusu iteracije za parametar $p = -2$ su označena crvenim zvezdicama.

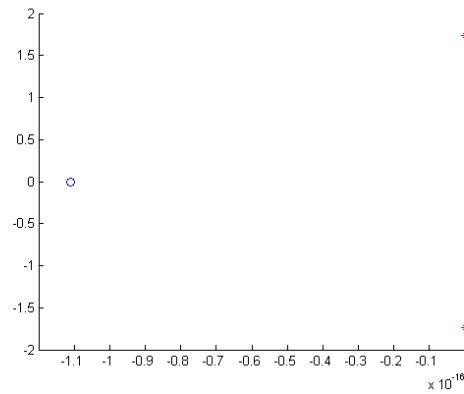
Primer 4.1.2. U ovom primeru želimo da razmotrimo slučaj dimenzije 4. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -I \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Funkcijom

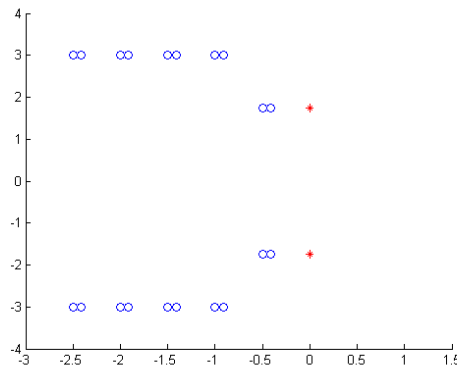
$$[mi, Z, \lambda, x, r] = \text{inverse2}(A, B, M, tol, br_iteracija)$$

u drugom ciklusu iteracije dobijamo čisto imaginarni karakteristični par korena $\lambda_{1,2} = \pm i, 73205080756888i$ pri vrednosti parametra $\mu = -1$ i rezidual $r = 5.996569956892792 \cdot 10^{-15}$.



Slika 4.1.3: Koreni problema iz primera 4.1.2 dobijeni u 2 ciklusa Ljapunovljeve inverzne iteracije implementirane u funkciji *inverse2.m*. Plavim kružićima su obeleženi koreni dobijeni u prvom ciklusu, dok su rešenja $\pm 1,73205080756888i$ označena crvenim zvezdicama.

Analognim rezonovanjem uz pomoć funkcije *inverse1.m* za početnu vrednost parametra $p_0 = -0,5$ posle 6 ciklusa iteracije dobijamo kritični parametar $\mu = -1$ i korene $\lambda_{1,2} = \pm 1,732i$.



Slika 4.1.4: Koreni problema iz primera 4.1.2 dobijeni u 4 ciklusa Ljapunovljeve inverzne iteracije implementirane u funkciji *inverse1.m*. Plavim kružićima su obeleženi koreni dobijeni u ciklusima pre šestog, dok su rešenja $\pm 1,7321i$ označena crvenim zvezdicama.

4.2 Bruselatorov model

U oblasti termodinamike postoje razni interesantni primeri uticaja stabilnosti, odnosno nestabilnosti nekog sistema. Naime, ako bismo posmatrali određene hemijske reakcije, mogla bi se uočiti pojava određenih oscilacija koje proizilaze iz različito zadatih početnih uslova koji uzrokuju pojave neekvilibrijumskih stanja. Upravo u tome leži značaj Bruselatorovog modela [34].

Bruselatorov model¹ je predstavljen od strane naučnika Ilije Prigožina² i njegovih saradnika na *Université Libre de Bruxelles*. On predstavlja sistem koji se koristi za teorijsko razumevanje neekvilibrijumskih stanja, odnosno da bi se predvidele oscilacije hemijskih reakcija. Baziran je na autokatalitičnim reakcijama, za koje važi da je jedan od njihovih proizvoda takođe i reaktant, odnosno katalist koji ubrzava proces reagovanja.

Precizno, ovaj problem modeluje ponašanje koncentracija učesnika u reakciji, kao i interakciju hemijskih rešenja u reaktoru u obliku cevi. Koncentracije $x(t, z)$ i $y(t, z)$ komponentata reakcije predstavljamo pomoću sistema

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\delta_1}{L^2} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + f(x, y) \quad (4.2.1)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\delta_2}{L^2} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + g(x, y) \quad (4.2.2)$$

gde su funkcije $f(x, y)$ i $g(x, y)$ definisane na sledeći način

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \alpha - (\beta + 1)x + x^2y \\ g(x, y) &= \beta x - x^2y. \end{aligned}$$

Sistem ima početne uslove $x(0, z) = x_0(z)$ i $y(0, z) = y_0(z)$ i zadovoljava Dirihle-ove granične uslove $x(t, 0) = x(t, 1) = x^*$ i $y(t, 0) = y(t, 1) = y^*$, gde t predstavlja vremensku, a $0 \leq z \leq 1$ prostornu komponentu duž cevi [35].

Stacionarna tačka gorenavedenog sistema je $(x^*, y^*) = (\alpha, \beta/\alpha)$. Ono što je nama interesantno je da posmatramo kako se ponašaju rešenja kad parametar L varira i za koju vrednost tog parametra dolazi do pojave Hopfove bifurkacije. Da bismo došli do odgovora, na početku je neophodno izvršiti diskretizaciju ovog sistema, jer je nama cilj, kao što smo pomenuli u ranijoj diskusiji, da pronađemo za koju vrednost parametra L Jakobijan sistema ima najdešnji par čisto imaginarnih karakterističnih korena.

Diskretizacijom sistema na intervalu $[0, 1]$, sa n unutrašnjih tačaka i mrežom dimenzije $h = 1/(m + 1)$, dobijamo matricu Jakobijana u obliku blok matrice dimenzije 2×2

$$J = \begin{pmatrix} \tau_1 T + (\beta - 1)I & \alpha^2 I \\ -\beta I & \tau_2 T - \alpha^2 I \end{pmatrix} \Big|_{2m \times 2m} \quad (4.2.3)$$

¹eng. Brusselator model

²rus. Ilya Prigogine (12.01.1917. - 28.05.2003.) belgijski fizički hemičar, dobitnik Nobelove nagrade

gde su

$$\begin{aligned} T &= \text{tridiag}\{1, -2, 1\}, \\ \tau_1 &= \frac{1}{h^2} \frac{\delta_1}{L^2}, \\ \tau_2 &= \frac{1}{h^2} \frac{\delta_2}{L^2}. \end{aligned}$$

Sada ćemo da vidimo kakve rezultate dobijamo primenom implementiranih algoritama na ovaj problem.

Primer 4.2.1. *a) Neka je L vrednost parametra koju tražimo, nivo tolerancije $\text{tol} = 10^{-6}$, a maksimalni broj iteracija $\text{br_iteracija} = 100$. Da bismo formirali neophodne matrice A i B pomoću matrice Jakobijana koju smo ranije predstavili, koristimo vrednosti iz [34], odnosno*

$$\delta_1 = 0,008 \quad \delta_2 = 0,004 \quad \alpha = 2 \quad \beta = 5,45.$$

Vidimo da je

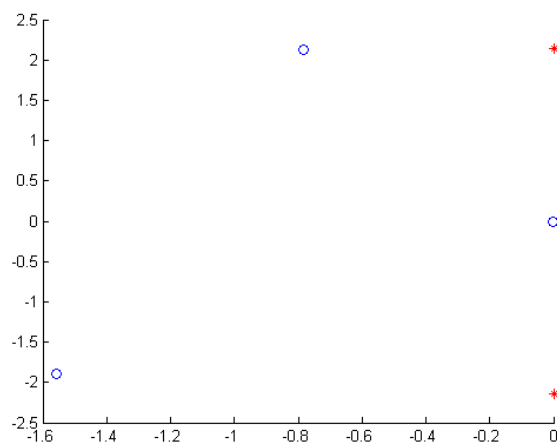
$$A = J \quad B = \frac{\partial J}{\partial L} \quad M = I_{2m \times 2m}.$$

Za početnu vrednost parametra L ćemo uzeti $L_0 = 0,51$ i za početak želimo da radimo sa matricama male dimenzije, recimo 40×40 , odnosno uzimamo da je $m = 20$. Nakon što smo formirali matrice i odredili neophodne vrednosti, ubacujemo ih u funkciju `inverse2.m`, koju pozivamo na sledeći način

$$[\mu, Z, \lambda, x, r] = \text{inverse2}(A, B, M, \text{tol}, \text{br_iteracija}, K\text{vector})$$

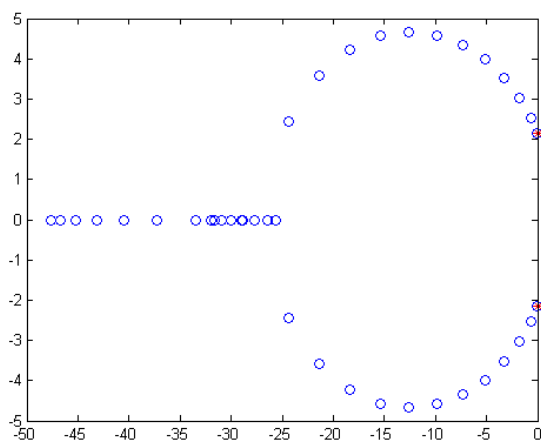
za proizvoljnu vrednost početnog vektora baze Krilovljevog potprostora. Ulaзни parametar $K\text{vector}$ nam predstavlja broj vektora baze potprostora Krilova do kojeg idemo i on ima značaja u radu sa sistemima velikih dimenzija, kad pozivamo funkciju `Arnoldi.m` (tako da nam ovaj parametar trenutno ne igra nikakvu ulogu).

Pošto za početak radimo sa matricama malih dimenzija, kao solver koristimo rutinu `lyap`. U trećem ciklusu iteracije dobijamo da je $\mu = 0.002522798773329$, pa iz toga sledi da je kritična vrednost parametra za koju dolazi do Hopfove bifurkacije $L = L_0 + \mu = 0.512522798773329$. Par čisto imaginarnih korena je $\lambda_{1,2} = \pm 2,1395i$, a vrednost reziduala $r = 2.609034559979236 \cdot 10^{-9} < \text{tol}$.



Slika 4.2.1: Koreni Bruselatorovog problema dimenzije 40×40 dobijeni u svakoj iteraciji, korišćenjem funkcije *inverse2.m*. Rešenja $\pm 2,1395i$ označena crvenim zvezdicama.

S obzirom da dimenzije nisu velike, možemo da izračunamo sve korene za kritični parametar. Oni su predstavljeni na sledećoj slici.



Slika 4.2.2: Koreni Bruselatorovog problema dimenzije 40×40 koji se dobiju u rešenju, za $\mu = 0.002522798773329$. Crvenim zvezdicama označen čisto imaginarni par $\pm 2,1395i$.

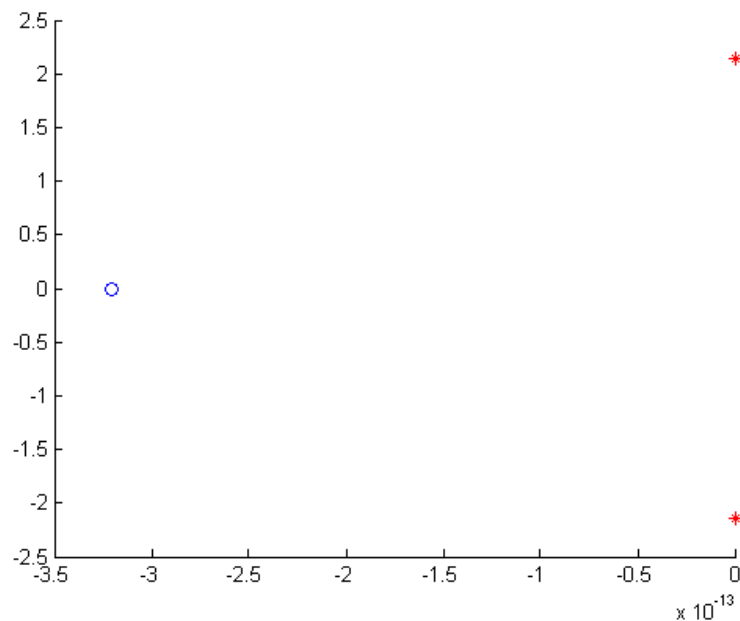
Sada ćemo da vidimo kako se dobijaju odgovarajući rezultati za relativno kratko vreme prilikom rada sa matricama većih dimenzija. Svi ulazni parametri ostaju nepromenjeni, osim parametra dimenzije, m . Biramo da je $m = 500$, odnosno želimo da radimo sa sistemom dimenzije 1000×1000 . Izabrali smo da je $Kvector = 20$, odnosno, ne želimo da radimo sa više od 20 vektora baze Krilovljevog potprostora, što će nam znatno olakšati posao jer je $20 = Kvector \ll n = 1000$. Pokretanjem funkcije

$$[\mu, Z, \lambda, x, r] = \text{inverse2}(A, B, M, \text{tol}, \text{br_iteracija}, Kvector),$$

u drugoj iteraciji dolazimo do traženih rezultata. Bitno je napomenuti da je za nalaženje rešenja Ljapunovljeve jednačine

$$H_k Q_k + Q_k H_k^T = \begin{bmatrix} C & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \hat{C}_k$$

koje zadovoljava uslov $\|R(Q_k)\| < \text{tol}$ u prvom ciklusu iteracije bilo neophodno izračunati 8 vektora baze, a u drugom samo 1 vektor. Dobijamo da je kritična vrednost parametra za koju dolazi do Hopfove bifurkacije $L = 0.512992493022974 \approx 0,513$. Par čisto imaginarnih korena u kom dolazi do gubitka stabilnosti je $\lambda_{1,2} = \pm 2,13950928953296i \approx \pm 2,1395i$, a vrednost reziduala (za proizvoljno uzetu vrednost početnog vektora V_1) iznosi $r = 7.715360431246210 \cdot 10^{-7} < \text{tol}$.



Slika 4.2.3: Koreni Bruselatorovog modela dimenzije 1000×1000 dobijeni u svakom od dva ciklusa iteracije, korišćenjem funkcije *inverse2.m*. Rešenja $\pm 2,1395i$ označena crvenim zvezdicama.

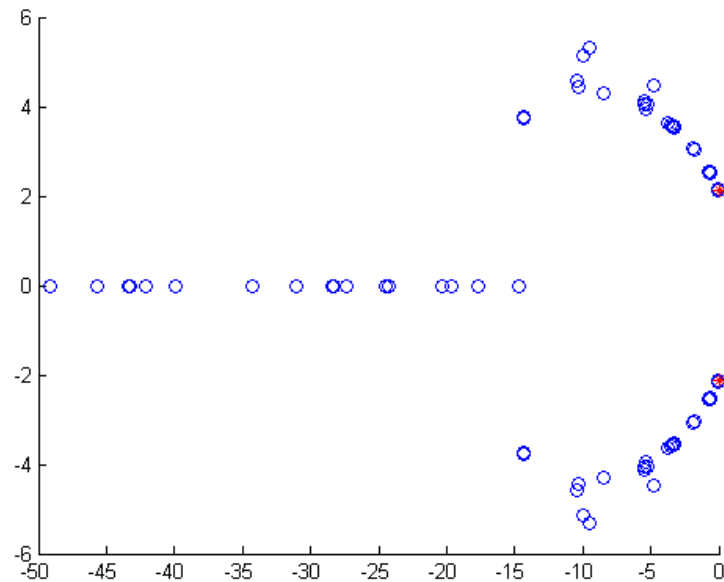
- b) Sada bismo želeli da na istom primeru pokažemo kako radi algoritam implementiran u funkciji `inverse1.m`. Biramo proizvoljnu vrednost parametra i očekujemo da ćemo dobiti odgovarajuće rešenje na kraju postupka, koji podrazumeva pozivanje funkcije

$$[\mu, Z, \lambda, x, r] = \text{inverse1}(J, M, \text{tol}, \text{br_iteracija}, K\text{vector})$$

i dodavanje dobijene vrednosti μ na početnu vrednost parametra sve dok rezultati ne zadovolje nametnute uslove tolerancije ili dok broj iteracija ne dostigne maksimalni.

Znamo da je J matrica Jakobijana definisana jednačinom (4.2.3) uz vrednosti parametara kao i u prethodnom slučaju: $\delta_1 = 0,008, \delta_2 = 0,004, \alpha = 2, \beta = 5,45$ i nepoznati parametar L . Za matricu mase M ćemo ponovo uzeti jediničnu matricu dimenzije $2m \times 2m$. Neka je $\text{tol} = 10^{-6}$, maksimalni broj iteracija $\text{br_iteracija} = 100$, a $K\text{vector}$ broj vektora baze potprostora Kri-lova. Ponovo ćemo prvo uzeti za primer matrice dimenzije 40×40 , tj. $m = 20$, stoga nam vrednost $K\text{vector}$ u ovom mometu nije bitna.

Uzimajući za početnu vrednost parametra $L_0 = 0,5$, naša funkcija posle 6 iteracija, od početne vrednosti, preko $L = 0,5114$, zatim $L = 0,5124$ itd. dolazi do kritične vrednosti parametra $L = 0.512541439012792$. Za ovo L dolazi do Hopfove bifurkacije, a jedinstveni čisto imaginarni karakteristični par je $\lambda_{1,2} = \pm 2.1395i$. Vrednosti dobijenih karakterističnih korena kroz postupak, kao i onih koji uzrokuju menjanje stabilnosti su prikazani na sledećoj slici.



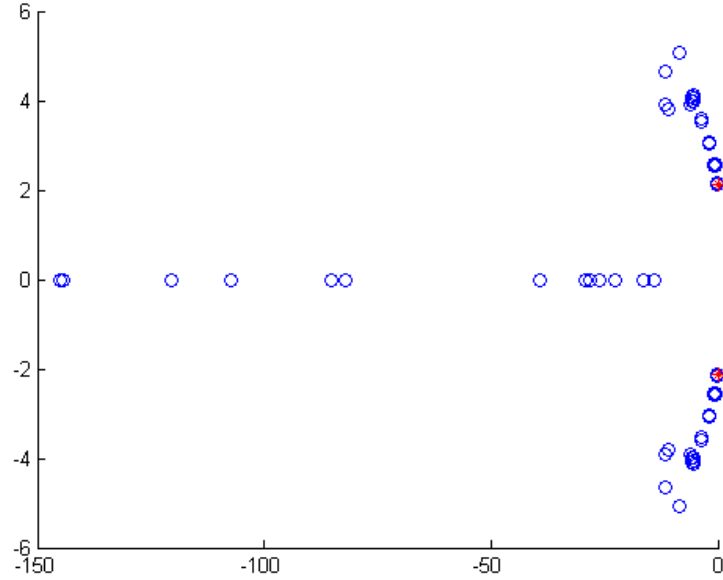
Slika 4.2.4: Koreni Bruselatorovog problema dimenzije 40×40 dobijeni u svakoj iteraciji, korišćenjem funkcije `inverse1.m`. Rešenja $\pm 2,1395i$ označena crvenim zvezdicama.

Primena algoritma *inverse1* na matrice većih dimenzija će biti prikazana na primeru 1000×1000 , kao i u slučaju pod a). Pozivamo funkciju

$$[\mu, Z, \lambda, x, r] = \text{inverse1}(J, M, \text{tol}, \text{br_iteracija}, K\text{vector}),$$

za J definisano jednačinom (4.2.3) i matricom mase M koju biramo kao jediničnu. Nivo tolerancije norme reziduala i maksimalan broj ciklusa iteracije biramo kao i ranije, $\text{tol} = 10^{-6}$ i $\text{br_iteracija} = 100$, dok za broj vektora baze potprostora Krilova koji će se koristiti u funkciji *Arnoldi.m* uzimamo $K\text{vector} = 20$. Dobijamo vrednost kritičnog parametra

$L = 0.513018836976376 \approx 0,513$ za koji imamo pojavu Hopfove bifurkacije, kao i imaginaran par $\lambda_{1,2} = \pm 2,13950943391097i \approx \pm 2,1395i$. Predstavljamo korene dobijene kroz sve međukorake, uključujući i poslednji, osmi.



Slika 4.2.5: Koreni Bruselatorovog modela dimenzije 1000×1000 dobijeni u svakoj iteraciji, korišćenjem funkcije *inverse1.m*. Rešenja $\pm 2,1395i$ označena crvenim zvezdicama.

Zaključak

U ovom radu smo se pozabavili problemom koji zahteva poznavanje raznih grana matematike i fizike. Svi metodi ovde zastupljeni su razvijeni sa ciljem njihove primene na realne probleme sa kojima se naučnici susreću u mnogim oblastima svakodnevnog života, kao i u veštački stvorenim uslovima. Uvek se težilo pojednostavljenju složenih situacija i pronalaženju aproksimacija rešenja raznih problema da bi se razumelo kako funkcionišu interesantne pojave koje je naizgled teško objasniti. Upravo u ovoj ideji leži čar proučavanja odabrane teme.

Naime, intuitivni cilj nam je bio da pokažemo na koji način se ponašaju sistemi diferencijalnih jednačina velikih dimenzija (izvedeni iz realnih problema) koji zavise od određenog parametra i kada dolazi do prelaska sistema iz stabilnog u nestabilan u zavisnosti od modifikacije posmatranog parametra. Uvođenjem različitih matematičkih alata, kao što su diskretizacija sistema, Kronekerov proizvod i Ljapunovljeve jednačine smo uspeali da intuiciju prevedemo na jezik koji matematičari mogu da razumeju i primenom inverzne iteracije i algoritama za rešavanje jednačina i traženje karakterističnih korena i vektora dobijemo kritičnu vrednost parametra u kom dolazi do pomenute promene poznate kao Hopfova bifurkacija, kao i vrednost para imaginarnih korena u tom momentu.

Bitno je napomenuti da je veliki broj realnih primera u kojima se može primeniti izložena teorija i njene računarske implementacije. Međutim, radi konciznosti, ograničili smo se samo na detaljno objašnjenje Bruselatorovog modela. Nadamo se da će u skorijoj budućnosti doći do još većeg unapređenja ovih ideja i da će pronaći odgovarajuću ulogu u mnogim savremenim problemima.

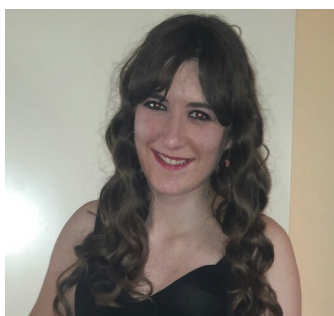
Bibliografija

- [1] Vadim S. Anishchenko, Tatyana E. Vadivasova, Galina I. Strelkova, *Deterministic Nonlinear Systems*, Springer, 2014.
- [2] Gerald Teschl, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, 2012
- [3] Herbert Gintis, *Game Theory Evolving: A Problem-centered Introduction to Evolutionary Game Theory*, Princeton University Press, 2009(2)
- [4] John K. Hunter, *Introduction to Dynamical Systems*, ucdavis, 2011.
- [5] Roberto Muñoz-Alicea, *Introduction to Bifurcation and The Hopf Bifurcation Theorem for Planar Systems*, Math 640, 2011.
- [6] D. Kuzmanović, N. Vasović, S. Kostić, S. Simić, I. Franović, I. Grozdanović, K. Todorović-Vasović, B. Ranković Plazinić, *Uvod u teoriju haosa*, SaTCIP, 2013.
- [7] Gert van der Heijden, *Hopf Bifurcation*, Encyclopedia contributions to the Encyclopedia of Nonlinear Science, 2004.
- [8] Alan J. Laub, *Matrix Analysis for Scientists and Engineers*, SIAM, 2005.
- [9] Huamin Zhang and Feng Ding, *On the Kronecker Products and Their Applications*, Hindawi Publishing Corporation, Journal of Applied Mathematics, Article ID 296185, 2013.
- [10] L. Elsner and V. Monov, *The bialternate matrix product revisited*, Linear Algebra and its Applications, 434 (2011), pp. 1058-1066.
- [11] W. Govaerts and B. Sijnave, *Matrix manifolds and the Jordan structure of the bialternate matrix product*, Linear Algebra and its Applications, 292 (1999), pp. 245-266
- [12] Karl Meerbergen and Raf Vandebril, *A Reflection on the Implicitly Restarted Arnoldi Method for Computing Eigenvalues Near a Vertical Line*, Linear Algebra and its Applications, 436 (2012), pp. 2828-2844
- [13] Karl Meerbergen and Alastair Spence, *Inverse Iteration for Purely Imaginary Eigenvalues with Application to the Detection of Hopf Bifurcations in Large-Scale problems*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 31(4), pp. 1982–1999, 2010.

-
- [14] Howard Elman, Karl Meerbergen, Alastair Spence and Minghao Wu, *Lyapunov Inverse Iteration for Identifying Hopf Bifurcations in Models of Incompressible Flow*, SIAM J. Sci. Comput., 34(3), pp. A1584–A1606, 2012.
 - [15] Howard C. Elman and Minghao Wu, *Lyapunov inverse iteration for computing a few rightmost eigenvalues of large generalized eigenvalue problems*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 34 (2013), pp. 1685-1707.
 - [16] Imad M. Jaimoukha and Ebrahim M. Kasenally, *Krylov Subspace Methods for Solving Large Lyapunov Equations*, SIAM J. Numer. Anal., 31(1), pp. 227-251, 1994.
 - [17] D. Y. Hu and L. Reichel, *Krylov-Subspace methods for Sylvester Equation*, Linear Algebra and its Applications, 172, pp. 283-313, 1992.
 - [18] S. Timme, K. J. Badcock, A. Spence and M. Wu, *Lyapunov Inverse Iteration for Stability Analysis using Computational Fluid Dynamics*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., 2012.
 - [19] John Guckenheimer, Mark Myers and Bernd Strumfels, *Computing Hopf Bifurcations I*, SIAM J. Numer. Anal., 34(1), pp. 1–21, 1997.
 - [20] John Guckenheimer and Mark Myers, *Computing Hopf Bifurcations II*, SIAM J. Sci. Comput., 17(6), pp. 1275–1301, 1996.
 - [21] Elias Jarlebring, *Lecture notes in numerical linear algebra*, KTH, 2015.
 - [22] Dr. Martin Stoll, Patrick Kürschner and Björn Baran, *Linear Systems and Matrix Equations - Bartels Stewart Algorithm*, 2015.
 - [23] Gene H. Golub and Charles F. Van Loan, *Matrix Computations (3rd Edition)*, The Johns Hopkins University Press, 1996.
 - [24] Yousef Saad, *Numerical Solution of Large Lyapunov Equations*, RIACS, 1989.
 - [25] K. Jbilou and A. J. Riquet, *Projection Methods for Large Lyapunov Equations*, Linear Algebra and its Applications, 415, pp. 344-358, 2006.
 - [26] A. El Guennouni, K. Jbilou and A. J. Riquet, *Block Krylov Subspace Methods for Solving Large Sylvester Equations*, Numerical Algorithms, 29(1), pp. 75-96, 2002.
 - [27] Andreas Frommer and Valeria Simoncini, Chapter: Matrix Functions from *Model Order Reduction: Theory, Research Aspects and Applications*, pp. 275-303, 2008.
 - [28] Diederich Hinrichsen and Anthony J. Pritchard, *Mathematical Systems Theory I*, Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg, 2005.
 - [29] Discrete mathematics and its Applications series, *Handbook of Linear Algebra*, Leslie Hogben (ed.), 2007.

-
- [30] Lloyd N. Trefethen and David Bau III, *Numerical Linear Algebra*, SIAM, 1997.
- [31] A. S. Householder, R. Sauer, E. Steifel, J. Todd and A. Walther, *Journal: Numerische Mathematik*, Springer Berlin Heidelberg, 6, 1964.
- [32] Ilse C. F. Ipsen, *Computing an Eigenvector with Inverse Iteration*, SIAM Rev., 39(2), pp. 254-291, 1997.
- [33] Thilo Penzl, *LYAPACK - A MATLAB Toolbox For Large Lyapunov and Riccati Equations, Model Reduction Problems and Linear-Quadratic Optimal Control Problems*, 1999.
- [34] Z. Bai, D. Day, J. Demmel and J. Dongarra, *A Test Matrix Collection for Non - Hermitian Eigenvalue Problems*, University of Tennessee Knoxville, TN, USA, October 6, 1996.
- [35] S. Ault and E. Holmgreen, *Dynamics of the Brusselator*, March 16, 2003.
- [36] Mathworks Company, <http://www.mathworks.com>
- [37] MacTutor History of Mathematics archive, <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>
- [38] Matrix Market, <http://math.nist.gov/MatrixMarket/>
- [39] Cavity Flow, <http://www.cavityflow.com/cavityflow.htm>
- [40] BrainyQuote, <http://www.brainyquote.com/>

Kratka biografija



Ivana Višekruna je rođena 23.03.1992. godine u Novom Sadu. Završila je Osnovnu školu "Sveti Sava" u Bačkoj Palanci 2007. godine kao vukovac i đak generacije. Zatim je upisala Gimnaziju "20. oktobar", takođe u Bačkoj Palanci, koju završava 2011. godine kao vukovac.

Iste godine upisuje osnovne studije Primenjene matematike, modul matematika finansija, na Prirodno - matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Osnovne studije završava u septembru 2014. godine, sa prosekom 9,72. Nakon toga upisuje master akademske studije Primenjene matematike na istom fakultetu. Položila je sve ispite predviđene planom i programom master studija. Poslednji ispit polaže u septembarskom ispitnom roku i master studije završava sa prosekom 9,6.

Tokom školovanja je bila stipendista opštine Bačka Palanka, Republike Srbije, kao i Fonda za mlade talente Republike Srbije u dva navrata, kao jedan od najboljih studenata završne godine prvo osnovnih, a zatim i master studija.

Novi Sad, januar 2017.

Ivana Višekruna

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: *monografska dokumentacija*

TD

Tip zapisa: *tekstualni štampani materijal*

TZ

Vrsta rada: *master rad*

VR

Autor: *Ivana Višekruna*

AU

Mentor: *Profesor dr Vladimir Kostić*

MN

Naslov rada: *Ljapunovljeva inverzna iteracija sa primenom na detekciju Hopfove bifurkacije*

NR

Jezik publikacije: *srpski (latinica)*

JP

Jezik izvoda: *srpski/engleski*

JI

Zemlja publikovanja: *Republika Srbija*

ZP

Uže geografsko područje: *Vojvodina*

UGP

Godina: *2017*

GO

Izdavač: *autorski reprint*

IZ

Mesto i adresa: *Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja
Obradovića 4*

MA

Fizički opis rada: *4 glave, 75 strana, 40 lit., 19 slika, 0 tabela*

FO

Naučna oblast: *matematika*

NO

Naučna disciplina: *primenjena matematika*

ND

Ključne reči: *karakteristični koreni, Hopfova bifurkacija, inverzna iteracija,
Kronekerov proizvod, bialternativni proizvod, algoritmi, MATLAB®*

PO

UDK

Čuva se: *u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku Prirodno -
matematičkog fakulteta u Novom Sadu*

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: *Cilj rada je da se obradi metoda Ljapunovljeve inverzne iteracije i njena
primena u proceni Hopfove bifurkacije u problemima višedimenzionalnih
diferencijalnih jednačina u kojima figuriše neki parametar. Koriste se različiti
algoritmi u zavisnosti od kompleksnosti samog sistema. Na kraju su obrađeni
numerički primeri testirani uz pomoć programskog paketa MATLAB®.*

IZ

Datum prihvatanja teme od NN veća: *18.10.2016.*

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

*Predsednik: dr Ljiljana Cvetković, redovni profesor, Prirodno-matematički
fakultet, Univerzitet u Novom Sadu*

*Član: dr Vladimir Kostić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet,
Univerzitet u Novom Sadu, mentor*

*Član: dr Jelena Aleksić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet,
Univerzitet u Novom Sadu*

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: *monograph publication*

DT

Type of record: *textual printed material*

TR

Contents code: *master thesis*

CC

Author: *Ivana Višekruna*

AU

Mentor: *Professor dr Vladimir Kostić*

MN

Title: *Lyapunov inverse iteration with the application in detecting Hopf Bifurcation*

XI

Language of text: *serbian (latin)*

LT

Language of abstract: *serbian/english*

LA

Country of publication: *Republic of Serbia*

CP

Locality of publication: *Vojvodina*

LP

Publication year: *2017*

PY

Publisher: *author's reprint*

PU

Publication place: *Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*

PP

Physical description: *4 chapters, 75 pages, 40 references, 19 pictures, 0 tables*
PD

Science field: *mathematics*
SF

Science discipline: *applied mathematics*
SD

Key words: *eigenvalues, Hopf bifurcation, inverse iteration, Kronecker product, bialternate product, algorithms, MATLAB®*
SCW
UC

Holding data: *library of Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science*
HD

Note:
N

Abstract: *The goal of this thesis is to show how Lyapunov inverse iteration can be used in detecting Hopf bifurcation in differential systems of large dimensions that depend on the behaviour of a parameter. We have used many different algorithms depending on the complexity of the problem. In the end, we concluded with testing various numerical examples in the program package MATLAB®.*
AB

Accepted by the Scientific Board on: *18.10.2016.*
ASB

Defended on:
DE

Thesis defend board:
DB

President: dr Ljiljana Cvetković, full professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: dr Vladimir Kostić, associate professor, Faculty of Science, University of Novi Sad, mentor

Member: dr Jelena Aleksić, associate professor, Faculty of Science, University of Novi Sad