UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Ivana Rabuzin

Lukasov model ekonomskog rasta i varijaciona formulacija

Master rad

Mentor:
Prof. dr Nenad Teofanov

Novi Sad, 2014

Sadržaj

1 Uvod u modele ekonomskog rasta **5**
- 1.1 Neoklasični model rasta 8
- 1.2 Solou-Svon model 14
- 1.3 Kob-Daglasova funkcija 19
- 1.4 Ostali modeli rasta 25

2 Osnovni pojmovi varijacionog računa **29**
- 2.1 Uvodni deo i motivacija 29
- 2.2 Ojlerova jednačina 33
- 2.3 Specijalni slučajevi Ojlerove jednačine 39
- 2.4 Varijacioni problemi sa ograničenjima 40
  - 2.4.1 Izoperimetrijski zadatak 40
  - 2.4.2 Uslovni ekstrem, algebarska ograničenja 43
  - 2.4.3 Uslovni ekstrem, ograničenja u vidudiferencijalnih jednačina 44

3 Lukasov model **47**
- 3.1 Uvod 47
- 3.2 Teorije endogenog rasta 49
- 3.3 Analiza Lukasovog modela i rešenje 51
- 3.4 Modifikacije Lukasovog modela 58
  - 3.4.1 Nelinearnost stope promene ljudskog kapitala 58
  - 3.4.2 Prisustvo dinamike u Lukasovom modelu 60

4 Dodatak **65**
- 4.1 Metrički i normirani prostori 65
- 4.2 Homogena linearna jednačina sa konstantnim koeficijentima . 68
- 4.3 Nehomogena linearna jednačina 70

Zaključak **73**

Literatura **75**

Biografija **79**

Ključna dokumentacija **81**

Predgovor

Ekonomski rast i razvoj su problemi koji su tema razmatranja u jednoj zemlji i dan danas. Pitanja vezana za poboljšanje životnog standarda, edukaciju i napredak njenog stanovništva, kao i tehnološki napredak, oduvek su privlačila ekonomiste da sprovode raznovrsna istraživanja. Teorije neoklasičnog i endogenog ekonomskog rasta biće izložene u ovome radu kroz nekoliko modela, kao i kako pomoću varijacionog računa dajemo analizu Lukasovog modela, koji je i tema ovoga rada. Videćemo kako akumulacija kapitala, tehnološki napredak, porast radne snage, ali i edukacija utiču na privredni rast.

Nema istine u onim naukama u kojima se matematika ne primenjuje.

Leonardo da Vinči

Prva glava rada govori o modelima rasta. Predstavićemo neke modele rasta i pokazati da je glavni cilj teorije rasta objašnjenje različitih promena u životnim standardima. Posmatraćemo neoklasični model rasta. Definisaćemo funkciju proizvodnje i ispitati njene osobine. Objašnjavamo uticaj štednje, rasta stanovništva i tehnološkog napretka u Solouovom modelu. Upoznajemo se sa nastankom Kob-Daglasove funkcije koja predstavlja relaciju između inputa (kapitala i rada) i autputa (funkcije proizvodnje). Predstavićemo Menkju, Romer i Vejl- ov model koji u Kob-Daglasovoj formi uključuje i ljudski kapital, kao i Nelson i Felps- ov model.

Druga glava rada posvećena je varijacionom računu. Izlaganje počinjemo osnovnim pojmovima varijacionog računa kroz dva primera. Dalje, nastavljamo sa pričom o Ojlerovoj jednačini, predstavljamo neke specijalne slučajeve koje u praksi često srećemo i bavimo se varijacionim problemima sa ograničenjima, koja mogu biti u vidu algebarskih ograničenja i diferencijalnih jednačina. Varijacioni aparat iz ove glave koristimo pri analizi samoga modela iz trećeg poglavlja.

Treću glavu započinjemo uvodnom pričom o Robertu Lukasu i izlaganjem o teorijama endogenog rasta. Zatim izlažemo sam model i rešenje. Videćemo da li su određene pretpostavke moguće i do čega dovode. Predstavljamo dve modifikacije Lukasovog modela i dajemo opis ovih problema.

Četvrta glava predstavlja dodatak u kome su izloženi matematički pojmovi neophodni za razumevanje ovoga rada.

***

Želela bih, da se zahvalim svom mentoru dr Nenadu Teofanovu, na svim savetima, sugestijama i stručnom pojašnjenju nejasnoća sa kojima sam se susretala prilikom izrade ovoga rada. Sve to je doprinelo da konačna verzija rada, bude upravo ovakva. Takođe, zahvaljujem se i članovima komisije, dr Ljiljani Gajić i dr Sanji Rapajić.

Veliku zahvalnost ukazala bih svojim roditeljima i sestri Vesni, na razumevanju, podršci i najiskrenijim savetima tokom dosadašnjeg školovanja.

Posebnu zahvalnost dugujem mojoj dragoj koleginici, a pre svega bliskoj prijateljici Tamari Bandulaji, sa kojom su studentski dani bili lepši, svi problemi rešivi, a spremanje ispita tokom osnovnih i master studija nezaboravno i lepo iskustvo.

Ivana Rabuzin

1

Uvod u modele ekonomskog rasta

Počev od Adama Smita[1] ekonomski rast i razvoj su sastavni deo razmatranja ekonomskih pojava. Pre početka detaljnije analize ove tematike, objasnićemo metodološku razliku između dva suštinski različita pojma- ekonomskog rasta i ekonomskog razvoja.

Ekonomski razvoj je kompleksniji pojam od ekonomskog rasta. Razvoj pored kvantitativnih elemenata rasta podrazumeva i kvalitativne aspekte, kao što su na primer podizanje kvaliteta životnog standarda stanovnika u nekoj zemlji, održivog ekonomskog blagostanja i pravo na slobodu odabira. Takođe uključuje i poboljšanje institucionalnih, društvenih i političkih uslova.

Ekonomski rast je međutim vezan uz povećanje proizvodnje po glavi stanovnika. Pod ekonomskim rastom ćemo podrazumevati porast potencijalnog autputa ekonomije (ili proizvodnih kapaciteta) i to u smislu ostvarenog nivoa autputa u uslovima pune iskorišćenosti faktora proizvodnje. Tokom jednog vremenskog perioda zbog nedostatka boljih načina istraživanja, mere-

[1] Adam Smith (1723 – 1790) je bio škotski ekonomista i filozof. Rođen je u malom škotskom selu Kirkaldi. Univerzitet u Glazgovu upisao je sa 14 godina na kom provodi tri godine učeći latinski i grčki jezik, matematiku i moralnu filozofiju. Potom odlazi na Oksford gde je proveo šest godina učeći razne discipline. Na Univerzitetu u Glazgovu bio je profesor iz logike (1751) i moralne filozofije (1752), a predavao je i teologiju, pravo i političku ekonomiju. Smith je takođe bio i jedan od istaknutih liberalnih mislilaca. Svojim učenjem je postavio temelje o ulozi države u ekonomiji. Protivio se uplitanju države u ekonomiju. Najpoznatije njegovo delo je *Bogatstvo naroda* (Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations), koje je objavio 1776. godine. Ovo delo se bavilo raznim aspektima ekonomije, a najviše pitanjima vezanim za proizvodnju, raspodelu i ekonomski rast. Bavio se i istraživanjima optimalne alokacije resursa u uslovima slobodne konkurencije. Umro je u Edinburgu 1790. godine.

nje stope ekonomskog rasta vršilo se posredstvom promena BDP-a[2] (u stalnim cenama) između prve i poslednje godine posmatranja. Međutim, samo pri uslovima potpune iskorišćenosti kapaciteta merenje stope ekonomskog rasta na ovakav način možemo smatrati verodostojnim. Pri funkcionisanju ekonomije na nivou koji je ispod potencijalnog, porast BDP može se javiti zbog povećanja stope iskorišćenosti radne snage i kapitala, bez porasta proizvodnih potencijala privrede, ali ovo se ne smatra odrazom privrednog rasta. Među glavne izvore ekonomskog rasta spadaju:

- akumulacija kapitala ili samo kapital- koji nam govori o porastu stopa industrijskih i fizičkih dobara koji se upotrebljavaju za proizvodnju. Zato ćemo akumulaciju kapitala identifikovati u formi neto investicije.

- tehnološke promene (promene u "kvalitetu" kapitala)- ove promene nam predstavljaju drugi izraz za porast produktivnosti, koja će podrazumevati porast autputa po jedinici kapitala, rada ili prirodnih resursa. Tehnološke promene kao glavni cilj imaju povećanje autputa po jedinici vremena. Ova promena može biti u pravcu da se više poveća produktivnost rada nego produktivnost kapitala ili u pravcu ka većem poboljšanju produktivnosti kapitala.

- rast veličine i "kvaliteta" radne snage- ovde ćemo podrazumevati i zaposlena lica, kao i ona koja traže posao (odnosno nezaposlena lica). Posmatrano na kratkoročnom nivou do rasta radne snage može doći pri smanjivanju nezaposlenosti i/ili rasta onoga dela populacije koji je spreman da radi. Gledano na dugoročnom nivou može doći do rasta radne snage pri promeni zakona ili ekonomske situacije, a sve ka cilju da što veći broj radno sposobne populacije postane deo radne snage.

- porast veličine i/ili kvaliteta zemlje ili drugih raspoloživih prirodnih resursa- iako je najveći deo u svetskim razmerama konstantan jer se ne mogu obnoviti, u zavisnosti od lokacije, pristupačnosti i kvaliteta zemlje imaju različit doprinos u ukupnim kapacitetima proizvodnje. Od količine raspoloživosti, kao i efikasnosti putem kojim dolazi do kombinovanja sa drugim inputima u proizvodnji, zavisi doprinos kako onih prirodnih resursa koji se obnavljaju, tako i onih koji nemaju ovu mogućnost.

[2]engleski: Gross Domestic Product (GDP)- Bruto domaći proizvod (BDP) predstavlja godišnju vrednost proizvedenih finalnih dobara i usluga u okviru nacionalne ekonomije. Postoje dva oblika BDP-a i to, nominalni BDP- izražava se u tekućim cenama i realni BDP- izražava se u stalnim ili fiksnim cenama.

Uticaj faktora predstavljenog kao tehničko znanje ili veština uključen je u kapital i rad.

Sredinom pedesetih godina prošlog veka, ekonomisti Solou i Svon postavili su neoklasični model rasta. Solou-Svon model je rešio probleme nestabilnosti unutar Domar-Harodovog modela. Solou (1956) koji je dobitnik i Nobelove nagrade 1987. godine u svom radu o ekonomskom rastu koristio je neoklasičnu ekonomsku funkciju. Postojao je samo jedan proizvod koji se mogao ili potrošiti ili uštedeti. Ukupna štednja zavisi od sklonosti ka štednji koja je egzogeno[3] data i nepromenljiva i koja određuje ukupne investicije. Rad kao faktor proizvodnje zavisi od stope rasta stanovništva.

Stanje stabilne ravnoteže postižemo prilagođavanjem količine kapitala i rada prema promeni njihovih relativnih cena, gde autput i kapital rastu u skladu sa egzogenim faktorom, to jest stopom rasta stanovništva. Kombinujuči neoklasičnu funkciju proizvodnje sa pretpostavkom o konstantnoj stopi štednje, Solou je dobio jednostavan model rasta. U ovom modelu na dugoročnu stopu rasta ne utiče sklonost ka štednji. Važno mesto ima tehnologija proizvodnje, definisana na način na koji se inputi proizvodnje, rad i kapital, transformišu u proizvedeni autput. Solou je koristeči Hiks neutralnu tehnološku promenu uveo tehnologiju u svoj model. Kod Kob-Daglasove funkcije proizvodnje odnos kapital/rad raste po stopi tehnološkog napretka korigovanoj za udeo proizvodnog faktora rada.

Menkju, Romer i Vejl (1992) uvođenjem promenljive ljudski kapital proširili su standardni Solouov model. Osnovna pretpostavka njihovog modela je bila da različiti nivoi obrazovanja i veština mogu uticati na dohodak po stanovniku pojedine zemlje. Ovim načinom se stavio naglasak na obrazovanje i usavršavanje, a samim tim i otvorile mogućnosti uticaja države na životni standard pojedine zemlje.

Nedostatak neoklasičnog modela rasta ogleda se u objašnjenju ekonomskog rasta promenljivom koja nije uključena u model, pošto je stopa rasta dohotka po stanovniku određena egzogeno datim tehnološkim napretkom koji u principu predstavlja rezidual (neobjašnjeni deo modela). Nova istraživanja pokreću Romer (1986) i Lukas (1988). Dalja istraživanja pokušavaju da prošire pojam kapitala kako bi se otkrio pokretač koji određuje rezidual, to jest osnovni generator rasta u Solou-Svon modelu.

Zbog toga što je fokus ka utvrđivanju dugoročne stope rasta unutar modela, uvažen je i naziv endogeni[4] modeli rasta. Kod Romerovog endogenog modela rasta na stopu rasta autputa po stanovniku utiče stopa štednje i veličina ekonomije data brojem preduzeća. Lukas (1988) je popularizovao

[3]Egzogene promenljive su one promenljive koje određuju uslovi izvan ekonomije

[4]Endogene promenljive određuju unutrašnja delovanja ekonomskog sistema

Romerov model tako što je koristio neoklasični model rasta sa ljudskim kapitalom kao proizvodnim faktorom. Literatura [3] i [6].

Prvo ćemo predstaviti neoklasični model rasta i njegove osobine.

Osnovna literatura korišćena u ovoj glavi je [1], [2], [4], [5] i [7].

1.1 Neoklasični model rasta

Ovaj model opisuje ekonomski rast u agregativnoj zatvorenoj ekonomiji. Agregativna ekonomija podrazumeva proizvodnju jednog homogenog dobra, pri korišćenju dva homogena faktora ulaganja, radne snage $L(t)$ i kapitala $K(t)$, dok za t podrazumevamo da neprekidno varira. Zatvorena ekonomija znači da ne postoji mogućnost uvoza ni izvoza, već da se kompletna proizvodnja ili potroši ili uloži u ekonomiju. Stoga, *jednačina prihoda* ima oblik

$$Y(t) = C(t) + I(t)$$

gde smo sa $C(t)$ obeležili potrošnju za vreme t, a $I(t)$ predstavlja ulaganje za vreme t.

Investiciju koristimo i za uvećanje zaliha kapitala i za nadoknadu amortizovanog kapitala. Ako $K(t)$ predstavlja zalihu kapitala u vremenu t, onda se *akumulacija kapitala* meri prema protoku vremena promene zaliha kapitala, to jest

$$K'(t) = \frac{dK(t)}{dt}.$$

Pri pretpostavci da se zalihe kapitala amortizuju prema neprekidnom proporcionalnom kursu μ (nastaje usled zastarevanja ili habanja opreme, tehnologije, postrojenja), *amortizovani kapital koji se nadoknađuje za vreme t* je μK(t), pa jednačina bruto investicije glasi:

$$I(t) = K'(t) + \mu K(t).$$

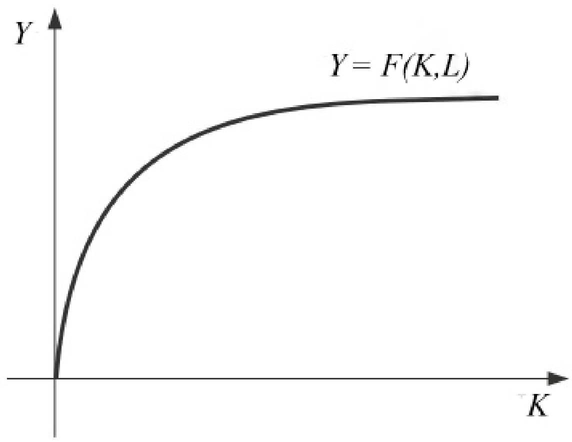
Znači, akumulacija kapitala je deo investicije koji se ne koristi za nadoknadu amortizovanog kapitala.

Inputi, odnosno faktori proizvodnje su: rad, fizički kapital (to jest, oprema i postrojenja), zemlja i drugi merljivi proizvodni faktori.

Sada, posmatramo funkciju proizvodnje koja zavisi od kapitala i radne snage:

$$Y = F(K, L).$$

Sa povećanjem kapitala ili rada dolazi do povećanja i autputa (ovo označi da su pozitivna oba izvoda funkcije proizvodnje i po K i po L). Funkcija proizvodnje nam u ovom slučaju pokazuje da se dobra i usluge proizvode pomoću opreme i utrošenih časova rada.



Slika 1.1: *Funkcija proizvodnje*

Česta pretpostavka ekonomista je da je funkcija proizvodnje preduzeća monotono rastuća i konkavna.

Standardne pretpostavke za funkciju proizvodnje su da:

- ne zavisi od vremena,
- je dva puta diferencijabilna,
- za sve pozitivne ulazne vrednosti važi:

  1. *konkavnost*

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial L} > 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0, \tag{1.1}$$

  dok za granične vrednosti uzimamo:

2. *asimptotika*

$$\lim_{K\to 0}\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}=\infty, \qquad \lim_{K\to \infty}\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}=0$$

$$\lim_{L\to 0}\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}=\infty, \qquad \lim_{L\to \infty}\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}=0, \tag{1.2}$$

tako da obe granice proizvodnje kreću od beskonačnosti i opadaju sve do nule.

3. *homogenost*
Takođe koristićemo još jednu pretpostavku, a to je da funkcija proizvodnje ima konstantne prinose pri rastu, tako da za svako pozitivno α važi

$$F(\alpha K,\alpha L)=\alpha F(K,L)=\alpha Y, \quad \alpha>0. \tag{1.3}$$

Najbitnije svojstvo funkcije proizvodnje je upravo da opiše reagovanje autputa na malu promenu jednog inputa, dok se drugi ne menjaju. Na primer, posmatramo neku zemlju sa određenom količinom kapitala i brojem radnika. Dodavanjem jedne mašine, dolazi do porasta zaliha kapitala, dok broj radnika ostaje isti. Sledi da će i autput porasti.
Količnik

$$\frac{\partial Y}{\partial K}$$

koji predstavlja povećanje autputa pri jedinici povećanja kapitala, je ustvari **marginalna produktivnost** posmatrane privrede.
Međutim, pitanje koje se sada postavlja je da li ćemo uvek očekivati povećanje autputa u istom iznosu, pri neprestanom dodavanju kapitala i konstantnim inputima. Odgovor će biti ne, jer povećanje kapitala znači da sve više opreme dodajemo u proces proizvodnje, a broj radniku je uvek isti (odnosno preostaje sve manje radnika koji bi trebali sa tim mašinama da rukuju). Ovo je princip **opadajuće marginalne produktivnosti**.

Kada uzmemo da je $\alpha=\frac{1}{L}$ dobijamo

$$\frac{Y}{L}=F(\frac{K}{L},1)=f(\frac{K}{L}),$$

gde je $\frac{Y}{L}$ autput po času rada, $\frac{K}{L}$ kapital po času rada, a funkcija $f(\frac{K}{L})$ predstavlja proizvodnju po radniku kao funkciju kapitala po radniku.

Ako sa $y(t)$ označimo proizvodnju po radniku, tada prethodnu jednakost možemo da zapišemo kao:

$$y=f(k), \tag{1.4}$$

i važi

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)}, \qquad k(t) = \frac{K(t)}{L(t)},$$

gde $y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)}$ predstavlja prosečnu produktivnost rada i govori nam koliko se autputa može proizvesti sa jednom jedinicom (časom) rada.
Pri pretpostavci da važe (1.1) i (1.2), dobijamo

$$f'(k) = \frac{dF(k)}{dk} > 0, \qquad f''(k) = \frac{d^2F(k)}{dk^2} < 0 \qquad \forall k > 0$$

što znači da je funkcija proizvodnje strogo konkavna monotono rastuća funkcija, čiji se nagib smanjuje od beskonačnosti za $k = 0$ do nule kada $k = +\infty$.

Sve prethodne jednačine se mogu predstaviti i po *radniku*.

Ako je $c(t)$ potrošnja po radniku, a $i(t)$ ulaganje po radniku u vremenu t, tada važi:

$$c(t) = \frac{C(t)}{L(t)}, \qquad i(t) = \frac{I(t)}{L(t)}.$$

Jednačina prihoda ima oblik

$$y(t) = c(t) + i(t), \tag{1.5}$$

a jednačina bruto investicije

$$i(t) = \frac{K'(t)}{L(t)} + \mu k(t).$$

Stopa promene kapitala po radniku data je sa

$$k' = \frac{d}{dt}(\frac{K}{L}) = \frac{K'}{L} - \frac{K}{L}\frac{L'}{L} = \frac{K'}{L} - k\frac{L'}{L},$$

pa jednačina bruto investicije glasi

$$i(t) = k' + (\mu + \frac{L'}{L})k = k' + (\mu + n)k, \tag{1.6}$$

gde je

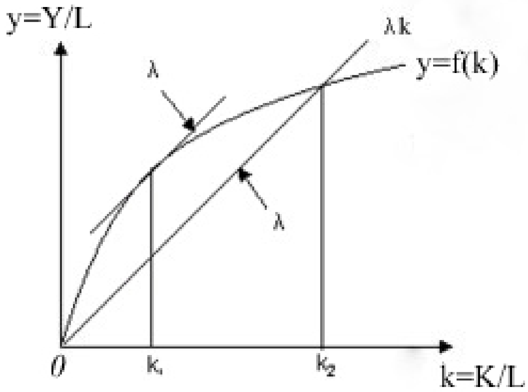
$$n = \frac{L'}{L}$$

stopa rasta radne snage, pa je $L(t) = e^{nt}$.

Uvođenjem oznake $\lambda \equiv \mu + n$ (pretpostavljamo da je λ pozitivna konstanta) iz jednačina (1.4), (1.5) i (1.6) dobijamo *osnovnu diferencijalnu jednačinu neoklasičnog ekonomskog rasta* i ona glasi

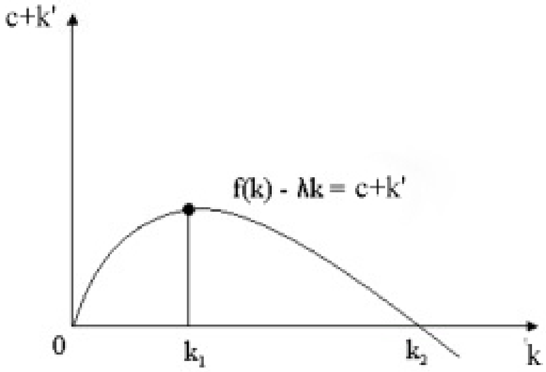
$$f(k(t)) = c(t) + \lambda k(t) + k'(t).$$

Prema navedenom izrazu autput po radniku $f(k)$ je sačinjen iz potrošnje po radniku c, održavanja nivoa kapitala po radniku λk i neto porasta nivoa kapitala po radniku k'. Ilustraciju vidimo sa slike 1.2.



Slika 1.2: *Osnovna diferencijalna jednačina neoklasičnog ekonomskog rasta*

Slika 1.2 predstavlja uticaj potrošnje po radniku na autput po radniku. Vidimo da se najviši nivo potrošnje dostiže u tački u kojoj se nagib funkcije proizvodnje izjednači sa nagibom linije održavanja nivoa kapitala, kao što se i vidi sa slike ispod. Potrošnja u stabilnom stanju predstavlja deo dohotka koji nije otišao u štednju.



Slika 1.3: *Osobina stabilnosti osnovne diferencijalne jednačine neoklasičnog ekonomskog rasta*

Kao što je prikazano na slici 1.3, pretpostavimo da postoje jedinstvene tačke k_1 i k_2, koje predstavljaju nivoe kapitala po radniku. Vidimo da tada funkcija $c + k'$ ima maksimum u k_1 i nulu u k_2, to jest zadovoljeno je

$$f(k_1) - \lambda k_1 \geq f(k) - \lambda k, \qquad \forall k > 0$$

$$f(k_2) - \lambda k_2 = 0.$$

Kada je potrošnja po radniku na svom maksimalnom nivou c_1, visina krive je k' i tada je zadovoljeno

$$f'(k) = \lambda = \mu + n \tag{1.7}$$

gde je $k = k_1$. Nivo kapitala po radniku k_1 se zove *zlatno pravilo nivoa kapitala po radniku.*
Sledi da je maksimalni održivi nivo potrošnje po radniku u k_1

$$c_1 = f(k_1) - \lambda k_1,$$

a c_1 zovemo *zlatno pravilo nivoa potrošnje po radniku*, dok je uslov (1.7) *zlatno pravilo akumulacije.* Tačka k_1 je ravnotežna tačka.

Pored neoklasičnog modela rasta možemo posmatrati i *problem optimalnog ekonomskog rasta* koji predstavlja problem (kontrole) dinamičke ekonomizacije, koji možemo da analiziramo kroz promenljive stanja, kontrolne promenljive, jednačine kretanja, početno stanje i funkcionele cilja. Kod neoklasičnog problema optimalnog ekonomskog rasta postoji jedna promenljiva stanja, kapital po radniku $k(t)$, a jednačina kretanja je osnovna diferencijalna jednačina neoklasičnog ekonomskog rasta

$$f(k(t)) = c(t) + \lambda k(t) + k'(t),$$

pri čemu je početni nivo kapitala po radniku

$$k(t_0) = k_0,$$

a promenljiva upravljanja je potrošnja sredstava po radniku $c(t)$, $t \in [t_o, t_1]$, s tim što su dopustiva upravljanja data sa $0 \leq c(t) \leq f(k(t))$.
Međutim, detaljna analiza ovoga modela se može videti u [2].

1.2 Solou-Svon model

Model Roberta Soloua često je osnova za dalja ispitivanja različitih teorija rasta. Njegov model se zasniva na pretpostavkama da se ekonomija sastoji samo od jednog dobra, koje možemo iskoristiti za potrošnju ili za investicije, zatim da je stopa štednje egzogeno data, kao i broj radne snage, da je prisutna savršena konkurencija.

Robert Merton Solou, nobelovac i profesor na Massachusetts Institut of Technology (MIT), 1956. godine je razvio model rasta zasnovan na matematičkim principima. Razmatraćemo ekonomiju sa određenom ponudom radne snage i datim stanjem tehnološkog znanja. Pretpostavljamo da radna snaga tokom vremena radi sa zalihom kapitala $K(t)$ (pri čemu kapital shvatamo u širokom smislu).

Funkcija proizvodnje, (veličina autputa) Y, koja zavisi od kapitala, K, glasi

$$Y = F(K). \tag{1.8}$$

Ona zadovoljava uslove konkavnosti, asimptotike i homogenosti, odnosno (1.1), (1.2) i (1.3).

Cilj nam je objasnimo privredni rast, pa će nas zanimati kako se i zašto kapital vremenom uvećava.

Zanima nas kako će se **štednja** nekog domaćinstva transformisati u investicije i kapitalna dobra, što dovodi do povećanja zaliha kapitala. Finansiranje investicija (I) može se vršiti iz privatne štednje firmi i domaćinstva (S) ili iz javne štednje ili će se finansirati iz neto inostrane štednje. Ako pretpostavimo budžetsku ravnotežu, tada je $I = S$ odnosno rast kapitala finansira se u potpunosti iz štednje domaćinstva, to jest, finansiranje investicija se vrši iz domaće štednje.

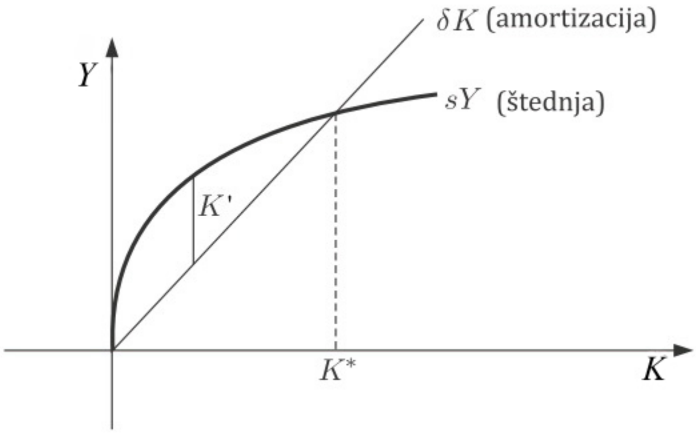
Pretpostavimo da ljudi štede konstantnu stopu s od svojih bruto prihoda Y, a stopa amortizacije δ predstavlja deo utrošenog kapitala. Zbog toga što je stopa po kojoj se novi kapital akumulira jednaka ukupnom protoku štednje sY i stopi utrošenog kapitala δK, neto stopa povećanja zalihe kapitala po jedinici vremena (*neto investicija*) je

$$I(t) = sY(t) - \delta K(t). \tag{1.9}$$

Neto investicija je brzina rasta $K(t)$, to jest $K'(t)$, pa je

$$K'(t) = sF(K) - \delta K(t). \tag{1.10}$$

Vidimo da je jednačina (1.10) u stvari *osnovna diferencijalna jednačina za teoriju neoklasičnog rasta*, s tim što je sada posmatran uticaj štednje. Ona pokazuje kako je stopa povećanja kapitala u bilo kom danu određena iznosom kapitala koji već postoji toga datuma. Akumulacija kapitala koja je na slici 1.4 prikazana linijom štednje izražava nacionalnu štednju kao funkciju autputa i dohotka. Bitna je razlika između bruto i neto investicije, pošto bruto investicija predstavlja sumu novca koja se izdvaja za nabavku novog kapitala, a neto investicija je onaj deo koji dovodi do porasta zaliha kapitala. Do povećanja kapitala neće doći u istom iznosu, zbog toga što je oprema u prethodnom periodu delimično amortizovana (istrošila se, izgubila neka svojstva ili je zastarela) i zbog toga dolazi do dela kapitala koji nepovratno gubimo.



Slika 1.4: *Solou -Svon model (stabilno stanje)*

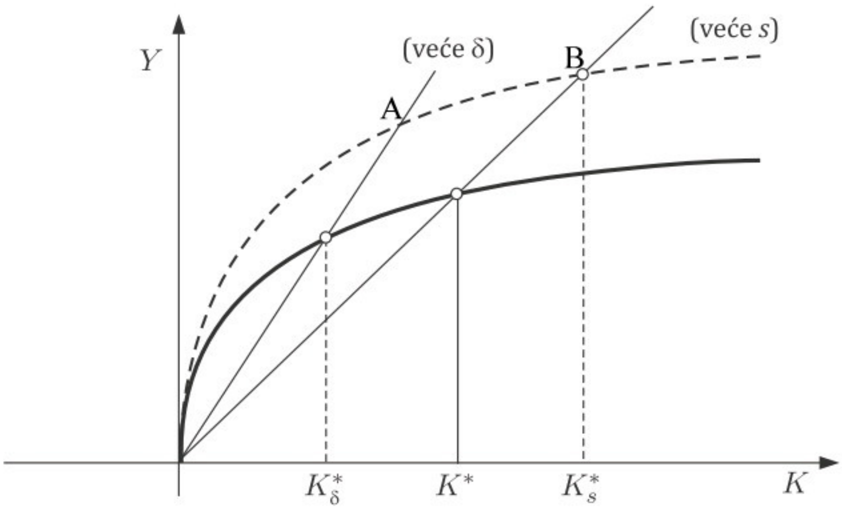
Slika 1.4 ilustruje ponašanje fundamentalne jednačine (1.10). Vidimo da je K' ustvari stopa rasta zaliha kapitala kao vertikalnog rastojanja između krive štednje i linije amortizacije. Zaliha kapitala se povećava kada je kriva štednje iznad prave amortizacije. K^* predstavlja stacionarnu tačku (stabilno stanje) ekonomije, gde kapitalni koeficijent niti raste niti opada. S obzirom na to da je sa manjom zalihom kapitala produktivnost velika, a nacionalni prihod veći, ljudi su podstaknuti da više štede. Pošto nacionalni prihod neće rasti istom brzinom kao i zaliha kapitala, zbog opadajuće marginalne produktivnosti, sledi da ni ušteda neće rasti istom brzinom kao amortizacija. Na kraju, amortizacija dostiže uštedu, dolazi do slabljenja rasta zaliha kapitala i prestaje rast nacionalnog prihoda.

Za ukupnu privredu, stopa amortizacije δ je prilično stabilna i smatraćemo je konstantnom. Sa većom količinom kapitala proporcionalno će biti i veća amortizacija. Na slici 1.4 amortizacija je prikazana pravom linijom koja polazi iz koordinatnog početka i ima nagib δ.

Kada bruto investicije nadmaše amortizaciju, imamo pozitivne neto investicije i zaliha kapitala se povećava. Do smanjivanja dolazi ukoliko su ivesticije manje od amortizacije, pri čemu je ovo slučaj u privrednim granama koje se gase.

Iz (1.10) vidimo da je neto akumulacija kapitala pozitivno korelisana sa stopom štednje, a negativno sa stopom amortizacije δ. Sa jedne strane ona povećava dohodak, a time i štednju, ali sa druge strane dovodi i do povećavanja amortizacije, kao što je i prikazano na slici 1.5. Svako povećanje s ili δ implicira pomeranje grafika i tačke K^*. Analiza predviđa da će privreda težiti ka stabilnom stanju i da će se tu i zaustaviti.

Objašnjenje ovoga fenomena je logično: prvo ćemo štedeti pa onda investirati i time se dobija ekonomski rast.



Slika 1.5: *Pomeranje K u zavisnosti od s i δ*

Možemo da zaključimo da zemlje koje više štede ostvaruju i veći životni standard, ali zbog toga ne ostvaruju i trajno brži privredni rast. Sa gornje slike vidimo efekat povećanja stope štednje. Funkcija štednje sY se pomera naviše. U tački stabilnog stanja dolazi do povećanja kako autputa tako i kapitala, što nam govori da proizvodnja postaje veća u tački B nego što je bila u tački A. Dok traje prilagođavanje na novo stabilno stanje, određeni period će dolaziti do ostvarivanja većih stopa rasta. Međutim, kada se dostigne stabilno stanje, više neće dolaziti do rasta. Porast štednje ne utiče na dugoročnu stopu rasta, pošto dolazi do povećanja zaliha kapitala, pa time imamo i veću amortizaciju. Da bi se mogao održati konstantni nivo zalihe kapitala, biće potrebno sve više investicija. Investicije neće imati odakle da rastu, jer marginalna produktivnost kapitala opada i pri svakom uvećanju, rast dohotka i štednje biće sve manji i manji, ali dolazi do proporcionalnog rasta amortizacije (tačka K^*_δ). Zbog principa opadajuće marginalne produktivnosti štednja se ne isplati posle određene tačke.

Ako uporedimo ovaj slučaj sa slikom 1.2 dobijamo da je $c^* = y^* - s^* = f(k^*) - \delta k^*$, pa vidimo da se najviši nivo potrošnje opet dostiže u tački u kojoj je nagib funkcije proizvodnje jednak sa nagibom linije amortizacije. Pošto je sada nagib funkcije proizvodnje jednak marginalnoj produktivnosti kapitala (MPK), zlatno pravilo glasi $MPK = \delta$. Dakle, zlatno pravilo glasi da će privreda maksimizirati potrošnju u kojoj marginalni dobitak (koji je ostvaren od dodatne jedinice BDP koja je otišla u štednju i investicije) bude jednak stopi amortizacije. Ovo naravno važi u slučaju kada nisu prisutni ni rast stanovništva, a ni tehnički progres.

Sada ćemo prikazati uticaj **rasta stanovništva** na privredni rast. Povećanje inputa rada može biti zbog zapošljavanja većeg broja ljudi ili pri povećanju broja radnih sati za svakog zaposlenog. Kada u Solouov model uključimo i radnu snagu, funkcija proizvodnje koja zavisi od kapitala i radne snage glasi

$$Y = F(K, L). \tag{1.11}$$

Važe pretpostavke (1.1), (1.2) i (1.3). Ako imamo konstantne inpute rada (tj. broj radnih časova) L, pri povećanju zaliha kapitala (tj. raspoložive proizvodne opreme) K, dolaziće do rasta proizvodnje u privredi, ali sa sve manjim priraštajima. Prilikom rasta L po stopi n, dolazi do povećanja autputa Y i kapitala K po istoj stopi. Na već prikazani način prilikom izlaganja neoklasičnog modela rasta dolazimo do jednakosti

$$y = f(k), \tag{1.12}$$

gde je

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)}, \qquad k(t) = \frac{K(t)}{L(t)} \tag{1.13}$$

i

$$k' = \frac{K'}{L} - \frac{L'}{L}\frac{K}{L} \quad \textit{odnosno} \quad k' = \frac{K'}{L} - nk. \tag{1.14}$$

Sa druge strane kada jednačinu $K'(t) = sF(K) - \delta K(t)$ podelimo sa $L(t)$ dobijamo

$$\frac{K'(t)}{L(t)} = s\frac{Y(t)}{L(t)} - \delta\frac{K(t)}{L(t)},$$

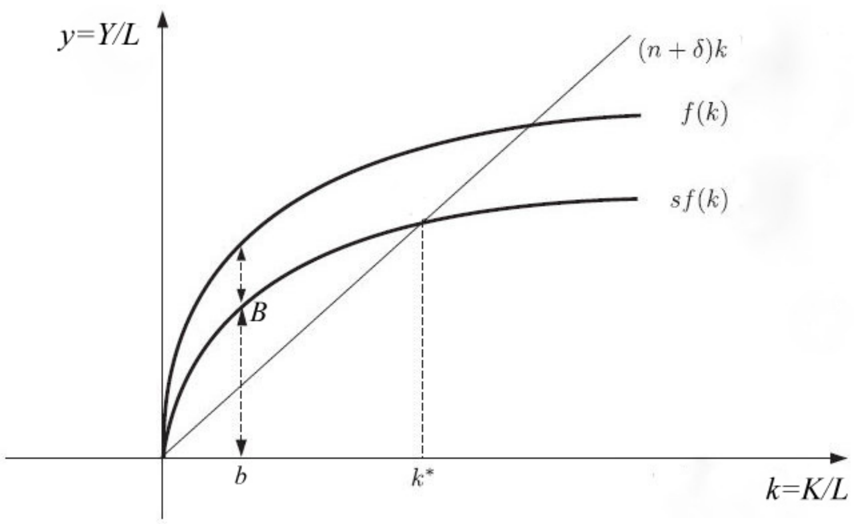
pa zbog (1.13) važi

$$\frac{K'(t)}{L(t)} = sy(t) - \delta k(t). \tag{1.15}$$

Zamenjujući (1.15) u (1.14) uslov akumulacije kapitala sada postaje

$$k'(t) = sy(t) - (\delta + n)k(t). \tag{1.16}$$

Za svaki porast $\frac{K}{L}$ bruto investicije treba da obezbede i nadoknađivanje amortizacije i obezbeđivanje opreme novim radnicima. Ovaj proces se naziva **širenje kapitala**, pošto on jedino može da objasni poslednji član u jednačini, a to je n. Razlika u odnosu na sliku 1.5 jedino se ogleda u tome što sada ne posmatramo više liniju amortizacije već liniju širenja kapitala $(\delta + n)k$. Grafički prikaz vidimo sa slike 1.6.



Slika 1.6: *Stabilno stanje uz rast stanovništva*

U tački k^* nema promene kapitala po radniku i tada investicije iznose $(\delta + n)k$. Vidimo da je to slučaj u preseku linije štednje $sf(k)$ i linije širenja kapitala. Ako dođe do stope rasta stanovništva dolazi do širenja kapitala u suprotnom smeru kretanja kazaljke na časovniku, pa se uspostavlja novo stabilno stanje i ono je sada u tački B gde je niži odnos kapitala i rada po radniku, tj. b. Pri svakom porastu stanovništva, marginalni proizvod kapitala takođe raste. Ali zbog opadajuće marinalne produktivnosti, kapital po radniku mora biti niži, pa sledi i smanjivanje autputa po stanovniku.

S obzirom da je ovde prisutan rast stanovništva, koji će dovoditi do povećanja broja potrošača u jednoj zemlji, zlatno pravilo će takođe da se promeni. Istim rezonovanjem kao u slučaju za štednju, potrošnja po čovek-času postaje $c^* = f(k^*) - (\delta + n)k^*$. Zlatno pravilo sada glasi $MPK = \delta + n$, pa je marginalna produktivnost kapitala jednaka sa sumom stope amortizacije δ i stope rasta stanovništva n.

Radi pojašnjenja i preciznijih formulacija ekonomskih nejasnoća, koristimo matematiku u ekonomiji. Upravo za to nam služi poznati oblik funkcije proizvodnje, relacije između inputa (kapitala i rada) i autputa (BDP), poznatiji kao Kob-Daglasova (Cobb-Douglas) funkcija o kojoj je reč u nastavku.

1.3 Kob-Daglasova funkcija

Čarls Kob i Pol Daglas su 1928. godine objavili studiju *Teorija proizvodnje* u kojoj je u periodu $1899 - 1922$. godine bio prikazan rast Američke privrede. Ovde je bila posmatrana proizvodnja kao veličina koja predstavlja odnos određene količine rada i količine kapitala. Model se pokazao kao izuzetno precizan, uprkos tome što postoje razni drugi faktori koji utiču na parametar funkcije proizvodnje. Mnogi kritičari su smatrali da je ova funkcija bazirana na oskudnim podacima. Uprkos kritikama, Pol Daglas je vršio dalja posmatranja sve dok se nije razboleo. Nastanak poznate forme Kob-Daglasove funkcije vezuje se za raspitivanje Pola Daglasa kod svog prijatelja i matematičara Čarlsa Koba, o postojanju neke posebne funkcije koja opisuje odnos određene količine rada i količine kapitala. Tako dobijamo formu funkcije proizvodnje poznatu pod imenom Kob-Daglasova funkcija koja glasi

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{1.17}$$

gde $A > 0$ predstavlja zadati nivo tehnologije, a sam parametar α predstavlja elastičnost autputa u odnosu na kapital, dok je $1 - \alpha$ elastičnost autputa u odnosu na rad.[5]

Marginalna produktivnost kapitala koja je data kao izvod autputa Y po kapitalu K iznosi:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = \alpha A(\frac{L}{K})^{1-\alpha}.$$

S obzirom na to da je $\alpha < 1$ ovaj izraz je opadajuća funkcija po K i rastuća funkcija po L. Marginalna produktivnost rada

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha} = (1-\alpha)A(\frac{K}{L})^{\alpha}$$

je rastuća funkcija po K, a opadajuća po L.

[5]Elastičnost autputa u odnosu na kapital definiše se kao $(dY/dK)/(K/Y)$ i data je izrazom $(\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha})(K^{1-\alpha}L^{\alpha-1}) = \alpha$. Slično tome, $1 - \alpha$ je elastičnost autputa u odnosu na rad.

Kob-Daglasova funkcija je izvedena iz CES[6] funkcije koje dominiraju u primenjenim istraživanjima:

$$Y = A(\alpha K^{\gamma} + (1-\alpha)L^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}}, \quad 0 < \alpha < 1$$

pri čemu γ predstavlja stepen zamene za inpute i γ[7] $= 0$ odgovara baš Kob-Daglasovoj formi $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$.
Da bi pokazali da ovo zaista važi, prvo uzimamo logaritam od CES funkcije, pa sledi

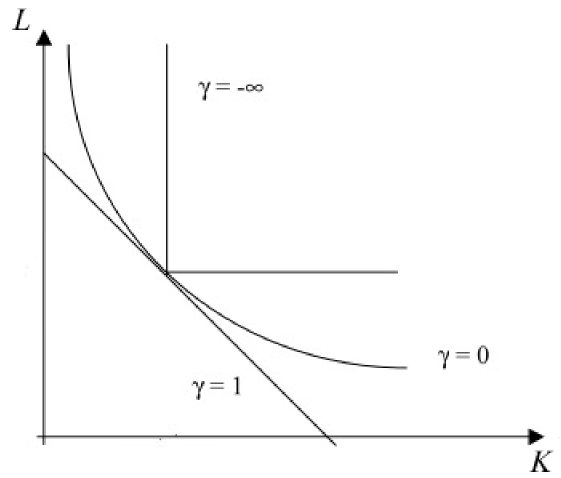
$$ln(Y) = ln(A) + \frac{1}{\gamma}\, ln(\alpha K^{\gamma} + (1-\alpha)L^{\gamma})$$

i zatim korišćenjem Lopitalovog pravila[8]

$$\lim_{\gamma \to 0} ln(Y) = ln(A) + \alpha\, ln(K) + (1-\alpha)\, ln(L)$$

dobijamo

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}.$$



Slika 1.7: *Prikaz vrednosti kada je $\gamma = -\infty$, $\gamma = 0$ i $\gamma = 1$*

[6]engleski: Constant elasticity of substitution (CES) function
[7]Može se posmatrati slučaj i kada je $\gamma = 1$ i $\gamma = -\infty$ što je na slici i prikazano
[8]engleski: L'Hopital's Rule- Lopitalovo pravilo: Ako je $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ i $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ postoji, tada $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Funkcija (1.17) zadovoljava uslove (1.1), (1.2) i (1.3) odnosno konkavnost, neprekidnost i homogenost.

Uzimanjem $\lambda = \frac{1}{L}$ dobijamo

$$\frac{Y}{L} = \frac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L} = A(\frac{K}{L})^{\alpha}$$

$$y = Ak^{\alpha}$$

to jest

$$f(k) = Ak^{\alpha}, \tag{1.18}$$

pa sledi:

1. konkavnost

$$\frac{\partial f(k)}{\partial k} = A\alpha k^{\alpha-1} > 0$$

$$\frac{\partial^2 f(k)}{\partial k^2} = A\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2} = -A\alpha(1-\alpha)k^{\alpha-2} < 0$$

2. neprekidnost

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\partial f(k)}{\partial k} = 0$$

jer je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\partial f(k)}{\partial k} = \lim_{k\to\infty} A\alpha k^{\alpha-1} = \lim_{k\to\infty} A\alpha \frac{1}{k^{1-\alpha}} = 0.$$

$$\lim_{k\to 0} \frac{\partial f(k)}{\partial k} = \infty.$$

3. homogenost

$$F(\lambda K, \lambda L) = A(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{1-\alpha} = A\lambda^{\alpha}K^{\alpha}\lambda^{1-\alpha}L^{1-\alpha}$$

$$= \lambda AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = \lambda F(K, L).$$

Jedan od značajnih izvora rasta je **tehnički progres**. S obzirom da tokom vremena dolazi do porasta našeg znanja, pa i do napretka tehnologije, ovo implicira i rast produktivnosti radnika, ali i opreme. Proširićemo funkciju proizvodnje, tako da postignemo veći autput sa istom količinom opreme i rada. Ako sada u funkciju proizvodnje (1.11) uvrstimo i promenljivu A koja opisuje stanje tehnologije, dobijamo

$$Y = F(A, K, L). \tag{1.19}$$

Porast autputa će se desiti pri svakom povećanju A, iako K i L ostanu nepromenjeni. Zbog ovoga svojstva, često se A naziva i *ukupna faktorska produktivnost*.

Ako malo izmodifikujemo (1.19) tako da uključimo tehnički progres da deluje direktno na rad (radi lakšeg povezivanja sa prethodnim izlaganjem), funkcija proizvodnje ima oblik

$$Y = F(K, AL), \tag{1.20}$$

gde je Y autput, K kapital, L radna snaga. Pretpostavimo da A raste po konstantnoj stopi a, pa je tehnički progres koji je predstavljen rastom parametra A egzogen. Promenljivu AL nazivaćemo i efektivnim radom, upravo zbog činjenice da u ovom slučaju jedan čas rada sa istom opremom sada proizvodi veću količinu autputa zbog porasti A.
Iz (1.20) vidimo da tehnički progres deluje direktno na rad i to tako da pri porastu A, na primer, od 5% ostvaruje se isti efekat kao i pri porastu zaposlenosti u istom procentu, a da broj časova rada ostane nepromenjen.

Porast efektivnog rada će se desiti iz dva razloga: zbog porasti inputa L ili zato što je došlo do porasta A. Zato će stopa rasta AL biti jednaka sa n, $a = n$.

Pomoću jednakosti (1.10), to jest $K'(t) = sY(t) - \delta K(t)$, rasta populacije i rasta nivoa tehnologije

$$\frac{L'}{L} = n, \qquad \frac{A'}{A} = a$$

koristeći funkciju proizvodnje (1.20)

$$Y = F(K, AL)$$

i uzimanjem $\lambda = \frac{1}{AL}$ dobijamo

$$\frac{Y}{AL} = \frac{1}{AL}F(K, AL) = F(\frac{K}{AL}, 1).$$

Koristeći pretpostavku o konstantnom prinosu, funkciju proizvodnje zapisujemo kao

$$y = f(k)$$

gde je

$$y = \frac{Y}{AL}, \quad k = \frac{K}{AL} \quad i \quad f(k) = F(k, 1).$$

Znači, funkcija proizvodnje povezuje autput po efikasnoj jedinici radne snage sa količinom kapitala po efikasnoj jedinici radne snage. Stopa $k = \frac{K}{AL}$ povećava se pri rastu K, a opada sa A i L.

Sada ćemo videti šta predstavlja zalihu kapitala k po efikasnoj jedinici radne snage.

$$k' = (\frac{K}{AL})' = \frac{K'(AL) - K(AL)'}{A^2L^2} = \frac{K'}{AL} - \frac{K(A'L + AL')}{A^2L^2}$$

$$k' = \frac{K'}{AL} - \frac{KA'}{A(AL)} - \frac{KL'}{L(AL)} \tag{1.21}$$

Deljenjem jednakosti (1.10) sa AL sledi

$$\frac{K'}{AL} = \frac{sY}{AL} - \frac{\delta K}{AL}. \tag{1.22}$$

Nakon uvrštavanja (1.22) u (1.21) i sređivanja izraza dobijamo da je

$$k'(t) = sy(t) - (\delta + a + n)k(t), \tag{1.23}$$

gde je s stopa uštede, n stopa rasta populacije, a stopa rasta tehnologije i δ stopa amortizacije kapitala.
Jednakost (1.23) predstavlja *promenu kapitala po efikasnoj jedinici radne snage*. Iz jednakosti vidimo da dolazi do rasta k ako su i štednja $sf(k)$ i investicije veće od akumulacije kapitala neophodne da pokrije amortizaciju δ, rast stanovništva n i rast efikasnosti a. Sad su stope kapitala i autputa u odnosu na efikasni rad konstantne, a to je bitna karakteristika stabilnog stanja. Takođe, zbog konstantnosti pri stabilnom stanju znamo i da zaliha kapitala po stanovniku raste po istoj stopi. Po stopi $a + n$ rastu i autput Y i kapital K, koja predstavlja zbir stope tehničkog progresa i stope rasta stanovništva. Stanje stabilnosti ekonomije je kada važi $k' = 0$ i njemu teži ekonomija tokom vremena dok funkcija proizvodnje raste.
Vrednost za k pri stanju stabilnosti izračunavamo

$$sf(k^*) = (n + a + \delta)k^* \tag{1.24}$$

$$y^* = f(k^*). \tag{1.25}$$

Dakle, sada je $MPK = n + a + \delta$, pa je maksimizacija potrošnje po glavi stanovnika ekvivalentna sa maksimizacijom potrošnje po jedinici efektivnog rada. Zbog opadajuće marginalne produktivnosti, održiv rast ne može da se obezbedi akumulacijom kapitala. Zato što može da objasni dugoročni privredni rast, tehnički progres je veoma bitna kategorija.

- *Rezidual Soloua*

Robert Solou je pronašao način kako da izmeri stepen tehnološkog uticaja na privredni rast. Njegova ideja se zasnivala na tome da prvo krenemo od stvari koje znamo i možemo da merimo, na primer: rast BDP, akumulaciju kapitala i utrošene čovek-časove. Iz jednakosti (1.19) vidimo da možemo da izmerimo i Y i njegova dva inputa K i L. Preostali input A izračunaćemo oduzimanjem od ukupne faktorske produktivnosti. Dakle, rast parametra A možemo iskazati kao razliku između porasta BDP-a i onoga dela koji se može objasniti angažovanim kapitalom i časovima rada, odnosno $a = \frac{A'}{A}$.
Rezidualom Soloua,

$$\frac{y'}{y},$$

nazivamo ovaj neobjašnjeni deo rasta autputa, koji predstavlja rast autputa zbog akumulacije kapitala i angažovanih sati rada (čovek-sati), i računamo ga na sledeći način:

$$\frac{A'}{A} = \frac{Y'}{Y} - \left[(1 - S_L)\frac{K'}{K} + S_L\frac{L'}{L}\right],$$

gde Y predstavlja realni BDP, S_L je udeo rada u BDP, a $(1 - S_L)$ je udeo kapitala.
Ovde imamo korišćenje standardne mikroekonomske pretpostavke koja kaže da svaki faktor dobija nadoknadu koja je jednaka njegovoj marginalnoj produktivnosti.

1.4 Ostali modeli rasta

Menkju, Romer i Vejl model (MRV model)

Menkju, Romer i Vejl su otkrili da je stopa sa kojom je konvergencija zemalja ka svom stabilnom stanju sporija, nego što je to predviđao Solouov model. To je bio povod da dođe do proširenja modela Soloua i uključivanje uloge ljudskog kapitala, to jest, bilo je potrebno samo proširiti pojam kapitala uz fizički i na ljudski, a sve ka cilju da se uspori delovanje opadajućih prinosa. Razlike u nivou obrazovanja dolaze do izražaja, ali i posedovanje veština radne snage. Što je veći nivo ljudskog kapitala, produktivnost radnika je bolja.
Dakle, ovaj model proširuje Kob-Daglasovu formu

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

tako što uključuje i ljudski kapital u funkciju proizvodnje, koja tada glasi:

$$Y = AK^{\alpha}H^{\beta}L^{1-\alpha-\beta}, \quad \alpha > 0, \quad \beta < 1, \quad \alpha + \beta < 1, \qquad (1.33)$$

gde je H ljudski kapital (on je endogena promenljiva i akumulira se s vremenom), A nivo tehnologije.
Jednakost (1.33) zadovoljava pretpostavke za funkciju proizvodnje iz Solou-Svon modela.
Prema Menkju, Romer i Vejlu za bilo koju datu stopu ljudskog kapitala veća ušteda ili niža stopa rasta stanovništva vode ka većem nivou dohotka. Oni navode da su, ako se analizira promena nivoa ljudskog kapitala H, razlike u obrazovanju u pojedinim zemljama delimično odgovorne za razliku BDP-a među tim zemljama.

U nastavku ćemo normirati L tako da je $L = 1$ i tada posmatramo da je BDP jednak BDP-u po glavi stanovnika (BDP_{pc}, tj. BDP *per capita*). Razmotrimo dve zemlje i i j koje imaju isti odnos kapital/autput:

$$\frac{K_i^{ss}}{Y_i^{ss}} = \frac{K_j^{ss}}{Y_j^{ss}}, \quad H_i > H_j.$$

Odnos nivoa stabilnog stanja države i i outputa države j dat je sa:

$$\frac{Y_i^{ss}}{Y_j^{ss}} = (\frac{AH_i^{\beta}}{AH_j^{\beta}})^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Znači, razlika u BDP-u po glavi stanovnika u dve zemlje objašnjena je kroz razlike u obrazovanju.

Pri pretpostavci da se ljudski kapital akumulira kao i fizički kapital, model se opisuje sa sledećim sistemom tri jednačine:

$$Y_t = AK_t^\alpha H_t^\beta$$

$$K_t' = s_k Y_t - \delta_k K_t$$
$$H_t' = s_h Y_t - \delta_h H_t$$

Akumulacija ljudskog kapitala ima uticaj na prihod po stanovniku. Što je stopa uštede veća dolazi do većeg prihoda, što vodi i ka višem nivou tehnologije i ljudskog kapitala. Na ovaj način ušteda podiže ukupni faktor produktivnosti. Možemo da primetimo da postojanje razlika u uštedi, obrazovanju i rastu stanovništva mogu da objasne razlike u prihodu po stanovniku. Takođe, variranje ovih razlika ogleda se i zbog drugih faktora, kao što su politička stabilnost, makroekonomske stabilnosti, politike poreza itd.

Uključivanjem u funkciju proizvodnje i tehnologiju A dobija se:

$$Y = K^\alpha H^\beta (AL)^{1-\alpha-\beta},$$

gde je AL efektivna ponuda radne snage, koja raste po stopi $n + a$, gde L raste po stopi n, a A raste po stopi a. Tehnologija A u izrazu AL predstavlja koeficijent produktivnosti (koliko je rad efikasan).

Izračunavanjem količnika $\frac{Y}{L}$ dobijamo

$$\frac{Y}{L} = \frac{K^\alpha H^\beta (AL)^{1-\alpha-\beta}}{L} = A(\frac{K}{Y})^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}(\frac{H}{Y})^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}$$
$$= AX$$

Intenzitet fizičkog kapitala možemo izračunati kao nivo investicija u fizički kapital:

$$\frac{K}{Y} = \frac{I_k/Y}{\delta + n + a},$$

a intenzitet ljudskog kapitala kao nivo investicija u ljudski kapital

$$\frac{H}{Y} = \frac{I_h/Y}{\delta + n + a}.$$

Sličnosti ali i razlike postoje između fizičkog i ljudskog kapitala. Osnovni smisao investicija u fizički kapital je ekonomski: da zarada ne postoji, niko ga ne bi ni posedovao. Nasuprot tome, vrednovanje ljudskog kapitala ogleda se na primer u obliku zdravlja, prvenstveno iz neekonomskih razloga.

Model MRV predstavlja prošireni model Soloua. Vidimo da u ovom modelu investiramo u ljudski kapital i potrošnju. Oblik funkcije proizvodnje koja je konzistentna sa empirijskim rezultatima je $Y = K^{1/3}H^{1/3}(AL)^{1/3}$.

Prema Vejlu *"činjenica da su ljudi produktivniji kad su dobrog zdravlja nije toliko bitna koliko sama činjenica da brinemo o sopstvenom zdravlju i zdravlju naše dece. Odluka da se investira u ljudski kapital kroz obrazovanje je ekonomska, ali samo delimično. Ljudi vrednuju obrazovanje i kao sredstvo ka višem prihodu i kao način proširenja svog intelektualnog i duhovnog života."*[9]

Kritike na račun MRV modela upućene su na merenje u stabilnom stanju, jer se države ne moraju nalaziti u stabilnom stanju u jednakim vremenskim trenucima.

Napomenućemo još da postoji teoretski model rasta koji proširuje MRV model računajući tehnološku zavisnost između regionalnih ekonomija. Osnova je na ranijim doprinosima, ali sada na različite načine. Više o ovakvoj modifikaciji i samom istraživanju može se videti u [8].

[9]David N. Weil, Economics Growth, Pearson, Addison Wesley, Boston, 2009, str. 180.

Nelson i Felps model

Razmatranje modela Nelson i Felpsa zasnivalo se na novim tehnologijama. Ključni značaj za nivo produktivnosti ima tehnološki nivo razvoja u kombinaciji sa ljudskim kapitalom.

"*Nelson i Felps smatraju da glavna uloga ljudskog kapitala nije povećanje produktivnosti pri izvršenju već postojećih zadataka, već je pružanje mogućnosti radnicima da se nose sa promenama, naročito sa novim tehnologijama.*"[10]

Od industrijske revolucije do danas dešavale su se razne tehnološke promene. Sredinom sedamdesetih pa sve do sredine devedesetih godina prošlog veka dolazi do najvećeg zastoja u tehnološkom razvoju. Nakon toga opet sledi novi rast tehnologija dolaskom kompjutera i informacionih tehnologija.

Razmatraćemo promenu tehnologije tokom vremena, gde ako

- A predstavlja produktivnost
- $\overline{A}$ produktivnost koja zavisi od najnaprednijih tehnologija,

sledi da je rast produktivnosti:

$$A' = f(H)(\overline{A} - A).$$

Benhabib i Spigel proširili su ovaj model, čija verzija kaže da ljudski kapital ne samo da prihvata napredne tehnologije, već svojom inovativnošću stvara i nove.

Inspirisan Bekerovom teorijom o ljudskom kapitalu (1964), Lukas (1988) smatra da je privreda naseljena pojedincima koji svaki dan odlučuju kako da izdvoje svoje vreme između tekuće proizvodnje i sticanja veština (ili obrazovanja), gde sticanje veština povećava produktivnost u budućnosti. Detaljnije objašnjenje Lukasovog modela nastavićemo u trećoj glavi nakon izlaganja osnovnih pojmova iz varijacionog računa.

[10]Acemoglu, Daron, Introduction to Modern Economics Growth, Princeton University Press, Princeton and Oxsford, 2009, str. 380.

2

Osnovni pojmovi varijacionog računa

U ovoj glavi ćemo definisati pojam varijacionog računa, predstaviti dva osnovna primera i upoznati se sa pojmovima potrebnim za rešavanje Ojler-Lagranžove jednačine. Nezavisnu promenljivu sada ćemo obeležavati sa x, dok je u prethodnoj glavi zbog uobičajene oznake u modelima ekonomskog rasta obeležavana sa t, kao što ćemo je obeležavati i u trećem poglavlju. Matematički aparat iz ove glave koristićemo prilikom analize Lukasovog modela.
Korišćena literatura je [2] i [9].

2.1 Uvodni deo i motivacija

Osnovna ideja varijacionog računa je da uporedo sa stvarnim procesom posmatramo i varirani proces koji se od njega malo razlikuje. Međutim, zahtevaćemo da samo stvarni proces kriterijumu optimalnosti saopštava stvarnu vrednost.

Posmatramo Rimanov integral:

$$J \equiv \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx, \quad gde\ je\ \ y'(x) \equiv \frac{dy}{dx}.$$

Za funkciju $y(x)$ pretpostavljamo da pripada klasi C^2. Od nje zavisi i vrednost datog integrala. Za različite vrednosti funkcije $y(x)$ dobijamo i različite vrednosti integrala J. Dalje, pretpostavljamo da imamo datu određenu klasu funkcija Y (na primer, to je skup svih diferencijabilnih funkcija definisanih na zatvorenom intervalu $[a, b]$.)

Onda posmatramo problem izbora funkcije $y(x)$ kojom postižemo ekstremnu vrednost integraja J. Pritom se često zahteva da su zadovoljeni uslovi $y(a) = A$ i $y(b) = B$.

U nastavku ćemo proučavati problem određivanja maksimuma ili minimuma za kriterijume optimalnosti oblika

$$J(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx$$
$$y(a) = A,\ y(b) = B,$$

pri čemu je funkcija $\widetilde{y}(x)$ rešenje problema datog na sledeći način:

$$\min_{y \in Y} J(y) = \min_{y \in Y} \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx,$$

gde je Y unapred zadat skup dopustivih rešenja.

Suštinu varijacionog računa predstavlja zadovoljavanje Ojler-Lagranžove diferencijalne jednačine

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y, y') - \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'} F(x, y, y') = 0,$$

što ćemo i dokazati u daljem izlaganju.

Sada ćemo dati primer kojim ilustrujemo navedenu činjenicu.

Primer 1. *Najjednostavniji problem varijacionog računa je najverovatnije određivanje u ravni krive minimalne dužine čiji su krajevi dve zadate tačke* (x_1, y_1),(x_2, y_2).

Dužina luka krive $y = y(x)$ *za koju važi* $y(x_1) = x_1$ *i* $y(x_2) = x_2$ *data je sa*

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'(x)^2}dx.$$

Udaljenost između tačaka (x_1, y_1) *i* (x_2, y_2) *data je sa*

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2}dx, \quad gde\ \ je\ \ y'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Znači, traži se diferencijabilna funkcija $\widetilde{y}(x)$ *tako da je* $J(\widetilde{y}) \leq J(y)$ *za sve (diferencijabilne) funkcije* $y(x)$ *za koje je* $y(x_1) = x_1$ *i* $y(x_2) = x_2$.

Ojler-Lagranžova diferencijalna jednačina u ovom slučaju se svodi na

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'} F(x, y, y') = \frac{d}{dx}\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = 0,$$

odnosno

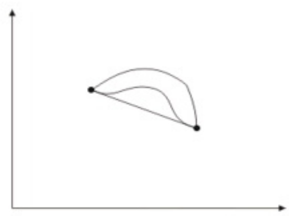
$$\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} = c = const.$$

pa sledi

$$y'(x) = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = A,$$

što znači da je rešenje oblika $y(x) = Ax + B$, *pri čemu konstante* A *i* B *određujemo iz početnih uslova. Tako dobijamo jednačinu tražene prave*

$$y(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}, \quad x \in [x_1, x_2].$$



Slika 2.1: *Ilustracija primera 1.*

PRIMER 2. *Bernulijev problem (problem brahistohrone)*

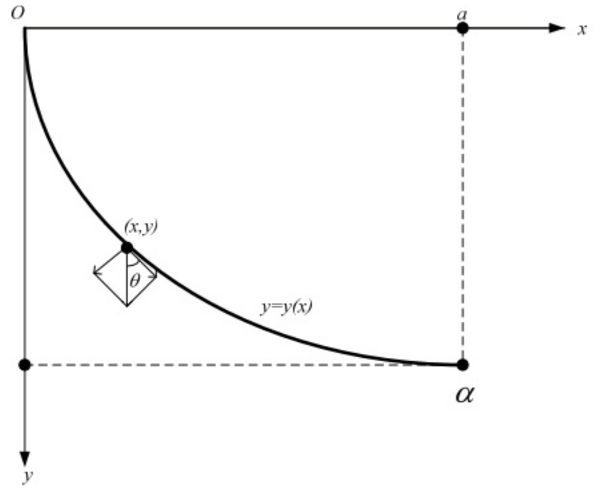
Date su dve tačke $O(x_1, y_1)$ *i* $\alpha(x_2, y_2)$ *u vertikalnoj ravni. Traži se kriva po kojoj će materijalna tačka stići iz tačke bez početne brzine* O *u tačku* α *za najkraće vreme, pri čemu se kretanje odvija pod dejstvom sile teže, bez trenja.*

Problem brahistohrone formulisao je Johan Bernuli, 1696. godine.

Na slici 2.2 je prikazana materijalna tačka (x, y) *mase* m, *koja pod dejstvom sile Zemljine teže,* g, *klizi niz glatku vertikalnu krivu* $O\alpha$. *Na osnovu zakona o održanju totalne mehaničke energije znamo da je* $m\frac{v^2}{2} - mgy = 0$, *jer je početna brzina tačke jednaka nuli, a tački* O *odgovara nulta vrednost koordinate* y. *Sledi da je* $v = \sqrt{2gy}$, *pa je ukupno vreme potrebno da materijalna tačka, krećući se putanjom* $y = y(x)$, *stigne iz tačke* O *u tačku* α *dato sa*

$$J(x, y, y') = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{2gy(x)}}dx.$$

Zadatak je da se odredi kriva $\widetilde{y} = \widetilde{y}(x)$ *u kojoj gornji integral ima minimalnu vrednost, uz granične uslove* $y(0) = 0$ *i* $y(a) = \alpha$.



Slika 2.2: *Problem brahistohrone*

Rešavanjem pomoću Ojler-Lagranžove jednačine sledi de je $y(1+y'^2) = const$. *Kada uvedemo parametre* $y = \cot\frac{t}{2}$ *i odgovarajuću formulu za izvod funkcije zadate u parametarskom obliku, dobijamo rešenje*

$$x = A(t - \sin t) + B$$

$$y = A(1 - \cos t),$$

pri čemu konstante A *i* B *određujemo iz zadatih početnih uslova. Ova kriva naziva se cikloida. Materijalna tačka čije je kretanje u gravitacionom polju po cikloidi dostiže najnižu tačku za vreme koje ne zavisi od njenog polaznog položaja.*
Pri konstrukciji časovnika sa klatnom Hajgens je iskoristio ovo svojstvo cikloide.

2.2 Ojlerova jednačina

U nastavku ćemo tražiti ekstrem funkcionele

$$J(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx.$$

Pretpostavke od kojih polazimo su da je:

1. podintegralna funkcija dovoljno glatka,
2. funkcionela $J(y)$ je definisana nad prostorom neprekidno diferencijabilnih funkcija, $C^1[a,b]$.

Da bismo mogli da odredimo lokalni ekstrem funkcionele $J(y)$ moramo prvo da preciziramo normu u kojoj se definiše okolina nekog elementa $y_0 \in C^1[a,b]$. Važiće

$$\{y \in C^1[a,b] \mid \|y - y_0\|_1 < \varepsilon\} \subset \{y \in C^1[a,b] \mid \|y - y_0\| < \varepsilon\}.$$

Neka za $y_0 \in C^1[a,b]$ važi $J(y_0) \leq J(y)$ za sve $y \in C^1[a,b]$ za koje je $\|y - y_0\|_1 < \varepsilon$. Tada kazemo da J u tački y_0 ima slab lokalni ekstrem. Ako je zadovoljeno $J(y_0) \leq J(y)$ za sve $y \in C^1[a,b]$ za koje $\|y - y_0\| < \varepsilon$ tada govorimo o jakom lokalnom ekstremu.
Dok su jaki ekstremi uvek i ekstremi u slabom smislu, obrnuto ne mora da važi. Možemo da zaključimo da je potreban uslov za slab ekstrem takođe potreban uslov i za jak ekstrem.

Za određivanje globalnih ekstrema, jake ekstreme ćemo posmatrati u prostoru $(C[a,b], \|\cdot\|)$, a slabe ekstreme u prostoru $(C^1[a,b], \|\cdot\|_1)$.

Posmatramo prostor $C^1[a,b]$. Tražimo funkciju $\tilde{y}(x)$ iz ovoga prostora koja će dati ekstremnu vrednost funkcioneli

$$J(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx,$$

gde je $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ i unapred su zadati granični uslovi $y(a) = A$ i $y(b) = B$.

Pretpostavićemo da postoji funkcija $\tilde{y}(x)$ iz $C^1[a,b]$ koja će maksimizirati ili minimizirati funkcionelu J.

Posmatramo proizvoljnu diferencijabilnu funkciju $h(x) \in C^1[a,b]$ takvu da je zadovoljeno $h(a) = h(b) = 0$.

Neka je ε realan broj. Definisaćemo $y_\varepsilon(x)$ na sledeći način:

$$y_\varepsilon(x) = \tilde{y}(x) + \varepsilon h(x).$$

Dalje pretpostavljamo da $J(y_\varepsilon)$ dostiže svoj maksimum ili minimum kada je $\varepsilon = 0$. Pri pretpostavci da je $J(y_\varepsilon)$ funkcija po ε sledi

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} J(y_\varepsilon) \mid_{\varepsilon=0} = 0. \tag{2.1}$$

Sa druge strane imamo:

$$J(y_\varepsilon) \mid_{\varepsilon=0} = [\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_a^b f(x, \tilde{y} + \varepsilon h, \tilde{y'} + \varepsilon h')dx] \mid_{\varepsilon=0}$$

$$= \int_a^b \tilde{f}_y h dx + \int_a^b \tilde{f}_{y'} h' dx, \tag{2.2}$$

gde su $\tilde{f}_y$ i $\tilde{f}_{y'}$ označeni redom parcijalni izvodi funkcije f u tački $\tilde{y}$. Rešavanjem drugog integrala parcijalnom integracijom dobijamo:

$$\int_a^b [\tilde{f}_{y'} h']dx = \tilde{f}_{y'} h \mid_a^b - \int_a^b [\frac{d\tilde{f}_{y'}}{dx} h]dx = -\int_a^b [\frac{d\tilde{f}_{y'}}{dx} h]dx. \tag{2.3}$$

Iz jednakosti (2.1),(2.2) i (2.3) dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} J(y_\varepsilon) \mid_{\varepsilon=0} = \int_a^b [\tilde{f}_y - \frac{d\tilde{f}_{y'}}{dx}]h(x)dx = 0. \tag{2.4}$$

Ovo važi za sve funkcije $h(x)$ iz skupa $C^1[a, b]$ za koje je $h(a) = h(b) = 0$.

Pre nego što pokažemo da iz (2.4) sledi

$$\tilde{f}_y - \frac{d\tilde{f}_{y'}}{dx} = 0$$

dokazaćemo sledeću lemu koju često nazivamo i osnovnom lemom varijacionog računa, a deo (a) se zove lema Lagranža.

Lema 2.2.1. *(a) Neka je data funkcija* $F \in C[a,b]$ *i neka važi* $\int_a^b F(x)h(x)dx = 0$ *za sve* $h(x) \in C^1[a,b]$ *za koje je* $h(a) = h(b) = 0$. *Dokazati da je tada* $F \equiv 0$.

(b) Neka je data funkcija $G(x) \in C[a,b]$ *i neka važi* $\int_a^b G(x)h'(x)dx = 0$ *za sve* $h(x) \in C^1[a,b]$ *za koje je* $h(a) = h(b) = 0$. *Dokazati da je tada* $G(x) = const$.

Dokaz:
(a) Dokaz izvodimo kontradikcijom. Pretpostavimo da postoji $x_0 \in (a,b)$, tako da je $F(x_0) > 0$. Tada iz neprekidnosti funkcije $F(x)$, sledi da je na nekom intervalu $(c,d) \subset (a,b)$ koji sadrži tačku x_0 ispunjeno $F(x_0) > 0$, za sve $x \in (c,d)$.
Biramo $h(x) := (c-x)^2(d-x)^2$ za $x \in (c,d)$ i $h(x) = 0$ za $x \in (a,b)\backslash(c,d)$. Tada je

$$\int_a^b F(x)h(x)dx > 0,$$

što je u kontadikciji sa pretpostavkom leme.

(b) Iz teoreme o srednjoj vrednosti za integral sledi da postoji $c \in \mathbf{R}$ tako da važi

$$\int_a^b (G(x) - c)dx = 0.$$

Pokazaćemo da za proizvoljnu neprekidnu funkciju $F(x)$, $x \in [a,b]$ važi

$$\int_a^b (G(x) - c)F(x)dx = 0.$$

F možemo zapisati u obliku $F(x) = \lambda(x) + \alpha$, pri čemu je $\int_a^b \lambda(x)dx = 0$, a α je odgovarajuća konstanta data sa $\alpha = \frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)dx$. Primetimo da funkcija $h(x) = \int_a^x \lambda(\tau)d\tau$ ispunjava uslove zadatka ($h'(x) = \lambda(x)$). Dakle,

$$\int_a^b (G(x)-c)F(x)dx = \int_a^b G(x)\lambda(x)dx - c\int_a^b \lambda(x)dx + \alpha\int_a^b (G(x)-c)dx = 0$$

za proizvoljnu funkciju $F \in C[a,b]$. Za funkciju $F(x) = G(x) - c$, dobija se

$$\int_a^b (G(x) - c)^2 dx = 0$$

odnosno $G(x) \equiv c$. $\square$

Lema 2.2.2. *(Paul du Bois-Reimond)*
Neka su date funkcije $F, G \in C[a,b]$ i neka važi

$$\int_a^b (F(x)h(x) + G(x)h'(x))dx = 0,$$

za sve $h(x) \in C[a,b]$ za koje je $h(a) = h(b) = 0$. Tada je G diferencijabilna i važi $F(x) - G'(x) = 0$.

Dokaz:
Neka je $\tilde{F}(x) = \int_a^x F(\tau)d\tau$. Parcijalnom integracijom dobijamo

$$\int_a^b F(x)h(x)dx = h(x)\tilde{F}(x) \mid_a^b - \int_a^b \tilde{F}(x)h'(x)dx = -\int_a^b \tilde{F}(x)h'(x)dx.$$

Prema tome

$$\int_a^b [F(x)h(x) + G(x)h'(x)]dx = -\int_a^b \tilde{F}(x)h'(x)dx + \int_a^b G(x)h'(x)dx$$

$$= \int_a^b [G(x) - \tilde{F}(x)]h'(x)dx = 0.$$

Na osnovu leme 2.2.1. dobija se $G(x) = \tilde{F}(x) + c$, za neko $c \in \mathbf{R}$.
S obzirom da je desna strana ove jednačine diferencijabilna ($\tilde{F}'(x) = F(x)$, $x \in [a,b]$), sledi $G \in C^1[a,b]$ i $G'(x) = F(x)$, $x \in [a,b]$ što je i trebalo da se pokaže. $\square$

Na osnovu leme Dibua Rejmonda i iz (2.2) sledi

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \tag{2.5}$$

Jednačina (2.5) zove se *Ojlerova jednačina*. Stoga, potreban uslov koji funkcija y_0 mora da ispunjava da bi bila ekstrem funkcionele J jeste da je y_0 rešenje Ojlerove jednačine.

Iz prethodne dve leme sledi tvrđenje:

Teorema 2.2.1. *Neka je data funkcionela* $J(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx$, *pri čemu je* $y \in C^1[a,b]$ *i važi* $y(a) = A$, $y(b) = B$. *Ako funkcionela* J *ima ekstrem u* $y_0 \in C^1[a,b]$, *onda je* $\tilde{y}$ *rešenje Ojlerove jednačine*

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

sa graničnim uslovima $y(a) = A$, $y(b) = B$, *to jest* $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y'} = 0$.

Dokaz:
Već smo pokazali da važi

$$\int_a^b [\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y'}]h(x)dx = 0$$

za sve $h(x) \in C^1[a,b]$ za koje je $h(a) = h(b) = 0$, pa na osnovu leme 2.2.1. pod (a) ako uzmemo

$$F = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}$$

dobijamo da sledi

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

□

Integralne krive koje zadovoljavaju Ojlerovu jednačinu nazivaju se *ekstremale*.

Ojlerova jednačina

$$f_y - \frac{d}{dx}f_{y'} = 0, \ \ y(a) = A, \ \ y(b) = B$$

daje potreban uslov (prvog reda) za maksimum (ili minimum) integrala J, a zbog

$$\tilde{f}_{y'} = \tilde{f}_{y'}(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x)), \ \ \tilde{f}_y - \frac{d\tilde{f}_{y'}}{\partial \tilde{y}'}\tilde{y}'' = 0$$

dobijamo diferencijalnu jednačinu drugog reda

$$\tilde{f}_y - \frac{\partial \tilde{f}_{y'}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{f}_{y'}}{\partial \tilde{y}}\tilde{y}' - \frac{\partial \tilde{f}_{y'}}{\partial \tilde{y}'}\tilde{y}'' = 0.$$

Korišćenjem pretpostavke da je funkcija $\tilde{y}(x)$ dva puta diferencijabilna je dosta jaka i kako bi definisali integral

$$J \equiv \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx$$

dovoljno će biti da je $\tilde{y}(x)$ diferencijabilna funkcija.

U narednom primeru biće prikazana direktna primena prethodne priče.

Primer 3. *Odrediti ekstremalu funkcionele $J(y) = \int_0^1 y'^2 dx$ koja zadovoljava granične uslove $y(0) = 0$,$y(1) = 1$.*

Za ovu funkcionelu Ojlerova jednačina glasi $-2y'' = 0$. Njeno opšte rešenje je $y(x) = C_1 x + C_2$, gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante, a $y(x) = x$, $x \in [0, 1]$ je rešenje koje zadovoljava granične uslove.
Direktnom proverom se dobija da je dobijena ekstremala globalni minimum u slabom smislu.
Za $h(x) \in C^1[a, b]$ za koje važi $h(0) = h(1) = 0$ i za $y(x) = x$ sledi

$$J(x + h(x)) - J(x) = \int_0^1 (x + h(x))'^2 dx - \int_0^1 x'^2 dx$$

$$= 2\int_0^1 h'(x)dx + \int_0^1 h'(x)^2 dx = \int_0^1 h(x)^2 dx \geq 0.$$

2.3 Specijalni slučajevi Ojlerove jednačine

Sada ćemo predstaviti neke specijalne slučajeve koji se često sreću u praksi.

1. *Ako podintegralna funkcija ne zavisi od x.* Sada je

$$J(y) = \int_a^b f(y(x), y'(x))dx$$

pa iz Ojlerove jednačine sledi

$$f - y' f_{y'} = const.$$

Kako funkcija f ne zavisi od x, razvijeni oblik Ojlerove jednačine glasi

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' = 0.$$

Ako prethodnu jednakost pomnožimo sa y' sledi

$$\frac{\partial f}{\partial y} y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} (y')^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y' y'' = 0.$$

Leva strana gornje jednakosti jednaka je sa

$$\frac{d}{dx}(f - y' f_{y'})$$

odakle direktno sledi prvi integral Ojlerove jednačine.

2. *Ako podintegralna funkcija ne zavisi od y.* U ovom slučaju je

$$J(y) = \int_a^b f(x, y'(x))dx.$$

Onda iz Ojlerove jednačine dobijamo $f_{y'} = const$, pa iz ove jednačine određujemo y'.

3. *Ako podintegralna funkcija ne zavisi od y'.* Dobijamo da je

$$J(y) = \int_a^b f(x, y(x))dx.$$

Ojlerova jednačina u ovom slučaju nije diferencijalna jednačina, pa od graničnih uslova zavisi egzistencija ekstremala.

Na primer, funkcionela $J(y) = \int_a^b y^2 dx$ uz uslove $y(a) = A, y(b) = B$ ima ekstremalu samo ako važi $A = B = 0$.

2.4 Varijacioni problemi sa ograničenjima

U varijacionom računu, često su među sobom funkcije stanja vezane izvesnim, unapred zadatim ograničenjima, koja mogu biti izražena u vidu određenih integrala, algebarskih i diferencijalni jednačina.
Traženje uslovnog ekstrema vršićemo metodom neodređenih Lagranžovih množitelja.

2.4.1 Izoperimetrijski zadatak

U ovom delu ćemo posmatrati problem određivanja ekstremnih vrednosti funkcionele

$$J(y) = \int_a^b f(x, y, y')dx$$

ako je ograničenje zadato u obliku integrala

$$K(y) = \int_a^b g(x, y, y')dx = l,$$

pri čemu rešenje $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, ispunjava uslove $y(a) = A$, $y(b) = B$, a l je unapred zadat broj.

Pretpostavljamo da su f i g dva puta neprekidno diferencijabilne funkcije po svim promenljivim, kao i da rešenje $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, nije ekstrem funkcionele K.

Teorema 2.4.1. *Ako je kriva $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, ekstremna vrednost funkcionele $J(y) = \int_a^b f(x, y, y')dx$ koja ispunjava uslove*

$$K(y) = \int_a^b g(x, y, y')dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B$$

i ako ona nije ekstrem funkcionele K, onda postoji konstanta $\lambda \in \mathbf{R}$ takva da je ta kriva y ekstrem funkcionele $\int_a^b (f + \lambda g)dx$.

Potreban uslov za ekstrem je glavni rezultat dokaza tvrđenja (međutim, nećemo se ovim baviti u radu), dat sa:

$$f_y - \frac{d}{dx}f_{y'} + \lambda(g_y - \frac{d}{dx}g_{y'}) = 0. \tag{2.6}$$

Ukoliko razmatramo problem određivanja ekstrema funkcionele J koja zavisi od više funkcija i ograničenja, to jest

$$J(y_1, y_2, ..., y_n) = \int_a^b f(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n')dx \tag{2.7}$$

uz ograničenja

$$y_i(a) = A_i, \quad y_i(b) = B_i, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{2.8}$$

$$\int_a^b g_j(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n')dx = l_j, \quad j = 1, 2, ..., k \tag{2.9}$$

potreban uslov za ekstrem je dat sistemom od n jednačina

$$\frac{\partial}{\partial y_i}(f + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j) - \frac{d}{dx}(\frac{\partial}{\partial y_i'}(f + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j)) = 0, \quad i = 1, 2, ...n.$$

U nastavku navodimo primer iz literature [10] i [11].

Primer 4. *Didonin problem*
Prema legendi, problem je nastao za vreme osnivanja drevnog grada Kartage na obali Severne Afrike. Posle smrti roditelja, feničanka Didona više nije mogla da izdrži samovolju brata Pigmaliona, pa je pobegla na obalu Severne Afrike. Tamo sklapa dogovor sa kraljem Jarbasom da od njega kupi onoliko zemljišta koliko se može obuhvatiti kožom jednog bika. Kožu je izrezala na tanke kaiševe čije je krajeve povezala. Tako je uspela da obuhvati zemljište na kojem je kasnije izgrađena Kartagina.

Didonin problem u matematičkoj formulaciji glasi:

Između svih zatvorenih krivih linija u ravni bez samopresečnih tačaka jednakog obima, odrediti krivu koja omeđuje maksimalnu površinu.

Ojler i Štajner (19. vek) su rešavali ovaj problem, pri čemu je Ojler pokazao da najveću površinu ograničava kružnica, ako posmatramo sve krive u ravni jednakog obima.

Rešavanje problema se svodi na određivanje zatvorene krive koja obuhvata maksimalnu površinu. Ako tu krivu obeležimo sa J sledi

$$J = \int_a^b y(x)dx,$$

pri čemu je $y(x) \geq 0$ *za svako* $x \in [a, b]$*. Dalje, pretpostavimo da je dužina* K *krive data sa*

$$K = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

i pri tome je zadovoljeno $y(a) = y(b) = 0$*. Bez gubitka opštosti, ako pretpostavimo da je* $a = 0$*, treba da odredimo* b*.*

Uvođenjem Lagranžovog množitelja λ *formiramo Lagranžovu funkciju*

$$J + \lambda K = \int_a^b (y + \lambda\sqrt{1 + y'^2}) dx.$$

Iz Ojler-Lagranžove jednačine sledi

$$1 - \lambda \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0.$$

Ako fiksiramo λ *posmatraćemo* y *kao funkciju po* x *i* λ*.*
Integraljenjem dobijamo

$$\lambda \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = x + C_1, \tag{2.10}$$

gde je C_1 *konstanta. Rešavanjem jednačine (2.10) po* y' *i uvrštavanjem* $y' = \frac{dy}{dx}$ *u nju, dobijamo*

$$dy = \pm \frac{(x - C_1) dx}{\sqrt{\lambda^2 - (x - C_1)^2}},$$

a integraljenjem sledi

$$y = \mp \sqrt{\lambda^2 - (x - C_1)^2} + C_2.$$

Kao rezultat dobijamo jednačinu

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = \lambda^2$$

što i jeste jednačina kruga sa centrom u (C_1, C_2) *poluprečnika* λ*.*

2.4.2 Uslovni ekstrem, algebarska ograničenja

Kod zadataka uslovnog ekstrema sa algebarskim ograničenjeima, ali i sa ograničenjima u vidu diferencijalnih jednačina, broj ograničenja mora biti manji nego broj nepoznatih funkcija, za razliku od izoperimetrijskog zadatka gde broj ograničenja ne zavisi od broja nepoznatih funkcija.

Razmotrićemo potrebne uslove optimalnosti funkcionele

$$\int_a^b f(x, y, y')dx \tag{2.11}$$

gde je $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, uz ograničenja

$$y_i(a) = A_i, \quad y_i(b) = B_i, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{2.12}$$

i

$$g_j(x, y) = 0, \quad j = 1, 2, ..., k \tag{2.13}$$

gde je $k < n$.
Dakle, posmatramo samo one krive koje ispunjavaju uslov (2.12) i leže na mnogostrukosti dimenzije $n - k$, koja je definisana jednačinama (2.13). Zadatke ovoga tipa nazivamo zadacima Lagranža.
Naredno tvrđenje precizira rešavanje jednog posebnog slučaja.

Teorema 2.4.2. *Ako je kriva data sa*

$$y = y(x), \quad s = s(x) \tag{2.14}$$

tačka minimuma ili maksimuma funkcionele

$$J = \int_a^b f(x, y, y', s, s')dx \tag{2.15}$$

u klasi krivih koje pripadaju površi $g(x, y, s) = 0$, pri čemu ni u jednoj tački na krivoj parcijalni izvodi g_y i g_s nisu istovremeno jednaki nuli, onda postoji funkcija $\lambda(x)$ takva da je kriva (2.14) ekstrem funkcionele

$$\int_a^b (f + \lambda g)dx, \tag{2.16}$$

to jest, važi

$$f_y + \lambda g_y - \frac{d}{dx}f_{y'} = 0, \quad f_s + \lambda g_s - \frac{d}{dx}f_{s'} = 0. \tag{2.17}$$

Odavde sledi da je potreban uslov za ekstrem dat sa

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \lambda(x) g_y = 0,$$

$$f_s - \frac{d}{dx} f_{s'} + \lambda(x) g_s = 0.$$

Primetimo da se Lagranžov zadatak može posmatrati kao granični slučaj izoperimetrijskog zadatka.

Uzmimo pretpostavku da je u Lagranžovom zadatku uslov $g(x, y, s) = 0$ zadovoljen samo u nekoj fiksiranoj tački x_0. Sledi da je g funkcionela od y i s, pa se opšti uslov $g(x, y, s) = 0$ može posmatrati kao skup beskonačno mnogo uslova tipa funkcionele. Tada Lagranžovi množitelji izoperimetrijskog zadatka u ovom graničnom slučaju postaju funkcija od $x \in (a, b)$.

2.4.3 Uslovni ekstrem, ograničenja u vidu diferencijalnih jednačina

U ovom delu posmatramo problem pronalaženja potrebnih uslova za ekstrem funkcionele

$$\int_a^b f(x, y, y')dx \tag{2.18}$$

gde je $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, uz ograničenja

$$y_i(a) = A_i, \quad y_i(b) = B_i, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{2.19}$$

i

$$g_j(x, y, y') = 0, \quad j = 1, 2, ..., k \tag{2.20}$$

gde je $k < n$.

S obzirom na to da je na n funkcija $y_i(x), i = 1, 2, ..., n$ nametnuto k ograničenja (2.19), pa će $n - k$ funkcija $y_i(x)$ biti nezavisno, a preostalih k određeno iz diferencijalnih jednačina (2.20). Kao i u prethodnom delu, odgovarajuće tvrđenje kaže da postoji k funkcija $\lambda_j(x), j = 1, 2, ..., k$, $x \in [a, b]$ takvih da je kriva $y(x)$, $x \in [a, b]$ ekstremala funkcionele

$$\int_a^b (f(x, y, y') + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(x) g_j(x, y, y'))dx.$$

Dokaz je analogan dokazu teoreme 2.4.2., a ekstremalu dobijamo rešavanjem sistema Ojlerovih jednačina

$$\frac{\partial f}{\partial y_j}+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\frac{\partial g_j}{\partial y_j}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'_j}+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\frac{\partial g_j}{\partial y'_j})=0,\quad j=1,2,...,n \tag{2.21}$$

Ove jednačine obrazuju sistem od $n+k$ jednačina za određivanje $n+k$ nepoznatih

$$y_1(x),...,y_n(x),\lambda_1(x),...,\lambda_k(x),\quad x\in[a,b].$$

Ako uvedemo oznaku

$$\Phi=\Phi(x,y,y',\lambda)=f(x,y,y')+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(x)g_j(x,y,y'),$$

gde je $\lambda=(\lambda_1(x),...,\lambda_k(x))$, sistem (2.21) možemo zapisati u obliku

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_j}-\frac{d}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial y'_j}=0,\quad j=1,...,n.$$

PRIMER 5. *Odrediti ekstremalu integrala*

$$J(y)=\int_0^1 y_2'^2dx, \tag{2.22}$$

uz uslove

$$y_1(0)=1,\quad y_1(1)=0,\quad y_2(0)=1,\quad y_2(1)=0, \tag{2.23}$$

pri ograničenju

$$y_2-y'_1=0. \tag{2.24}$$

Ako obeležimo sa

$$f=y_2'^2,$$
$$g=y_2-y'_1$$

primenom (2.21) dobijamo:

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}+\lambda(x)\frac{\partial g}{\partial y_1}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'_1}-\lambda(x)\frac{\partial g}{\partial y'_1})=-\frac{d}{dx}(\lambda(x))=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_2}+\lambda(x)\frac{\partial g}{\partial y_2}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'_2}-\lambda(x)\frac{\partial g}{\partial y'_2})=-\lambda(x)-\frac{d}{dx}(2y'_2)=0$$

i tako dobijamo sistem jednačina:

$$-\lambda'(x) = 0$$

$$-\lambda(x) = 2y_2''(x).$$

Rešavanjem sistema sledi

$$y_2(x) = C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3, \tag{2.25}$$

a kako iz ograničenja sledi $y_1'(x) = y_2(x)$*, imamo:*

$$y_1(x) = C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4. \tag{2.26}$$

Uvrštavanjem uslova u jednačine (3.25) i (3.26) dobijamo

$$C_1 = 18, \;\; C_2 = -10, \;\; C_3 = 1, \;\; C_4 = 1,$$

pa je rešenje dato sa

$$y_1(x) = 3x^3 - 5x^2 + x + 1$$

$$y_2(x) = 9x^2 - 10x + 1.$$

Dakle, dobili smo ekstremalu i ona je $y = (y_1(x), y_2(x))$.

3

Lukasov model

Ovu glavu počinjemo uvodnom pričom o Robertu Lukasu, njegovom obrazovanju i radovima koji mu donose Nobelovu nagradu. Kroz dalje izlaganje predstavićemo neka načela na kojima se zasnivaju teorije endogenog rasta, kao i analizu i rešenje Lukasovog modela kada je stopa ljudskog kapitala linearna funkcija, a zatim dve modifikacije modela.
Za uvod koristimo literaturu [12], [13] i [14], a [15], [16] i [17] prilikom daljeg izlaganja u glavi.

3.1 Uvod

Robert Emerson Lukas je rođen 1937. godine u Jakimi, malom mestu pored Vašingtona. U Sijetlu 1955. godine završava Ruzveltovu visoku školu, a pošto nije dobio stipendiju MIT univerziteta upisuje se na Univerzitet u Čikagu. Započinje rad predavanjima iz matematike i fizike, ali ubrzo odustaje od njih jer su ga interesovale druge oblasti, kao što su: Istorija zapadne civilizacije, Organizacija, Metodi i načela saznanja. Istoriju kao svoj glavni predmet uzima nakon polaganja kursa iz Drevne istorije. Njegova interesovanju su bila protkana kroz razne oblasti, pa je tako bio oduševljen predavanjima iz Teorije cena Miltona Fridmana, a pratio je i predavanja iz ekonometrije Cvija Griličesa i Grega Luisa. Uporedo sa ovim čitao je i knjigu *Uvod u teoriju verovatnoće i njene primene*, autora Vilijama Felera.

Doktorsku disertaciju pod nazivom "Elastičnost supstitucije između rada i kapitala na osnovu podataka industrije SAD" završava 1963. godine, a doktorirao je na Univerzitetu u Čikagu 1964. godine.

Njegov najznačajniji rad "Očekivanja i neutralnost novca" (1972) zajedno sa radom "Evaluacija ekonometrijske politike: kritika" (1976) donosi mu

Nobelovu nagradu. Nobelovu nagradu za ekonomiju dobio je 1995. godine za razvoj i primenu hipoteze o racionalnim očekivanjima. Ovim je produbio shvatanja ekonomske politike i transformisao makroekonomsku analizu. Profesor Univerziteta u Čikagu je postao 1980. godine, gde i danas radi.

Lukas je tvorac teorije *endogenog* ekonomskog rasta, koja spada u oblast makroekonomije. Dolazi do pojave mnogih radova koji se bave ovom tematikom među kojima je bio i Lukasov "O mehanici ekonomskog razvoja", koji su zasnovani na shvatanju da je stopa rasta privrede endogeno određena, jer akumulacija fizičkog kapitala, ljudskog kapitala i novih tehnoloških znanja neće dovoditi do opadajućih prinosa.

Ekonomisti su stvorili veliki broj modela koji opisuju kako obrazovanje može da utiče na stopu rasta neke ekonomije. Jedan takav udeo dao je i Lukas. Akumulacija ljudskog kapitala u ovim modelima je ključni pokretač rasta. Lukas je 1988. godine pokazao da ljudski kapital produkuje velike iznose pozitivnih eksternalija[1]. Ideja je zasnovana na direktnoj vezi između faktora koji su sastavni deo znanja, kao što su obrazovanje, sistem porodičnog učenja, kulturno delovanje. Analizom procesa kojima se znanje prenosi preko individua, ali ipak može doći i do značajnog porasta učinaka eksternalija, tema je bavljenja novih tipova modela endogenog rasta.

Blagostanje (dobrobit) svake zemlje zavisi od količine fizičkog kapitala, veština i nivoa znanja njenih građana. Što više kapitala imamo to više autputa po radniku možemo proizvesti. Veštine radne snage takođe su veoma bitne. Visoko kvalifikovani radnici su produktivniji od manje kvalifikovanih radnika. Prema tome, ekonomija sa više kvalifikovane radne snage pogodna je da raste brže od ekonomije sa manje kvalifikovane radne snage. Zbog toga će ekonomski rast biti određen od strane akumulacije fizičkog i ljudskog kapitala.

Lukas je predstavio model koji kao i neoklasični model rasta (Roberta Soloua, 1956, 1970) pretpostavlja da ako imamo stanje stabilnosti, odnosi rada, kapitala i tehnologije (inputi) prema obimu proizvoda ostaju konstantni. Stoga, proizvodni inputi i proizvod rastu po istoj stopi. Bitna karakteristika za njegov model je ta da se ekonomija uvek nalazi u ravnoteži iz razloga što su investicije jednake štednji. Međutim, ekonomija se ne mora uvek nalazi u stabilnom stanju, zbog mogućih promena koje se javljaju u marginalnoj sklonosti potrošnji ili egzogenoj stopi rasta rada.

Gradus i Smulders su proširili Lukasov model tako što su uveli pretpostavku da zagađenje utiče na granične prinose obrazovanja. Ideja modela je zasnovana na tome da zagađenje ima negativan uticaj po zdravlje radnika,

[1]eksternalije- aktivnosti koje utiču na blagostanje privrednih subjekata koji nisu direktni učesnici procesa

što dovodi do smanjenja njihovih sposobnosti prilikom učenja.

Veliki broj Lukasovih sledbenika i danas se bavi problemima endogenog rasta.

3.2 Teorije endogenog rasta

Teorije endogenog rasta za razliku od neoklasičnih, počivaju na uverenjima da je ekonomski rast određen endogenim delovanjem unutar ekonomskog sistema, a ne posredstvom nekih faktora izvan njega, to jest egzogenih. Kod ovih modela tehnološke promene i akumulacija tehnološkog znanja, predstavljaju rezultat onih ekonomskih odluka koje se tiču investicija u fizički ili ljudski kapital, istraživanje i razvoj. Akumulacija bilo koje vrste kapitala je dozvoljena u ovim modelima, za razliku kod neoklasičnog gde se mogao akumulirati samo fizički kapital (po opadajućim prinosima). Pošto brža stopa akumulacije nije implicirala opadajuće prinose, kod modela endogenog rasta se pri višim, ali i konstantnim stopama štednje, mogla održavati viša stopa rasta. Unutar ovih modela rasta možemo razlikovati grupe takozvanih "namernih" i "nenamernih" modela rasta. Kod "namernih" modela rasta, akumulacija znanja je eksternalija za ekonomske subjekte i javlja se kao usputni proizvod investicija (Romer (1986)). U "namernim" modelima naglašen je veliki uticaj ka sticanju i usavršavanju znanja potrebnog za tehnološke promene i rast (Lukas (1988), Grossman i Helpman (1991)).

Jedan od razloga zbog kojih se javljaju nove teorije ekonomskog rasta je što se u stvarnosti ne ostvaruje konvergenciju dohotka po stanovniku, kao što to tvrdi neoklasični model. Više o objašnjenju hipoteze o konvergenciji u endogenim modelima rasta dato je u [18]. To je bio osnovni razlog koji je Lukas (1988), ali i Romer (1986) koristio pri pokušaju formulisanja modela rasta u kome je sadržan tehnološki napredak, koji pritom nije egzogeno zadat, niti raspoloživ svim zemljama u svetu.

Empirijski podaci ukazuju na velike razlike koje se ogledaju kroz životni standard stanovnika različitih zemalja, pri čemu se stabilne stope rasta mogu jedino uočiti kod razvijenih zemalja, dok siromašnije zemlje obiluju naglim promenama u stopama ekonomskog rasta, kako u pravcu rastućih, tako i opadajućih. Takođe, napredak u tehnologiji se ogleda posredstvom ljudskog rada, pri čemu je zastupljena tržišna moć pojedinaca i preduzeća, pa tako zarađuju monopolističku rentu, koja nije uzeta u obzir kod neoklasičnog modela. Reč je o "učenju putem rada", gde na nivou preduzeća imamo konstantne prinose i rastuće prinose na ekonomskom nivou. Pozitivni eksterni efekti kapitala, koji obuhvataju i fizički i ljudski kapital, zaslužni su za neutralizovanje štetnih posledica povećavanja količine kapitala po stanovniku i sprečavanje smanjenja graničnih proizvodnosti kapitala. Upravo zbog ovoga, bogate zemlje mogu obezbediti stalan ekonomski rast, dok manje razvijene zemlje mogu stalno ostati siromašne. Znači posredstvom ljudskog kapitala, čija akumulacija je zastupljena prilikom obrazovanja, usavršavanja na poslu, "učenju putem rada" u model su uključeni rastući prinosi, a time i mogućnost neograničenog rasta.

Postoje i tzv. AK modeli kod kojih je rast endogen, iako je prisutno odsustvo rastućih prinosa. Kod njih kapital, takođe obuhvata značenje kroz razne oblike, uključujući ljudski i fizički kapital. Modele sa monopolističkom moći koji pretpostavljaju da je sektor tehnološkog napretka poseban u ekonomiji i da pruža znanja o novih tehnologija drugim sektorima, razvili su Romer (1990), Grossman i Helpman (1990), Aghion i Howott (1992). Kod ovih modela, proizvođači kupovinom novih tehnologija obezbeđuju sebi pravo na korišćenje, ali istovremeno naplaćuju i cenu koja je iznad graničnog troška njihove proizvodnje. Ovo rade da bi obezbedili dohodak kojim će pokriti nastale troškove u koje je uračunata i početna investicija u nove tehnologije. Kako ulaganje u investicije koje se tiču inovacija nema osobinu opadajućih prinosa i proizvodnost novih investicija se ne smanjuje, obezbeđen je stalan, održiv rast. Od količine resursa koji su namenjeni za nova istraživanja i razvoj, stepana monopolske moći zavisi stopa rasta.

Zaključujemo da je osnovna razlika između modela endogenog rasta i neoklasičnog modela rasta, što je kod endogenih modela dejstvo zakona o opadajućim prinosima izbegnuto. One zemlje koje štede više, ali i investiraju, obezbeđuju dugoročni rast, pa samim tim i politike koje utiču na stopu štednje imaju veći uticaj na ekonomsko blagostanje same zemlje. Bitna napomena koju je i Lukas naveo je ta da zemlje ne moraju ostvariti ravnotežnu stopu stabilnog rasta, koja predstavlja zbir stope rasta stanovništva i tehnološkog napretka. Zbog odsustva opadajućih prinosa, moguće je obezbediti održiv rast sa stopom koja je viša od nje.

Sada ćemo predstaviti originalnu formulaciju Lukasovog modela, kao i šta se dešava u modelu ako uvedemo određene pretpostavke.

3.3 Analiza Lukasovog modela i rešenje

Lukasov model (1988) je zasnovan na neoklasičnoj funkciji proizvodnje, kao i pretpostavkama da je dozvoljena akumulacija kako fizičkog, tako i ljudskog kapitala i da su prinosi svih proizvodnih faktora konstantni. U njegovom modelu zastupljena su dva sektora: *prvi sektor* proizvodi potrošna i investicijska dobra, dok *drugi sektor* proizvodi obrazovanje. Ekonomija se sastoji od pojedinaca koji sami odlučuju kako će da raspodele svoje vreme između proizvodnje i obrazovanja. Što je obrazovanje ljudi veće, veća će biti i njihova produktivnost, a to bi dovelo do bržeg ekonomskog rasta. Međutim, sticanjem veština pojedinac više vremena ulaže u obrazovanje, pa manje vremena ostaje za sadašnju proizvodnju (ali to dovodi do povećanja buduće proizvodnje, jer se povećava proizvodnost rada i kapitala). Uticaj akumulacije ljudskog kapitala na stopu rasta je tema analize u Lukasovom modelu.

Pretpostavka Lukasa je da je stopa rasta ljudskog kapitala linearno povezana sa svojim nivoom. Vezu između ljudskog i fizičkog kapitala tokom vremena, t, dodeljenog pojedincu za proizvodnju, možemo opisati sledećim jednačinama:

$$y(t) = Ak(t)^{\alpha}(u(t)h(t))^{\beta}, \quad \alpha > 0, \quad \beta < 1, \quad \alpha + \beta < 1 \tag{3.1}$$

$$h'(t) = \frac{dh}{dt} = ah(t)(1 - u(t)), \tag{3.2}$$

gde je

- $k(t)$ zaliha fizičkog kapitala,
- $h(t)$ zaliha ljudskog kapitala,
- $u(t)$ vreme provedeno na radu,
- $1 - u(t)$ objašnjava kako vreme provedeno tokom obrazovanja utiče na akumulaciju ljudskog kapitala,
- α, β, A, a su pozitivni parametri koji opisuju: A ukupni nivo tehnologije, α i β određuju marginalne proizvode kapitala i ljudskog kapitala, respektivno.

Vidimo da se funkcija proizvodnje (3.1) sastoji iz fizičkog i ljudskog kapitala. Što je veće A, pojedinac je produktivniji. Marginalni proizvodi opisuju koliko će se ukupni autput povećati ukoliko postoji porast jedne jedinice inputa. S obzirom na to da na proizvodnju neke privrede veliki uticaj imaju edukacija i tehnološki progres, ekonomisti uključuju ove faktore u funkciju proizvodnje. Ako je $u(t) = 1$ tada nema procesa ljudske akumulacije, dok za pretpostavku $u(t) = 0$ dolazi do rasta $h(t)$ srazmerno sa a.

Promena u fizičkom kapitalu će biti ono što ekonomija proizvede umanjeno za potrošnju, a ostatak ove razlike će se iskoristiti u budućoj proizvodnji. Dakle, ograničenje da se stvarna ekonomija ogleda prema fizičkom kapitalu vidimo u sledećoj jednačini:

$$k'(t) = \frac{dk}{dt} = f(k, h) - c(t). \tag{3.3}$$

Zamenom (3.1) u (3.3) dobijamo

$$k'(t) = Ak(t)^{\alpha}(u(t)h(t))^{\beta} - c(t).$$

Lukas je uključio stopu amortizacije kapitala u stopu rasta fizičkog kapitala. Pretpostavimo da do amortizacije aparata dolazi zbog njegovog neprekidnog korišćenja, pa i produktivnost opada, stoga amortizaciju možemo opisati kao negativnu stopu promene zaliha fizičkog kapitala.
Promena stope fizičkog kapitala data je sa

$$k'(t) = Ak(t)^{\alpha}(u(t)h(t))^{\beta} - c(t) - nk(t), \tag{3.4}$$

gde je n stopa amortizacije. Jednačina (3.4) predstavlja *ograničenje fizičkog kapitala* i opisuje kako stopa promene zalihe kapitala zavisi od funkcije proizvodnje, potrošnje i stope amortizacije kapitala.

Koristićemo funkciju korisnosti

$$U(c(t)) = \frac{c(t)^{1-\sigma}}{1-\sigma}, \quad 0 < \sigma < 1$$

gde je $c(t)$ potrošnja, a σ relativni koeficijent odbojnosti prema riziku (nespremnost investitora da prihvati rizik). Ova izoelastična[2] funkcija korisnosti spada u klasu CRRA[3] ili CIES[4] funkcija korisnosti.

Da bi rešili ovaj problem koristićemo varijacioni račun izložen u prethodnoj glavi. Problem je maksimizacija funkcije sa ograničenjem u vidu dve diferencijalne jednačine. Izračunavanjem vrednosti Ojler-Lagranžove jednačine po $c(t), k(t), h(t)$ i $u(t)$ dobijamo sistem od četiri jednačine.

[2]U ekonomiji se izoelastična funkcija korisnosti koristi da izrazi korisnost u vezi sa potrošnjom ili nekom drugom ekonomskom varijablom kojom se bavi donosilac odluke

[3]engleski: Constant Relative Risk Aversion utility function

[4]engleski: Constant Intertemporal Elasticity of Substitution utility function

Naš prvi cilj će biti proveravanje da li su vrednosti $u(t) = 1$ i $\frac{du}{dt} = 0$ moguće. Ako je to zadovoljeno možemo reći da će ostati konstantna ljudska i fizička akumulacija, pri čemu h i k ne zavise od vremena. Tada zaključujemo da ako su ove pretpostavljene vrednosti moguće onda optimalno ponašanje pojedinca nije da se edukuje, što je u kontradikciji sa Lukasovim modelom.

Dakle, tokom vremena maksimizujemo korisnost koja zavisi od ljudskih i fizičkih kapitalnih ograničenja, to jest

$$J(t) = \int_0^\infty \frac{c(t)^{1-\sigma}}{1-\sigma} e^{-\rho t} dt \to max$$

gde je $\rho > 0$ diskontna stopa,
u zavisnosti od

$$k'(t) - Ak(t)^\alpha (u(t)h(t))^\beta + c(t) + nk(t) = 0$$

$$h'(t) - ah(t)(1 - u(t)) = 0.$$

Jasno c, h, k i u zavise od vremena, ali radi lakšeg zapisa prilikom daljeg računa u radu, pisaćemo bez t.

Obeležimo sa

$$f = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} e^{-\rho t}$$

$$g_1 = k' - Ak^\alpha (uh)^\beta + c + nk$$

$$g_2 = h' - ah(1-u).$$

Kako su zadovoljeni svi uslovi iz prethodne glave, to jest dela 2.4.3, možemo da iskoristimo jednakost (2.21), pri čemu je sada $y = y(y_1, y_2, y_3, y_4) = y(c, h, k, u)$ i

$$\frac{\partial f}{\partial y_j} + \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial y_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y_j'} + \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial y_j'}\right) = 0.$$

Dakle, imamo sistem od šest jednačina za određivanje šest nepoznatih $c(t), h(t), k(t), u(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t)$.

Jednačina po c je :

$$\frac{\partial f}{\partial c} + \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial c} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial f}{\partial c'} + \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial c'}) = 0$$

$$c^{-\sigma} e^{-\rho t} + \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_1(t) = -c^{-\sigma} e^{-\rho t}. \tag{3.5}$$

Jednačina po h je :

$$\frac{\partial f}{\partial h} + \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial h} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial f}{\partial h'} + \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial h'}) = 0$$

$$\lambda_1(-Ak^{\alpha} u^{\beta} \beta h^{\beta-1}) - \lambda_2 a(1-u) - \lambda_2' = 0$$

$$\lambda_1(-Ak^{\alpha} u^{\beta} \beta h^{\beta-1}) - \lambda_2 a(1-u) = \lambda_2'. \tag{3.6}$$

Jednačina po k je :

$$\frac{\partial f}{\partial k} + \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial k} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial f}{\partial k'} + \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial k'}) = 0$$

$$\lambda_1(-A\alpha k^{\alpha-1} u^{\beta} h^{\beta} + n) - \lambda_1' = 0$$

$$\lambda_1(-A\alpha k^{\alpha-1} u^{\beta} h^{\beta} + n) = \lambda_1'. \tag{3.7}$$

Jednačina po u je :

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial u} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial f}{\partial u'} + \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial u'}) = 0$$

$$-\lambda_1(Ak^{\alpha} \beta u^{\beta-1} h^{\beta}) + \lambda_2 ah = 0$$

$$-\lambda_1(Ak^{\alpha} \beta u^{\beta-1} h^{\beta}) = -\lambda_2 ah. \tag{3.8}$$

Množeći (3.6) sa h dobijamo

$$-\lambda_1 Ak^\alpha u^\beta \beta h^\beta - \lambda_2 ah(1-u) = h\lambda_2'. \tag{3.9}$$

Množeći (3.8) sa u dobijamo

$$-\lambda_1 Ak^\alpha \beta u^\beta h^\beta = -u\lambda_2 ah. \tag{3.10}$$

Sada ako (3.9) pomnožimo sa (-1), pa saberemo sa (3.10) sledi

$$\lambda_2 ah(1-u) + \lambda_2 uah = -h\lambda_2'$$

$$\lambda_2 ah - \lambda_2 ahu + \lambda_2 uah = -h\lambda_2'$$
$$\lambda_2 ah = -h\lambda_2'$$
$$\lambda_2 ah + h\lambda_2' = 0$$
$$(\lambda_2' + a\lambda_2)h = 0$$

Posmatramo dva slučaja:

1.
$$h = 0$$

što baš i nema smisla ili je

2.
$$\lambda_2' + a\lambda_2 = 0$$
$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -a\lambda_2$$
$$\frac{d\lambda_2}{\lambda_2} = -adt$$
$$ln(C^{-1}\lambda_2) = -at$$
$$C^{-1}\lambda_2 = e^{-at}$$
$$\lambda_2(t) = C\ e^{-at}, \quad C \in \mathbf{R}. \tag{3.11}$$

Uvođenjem oznake

$$z = Ak^\alpha u^\beta h^\beta$$

iz (3.6) sledi

$$-\lambda_1 \beta z \frac{1}{h} - C\ e^{-at} a(1-u) = -aC\ e^{-at}$$

$$-\lambda_1 \beta z \frac{1}{h} - Ca\ e^{-at} + Cau\ e^{-at} + aC\ e^{-at} = 0$$

$$-\lambda_1 \beta z \frac{1}{h} + Cau\, e^{-at} = 0$$

$$\lambda_1(t) = \frac{Cauh\, e^{-at}}{\beta z}. \tag{3.12}$$

Ubacivanjem vrednosti (3.12) u (3.5) dobijamo c.

$$c = \left[- \frac{Cauh\, e^{-at}}{\beta z}\, e^{-\rho t} \right]^{-1/\sigma}$$

$$c = \left[- \frac{Cauh}{\beta z\, e^{(a+\rho)t}} \right]^{-1/\sigma}$$

$$c(t) = \left[- C^{-1} \frac{\beta z\, e^{(a+\rho)t}}{auh} \right]^{1/\sigma}. \tag{3.13}$$

Iz jednačine $h' - ah(1-u) = 0$ dobijamo

$$h' - ah + ahu = 0$$

$$\frac{h'}{ah} - 1 + u = 0$$

$$1 - \frac{h'}{ah} = u$$

pa kada uvrstimo vrednost za $u = 1$ sledi

$$h' = 0 \to h = const.$$

Ubacivanjem (3.11) i (3.12) u (3.8), nova jednačina glasi

$$-\lambda_1 \beta z + \lambda_2 ahu = 0$$

$$\lambda_2 ahu = \lambda_1 \beta z.$$

Sada ćemo da diferenciramo po t.

$$\lambda_2' ahu + \lambda_2 ah'u + \lambda_2 ah \frac{du}{dt} = \lambda_1' \beta z + \lambda_1 \beta z'$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\lambda_1' \beta z + \lambda_1 \beta z' - \lambda_2' ahu - \lambda_2 ah'u}{\lambda_2 ah}.$$

Korišćenjem $\frac{du}{dt} = 0$ i $u = 1$ u prethodnoj jednačini dobijamo

$$0 = \frac{\lambda_1' \beta z + \lambda_1 \beta z' - \lambda_2' ah - \lambda_2 ah'}{\lambda_2 ah}$$

$$\lambda_1'\beta z + \lambda_1\beta z' - \lambda_2' a h - \lambda_2 a h' = 0$$
$$\beta[\lambda_1' z + \lambda_1 z'] = a[\lambda_2' h + \lambda_2 h']$$
$$a(\lambda_2 h)' = \beta(\lambda_1 z)'$$
$$\lambda_2 h = C_1\lambda_1 z + C_2,$$

odnosno

$$C\ e^{-at} h = C_1\ C\ \frac{a h e^{-at} z}{\beta z} + C_2.$$

Za vrednosti $C_2 = 0$ i $C_1 = \frac{\beta}{a}$ zadovoljena je jednakost. Dakle, možemo da zaključimo da su moguće vrednosti $\frac{du}{dt} = 0$ i $u = 1$.

Sledi da dolazimo u kontradikciju sa Lukasovim modelom, kod koga su zavisni od vremena i h i k. Pošto u ovome slučaju nema procesa ljudske i fizičke akumulacije, to bi značilo da za pojedinca nije optimalno ponašanje da se edukuje.

Akumulacija vezana za duži ili kraći vremenski rok, zauzima najvažnije mesto u ekonomiji neke zemlje. Njeno značenje se ogleda u smislu vezanom za razvoj i progres koji su presudni kako za sudbinu pojedinačnih kapitala i privredne grane, tako i za državu u celini. Zaslužna je za povećanje osnovnog kapitala koji se poseduje. Sva sredstva iz akumulacionih zaliha se investiraju u dalje poslovanje, razvijanje novih tehnologija, pa se tako postiže povećanje kako obima poslovanja, tako i višeg nivoa životnog standarda. Veoma je bitna za zadovoljavanje razvojnih potreba svake zemlje.

3.4 Modifikacije Lukasovog modela

3.4.1 Nelinearnost stope promene ljudskog kapitala

Sada ćemo posmatrati model kada napravimo modifikaciju jednačine (3.2) koja opisuje proces ljudske akumulacije i to uvođenjem nelinearne komponente. Novi problem glasi

$$J(t) = \int_0^\infty \frac{c(t)^{1-\sigma}}{1-\sigma} e^{-\rho t} dt \to max$$

uz ograničenja

$$k'(t) - Ak(t)^\alpha (u(t)h(t))^\beta + c(t) + nk(t) = 0$$

$$h'(t) - (1-u(t))(ah(t) + \frac{b}{1+e^{\gamma - \delta h}}) = 0.$$

Ideja ove nelinearne komponente zasnovana je na sledećem razmišljanju: u početnim fazama rasta kada je ljudski kapital nizak, pojedincima će možda biti potrebno više vremena da nauče nešto novo. Kako $h(t)$ (polako) raste, dolazimo do tačke "prosvetljenja". Zaključujemo da je ovde skok u stopi rasta ljudskog kapitala.
Parametri b, γ i δ predstavljaju:

- b veličinu skoka,
- γ lokaciju skoka,
- δ formu iznenadnog (neočekivanog) skoka.

Kod skoka mislimo na tačku odakle će promena u akumulaciji ljudskog kapitala povezanog sa obrazovanjem biti mnogo veća nego pre te tačke, to jest: potrošnja malo više vremena na obrazovanje daje veliki porast na ljudski kapital kada poredimo sa povećanjem pre te tačke.

Pri vrednostima $b = 0$ i $\delta = 0$, modifikovana jednačina stope promene ljudskog kapitala ima isti oblik kao i kod Lukasa (3.2). Međutim, ako su $b \neq 0$ i $\delta \neq 0$ tada dobijamo skok u stopi rasta od h. Cilj novog modela je da se ispita postoji li optimalna vrednost $1 - u(t)$ u stabilnom stanju ako je stopa promene ljudskog kapitala nelinearna funkcija.

Kao i kod linearnog slučaja obeležimo sa

$$f = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} e^{-\rho t}$$

$$g_1 = k' - Ak^{\alpha}(uh)^{\beta} + c + nk$$

$$g_2 = h' - (1-u)(ah + \frac{b}{1+e^{\gamma-\delta h}}).$$

Kako su zadovoljeni svi uslovi iz poglavlja 2.4.3., istim postupkom kao u delu 3.3 izračunavanjem vrednosti Ojlerove jednačine, dolazimo do sistema od šest jednačina sa šest nepoznatih.
Zbog napravljene greške u korišćenoj literaturi [15], na strani 32. pod (5), gde sve promenljive zavise od vremena, a to nije uzimano i obzir prilikom izračunavanja diferencijalne jednačine, te ovako dobijeno rešenje za λ_1 nije tačno. Niz drugih grešaka, takođe je zastupljen u daljem radu prilikom izvođenja, pa je nemoguće dati zaključak šta je za pojedinca optimalno ponašanje, zbog nerešivosti problema na ovaj način. Odnosno, ne možemo da ispitamo da li su moguće vrednosti $\frac{du}{dt} = 0$ i $u = 1$.

3.4.2 Prisustvo dinamike u Lukasovom modelu

Kao što je već prikazano u poglavlju 3.3, Lukas (1988) je u svome modelu pretpostavio da je stopa akumulacije ljudskog kapitala linearna tokom vremena. Takođe, model smatra da sektor proizvodeći fizička dobra pokazuje pozitivan spoljašnji efekat koji vodi poreklo iz prosečne stope ljudskog kapitala. Na osnovu ovih pretpostavki ostvaruje se dinamika o kojoj će biti reč, pri maloj modifikaciji originalnog modela.

Dolazi do proširenja modela, tako što se uzima u obzir stopa akumulacije ljudskog kapitala koja je strogo konkavna tokom vremena, zajedno sa eksternalijama ljudskog kapitala u proizvodnji. U Lukasovom modelu (1990) tehnologija ljudskog kapitala predstavljena je postulatom

$$h'(t) = h(t)\gamma(1-u(t))^{1-\alpha}$$

gde je $h(t)$ ljudski kapital, $1-u(t)$ deo ne slobodnog vremena koje svaki pojedinac izdvaja za akumulaciju ljudskog kapitala kroz ne tržišne aktivnosti, γ pozitivni parametar tehnologije i α konstanta koja pripada intervalu (0,1).

Problem sa kojim se svaki pojedinac suočava u decentralizovanoj ekonomiji dat je sa

$$\max_{\{C(t),u(t)\}} \int_0^\infty \left[\frac{C(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right] e^{-\rho t} dt, \tag{3.14}$$

pod uslovima da je

$$K'(t) = AK(t)^\beta (u(t)h(t))^{1-\beta} h_a(t)^\nu - C(t), \tag{3.15}$$

$$h'(t) = h(t)\gamma[1-u(t)]^{1-\alpha}, \tag{3.16}$$

$$C(t) \geq 0, \;\; u(t) \in [0,1], \;\; K(t) \geq 0, \;\; h(t) \geq 0,$$

$$K(0) = K_0, \;\; h(0) = h_0,$$

gde je:
$C(t)$ potrošnja, $K(t)$ fizički kapital, $h_a(t)$ prosečan nivo ljudskog kapitala, $u(t)$ deo izdvojenog vremena za proizvodnju fizičkih roba, A pozitivni parametar tehnologije, β deo fizičkog kapitala, ν pozitivan spoljni parametar akumulacije ljudskog kapitala, ρ pozitivna diskontna stopa i $\sigma > 0$ je inverz elastičnosti intertemporalne supstitucije[5].

[5]engleski: Intertemporal elasticity of substitution (ili elasticity of intertemporal substitution)- elastičnost intertemporalne supstitucije je mera reagovanja stope rasta potrošnje na realne kamatne stope

Funkcija korisnosti

$$U(C(t)) = \frac{C(t)^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma}$$

je CRRA klase i tada je intertemporalna elastičnost supstitucije data sa $\frac{1}{\sigma}$. Niska vrednost za σ (visoka intertemporalna elastičnost) znači da je rast potrošnje osetljiv na promene realne kamatne stope. Visoke vrednosti σ impliciraju neosetljiv rast potrošnje. Kada je $\sigma = 1$ tada funkcija korisnosti postaje $U(C) = ln(C)$.

Problem (3.14) je standardni dinamički problem optimizacije. Promenljive upravljanja predstavljaju $C(t)$ i $u(t)$, a promenljive stanja $K(t)$ i $h(t)$. Pojedinci uzimaju $h_a(t)^\nu$ kao egzogeno datu funkciju vremena.
Pod konzistencijom ravnotežnog stanja podrazumevamo $h = h_a$.
Standardnim postupkom kao i u delu 3.3 dolazimo do rešenja.

Pošto je cilj da pokažemo da višestruke i globalno neodređene stope rasta mogu postojati u Lukasovom dvo-sektorskom modelu, uvodimo pojam BGP.

U daljem radu, posmatraćemo da:

- u modelu ravnotežne putanje konvergiraju ka jedinstvenoj dugoročnoj **uravnoteženoj putanji rasta**, koju u daljem radu obeležavamo sa **BGP (ili stacionarno stanje ravnoteže)**.
  Konkretno u ovom slučaju, ravnoteža konkurencije sastoji se od putanja $\{K(t), h(t), C(t), u(t)\}$, pri čemu varijable $K(t), h(t)$ i $C(t)$ rastu po konstantnoj stopi, a $u(t)$ je konstantno.

Fokusiraćemo se na:

- slučajeve u kojima ekonomija prikazuje unutrašnji BGP, odnosno važi $0 < u(t) = u^* < 1$.

Bavimo se postojanjem dva BGP-a. Sledeća sva tri uslova moraju biti ispunjena, da bi bila zadovoljena dinamika ravnoteže ovoga modela, kao i postojanje dva BGP-a. Dakle, važe uslovi:

1. akumulacija ljudskog kapitala mora biti strogo konkavna u odnosu na vreme,

2. prosečan eksternalitet ljudskog kapitala mora postojati u proizvodnji,

3. elastičnost intertemporalne supstitucije mora biti dovoljno velika.

U suprotnom, dinamički sistem definiše ravnotežne putanje prikazujući jedinstven BGP. Svojstva stabilnosti ovoga jedinstvenog BGP-a razlikovaće se od toga, koji od poslednja dva uslova nije zadovoljen. Kada neki od druga dva uslova nije zadovoljen, a striktna konkavnost ljudskog kapitala nije verovatna, novi BGP je *lokalno* određen.

Podprostor parameta za koje jedinstveni i lokalno određen BGP postoji, u ovome modelu je veći nego kod Lukasa (1988). Sada ćemo dati primer za koje vrednosti parametara po Lukasu (1988, 1990), Muliganu i Sala-i-Martinu (1993) postoji jedinstven BGP, a kada imamo dva BGP-a.

(a) Za vrednosti parametara $A = 1, \beta = 0.25, \nu = 0.36, \alpha = 0.2, \gamma = 0.1, \rho = 0.065$ i $\sigma = 2$ jedinstveni unutrašnji BGP definisan je sa $u^* = 0.845382$.

(b) Međutim, ako su vredsti za $A = 1$, $\beta = 0.25$, $\nu = 0.36$, $\alpha = 0.2$, $\gamma = 0.055$, $\rho = 0.065$, $\sigma = 0.15$ dobijamo da su dva unutrašnja BGP-a definisana sa $u_1^* = 0.617063$ i $u_2^* = 0.503703$.

Iz datog skupa parametara pod (b), zaključujemo da faktor skale γ mora biti dovoljno mali da bi obezbedio postojanje opšteg, unutrašnjeg BGP-a. Dakle, razmatramo isti skup parametara kao pod (a), ali ćemo sad promeniti vrednosti za σ i γ tj., $\sigma = 0.15$ i $\gamma = 0.055$. Striktna konkavnost akumulacije ljudskog kapitala i eksternalije u proizvodnji su neophodni uslovi za postojanje dva unutrašnja BGP-a.

Dakle, ako pretpostavimo da $\alpha \in (0, 1)$ i $\nu > 0$, inverz elastičnosti intertemporalne supstitucije je odlučujući parametar koji određuje broj unutrašnjih BGP-a, pod uslovom da je parametar γ kontrolisan da obezbedi postojanje unutrašnjeg BGP-a. Znači, kada je σ dovoljno veliko (malo) ekonomija ima jedan (dva) unutrašnji BGP.

Numerički prikaz, kao i definisanje podprostora kojima pripada parametar $\theta \equiv \{A, \gamma, \rho, \sigma, \nu, \alpha, \beta\}$, sa odgovarajućim ograničenjima, detaljno je opisan u [16], str. 568-570.

U literaturi o životnom ciklusu zarada[6], upotrebljavalo se da je elastičnost akumulacije ljudskog kapitala u odnosu na vreme manja od 1. Istraživanje životnog ciklusa zarada koje je sproveo Rosen (1976) na grupi sačinjenoj od muške srednje škole u SAD i diplomaca u periodu 1960-1970. godine, procenjuje da je ova elastičnost 0.65. Lukas (1990) je koristeći podatke SAD-a u periodu 1955-1985. godine, procenio vrednost za takvu elastičnost od 0.8.

[6]engleski: life-cycle earnings

Pokazali smo da su višestruke dugoročne stope rasta, takođe moguće u Lukasovom modelu (1988), bez uzimanja u obzir slobodno vreme u funkciji korisnosti ili eksternalije u sektoru akumulacije ljudskog kapitala. Ove vrednosti za

- stopu rasta prihoda po glavi stanovnika g^*,
- stopu rasta ljudskog kapitala g_h^*,
- stopu najma fizičkog kapitala R^*,
- stopu štednje s^*

u slučaju pod

(a) iznose: $g^* = 0.033$, $g_h^* = 0.022$, $R^* = 0.117$, $s^* = 0.200$,

(b) iznose: $g_1^* = 0.038$ i $g_2^* = 0.046$, $g_{h1}^* = 0.026$ i $g_{h2}^* = 0.031$, $R_1^* = 0.071$ i $R_2^* = 0.072$, $s_1^* = 0.452$ i $s_2^* = 0.564$.

Uzećemo opštu definiciju ukupne štednje. Pretpostavljamo da je štednja u proporciji sa autputom koji nije konzumiran. Uzimajući u obzir Muligana i Sala-i-Matrina (1993), dobijamo proširenu meru autputa dodavajući proizvodnju ljudskog kapitala pomnoženu sa skrivenim troškovima ljudskog kapitala po jedinici fizičkog proizvoda.
Dakle, $s(t) = 1 - \frac{C(t)}{Q(t)}$, gde je $Q(t) = Y(t) + \frac{\lambda_2(t)}{\lambda_1(t)}\gamma(1-u(t))^{1-\alpha}h(t)$.

Predviđanja Lukasovog modela (1988) bila su da su stope rasta u državama sa istim osnovama sklone ka konvergenciji na duge staze, dok nivoi njihovih prihoda mogu biti jednaki jedino ako one imaju iste početne uslove.

Mnogi naučnici tokom svojih istraživanja izvodili su razne zaključke vezane za stope rasta i putanje koje teže ka BGP-u, a neke od njih ćemo sada predstaviti.

Benhabib i Perli (1994) i Xie (1994) pokazali su da ravnoteža može biti odrađena u smislu postojanja neprekidnosti ravnotežnih putanja koje konvergiraju ka jedinstvenoj dugoročnoj uravnoteženoj putanji rasta. Takođe, Benhabib i Perli (1994) su pokazali da ukoliko sektor ljudskog kapitala prikaže rast prinosa tokom vremena, postojanje globalne neodređenosti je isto moguća, u smislu da može postojati niz početnih uslova pod kojima postoji više ravnotežnih putanja koje vode do različitih BGP-a. Dakle, realizacija specifične dugoročne stope rasta zavisiće od početnih odluka pojedinaca, koje vode ka samoispunjavanju zamišljenih ciljeva.

Ladron de Guevara, Ortigueira i Santos (1997) uključujući slobodno vreme u funkciju korisnosti, postižu postojanje višestrukosti BGP-a. Ovaj model je predstavio nejednakost dugoročnih stopa rasta koje zavise od početnih zaduživanja fizičkog i ljudskog kapitala. Zato u ovom slučaju istorija određuje sudbinu privrede.

Levine i Renelt (1992) prikazuju nedostatke empirijskih rezultata, objašnjavajući da razlika između stopa rasta dve države može postojati zbog postojanja institucionalnih i političkih razlika.

Veliki broj istraživanja se sprovodi i dalje na temu postojanja dinamike u endogenim modelima rasta, kao i koji faktori utiču na postojanje višestrukih stopa rasta i ravnotežnih stanja.

4

Dodatak

U ovoj glavi navodimo neke osnovne pojmove matematičke analize koje smo koristili u radu. Da bi bolje razumeli materiju izloženu u drugoj glavi, kao i rešavane primere, prvo ćemo predstaviti pojmove iz metričkih i normiranih prostora, a zatim i postupak za rešavanje homogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima i nehomogene linearne jednačine.
Korišćena literatura [9] i [19].

4.1 Metrički i normirani prostori

Struktura X *vektorski prostor* nad poljem realnih brojeva $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ ako je $(X, +)$ komutativna grupa i ako je definisano preslikavanje $\mathbf{R} \times X \to X$ tako za svako $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $x, y \in X$ važi:

1. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,
2. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,
3. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,
4. $1x = x$,

pri čemu je slika para (α, x) označena sa αx.

Metrički prostor je uređen par (X, d), gde je X neprazan skup, a $d : X \times X \to \mathbf{R}$ je funkcionela za koju važi:

1. $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$,
2. $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$.

3. $d(x,y) = d(y,x),\ \forall x,y \in X,$

4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z),\ \forall x,y,z \in X.$

Najznačajniji primer metričkog prostora je R^n sa euklidskom metrikom

$$d(x,y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Prostor $(X, \|\cdot\|)$ je normiran ako preslikavanje $\|\cdot\| : X \to \mathbf{R}$ ispunjava sledeće uslove:

1. $\|x\| \geq 0,\ \forall x \in X.$

2. $\|x\| = 0$ ako i samo ako $x = 0$.

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,\ \forall x,y \in X.$

4. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|,\ \forall x \in X$ i $\forall \alpha \in \mathbf{R}.$

Tada se $\|x\|$ zove norma od x, a $\|\cdot\|$ norma u X.
Svaki normiran prostor je metrički, jer normom možemo definisati metriku na sledeći način:

$$d(x,y) := \|x - y\|,\ \forall x,y \in X.$$

Obrnuto ne mora da važi. Broj $\|x - y\|$ se naziva rastojanje između vektora x i y.

Prostor $C[a,b]$, neprekidnih funkcija nad intervalom $[a,b]$ je vektorski prostor sa normom

$$\|y\| = \max_{x\in[a,b]} |y(x)|.$$

Prostor $C^1[a,b]$, neprekidno diferencijabilnih funkcija nad intervalom $[a,b]$ je vektorski prostor sa normom

$$\|y\|_1 = \max_{x\in[a,b]} |y(x)| + \max_{x\in[a,b]} |y'(x)|.$$

Dakle ako se funkcije y_1 i y_2 po normi $\|\cdot\|_1$ razlikuju jedna od druge za veličinu koja je manja od ε, $\|y_1 - y_2\|_1 < \varepsilon$ onda je

$$\max_{x\in[a,b]} |y_1(x) - y_2(x)| < \varepsilon \quad i \quad \max_{x\in[a,b]} |y_1'(x) - y_2'(x)| < \varepsilon.$$ [1]

Posmatranjem uopštenog slučaja možemo da zaključimo da je prostor $C^n[a,b]$, n puta neprekidno diferencijabilnih funkcija nad intervalom $[a,b]$ takođe jedan normiran vektorski prostor.

[1] Barem jedna od veličina $\max_{x\in[a,b]} |y_1(x) - y_2(x)| < \varepsilon$ i $\max_{x\in[a,b]} |y_1'(x) - y_2'(x)| < \varepsilon$ je manja od $\varepsilon/2$.

Veoma je bitno uočiti razliku između pojmova "jakog" i "slabog" ekstrema u varijacionom računu. Sada ćemo objasniti i zašto.
Pošto je $C^1[a,b] \subset C[a,b]$ normu elementa $y \in C^1[a,b]$ možemo meriti u oba prostora. Za zadato $\varepsilon > 0$ iz $\|y\|_1 < \varepsilon$ sledi $\|y\| < \varepsilon$, dok obrnuto ne mora da važi. Znači ako $y_1, y_2 \in C^1[a,b]$ i ako je njihovo međusobno rastojanje u normi $\|\cdot\|_1$ manje od $\varepsilon > 0$, onda je i $\|y_1 - y_2\| < \varepsilon$.

Neka je X normiran vektorski prostor.

1. Niz vektora $\{x_n\}$ u X konvergira ka $x \in X$ ako imamo:

   $$\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0, \textit{ odnosno ako } \forall\varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \forall n \geq N,\ \|x - x_n\| < \varepsilon.$$

   U ovom slučaju pišemo $x_n \to x$ odnosno $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

2. Niz vektora $\{x_n\}$ u X je Košijev niz u X ako imamo:

   $$\lim_{m,n\to\infty} \|x_m - x_n\| = 0.$$

   Preciznije, ovo znači da $\forall\varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \forall m, n \geq N,$ $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

Svaki konvergentan niz u normiranom prostoru je Košijev niz. Ali obrnuto ne važi u opštem slučaju.

Definicija 4.1.1. *Tačka $\tilde{y} \in Y$ je tačka apsolutnog (globalnog) minimuma (maksimuma) funkcionele J nad skupom $Y \subseteq \mathbf{R}^d$ ako je $J(\tilde{y}) \leq J(y)$ $(J(\tilde{y}) \geq J(y))$ za sve $y \in Y$. Veličina $J(\tilde{y})$ naziva se minimalna (maksimalna) vrednost funkcionele J nad Y. Skup svih tačaka minimuma (maksimuma) ćemo označavati sa Y_* (Y^*). Tačka $\tilde{y} \in Y$ je tačka lokalnog minimuma (maksimuma) funkcionele J nad skupom Y ako postoji $r > 0$ tako da je $J(\tilde{y}) \leq J(y)$ $(J(\tilde{y}) \geq J(y))$ za sve $y \in Y \cap L_r(\tilde{y})$.*

4.2 Homogena linearna jednačina sa konstantnim koeficijentima

Linearna jednačina prvog reda glasi

$$y' + ay = 0, \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

gde je a konstanta. Njeno rešenje je oblika

$$y_1 = c_1\, e^{-ax}$$

na $(-\infty, \infty)$.
To rešenje postoji na $(-\infty, \infty)$ i za jednačinu višeg reda, odnosno

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_n y' + a_0 y = 0 \tag{4.1}$$

gde je a_i, $i = 1, 2, ..., n$ konstanta. Sva rešenja problema (4.1) su eksponencijalne funkcije.

Posmatrajmo slučaj kada je jednačina drugog reda, to jest

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{4.2}$$

- Karakteristična jednačina

Ako potražimo rešenje u obliku $y = e^{mx}$, tada je $y' = me^{mx}$ i $y'' = m^2 e^{mx}$ pa jednačina (4.2) postaje

$$am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \qquad ili \qquad e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0.$$

Zbog realne vrednosti od x, e^{mx} nikada ne može biti nula, pa zaključujemo da mora biti $am^2 + bm + c = 0$ da bi bila zadovoljena jednakost.
Jednačinu

$$am^2 + bm + c = 0 \tag{4.3}$$

zovemo **karakterističnom** (pomoćnom) **jednačinom** diferencijalne jednačine (4.2).
Sada ćemo posmatrati tri slučaja karakteristične jednačine, odnosno kada ima različite realne korene, jednake realne korene i konjugovano kompleksne korene.

1^o slučaj Koreni su realni i različiti

Ako karakteristična jednačina ima dva različita realna korena m_1 i m_2, pronalazimo dva rešenja $y_1 = e^{m_1 x}$ i $y_2 = e^{m_2 x}$. Opšte rešenje od (4.2) u ovome slučaju izgleda

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}. \tag{4.4}$$

2^o slučaj Koreni su realni i jednaki

Kada su oba korena jednaka, $m_1 = m_2$, tada imamo jedno eksponencijalno rešenje $y_1 = e^{m_1 x}$. Opšte rešenje (4.2) je

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_2 x}. \tag{4.5}$$

3^o slučaj Koreni su konjugovano kompleksni

Ako su m_1 i m_2 kompleksni, tada ih pišemo

$$m_1 = \alpha + i\beta \quad i \quad m_2 = \alpha - i\beta$$

gde su $\alpha, \beta > 0$ realni i $i^2 = -1$.
Nema uobičajene razlike između ovog slučaja i 1^o slučaj, pa je

$$y = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Koristimo Ojlerovu formulu:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\ \sin\theta,$$

gde je θ realni broj. Sledi iz ove formule da je

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x \quad i \quad e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x \tag{4.6}$$

gde koristimo $\cos(-\beta x) = \cos\beta x$ i $\sin(-\beta x) = -\sin\beta x$.

$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = 2\cos\beta x \quad i \quad e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2i\sin\beta x$$

Kako je

$$y = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$$

rešenje (2), za izbore konstanti $C_1 = C_2 = 1$ i $C_1 = 1$, $C_2 = -1$ dobijamo dva rešenja:

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x} \quad i \quad y_2 = e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Sledi da je

$$y_1 = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) = 2e^{\alpha x}\cos\beta x$$

i

$$y_2 = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) = 2ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Dakle, opšte rešenje je

$$y = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x). \tag{4.7}$$

4.3 Nehomogena linearna jednačina

Da bi dobili opšte rešenje nehomogene linearne jednačine moramo imati poznate dve stvari:

- rešenje homogenog dela, y_h
- partikularo rešenje, y_p, nehomogene jednačine.

Rešenje homogenog dela, y_h, tražimo u zavisnosti od korena karakteristične jednačine, to jest kao neko od 1^o, 2^o ili 3^o slučaja iz prethodnog izlaganja.

Opšte rešenje nehomogene jednačine je

$$y = y_h + y_p.$$

Posmatraćemo nehomogenu jednačinu oblika

$$ay'' + by' + cy = g(x) \tag{4.8}$$

gde su a, b, c konstante.
Metoda neodređenih koeficijenata nije ograničena na jednačinu drugog reda, ograničena je na nehomogenu linearnu jednačinu u kojoj su

- koeficijenti konstantni i
- $g(x)$ je konstanta k, polinomna funkcija, eksponencijalna funkcija $e^{\alpha x}$, $\sin\beta x$, $\cos\beta x$, ili konačne sume i proizvodi ovih funkcija.

Metoda neodređenih koeficijenata nije prihvatljiva na jednačine oblika (4.8) kada je $g(x) = lnx,\ g(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = tanx,\ g(x) = \sin^{-1} x$ itd.

Skup funkcija sačinjenih od konstanti, polinoma, eksponencijalnih $e^{\alpha x}$, sinusa i kosinusa ima značajnu osobinu da su izvodi njihovih suma i proizvoda opet sume i proizvodi konstanti, polinoma, eksponencijalnih $e^{\alpha x}$, sinusa i kosinusa. Kako linearna kombinacija izvoda $ay_p''+by_p'+cy_p$ mora biti jednaka sa $g(x)$, onda je razumno pretpostaviti da je y_p istog oblika kao $g(x)$.

Dakle ako je $g(x)$ oblika

1. $g(x) = P_n(x)\, e^{mx}$

   gde je

   - P_n polinom stepena n, $m \in \mathbf{R}$
   - m je koren karakteristične jednačine višestrukosti k, $k \in \{0, 1, 2\}$

- Rešenje je oblika
$$y_p(x) = Q_n(x)x^k e^{mx}$$
Q_n je polinom stepena n čije koeficijente određujemo metodom jednakih koeficijenata ("ubacivanjem" pretpostavljenog rešenja u jednačinu).
- ako m nije koren karakteristične jednačine, onda je on višestrukosti nula, $k = 0$.

2. $g(x) = P_n(x)\, e^{\alpha x}\ \cos\beta x$ ili $g(x) = P_n(x)\, e^{\alpha x}\ \sin\beta x$

   - P_n polinom stepena n, $\alpha \in \mathbf{R}$

   U ovom slučaju rešenje tražimo u obliku
$$y_p(x) = x^k e^{\alpha x}(Q_n(x)\cos\beta x + Q_n^*(x)\sin\beta x)$$
   gde je k višestrukost korena $m = \alpha + i\beta$ (dakle $k = 0$ ili $k = 1$), a Q_n i Q_n^* odgovarajući polinomi stepena n.

3. Ako je $g(x)$ zbir funkcija gore navedenog oblika, onda se partikularna rešenja određuju ponaosob za svaki sabirak na gore opisan način.

Jednostavna partikularna rešenja		
	$g(x)$	*Oblik za* y_p
1.	1 (neka konstanta)	A
2.	$5x + 7$	$Ax + B$
3.	$3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
4.	$x^3 - x + 1$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
5.	$\sin 4x$	$A\cos 4x + B\sin 4x$
6.	$\cos 4x$	$A\cos 4x + B\sin 4x$
7.	e^{5x}	Ae^{5x}
8.	$(9x - 2)e^{5x}$	$(Ax + B)e^{5x}$
9.	$x^2 e^{5x}$	$(Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$
10.	$e^{3x}\sin 4x$	$Ae^{3x}\cos 4x + Be^{3x}\sin 4x$
11.	$5x^2\sin 4x$	$(Ax^2 + Bx + C)\cos 4x + (Dx^2 + Ex + F)\sin 4x$
12.	$xe^{3x}\cos 4x$	$(Ax + B)e^{3x}\cos 4x + (Cx + D)e^{3x}\sin 4x$

Zanimljiv primer je ako imamo diferencijalnu jednačinu

$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

Rešenje homogenog dela je $y_h = c_1e^x + c_2xe^x$.
Pretpostavka da je $y_p = Ae^x$ biće pogrešna pošto je e^x rešenje homogene jednačine $y'' - 2y' + y = e^x$. Ni sa pretpostavkom oblika $y_p = Axe^x$ partikularno rešenje ne možemo pronaći pošto je ovo opet sadržano u y_h.
Dakle, novi pokušaj je sa oblikom $y_p = Ax^2e^x$. Zamenom u datu diferencijalnu jednačinu vrednosti

$$2Ae^x = e^x \quad dobijamo \quad A = \frac{1}{2}.$$

Stoga je partikularno rešenje $y_p = \frac{1}{2}x^2e^x$.

Možemo izvesti uopšteno pravilo:
Ako neko y_{p_i} sadrži uslove koji dupliraju uslove za y_h, tada y_{p_i} mora biti pomnoženo sa x^n, gde je n najmanja pozitivna vrednost koja eliminiše ovo dupliranje.

Zaključak

Kroz rad smo se upoznali sa modelima neoklasičnog i endogenog ekonomskog rasta. Detaljnom analizom Solouovog modela videli smo uticaj pojedinih faktora na privredni rast. S obzirom na to da je jedino tehnološki razvoj u ovome modelu dovodio do povećanja stope ekonomskog rasta, a on je egzogeni faktor, to je bio veliki nedostatak, ali i povod za nastanak teorija endogenog rasta. Upravo tada dolazi i do znatno veće uloge kapitala, koji se tumači u širokom smislu. Uključivanjem ljudskog kapitala u Kob-Daglasovu funkciju, Menkju, Romer i Vejl navode obrazovanje kao kategoriju odgovornu za objašnjenje razlika u BDP-u između zemalja.

U poglavlju varijacioni račun predstavili smo Ojlerovu jednačinu koja zajedno sa varijacionim problemom sa ograničenjem u vidu diferencijalnih jednačina, predstavlja osnovni matematički alat za dobijanje rešenja odgovarajućih promenljivih u Lukasovom modelu. Videli smo da mala promena u ograničenju, kao i dodavanje određenih parametara, menja celi tok dalje analize modela. Ova činjenica je najviše došla do izražaja prilikom objašnjenja modifikovanog Lukasovog modela i to uvođenjem pretpostavki koje dovode do postojanja dve uravnotežene putanje rasta, ali ujedno i do postojanja višestrukih dugoročnih stopa rasta.

Primena matematike u ekonomiji dolazi do velikog izražaja, kao što je već izloženo. Osnovna ideja rada zasnivala se upravo na činenici da se u prvoj glavi upoznamo sa makroekonomijom, pa pomoću varijacionog računa rešimo glavni problem, a to je analiza Lukasovog modela i dobijene rezultate interpretiramo sa ekonomskog stanovišta.

Literatura

[1] P. Aghion, P. Howitt, *The Economics of Growth*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 2009.

[2] Michael D. Intriligator, *Mathematical Optimization and Economic Theory*, University of California, Los Angeles, 2002.

[3] O. Vukoja, *Odrednice ekonomskog rasta zemalja srednje i istočne Evrope*, Ekonomski pregled, 2008.

[4] M. Albijani, *Intelektualni kapital: uticaj na konkurentnost i ekonomski rast*, Službeni glasnik, 2011.

[5] M. Burda, C. Wyplosz, *Makroekonomija*, Ekonomski fakultet, Beograd, Centar za izdavačku delatnost, 2012.

[6] K. Josifidis, *Makroekonomija*, Futura publikacije, Novi Sad, 2006.

[7] P. Aghion, P. Howitt, *Endogenous Growth Theory*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 1999.

[8] Manfred M. Fischer, *A spatial Mankiw-Romer-Weil model: Theory and evidence*, Vienna University of Economics and Business, 2009.

[9] N. Teofanov, Lj. Gajić, *Predavanja iz optimizacije*, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, TEMPUS CD JEP 17017-2002, 2006.

[10] B. Čekrlija, *Vremeplovom kroz matematiku*, Grafomark, 2001.

[11] A. Cherkaev, E. Cherkaev, *Calculus of Variations and Applications*, Lecture Notes, Draft, 2003.

[12] A. Praščević, *Poslovni ciklusi u teoriji Nove klasične makroekonomije*, Ekonomski fakultet, Beograd

[13] S. Pantelić, *Među najboljima u svetu ekonomske nauke- Robert E. Lukas*, Pregledni naučni članak, Udruženje banaka Srbije, jun 2012.

[14] P. Đukić, *Nova ekonomija i društvo zasnovano na znanju: u svetlu koncepta održivog razvoja*[2], Univerzitet u Beogradu, Tehnološko-Metalurški fakultet Beograd

[15] R. Arora, *Analysis of Economics Models Through Calculus of Variations*, Department of Mathematics, Western Kentucky University, Bowling Green, Kentucky, 2005.

[16] J. Alonso-Carrera, *More on the Dynamics in the Endogenous Growth Model with Human Capital*, University of Vigo, Spain, 2001.

[17] Z. Kordej-De Villa, *Privredna kretanja i ekonomska politika*, Vol.9 No.73- članak Ekonomski rast i održivi razvitak, Ekonomski institut, Zagreb, april 1999.

[18] S. Cvetanović, S. Obradović, M. Đorđević, *Hipoteza o konvergenciji u endogenim teorijama rasta*, Časopis "Ekonomske teme", Godina izlaženja XLIX, br. 1, str. 1-13, Univerzitet u Nišu, Ekonomski fakultet, 2011.

[19] Dennis G. Zill, *A First Course in Differential Equations*, Loyola Marymount University, Brooks/Cole, 2001.

[20] A. Kovačević, *Hamiltonova funkcija u modelima ekonomskog rasta*, master rad, Univerzitet u Novom Sadu, 2013.

[21] J. Mitrović, *Varijacioni račun i modeli rasta*, master rad, Univerzitet u Novom Sadu, 2011.

[22] *Cobb-Douglas production function*, http://en.wikipedia.org/wiki/Cobb

[23] *The CES Production Functions*, http://docentes.fe.unl.pt/ jamador/Macro/cobb-douglas.pdf

[2]Ovaj rad rađen je u okviru projekta Modeliranje razvoja i integracije Srbije u svetske tokove u svetlu ekonomskih, društvenih i političkih gibanja, evidencioni broj 179038, koji finansira Ministarstvo za nauku i tehnološki razvoj Republike Srbije

[24] *The CES Production Functions*, http://docentes.fe.unl.pt/ jamador/-Macro/CESProdFn.pdf

[25] *Adam Smith*, http://en.wikipedia.org/wiki/Adam-Smith

Biografija

Ivana Rabuzin je rođena 04.12.1989. godine u Bihaću. Nakon završene Osnovne škole "Jovan Dučić" u Petrovaradinu, upisala je Gimnaziju "Jovan Jovanović Zmaj", prirodno-matematički smer, u Novom Sadu, koju završava 2008. godine. Iste godine upisala je osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer matematika finansija. Nakon završenih osnovnih studija, u oktobru 2012. godine upisuje master studije na istom fakultetu i usmerenju. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom, čime je stekla uslov za odbranu master rada.

Već nekoliko godina bavi se brazilskim plesovima, a učesnik je mnogobrojnih manifestacija i radionica organizovanih povodom ovih događaja.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Ivana Rabuzin
AU

Mentor: dr Nenad Teofanov
ME

Naslov rada: Lukasov model ekonomskog rasta i varijaciona formulacija
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezk izvoda: s / en
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2014
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (4/79/2/1/9/0/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)
FO:

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Optimizacija
ND

Ključne reči: modeli ekonomskog rasta, funkcija proizvodnje, varijaciona formulacija, Ojlerova jednačina, diferencijalne jednačine, akumulacija kapitala, stopa rasta
PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Ovaj rad se bavi modelima ekonomskog rasta i analizom Lukasovog modela pomoću varijacionog računa. Predstavljamo neke od modela neoklasičnog i endogenog rasta, njihove osobine i uticaje pojedinih faktora na privredni rast. Zatim objašnjavamo pojam varijacionog računa, Ojlerovu jednačinu i predstavljamo varijacione probleme sa ograničenjima. Treće poglavlje počinjemo uvodnom pričom o Robertu Lukasu, njegovim interesovanjima i dajemo analizu modela i rešenje. Zatim predstavljamo dve modifikacije Lukasovog modela.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 10.04.2014.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
ČK

Predsednik: dr Ljljana Gajić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Sanja Rapajić, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor: dr Nenad Teofanov, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Ivana Rabuzin
AU

Mentor: dr Nenad Teofanov
MN

Title: Lucas model of economics growth and variational formulation
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: s / en
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2014
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
PP

Physical description: (4/79/2/1/9/0/0)(chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Optimization
SD

Subject/Key words: models of economics growth, production function, variational formulation, Euler equations, differential equation, capital accumulation, rate of growth
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: This master thesis is about models of economic growth and analyse Lucas model using calculus of variations. We present some of the neoclassical and endogenous models of growth, their characteristics and effects of some factors on economic growth. Then, explain concept calculus of variations, Euler equation and we present variational problems with constraints. The third chapter will begin with introduction about Robert Lucas, his interesting, and we gave analysis model and solution. Then we present two modifications of Lucas model.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 10.04.2014.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: dr Ljljana Gajić, full professor at Faculty of Science in Novi Sad
Member: dr Sanja Rapajić, associate professor at Faculty of Science in Novi Sad
Mentor: dr Nenad Teofanov, full professor at Faculty of Science in Novi Sad