UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU
I INFORMATIKU

PRIMENA REDOVA ČEKANJA U SAOBRAĆAJU

-master rad-

Mentor: prof. dr Danijela Rajter-Ćirić

Student: Ivana Mirazović 477m/13

Novi Sad,

2018.

Sadržaj

Predgovor 3

1. Uvodni pojmovi 5

1.1. Pregled raspodela 5

1.1.1. Binomna raspodela 5

1.1.2. Poasonova raspodela 6

1.1.3. Eksponencijalna raspodela 7

1.2. Stohastički procesi 8

1.2.1. Pojam stohastičkog procesa 8

1.2.2. Lanci Markova 10

1.2.3. Poasonov proces 15

2. Teorija redova čekanja 17

2.1. Struktura sistema opsluživanja 19

2.2. Osnovni model teorije redova po principu rađanja i umiranja 22

2.3. Sistemi masovnog opsluživanja M/M/1 30

2.3.1. Vremenski zavisno ponašanje 31

2.3.2 Ograničeno ponašanje 32

2.3.3. Vreme čekanja klijenta 34

2.4. Sistemi masovnog opsluživanja M/M/1/N 38

2.5. Sistemi masovnog opsluživanja M/M/C 43

2.6. Sistem masovnog opsluživanja M/M/C/N 49

3. Primena redova čekanja u saobraćaju 51

3.1. Redovi čekanja i analiza saobraćajnog toka 53

3.2. Optimizirani raspored za rute javnog prevoza putnika 58

4. Simulacije 61

4.1. Simulacija redova čekanja u saobraćaju 61

4.1.1. Simulacija redova čekanja na primeru naplatne rampe 62

Zaključak 68

Literatura 69

Predgovor

Redovi čekanja su deo našeg svakodnevnog života. Svakodnevno čekamo u redu da platimo na kasi u samoposluzi, da platimo račune u pošti, da podignemo pare u banci, da uđemo u autobus, na semaforima, drugim rečima jedinice koje zahtevaju opsluživanje staju u red, i u određenom vremenskom intervalu po određenom pravilu jedinice se opslužuju.
U svakoj profesiji i u svim preduzećima postoji određena vrsta čekanja u redu na određenu nabavku, popravku mašina, koja može znatno usporiti proizvodnju, na transport robe. Takođe kašnjenje i velike gužve mogu uzrokovati gubitak nekih klijenata. Redovi čekanja pomažu objektima i kompanijama da pružaju usluge na miran način. Formiranje reda je veoma korisno za društvo ako može da se organizuje tako da jedinica koja čeka na uslugu i onaj koji vrši uslugu imaju najveću korist. Avioni koji čekaju na sletanje ili poletanje mogu da poremete zacrtane planove, redovi čekanja putnika na avio terminalima, kao i brodovi koji čekaju na pristizanje u luku radi utovara ili istovara robe, putnika.

Teorija redova čekanja proučava redove ovakvih čekanja za šta koristi različite matematičke modele da opiše stanja u praksi, što će biti prikazano kroz ovaj rad. Da bi došlo do što manjih troškova i da se smanje druge neželjene posledice, pomoću matematičkih modela se traže optimalna rešenja. Odnosno matematičkim formulama i graficima se opisuje ponašanje različitih sistema, pod različitim okolnostima i predviđa vreme čekanja u tim okolnostima. Ova teorija nastoji da pomoću određenih matematičkih modela, savremenih tehnika, softvera dođe do optimalnih rešenja problema u praksi da bi se odvijalo efikasno opsluživanje i da bi se dobili reprezentativni i pouzdani podaci o parametrima stanja posmatranog sistema, da se odredi broj lica ili objekata potrebnih za opsluživanje jedinica(klijenata). Analiza sistema redova čekanja podrazumeva analizu ulaznih jedinica, njihovog vremena čekanja, broja jedinica u redu, vreme za koje su usluženi i analiza izlaza jedinice iz sistema. Danas, u celom svetu, sistem protoka je koncipiran tako da minimizira vreme čekanja jer se na taj način smanjuju kapitalni troškovi. Glavni problem s kojim se susreće menadžment koji vrši uslugu je da predvidi i upravlja redovima čekanja, ne samo zbog vremena koje klijent provede čekajući već zbog njegove sveukupne percepcije koja je povezana sa opštim nivoom zadovoljstva usluga. Cilj je da se obezbedi što veći nivo zadovoljstva klijenta i što niži troškovi menadžmenta. Moraju se razmatrati svi faktori koji utiču na vreme čekanja. Kratko vreme čekanja retko stvara problem, međutim za duže vreme čekanja potrebno je planirati saobraćajni tok na odgovarajući način i naći odgovarajuća rešenja.

Gustina saobraćaja je veliki problem u mnogim gradskim područjima tako što povećava vreme putovanja, zagađenje vazduha, potrošnju goriva jer se vozila ne mogu kretati efikasno. Modelom teorije redova na protok saobraćaja se može istražiti kako da se saobraćajna gužva svede na minimum.

Uz razvoj ekonomije, funkcija vozila takođe povećava obim svoje primene u svetu. Zbog toga je uobičajena pojava u saobraćaju čekanje. Raskrsnica je glavna koncentrisana oblast ljudi i vozila, a takođe to je jedna infrastrukturna izgradnja koja povezuje puteve tako da budu umreženi. U svakodnevnom životu, zagušenje saobraćaja odgovara direktno dešavanjima na raskrsnici. Jasno je da je raskrsnica od velikog značaja za saobraćajni kapacitet i sigurnost. Zbog toga je značajno proučiti tok saobraćaja, poboljšati preobilni saobraćaj i doći do najoptimalnijih rešenja za redove čekanja u saobraćaju za društvo.

Danas teorija redova čekanja ima široku primenu u kontroli saobraćaja. Koristimo je pri ispitivanju kašnjenja vozila, kapaciteta saobraćaja, za upravljanje saobraćajnim objektima poput autobuskih stanica, čekanje na semaforu i slično.

U prvoj glavi ćemo se upoznati sa raspodelama koje koristimo za predviđanje vremenskog intervala u redu čekanja, sa osnovnim pojmom stohastičkog (slučajnog) procesa, Markovljevim lancima i slučajem lanca Markova sa neprekidnim vremenom, tj. Poasonovim procesom, u drugoj glavi se upoznajemo sa modelima redova čekanja. U sledećem poglavlju ćemo detaljnije razmotriti redove čekanja u saobaćaju, a u poslednjoj, četvrtoj glavi uraditi simulaciju na primeru.

***

Ovu priliku koristim da se zahvalim svom mentoru prof. dr Danijeli Rajter Ćirić na inspirativnim predavanjima, prenesenom znanju tokom studiranja, a posebno na izdvojenom vremenu, pruženoj podršci i sugestijama tokom izrade master rada.

Takođe zahvaljujem se članovima komisije dr Sanji Rapajić i dr Dori Seleši i brojnim drugim profesorima koji su se nizali tokom studija i inspirisali me, motivisali i obogatili moje znanje.

Najveću zahvalnost dugujem svojoj porodici na bezgraničnoj ljubavi, pomoći, razumevanju i podršci.

Hvala!

Ivana Mirazović

1. Uvodni pojmovi

Literatura korišćena pri izradi ovog poglavlja rada se bazira na [1] i [11].

1.1. Pregled raspodela

1.1.1. Binomna raspodela

Na samom početku opisaćemo Bernulijevu šemu koja je imala značajnu ulogu u razvoju teorije verovatnoće. U jednom eksperimentu se posmatra samo događaj A, odnosno skup elementarnih događaja $\Omega = \{A, \bar{A}\}$, gde je $\bar{A}$ komplement skupa A. Označićemo

$$P(A) = p,\ P(\bar{A}) = 1 - p = q.$$

Eksperiment ćemo ponoviti n puta, gde uslovi eksperimenta moraju uvek biti isti i rezultati ponavljanja jednog ne zavise od rezultata nekog drugog ponavljanja. Broj mogućih ponavljanja događaja A je $0, 1, 2 \ldots n$. Slučajna promenljiva S_n predstavlja broj realizacija događaja A i zove se Bernulijeva slučajna promenljiva.
Verovatnoća da se u n ponavljanja eksperimenta događaj A realizuje tačno k puta je jednaka

$$P\{S_n = k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},\ \ k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

pri čemu je $P(A) = p,\ q = 1 - p$.

Zato je zakon raspodele Bernulijeve slučajne promenljive:

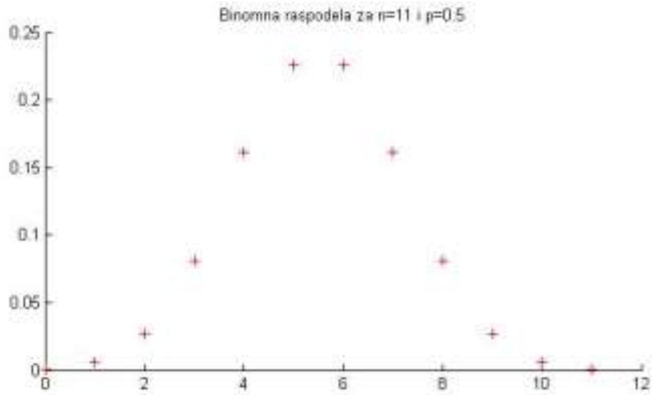
$$S_n\colon \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & k & \cdots & n \\ p(0) & p(1) & \cdots & p(k) & \cdots & p(n) \end{pmatrix}$$

gde je $p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Možemo primetiti da je $\sum_{k=1}^{n} p(k) = \sum \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1$.

Raspodela $p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n$ zove se binomna raspodela. Vidimo da ona zavisi od dva parametra $n \in \mathbb{N}$ i $p \in (0,1)$.

Definicija 1. Sa $X : B(n, p)$ ćemo označiti slučajnu promenljivu X koja ima binomnu raspodelu sa parametrima n i p.



Slika 1. Binomna raspodela za n=11 i p=0.5.

1.1.2. Poasonova raspodela

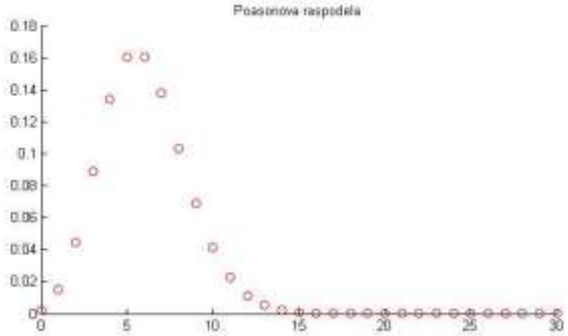
Kada je n veliko, radi bržeg iznačunavanja binomnih verovatnoća posmatramo asimptotsko ponašanje kada $n \to \infty$, odnosno Poasonova raspodela predstavlja granični slučaj Bernulijeve raspodele.
Pretpostavka je da verovatnoća događaja A u Bernulijevoj šemi zavisi od broja ponovljenih eksperimenata n.

Teorema 1. *Ako u Bernulijevoj šemi* $np_n \to \lambda > 0$, *kada* $n \to \infty$, *tada*

$$P\{S_n = j\} \to \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}, \quad j=0,1, \dots , n \to \infty.$$

Poasonova raspodela definiše verovatnoće broja retkih slučajnih događaja u konstantnoj jedinici prostora ili vremena. Poasonova raspodela predstavlja model za mnoge slučajne pojave, npr. slučajne raspodele retkih bolesti u različitim delovima zemlje, za broj telefonskih poziva u jedinici vremena. Koristi se kao model za broj događaja koji se dešavaju u jedinici vremena, pri čemu parametar λ predstavlja srednju vrednost broja ovih događaja.
Ona zavisi od parametra $\lambda > 0$ i predstavlja granični slučaj binomne raspodele kada $n \to \infty$.

Definicija 2. Sa X: P(λ) obeležićemo slučajnu promenljivu X koja ima Poasonovu raspodelu sa parametrom λ.

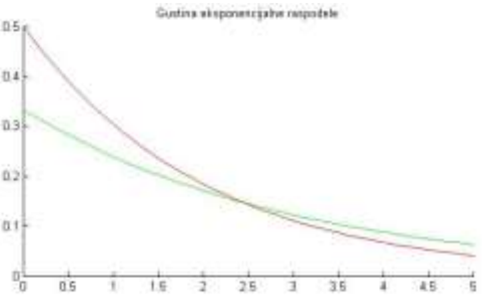


Slika 2. Poasonova raspodela sa parametrom $\lambda = 6$

1.1.3. Eksponencijalna raspodela

Definicija 3. Slučajna promenljiva X ima eksponencijalnu raspodelu $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$, što zapisujemo $X : \mathcal{E}(\lambda)$, ako je njena gustina raspodele

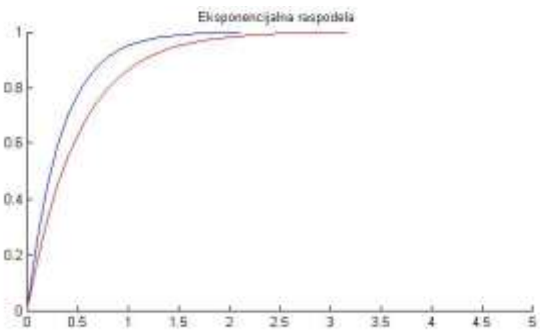
$$\varphi_X(\mathrm{x}) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda \mathrm{x}}, & \mathrm{x} \geq 0 \\ 0, & \mathrm{x} < 0 \end{cases}$$



Slika 3. Gustina eksponencijalne raspodele za $\lambda = 2$ *i* $\lambda = 3$.

Funkcija raspodele slučajne promenljive $X : \mathcal{E}(\lambda)$ je

$$F_X(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \mathrm{x}}, & \mathrm{x} \geq 0 \\ 0, & \mathrm{x} < 0 \end{cases}$$



Slika 4. Eksponencijalna raspodela za $\lambda = 2$ *i* $\lambda = 3$.

1.2. Stohastički procesi

Stanje nekih sistema moguće je opisati pomoću jedne ili više veličina, u zavisnosti od parametra koji odgovara, a da se zavisnost između odgovarajućeg parametra i postojećih veličina ne može tačno odrediti. U velikom broju slučajeva ta zavisnost se potčinjava statističkim zakonima koji omogućavaju da se odrede verovatnoće realizacija posmatranih veličina. Odnosno možemo reći da vrednosti posmatrane veličine ili veličina nisu unapred određene, već predstavljaju slučajne(stohastičke) veličine u zavisnosti od odgovarajućih parametara.

Parametar, koji nas interesuje za teoriju redova čekanja, u zavisnosti od koga se određuju slučajne veličine je vreme. Skup realizacija određene slučajne veličine možemo posmatrati kao slučajnu veličinu koja se menja u vremenu tj. kao slučajni proces.

1.2.1. Pojam stohastičkog procesa

Zamislimo da u svakom vremenskom trenutku t vremenskog intervala I posmatramo neku karakteristiku X određenog fizičkog sistema koja je slučajna veličina. Dakle, $X(t)$ je neka slučajna promenljiva za svako $t \in I$. Tada na skup svih slučajnih promenljivih $\{X(t), t \in I\}$ možemo gledati kao na slučajnu veličinu koja se menja u vremenu, odnosno dobijamo jednu slučajnu funkciju vremena. Ako je interval koji posmatramo $I = \mathbb{Z}$ ili $I = \mathbb{N}$ tada se posmatra stohastički proces sa diskretnim vremenom, a kada je $I = \mathbb{R}$ ili $I = \mathbb{R}^+$ tada se radi o stohastičkom procesu sa neprekidnim vremenom.

Definicija 4. Stohastički proces $\{X(t), t \in I\}$ je familija slučajnih promenljivih definisanih na istom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gde je I tzv. parametarski skup stohastičkog procesa.

Kako su slučajne promenljive iz Definicije 4. realne ($X : \Omega \to \mathbb{R}^d$) onda je i stohastički proces koji one čine realan. $\mathbb{R}^d$ se može nazvati i skupom stanja stohastičkog procesa.

Posmatraćemo uvek stohastičke procese koji zavise od jednog parametra i to vremena. U opštem slučaju zapisujemo kao $\{X(t), t \in [t_0, T]\}$ pri čemu je dozvoljen izbor $t_0 = -\infty$, $T = \infty$.
Svaki stohastički proces je funkcija dve promenljive, ω i t, ali se u zapisu umesto $\{X(t,\omega), \omega \in \Omega,\ t \in [t_0, T]\}$ najčešće koristi samo $\{X(t), t \in [t_0, T]\}$. Najčešće se koristi oznaka $X(t)$ ili X_t.
Kada posmatramo stohastički proces :

- Za fiksirano $t \in [t_0, T]$, dobijamo slučajnu promenljivu na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
- Za fiksirano $\omega \in \Omega$ dobijamo funkciju vremena koju nazivamo staza(realizacija ili trajektorija) stohastičkog procesa.

Definicija 5. Stohastički procesi $\{X_t\}_t$ i $\{Y_t\}_t$ koji uzimaju vrednosti iz istog procesa stanja su stohastički ekvivalentni ako $P(X_t \neq Y_t) = 0$ za svako $t \in T$. Ako su $\{X_t\}_t$ i $\{Y_t\}_t$ stohastički ekvivalentni tada se kaže da je $\{X_t\}_t$ verzija $\{Y_t\}_t$ (i obratno).

Konačno-dimenzionalne raspodele stohastički ekvivalentnih procesa se poklapaju. Međutim, ekvivalentni procesi mogu imati potpuno drugačija analitička svojstva.

Uzmimo primer procesa $X_t(\omega) = 0$ i $Y_t(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \neq t \\ 1, & \omega = t \end{cases}$ koji su ekvivalentni jer se poklapaju svuda osim u jednoj tački, a njihove trajektorije imaju drugačija svojstva neprekidnosti tj. trajektorije procesa X_t su svuda neprekidne dok trajektorije procesa Y_t imaju prekid u jednoj tački.

U opštem slučaju nije dovoljno da poznajemo samo zakon 1-dim raspodele, da bismo poznavali ceo proces neophodno je poznavati konačno-dimenzionalne raspodele stohastičkog procesa.

Definicija 6. Konačno-dimenzionalne raspodele stohastičkog procesa $\{X(t), t \in [t_0, T]\}$ su date sa:

$$F_t(x) = F_1(x) = P\{X(t) < x\};$$

$$F_{t_1,t_2}(x_1, x_2) = F_2(x_1, x_2) = P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2\};$$

$$F_{t_1,t_2,t_3}(x_1, x_2, x_3) = F_3(x_1, x_2, x_3) = P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, X(t_3) < x_3\};$$

$$\vdots$$

$$F_{t_1,t_2\ldots t_n}(x_1, x_2, .., x_n) = F_n(x_1, x_2, .., x_n) = P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, \ldots, X(t_n) < x_n\};$$

$$\vdots$$

gde su $t, t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots \in [t_0, T]$ i $x, x_1, x_2, .., x_n, \ldots \in \mathbb{R}^d$.

Konačno-dimenzionalne raspodele zadovoljavaju dva uslova:

i. Uslov simetrije: za svaku permutaciju $\{i_1, \ldots, i_n\}$ skupa brojeva od $\{1, \ldots, n\}$ važi: $F_{t_{i_1}\ldots t_{i_n}}(x_1, x_2, .., x_n) = F_{t_1,t_2\ldots t_n}(x_1, x_2, .., x_n)$;
ii. Uslov saglasnosti: za $m < n$ i proizvoljne $t_1, t_2, \ldots, t_m, t_{m+1}, \ldots t_n \in [t_0, T]$ važi: $F_{t_1,\ldots,t_m,t_{m+1}\ldots t_n}(x_1, .., x_m, \infty, \infty, \ldots \infty) = F_{t_1,\ldots,t_m}(x_1, .., x_m)$.

Uglavnom u praksi imamo slučaj da nemamo familiju slučajnih promenljivih na nekom prostoru verovatnoća već njihove konačno-dimenzionalne raspodele koje zadovoljavaju dva navedena uslova.

Teorema2.(Fundamentalna teorema Kolmogorova)
Za svaku familiju raspodela koja zadovoljava uslove i. i ii. postoji prostor verovatnoća i na njemu definisan stohastički proces X_t čije su to konačno-dimenzionalne raspodele.

Svojstva stohastičkih procesa

Definicija 7. Srednja vrednost procesa X_t je:

$$m_x(t) = m(t) = E(X_t).$$

Definicija 8. Autokovarijansna (korelaciona) funkcija stohastičkog procesa X_t je:

$$K_x(t,s) = K(t,s) = E[(X_t - m(t))(X_s - m(s))] =$$
$$= E(X_t X_s) - m(t)m(s), \quad t,s \in [t_0, T].$$

Definicija 9. Disperzija stohastičkog procesa X_t je:

$$D_x(t) = D(t) = K_x(t,t) = E(X_t^2) - (m(t))^2.$$

Definicija 10. Koeficijent korelacije stohastičkog procesa X_t je:

$$\rho_x(t,s) = \rho(t,s) = \frac{K_x(t,s)}{\sqrt{D_x(t)D_x(s)}}.$$

1.2.2. Lanci Markova

Za formiranje diferencijalnih jednačina stanja sistema opsluživanja kojim ćemo se baviti u daljem radu potrebno je poznavati proces Markova, koji je detaljno istraživan i približen nama jer ima široku primenu u redovima čekanja, kao i u operativnim istraživanjima, inženjerskom sistemu, vremenskim serijama.

Znamo da je stohastički proces $\{X(t), t \in I\}$ familija slučajnih promenljivih definisanih na istom prostoru verovatnoća gde je I tzv. parametarski skup stohastičkog procesa. U slučaju da je I prebrojiv, stohastički proces zovemo nizom ili lancem slučajnih promenljivih. Posmatraćemo stohastički proces sa konačnim ili prebrojivim skupom vrednosti i skup stanja označavamo sa $S = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Definicija 11. Stohastički proces $X(t)$ koji je definisan na diskretnom prostoru stanja, formira slučajni proces Markova tj. važi Markovsko svojstvo ako za sve $n \in \mathbb{N}$ i bilo koji niz $t_1, t_2, \dots, t_{n+1}$ gde su $t_{n+1} > \cdots > t_2 > t_1$ važi:

$$P\{X(t_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots, X(t_n) = x_n\} = P\{X(t_{n+1}) = x_{n+1} | X(t_n) = x_n\},$$

tj. verovatnoća da se sistem nađe u stanju x_{n+1} u trenutku $n+1$ zavisi samo od stanja u sadašnjem trenutku x_n, a ne od stanja u prethodnim trenucima. Drugim rečima prošlost nema uticaja.
Analizom determinističkih sistema vidi se najjednostavniji način postojanja lanca Markova, odnosno da sledeća pozicija u nizu zavisi, tj. predstavlja se isključivo kao funkcija prethodne pozicije.
Dakle, pored date sadašnjosti, budućnost ne zavisi od prošlosti. Ništa što se dogodilo u prošlosti, ne utiče u pogledu budućnosti, u budućnosti je sve moguće. Osnovni primer je bacanje novčića – ako prvi put dobijemo glavu, drugi put s podjednakim šansama možemo dobiti glavu ili pismo. Ako pak dobijamo glavu 25 puta zaredom, i tada je verovatnoća da ćemo 26. put dobiti glavu ista kao i da ćemo dobiti pismo, odnosno prošlost ne predviđa budući rezultat. Trenutno stanje je da imamo novčić sa glavom i pismom na svoje dve strane. Pretpostavljajući da se poštuju pravila izvođenja eksperimenta, ništa drugo ne može uticati na budući ishod.
Primer može da bude i slučajna šetnja po brojevnoj osi, gde se, pri svakom koraku, pozicija menja za 1 (u levo ili desno jednako verovatno). Sa svake pozicije postoje dva moguća prelaza: na sledeći ili na prethodni ceo broj. Verovatnoće prelaza tada zavise samo od trenutnog stanja, a ne od načina kako se do njega došlo. Na primer, ako je trenutna pozicija -3, prelaz u -2 ima verovatnoću 0.5, bez obzira na prethodne pozicije.
U svakom trenutku sistem, na osnovu date raspodele slučajne promenljive, može promeniti stanje, ili ostati u istom. Promene stanja nazivamo prelazima, a verovatnoće, koje se odnose na različite promene stanja, nazivamo verovatnoćama prelaza.

U slučajevima Markovljevog lanca sa kontinuiranim vremenom prelazak iz stanja u stanje može se odigrati u bilo kom trenutku.

Definicija 12. Verovatnoća prelaza

Verovatnoća prelaska iz i-tog u j-to stanje u jednom koraku je:

$$p_{i,j}^{n,n+1} = P\{X_{n+1} = x_j | X_n = x_i\}.$$

Definicija 13. (Homogeni Markovljev lanac)

Markovljevi lanci kod kojih matrica prelaznih verovatnoća $P(n)$ ne zavisi o koraku n se zovu homogeni Markovljevi lanci. Tu konstantnu matricu prelaznih verovatnoća označavamo sa P.

Definicija 14. Matrica prelaza za jedan korak je:

$$P = [p_{i,j}]_{i,j} = \begin{bmatrix} p_{11} p_{12} \cdots & \cdots \\ p_{12} p_{22} \cdots & \ddots & \cdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \cdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

Uzimamo sve $p_{i,j}$ gde je matrica reda $i = j$, odnosno matrica mora da bude kvadratna i dimenzije $n \; x \; n$.

Sume po vrsti matrice prelaza su 1.

Definicija 15. Verovatnoća prelaska iz i-tog u j-to stanje u n koraka je:

$$p_{i,j}(n) = P\{X_{m+n} = x_j | X_m = x_i\}.$$

Matrica prelaza za n koraka: $P_n = [p_{i,j}(n)]_{i,j}$.

Od velikog značaja za izračunavanje verovatnoća prelaza u n koraka su jednačine Čepmen-Kolmogorova:

$$p_{i,j}(n+m) = \sum_k p_{i,k}(n) p_{k,j}(m).$$

Čepmen-Kolmogorova proces u matričnom obliku glasi:

$$P_{n+m} = P_n * P_m$$

Ili

$$P_m = P_n * P_{m-n}\,, \qquad m > n;$$

$$m = 1 \qquad P_1 = P;$$

$$m = 2 \qquad P_2 = P_1 * P_1 = P * P = P^2 \;;$$

$$m = 3 \qquad P_3 = P_2 * P_1 = P^2 * P = P^3\,;$$

$$\vdots$$

$$m = n \qquad P_n = P^n\,.$$

Pretpostavljamo da lanac Markova ima konačno mnogo stanja tj. $S = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$.

Sa $p_i(n)$ označavamo verovatnoću da u trenutku n sistem bude u i-tom stanju: $p_i(n) = P\{X_n = x_i\}$.

Za $n = 0$ dobijamo $p_i(0)$ tzv. početnu verovatnoću, i pomoću nje određujemo gde je sistem bio u početnom trenutku.

Početni vektor je

$$p(0) = [\, p_1(0)\ \ p_2(0) \dots\ p_m(0)].$$

Analogno

$$p(k) = [\, p_1(k)\ \ p_2(k) \dots\ p_m(k)].$$

Pa je Čepmen-Kolmogorova jednačina za $p(k)$:

$$p(k) = p(0) * P^k.$$

Nekoliko definicija o lancu

Definicija 16. Ako $p(k)$ ne zavisi od k, kažemo da je lanac *stacionaran.*

Definicija 17. Za Markovljev lanac kažemo da je *ergodičan* ako postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da matrica $P_n = P^n$ ima sve pozitivne elemente.

Definicija 18. Za slučajni proces Markova kažemo da je *ergodičan,* ako je definisan na diskretnom skupu i ako po isteku dovoljno velikog intervala vremena, verovatnoće stanja sistema ne zavise od početnih uslova, početnog trenutka, ni vremena koje je prošlo.

Definicija 19. Za proces Markova kažemo da je *nesvodljiv* ukoliko se u svako stanje procesa može doći iz drugog stanja procesa.

Definicija 20. Ako je lanac *nesvodljiv* tada se sva stanja ponavljaju ili se iz svakog stanja može preći u drugo stanje.

Definicija 21. Za svaki *ergodičan* lanac i za svako i postoje verovatnoće $p_j^* = \lim_{n\to\infty} p_{i,j}(n)$ koje se nazivaju granične verovatnoće. Drugim rečima, posle dovoljno dugo vremena iz bilo kog stanja sistem završava u stanju j sa verovatnoćom p_j^*.

Definicija 22. Stanje x_j je *povratno* ako postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da $p_{jj}(n) > 0$.

U radu je posebno posvećena pažnja umreženim sistemima koji ne mogu biti posmatrani na klasičan način. Svojstvo Markova je svojstvo da ako su nam prošlost i sadašnjost poznate, budućnost zavisi samo od sadašnjosti, ne od prošlosti i uključuje jednostavnu primenu matematičkih modela za analizu nastupanja slučajnih procesa. Redovi čekanja su najčešće prikazani u obliku neposrednog grafa čiji čvorovi predstavljaju stanice i čiji su ogranci veze između pojedinih stanica. Putevi koje klijenti prelaze sa jednog na drugo stanje određuje verovatnoća prelaska iz jednog stanja u drugo.

Pored dosadašnjeg razmatranja diskretnog slučaja lanca Markova postoji i neprekidan slučaj lanca Markova gde je vreme koje sistem provede u datom stanju slučajna promenljiva koja ima eksponencijalnu raspodelu.

1.2.3. Poasonov proces

Poasonov proces je jednostavan i široko primenjen stohastički proces za modeliranje vremena po kome dolasci ulaze u sistem, odnosno ima široku primenu za modelovanje broja tzv. „retkih događaja”. Retki događaji su oni gde se u kratkom vremenskom intervalu može odigrati najviše jedan takav događaj. Ovaj proces ima veliku primenu kao model za broj telefonskih poziva u jedinici vremena, broj autobusa koji dolaze na neku stanicu u jedinici vremena, broj stabljika kukuruza po jedinici površine, aktuarskoj matematici. Poasonov proces je jedan od najvažnijih i najznačajnijih procesa prebrajanja. Empirijski je utvrđeno da u mnogim okolnostima nastanak slučajnih procesa može biti dobro aproksimiran Poasonovim procesom.

1.2.3.1. Procesi prebrajanja

Definicija 23. Stohastički proces $\{X_t, t \geq 0\}$ je proces prebrajanja ako X_t predstavlja broj događaja koji se „pojavio“ do trenutka t, uključujući i trenutak t.

Procesi prebrajanja moraju da zadovoljavaju sledeće osobine:

a. $X_t \geq 0, \ \forall t$;
b. X_t ima celobrojne vrednosti, $X_t \in \mathbb{N}_0$;
c. $s < t$ onda $X_s \leq X_t$;
d. $X_t - X_s$ predstavlja broj događaja koji se dese u $[s, t]$.

Definicija 24. Proces prebrajanja $\{X_t, t \geq 0\}$ nazivamo Poasonov proces sa stopom rasta $\lambda, \lambda > 0$ ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

i. $X_0 = 0$;
ii. proces ima nezavisne priraštaje;
iii. broj događaja u proizvoljnom vremenskom intervalu dužine t ima Poasonovu raspodelu sa srednjom vrednošću $\lambda, \forall t \geq 0$

$$P\{X_{s+t} - X_s = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \qquad n = 0,1,2 \dots$$

Iz poslednjeg uslova možemo videti bitno svojstvo Poasonovog procesa, tj. da on ima stacionarne priraštaje.

Stacionarni priraštaj znači da raspodela broja događaja koji se pojavljuje u bilo kom intervalu zavisi samo od dužine tog intervala.

Navedenu definiciju Poasonovog procesa često je u praksi vrlo teško proveriti, odnosno na osnovu nje ne možemo znati da li je tačno modeliran realni problem iz prakse, pa se uvodi ekvivalentna definicija koja nam može malo olakšati modeliranje realnog problema.

Definicija 25. Stohastički proces $\{X_t, t \geq 0\}$ nazivamo nehomogeni Poasonov proces sa stopom rasta $\lambda, \lambda > 0$ ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

i. $X_0 = 0$;
ii. proces ima nezavisne priraštaje;
iii. $P\{X_{t+h} - X_t = 1\} = \lambda h + o(h), h \to 0$;
iv. $P\{X_{t+h} - X_t \geq 2\} = o(h), h \to 0$.

Definicija 26. Vreme zadržavanja u datom stanju

Posmatramo Poasonov proces $\{X_t, t \geq 0\}$ i označimo niz zadržavanja vremena u datom stanju sa $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ i njihove raspodele sa $F_{T_1}, F_{T_2}, \dots$ itd. T_1 predstavlja vreme koje protekne do pojave prvog događaja, T_2 vreme koje protekne do pojave drugog događaja, sa T_n vreme koje protekne od $n-1$ do n-tog događaja. Raspodele ovih događaja su:

$$F_{T_1}(t) = P\{T_1 < t\} = 1 - P\{T_1 \geq t\} = 1 - e^{-\lambda t};$$

$$F_{T_2}(t) = P\{T_2 < t\} = 1 - P\{T_2 \geq t\} = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Odnosno $T_n: \mathcal{E}(\lambda)$, tj. vreme zadržavanja u datom trenutku ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom λ.

Tvrđenje 1. Vremena zadržavanja u datom stanju su nezavisna, jednako raspoređena i imaju eksponencijalnu raspodelu sa parametrom λ. Tada slučajna promenljiva $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$ ima raspodelu datu gustinom:

$$\varphi_{S_n}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} & , t > 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}.$$

2. Teorija redova čekanja

Teorija redova čekanja ima za predmet istraživanja sisteme masovnog usluživanja, odnosno predstavlja naučnu disciplinu koja izučava proces usluživanja između slučajno pristiglih zahteva i mogućnosti zadovoljavanja i realizacije tih zahteva. Teorija se bavi pre svega kvantitativnim aspektima redova čekanja, tj. vreme čekanja na opslugu, brzina opsluživanja, dužina reda čekanja, nivo iskorišćenja kanala koji vrše opsluživanje, broj otkaza i slično. Pod sistemom masovnog usluživanja podrazumeva se svaki sistem u kojem pojava nekog događaja, klijenta ili zahteva uzrokuje potrebu da se na nju reaguje, da se zahtev zadovolji i da klijent bude uslužen kanalom opsluživanja. Ove sisteme srećemo kada treba da se opsluži veliki broj klijenata, a u slučaju kada klijenti ne mogu biti odmah opsluženi oni formiraju red. Česta je pojava zahteva za usluživanjem slučajnog karaktera, drugim rečima da se ne zna unapred kada će se tačno pojaviti zahtev za opslugom. Mora se razmotriti mogućnost da broj klijenata nije konstantan, da je promenljiv u zavisnosti od različitih faktora, i vreme za opsluživanje u zavisnosti od potrebe klijenta može biti različito. Ovo nam pokazuje da teorija redova čekanja ima široku primenu.

Prvo ime sa kojim se susrećemo kada se zapitamo ko je osnivač ove teorije jeste Agner Krarup Erlang, danski matematičar koji je prvi rad u ovoj oblasti publikovao 1909. godine, pod nazivom „Teorija verovatnoće i telefonski razgovori“. Radio je u telefonskoj kompaniji u Kopenhagenu, gde se suočio sa problemima telefonskog saobraćaja u čijem rešavanju je primenio svoja matematička znanja i razvio nove metode koje dovode do njegovog rada koji vezujemo za početak oblasti teorije redova čekanja. Nakon njega se pojavljuje sve više članaka, knjiga i radova iz ove oblasti i ova teorija počinje sve više da se istražuje i primenjuje. Njegovi radovi su inspirisali inženjere, matematičare da probleme čekanja u redu rešavaju pomoću teorije verovatnoće. Teorija redova je široku primenu našla u teoriji primenjene verovatnoće, pa se njeni rezultati koriste u telekomunikacijama, operacionim istraživanjima, saobraćaju i mnogim drugim oblastima. Sada je ova grana nauke napredovala i objavljuju se radovi i knjige velikog broja stručnjaka.

Cilj ove teorije jeste rešiti sisteme koji se mogu predstaviti preko matematičkih modela teorije redova čekanja da bi se došlo do optimalnih rešenja za investiranje i do što manjih troškova. Model se konstruiše tako da se predvidi dužina reda i vreme čekanja. Ova teorija predstavlja granu operacionih istraživanja jer su rezultati često korišćeni u donošenju poslovnih odluka u vezi potrebnih izvora za pružanje usluga. Literatura korišćena pri izradi ovog poglavlja rada bazira se na [4],[6],[7],[13] i [14].

Opisaćemo nekoliko primera gde teorija redova čekanja ima značajnu ulogu [6].

Primer 1. U supermarketu neka od glavnih pitanja su: Koliko dugo klijenti moraju da čekaju u redu na kasi? Šta se dešava sa vremenom čekanja kada je najveća gužva? Da li ima dovoljno kasa koje pružaju uslugu?

Primer 2. Treba da se napravi novi parking ispred supermarketa. Koliko bi trebao da ima parking mesta?

Primer 3. Semafori. Kako da se regulišu semafori i raskrsnica da bi vreme čekanja bilo prihvatljivo?

Primer 4. Call centar osiguravajućeg društva. Pitanja telefonom, u vezi sa uslovima osiguranja, obrađuje call centar. Za poziv centar ima konstruisan tim, gde svaki tim pomaže klijentima iz određenog regiona. Koliko će klijenti morati da čekaju pre nego što operator postane dostupan? Da li je broj ulaznih telefonskih linija dovoljan? Da li ima dovoljno operatera?

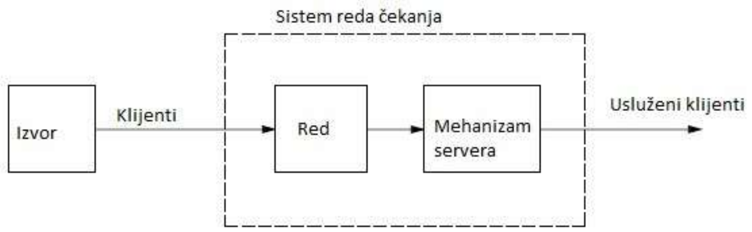
Ovi primeri su samo deo primene teorije redova čekanja koja daje odgovor na postavljena pitanja. Veliki broj primera ovog tipa su svakodnevne pojave. Analizirajući ih možemo primetiti neke osnovne elemente sistema.

U svakom sistemu koji služi možemo razlikovati proces dolaska, proces usluga i jednu ili više servisnih stanica ili servera. Opšta pretpostavka je da jedan server ne može u isto vreme da služi dva ili više klijenta. Ako je server zauzet, klijent mora da čeka na uslugu. U trenutku kada server postane slobodan, klijent je preuzet iz reda u skladu sa unapred definisanim pravilima - disciplinom u redovima. Modeli teorije redova su pogodni da bi sistem masovnog opsluživanja radio na najefikasniji način, odnosno da se smanje nepotrebni troškovi, prekomerno čekanje i ostale neželjene posledice, drugim rečima ovi modeli omogućavaju pronalaženje odgovarajućeg balansa između troškova opsluživanja i vremena čekanja.

Modeli redova čekanja su izuzetno važni za poslovanje jer utiču na korisnički servis i troškove pružanja usluga. Ako je prosečna iskorišćenost sistema niska to nas navodi na zaključak da je model čekanja neefikasan. Loše projektovan sistem može da ukaže na višak zaposlenog osoblja. Ukoliko dolazi do dugog čekanja prepisuje se organizaciji da ne vodi dovoljno brigu o klijentima i odaje utisak lošeg kvaliteta usluga. Analiza ovih redova je promenila način na koji kompanije pokreću i povećavaju profitabilnost preduzeća.

2.1. Struktura sistema opsluživanja

Osnovni proces koji podrazumeva većinu modela čekanja je kada se klijenti koji zahtevaju uslugu pojavljuju tokom vremena na ulazu u sistem. Ovi klijenti ulaze u sistem čekanja i pridruže se redu. U određeno vreme, član reda je izabran za uslugu po nekom pravilu poznatom kao disciplina reda. Potrebni servis se zatim obavlja za klijenta putem mehanizma usluga, nakon čega usluženi klijent napušta sistem.



Slika 5. Osnovni model redova čekanja

Proces dolaska klijenta

Obično se pretpostavlja da su intervali vremena u kojima klijenti dolaze nezavisni i imaju istu raspodelu. U većini slučajeva klijenti pristižu u skladu sa Poasonovom raspodelom. Klijenti mogu doći jedan po jedan ili u grupama. Primer grupnog dolaska su npr. putnici jednog autobusa na carinskom prelazu čija se dokumenta proveravaju. Jedna od karakteristika procesa dolaska klijenata je njegova veličina, tj. broj klijenata koji je na ulazu. To je ukupan broj klijenata koji je potrebno servisirati s vremena na vreme, tj. ukupan broj različitih potencijalnih klijenata. Veličina može da bude beskonačna ili konačna. Proračuni su daleko lakši u beskonačnom slučaju. Ova pretpostavka često se koristi čak i kada je stvarna veličina neki relativno veliki konačan broj. Konačni slučaj je teže analizirati, jer broj klijenata u sistemu čekanja utiče na broj potencijalnih klijenata izvan sistema u svakom trenutku.

Ponašanje klijenta

Ponašanje može biti različito, klijenti mogu biti strpljivi i čekati dugo, ili mogu biti npr. nervozni i nestrpljivi i napustiti red. Primer čekanja pri pozivu call centru, neko će ukoliko dugo čeka da se slobodni operater javi da prekine vezu, pa možda kasnije nazvati ponovo.

Red

Red je mesto gde klijenti čekaju na uslugu. Red se karakteriše maksimalnim brojem klijenata koji može da sadrži. Kao što smo već spominjali red može da bude konačan i beskonačan. Za većinu modela redova se uzima beskonačan red, čak i za situacije gde je relativno velik konačan broj gornja granica jer je posmatranje konačnog teže za analizu. Kada je gornja granica mala da bi se postigla određena učestalost, neophodno je pretpostaviti da se radi o konačnom redu.

Disciplina reda

U redu imamo pravilo po kome se biraju klijenti iz reda koji će biti usluženi i to jedan po jedan ili u grupama. Najzastupljenija pravila za redosled usluživanja klijenata su:

- First-in-first-out(FIFO- prvi koji uđe će biti prvi uslužen, odnosno po redosledu dolaska, takođe imamo i drugi naziv First-come-first served tj. FCFS);
- Service In Random Order - da se nasumice izabere klijent koji će biti uslužen, bez nekog pravila;
- Last-in-first-out(LIFO- prvi će biti uslužen onaj koji je poslednji stigao, drugi naziv Last-come-first-served, tj. LCFS);
- Priority Service – klijent koji je prioritet uslužuje se pre onih koji su sa nižim rangom prioriteta npr. prioritet su uvek hitni pozivi.

Mehanizam servera

Predstavlja mehanizam usluge koji se sastoji od jednog ili više uslužnih objekata, gde svaki sadrži jedan ili više paralelnih kanala usluge, pod nazivom serveri. U modelu reda čekanja mora biti precizno određen raspored objekata i broj servera. Osnovi model predstavlja jedan objekat sa jednim ili sa konačnim brojem servera. Vreme koje protekne kada klijent uđe u server do izvršenja usluge naziva se vreme usluge ili vreme zadržavanja. Vremena trajanja usluge su nezavisna sa istom raspodelom. Mogu biti determinisana ili imati eksponencijalnu raspodelu. Kanali za opsluživanje nisu uvek ljudi, već to mogu biti mašine, putnička vozila, parking mesta, elektronski uređaji i sl., tako i klijenti nisu uvek ljudi nego mogu biti vozila koja čekaju na parking mesto, brodovi koji čekaju mesto da pristanu u luku, delovi da se obrade na mašini, kože svoj red na mašini za sušenje i drugo.

Analizom dolazimo do odgovora na pitanja očekivanog broja klijenata u redu, potom odgovora za očekivano vreme koje klijent provede u sistemu, koja je verovatnoća da će klijent zateći slobodan kanal opsluge i sl. U velikom broju modela smatra se da su vremena ulaska klijenta u sistem nezavisna i raspoređena po teorijskoj raspodeli što važi i za vreme opsluživanja klijenata. Engleski matematičar David G. Kendall 1951.godine je uveo skraćenice koje karakterišu modele redova čekanja, danas poznato pod nazivom Kendelova notacija, u početku je imala samo prva tri slova, a kasnije se notacija zapisuje u vidu šest slova.

Ovaj zapis se koristi kao forma za opis sistema masovnog opsluživanja A/B/C/D/E/F gde su:

- A- funkcija raspodele ulaznog izvora, tj. dolazaka klijenata(M-oznaka kada za funkciju ulaznog izvora uzimamo eksponencijalnu raspodelu, D-oznaka kada za funkciju ulaznog izvora uzimamo da je konstantno vreme između dva uzastopna dolaska,E_k- kada je ulazni izvor Erlangova raspodela reda k, G – kada je ulazni izvor raspodela opšteg tipa, tj. bilo koja);
- B- funkcija raspodele za vreme opsluživanja;
- C- broj kanala za opslugu;
- D- maksimalan broj klijenata koji u redu čeka na opslugu(umesto D se piše maksimalan broj klijenata koji čeka u redu, koji može biti i konačan i beskonačan);
- E- veličina populacije iz koje klijenti ulaze u sistem;
- F- disciplina reda, ukoliko se ne naznači drugačije podrazumeva se da se radi o disciplini FIFO.

Saglasno Kendelovoj notaciji možemo reći na primer da M/M/4/∞/∞/FIFO predstavlja model sa eksponencijalno raspoređenim intervalima dolaska klijenta, eksponencijalnom raspodelom vremena opsluživanja, sa 4 kanala opsluge, gde broj mesta u redu nije ograničen, kao i da veličina populacije iz koje klijenti ulaze u sistem nije ograničena, a da će se usluga vršiti po principu ko je prvi došao u red, prvi će i biti uslužen.

U nekim modelima se poslednja tri slova predstave kao fiksirane vrednosti, pa možemo pisati samo A/B/C.

Standardna terminologija i označavanje koje se koriste u teoriji redova su prikazani u sledećoj tabeli:

Stanje sistema	Definiše se preko broja klijenata u sistemu opsluživanja
Dužina reda	Broj klijenata koji čekaju da počne opsluživanje
$N(t)$	Broj klijenata u sistemu opsluživanja u vremenskom trenutku t
$P_n(t)$	Verovatnoća da je tačno n klijenata u sistemu opsluživanja u vremenskom trenutku t
c	Broj kanala za opluživanje u sistemu opsluživanja
λ_n	Srednji intenzitet dolaska novih klijenata, ako je trenutni broj klijenata u sistemu n
μ_n	Očekivani broj opsluženih klijenata ako je trenutno n klijenata u sistemu opsluživanja

Tabela 2.1: Standardna terminologija

Kada je λ_n konstantno za sve n, tada se ta konstanta označava sa λ. Takođe, kada je μ_n , za zauzete kanale opsluživanja, konstantno za sve $n \geq 1$ tada se konstanta označava sa μ(kada su svih c kanala zauzeti tada je $\mu_n = c * \mu, \quad n \geq c$). Slično, $\rho = \lambda/(c * \mu)$ predstavlja koeficijent iskorišćenosti kanala opsluživanja, drugim rečima predstavlja očekivani deo vremena koje je svaki kanal za opsluživanje, u datoj fazi opsluživanja, zauzet.

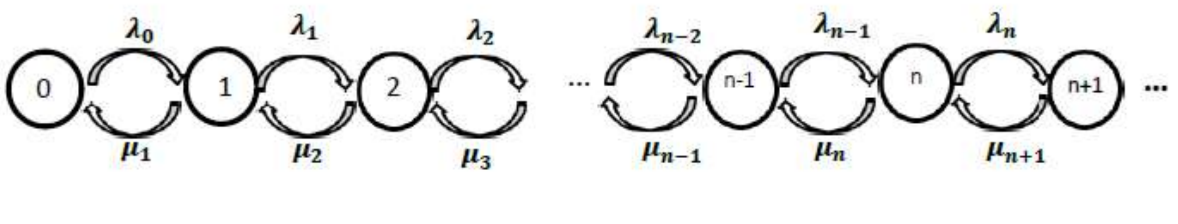
2.2. Osnovni model teorije redova po principu rađanja i umiranja

Osnovni modeli teorije redova podrazumevaju ulazak u sistem(dolasci klijenata) i napuštanje sistema, odnosno odlaska klijenata koji se dešava prema procesu rađanja i umiranja. Ovaj proces u teoriji verovatnoće i stohastičkoj analizi ima široku primenu. Adekvatan je za modeliranje promena u veličini određene populacije. Jednostavnije ćemo dalje pošto je reč o teoriji redova ovaj proces posmatrati kao da rađanje predstavlja dolazak novog klijenta u sistem, a za odlazak opsluženog klijenta proces umiranja. Sa $t(t \geq 0)$ označićemo posmatrani trenutak t, a sa $N(t)$ broj klijenata koji čekaju u sistemu u trenutku t. Ovaj proces opisuje verovatnoću kojom će se $N(t)$ menjati kada vreme raste. Uopšteno govoreći, to znači da pojedinačni procesi rađanja i umiranja nastaju slučajno, gde njihove srednje vrednosti zavise od trenutnog stanja sistema. Ovaj proces podrazumeva sledeće pretpostavke [4]:

Pretpostavka 1. Za $N(t) = n$, data raspodela verovatnoće do sledećeg rođenja(dolaska sledećeg klijenta) je eksponencijalna sa parametrom $\lambda_n(n = 0,1,2,\ldots)$.

Pretpostavka 2. Za $N(t) = n$, data raspodela verovatnoće do sledećeg umiranja(odlaska klijenta iz sistema) se predstavlja eksponencijalnom raspodelom sa parametrom$\mu_n(n = 0,1,2,\ldots)$.

Pretpostavka 3. Slučajne promenljive iz Pretpostavke 1. i Pretpostavke 2. su međusobno nezavisne i zavise samo od stanja n.
Tada sledeća pozicija u stanju ovog procesa iz n ili prelazi u susedno stanje n-1 ili u n+1 u zavisnosti da li je prethodna ili naredna slučajna promenljiva manja.
Ovako definisani proces predstavlja homogeni proces Markova sa kontinuiranim vremenom.

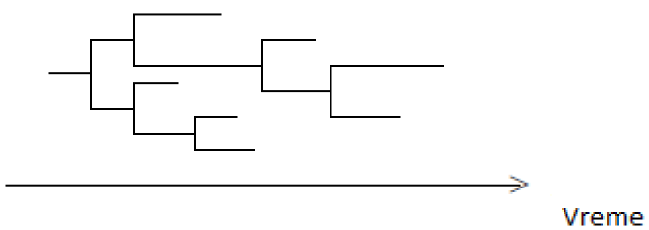


Slika 6. Dijagram kretanja procesa rađanja i umiranja.

U sistemu čekanja λ_n i μ_n predstavljaju redom kao što smo već označili, srednju stopu dolazaka klijenata i srednju stopu ostvarenih usluga, kada je n klijenata u sistemu, i u nekim modelima one mogu biti i konstantne, ali mogu i da imaju velike varijacije. Kada je sistem u stanju mirovanja imamo primer konstantnog. Za primer variranja λ_n i μ_n možemo uzeti različito ponašanje pri menjanju n u slučaju kada potencijalni klijenti sa povećanjem n odbijaju da uđu u sistem(λ_n varira) ili kada se zbog rasta n, tj. klijenata u sistemu povećava broj onih koji napuštaju red, jer ne žele da čekaju(μ_n varira).

Možemo razmotriti primer kada posmatramo *čist proces rađanja*:
Ćelije se dele prema sledećim pravilima

- Ćelija u trenutku t ima verovatnoću $\lambda h + o(h)$ da će se razdvojiti na dve u intervalu $(t, t+h)$
- Ova verovatnoća je nezavisna od starosti ćelije
- Događaji između različitih ćelija su nezavisni



Slika 7. Čist proces rađanja tokom vremena

Naše pitanje je koliko vremena je potrebno da se sistem razvije?
Posmatramo prvo analizu bez uzimanja verovatnoće u obzir:

- Neka je $n(t)$ broj ćelija u trenutku t
- Neka je λ stopa nataliteta po jednoj ćeliji

Na taj način imamo da se $\approx \lambda n(t)\Delta(\mathrm{t})$ rođenja desi u intervalu $(t, t+ \Delta t)$

Tada je:

$$n(t+ \Delta t) = n(t) + \lambda n(t)\Delta \mathrm{t}$$

$$\frac{n(t+\Delta t)-n(t)}{\Delta t} = n(t)\lambda \rightarrow \frac{dn}{dt} = n' = n(t)\lambda \tag{2.2.1}$$

Rešenje ove diferencijalne jednačine je $n(t) = Ke^{\lambda t}$
Ako za početni uslov uzmemo $n(0) = n_0$ tada je $n(t) = n_0 e^{\lambda t}$

Sada posmatramo analizu sa uzimanjem verovatnoće u obzir:

- $N(t)$ je broj ćelija u trenutku t
- $\mathrm{P}\{N(t) = n\} = P_n(t)$
- Pretpostavićemo da ćelija u trenutku t ima verovatnoću $\lambda h + o(h)$ da će se razdvojiti na dve u intervalu $(t, t+h)$, da je verovatnoća da će se desiti više od jednog rođenja u intervalu $(t, t+h)$ jednaka $o(h)$ i da su sva stanja prelazna.

Sada imamo da je verovatnoća rođenja u trenutku $(t, t+h)$ ako je $N(t) = n$ jednaka $n\lambda h + o(h)$.
Pa je

$$P_n(t+h) = P_n(t)\big(1 - n\lambda h - o(h)\big) + P_{n-1}(t)((n-1)\lambda h + o(h)\,) \quad (2.2.2)$$

Dalje možemo pisati

$$P_n(t+h) - P_n(t) = -n\lambda h P_n(t) + P_{n-1}(t)((n-1)\lambda h + o(h))$$

Zatim ćemo podeliti prethodnu jednačinu sa h pa imamo :

$$\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = -n\lambda P_n(t) + P_{n-1}(t)(n-1)\lambda + \frac{o(h)}{h}$$

Pustićemo da $h \to 0$.

$$P_n'(t) = -n\lambda P_n(t) + (n-1)\,\lambda P_{n-1}(t)$$

Uzimamo početni uslov $P_{n_0}(0) = \mathrm{P}\{N(0) = n_0\} = 1$.
Rešenje ove diferencijalne jednačine sa početnim uslovom je:

$$P_n(t) = \binom{n-1}{n-n_0} e^{-\,t\lambda n_0}(1 - e^{-\lambda t})^{n-n_0} \qquad n = n_0, n_0+1, \ldots \quad (2.2.3)$$

gde je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Možemo primetiti da :

- U procesu rađanja, za $N(t) = n$ verovatnoća promene u intervalu $(t, t+h)$ zavisi od n
- U Poasonovom procesu verovatnoća promene u intervalu $(t, t+h)$ nezavisina je od $N(t)$

Pretpostavićemo da je za $N(t) = n$ verovatnoća nove promene u $n+1$ u intervalu $(t, t+h)$ jednaka $\lambda_n h + o(h)$, a verovatnoća da će se desiti više od jedne promene $o(h)$.

Tada,

$$P_n(t+h) = P_n(t)(1-\lambda_n h) + P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}h + \ o(h)$$
$$P_0(t+h) = P_0(t)(1-\lambda_0 h) + \ o(h)$$
$$\Rightarrow P_n'(t) = -\lambda_n P_n(t) + \lambda_{n-1}P_{n-1}(t).$$

$$P_0'(t) = -\lambda_0 P_n(t). \tag{2.2.4}$$

Jednačine mogu biti rešene rekurzivno sa $P_0(t) = P_0(0)e^{-\lambda_0 t}$.

Neka je početni uslov $P_{n_0}(0) = 1$.

Dobijene jednačine su:

$$P_n'(t) = -\lambda_n P_n(t) + \lambda_{n-1}P_{n-1}(t), \qquad n \geq n_0$$

$$P_{n_0}'(t) = -\lambda_{n_0}P_{n_0}(t).$$

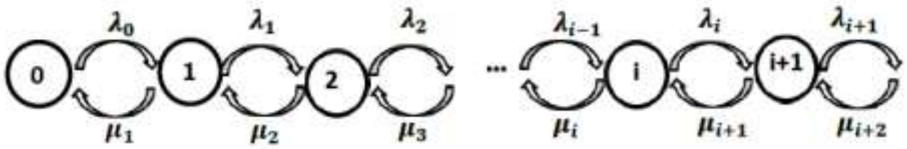
Proces rađanja i umiranja

Ako su n prelazi u intervalu od $(0,t)$, možemo posmatrati da se proces nalazi u stanju E_n.

Promene u procesu :

$$E_n \to E_{n+1} \to E_{n+2} \to \cdots$$

Proces rađanja i umiranja razmatra prelaze $E_n \to E_{n-1}$ isto kao i $E_n \to E_{n+1}$ ako je $n \geq 1$. Ako je $n=0$ samo je $E_0 \to E_1$ dozvoljeno.



Slika 8. Proces rađanja i umiranja

Pretpostavke:

Ako je proces u trenutku t u stanju E_n, tada u intervalu $(t, t+h)$:

- Prelaz iz $E_n \to E_{n+1}$ ima verovatnoću $\lambda_n h + o(h)$
- Prelaz iz $E_n \to E_{n-1}$ ima verovatnoću $\mu_n h + o(h)$
- Verovatnoća da će se desiti više od jedne promene je $o(h)$.

$$P_n(t+h) = P_n(t)(1-\lambda_n h - \mu_n h) + P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}h) + P_{n+1}(t)(\mu_{n+1}h) + \ o(h).$$

Pa je vreme razvoja verovatnoće

$$\Longrightarrow P_n'(t) = -(\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t). \qquad (2.2.5)$$

Za $n = 0$

$$P_0(t+h) = P_0(t)(1 - \lambda_0 h) + P_1(t)\mu_1 h + o(h)$$

$$\Longrightarrow P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t). \qquad (2.2.6)$$

- Ako je $\lambda_0 = 0$ tada je $E_0 \rightarrow E_1$ nemoguće i E_0 je apsorbujuće stanje;
- Ako je $\lambda_0 = 0$ tada je $P_0'(t) = \mu_1 P_1(t) \geq 0$ i stoga $P_0(t)$ monotono raste.

Napomena: $\lim_{t\to\infty} P_0(t) = P_0(\infty) = verovatnoća\ da\ je\ stanje\ apsorbujuće.$

Primer: Sistem sa jednim serverom

- Konstantna stopa dolaska λ (Poasonovi dolasci)
- Stopa zaustavljanja usluga μ (eksponencijalna raspodela)
- Stanje sistema (0- kada je sistem slobodan, 1- kada je sistem zauzet)

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$
$$P_1'(t) = \lambda P_0(t) - \mu P_1(t).$$

S obzirom da je: $P_0(t) + P_1(t) = 1$, $P_0'(t) + (\lambda + \mu)P_0(t) = \mu$.

$$P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \left(P_0(0) - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)e^{-(\lambda+\mu)t};$$
$$P_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \left(P_1(0) - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

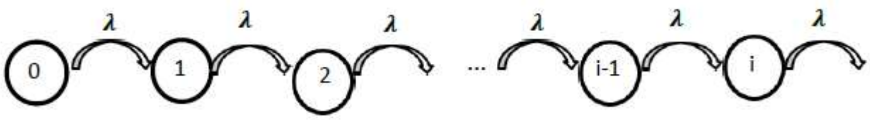
Rešenje = Ekvilibrijum distribucija + Odstupanje od distribucija sa opadajućom eksponencijalnom raspodelom

Poasonov proces

Pretpostavke:

Verovatnoća rađanja po jedinici vremena je konstanta λ.

Početna veličina populacije je 0.



Slika 9. Proces rađanja

Sva stanja su prelazna.

Dalje imamo jednačine

$$P_i'(t) = -\lambda P_i(t) + \lambda P_{i-1}(t) \quad i > 0;$$
$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t).$$

Iz ove dve jednačine sledi da je

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Dalje je

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t} P_i(t)\right] = \lambda P_{i-1}(t) e^{\lambda t} \;\Rightarrow\; P_i(t) = e^{-\lambda t} \lambda \int_0^t P_{i-1}(t') e^{\lambda t'} dt';$$

$$P_1(t) = e^{-\lambda t}\, \lambda \int_0^t e^{-\lambda t'} e^{\lambda t'} dt' = e^{-\lambda t}(\lambda t).$$

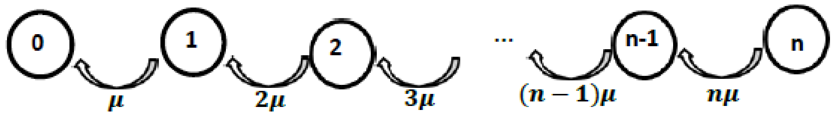
Rekurzivno: $P_i = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}$.

Broj rođenja u intervalu $(0, t) \sim P(\lambda t)$.

Čist proces umiranja

Znamo da :

- Svaki pojedinac ima istu stopu umiranja
- Početna veličina populacije je n



Slika 10. Proces umiranja

Samo stanje 0 je apsorbujuće, dok su ostala stanja prelazna.

Sada imamo jednačine:

$$P_n'(t) = -n\mu P_n(t)\ ;$$

$$P_i'(t) = (i+1)\mu P_{i+1}(t) - i\mu P_i(t) \quad i = 0,1,2, \dots n-1.$$

Iz čega sledi da je

$$P_n(t) = e^{-n\mu t}.$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{i\mu t}P_i(t)\right] = (i+1)P_{i+1}(t)e^{i\mu t} \Rightarrow P_i(t) = (i+1)e^{-i\mu t}\mu\int_0^t P_{i+1}(t')e^{i\mu t'}dt'.$$

$$P_{n-1}(t) = ne^{-(n-1)\mu t}\mu\int_0^t e^{-n\mu t'}e^{(n-1)\mu t'}dt' = ne^{-(n-1)\mu t}(1-e^{-\mu t}).$$

Rekurzivno:

$$P_i(t) = \binom{n}{i}(e^{-\mu t})^i(1-e^{-\mu t})^{n-i}.$$

Binomna distribucija: Verovatnoća opstanka u trenutku t je $e^{-\mu t}$ nezavisno od drugih.

Veza sa lancima Markova

Rekli smo da se sa λ_n definiše kao intenzitet sa kojim se rađanja događaju kada je veličina populacije n, a sa μ_n intenzitet kojim se dešavaju umiranja kada je populacija veličine n. Ovako posmatrani intenziteti rađanja i umiranja su nezavisni od vremena i zavise samo od stanja n, pa dalje ovako opisan proces rađanja i umiranja predstavlja homogeni slučajni proces Markova sa kontinuiranim vremenom.

Prema onome što smo do sada videli u ponašanju procesa rađanja i umiranja imamo sledeće elemente matrice Q:

$q_{n,n+1} = \lambda_n$ odnosno $q_{n,n-1} = \mu_n$.

I kako proces može da pređe iz stanja n samo u susedna stanja, tj. $q_{n,j} = 0$ za $|n-j| > 1$, ili da ostane u tom istom stanju, to je:

$$q_{n,n} = -(\lambda_n + \mu_n).$$

Pošto je ovde reč o teoriji redova, može se govoriti o dolasku i odlasku jedinica u sistem opsluživanja umesto o rađanju i umiranju članova predstavljene populacije. To znači da bi dolazak jedinice u sistem opsluživanja odgovarao rađanju, a odlazak jedinice iz sistema umiranju unutar populacije. Drugim rečima λ_n predstavlja intenzitet sa kojim jedinice dolaze u sistem opsluživanja ako se u njemu nalazi n jedinica, tj. μ_n predstavlja intenzitet sa kojim jedinice napuštaju sistem opsluživanja ako se u njemu nalazi n jedinica. Matrica intenziteta prelaska je oblika:

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \ \mu_1) & \lambda_1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \ \mu_2) & \lambda_2 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & \mu_{n-1} & -(\lambda_{n-1} + \ \mu_{n-1}) & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & \mu_n & -\mu_n \end{bmatrix}_{nxn}$$

Matricu Q je ovako formirana uz pretpostavku da je maksimalan broj jedinica koje mogu u jednom trenutku da budu u sistemu opsluživanja n.

Iz osobine procesa Markova sledi da su procesi dolaska jedinice u sistem(rađanje) i odlazak jedinice iz sistema(umiranje) međusobno nezavisni.

Na osnovu svega što je navedeno možemo definisati verovatnoće prelaska sistema n u susedna stanja:

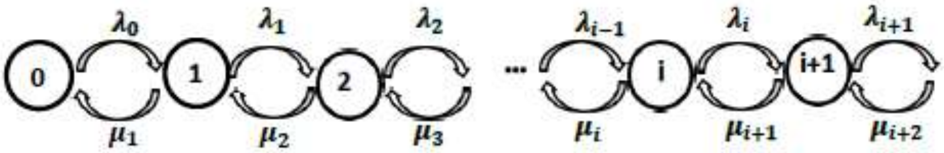
$$P[tačno\ 1\ dolazak\ u\ (t, t + \Delta t)|n\ jedinica\ u\ sistemu] = \ \lambda_n \Delta t + o(\Delta t);$$

$$P[tačno\ 1\ odlazak\ u\ (t, t + \Delta t)|n\ jedinica\ u\ sistemu] = \mu_n \Delta t + o(\Delta t);$$

$$P[tačno\ 0\ dolazaka\ u\ (t, t + \Delta t)|n\ jedinica\ u\ sistemu] = 1 - \ \lambda_n \Delta t + o(\Delta t);$$

$$P[tačno\ 0\ odlazaka\ u\ (t, t + \Delta t)|n\ jedinica\ u\ sistemu] = 1 - \mu_n \Delta t + o(\Delta t).$$

Informacije koje imamo u matrici prelaska Q mogu se prikazati i preko grafa promene stanja sistema kao u slučaju na slici ispod.



Slika 11: Prelasci stanja iz matrice Q u prikazu preko grafa

Sistem diferencijalnih jednačina koji opisuje promenu stanja sistema u vremenu dobija se zamenom matrice Q u izraz $\frac{dp(t)}{dt} = p(t) * Q$ (pri čemu je p(t) vektor verovatnoća stanja u trenutku t) i dobijamo sledeći oblik:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t);$$

.

.

.

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \lambda_{i-1}p_{i-1}(t) - (\lambda_i + \mu_i)p_i(t) + \mu_{i+1}p_{i+1}(t) \qquad i = 1, \dots, n-1;$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda_{n-1}p_{n-1}(t) + \mu_n p_n(t).$$

Za rešavanje navedenih diferencijalnih jednačina potrebno je definisati početne uslove oblika $p_i(0), i = 0,1, \dots n$ koji treba da ispunjavaju uslov $\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$.

2.3. Sistemi masovnog opsluživanja M/M/1

M/M/1 je najjednostavniji model redova čekanja koji se koristi u praksi. M/M/1 je dobra aproksimacija za veliki broj čekanja. M/M/1 sistemi čekanja pretpostavljaju Poasonov proces prijema. Ova pretpostavka je vrlo dobra aproksimacija za proces dolaska u stvarnim sistemima koji ispunjavaju sledeća pravila:

- Broj klijenata u sistemu je veoma veliki
- Uticaj jednog klijenta na performanse sistema je vrlo mali, odnosno jedan pojedinac troši veoma mali procenat sistemskih resursa
- Svi klijenti su nezavisni, tj. njihove odluke o korišćenju sistema su nezavisne od drugih klijenata.

Primer 1.

Automobili na autoputu
Ove pretpostavke su prilično opšte, pa se odnose na veliki broj sistema. Na primer, automobili koji ulaze na autoput mogli bi prethodne pretpostavke da prate na sledeći način:
1. Ukupan broj automobila koji voze na autoputu je veoma veliki;
2. Jedan automobil koristi veoma mali procenat resursa autoputa;
3. Odluku o ulasku na autoput samostalno vrši svaki vozač automobila.

Gornje napomene podrazumevaju da će Poasonov proces biti dobar za aproksimaciju dolazaka automobila na autoput.
Ako bilo koji od tri uslova nije ispunjen, ne može se pretpostaviti Poasonov proces.

Pretpostavlja se da su dolasci u skladu sa Poasonovom raspodelom sa stopom λ. To znači da će broj klijenata koji dolazi u intervalu $(0, t]$ ima Poasonovu raspodelu [7]:

$$P(N(t) = j) = e^{\lambda t}\frac{(\lambda t)}{j!} \qquad j = 0,1,2, \dots$$

Iz čega sledi da će vremena dolazaka klijenata imati eksponencijalnu raspodelu sa gustinom raspodele

$$a(x) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad x > 0;$$

Pretpostavićemo da i vreme opsluživanja ima eksponencijalnu raspodelu

$$b(x) = \mu e^{-\mu t} \qquad x > 0 \ \ .$$

Iz pretpostavki koje imamo znamo da je

$$E(vremenski\ intervali\ između\ dolazaka) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{stopa\ dolaska};$$

$$E(vremenski\ interval\ opsluživanja) = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{stopa\ opsluživanja}.$$

U teoriji redova odnos brzine dolazaka i brzine opsluživanja predstavlja koeficijent iskorišćenosti kanala za opsluživanje.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

ρ je deo vremena kada se vrši opsluživanje, odnosno predstavlja koeficijent iskorišćenosti kanala za opsluživanje. Kada posmatramo $\rho < 1$ na modelu raskrsnice to bi značilo da je stopa dolazaka manja od stope izlazaka da bi se saobraćaj odvijao glatko, $\rho \geq 1$ znači da je stopa dolazaka veća od stope izlazaka pa bi red čekanja bio beskonačan i sistem ne bi bio stabilan. Što znači da bi sistem bio stabilan neophodan i dovoljan uslov je $\rho < 1$.

ρ je deo vremena na kome server radi.

Prvo ćemo posmatrati vremenski zavisno ponašanje ovog sistema, a potom ponašanje sa ograničenjem [6].

2.3.1. Vremenski zavisno ponašanje

Eksponencijalna distribucija vrlo jednostavno opisuje stanje ovog sistema u vremenu t, odnosno broj klijenata u sistemu(tj. klijenti koji čekaju u redu i onaj koji se služi). Ne moramo znati ni kada je poslednji klijent stigao, niti se mora registrovati kada je poslednji klijent stupio na uslugu.

Neka je sa $P_n(t)$ označena verovatnoća u trenutku t ima n klijenata u sistemu $n = 0,1$ ... Prema pretpostavci eksponencijalne raspodele za $\Delta t \to 0$ imamo

$$P_0(t + \Delta t) = (1 - \lambda\Delta t)P_0(t) + \mu\Delta t P_1(t) + \sigma(\Delta t),$$

$$P_n(t + \Delta t) = \lambda\Delta t P_{n-1}(t) + (1 - (\lambda + \mu)\Delta t)P_n(t) + \mu\Delta t P_{n+1}(t) + \sigma(\Delta t),$$
$$n = 1,2 \ldots \qquad (2.3.1.1)$$

Odatle kada pustimo $\Delta t \to 0$ dobijamo skup diferencijalnih jednačina za verovatnoću $P_n(t)$.

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t),$$

$$P_n' = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda + \mu)P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) \qquad n = 1,2, \ldots \qquad (2.3.1.2)$$

Ove diferencijalne jednačine su teške za rešavanje, rešavaju se pomoću generisanja funkcija Laplasovim transformacijama. Dakle, možemo videti i da ovaj jednostavniji primer dovodi do teškog izračunavanja izraza za vremenski zavisno ponašanje od svojih stanja verovatnoća, a uopštavanjem možemo samo dodatno zakomplikovati izračunavanje. Zbog toga ćemo se fokusirati na ograničavajuće ili ravnotežno stanje ovog sistema.

2.3.2 Ograničeno ponašanje

Može se pokazati kada $t \to \infty$, $P_n' \to 0$ i $P_n(t) \to P_n$., tj. $\lim_{t\to\infty} P_n(t) = p_n$. Iz (2.3.1.2) sledi da ograničavajuća verovatnoća P_n zadovoljava jednačine:

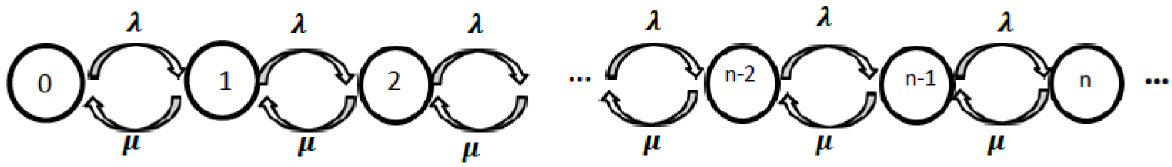
$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1 \tag{2.3.2.2}$$

$$0 = \lambda p_{n-1} - (\lambda + \mu) p_n + \mu p_{n+1}, \qquad n = 1,2, \dots \tag{2.3.2.3}$$

Znamo da verovatnoća p_n zadovoljava

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1. \tag{2.3.2.4}$$

Što se zove normalizacija jednačine. Takođe se mogu izvesti iz jednačine (2.3.2.2) i (2.3.2.3) dijagram toka što se može videti na slici 8.



Slika 12. Dijagram toka za M/M/1 model

Strelice ukazuju na moguće prelaze. Stope po kojima dolazi do prelaska su λ koja pokazuje da će doći do prelaska iz stanja n u stanje $n + 1$(dolazak klijenta) i μ za prelazak iz stanja n u $n - 1$.

Ravnotežne jednačine (2.3.2.2) i (2.3.2.3) možemo računati izjednačavanjem stopa izlaženja iz stanja n i stopa ulaženja u stanje n. Za ovaj jednostavniji model postoji više mogućnosti za rešavanje. Mi čemo u nastavku razmotriti nekoliko.

<u>Direktni metod</u>

Jednačine (2.3.2.3) su jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Njihovo opšte rešenje je oblika

$$p_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n, \qquad n = 0,1,2, \dots \tag{2.3.2.5}$$

gde su x_1 i x_2 koreni kvadratne jednačine

$$\lambda - (\lambda + \mu)x + \mu x^2 = 0.$$

Jednačina ima dve nule, odnosno $x = 1$ i $x = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$. Tada sva rešenja jednačine imaju oblik

$$p_n = c_1 + c_2 \rho^n \qquad n = 0,1,2, \ldots. \qquad (2.3.2.6)$$

Jednačina (2.3.2.4.), navodeći da je zbir svih verovatnoća jednak 1, direktno podrazumeva da je c_1 mora biti jednako sa 0. Činjenica da c_1 mora biti jednako sa 0 takođe sledi iz takođe sledi iz (2.3.2.2) zamenom rešenja iz (2.3.2.5) u (2.3.2.2).

Koeficijent c_2 konačno sledi iz jednačine normalizacije (2.3.2.4), tj. $c_2 = 1 - \rho$. Dalje možemo zaključiti da je

$$p_n = (1 - \rho)\rho^n.$$

Očigledno ravnoteža verovatnoća zavisi od λ i μ i njihovog odnosa ρ.

<u>Rekurzija</u>

Možemo koristiti (2.3.2.2) da izrazimo p_1 i p_0 što daje

$$p_1 = \rho\, p_0.$$

Zamenom ove veze u (2.3.2.3) za $n = 1$ dobićemo

$$p_2 = \rho^2\, p_{0.}$$

Zamenjivanjem navedenih relacija u (2.3.2.3) za $n = 2$ posmatramo p_3 i tako dalje. Otuda i mi možemo rekurzivno izraziti sve verovatnoće preko p_0 i dobijamo

$$p_n = \rho^n\, p_{0.}$$

Verovatnoća p_0 konačno sledi iz normalizovane jednačine (2.3.2.4).

<u>Globalni princip ravnoteže</u>

Globalni princip ravnoteže navodi da je za svaki skup stanja A, protok iz skupa A jednak je protoku u skup A. Ako primenimo globalni princip ravnoteže na skup $A = \{0,1,2, \ldots, n-1\}$ dobijamo jednostavnu relaciju

$$\lambda p_{n-1} = \mu p_n \qquad n = 1,2, \ldots.$$

Ponovljenom primenom ovog odnosa dobijamo

$$p_n = \rho^n p_0 \qquad n = 1,2, \ldots.$$

Nakon normalizacije sledi rešenje

$$p_n = (1-\rho)\rho^n.$$

Kada želimo da opišemo efikasnost sistema posmatramo više parametara. Neki od najčešćih pošto su u pitanju redovi čekanja su očekivani broj klijenata u sistemu *(L)* i očekivani broj klijenata u redu *(Lq).* Ako posmatramo da je N broj klijenata i koristeći jednačinu

$p_n = (1-\rho)\rho^n$ dobijamo.

$$L = E(N) = \sum_{i=0}^{\infty} i p_i = \sum_{i=1}^{\infty} i\ (1-\rho)\rho^i = (1-\rho)\rho \sum_{i=1}^{\infty} i\, \rho^{i-1} =$$
$$= (1-\rho)\rho\left(\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i\right)' = (1-\rho)\rho\left(\frac{1}{1-\rho}\right)' = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Ako zamenimo jednačinu $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ imamo da je $L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$.

Za očekivani broj klijenata posmatramo mogućnost da je sistem slobodan ili da je zauzet. U koliko je sistem slobodan tada u redu ima N klijenata, a kada je zauzet u redu je N-1.

Dalje je onda očekivani broj klijenata u redu u M/M/1 sistemu

$$L_q = 0 \cdot (p_0 + p_1) + \sum_{i=1}^{\infty} i p_{i+1} = \sum_{i=1}^{\infty} i(1-\rho)\rho^{i+1} = (1-\rho)\rho^2 \sum i\rho^{i-1} = (1-\rho)\rho^2\left(\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i\right)' = (1-\rho)\rho^2\left(\frac{1}{1-\rho}\right)' = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Odnosno

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}.$$

2.3.3. Vreme čekanja klijenta

Sa stanovišta klijenta vreme čekanja provedeno u redu i sistemu su dve bitne karakteristike. Kada je sistem u ravnoteži, neka su T_q i T količina vremena koju klijent provodi u redu i količina vremena koju provodi u sistemu. Pretpostavimo da sistem funkcioniše po principu "prvi stigao-prvi uslužen"(FCFS-first come-first served). Napomenućemo, server je zauzet dok su klijenti u sistemu. Kada se server pokrene on radi do kraja, a broj klijenata u sistemu ne zavisi od broja klijenata u redu, dok je vreme čekanja u serveru kritični faktor.

Po disciplini FCFS, vreme čekanja na uslugu T_q klijenata koji su došli, je vreme koje je potrebno da se usluži klijent koji je već u sistemu. Ukupno vreme u sistemu (T) je $T_q + vreme\, usluge$. Kada postoji n klijenata u sistemu, pošto vreme usluge ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom μ, ukupno vreme usluge za n klijenata ima Erlangovu gustinu verovatnoće

$$f_n(x) = e^{-\mu x} \frac{\mu^n x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Neka je $F_q(t) = P(T_q \leq \mathrm{t})$ raspodela za vreme čekanja T_q. Jasno

$$F_q(0) = P\left(T_q = 0\right) = 1 - \rho.$$

Zbog svojstva memorije eksponencijalne raspodele, preostalo vreme servisiranja klijenta takođe ima eksponencijalnu raspodelu sa istim parametrom μ. Pišemo

$dF_q(t) = P(t < T_q \leq t + dt)$ za $t \geq 0$ imamo

$$dF_q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n e^{-\mu t} \frac{\mu^n t^{n-1}}{(n-1)!} dt = (1-\rho) \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n e^{-\mu t} \frac{\mu^n t^{n-1}}{(n-1)!} dt.$$

Kada ovu jednačinu pojednostavimo, dobijamo

$$=\lambda(1-\rho)\, e^{-\mu(1-\rho)t} dt.$$

Zbog prekida raspodele u nuli T_q,dobijamo

$$F_q(t) = P\left(T_q = 0\right) + \int_0^t dF_q(t)dt = 1 - \rho e^{-\mu(1-\rho)t}.$$

Gde smo kombinovali rezultate iz prethodnih jednačina.

Neka je $E\left(T_q\right) = W_q$ i $E(T) = W$. Iz prethodne jednačine možemo izvesti

$$W_q = E\left(T_q\right) = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)};$$

i

$$V\left(T_q\right) = \frac{\rho(2-\rho)}{\mu^2(1-\rho)^2}.$$

Podsetimo se, da je T vreme provedeno u sistemu i T_q vreme usluge.

$$W = E[T] = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{(\mu-\lambda)}.$$

Poredeći jednačine za W i L, dobijamo vezu

$$L = \lambda W.$$

Slično, poređenjem jednačina za W_q i L_q dobijamo

$$L_q = \lambda W_q.$$

Rezultat $L = \lambda W$ je poznat kao Little-ov zakon u literaturi redova.

Ovaj zakon kaže da je broj klijenata u sistemu jednak prosečnom broju dolazaka klijenata u sistem pomnoženo sa prosečnim vremenom koje je serveru potrebno za opslugu jednog klijenta. Little-ov zakon se može primeniti pojedinačno na različite delove reda, modele redova ili sistem.

Period kada je sistem zauzet (Busy Period)

U životu servera možemo razlikovati ciklus. Ciklus je vreme koje protiče između dva uzastopna dolaska praznog sistema. Ciklus počinje zauzetim periodom kada server uslužuje klijenta, nakon čega sledi stanje mirovanja tokom kojeg je sistem prazan. Oni zajedno stvaraju "zauzeti ciklus". Budući da se stanje mirovanja završava dolaskom, to predstavlja vreme između dolazaka, nakon što poslednji klijent u zauzetom periodu napusti sistem. Sa eksponencijalnom raspodelom vremena dolazaka, zbog osobine gubljenja prethodnih podataka, period mirovanja takođe ima eksponencijalnu raspodelu.

Postoji nekoliko načina pomoću kojih se raspodela zauzetog perioda u M/M/1 može izvesti. Nijedan nije jednostavan. Mi ćemo objasniti okviran metod. Jasno je da je srednja vrednost "perioda zauzetosti" podeljena sa srednjom vrednosti dužine ciklusa jednaka delu vremena koji server radi, tj.:

$$\frac{E(zauzetog\ perioda)}{E(zauzetog\ perioda)+E(vremena\ mirovanja)} = \frac{E(zauzetog\ perioda)}{E(zauzetog\ perioda)+1/\lambda} = \rho.$$

Pa sledi da je

$$E(zauzetog\ perioda) = \frac{1/\mu}{1-\rho}.$$

Gledajući u osnovi Markovljev proces, zauzet period je trajanje od početka stanja 1 i traje neprestano dalje do stanja 0.(Pošto počinje zauzet period sa dolaskom, to je koliko je vremena potrebno za povratak u stanje 0.) Razmatrajući prelaske Markovljevog procesa, prelazak u zauzeti period se može dovesti pretvaranjem stanja 0 u apsorpciono stanje i svih drugih stanja u nesvodljive.

Primer 2.

Na šalteru u banci Poasonovom raspodelom stiže 10 klijenata u roku od sat vremena. Srednje vreme usluge po eksponencijalnoj raspodeli iznosi 4 minuta po jednom klijentu. Sledi da je

$$\mu = \frac{60}{4} = 15\ klijenata\ na\ sat \qquad (intenzitet\ usluge).$$

$$\rho = \frac{10}{15} = 0.0667 \qquad faktor\ iskorišćenja.$$

1) Verovatnoća da u sistemu nema klijenata, da ima jedan klijent, dva, dva ili manje , tri ili više

$$P(da\ nema\ klijenata) = 1 - \rho = 0.33333;$$
$$P(1\ klijent\ u\ sistemu) = (1-\rho)\rho = 0.2222;$$
$$P(2\ klijenta\ u\ sistemu) = (1-\rho)\rho^2 = 0.1481;$$
$$P(2\ ili\ manje\ u\ sistemu) = P(0) + P(1) + P(2) = 0.7037;$$
$$P(3\ ili\ više\ u\ sistemu\ ) = 1 - P(2\ ili\ manje\ u\ sistemu) = 0.2963.$$

2) Prosečan broj klijenata u sistemu
$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = 2\ osobe.$$
3) Prosečan broj klijenata koji čekaju u redu
$$L_q = L - \rho = 1.333\ osobe.$$
4) Prosečno vreme koje klijent provede u sistemu
$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = 0.2\ osobe\ na\ sat.$$
5) Prosečno vreme koje klijent provede čekajući u redu
$$W_q = \rho W = 0.1333\ osobe\ na\ sat.$$

Primer 3.[7]

Aerodrom ima jednu pistu. Pretpostavimo da je polazak aviona 12 na sat. Procenjuje se da svako sletanje traje 4 minuta. Pod pretpostavkom Poasonovog procesa za dolaske i eksponencijalne raspodele vremena sletanja koristićemo model M/M/1 da bi modelirali sledeće mere:

1) Korišćenje piste. Stopa dolaska = 12 na sat (λ);
   Stopa usluge = 60/4/sat = 15 na sat (μ);
   Iskorišćenost = $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{5}$.

2) Očekivani broj aviona koji čekaju da slete:
$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{(0.8)^2}{0.2} = 3.2.$$

3) Očekivano vreme čekanja
$$E(W_q) = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{12}{15(15-12)} = \frac{4}{15} sat = 16 min.$$

4) Verovatnoća da će čekanje biti duže od 5minuta? Od 10minuta? Da se ne čeka?

$$P(da\ se\ ne\ čeka) = P(T_q = 0) = 1 - \rho = 0.2;$$
$$P(T_q > t) = \rho e^{-\mu(1-\rho)t};$$
$$P(T_q > 5min) = \frac{4}{5} e^{-\frac{15\left(1-\frac{4}{5}\right)5}{60}} = \frac{4}{5} e^{-\frac{15}{60}} = 0.6230;$$
$$P(T_q > 10\ min) = \frac{4}{5} e^{-\frac{30}{60}} = 0.4852.$$

2.4. Sistemi masovnog opsluživanja M/M/1/N

U stvarnim slučajevima, redovi nikada ne postanu beskonačni, ali su ograničeni zbog prostora, vremena ili servisnog sistema. Takav model čekanja spada u kategoriju konačnih redova.

Primeri:
- Parking za vozila u supermarketu je ograničen na prostor parking zona;
- Ograničeni prostor za sedenje u restoranu.

Modeli konačnih redova ograničavaju broj klijenata dozvoljenih u servisnom sistemu. To znači da ako N predstavlja maksimalan broj klijenata dozvoljenih u servisnom sistemu, onda će (N + 1)-i klijent koji je došao otići bez učešća u servisnom sistemu ili traženju usluge [14].

Verovatnoća da nema klijenata u sistemu M/M/1/N

Servisni sistem može primiti isključivo N klijenata, a (N+1)-i klijent se neće pridružiti redu. Znamo da je verovatnoća da imamo jednog klijenta u sistemu

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_0.$$

Slično, verovatnoća da ima N klijenata u sistemu je

$$p_N = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N \cdot p_0.$$

Kako se radi o konačnom redu znamo da će zbir verovatnoća do N-tog klijenta biti 1, tj.

$$\sum_{i=0}^{N} p_i = 1.$$

$$\sum_{i=0}^{N} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \cdot p_0 = 1.$$

Pa sledi da je

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}$$

gde je $\sum_{i=0}^{N} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i$ predstavlja konačnu geometrijsku progresiju.

dalje je $p_0 = \frac{1}{\frac{1-\rho^N}{1-\rho}} = \frac{1-\rho}{1-\rho^N}$.

Verovatnoća da ima N klijenata u sistemu M/M/1/N

Zbog ograničenja dozvoljenog broja klijenata u sistemu, za servisni sistem je bitno da se sazna očekivani broj klijenata koji su izgubljeni. Ovo se može otkriti određivanjem verovatnoće klijenata koji se nisu pridružili sistemu.

U modelu M/M/1/N koeficijent iskorišćenja ρ može da premaši celinu, takođe N može da bude maksimalan broj klijenata koji čekaju u redu.

U redovima M/M/1/N klijenti stižu u skladu sa Poasonovim procesom sa stopom λ, a budu usluženi u skladu sa eksponencijalnom raspodelom sa stopom 1/ μ od strane jednog servera. Razlika od reda M/M/1 je što u sistemu može biti primljeno najviše N klijenata. Klijent koji dolazi i zatekne pun sistem, odlazi. Za analizu modela M/M/1 koristimo proces rađanja i umiranja i biramo parametar tako da se Poasonovi dolasci zaustave kada ima N klijenata u sistemu. Parametri eksponencijalne usluge su nepromenjeni. Tada je

$$\lambda = \begin{cases} \lambda, & n < N; \\ 0, & n \geq N' \end{cases}$$

$$\mu_n = \mu \quad n = 1,2,\ldots N.$$

Dalje možemo zapisati jednačine balansa toka:

$$\lambda p_0 = \mu p_1;$$

$$\lambda p_1 = \mu p_2;$$

$$\ldots..$$

$$\lambda p_i = \mu p_{i+1} \qquad i \leq N;$$

$$p_i = \rho^i p_0 \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Sistem je ergodičan pa imamo $\sum_{i=0}^{N} p_i = 1$.

Dalje kada zamenimo $p_i = \rho^i p_0$ dobijamo

$$\sum_{i=0}^{N} \rho^i p_0 = 1.$$

Pa je

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N} \rho^i}.$$

Podsetimo se da je

$$\sum_{i=0}^{N} \rho^i = \frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho}.$$

Možemo dalje pisati:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}.$$

I onda možemo dobiti vrednost za p_i

$$p_i = \rho^i \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \qquad i \leq N+1.$$

Srednji broj klijenata u sistemu, L_s, može se odrediti koristeći verovatnoću da ima konačno N klijenata u sistemu.

$$L_s = \sum_{i=0}^{N} i \cdot p_i = p_0 \cdot \sum_{i=0}^{N} i \cdot \rho^i =$$

$$= \left(\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right) \cdot \rho \cdot \left(\sum_{i=0}^{N} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^i)\right)$$

$$= \left(\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right) \cdot \rho \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho}\right)\right)$$

$$= \rho \cdot \left(\frac{1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}\right), \rho \neq 0.$$

Znamo da za konačan red verovatnoća da će biti i klijenata (i>0) možemo pisati kao

$$P(i > 0) = 1 - p_0.$$

Dalje je broj klijenata u redu dat sledećom formulom

$$L_q = L_s - (1 - p_0).$$

Ako p_N predstavlja verovatnoću za klijente koji se neće pridružiti sistemu. Onda λp_N predstavlja srednju potrošnju koja je izgubljena zbog konačnog reda. Dakle efektivna brzina dolaska λ_e u ovim redovima se predstavlja kao

$$\lambda_e = \lambda - \lambda p_N;$$

$$\lambda_e = \lambda(1 - p_N).$$

Koristeći efektivnu stopu i Little-ov zakon mogu se utvrditi i druge mere u redu M/M/1/N koje ćemo u nastavku navesti.

Prosečno vreme čekanja u sistemu, W_s

$$W_s = \frac{L_q}{\lambda(1-p_N)} + \frac{1}{\mu}.$$

Prosečno vreme čekanja u redu , W_q

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu}.$$

Primer.

Stopa dolazaka automobila na parking manjeg tržnog centara je 20 automobila na sat. Stopa odlazaka je 18 automobila na sat. Kapacitet parking zone je ograničen na 6 automobila. Stopa dolazaka i odlazaka su u skladu sa Poasonovom distribucijom. Odrediti koji red je u pitanju i sve mere reda.

Sledi da je

Stopa dolazaka $\lambda = 20 \frac{automobila}{h}.$

Stopa odlazaka $\mu = 18 \frac{automobila}{h}.$

Koeficijent iskorišćenja $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{18} = 1.11.$

Kapacitet parkinga $N = 6\ automobila.$

$$p_{N=6} = \left(\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right) \cdot \rho^N$$

$$= \left(\frac{1-1.11}{1-(1.11)^7}\right) \cdot \rho^6$$

$$= (0.1019) \cdot 1.88$$

$$= 0.1917.$$

$$L_s = \rho \cdot \left(\frac{1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})} \right)$$

$$= 1.11 \cdot \left(\frac{1-7\rho^6 + 6 \cdot 1.11^7}{(1-1.11)(1-1.11^7)} \right)$$

$$= 1.11 \cdot \frac{0.3728}{0.1212}$$

$$= 1.11 \cdot 3.075 = 3.41\ automobila.$$

$\lambda_e = \lambda(1-p_N) = 20(1-0.19170) = 16.166.$

$L_q = L_s - (1-p_0).$

$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} = \frac{1-1.11}{1-(1.11)^7} = 0.1019.$

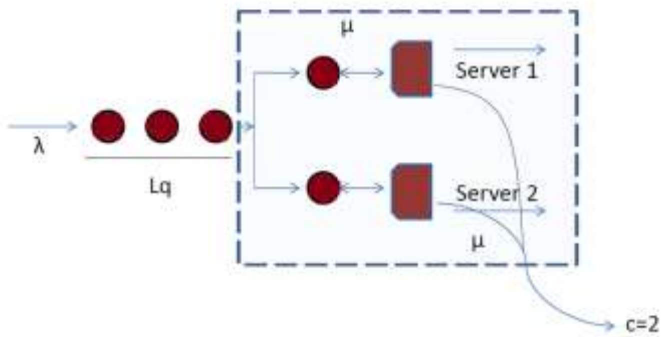
$L_q = L_s - (1-p_0) = 3.41 - (1-0.1019) = 2.512\ automobila.$

$W_s = \frac{L_q}{\lambda_e} + \frac{1}{\mu} = \frac{2.512}{16.166} + \frac{1}{18} = 0.2109\ sati.$

$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = 0.2109 - \frac{1}{18} = 0.1553\ sati.$

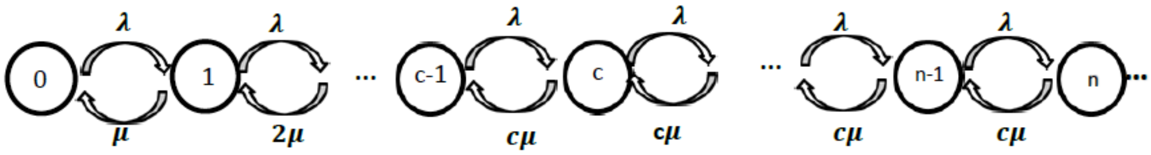
2.5. Sistemi masovnog opsluživanja M/M/C

M/M/C je red koji se sastoji od c identičnih servera. To je model koji se najviše koristi u analizi servisa stanica sa više servera kao što su banke, šalteri, kase u prodavnicama, prijave na aerodromu i slično. Pretpostavlja da dolazak klijenata prati Poasonov proces sa stopom $\lambda_n = \lambda$ za svako n , da vreme servisiranja ima eksponencijalnu raspodelu, da se usluga vrši po principu FIFO. Svaki od c servera vrši uslugu nezavisno i isto sa eksponencijalnom stopom μ. Kada je broj klijenata veći ili jednak sa c, onda su svi serveri zauzeti i efektivna stopa usluge je $c\mu$. Ako je broj klijenata manji od c, onda je samo n od c servera zauzeto i efektivna stopa usluge je $n\mu$.



Slika 13. Model M/M/C sa 2 servera,odnosno kada je c=2 [14]

Takođe pretpostavljamo da klijenti koji dolaze čine jedan red, a onaj na čelu linije čekanja stupa na uslugu kada je server slobodan. Nijedan server nije u stanju mirovanja sve dok postoje klijenti za serviranje. Stanje sistema je potpuno odlikovano brojem klijenata u sistemu. Neka p_n označava ravnotežu verovatnoća kada je n klijenata u sistemu. Slično kao za M/M/1 možemo izvesti formule za ravnotežne verovatnoće p_n.



Slika 14. Dijagram prelaza stanja za model M/M/C

Umesto izjednačavanja toka iz i u jedno stanje n, dobijamo slične formule izjednačavanjem toka iz i u skup stanja $\{0,1,2, \dots n-1\}$. Ovo rezultira izjednačavanjem toka stanja iz i u stanje između dva susedna stanja n-1 i n i daje

$$\lambda p_{n-1} = \min(n, c)\mu p_n \quad n = 1,2, \dots$$

Rekurzivni postupak koji smo koristili u modelu M/M/1, obezbeđuje sledeće rešenje kada koristimo u modelu M/M/C:

$$n\mu p_n = \lambda p_{n-1} \qquad n = 1,2,\dots,c;$$
$$c\mu p_n = \lambda p_{n-1} \qquad n = c+1, c+2, \dots$$

Zbog toga,

$$p_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 \qquad 0 \le n < c;$$
$$p_{c+n} = \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^n p_c \qquad n = 0,1,2,\dots.$$

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{n-c} p_c \qquad n = c, c+1, \dots$$

Ako pišemo da je $\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$ da pojednostavimo, dobićemo

$$p_n = \frac{1}{n!}(c\rho)^n p_0 \qquad 0 \le n < c;$$
$$= \frac{1}{c!}(c\rho)^c \rho^{n-c} p_0 \qquad c \le n < \infty.$$

Koristeći uslov $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ dobijamo

$$p_0 = \left[\sum_{i=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^i}{i!} + \frac{(c\rho)^c}{c!(1-\rho)}\right]^{-1};$$
$$p_n = \frac{(c\rho)^n}{n!} p_0 \qquad 0 \le n < c\ ;$$
$$p_n = \frac{c^c \rho^n}{c!} p_0 \qquad c \le n < \infty.$$

Pod uslovom da je $\frac{\lambda}{c\mu} = \rho < 1$.

Sledi da smo indukcijom dobili

$$p_n = \frac{(c\rho)^n}{n!}\, p_0 \quad n = 0, \dots, c-1$$

i

$$p_{c+n} = \rho^n p_c = \rho^n \frac{(c\rho)^c}{c!} p_0 \quad n = 0,1,2\dots$$

Verovatnoća p_o sledi iz normalnosti, dajući

$$p_o = \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} + \frac{(c\rho)^c}{c!} \cdot \frac{1}{1-\rho}\right)^{-1}.$$

Važna karakteristika je verovatnoća da posao mora da čeka. Označićemo ovu verovatnoću sa Π_w. Obično se naziva verovatnoća kašnjenja.

$$\Pi_w = p_c + p_{c+1} + p_{c+2} + \cdots =$$

$$= \frac{p_c}{1-\rho} = \frac{(c\rho)^c}{c!} \cdot \left((1-\rho) \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} + \frac{(c\rho)^c}{c!} \right)^{-1} . \qquad (2.5.1)$$

<u>Prosečna dužina reda i srednje vreme čekanja</u>

Iz ravnotežne verovatnoće direktno dobijamo za prosečnu dužinu čekanja

$$E(L_q) = \sum_{n=0} n\, p_{c+n} = \frac{p_c}{1-\rho} \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n =$$
$$= \Pi_w \cdot \frac{\rho}{1-\rho} \ . \qquad (2.5.2)$$

Pa dalje iz Little-ovog zakona

$$E(W) = \Pi_w \cdot \frac{1}{1-\rho} \cdot \frac{1}{c\mu} \ . \qquad (2.5.3)$$

Do formula $E(L_q)$ i $E(W)$ se takođe može doći koristeći tehnike srednje vrednosti. Ako je neki server slobodan prilikom dolaska klijenta, vreme čekanja je nula. Ako su svi serveri zauzeti i postoji nula ili više klijenata koji čekaju, onda novi dolazni klijenti moraju prvo da sačekaju do prvog odlaska i da sačekaju da se usluže klijenti koji su došli pre njih.
Vreme između dva doslaska je minimum od c eksponencijalnih servisnih vremena sa sredinom $\frac{1}{\mu}$ i to je eksponencijalno sa sredinom $\frac{1}{c\mu}$.

Dalje imamo

$$E(W) = \Pi_w \frac{1}{c\mu} + E(L_q) \frac{1}{c\mu}.$$

Zajedno sa Little-ovim zakonom opet dobijamo formule (2.5.2) i (2.5.3).

Sledeća tabela nam prikazuje verovatnoće čekanja i srednje vreme čekanja u redu M/M/C sa sredinom vremena usluživanja 1 za $\rho = 0{,}9$.

C	Π_w	$E(W)$
1	0.90	9.00
2	0.85	4.26
5	0.76	1.53
10	0.67	0.67
20	0.55	0.28

Tabla 2.5.1: Karakteristike izvršenja modela M/M/C za $\mu = 1$ i $\rho = 0.9$ [6]

Vidimo da se verovatnoća odlaganja polako smanjuje kada se c povećava. Srednje vreme čekanja ipak se brzo smanjuje(malo brže od 1/c). Sistem se može posmatrati i na drugi način. Možemo da umesto posmatranja stope zauzetosti mašine posmatramo srednju vrednost mašina koje miruju. To ćemo nazvati visak kapaciteta. Sledeća tabela prikazuje srednje vreme čekanja i srednji broj klijenata u sistemu za fiksni višak kapaciteta(umesto za fiksnu stopu zanimanja kao u prethodnoj tabeli) i c varira od 1 do 20.

C	ρ	$E(W)$	$E(L)$
1	0.9	9.00	9
2	0.95	9.26	19
5	0.98	9.50	51
10	0.99	9.64	105
20	0.995	9.74	214

Tabla 2.5.2: Karakteristike izvršenja modela M/M/C za $\mu = 1$ i fiksni višak kapaciteta za 0.1 server. [6]

Iako se prosečan broj klijenata u sistemu naglo povećava, srednja vrednost vremena čekanja ostaje skoro konstantna.

Mere u sistemu opsluživanja M/M/C

Prvo ćemo odrediti broj klijenata u redu,L_q. U sistemu neće biti reda formiranog dok broj klijenata nije manji ili jednak broju servera. Klijent će ući u red ako po dolasku u sistem pronađe sve servere zauzete. Broj klijenata u redu je $n - c$, pa je

$$L_q = \sum_{n=c}^{\infty}(n-c)p_n.$$

Da definišemo L_q zamenićemo $j = n - c$ ili $n = c + j$ u gornju jednačinu i dobićemo

$$L_q = \sum_{j=0}^{\infty} j p_{c+j}.$$

Dalje je

$$p_{c+j} = \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda}{2\mu} + \cdots + \frac{\lambda}{c\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^j p_0$$
$$= \frac{(\rho)^c}{c!c^j}\rho^j p_0.$$

Sada je

$$L_q = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j(\rho)^c}{c!\,c^j}\rho^j p_0$$
$$= \left(\frac{\rho^{c+1}}{c!\,c}\right) p_0 \sum_{j=0}^{\infty} j\left(\frac{\rho}{c}\right)^{j-1}.$$

Što možemo pisati i kao

$$= \frac{\rho^{c+1}}{c!\,c} \cdot p_0 \cdot \left(\frac{\partial\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{c}\right)^j\right)}{\partial\left(\frac{\rho}{c}\right)}\right)$$

$$= \frac{\rho^{c+1}}{c!\,c} \cdot p_0 \cdot \left(\frac{\partial\left(\frac{1}{1-\frac{\rho}{c}}\right)}{\partial\left(\frac{\rho}{c}\right)}\right) = \left(\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\,(c-\rho)^2}\right) \cdot p_0\,.$$

Nakon definisanja L_q, uvek možemo definisati W_q pomoću Little-ovog zakona.

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}.$$

Vreme čekanja klijenata u sistemu ćemo dobiti kada na W_q dodamo vreme usluživanja.

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}.$$

Broj klijenata koji čekaju u sistemu je

$$L = \lambda W = \lambda W_q + \frac{\lambda}{\mu}.$$

Primer.

Možemo posmatrati kabine u butiku. Posmatraćemo slučaj da postoji dve kabine u butiku. Pretpostavićemo da je stopa dolazaka klijenata 10 na sat. Da se klijenti u proseku zadrže oko 10 minuta u butiku dok isprobaju više stvari da vide šta im najviše odgovara. Proces dolazaka i usluga ima eksponencijalnu rasporedu.
Posmatraćemo koja je verovatnoća da su obe kabine slobodne, koja je verovatnoća da će biti slobodna kabina čim uđe novi klijent, koja je verovatnoća da klijent neće zateći red kada stigne u butik.
Red koji posmatramo je M/M/2.

- Verovatnoća da su obe kabine slobodne (to je jednako verovatnoći da nema nijednog klijenta u butiku)

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{c-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^c}{c!} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{\rho}{c}}\right)\right]^{-1} = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2\left(1-\frac{\rho}{c}\right)}\right)^{-1}.$$

  Ako je $c = 2, \lambda = 10\ na\ sat \quad \mu = 6\ na\ sat$

$$\rho = \frac{10}{6} = 1.666\ ;$$

  Pa je dalje

$$P_0 = 0.09.$$

- Verovatnoća da će klijent moći da koristi kabinu odmah po dolasku

$$\begin{aligned} &P(klijent\ će\ moći\ da\ koristi\ kabinu\ odmah\ po\ dolasku) \\ &\quad = P(da\ nema\ klijenata\ u\ butiku) \\ &\quad + P(da\ ima\ jedan\ klijent\ u\ butiku) \end{aligned}$$

  tj.

$$\begin{aligned} &P(klijent\ će\ moći\ da\ koristi\ kabinu\ odmah\ po\ dolasku) = \\ &= P_0 + P_1 = P_0 + \rho P_0 = 0.24. \end{aligned}$$

- Verovatnoća da nema nikog pri dolasku

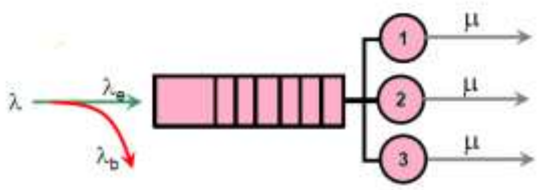
$$P(nema\ nikog\ pri\ dolasku) = P_0 + P_1 + P_2 = P_0 + \rho P_0 + \rho^2 P_0 = 0.368.$$

2.6. Sistem masovnog opsluživanja M/M/C/N

Ovaj model ima ograničen kapacitet klijenata koji mogu čekati u redu sa N. Kao i kod primera sa jednim serverom u praksi se uglavnom javljaju problemi gde čekanje u redu ima ograničen kapacitet, a klijenti koji ne mogu da stanu u red se gube. Karakteristike modela redova čekanja M/M/C/N su :

- Dolasci u skladu sa Poasonovim procesom sa stopom λ;
- Vreme usluge klijenata ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom μ;
- Postoji c servera koji uslužuju klijente po redosledu dolazaka i svi c serveri su nezavisni;
- Klijenti koji će biti usluženi jesu oni do popunjenja kapaciteta N, jasno je da je $N \geq c$.

Primer: Model sa tri servera



Slika 15. Primer modela M/M/3/N

Kada je u serveru samo jedan klijent odnosno $N = 1$, tada će samo jedan server biti zauzet i brzina usluge će biti μ.
Kada je $N = 2$, tada će biti zauzeta dva servera i brzina usluge će biti 2μ.
Kada je $N = 3$, tada će biti zauzeta tri servera i brzina usluge će biti 3μ.
Kada je $N = 4$, tada će biti zauzeta četiri servera i brzina usluge će biti 3μ.

Znamo da je stopa dolazaka bilo kog klijenta po redu λ
i da je brzina usluge $n\mu$ za $n \leq c$
i da je brzina usluge $c\mu$ za $c < n \leq N$.

Rekurzivni postupak koji smo koristili u modelu M/M/1 možemo i dalje koristiti pa imamo:

$$n = 0 \qquad \lambda p_0 = \mu p_1;$$

$$n = 1 \qquad \lambda p_1 + \mu p_1 = \lambda p_0 + 2\mu p_2 \Leftrightarrow p_1(\lambda + \mu) = \lambda p_0 + 2\mu p_2;$$

$$n = 2 \qquad \lambda p_2 + 2\mu p_2 = \lambda p_1 + 3\mu p_3 \Leftrightarrow p_2(\lambda + 2\mu) = \lambda p_1 + 3\mu p_3;$$
$$n = 3 \qquad \lambda p_3 + 3\mu p_3 = \lambda p_2 + 4\mu p_4 \Leftrightarrow p_3(\lambda + 3\mu) = \lambda p_2 + 4\mu p_4;$$
...
$$n = c \qquad \lambda p_c + c\mu p_c = \lambda p_{c-1} + (c+1)\mu p_{c+1} \Leftrightarrow p_c(\lambda + c\mu) = \lambda p_{c-1} + (c+1)\mu p_{c+1};$$
$$n = c+1 \quad \lambda p_{c+1} + (c+1)\mu p_{c+1} = \lambda p_c + (c+2)\mu p_{c+2} \Leftrightarrow p_{c+1}(\lambda + (c+1)\mu) = \lambda p_c + (c+2)\mu p_{c+2};$$
...
$$n = N \qquad c\mu p_N = \lambda p_{N-1}.$$

Rešenje ovih jednačina je:

$$\lambda p_0 = \mu p_1 \Longrightarrow \quad p_1 = (\lambda/\mu)p_0;$$
$$\lambda p_1 = 2\mu p_2 \Longrightarrow \quad p_2 = (\lambda/2\mu)p_1;$$
$$\lambda p_2 = 3\mu p_3 \Longrightarrow \quad p_3 = (\lambda/3\mu)p_2;$$
$$\lambda p_3 = 4\mu p_4 \Longrightarrow \quad p_4 = (\lambda/4\mu)p_3;$$
$$\dots$$
$$\lambda p_{n-1} = n\mu p_n \Longrightarrow \quad p_n = (\lambda/n\mu)p_{n-1} \quad n < c;$$
....
$$\lambda p_{n-1} = c\mu p_n \Longrightarrow \quad p_n = \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right) p_{n-1} \quad n \geq c;$$
...
$$\lambda p_{N-1} = c\mu p_N \Longrightarrow \quad p_N = \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right) p_{N-1}\,.$$

Kada sve jednačine izrazimo kao funkciju od p_0 i zamenimo $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$ dobićemo:

$$p_1 = \rho\, p_0;$$
...
$$p_n = \left(\frac{\rho^n}{c!c^{n-c}}\right) p_0 \quad n \geq c;$$
$$p_N = \left(\frac{\rho^N}{c!c^{N-c}}\right) p_0.$$

Koristeći uslov da je $\sum_{n=0}^{N} p_n = 1$ dobijamo

$$p_0 = \left[\sum_{i=0}^{c-1} \frac{\rho^i}{i!} + \sum_{i=c}^{N} \frac{\rho^i}{c!\, c^{i-c}}\right]^{-1}.$$

Zbog konačnosti sume je uvek $p_0 > 0$. Sledi da je

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 \quad , \quad n < c\,;$$

$$p_n = \frac{\rho^n}{c!c^{n-c}} p_0 \quad , c \leq \; n \leq N\,.$$

3. Primena redova čekanja u saobraćaju

Teorija redova je matematička studija čekanja. U teoriji čekanja model je konstruisan tako da se mogu predvideti dužine i vreme čekanja. Pitanje čekanja je predmet naučne rasprave zato što ne postoji društvo koje se ne suočava sa problemom čekanja. Uloga prevoza u ljudskom životu je velika. Efikasni transportni sistem igra važnu ulogu u održavanju dnevnih potreba u životu građana. On uključuje pristup uslugama koje su ključne za život svih pojedinaca, kao što su zapošljavanje, obrazovanje, zdravstvene usluge i slobodno vreme. Na pojedinačnom nivou, smatra se da je transport ključni faktor za društvo, jer daje pristup privrednim aktivnostima, olakšava porodični život i pomaže održavanju društvene mreže.

U teoriji redova čekanja, obraća se velika pažnja na pitanje o tome na koju traku na putu je najbolje ući, gde najbolje znači traka sa minimalnim vremenom provedenim u sistemu. U mnogim situacijama, kao što su paralelni redovi sa identičnim serverima, najbolja traka za pridruživanje je najkraća linija. Međutim, pojavljuju se situacije u kojima bi, kako bi se minimiziralo vreme čekanja, trebalo pridružiti redovima sa najvećim brojem klijenata. Takve situacije uključuju sistem sličnog semafora u kojem putnik želi da pređe magistralu na bilo kojoj traci. Što je duži red kod bilo kog crvenog svetla, veća je verovatnoća da će svetla uskoro postati zelena.

Operativno istraživanje je naučni pristup za analizu problema i donošenje najbolje odluke. U operativnim istraživanjima, teorija redova je matematička tehnika koja minimizira vreme čekanja određenog klijenta u sistemu čekanja. Kad god se problem gustine saobraćaja javlja u toku upravljanja saobraćajem, u redovima čekanja teorija i njena primena uvek dolaze u razmatranje. Gustina saobraćaja je situacija na putnoj mreži koja se javlja kada se upotreba puteva povećava i karakteriše se sporijim brzinama, dužim vremenom putovanja i povećanom količinom vozila koja čekaju. Gust saobraćaj se takođe može dogoditi usled nepredviđenih događaja na autoputu, kao što su nesreća ili radovi na putevima, što može smanjiti kapacitet puteva ispod normalnih nivoa.

Gustina saobraćaja je pojava povećanog kretanja saobraćaja u saobraćajnom sistemu. To se najbolje vidi kada se nivo potražnje za kretanje približava ili premašuje sadašnje kapacitete. Saobraćajne gužve predstavljaju zajednički, ne neizbežni aspekt saobraćajne aktivnosti u regionu, naročito u urbanim područjima. Takođe se veruje da su velika količina vozila, neadekvatna infrastruktura i iracionalna distribucija razvoja glavni razlozi za povećanje saobraćajne gužve. Zbog sve većeg broja automobila potrebno je i širenje putne mreže, odnosno izgradnja novih puteva da bi gustina saobraćaja bila što bolja. Takođe može da se posmatra analiza primene modela teorije redova u kontekstu planiranja transportnih terminala. Kada zapremina železničkog servisa na terminalu prevazilazi kapacitet servisa, neizbežno se pojavljuju redovi. Vreme provedeno u redu je ekonomski nepoželjno, dok s druge strane troškovi su povezani sa neupotrebljivim servisima.

Glavna svrha za proučavanje redova je da omogući predviđanje onoga što bi se dogodilo, ukoliko se izvrše određene promene parametara unutar sistema ili njegovih komponenti. Drugi razlog je sticanje razumevanja, koji može pomoći planerima u izradi metodologija koja na neki način može poboljšati sistem, čime se postiže ravnoteža između troškova čekanja i usluga.

Studija pokazuje da procenat vremena koji objekat ostaje u stanju mirovanja zavisi od stope dolazaka, brzine odlaska i broja operativnih servera. Zapošljavanje velikog broja servera dovodi do visokih proporcija vremena neaktivnosti u objektu. Zbog toga je ekonomičnije povećati stopu pružanja usluga, a ne povećati broj servera.

Operativni model se ponovno dizajnira korišćenjem performansi, a parametri su određeni na osnovu terenskih opservacija, ispitane efikasnosti i potencijala za dizajniranje modela minimalnih troškova.

Dokazano je da se modeli teorije redova čekanja mogu koristiti kao objektivni, pouzdani analitički alati za donošenje odluka u planiranju i upravljanju u saobraćaju.

Takođe, u saobraćaju su posmatrani vozači dok čekaju na semaforu. Vreme čekanja može se razlikovati od trenutnog vremena čekanja. Kroz sveobuhvatnu jednu video anketu pokazuje se da je to percipirano vreme čekanja koje zavisi ne samo od trenutnog vremena čekanja, već od vremena čekanja i na drugim faktorima kao što je broj stanica u redu i prisustvo crvenog talasa između susednih raskrsnica.

Oba vremena čekanja mogu biti vrlo kratka i veoma duga, verovatno će biti precenjeno. U poređenju sa dugim zastojem čekanje, pomeranje i zaustavljanje nekoliko puta na raskrsnicama(usled kratkih ciklusa signala) dovodi do nižih percepcija čekanja. Kada prolazimo dve susedne raskrsnice, vozači ne vole da se zaustavljaju na obe raskrsnice, pogotovo ako je druga stanica relativno blizu.

Jedan od pristupa za modeliranje saobraćajnog toka na signaliziranoj raskrsnici jeste teorija redova čekanja. Saobraćajno zagušenje na autobuskim stajalištima smanjilo je efikasnost usluge javnog transporta ozbiljno u nekim državama, pa je ključno da sistematski proučavaju svoju teoriju i metode. Međutim, postojećim studijama nedostaje teoretski model efikasnosti računarstva. Zbog toga su proučavani modeli izračunavanja zastoja autobusa pod različitim uslovima. Prvo, može da bude analiziran postupak kojim se autobusi odlažu u garažu i utvrđeno je da se kašnjenje može podeliti na kašnjenje ulaska i kašnjenje izlaska. Drugo, formirani su modeli za raspored autobusa, a funkcije ravnotežnog rasporeda su predložene primenom ugrađenog Markovog lanca na tradicionalni model teorije čekanja u stabilnom stanju. Treće, izlazno kašnjenje se proučava korišćenjem teorije redova i teorije prihvatanja praznine. Na kraju, predloženi modeli se potvrđuju korišćenjem polja izmerenih podataka, a zatim se razmatraju faktori koji utiču na kašnjenje. Sa ovim modelima lako se procenjuje kašnjenje saznajući karakteristike rasporeda vremena boravka i obima saobraćaja na ivici trake na različitim lokacijama i u različitim periodima. Ona može pružiti osnovu za procenu efikasnosti autobuskih gužvi. Literatura korišćena pri izradi ovog poglavlja rada bazira se na [9].

3.1. Redovi čekanja i analiza saobraćajnog toka

Svrha teorije modela čekanja u saobraćaju je da obezbedi sredstva za procenu važnih mera performansi autoputa, uključujući i kašnjenja vozila i dužine redova čekanja. Ovakve procene su od ključnog značaja za projektovanje saobraćajnice i kontrolu saobraćaja, uključujući i vremenski raspored prometnih veza na raskrsnicama. Modeli redova čekanja potiču iz osnovnih pretpostavki o obrascima dolaska, karakteristikama odlaska i discipline u redu. Postoje dve mogućnosti za stopu dolazaka vozila:

- Jednaki vremenski intervali;
- Eksponencijalna raspodela vremenskih intervala.

Pored pretpostavki o dolasku vozila, izvođenje modela redova zahteva pretpostavke koje se odnose na karakteristike odlaska vozila. Od posebnog značaja je raspodela vremena za odlazak vozila - na primer vreme za prolaz kroz raskrsnicu na početku zelenog signala, vreme potrebno za plaćanje putarine na naplatnoj rampi ili vreme potrebno vozaču pre nego što odluči da nastavi nakon što se zaustavi na znak stop. Kao što je bio slučaj kod dolaska, s obzirom na prosečnu stopu odlaska vozila, pretpostavka je determinističke ili eksponencijalne raspodele.

Još jedan važan aspekt modela redova je broj raspoloživih kanala usluge. Za većinu primena u saobraćaju postoji samo jedan uslužni kanal, kao što je traka za autoput ili grupa traka koje prolaze kroz raskrsnicu. Međutim, može se u nekim primenama u saobraćaju susresti i više kanala za uslugu, na primer na naplatnim rampama i na ulazima na mostove i granične prelaze. Konačna neophodna pretpostavka se odnosi na discipline u redovima čekanja. U ovoj primeni, dva modela su popularna za razvoj modela čekanja: FIFO i LIFO. Za gotovo sve saobraćajno orijentisane redove, FIFO je mnogo prihvatljivija disciplina. Modeli redova čekanja se često identifikuju pomoću tri vrednosti. Prva vrednost ukazuje na pretpostavku brzine dolaska, druga vrednost daje pretpostavku stope odlaska, a treća vrednost označava broj kanala za uslugu. Za pretpostavke o dolasku i odlasku u saobraćaju, mi ćemo koristiti eksponencijalnu raspodelu.

Model za čekanje koji pretpostavlja jedan odlazni kanal i eksponencijalnu raspodelu vremena odlaska pored eksponencijalno raspoređenog vremena dolaska primenjuje se u nekim primenama u saobraćaju. Na primer, eksponencijalno raspodeljeni obrasci odlaska mogu biti opravdana pretpostavka na rampi na carini u kojoj neki dolazni vozači imaju ispravne putne isprave i mogu brzo proći, a drugi imaju putne isprave koje zahtevaju dodatne provere, što dovodi do raspodele odlaska prema nekoj srednjoj stopi odlaska.

Pod M/M/1 pretpostavkama, može se pokazati da se primenjuju sledeće jednačine mera čekanja:

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho};$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)};$$

$$W = \frac{1}{(\mu-\lambda)}.$$

gde su L_q -prosečna dužina reda vozila, W_q- srednje vreme čekanja vozila u redu, W-srednje vreme provedeno u sistemu.

Primer 1:

Vozila stižu na ulaz u rekreativni park. Postoji jedna kapija(na kojoj se moraju zaustaviti sva vozila), gde se deli besplatna brošura. Park se otvara u 8:00 časova, pri čemu vozila počinju da stižu prosečnom brzinom od 180 vozila na čas do kraja radnog dana. Ako je vreme potrebno za deljenje brošure 15 sekundi pod pretpostavkom, opisaćemo operativne karakteristike modela reda M /M/1.

Ako hoćemo da prikažemo stopu dolaska i odlaska po minutu sledi da je:

$$\lambda = \frac{180\frac{vozila}{h}}{60\ min/h} = 3\ vozila\ po\ minutu \text{ za svako } t\ ;$$

$$\mu = \frac{60 min/sek}{15 sek} = 4\, min \text{ za svako } t\ ;$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.75.$$

Pa ćemo primenjujući ove vrednosti dobiti:

$$L_q = \frac{(0.75)^2}{1-0.75} = 2.25;$$

$$W_q = \frac{3}{4(4-3)} = 0.75 \min po\ \ vozilu;$$

$$W = \frac{1}{(4-3)} = 1 \min po\, vozilu.$$

Opšta formulacija modela M/M/1 reda je M/M/C red, pri čemu je C ukupan broj kanala za uslugu. M/M/C red je logična pretpostavka za naplatnu rampu ili na mostovima za plaćanje, gde često postoji više od jednog kanala za uslugu. Parkiralište je još jedan primer, pri čemu je C broj parking mesta u parceli. M/M/C čekanje se takođe često sreće i u primenama koje nisu u transportu, kao što su sigurnosne provere na aerodromu i redovi u samoposlugama.

Na sledećem primeru ćemo posmatrati mere modela M/M/C gde ρ ne mora biti striktno manje od 1, odnosno model dozvoljava i da je ρ veće od jedan ali uz uslov da je $\frac{\rho}{c} < 1$.

$$p_o = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!(1-\rho/c)}};$$

$$p_n = \frac{\rho^n p_o}{n!} \quad ,n \leq c;$$
$$p_n = \frac{\rho^n p_o}{c^{n-c} c!} \quad ,n > c;$$

$$p_{n>c} = \frac{\rho^{c+1} p_o}{c!\, c(1-\rho/c)} \ .$$

gde je p_o- verovatnoća da nema vozila u sistemu;

p_n-verovatnoca da ima n vozila u sistemu;
$p_{n>c}$-verovatnoća čekanja u redu (verovatnoća da je broj klijenata za opslugu veći od broja uslužnih servera);
n-broj vozila u sistemu;
c- broj servera u sistemu;
ρ-intenzitet saobraćaja.

Dalje je

$$L_q = \frac{p_0 \rho^{c+1}}{c!c} \cdot \left[\frac{1}{(1-\rho/c)^2}\right];$$

$$W_q = \frac{\rho + L_q}{\lambda} - \frac{1}{\mu};$$

$$W = \frac{\rho + L_q}{\lambda}.$$

Primer 2.

Na ulazu na mostu, četiri štanda su otvorena za plaćanje putarine. Vozila na most dolaze sa prosečnom brzinom od 1200 vozila na sat, a na pultu vozači u proseku ostaju 10 sekundi kako bi platili za svoje korišćenje. Za stopu dolaska i odlaska se može pretpostaviti da su eksponencijalno raspoređeni. Kako bi se prosečna dužina reda, vreme u sistemu i verovatnoća čekanja u redu promenili ako bi otvorili i peti štand?

Koristeći formule za model M/M/C, prvo ćemo izračunati za slučaj sa 4 štanda. Ako je $\mu = 6\ vozila\ u\ minuti$ i $\lambda = 20\ vozila\ u\ minuti$, pa će biti $\rho = 3.33$. Takođe $\frac{\rho}{c} = 0.833$, pa se može koristiti ovaj model.

Verovatnoća da nema nijednog vozila u sistemu sa četiri otvorena štanda je

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{3.333}{1!} + \frac{(3.333)^2}{2!} + \frac{(3.333)^3}{3!} + \frac{(3.333)^4}{4!\,(0.1667)}} = 0.0213.$$

Srednja dužina reda:

$$L_q = \frac{0.0213 \cdot 3.333^5}{4!4} \cdot \left[\frac{1}{(0.1667)^2}\right] = 3.287\ vozila.$$

Srednje vreme provedeno u sistemu je:

$$W = \frac{3.333+3.287}{20} = 0.331 minuta\ po\ vozilu.$$

Verovatnoća da mora da se čeka u sistemu je:

$$p_{n>4} = \frac{3.333^5 \cdot 0.0213}{4!\,4(0.1667)} = 0.548\,.$$

Kada je otvoreno pet štandova

Verovatnoća da nema nijednog vozila u sistemu sa pet otvorenih štandova

$$p_0 = \frac{1}{1+\frac{3.333}{1!}+\frac{(3.333)^2}{2!}+\frac{(3.333)^3}{3!}+\frac{(3.333)^4}{4!}+\frac{(3.333)^5}{5!(0.3333)}} = 0.0318\,.$$

Srednja dužina reda:

$$L_q = \frac{0.0318 \cdot 3.333^6}{5!\,5} \cdot \left[\frac{1}{(0.333)^2}\right] = 0.654\ vozila.$$

Srednje vreme provedeno u sistemu je:

$$W = \frac{3.333+0.654}{20} = 0.119 minuta\ po\ vozilu.$$

Verovatnoća da mora da se čeka u sistemu je:

$$p_{n>5} = \frac{3.333^6 \cdot 0.0318}{5!\,5(0.333)} = 0.218.$$

Tako bi otvaranje petog štanda smanjilo prosečnu dužinu reda za 2.633 vozila(3.287-0.654), prosečno vreme u sistemu za 0.132(0.331-0.199) i verovatnoću čekanja u redu za 0.33 (0.548-0.218).

Primer 3.

U prodavnici ima četiri slobodna parking mesta. Vlasnik predviđa da će trajanje kupovine klijenta biti eksponencijalna raspodela sa sredinom od 6 minuta(vreme koliko će parking biti zauzet). Vlasnik zna da su u satima kada je najurbaniji saobraćaj dolasci klijenata eksponencijalno raspoređeni sa prosečnom stopom dolaska 20 klijenata na sat. Kakva je verovatnoća da klijent neće doći do slobodnog parking mesta kada dođe do prodavnice?

Ako je $\mu = 10\ vozila\ na\ čas$ i $\lambda = 20\ vozila\ na\ čas$, pa je $\rho = 2$, odnosno $\frac{\rho}{c} = 0.5$ što je manje od 1. Verovatnoća da nema vozila na parkingu sa četiri slobodna mesta je

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{2}{1!} + \frac{(2)^2}{2!} + \frac{(2)^3}{3!} + \frac{(2)^4}{4!\,(0.5)}} = 0.1304\,.$$

Verovatnoća da vozilo neće naći nijedno slobodno mesto je

$$p_{n>4} = \frac{2^5 \cdot 0.1304}{4!4(0.5)} \ = \ 0.087\,.$$

3.2. Optimizirani raspored za rute javnog prevoza putnika

Gradski javni prevoz putnika je glavna komponenta gradskog prevoza, jedna od najvažnijih funkcija grada jer obezbeđuje odvijanje svih njegovih aktivnosti. Iako to zauzima istaknuto mesto u ljudskoj delatnosti, organizovanje gradskog prevoza, uopšte, jeste trenutno veliki problem u većini većih gradova. Cilj javnog prevoza putnika je da preuzme putni tok iz transportne mreže u oba pravca saobraćaja. U tom kontekstu, neophodno je odrediti satne varijacije toka putnike za svaku rutu, a zatim, u zavisnosti od toga dužinu rute, kapacitet i brzinu dostupnih vozila, kako bi se odredile potrebe vozila na različite načine da se za različita vremena u toku dana naprave rasporedi. Proizvodna aktivnost prevoznika je proces transporta fokusiran istovremeno da postigne dva dijametralno suprotna cilja:

- minimizira vreme putovanja putnika;

- minimizira potrošnju resursa u transportnom procesu.

Stoga postoji potreba za objektivnim vrednovanjem optimalnih parametara procesa, karakterističnih za transportni sistem i njegove komponente. U javnom prevozu, važnost efikasnosti korišćenja transportnih kapaciteta je još veće zbog oskudica i karakteristika nepravilnosti u saobraćaju. Tokom praznog perioda između sati kada je najveća gužva (udarno vreme, npr. kada se ljudi vraćaju s posla) je efikasnost autobusa smanjena značajno, što zahteva potrebu za usvajanjem mera optimizacije sistema javnog prevoza povezivanjem broja vozila na putu sa stvarnim tokovima putnika. Metodologija optimizacije rasporeda zasnovana je na teoriji reda čekanja, koja proizilazi iz prirode procesa karakterističnog za rad javnog prevoza različitim rutama. Smatra se slučajnim procesom akumulacija i ukrcavanje putnika na usputnim gradskim autobuskim linijama u praznim periodima između najvećih gužvi. Za optimizaciju servisa za određivanje rute autobusa će se koristiti teorija redova čekanja.

Pretpostavimo da se akumulacija putnika na usputnim stanicama na putu odvija prema Poasonovom procesu, a dolazak autobusa je realizovan prema eksponencijalnoj raspodeli. Ako je n broj putnika koji dolaze na stanicu u intervalnom vremenskom intervalu (0, t), verovatnoća dolazaka po Poasonu je:

$$P_n = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \tag{3.2.1}$$

gde je λ intenzitet dolazaka putnika na stanicu, a t vreme između dolaska prvog putnika i dolaska autobusa na stanicu.

U slučaju Poasonove raspodele, matematičko očekivanje E je jednako intenzitetu dolazaka putnika na stanicu pa imamo da je $E(n) = \lambda$.

S druge strane, prema teoriji redova čekanja, neophodno je poštovati odnos

$$\lambda = \frac{N}{T}; \qquad (3.2.2.)$$

gde je N broj putnika koji su akumulirani na stanici u periodu T.

U periodu t akumulirani(nakupljeni) broj putnika na stanici je:

$$N^{*} = \frac{N}{T} t. \tag{3.2.3.}$$

Period T je interval vremena u kome je broj N putnika akumuliranih na stanici i ostaje konstantan. Obično ovaj period ne prelazi 10-13 min. Posle tog perioda, putnici izaberu druge raspoložive mogućnosti putovanja, uključujući i druge rute ili vrste prevoza. Zbog toga puno preuzimanje putničkog toka stanice, potrebno je da bude u skladu sa sledećim odnosom:

$$t < T. \tag{3.2.4.}$$

Vreme dolazaka autobusa na stanicu je u skladu sa eksponencijalnom raspodelom sa intenzitetom dolazaka autobusa na stanicu λ_1.

$$\lambda_1 = \frac{60}{I} = \frac{60A_R}{T_R} \tag{3.2.5.}$$

gde je I interval cirkulacije na ruti;

AR - broj autobusa na putu;

TR - period autobuskog prometa izražen u min.

Interval cirkulacije na ruti tokom dana tehnološki varira od minimalne vrednosti I = 3 - 5 min, karakteristična za vreme žurbe, do maksimalne vrednosti I= 12 - 20 min za period mirovanja, odnosno kada nema gužve. Realna vrednost intervala cirkulacije je zapravo praktičan kriterijum za procenu kvaliteta usluga. Dato je vreme dolaska autobusa u stanicu t_s :

$$t_s = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{T_R}{60A_R}. \tag{3.2.6.}$$

Da bi se obezbedio ulazak u autobus svih akumuliranih putnika mora biti ispunjen uslov:

$$t \leq t_s\ . \tag{3.2.7.}$$

Kada jednačinu (3.2.7.) zamenimo u (3.2.3.) i (3.2.6.) dobićemo

$$\frac{N^{*}T}{N} < \frac{T_R}{60A_R}.$$

Ako definišemo $\frac{N^{*}}{N} = \eta$ tada se jednačina može pisati kao

$$A_R > \frac{T_R}{60\,\eta\,T}.$$

Ova jednačina omogućava formulisanje sledećih principa optimizacija:

-minimiziranje broja autobusa na ruti može se postići povećanjem vrednosti koeficijenta revalorizacije protoka putnika η u stanici i periodom akumulacije putnika na stanici do prihvatljivih nivoa putnika.

Saobraćajni protok N^* se akumulira u periodu ako postoji mesto u autobusu. Međutim, ako nema slobodnog mesta, onda putnici koji nisu mogli ući čekaju sledeći autobus, koji bi trebao da stigne brže od perioda T. Ako se poslednji uslov ne važi, prevoznik ne može potvrditi tokove putnika, koji će se zatim preusmeriti na druga transportna rešenja. Za maksimalnu revalorizaciju putničkog saobraćaja, akumuliranog tokom perioda do stanice, je potrebno koristiti autobuse s većim brojem sedišta ili, alternativno, da smanji proporcionalni period prometa.

Kao rezultat razvoja optimizacije javnog prevoza putnika na različitim rutama, mogu se izvući sledeći zaključci:
- primena teorije redova čekanja radi racionalizacije transportnim uslugama javnog transporta pruža stvarno optimalno rešenje, primenjivo u praksi;
- minimalno vreme čekanja autobusa je obezbeđeno ako je sistem planiran u skladu sa jednačinom (3.2.7.);

4. Simulacije

4.1. Simulacija redova čekanja u saobraćaju

Simulacija omogućava proučavanje i eksperimentisanje nekog sistema(ili njegovog podsistema), kao i interakcije između njih. Informacione, organizacione i ekološke promene se mogu simulirati i posmatrati promene u ponašanju modela. Znanje stečeno proučavanjem modela može biti od velike vrednosti i može predložiti poboljšanje sistema koji se posmatra. Promena simulacionih ulaza može pomoći u razumevanju kako određene komponente sistema integriraju i utiču na sistem. Simulacija se takođe koristi za eksperimentisanje sa novim dizajnom ili politikom pre implementacije, odnosno sprovođenja i mogu se uštedeti ogromne količine novca. Simulacije se takođe koriste za proveru analitičkih rešenja. Simulacija se koristi kao matematički opis ili model stvarnog sistema u obliku kompjuterskog programa. Ovaj model se sastoji od jednačina koje oponašaju funkcionalnost veze u stvarnom sistemu.

Simulacija ima svojih prednosti, poput testiranja pravila odlučivanja, tokova informacija, organizacione procedure bez ometanja u toku operacije realnog sistema. Novi hardverski projekti, sistemi transporta mogu biti testirani bez trošenja resursa itd. Vreme se može sažeti ili proširiti radi ubrzavanja ili usporavanja sistema koji se posmatra. Uvid se može dobiti o interakciji parametara i značaju parametara. Uvid se može dobiti o značaju varijabli. Simulacija može pomoći u razumevanju načina rada sistema. Jedna od mana simulacije jeste što je nekad teško razumeti rezultate dobijene analizom.

Rešenje može biti najbolje pronađeno nakon pokretanja nekoliko simulacija sa različitim parametrima, ali ovo uopšte ne garantuje da je rešenje zaista najbolje dostupno(koji se obično mogu dokazati samo pomoću analitičkih metoda).

Spomenuli smo da simulacije predstavljaju tehniku koja koristeći računar oponaša funkcionisanje različitih objekata i procesa u realnom svetu. Obično ono što posmatramo nazivamo sistem, i u cilju njegovog oponašanja neophodno je sastaviti pretpostavke o tome kako on funkcioniše. Te pretpostavke se formulišu na osnovu prikupljanja podataka i znanja o funkcionisanju sistema. Na primer jedna od pretpostavki jeste kojom raspodelom klijenti dolaze i odlaze. Ove pretpostavke, koje obično predstavimo matematički, brojčano i pomoću formula da bi konstruisali model sistema koji želimo da oponašamo konstituišu model nad kojim se onda sprovode kompjuterski bazirani eksperimenti, u cilju opisivanja, objašnjavanja i predviđanja ponašanja realnog sistema. Nakon pokretanja simulacije u programu, kompjuter generiše stohastičke promenljive koje odgovaraju zahtevima posmatranog sistema, kao što su, kod redova čekanja, vreme dolazaka i vreme potrebno za opslugu klijenata, tj. svaka simulacija je jedan eksperiment u kome se kompjuterski generisani ulazni podaci koriste za dobijanje izlaznih podataka.

4.1.1. Simulacija redova čekanja na primeru naplatne rampe

Kao primer simulacije u ovom radu razmotrićemo redove čekanja na naplatnoj rampi sa jednim ili sa više servera. Pretpostavimo da su dolasci klijenata(u našem slučaju vozila) na naplatnu rampu u skladu sa Poasonovim procesom sa srednjom stopom λ. Takođe usluživanje klijenata možemo da modeliramo slučajnom promenljivom sa eksponencijalnom raspodelom sa očekivanom vrednošću $1/\mu$. Kao što smo spomenuli na početku rada λ predstavlja prosečan broj klijenata po jedinici vremena koje pristižu u red čekanja na naplatnoj rampi na autoputu, dok je μ prosečan broj usluženih klijenata po jedinici vremena. Dalje pretpostavljamo da se usluga vrši po principu FIFO, tj. ko prvi stigne prvi će biti uslužen. Red čekanja može biti konačan i beskonačan. Mi ćemo u radu posmatrati beskonačne modele redova čekanja da bi ubacili određene ulazne podatke. Kada vozilo dođe na naplatnu rampu biće odmah usluženo ukoliko nema vozila ispred njega, a ukoliko ima vozila u redu, staje u red i čeka na opslugu.

Jedan primer simulacije: Posmatraćemo dva slučaja primera kada vozila stižu na naplatnu rampu na autoputu. U prvom slučaju ćemo posmatrati slučaj kada je otvorena samo jedna naplatna rampa na autoputu ili u drugom slučaju kada je otvoreno više naplatnih rampi.

Pretpostavićemo za red M/M/1 da vozila dolaze na naplatnu rampu prosečnom brzinom od 300 vozila na sat i da se zadržavaju oko 10 sekundi da plate korišćenje autoputa. Za stopu dolaska i odlaska pretpostavićemo da su eksponencijalno raspoređeni.

Onda su $\mu = 6\ vozila\ u\ minuti$ i $\lambda = 5\ vozila\ u\ minuti$, pa će biti $\rho = 0.8333$.

Pretpostavićemo da vozila dolaze na naplatnu rampu prosečnom brzinom od 900 vozila na sat i da se zadržavaju u proseku oko 10 sekundi da plate korišćenje autoputa. Za stopu dolaska i odlaska pretpostavićemo da su eksponencijalno raspoređeni. Pomoću simulacija u matlabu videćemo koliko bi bila prosečna dužina reda, vreme u sistemu i kako se verovatnoće čekanja u redu menjaju ako bi na autoputu postojala jedna ili više naplatnih rampi.

Koristeći formule za model M/M/1 i M/M/C koje smo naveli kroz rad ćemo to izračunati. Znamo da kod M/M/1 da bi model imao smisla $\rho < 1$, a kod modela M/M/C $\frac{\rho}{c} < 1$. Ako je $\mu = 6$ *vozila u minuti* i $\lambda = 15$ *vozila u minut*i, pa će biti $\rho = 2.5$. Takođe $\frac{\rho}{c}$, ako ima 3 ili više naplatnih rampi će biti manje od 1 pa ćemo ovaj model koristiti za simulaciju modela M/M/3 i M/M/4.

λ	5
μ	6
ρ	0.8333
Model	M/M/1
L	5.000
W	1.000
Lq	4.166
Wq	0.8333
$p_{n>1}$	0.6944
p(0)	0.1667
p(1)	0.1389

Tabela 4.1.1. Tabela rezultata u matlabu za model M/M/1 kada pozivamo Pn=queuing1(5,6,1)

λ	15
μ	6
ρ	2,5
c	3
Model	M/M/3
L	6.011
W	0.400
Lq	3.511
Wq	0.2341
$p_{n>3}$	0.5852
p(0)	0.0449
p(1)	0.1124
p(2)	0.1404
p(3)	0.1170

Tabela 4.1.2. Tabela rezultata u matlabu za model M/M/3 kada pozivamo Pn=queuing1(15,6,3)

λ	15
μ	6
ρ	2,5
c	4
Model	M/M/4
L	3.033
W	0.2022
Lq	0.5331
Wq	0.0355
$p_{n>4}$	0.1999
p(0)	0.0737
p(1)	0.1842
p(2)	0.2303
p(3)	0.1919
p(4)	0.1199

Tabela 4.1.3. Tabela rezultata u matlabu za model M/M/4 kada pozivamo Pn=queuing1(15,6,4)

Za model čekanja M/M/3 i M/M/4 možemo primetiti da će se srednja dužina reda ukoliko ima četiri naplatne rampe u odnosu na model kada ima 3 servera smanjiti za$(3.511 - 0.5331) = 2{,}977$. Prosečno vreme provedeno u sistemu(0.400-0.2022) smanjiće se za 0.1978. Takođe će se verovatnoća čekanja u sistemu smanjiti povećanjem broja servera(0.5825-0.1999) za 0.3826. Sve podatke možemo uzeti iz tabela 4.1.2. i 4.1.3.

Prilog koda u matlabu

```
function [Pn, L, p , Lq, W, Wq] = queuing1(lambda,mi,S)
Po=0;
ro=lambda/(S*mi);
Po_inv=0;
sum_1=0;
j=0;
for i=0:S-1
 sab_1=(lambda/mi)^i/factorial(i);
 sum_1=sum_1+sab_1;
end
 sab_2=(lambda/mi)^S/(factorial(S)*(1-ro));
 Po_inv=sum_1+sab_2;
 Po=(Po_inv)^(-1); %verovatnoća da u sistemu nema vozila
 Pn(1) = Po;
 n(1) = 0;

 for j=1:1:S
    n(j+1) = j;
 if (j) <= S
     Pn(j+1) = (lambda/mi)^j/factorial(j) * Po;
else Pn(j+1) = (lambda/mi)^j/(factorial(S) * Sc^(j-S)) * Po;
    %verovatnoća da u sistemu ima j vozila
end
 end
p=((S*ro)^(S+1)*Po)/(factorial(S)*S*(1-ro))
%  p verovatnoća da u sistemu mora da se čeka
Lq=(lambda/mi)^S*ro*Po/(factorial(S)*(1-ro)^2) %srednja dužina reda
L=Lq+lambda/mi      %broj klijenata koji čekaju u sistemu
Wq=Lq/lambda       %prosečno vreme čekanja u redu
W = L/lambda       %srednje vreme provedeno u sistemu
```

Drugi primer simulacije: Posmatraćemo slučaj primera kada vozila stižu na naplatnu rampu na autoputu kada je kapacitet vozila koji mogu čekati ograničen.

Pretpostavićemo prvo za red M/M/C da vozila dolaze na naplatnu rampu ako nam je data stopa odlazaka μ i stopa dolazaka λ, kao i kapacitet vozila koji čekaju u redu N. Za stopu dolaska i odlaska pretpostavićemo da su eksponencijalno raspoređeni. Rezultati urađenih simulacija su prikazani u tabelama gde možemo primetiti da će se povećanjem broja naplatnih rampi očekivani broj klijenata smanjuje, gužve su manje, ali iskorišćenost pojedinačnog servera se smanjuje.

λ	30
μ	40
C	4
N	6
p(0)	0.4722
p(1)	0.3542
p(2)	0.1328
p(3)	0.0332
p(4)	0.0062
p(5)	0.0012
p(6)	0.0002
Lq	0.0016
Wq	0.000
L	0.7514
W	0.0251

Tabela 4.1.4. *Tabela rezultata u matlabu za model M/M/4/7 kada pozivamo queuing11(30,40,4,6)*

λ	30
μ	40
C	6
N	7
p(0)	0.4724
p(1)	0.3543
p(2)	0.1329
p(3)	0.0332
p(4)	0.0062
p(5)	0.0009
p(6)	0.0001
p(7)	0.0000
Lq	0.0001
Wq	0.000
L	0.7500
W	0.0250

Tabela 4.1.5. Tabela rezultata u matlabu za model M/M/4/6 kada pozivamo queuing11(30,40,6,7)

Prilog u matlabu

```
function [ Pn, Lq, PN , L, W, Wq] = queuing11(lambda,mi,S,N)
Po=0;
PN=0;
ro=lambda/(mi);
Po_inv=0;
sum_1=0;
sum_2=0;
j=0;
sab3=0;
for i=0:S-1
 sab_1=ro^i/factorial(i);
 sum_1=sum_1+sab_1;
 %prvi deo sabirka kada posmatramo po za red sa konacnim kapacitetom
end
for k=S:N
 sab_2=(ro^k)/(factorial(S)*((S)^(k-S)));
 sum_2=sum_2+sab_2;
 %drugi deo sabirka kada posmatramo po za red sa konacnim kapacitetom
end
 Po_inv = sum_1+sum_2;
 Po=(Po_inv)^(-1); %verovatnoca da u sistemu nema vozila
 Pn(1) = Po;


 for j=1:1:N
 if (j) <= S
     Pn(j+1) = ro^j/factorial(j) * Po;
else Pn(j+1) = ro^j/(factorial(S) * S^(j-S)) * Po;
   %verovatnoca da u sistemu ima j vozila

 end
 end
 for h=S:(N-1)
       Ph=ro^h*Po /(factorial(S) * S^(h-S)) ;
       sab3=sab3+(h-S+1)*Ph;
 end
PN=(ro^N)*Po/(factorial(S)*S^(N-S))
lambdae=lambda*(1-PN);
Wq=sab3/(S*mi*(1-PN))
Lq=Wq*lambdae
W = Wq+1/mi
L=Lq+(lambda*(1-PN)/mi)
end
```

Zaključak

Teorija redova čekanja je efikasan matematički model za rešavanje različitih problema i situacija iz svakodnevnog života. U ovom radu je cilj prikazivanje situacija u saobraćaju u kojima veliku ulogu imaju redovi čekanja. Videli smo da se i saobraćajne situacije, poput zagušenja saobraćaja, čekanja na javni prevoz i određivanja ruta, određivanja broja parking mesta za izgradnju parkinga, regulisanje semafora, a samim tim i raskrsnica, određivanje broja potrebnih naplatnih rampi na autoputu mogu predstaviti koristeći matematičke modele i formule za optimalna rešenja. Uvek su ciljevi najoptimalnija rešenja za društvo i minimalni troškovi.

Ove situacije iz prakse se predstavljaju pomoću nekog od modela redova čekanja iz Kendelove notacije, tako što imamo stope odlazaka i dolazaka klijenata, broj servera, broj mesta u redu, veličinu populacije iz koje klijenti dolaze i princip po kom se vrši usluga, odnosno disciplinu reda.

Primer iz saobraćaja za koji je napravljen i praktičan primer u Matlabu jeste primer naplatne rampe. Ciljevi ovakvih implementacija su da za modele koji su implemetirani uz postavljena ograničenja i date parametre možemo dobiti rešenja i odgovore na pitanja sa kojim verovatnoćama će se nešto desiti i šta bi bilo najpovoljnije.

U radu je pomoću implementacije u Matlabu urađena simulacija na primerima u saobraćaju, ali se takođe pomoću ovih kodova ili uz neke manje modifikacije i dodatna ograničenja mogu uraditi simulacije i za druge primene kako u saobraćaju, tako i za veliki broj drugih primera primene redova čekanja poput reda čekanja na šalteru u banci, predviđanje broja mesta potrebnih za izgradnju parkinga ispred neke firme i slično.

Literatura

[1] Danijela Rajter-Ćirić, *Verovatnoća*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematiĉki fakultet u Novom Sadu, 2011.

[2] Richard M. Feldman, Ciriaco Valdez-Flores, *Applied Probability and Stochastic, Processes*, Springer, 2010.

[3] K.Roy, M. Hlynka, *Queuing Theory applied to a Traffic Light Problem,* Department of Mathematics and Statistics Univrsity of Windsor, Windstor 1995.

[4] Birth and Death Processes http://www.bibalex.org/supercourse/

[5] Fred L. Mannering, Scott S. Washburn, Walter P. Kilareski, *Principles of Highway Engineering and Traffic Analysis,* New York, United States 2012.

[6] Ivo Adan, Jacques Resing, *Queueing Systems*, Department of Mathematics and Computing Science, Eindhoven University of Technology, Eindhoven 2015.

[7] U. Narayan Bhat, *An Introduction to Queueing Theory*, Birkhäuser, 2008.

[8] Tien Van Do,Y. Takahashi, W. Yue,Viet-Ha Nguyen, *Queueing Theory and Network Applications,* Springer 2015.

[9] Fred L. Mannering, Scott S. Washburn, Walter P. Kilareski, *Principles of HIGHWAY ENGINEERING and TRAFFIC ANALYSIS,* Fourth Edition, United States of America 2009.

[10] Zenzerović Z, *Teorija redova čekanja*, Pomorski fakultet Rijeka, 2005.

[11] Danijela Rajter-Ćirić, *Stohastiĉka anali*za, beleške sa predavanja i skripta, 2014.

[12] N. Vandaele, Tom V. Woensel, A. Verbruggen, *A QUEUEING BASED TRAFFIC FLOW MODEL,* Transportation Research-D: Transport and environment , 2000., vol. 5 nr. 2, pp. 121-135

[13] Shuguo Yang, Xiaoyan Yang, *The Application of the Queuing Theory in the Traffic Flow of Intersection,* World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Mathematical and Computational Sciences Vol:8, No:6, 2014

[14] https://nptel.ac.in/courses/110106046/

[15] M. Ottobre, *Applied Stochastic Processes,* Imperial College London, Mathematics Department 2014.

Biografija

Ivana Mirazović je rođena 24.05.1991. u Kikindi. Osnovnu školu „Dositej Obradović” završila je u Zrenjaninu 2006. godine kao nosilac Vukove diplome. Tokom školovanja je učestvovala na takmičenjima iz matematike i fizike što je dovelo do toga da upiše Zrenjaninsku gimnaziju, prirodno-matematički smer. Takođe kao nosilac Vukove diplome 2010. završava gimnaziju i iste godine upisala je Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, departman za matematiku i informatiku, na smeru primenjena matematika, modul matematika finansija. Trogodišnje osnovne studije završila je uspešno u roku 2013. godine, a zatim upisala master studije na istom fakultetu, na istom smeru. U aprilu 2016. godine, uspešno je položila sve ispite predviđene planom i programom i time stekla pravo na odbranu master rada. Trenutno je zaposlena u osnovnoj i srednjoj školi u Zrenjaninu.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Ivana Mirazović
AU
Mentor: prof. dr Danijela Rajter-Ćirić
MN
Naslov rada: PRIMENA REDOVA ČEKANJA U SAOBRAĆAJU
NR
Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski/engleski
JI
Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2018.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: (4/74/-/8/15/-/-)
(broj poglavlja/strana/lit.citata/tabela/slika/grafika/priloga/)
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Stohastička analiza
ND
Predmetna odrednica/ključne reči: stohastički proces, Poasonov proces, eksponencijalna raspodela, stopa dolazaka, stopa odlazaka, broj servera, saobraćaj, čekanje u redu
PO

UDK
Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: Kroz rad je obrazložena terminologija i četiri najčešće korišćena modela redova čekanja sa primerima za svaki model redova čekanja u praksi. Govori se o teoriji redova čekanja konkretno u saobraćaju. U redovima čekanja teorija i njena primena dolaze u razmatranje situacija o problemu gustine saobraćaja, čekanju prilikom prevoza javnim transportom, čekanja na semaforu. U većini ovih primena se koristi najjednostavniji model sa jednim serverom. Detaljnije je opisan primer sa naplatnom rampom na parkingu, autoputu ili na ulazu u hotele ili garaže. Ovaj problem se razmatra detaljnije jer se može posmatrati i samo na jednom serveru, ali i kada imamo više servera, odnosno uslužnih kanala, pa imamo konkretan primer odnosno simulaciju reda čekanja u saobraćaju u programskom jeziku gde dobijamo konkretne rezultate.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 22.09.2017.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
Predsednik: dr Sanja Rapajić, vanredni profesor PMF-a
Član: dr Dora Seleši, redovni profesor PMF-a
Mentor: dr Danijela Rajter Ćirić, redovni profesor PMF-a

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents Code: Master's thesis
CC
Author: Ivana Mirazović
AU
Mentor: prof. dr Danijela Rajter-Ćirić
MN
Title: Application of Queuing Theory in Traffic
TI
Language of text: Serbian (Latin)
LT
Language of abstract: Serbian / English
LA
Country of publication: Republic of Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2018
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
PP
Physical description: (4/74/-/8/15/-/-)
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Stochastic Analysis
SD
Subject/Key words: Stochastic process, Poisson process, exponential distribution, the rate of arrivals, departures rate, number of servers, traffic, queuing
SKW

UC
Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD
Note:
N
Abstract:
AB
This master's thesis describes terminology of queuing theory and shows examples of four most widely used models of queuing theory in practice. The main objective of this thesis is queuing theory in traffic. Concretely queuing theory and its applications are considered in the situation on the problem of traffic density, waiting for the public transport and waiting at traffic lights. In most of these applications is used the simplest model with a single server. Queuing theory example of the toll gate in a parking lot, a highway or at the entrance of the garage or hotels is described in details. This problem is considered in more detail because it can be seen on a single server, but also when there are multiple servers, and service channels. At the end of this thesis is simulation of queue in traffic which has been made in the programming language where we can see concrete results.

Accepted by the Scientific Board on: 22.09.2017.
ASB
Defended:
DE
Thesis defend board:
DB
President: dr Sanja Rapajić, Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Mentor: dr Danijela Rajter Ćirić, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member: dr Dora Seleši , Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad