UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET

DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Ivana Malić

MALI UZORCI I PRIMENA BOOTSTRAP METODA U EKONOMETRIJI

- master rad -

Mentor:
prof. dr Zorana Lužanin

Novi Sad, 2012.

Sadržaj

Predgovor

„U svetu u kojem se računski troškovi ubrzano smanjuju, dok je cena dokazivanja teoreme i dalje stabilna ili raste, elementarna ekonomičnost *ukazuje na to da se moramo više posvetiti računanju."*

J. W. Tukey, „American Statistician", 1986.

Činjenica je da su računari odavno postali neizostavan deo naše svakodnevice i da je život kakav poznajemo bez njih teško i zamisliti, budući da obezbeđuju nezamenljivu pomoć pri obavljanju najrazličitijih zadataka u gotovo svim sferama ljudske aktivnosti. Za razliku od pronalazaka za koje se tačno zna ko ih je i kada izumeo, nastanak kompjutera je nemoguće povezati sa jednim konkretnim imenom i godinom. Ipak, u kontekstu teme kojom će se baviti ovaj rad, ključni momenat u razvoju računarske tehnike desio se tokom 1940-ih, kada su se pojavili prvi moderni, elektronski računari, suštinski veoma slični onome što pod tim pojmom danas podrazumevamo.

Takozvana informatička revolucija prouzrokovala je pravi procvat mnogih naučnih disciplina, s obzirom na to da su stvoreni uslovi za „hvatanje u koštac" sa velikim brojem problema čije rešavanje, iz praktičnih razloga, do tada nije bilo izvodljivo. Sa aspekta naše priče, od posebnog je značaja sve intenzivnije zanimanje za nešto što bi se moglo nazvati primenjenom ili eksperimentalnom matematikom, a u čijoj je osnovi ideja o kombinovanju klasičnih teorijskih zaključaka i sposobnosti računara za brzo i pouzdano izvršavanje obimnih i kompleksnih kalkulacija.

Oblast matematike koja od sredine XX veka doživljava možda i najizrazitiju renesansu je matematička statistika. Nagli rast računarske moći omogućio je automatizaciju njenih postupaka, lakša i „jevtinija" statistička ispitivanja velikih skupova podataka složene strukture, ali i razvoj niza novih statističkih tehnika koje na bazi izvođenja ranije nezamislivo intenzivnih izračunavanja, čak i nad skromnim raspoloživim uzorcima, obezbeđuju solidne rezultate u situacijama kada nisu zadovoljeni uslovi za primenu uobičajenih metoda zaključivanja.

Dakle, kompjuterska revolucija je nagovestila koliki potencijal leži u tzv. eksperimentalnoj ili empirijskoj statistici. Iskustva, međutim, pokazuju da susretanje sa novim i nepoznatim, čak i u nauci, često prate sumnjičavost i podeljena mišljenja, pa nije preterano začuđujuće što se pomenute inovacije u statističkoj metodologiji i dan-danas neretko prihvataju sa izvesnom rezervom.

Mnogi istraživači i dalje radije posežu za tradicionalnim statističkim postupcima, i onda kada za to nisu ispunjeni neophodni uslovi, nego što „eksperimentišu" sa nekom od modernijih tehnika, a smatra se da za ovakav konzervativan pristup postoje tri glavna razloga. Prvo, u statističkim kursevima se savremenijim temama uglavnom posvećuje neuporedivo manja pažnja, ukoliko se one uopšte i obrađuju, tako da su mnogima ovi koncepti potpuno strani. Drugo, donedavno je većina statističkih programskih paketa omogućavala samo uobičajenu analizu podataka, što je i one istraživače koji su svesni postojanja novijih metoda ograničavalo u njihovoj intenzivnijoj primeni. Na kraju, ni zadovoljenost prethodna dva uslova ponekad nije dovoljna za razbijanje predrasuda o nedostatku teorijske potpore ovim „marginalnim“ postupcima, za razliku od onih tradicionalnih, koji se doživljavaju kao čvrsto teorijski opravdani i empirijski potvrđeni.

U ovom radu, biće predstavljen jedan od pomenutih savremenih alata statističke analize, čija se primena, osim u nekim najjednostavnijim primerima kakve u praksi retko susrećemo, ne može zamisliti bez računarske podrške. Reč je o tzv. bootstrap metodu. Kako je naglasak stavljen na njegovu upotrebu u različitim ekonometrijskim ispitivanjima, prvo poglavlje će biti posvećeno definisanju okvira razmatranja koja slede, u vidu kratkog podsetnika o pojmu, ciljevima i metodologiji ekonometrije.

Mehanizam bootstrap postupka, u najopštijem smislu, tema je drugog poglavlja rada. Nakon definisanja ključnih pojmova, poput bootstrap uzorka, ocene i raspodele, i objašnjenja prirode odnosa sa klasičnim statističkim zaključivanjem, na nekoliko ilustrativnih primera će biti napravljena razlika između dve njegove verzije – parametarskog i neparametarskog bootstrapa. Budući da odsustvo bilo kakvih pretpostavki o populaciji iz koje potiče raspoloživi uzorak otežava detaljniju komparaciju sa analitičkim rezultatima, pažnja će u daljem izlaganju mahom biti usmerena na parametarski postupak (što je posebno naglašeno u glavama 3 i 4).

Treće poglavlje govori o mogućnostima primene bootstrapa u cilju smanjenja pristrasnosti ocena. Glavno je pitanje mogu li prosta i iterativna bootstrap redukcija u situaciji kada ne znamo njen funkcionalni oblik dati podjednako dobre rezultate kao redukcija u uslovima poznate forme pristrasnosti. Poslednji odeljak rezervisan je za numerički primer.

Bootstrap intervalima poverenja bavi se četvrto poglavlje. Predstavljene su tri procedure za njihovu konstrukciju: prva određuje granice na prirodan način – nalaženjem odgovarajućeg kvantila empirijske rapodele bootstrap ocena, druga u sve to uključuje i korekciju pristrasnosti posmatranog ocenjivača, dok ga treća pre primene bootstrap postupka transformiše tako da se dobije veličina čija raspodela ne zavisi od nepoznatog parametra (tzv. pivot). Za kraj, dato je poređenje na konkretnom primeru.

Imajući u vidu dobro poznatu vezu između koncepata intervala poverenja i testova hipoteza, u obimnoj literaturi na temu bootstrap metoda uobičajeno je favorizovanje jednog pristupa u odnosu na drugi. Kako se većina autora opredeljuje za problematiku obrađenu u poglavlju 4 ovog rada, peta glava će biti posvećena skiciranju najosnovnijih elemenata procedure bootstrap testiranja, bez preteranog zalaženja u detalje.

Poslednje, šesto poglavlje ilustruje na koji se način glavni rezultati prethodna dva mogu upotrebiti pri izvođenju zaključaka o vrednostima parametara regresionih modela. Za početak, posmatran je standardni, ne nužno normalni, linearni model, da bi na praktičnom primeru u poslednjem odeljku bilo pokazano kako je slična analiza primenljiva i na neke dinamičke modele.

Na ovom mestu bih želela da izrazim zahvalnost svim profesorima i asistentima za dragoceno znanje koje sam stekla tokom osnovnih i master studija. Posebno sam zahvalna svom mentoru, prof. dr Zorani Lužanin, na pomoći pri izboru i obradi teme mog master rada, ali i na zanimljivim predavanjima koja su me zainteresovala za oblast ekonometrije. Članovima komisije, prof. dr Andreji Tepavčević i prof. dr Danijeli Rajter-Ćirić, se zahvaljujem na korisnim primedbama i sugestijama.

Rad posvećujem mojoj porodici, majci Radmili i ocu Zoranu, kao zahvalnost za neizmernu ljubav, podršku i razumevanje tokom svih ovih godina!

Ivana Malić Novi Sad, oktobar 2012.

1 O ekonometriji

Na samom početku, ukratko ćemo se podsetiti šta izučava disciplina pod imenom ekonometrija, koji su osnovni elementi ekonometrijskog modela i kako izgledaju tipični koraci u ekonometrijskom ispitivanju.

1.1 Šta je ekonometrija?

Delimičan odgovor na pitanje iz gornjeg naslova dobijamo analiziranjem same reči **ekonometrija** – u doslovnom prevodu sa grčkog jezika, ona bi značila „**merenje u ekonomiji**". Prvo pominjanje ovog naziva u ekonomskoj literaturi datira iz 1926. godine, a pripisuje se Ragnaru Frischu, norveškom ekonomisti i statističaru i jednom od dobitnika prve Nobelove nagrade iz oblasti ekonomskih nauka.

Nastanak ekonometrije kao naučne discipline vezuje se za početak izdavanja časopisa „Econometrica", januara 1933. godine, iako je „Econometric Society", međunarodno ekonometrijsko udruženje, osnovano tri godine ranije. Od tada do danas, brojni autori su pokušali da što preciznije definišu njene okvire i predmet izučavanja. Neke od tih definicija date su u nastavku.

T. Haavelemo (1944) navodi da je cilj metodologije ekonometrijskih istraživanja, u suštini, povezivanje ekonomske teorije i stvarnih podataka, korišćenjem teorije i tehnika statističkog zaključivanja kao spone između njih.

Prema A. S. Goldbergeru (1964), ekonometrija je društvena nauka u kojoj se instrumenti ekonomske teorije, matematike i statističkog zaključivanja primenjuju za analizu ekonomskih fenomena.

G. S. Maddala (2001) opisuje ekonometriju kao primenu statističkih i matematičkih metoda u analizi ekonomskih podataka, sa svrhom pružanja empirijske podloge ekonomskim teorijama i njihove verifikacije ili odbacivanja.

Sve u svemu, zaključak je da se radi o **naučnoj grani koja na specifičan način sintetizuje ekonomsku teoriju, matematiku, statističke metode i stvarne podatke**.

1.2 Pojam ekonometrijskog modela

Ekonometrija i njen postupak su, prvenstveno, čvrsto utemeljeni na naučnom postupku, a najčešće korišćen naučni metod analize pojava koje spadaju u sferu razmatranja date discipline jeste njihovo modeliranje. Stoga, prvi zadatak sa kojim se svaki ekonometrista suočava čini formulisanje modela.

Uopšteno govoreći, pojmom **model** označavamo pojednostavljenu predstavu neke pojave iz realnog sveta, tj. formalizovanu prezentaciju ideja, propozicija ili znanja o specifičnom fenomenu, sa ciljem njegovog objašnjenja, predviđanja i kontrole.

Model je, dakle, „slika u malom“ i nikada ne može postići idealnu realističnost, ma koliko bio složen. Zato se pri njegovoj izradi teži ka ostvarivanju što bolje aproksimacije, tj. uključuju se samo oni faktori (promenljive) koji imaju bitan uticaj na ispitivanu pojavu, dok sve ostalo, čitav niz detalja koji se zanemaruju ili se ne mogu predvideti, svrstavamo u „poremećaje“ („šum“). Pitanje izbora nije nimalo jednostavno, pa treba voditi računa o tome da model ne bude ni preterano uprošćen, ali ni suviše kompleksan.

Prethodna priča pruža osnovu za pravljenje distinkcije između ekonomskog i ekonometrijskog modela.

Ekonomski model predstavlja skup pretpostavki koje približno opisuju ponašanje ekonomskog sistema ili nekog njegovog dela. Za razliku od toga, elementi **ekonometrijskog modela** su:

- jednačine izvedene iz ekonomskog modela koje opisuju ponašanje posmatranog sistema, a sastoje se iz značajnih promenljivih (uticajni faktori) i šuma,
- informacije o eventualnim greškama merenja nastalim prilikom opažanja vrednosti datih promenljivih,
- specificiranje raspodele verovatnoće šuma i grešaka merenja.

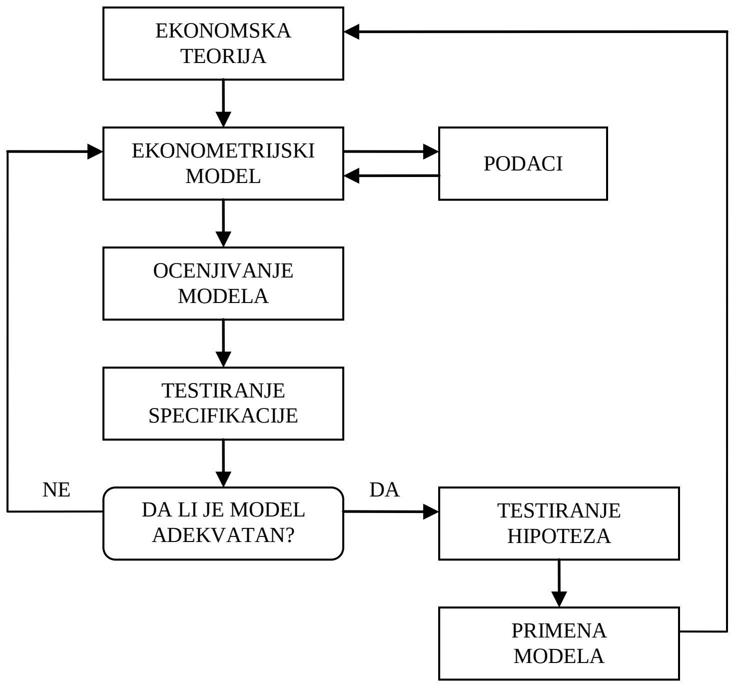
Prema tome, **namena ekonometrijskog modela jeste da se posmatrani ekonomski model predstavi u obliku koji će omogućiti njegovu empirijsku validaciju, a potom i primenu u raznim predviđanjima i analizama**. Obično za to postoji više alternativnih načina.

1.3 Ciljevi ekonometrije

Kao što smo videli, ekonometrija je naučna grana koja vrednuje u kojoj je meri ekonomska teorija konzistentna sa stvarnim podacima, omogućava dublje pronicanje u suštinu stvarnih pojava i procesa, a ocenjene ekonometrijske relacije i modeli mogu poslužiti za definisanje ekonomskih parametara potrebnih za vođenje ekonomske politike, donošenje poslovnih odluka, kontrolu i predviđanje tendencija budućih kretanja vrednosti međusobno zavisnih ekonomskih varijabli.

U tom smislu, definišu se **tri osnovna cilja ekonometrijske metodologije** (*Slika 1.1*):

1) **formulisanje ekonometrijskog modela** (o čemu je bilo reči u prethodnom odeljku); ova etapa ekonometrijskog rada se naziva *fazom specifikacije*,
2) **ocenjivanje i testiranje modela** korišćenjem prikupljenih podataka, što označavamo kao *fazu zaključivanja*,
3) **primena modela u predviđanjima i analizi ekonomske politike**.



Slika 1.1 – Šematski prikaz glavnih koraka u ekonometrijskoj analizi ekonomskih modela

Specifikacija ekonometrijskog modela predstavlja matematičku formulaciju naučnih hipoteza postavljenih na osnovu poznavanja delovanja i ponašanja ispitivanog fenomena u ekonomskoj stvarnosti, rezultata ranijih istraživanja i spoznaja ekonomske teorije o njemu. To uključuje znanje o promenljivama koje treba uključiti u model, matematičkom obliku njihove međuzavisnosti, kao i o mogućim vrednostima parametara modela.

Ocenjivanje modela obuhvata niz, moglo bi se reći, „tehničkih“ aktivnosti – prikupljanje neophodnih podataka, proveru da li su merenja izvršena na odgovarajući način, da li su funkcije korišćene u modelu saglasne sa odnosima koje definiše ekonomska teorija, ispitivanje jačine međusobne korelacije i uslova stohastičnosti slučajnih promenljivih, izbor adekvatnih ekonometrijskih metoda i tehnika za ocenjivanje modela i, konačno, njihovu primenu.

Ono što sledi jeste vrednovanje dobijenih ocena parametara, tj. testiranje modela, koje se vrši u odnosu na tri grupe kriterijuma: ekonomske, statističke i ekonometrijske. Ekonomski kriterijumi odnose se na neke unapred poznate pretpostavke o predznaku i veličini parametara, statističkim se ispituje statistička značajnost dobijenih ocena, dok pomoću ekonometrijskih utvrđujemo da li te ocene imaju poželjna svojstva, poput nepristrasnosti, konzistentnosti i efikasnosti.

Ovako kreiran ekonometrijski model je potrebno oceniti i sa stanovišta njegove moći predviđanja, kao jednog od glavnih ciljeva ekonometrijskog istraživanja koji podrazumeva upotrebu dobijenih numeričkih rezultata da bi se predvidele vrednosti nekih ekonomskih veličina u uslovima koji još nisu nastupili, radi pravovremenog donošenja odgovarajućih odluka i uspešnog planiranja i usavršavanja funkcija ekonomskog sistema.

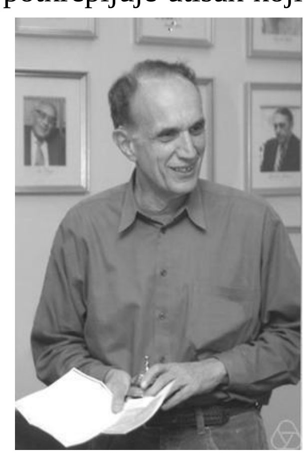
2 Mehanizam bootstrap postupka

"I was still a couple of miles above the clouds when it broke, and with such violence I fell to the ground that I found myself stunned, and in a hole nine fathoms under the grass, when I recovered, hardly knowing how to get out again. Looking down, I observed that I had on a pair of boots with exceptionally sturdy straps. Grasping them firmly, I pulled with all my might. Soon I had hoist myself to the top and stepped out on terra firma without further ado."

R. E. Raspe, "Singular Travels, Campaigns and Adventures of Baron Munchausen", 1786.

Prateći dogodovštine legendarnog barona Münchausena, čuvenog po svojoj sklonosti ka „preuveličavanju", nemački pisac R. E. Raspe je ovim rečima opisao kako je njegov junak jednom prilikom sam sebe izvukao iz močvare povlačenjem kaiševa na sopstvenim čizmama (engleski: bootstraps). **Izraz "to pull yourself up by your own bootstraps" poslužio je kao inspiracija američkom statističaru Bradleyu Efronu prilikom izbora naziva za novu statističku tehniku koju je predstavio 1979. godine u radu „Bootstrap methods: Another look at the jackknife" objavljenom u časopisu „The Annals of Statistics".** Ovim neobičnim imenom Efron je želeo da ukaže na to da bootstrap metode (poznate i kao Münchausenove) predstavljaju koristan, praktičan i široko primenljiv alat, "matematičke kaiševe" pomoću kojih se na jednostavan način možemo izvući iz "statističke močvare".

Međutim, ima i onih koji smatraju da ovakav naziv samo potkrepljuje utisak koji o modernim statističkim instrumentima i dalje postoji u izvesnim krugovima – da su zasnovani na principu „nešto za ništa". Na primer, P. G. Hall, australijski matematičar poznat po izuzetnom doprinosu u oblasti neparametarske statistike i autor brojnih radova na temu resampling metoda, u monografiji „The Bootstrap and Edgeworth Expansion" (1992) komentariše kako je uzorkovanje iz jednog te istog skupa podataka, iznova i iznova, jednako uzaludno kao gore opisani poduhvat barona Münchausena.



Bradley Efron (1938. –)

Poglavlje koje sledi biće posvećeno definisanju osnovnih koncepata bootstrap metologije. U uvodnom delu dajemo motivaciju, tj. formulišemo problem koji nas interesuje, da bismo u narednim odeljcima, u zavisnosti od nekih polaznih pretpostavki o raspoloživom uzorku podataka, napravili razliku između parametarskog i neparametarskog pristupa ovoj tehnici.

2.1 Uvod

Statistika je matematička disciplina koja se bavi prikupljanjem, prikazivanjem, analizom i korišćenjem podataka u svrhu izvođenja zaključaka i donošenja odluka. Predmet njenog ispitivanja su masovne pojave koje su po prirodi promenljive i čije ponašanje zavisi od dejstva različitih faktora, njihovih osobina, broja i kombinacija.

Skup svih elemenata na kojima se data pojava proučava zove se **osnovni skup** ili **populacija**. Glavna karakteristika populacije jeste to da mora biti **homogena**, što znači da njeni elementi imaju bar jednu zajedničku osobinu. Svojstva po kojima se elementi populacije razlikuju nazivamo **statističkim obeležjima**. Pojam obeležja ekvivalentan je pojmu slučajne promenljive u teoriji verovatnoće i osnovni zadatak statistike jeste određivanje njegove raspodele.

U slučaju da se ispituje cela populacija, određivanje raspodele verovatnoće obeležja svodi se na registrovanje njegovih vrednosti na svim elementima populacije. To, međutim, obično nije moguće, bilo zbog velikih materijalnih troškova, vremenskog trajanja ili pak uništenja čitave populacije. U takvim situacijama, primenjuje se **metod uzorka**: iz populacije se na određeni način uzima jedan podskup – uzorak – na čijim se elementima ispituju vrednosti posmatranog obeležja. On je konačan, a broj njegovih elemenata nazivamo **obimom uzorka** i obeležavamo sa *n*.

Osnovna ideja metoda uzorkovanja jeste da se zaključci dobijeni na bazi uzorka generalizuju na celu populaciju. Pri tome, kao neophodan uslov postavlja se **reprezentativnost** uzorka, koja obezbeđuje verodostojnost rezultata zaključivanja, a ostvaruje se slučajnim izborom njegovih elemenata iz populacije, uz poštovanje određenih pravila teorije verovatnoće. Na taj način, pomenuta pravila se mogu koristiti i u postupku izvođenja statističkih zaključaka.

Matematički, **prost slučajan uzorak** obima n za neko obeležje populacije X definiše se kao n-torka nezavisnih slučajnih promenljivih,

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n),$$

od kojih svaka ima istu raspodelu verovatnoće kao X. Registrovanjem vrednosti obeležja na svakom od izabranih elemenata dobija se **realizovani uzorak**,

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

Prilikom statističkog zaključivanja na osnovu uzorka o nekom parametru populacije, tj. o nekom kvantitativnom svojstvu koje je zajedničko za sve elemente osnovnog skupa, koriste se razne transformacije prostog slučajnog uzorka. Slučajnu promenljivu

$$Y = f(\mathbf{X}) = f(X_1, X_2, ..., X_n)$$

u kojoj ne figuriše nepoznati parametar, gde je $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^s$ Borelova funkcija, nazivamo **statistikom**.

Dakle, **statističko zaključivanje** je oblast koja se bavi procedurama za izvođenje zaključaka na osnovu raspoloživih podataka o populaciji iz koje oni dolaze ili, drugačije formulisano, o nekom procesu koji ih je generisao, a može se opisati odgovarajućom funkcijom raspodele u kojoj figurišu izvesni parametri.

Primena velikog broja ovakvih postupaka podrazumeva prethodnu proveru ispunjenosti određenih polaznih uslova u vezi sa posmatranim podacima ili postavljanje nekih neophodnih pretpostavki. Problem nastaje u situaciji kada ne možemo biti potpuno sigurni u njihovu zadovoljenost, odnosno kada nije preterano racionalno pouzdati se u te pretpostavke pod datim okolnostima. U tom smislu, kako je već istaknuto, jedno od ključnih pitanja odnosi se na raspodele verovatnoće.

Radi ilustracije, prisetimo se sledećeg jednostavnog primera. Statistika koja se uobičajeno koristi kao ocena sredine populacije, μ, na osnovu prostog slučajnog uzorka $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ jeste aritmetička sredina,

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i .$$

Ako se zna da slučajne promenljive $X_i, i = 1,2,...,n,$ imaju raspodelu oblika

$$N(\mu, \sigma^2), \mu \in \boldsymbol{R}, \sigma > 0,$$

statistička teorija nam garantuje da će i slučajna promenljiva $\overline{X}$ biti normalno raspodeljena, sa očekivanjem μ i varijansom σ^2/n. Međutim, pitanje koje se postavlja jeste šta raditi ukoliko nemamo nikakvih prepostavki o uzorku **X**.

U slučaju kada raspolažemo dovoljno velikim brojem podataka, zadovoljavajuće odgovore nam često obezbeđuje **asimptotska teorija**. Baveći se raspodelama statistika za beskonačne uzorke, tj. $n \to \infty$, ona omogućava jednostavno dobijanje rezultata koji predstavljaju dobre aproksimacije za ono sa čime se susrećemo u praksi, gde su uzorci, nužno, ograničenog obima.

Dva su fundamentalna principa na kojima počiva asimptotska teorija.

1) **Zakoni velikih brojeva (engleski: LLN – laws of large numbers).** Iako postoji više različitih formulacija, generalno se bave ispitivanjem potrebnih i dovoljnih uslova da niz aritmetičkih sredina

$$X_1, \ \frac{X_1 + X_2}{2}, \ \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}, ... , \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, ...$$

nezavisnih slučajnih promenljivih $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ konvergira u određenom smislu ka nekom broju. Preciznije, za dati niz nezavisnih slučajnih promenljivih definisanih nad istim prostorom verovatnoće, posmatra se konvergencija niza

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i), \ n = 1,2,3,...$$

ka nuli.
Mi ćemo se najčeće pozivati na *Hinčinov zakon velikih brojeva*: ako nezavisne slučajne promenljive $X_1, X_2,..., X_n,...$ imaju istu raspodelu i konačno očekivanje $E(X_i) = a < \infty$, onda važi

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} a,\ n \to \infty,$$

odnosno, po definiciji konvergencije u verovatnoći,

$$\forall \varepsilon > 0,\ P\{|\, X_n - a \,| \ge \varepsilon\} \to 0,\ n \to \infty.$$

2) **Centralne granične teoreme (engleski: CLT – central limit theorems).** Poput zakona velikih brojeva, i centralna granična teorema se javlja u raznim oblicima, ali je osnovna ideja sadržana u tvrdnji da će, pod određenim uslovima, suma n standardizovanih slučajnih promenljivih umnožena sa $n^{-1/2}$ imati približno normalnu raspodelu za $n \to \infty$.
Lindeberg – Lévi CLT glasi: ako su $X_1, X_2,..., X_n,...$ nezavisne slučajne promenljive sa istom raspodelom i konačnom disperzijom $D(X_i) = \sigma^2 < \infty$, $i = 1,2...,n,...$, onda važi

$$P\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right)\Big/\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)} < x\right\} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\,,\quad x \in \boldsymbol{R}\,.$$

Već je rečeno da su uzorci sa kojima radimo u praktičnim uslovima neminovno konačnog obima. Neretko je o ispitivanom fenomenu, iz ovog ili onog razloga, dostupno veoma malo podataka. U takvim situacijama, aproksimacije koje bi nam pružila asimptotska teorija, čak i kada su validne, obično se ne mogu smatrati previše pouzdanim. Jedan od novijih statističkih alata čija je svrha poboljšanje uobičajenih asimptotskih aproksimacija u konačnim uzorcima, ali i izvođenje zaključaka u slučaju kada asimptotska raspodela nije poznata ili zavisi od nekih nezgodnih parametara, jesu tzv. **resampling metode**.

Reč je, zapravo, o grupi tehnika sa jednostavnom zajedničkom idejom: **„recikliranje“ informacija sadržanih u jednom jedinom raspoloživom uzorku**. Na to ukazuje i sama reč „resampling“, koja bi u doslovnom prevodu sa engleskog jezika značila „re-uzorkovanje“. Naime, osnovni princip na kojem su bazirane ove tehnike jeste da se realizovani uzorak $\mathbf{x} = (x_1, x_2,..., x_n)$ tretira kao virtuelna populacija iz koje će, na određeni način, biti generisani novi uzorci (resamples). Ovo bismo formalno mogli iskazati uvođenjem tzv. **resampling vektora**

$$\mathbf{P}^* = (P_1^*, P_2^*,..., P_n^*),\ \ P_i^* \ge 0,\ \ \sum_{i=1}^{n} P_i^* = 1,$$

tj. vektora verovatnoća koji sa podacima $\mathbf{x} = (x_1, x_2,..., x_n)$ definiše funkciju raspodele

$$F^*:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ P_1^* & P_2^* & \dots & P_n^* \end{pmatrix}$$

kao pravilo za formiranje velikog broja nezavisnih uzoraka oblika

$$\mathbf{X}^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_m^*) \sim F^*.$$

Zvezdica (*) u gornjem desnom uglu predstavlja uobičajenu oznaku za objekte koji se odnose na resampling. Primetimo da, u zavisnosti od izbora konkretne tehnike, $\mathbf{X}^*$ ne mora biti istog obima kao $\mathbf{X}$, tj. nije nužno $m = n$.

Slično kao što $\mathbf{x}$ reprezentuje originalnu populaciju, uzorci dobijeni resamplingom,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^* &= (x_{11}^*, x_{21}^*, \dots, x_{m1}^*), \\ \mathbf{x}_2^* &= (x_{12}^*, x_{22}^*, \dots, x_{m2}^*), \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_R^* &= (x_{1R}^*, x_{2R}^*, \dots, x_{mR}^*), \end{aligned}$$

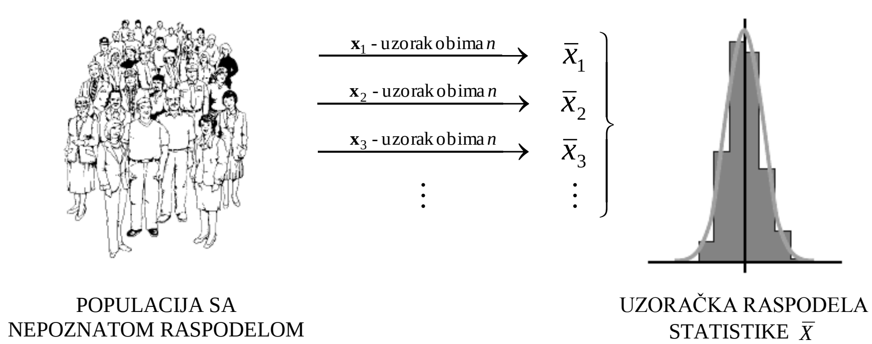
treba da simuliraju višestruko uzorkovanje iz osnovnog skupa. Dakle, namera je da se uzoračka raspodela posmatrane statistike $Y = f(\mathbf{X})$ aproksimira **resampling raspodelom**, određenom njenim vrednostima

$$y_j^* = f(\mathbf{x}_j^*), \ j = 1, 2, \dots, R,$$

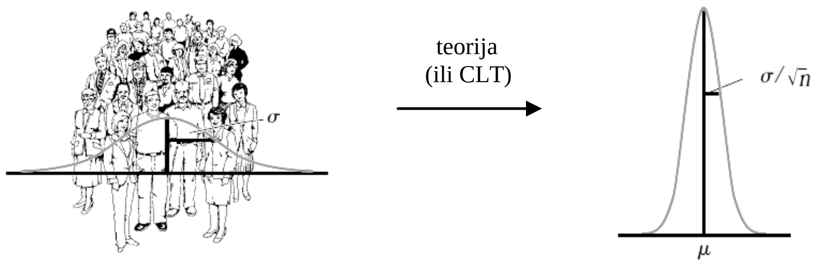
izračunatim za dobijene „reuzorke“.

Da bismo jasnije uočili razliku između zaključaka koje izvodimo pozivanjem na asimptotsku teoriju i primenom resamplinga, vratićemo se na primer s početka ovog odeljka – ocenjivanje nepoznate sredine populacije aritmetičkom sredinom uzorka.

a) Uzoračka raspodela statistike $\overline{X}$ formirana je od njenih vrednosti izračunatih za veliki broj uzoraka izvučenih iz polazne populacije čiju raspodelu ne znamo.

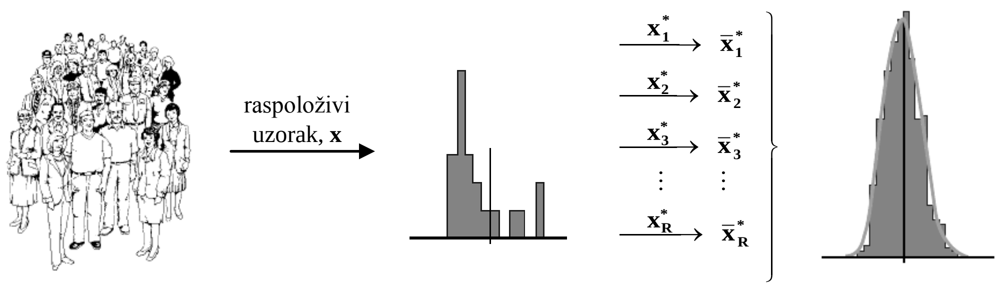


b) Ukoliko je poznato da je polazna populacija normalno raspodeljena, statistička teorija nam garantuje da je i uzoračka raspodela aritmetičke sredine normalna; čak i kada navedeni uslov nije ispunjen, isti zaključak nam obezbeđuje CLT.



NORMALNA POPULACIJA SA NEPOZNATOM SREDINOM μ | UZORAČKA RASPODELA STATISTIKE $\overline{X}$

c) Ideja resamplinga: iz jednog raspoloživog uzorka generisati veliki broj (*R*) novih, izračunati vrednost posmatrane statistike za svaki od njih i formirati tzv. resampling raspodelu kao aproksimaciju njene uzoračke raspodele.



POPULACIJA SA NEPOZNATOM RASPODELOM | ORIGINALNI UZORAK | RESAMPLING RASPODELA STATISTIKE $\overline{X}$

Resampling očuvava suštinu statističkog zaključivanja, budući da je rezonovanje i dalje zasnovano na pitanju: „Šta bi se desilo kada bismo ponovili postupak mnogo puta?" Cilj ovih metoda je da se primenom intenzivnog računa omogući olakšanje uslova koji su neophodni za bezbednu primenu klasičnih statističkih procedura. One nas često oslobađaju komplikovanih formula i funkcionišu po istom mehanizmu za čitav spektar različitih statistika pod različitim okolnostima, dajući ponekad i tačnije rezultate od onih koje bismo dobili na tradicionalan način.

Iako prvi tragovi zanimanja za ovu temu datiraju još iz 30-ih godina prošlog veka, izuzetno veliki računski troškovi predstavljaju glavni razlog što su značajnija ispitivanja resampling metoda usledila tek nakon pojave modernih računara. Paralelno sa uvećavanjem njihove brzine i moći, razvijale su se i brojne varijacije ovih tehnika, ali se u literaturi najčešće izdvajaju **četiri osnovna tipa**:

1) **permutacioni testovi** (Fisher, 1935.) – testovi hipoteza zasnovani na permutovanju opažanja originalnog uzorka, tako da se p-vrednost određuje kao udeo permutacija za koje vrednost test statistike premašuje onu izračunatu za polazni uzorak;
2) **cross-validation** (Kurtz, 1948.) – metod koji se u ekonometriji koristi za ocenjivanje tačnosti predviđanja na osnovu modela: u svakoj iteraciji, jedan deo raspoloživih opažanja se izdvaja za fitovanje modela, dok ostatak služi za njegovo testiranje, a konačna ocena preciznosti predviđanja formira se usrednjavanjem rezultata dobijenih višestrukim ponavljanjem postupka za različite podele originalnog uzorka;
3) **jackknife** (Quenouille, 1949.) – novi uzorci se formiraju naizmeničnim izostavljanjem po jednog opažanja (ili, opštije, grupe opažanja) iz originalnog uzorka; njegova osnovna namena jeste redukcija pristrasnosti ocenjivača i dobijanje pouzdanijih ocena varijanse;
4) **bootstrap** (Efron, 1979.) – u neparametarskoj verziji, bootstrap uzorci se dobijaju putem „izvlačenja sa vraćanjem“ iz originalnog skupa opažanja, dok parametarski bootstrap podrazumeva određivanje vrednosti nepoznatih parametara raspodele unapred zadatog oblika na osnovu raspoloživih podataka i, zatim, generisanje novih uzoraka iz date raspodele okarakterisane dobijenim parametrima.

Od njihovog uvođenja u statističku praksu do danas, kritike na račun resampling metoda bile su podeljene.

Ima mnogo onih koji su još uvek krajnje skeptični po pitanju upotrebe ovih „alternativnih“ postupaka. S. E. Fienberg (1991) je, na primer, prilično oštro prokomentarisao:

„Pokušavate da ni od čega dobijete nešto. Koristite iste brojeve iznova i iznova, sve dok ne dođete do odgovora koji ne možete dobiti ni na koji drugi način. U tu svrhu, morate načiti neke pretpostavke, zbog kojih se kasnije možete mnogo pokajati.“

Najmanje opravdan je, nesumnjivo, poslednji argument, budući da je svaka teorija i procedura utemeljena na izvesnim polaznim postavkama koje prihvatamo takvim kakve jesu – štaviše, klasična statistika svakako prednjači u odnosu na resampling metode u tom pogledu. Neki kritičari su otišli i dalje, postavljajući pitanje da li se resampling uopšte može smatrati formom statističkog zaključivanja, s obzirom na to da vrši generalizaciju na osnovu samo jednog uzorka. Ono o čemu se, u svakom slučaju, mora voditi računa jeste pažljiva primena ovih tehnika pri radu sa podacima neuobičajene strukture, kako ne bi bila ugrožena validnost dobijenih rezultata. Sa istim problemom se, naravno, suočavaju i klasični statistički postupci, ali ga oni, za razliku od resamplinga, ne mogu bar delimično ublažiti dodatnim uzorkovanjem.

Na drugoj strani, pristalice resampling metoda navode brojne razloge kojima opravdavaju njihovu upotrebu. Kako je već istaknuto, oni predstavljaju pogodnu alternativu za tradicionalne statističke procedure koje su bazirane na teorijskim raspodelama, što podrazumeva jake pretpostavke o populaciji i uzorku, a često i zahtev za dovoljno velikim skupom podataka. Iako se obično upotrebljava kao „lek“ za problem malog uzorka, resampling može biti od koristi i u obrnutoj situaciji – tipičan primer je redukovanje moći testa, koji za suviše veliki broj opažanja može odbaciti praktično svaku hipotezu. Važna stavka je i to što su resampling metode suštinski veoma jednostavne i intuitivno jasne, tako da za njihovo razumevanje nisu neophodna preterano napredna matematička predznanja.

Da zaključimo: i klasičnim i resampling postupcima je moguće pripisati manje ili više argumenata i „za“ i „protiv“, što u velikoj meri zavisi od konkretne situacije koja se ispituje. Ipak, mora se konstatovati da u slučaju kada su zadovoljene neophodne parametarske pretpostavke nijedan pristup neće dati bolje rezultate od klasične statistike.

2.2 Formulacija problema

Za početak, razmotrimo sledeću situaciju. Podaci koje imamo, u oznaci $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, predstavljaju realizaciju prostog slučajnog uzorka $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ za obeležje populacije X sa funkcijom raspodele F. Drugim rečima, vrednosti $x_1, x_2, ..., x_n$ su generisane „pravilom“ F. Neka je, dalje, $Y = f(\mathbf{X})$ nekakva statistika uzorka $\mathbf{X}$. Ono što nas zanima jeste određivanje njene funkcije raspodele, G, na osnovu $\mathbf{X}$, tj. njena uzoračka raspodela. Radi jednostavnosti, pretpostavićemo da su sve slučajne promenljive jednodimenzionalne.

Ukoliko se zna kako su raspodeljene X_i, $i = 1, 2, ..., n$, tj. F je dato, jednostavno ćemo generisati veliki broj, obeležimo ga sa B, nezavisnih realizacija prostog slučajnog uzorka $\mathbf{X}$, u oznaci

$$\mathbf{x}_j = (x_{1j}, x_{2j}, ..., x_{nj}), \quad j = 1, 2, ..., B,$$

i izračunati vrednost posmatrane statistike za svaku od njih,

$$y_j = f(\mathbf{x}_j), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_B).$$

Tada, **empirijska funkcija raspodele** (engleski: EDF – empirical distribution function) statistike Y na osnovu kolekcije $\mathbf{y}$, definisana kao

$$G_B(y \mid \mathbf{y}) = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^{B} I(\{Y_j < y\}), \quad y \in \boldsymbol{R},$$

(gde $I(A)$ predstavlja indikator događaja A, tj. slučajnu promenljivu koja uzima vrednost 1 ako se A desio, a 0 u suprotnom), prema Borelovom zakonu velikih brojeva konvergira skoro sigurno (sa verovatnoćom 1) ka funkciji raspodele $G(y)$ kada $B \to \infty$, za svako fiksirano $y \in \boldsymbol{R}$. Ova konvergencija je i uniformna po $y \in \boldsymbol{R}$, o čemu govori tzv. **centralna teorema matematičke statistike**.

Teorema 2.1 (Glivenko – Cantelli):
Ako je

$$S_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(\{X_i < x\}),\ x \in \boldsymbol{R},$$

EDF obeležja X sa funkcijom raspodele F na osnovu prostog slučajnog uzorka $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$, tada važi:

$$P\{\sup_{x\in\boldsymbol{R}} |S_n(x) - F(x)| \to 0,\ n \to \infty\} = 1. \qquad \square$$

Opisani postupak može se prikazati sledećim algoritmom:

$F \Rightarrow \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, F – poznato
for $j = 1:B$
    for $i = 1:n$
        izaberi x_{ij} iz F
    $i{+}{+}$
    $\mathbf{x}_j = (x_{1j}, x_{2j}, ..., x_{nj})$
    $y_j = f(\mathbf{x}_j)$
$j{+}{+}$
$\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_B)$
formiraj EDF $G_B(\cdot\,|\,\mathbf{y})$

Ono što, međutim, predstavlja problem jeste činjenica da vrlo često nemamo potpune informacije o raspodeli verovatnoće iz koje dolazi naš uzorak. U tom smislu, napravićemo razliku između dva slučaja:

1) **znamo oblik funkcije raspodele *F* (normalna, eksponencijalna,...), ali u njoj figuriše neki nepoznati parametar**[1]**, $\theta = \theta(F)$;**

2) **ne znamo ništa o raspodeli *F*.**

Jedno od rešenja u ovakvim situacijama predstavlja primena resampling metoda pod nazivom **bootstrap**. U zavisnosti od toga sa kojom se od pomenute dve varijante suočavamo, može se reći da postoje dva osnovna pristupa ovoj tehnici – **parametarski** i **neparametarski bootstrap** – čiji će mehanizmi biti opisani u nastavku poglavlja. Pri tome, statistika $Y = f(\mathbf{X})$ čija nas raspodela zanima biće ocenjivač nepoznatog parametra

[1] Radi jednostavnosti, posmatraćemo jednodimenzionalni slučaj. Analiza je potpuno analogna kada F zavisi od vektora nepoznatih parametara, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k)$, $k > 1$.

$$\theta = \theta(F)$$

raspodele *F* na osnovu prostog slučajnog uzorka **X**, koji ćemo označavati sa

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{X}).$$

2.3 Parametarski bootstrap

U ovom odeljku, pretpostavka je da znamo oblik funkcije raspodele *F* prostog slučajnog uzorka **X**, ali da ona zavisi od nekog parametra θ čija je stvarna vrednost nepoznata. Drugim rečima, F pripada dopustivoj familiji raspodela

$$\{F_\theta, \theta \in \Theta\},$$

gde je Θ skup svih mogućih vrednosti datog parametra. Kako je objašnjeno, interesuje nas funkcija raspodele *G* nekog njegovog ocenjivača $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{X})$. Raspolažemo samo jednom realizacijom, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Parametarski bootstrap je postupak koji navedeni problem rešava na veoma prirodan način: umesto iz F_θ, generisaćemo *B* nezavisnih uzoraka upotrebom njene aproksimacije oblika

$$F_{\hat{\theta}(\mathbf{x})},$$

gde je sa $\hat{\theta}(\mathbf{x})$ obeležena vrednost ocenjivača parametra θ izračunata za originalni uzorak **x**. Tako dobijene podatke, u oznaci

$$\mathbf{x}_j^* = (x_{1j}^*, x_{2j}^*, ..., x_{nj}^*), \quad j = 1, 2, ..., B,$$

nazivamo **bootstrap uzorcima**. Za svaki od njih, baš kao i u prethodnom odeljku, potrebno je odrediti vrednosti

$$\hat{\theta}_j^* = \hat{\theta}(\mathbf{x}_j^*), \quad j = 1, 2, ..., B, \qquad (2.1)$$

takozvane **bootstrap ocene** ili **bootstrap replikacije** posmatrane statistike, a potom konstruisati empirijsku funkciju raspodele

$$G_B(\cdot \mid \hat{\boldsymbol{\theta}}^*), \; \hat{\boldsymbol{\theta}}^* = (\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, ..., \hat{\theta}_B^*),$$

kao bootstrap ocenu nepoznatog *G*. Kolekcija vrednosti *(2.1)* često se naziva **bootstrap raspodelom** ocenjivača $\hat{\theta}$.

2.4 Neparametarski bootstrap

U uslovima kada o raspodeli F koja je generisala prost slučajan uzorak **X** nema nikakvih informacija, ideju za rešavanje problema formulisanog u odeljku 2.2 – kako oceniti raspodelu G ocenjivača $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{X})$ njenog nepoznatog parametra $\theta = \theta(F)$ – **neparametarski bootstrap** nalazi u empirijskoj funkciji raspodele

$$F_n(x \mid \mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(\{X_i < x\}), \quad x \in \boldsymbol{R},$$

formiranoj na osnovu raspoloživih podataka $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Praktično, to znači da se B realizacija prostog slučajnog uzorka **X**, tj. B bootstrap uzoraka, dobijaju putem **izvlačenja sa vraćanjem** iz originalnog skupa $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, tako da svaka od vrednosti x_i pri svakom izvlačenju ima jednaku verovatnoću, $1/n$, da bude izabrana. Drugim rečima, ako bismo sa

$$\mathbf{X}^* = (X_1^*, X_2^*, ..., X_n^*)$$

obeležili „bootstrap prost slučajan uzorak“ (čije su realizacije označene kao $\mathbf{x}_j^* = (x_{1j}^*, x_{2j}^*, ..., x_{nj}^*), \ \ j = 1,2,...,B)$, „bootstrap slučajne promenljive“ $X_i^*, i = 1,2,...,n,$ bile bi međusobno nezavisne i raspodeljene po pravilu

$$X_i^* : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \\ 1/n & 1/n & ... & 1/n \end{pmatrix}. \qquad (2.2)$$

Dalji tok postupka je potpuno isti kao u slučaju parametarskog bootstrapa: za svaki bootstrap uzorak $\mathbf{x}_j^*$ računamo odgovarajuću bootstrap ocenu $\hat{\theta}_j^* = \hat{\theta}(\mathbf{x}_j^*)$, a zatim generišemo empirijsku funkciju raspodele $G_B(\cdot \mid \hat{\boldsymbol{\theta}}^*)$ na osnovu kolekcije dobijenih vrednosti $\hat{\boldsymbol{\theta}}^* = (\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, ..., \hat{\theta}_B^*)$, kao aproksimaciju za nepoznatu raspodelu G ocenjivača $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{X})$ parametra $\theta = \theta(F)$.

Opisana procedura se može predstaviti algoritmom veoma sličnom onome iz odeljka 2.2. Jedina razlika je u tome što je nepoznato $F(\cdot)$ zamenjeno sa $F_n(\cdot \mid \mathbf{x})$. U tom smislu, bootstrap (parametarski i neparametarski) predstavlja tipičan primer tzv. **plug-in principa**, koji govori o ocenjivanju nepoznatog parametra $\theta(F)$ posmatrane raspodele F veličinom $\theta(\hat{F})$, gde je sa $\hat{F}$ označena nekakva aproksimacija funkcije raspodele F. Prema tome, zaključuje se da je u slučaju parametarskog bootstrapa $\hat{F} = F_{\hat{\theta}(\mathbf{x})}$, dok je za neparametarski $\hat{F} = F_n(\cdot \mid \mathbf{x})$.

$F \Rightarrow \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, F – nepoznato
formiraj $F_n(\cdot \mid \mathbf{x})$
for $j = 1 : B$
  for $i = 1 : n$
    izaberi x_{ij}^* iz $F_n(\cdot \mid \mathbf{x})$
  $i++$
  $\mathbf{x}_j^* = (x_{1j}^*, x_{2j}^*, ..., x_{nj}^*)$
  $\hat{\theta}_j^* = \hat{\theta}(\mathbf{x}_j^*)$
$j++$
$\hat{\boldsymbol{\theta}}^* = (\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, ..., \hat{\theta}_B^*)$
formiraj $G_B(\cdot \mid \hat{\boldsymbol{\theta}}^*)$

2.5 Odnos parametarskog i neparametarskog bootstrapa na primeru ocenjivanja sredine i varijanse

2.5.1 Uvod

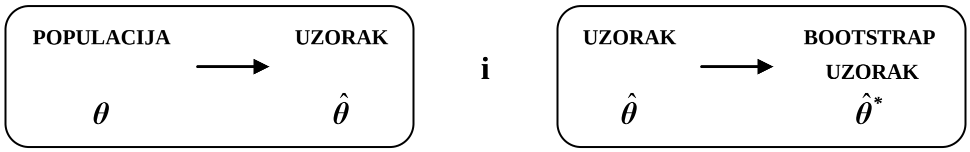
Rezime izlaganja iz prethodna tri odeljka izgledao bi ovako. Polazimo od nekog obeležja populacije X sa funkcijom raspodele F u kojoj figuriše nepoznati parametar $\theta = \theta(F)$. Dat nam je ocenjivač tog parametra na osnovu prostog slučajnog uzorka $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$, u oznaci $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{X})$. Interesuje nas raspodela statistike $\hat{\theta}$, opisana funkcijom raspodele G. S obzirom na to da raspolažemo samo jednom realizacijom prostog slučajnog uzorka $\mathbf{X}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, i da zbog nepotpunih informacija o F nismo u mogućnosti da ih generišemo još, ne možemo se pozivati na uobičajene asimptotske rezultate (odeljak 2.2), pa simuliramo uzorkovanje iz originalne populacije primenom bootstrap postupka – formiramo bootstrap uzorke $\mathbf{x}_j^* = (x_{1j}^*, x_{2j}^*, ..., x_{nj}^*)$, $j = 1, 2, ..., B$, po „pravilu“ $F_{\hat{\theta}(\mathbf{x})}$ (odeljak 2.3) ili $F_n(\cdot \mid \mathbf{x})$ (odeljak 2.4) i računamo vrednosti $\hat{\theta}_j^* = \hat{\theta}(\mathbf{x}_j^*)$ (bootstrap ocene). Kolekcija $\hat{\boldsymbol{\theta}}^* = (\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, ..., \hat{\theta}_B^*)$ predstavlja aproksimaciju **„idealne“ bootstrap raspodele**, koja se dobija pod uslovom da $B \to \infty$. Tačnije, EDF ovih bootstrap replikacija,

$$G_B(\tau \mid \hat{\boldsymbol{\theta}}^*) = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^{B} I(\{\hat{\theta}(X_j^*) < \tau\}), \ \tau \in \boldsymbol{R},$$

za $B \to \infty$ konvergira ka funkciji raspodele G^* **„idealne“ bootstrap ocene**

$$\hat{\theta}^* = \hat{\theta}(\mathbf{X}^*), \tag{2.3}$$

gde je sa $\mathbf{X}^* = (X_1^*, X_2^*, ..., X_n^*)$ obeležen bootstrap prost slučajan uzorak, čije se realizacije $\mathbf{x}_j^*$ generišu na gore opisani način. **Prema tome, nepoznatu funkciju raspodele *G* polaznog ocenjivača $\hat{\theta}$ ocenili smo empirijskom funkcijom raspodele bootstrap ocena, $G_B(\cdot\,|\,\hat{\boldsymbol{\theta}}^*)$, kao aproksimacijom „idealne" bootstrap raspodele G^* (*Slika 2.1*).**



Slika 2.1 – Suština bootstrap postupka: korišćenje analogije među odnosima populacija/uzorak i uzorak/bootstrap uzorak

U praktičnim primenama, međutim, broj generisanih bootstrap uzoraka, *B*, nužno je konačan. Uprkos enormnom porastu računarske brzine i moći, naročito tokom prethodne dve decenije, postupak se u nekom momentu mora zaustaviti. Naravno, čak i u eri modernih kompjutera je poželjno da izvođenje procedure bude što jevtinije, tj. da oduzme što manje vremena i, samim tim, prouzrokuje niže računske troškove.

Kada je u pitanju neparametarski bootstrap, pod pretpostavkom da su sva opažanja u skupu $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ međusobno različita, ukupan broj bootstrap uzoraka $\mathbf{x}_j^*$ koje je moguće generisati iz originalnog, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, iznosi n^n. Osim u slučaju kada je obim uzorka sa kojim radimo izuzetno mali, n^n je ogromno. Stoga, kako je istaknuto, moramo ograničiti naše ispitivanje samo na veći ili manji deo mogućih replikacija, što umnogome zavisi od konkretnog primera.

U tom smislu, kaže se da postoje **dva izvora greške pri bootstrap zaključivanju**:

a) greška prouzrokovana time što je baš uzorak **x** izabran za reprezenta posmatrane populacije,

b) greška nastala usled toga što nisu uzeti u obzir svi bootstrap uzorci koje je moguće generisati iz **x** (kontroliše se izborom dovoljno velikog broja *B*).

2.5.2 Botstrap ocene sredine i varijanse

Pretpostavimo da nas pod uslovima definisanim u prethodnom odeljku interesuju *prvi i drugi centralni moment raspodele G*, odnosno sredina $E(\hat{\theta})$ i varijansa $Var(\hat{\theta})$ ocenjivača $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{X})$ proizvoljnog parametra $\theta = \theta(F)$ funkcije raspodele *F*. Pri tome, podrazumeva se da $E(\hat{\theta})$ i $Var(\hat{\theta})$ računamo u odnosu na originalnu raspodelu obeležja *X*, *F* = $F(\theta)$.

Iz statistike nam je poznato da se za ocenjivanje sredine μ i varijanse σ^2 nekog obeležja populacije *Z* sa funkcijom raspodele *H* uobičajeno koriste tzv. plug-in ocene, formirane po principu

$$\eta = \eta(H) \mapsto \hat{\eta} = \eta(H_n) = \hat{\eta}(\mathbf{Z}),$$

gde je sa H_n označena empirijska funkcija raspodele na osnovu prostog slučajnog uzorka $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, ..., Z_n)$, tj.

$$H_n(z) = H_n(z \,|\, \mathbf{Z}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(\{Z_i < z\}), \; z \in \boldsymbol{R}.$$

Dakle, nepoznati parametar μ ocenićemo sredinom uzorka,

$$\hat{\mu} = \bar{Z}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i, \qquad (2.4)$$

dok je plug-in ocenjivač za σ^2 varijansa uzorka,

$$\hat{\sigma}^2 = \bar{S}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \bar{Z}_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 - \bar{Z}_n^2. \qquad (2.5)$$

Imajući ovo u vidu, prirodan način za konstruisanje bootstrap ocena sredine i varijanse ocenjivača $\hat{\theta}$ proizvoljnog parametra θ podrazumeva određivanje sredine i varijanse uzorka bootstrap replikacija, $\hat{\boldsymbol{\theta}}^* = (\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, ..., \hat{\theta}_B^*)$:

- **bootstrap ocena sredine:** $$\boxed{\bar{\theta}^* = \frac{1}{B}\sum_{j=1}^{B}\hat{\theta}_j^*} \qquad (2.6)$$
- **bootstrap ocena varijanse:** $$\boxed{\hat{\sigma}^{2*} = \frac{1}{B-1}\sum_{j=1}^{B}(\hat{\theta}_j^* - \bar{\theta}^*)^2} \qquad (2.7)$$

Primetimo da je u drugoj formuli umesto plug-in ocenjivača $\bar{S}_n^2$ upotrebljena tzv. popravljena uzoračka disperzija, S^2, za koju se zna da nepristrasno ocenjuje nepoznatu varijansu obeležja, baš kao što je slučaj i sa ocenjivačem nepoznate sredine *(2.4)*.

Na osnovu analize iz prethodnog odeljka, lako je izvesti zaključak da za $B \to \infty$ izrazi *(2.6)* i *(2.7)* daju sredinu i varijansu „idealne“ bootstrap ocene *(2.3)*, tj.

$$\overline{\theta}^{*} \xrightarrow{B\to\infty} E_{\mathbf{X}}(\hat{\theta}^{*}) \quad \text{i} \quad \hat{\sigma}^{2*} \xrightarrow{B\to\infty} Var_{\mathbf{X}}(\hat{\theta}^{*}),$$

gde indeks „**X**“ ukazuje na to da se sredina i varijansa sada određuju u odnosu na odgovarajuću bootstrap raspodelu formiranu na bazi uzorka **X**.

2.5.3 Numerički rezultati

Na kraju ovog poglavlja, uporedićemo performanse opisanih postupaka parametarskog i neparametarskog bootstrapa:

- za različite raspodele verovatnoće iz kojih potiče originalni uzorak (normalna, eksponencijalna, binomna),
- za različite veličine originalnog uzorka $(n = 5,\ 200)$,
- za različite brojeve bootstrap replikacija $(B = 10,\ 100,\ 1.000,\ 10.000)$.

U tu svrhu, poslužićemo se programskim paketom „Matlab“ kompanije „MathWorks“, koji je široko korišćen za brzo i jednostavno izvođenje numeričkih izračunavanja, razvoj algoritama, prikazivanje i analizu podataka.

Postavka problema:

	a)	***b)***	***c)***
STVARNA RASPODELA OBELEŽJA	$X : N(\mu,\sigma^2)$ $\mu = 5,\ \sigma^2 = 1$	$X : \mathcal{E}(\lambda)$ $\lambda = 4$	$X : B(m, p)$ $m = 20,\ p = 0.7$
SREDINA OBELEŽJA	$E(X) = \mu = 5$	$E(X) = 1/\lambda = 0.25$	$E(X) = mp = 14$
VARIJANSA OBELEŽJA	$Var(X) = \sigma^2 = 1$	$Var(X) = 1/\lambda^2 = 0.0625$	$Var(X) = mp(1-p) = 4.2$
POSMATRANI PARAMETAR	$\theta = \mu$	$\theta = \lambda$	$\theta = p$
OCENJIVAČ PRAMETRA[2]	$\hat{\theta}(\mathbf{X}) = \overline{X}_n$	$\hat{\theta}(\mathbf{X}) = 1/\overline{X}_n$	$\hat{\theta}(\mathbf{X}) = \overline{X}_n/m$
SREDINA OCENJIVAČA	$E(\hat{\theta}) = \mu$	$E(\hat{\theta}) = (n\lambda)/(n-1)$	$E(\hat{\theta}) = p$
VARIJANSA OCENJIVAČA	$Var(\hat{\theta}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$	$Var(\hat{\theta}) = \dfrac{(n\lambda)^2}{(n-1)^2(n-2)}$	$Var(\hat{\theta}) = \dfrac{p(1-p)}{mn}$

[2] Koristićemo ocenjivače određene metodom maksimalne verodostojnosti.

Zadatak:

1) Ako se zna da raspodela obeležja X pripada dopustivoj familiji

a) $\{N(\mu,\sigma^2),\ \mu \in \boldsymbol{R},\ \sigma > 0\}$,
b) $\{\mathcal{E}(\lambda),\ \lambda > 0\}$,
c) $\{B(m,p), m \in \boldsymbol{N},\ p \in (0,1)\}$,

primenom parametarskog postupka konstruisati bootstrap ocene nepoznatog parametra θ, oceniti bootstrap raspodelu statistike $\hat{\theta}$ i naći odgovarajuće bootstrap ocene njene sredine i varijanse.

2) Pod pretpostavkom da o funkciji raspodele F obeležja X nema nikakvih podataka, ponoviti gore navedeno upotrebom neparametarskog bootstrapa.

Izrada:

1a) Potrebne rezultate ćemo dobiti izvršavanjem „Matlab“ algoritma „ParBootNorm“[3] (dodatak D1 na kraju rada). Zbog prostorne ograničenosti, kompletan izlaz koji se dobija pozivanjem ove funkcije i detaljna analiza rezultata biće dati samo za slučaj sa najmanjim brojem posmatranih podataka – po našem izboru, to je kombinacija $n = 5,\ B = 10.$ Preostale argumente komande „ParBootNorm“ uzimamo iz gornje tabele. Radi lakšeg snalaženja, na desnoj strani su ispisane odgovarajuće oznake korišćene u teorijskom razmatranju kroz prethodne odeljke.

```
>> ParBootNorm(5,10,5,1)
```
$n = 5,\ B = 10,\ \mu = 5,\ \sigma = 1$

```
Polazni uzorak, x
    4.5674
    3.3344
    5.1253
    5.2877
    3.8535
```
$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_5)$

```
Sredina od x:
    4.4337
```
$\hat{\theta}(\mathbf{x}) = \hat{\mu} = \bar{x}_5$

```
Varijansa od x:
    0.5541
```
$\hat{\sigma}^2 = \bar{s}_5^2$

```
St. devijacija od x:
    0.7444
```
$\sqrt{\hat{\sigma}^2} = \sqrt{\bar{s}_5^2}$

[3] U cilju štampanja rezultata, u algoritme iz dodatka su po potrebi ubacivane „disp“ naredbe.

```
Bootstrap uzorci generisani parametarskim postupkom
dati su u kolonama naredne matrice:
```
$\mathbf{x}_j^*,\ j=1,2,...,10$

```
    5.3202  4.2947  4.5185  4.6528  5.0724  4.1360  4.9314  3.2396  4.8273  3.6814
    5.3189  4.9739  5.2278  3.4390  5.3671  4.9473  5.3201  4.6252  4.5969  4.8911
    4.4057  3.9957  4.4778  4.9654  3.2473  5.0408  3.5386  3.6473  3.7474  4.8116
    4.6773  6.0588  4.3625  5.6422  3.3610  4.9636  4.4189  5.4871  2.8179  5.6935
    4.5637  4.3321  3.8141  3.9187  4.8588  5.3941  4.3170  3.8344  4.3896  4.8738
```

```
Bootstrap replikacije ocenjivaca teta kapa
dobijene parametarskim postupkom su:
```
$\hat{\theta}_j^* = \hat{\theta}(\mathbf{x}_j^*) = (\bar{x}_5)_j^*,\ j=1,2,...,10$

```
    4.8571  4.7311  4.4801  4.5236  4.3813  4.8964  4.5052  4.1667  4.0758  4.7903

Bootstrap ocena sredine ocenjivaca teta kapa:
    4.5408
```
$\bar{\theta}^*$

```
Bootstrap ocena varijanse ocenjivaca teta kapa:
    0.0791
```
$\hat{\sigma}^{2*}$

Podsetimo se, stvarna raspodela verovatnoće (F) našeg originalnog uzorka ($\mathbf{x}$) bila je, po pretpostavci, $N(5,1)$, ali smo se „pravili“ da nam je poznat samo njen normalan oblik, ne i stvarne vrednosti parametara – $\theta = \mu = 5$ i $\eta = \sigma^2 = 1$. Ono što nas interesuje jeste raspodela (G) ocenjivača $\hat{\theta}(\mathbf{X}) = \bar{X}_n$. U ovom konkretnom slučaju, odgovor nam obezbeđuje sama statistička teorija: naime, ako prost slučajan uzorak $\mathbf{X}$ obima n pripada raspodeli $N(\mu,\sigma^2)$, zna se da je statistika $\bar{X}_n$ raspodeljena kao $N(\mu,\sigma^2/n)$. Dakle, imamo da je

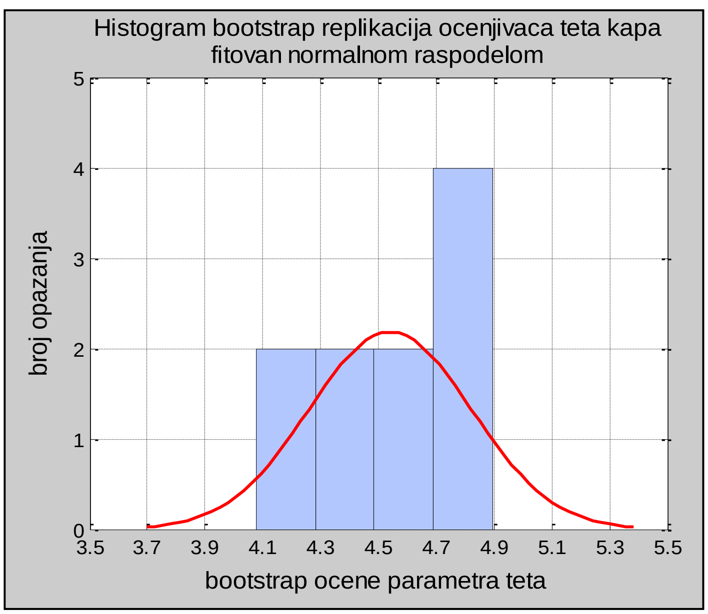
$$\hat{\theta} : N(5, 0.2),$$

ali se pretpostavlja da nam ova teorijska činjenica nije poznata.

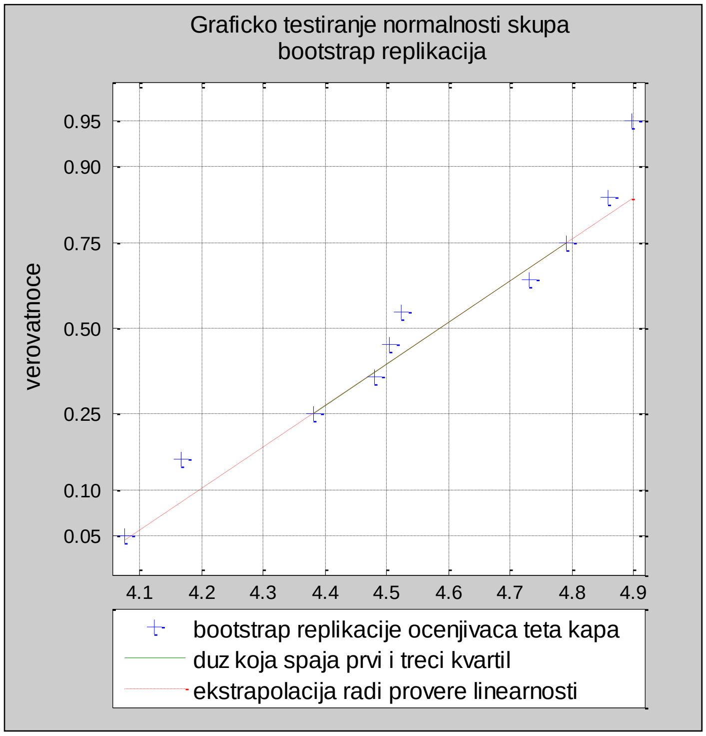
Iz tog razloga smo generisali $B=10$ bootstrap uzoraka $\mathbf{x}_j^*,\ j=1,2,...,10,$ parametarskim postupkom, tj. po „pravilu“

$$F_{(\hat{\theta}(\mathbf{x}),\hat{\eta}(\mathbf{x}))} = N(\bar{x}_n, \bar{s}_n^2) = N(4.4337, 0.5541),$$

gde su sa $\bar{x}_n$ i $\bar{s}_n^2$ označene sredina i varijansa polaznog uzorka, $\mathbf{x}$.



Slika 2.2 – Histogram bootstrap replikacija ocenjivača $\hat{\theta}$ dobijen pozivanjem funkcije „ParBootNorm“



Slika 2.3 – Provera normalnosti skupa bootstrap replikacija ocenjivača $\hat{\theta}$ (funkcija „ParBootNorm“)

Za svaki od njih je izračunata vrednost $\hat{\theta}_j^* = \hat{\theta}(\mathbf{x}_j^*) = (\bar{x}_n)_j^*$, tj. formirana je kolekcija bootstrap replikacija $\hat{\boldsymbol{\theta}}^*$, tako da sada možemo grafički predstaviti približnu bootstrap raspodelu ocenjivača $\hat{\theta}$ (za $B=10$), kao aproksimaciju njegove stvarne raspodele, i odrediti bootstrap ocene sredine i varijanse ove statistike (formule *(2.6)* i *(2.7)*), koje aproksimiraju nepoznato $E(\hat{\theta})$ i $Var(\hat{\theta})$.

Histogram na *Slici 2.2*, dakle, prikazuje aproksimaciju „idealne“ bootstrap raspodele (G^*) ocenjivača $\hat{\theta}$, koju bismo dobili za $B \to \infty$. Crvena kriva na grafikonu označava fitovanje normalnom raspodelom (funkcija gustine). Imajući u vidu da smo za obim polaznog uzorka i broj bootstrap replikacija odabrali veoma male vrednosti $(n=5$ i $B=10$, respektivno), bilo je logično unapred očekivati slabe rezultate.

Sa druge strane, *Slika 2.3* ilustruje grafičko testiranje normalnosti naših podataka. Naime, plavim krstićima označene su vrednosti bootstrap ocena parametra θ, tj. replikacije $\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, ..., \hat{\theta}_{10}^*$, dok su na *y*-osu smeštene verovatnoće koje odgovaraju normalnoj raspodeli. Zelena duž spaja 1. i 3. kvartil empirijske raspodele određene kolekcijom $\hat{\boldsymbol{\theta}}^*$, a isprekidanom crvenom linijom je obeležena njena ekstrapolacija do krajeva uzorka, čija je namena provera linearnosti skupa replikacija – ukoliko one zaista dolaze iz normalne raspodele, krstići će biti raspoređeni duž te linije. U našem slučaju, grafikon potvrđuje zaključak o osrednjim rezultatima izveden posmatranjem histograma.

U nastavku ćemo na identičnom polaznom uzorku **x** (generisanom u prethodnoj simulaciji)[4] ispitati ponašanje postupka parametarskog boostrapa pri povećanju broja replikacija, *B*, a zatim čitavu proceduru ponoviti za uzorak nešto većeg obima – $n = 200$, sa sledećim karakteristikama (preuzeto iz „Matlab“ autputa dobijenog naredbom „ParBoot-

[4] Algoritam je prethodno prilagođen potrebi da se simulacije izvršavaju na istom originalnom uzorku, tj. izbačena je linija kojom se generiše novo **x** (linija 4) – umesto toga, **x** se zadaje kao dodatni argument funkcije „ParBootNorm“.

Norm(200,10, 5, 1)“):

– sredina od **x**: $\bar{x}_{200} = 4.9605$

– varijansa od **x**: $\bar{s}_{200}^2 = 0.8228$

– st. devijacija od **x**: $\sqrt{\bar{s}_{200}^2} = 0.9071$

n \ ***B***	**10**	**100**	**1.000**	**10.000**
5	$\bar{\theta}^* = 4.5408$ $\hat{\sigma}^{2*} = 0.0791$	$\bar{\theta}^* = 4.4533$ $\hat{\sigma}^{2*} = 0.1554$	$\bar{\theta}^* = 4.4448$ $\hat{\sigma}^{2*} = 0.1154$	$\bar{\theta}^* = 4.4405$ $\hat{\sigma}^{2*} = 0.1119$
200	$\bar{\theta}^* = 4.9714$ $\hat{\sigma}^{2*} = 0.0045$	$\bar{\theta}^* = 4.9663$ $\hat{\sigma}^{2*} = 0.0036$	$\bar{\theta}^* = 4.9632$ $\hat{\sigma}^{2*} = 0.0044$	$\bar{\theta}^* = 4.9602$ $\hat{\sigma}^{2*} = 0.0041$

Tabela 2.1 – Bootstrap ocene sredine i varijanse ocenjivača $\hat{\theta}$ dobijene izvršavanjem programa „ParBootNorm“ za n=5,200 i B=10,100,1.000,10.000, respektivno

Konačni rezultati su prikazani u *Tabeli 2.1*, a odgovarajući grafikoni na stranama 27 i 28. Zaključke koje na osnovu njih izvodimo mogli bismo sumirati na sledeći način.

✓ **Oblik raspodele.** Histogrami (slike u levoj koloni) i grafičko testiranje normalnosti (desna kolona) potvrđuju našu teorijsku analizu – raspodela verovatnoće generisanih podataka, tj. bootstrap replikacija ocenjivača $\hat{\theta}(\mathbf{X}) = \overline{X}_n$, zaista je normalnog oblika, pri čemu aproksimacija postaje sve preciznija sa porastom broja bootstrap uzoraka.

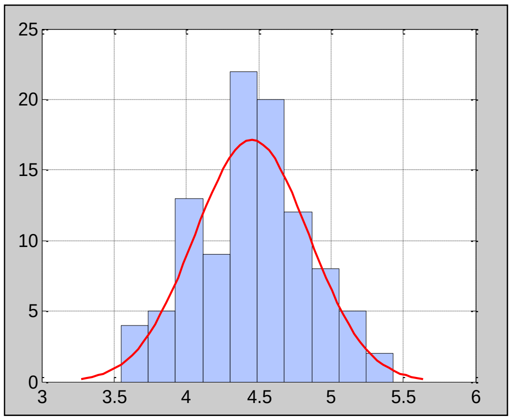
✓ **Sredina**. Za originalni uzorak koji je (po uslovu zadatka) izvučen iz normalne raspodele sa sredinom $\mu = 5$, statistička teorija je predvidela da će matematičko očekivanje njenog ocenjivača biti identično. Iz *Tabele 2.1* vidimo, međutim, da se bootstrap ocene sredine od $\hat{\theta}$ koncentrišu oko odgovarajućih uzoračkih vrednosti, tj $\bar{x}_n = 4.4337$ za $n = 5$ i $\bar{x}_n = 4.9605$ za $n = 200$. Time smo dobili praktičnu potvrdu konstatacije s kraja odeljka 2.5.1 – da jedan deo nepreciznosti (greške) pri bootstrap zaključivanju potiče otuda što je baš posmatrani uzorak izabran za reprezenta populacije. Ponovo, veća tačnost je postignuta za veće *B*, a uočavamo i to da su rezultati nešto bolji za $n = 200$ nego za $n = 5$.

✓ **Varijansa**. Slično prethodnoj analizi, za uzorke obima $n = 5$ i $n = 200$, redom, koji potiču iz normalne populacije sa varijansom σ^2=1, teorijske vrednosti varijanse ocenjivača $\hat{\theta}(\mathbf{X}) = \overline{X}_n$ njene „nepoznate“ sredine iznose $\sigma^2/5 = 0.2$, odnosno $\sigma^2/200 =$ 0.005. Da bismo rezultate dobijene na osnovu originalnih uzoraka uporedili sa odgovarajućim bootstrap ocenama, moramo uskladiti korišćene formule:

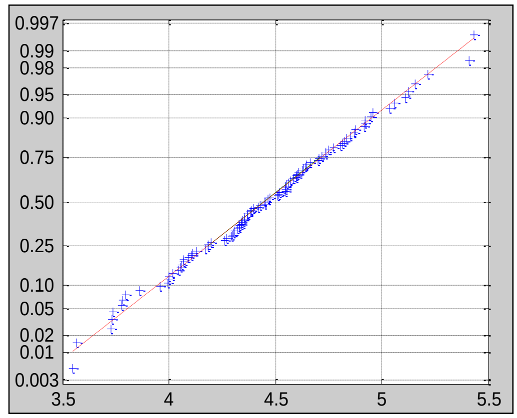
– $n = 5$: $\bar{s}_n^2 = 0.5541 \Rightarrow s^2 = (5/(5-1))\bar{s}_n^2 = 0.6926 \Rightarrow s^2/5 = 0.1385$,

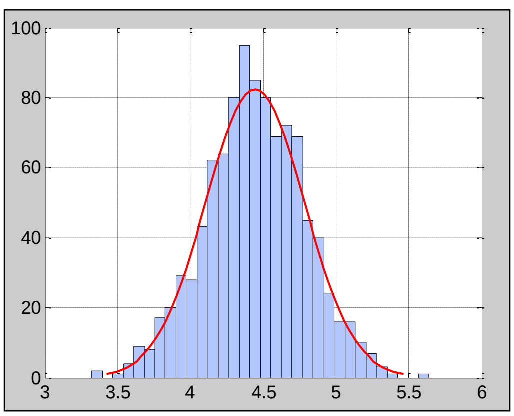
– $n = 200$: $\bar{s}_n^2 = 0.8228 \Rightarrow s^2 = (200/(200-1))\bar{s}_n^2 = 0.8269 \Rightarrow s^2/200 = 0.0041$.

Tabela 2.1 pokazuje da su bootstrap varijanse i ovoga puta bliže uzoračkim nego teorijskim vrednostima, što je naročito uočljivo u simulacijama za $n = 200$. Kod petoelementnog uzorka brojevi su nešto „šareniji“, ali i sistematski manji od 0.1385.

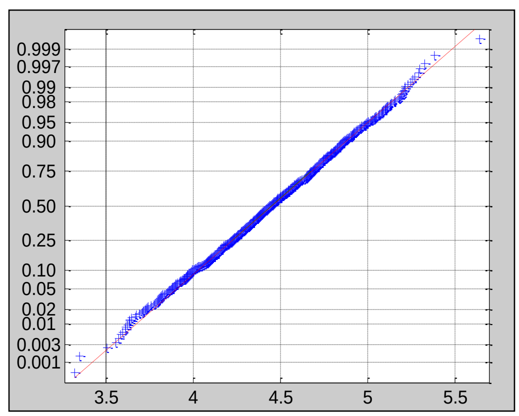


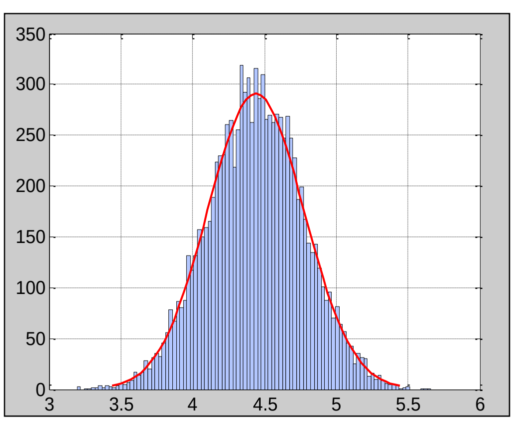
$n = 5$
$B = 100$



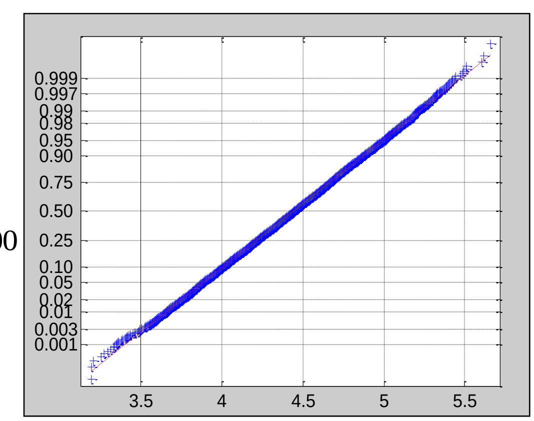


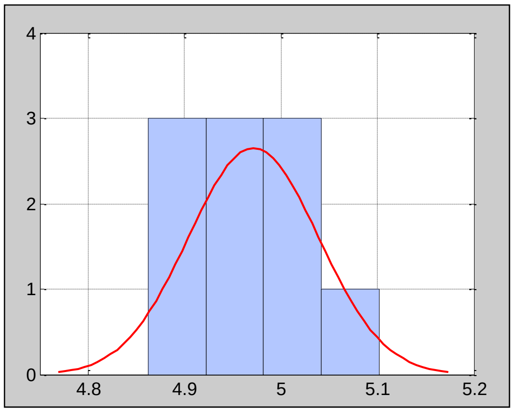
$n = 5$
$B = 1.000$



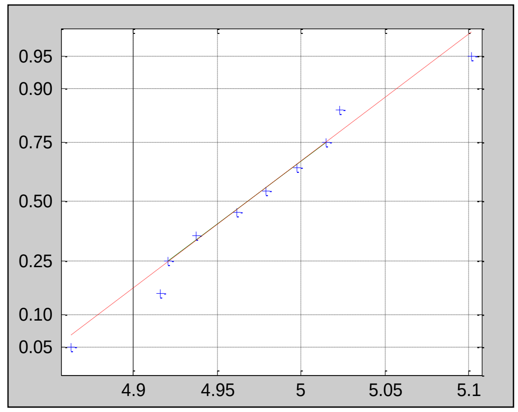


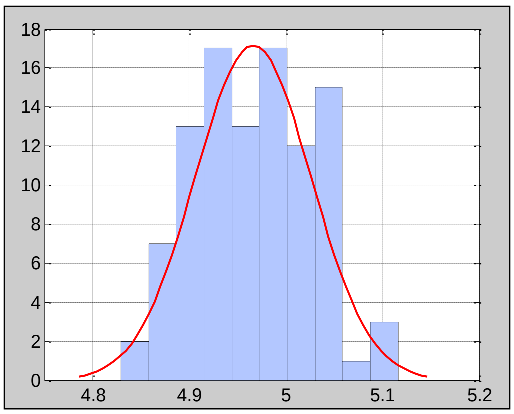
$n = 5$
$B = 10.000$



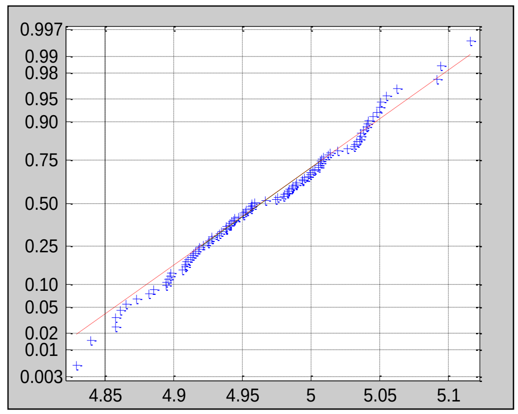


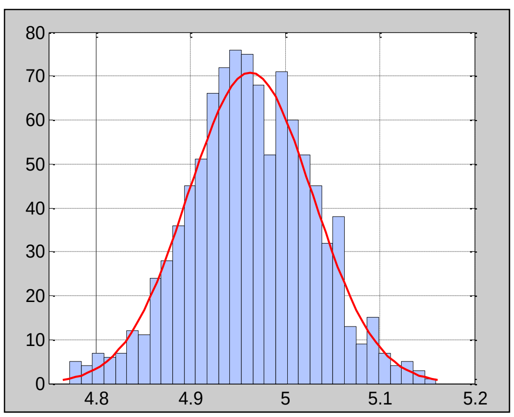
$n = 200$
$B = 10$



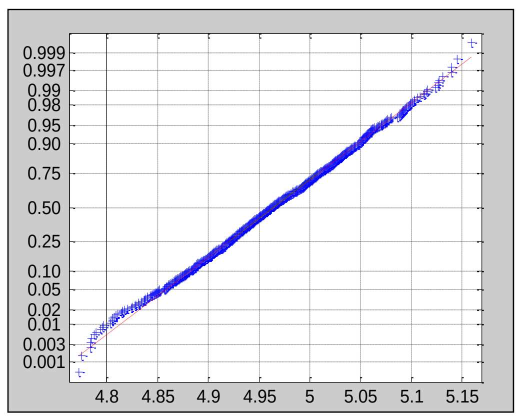


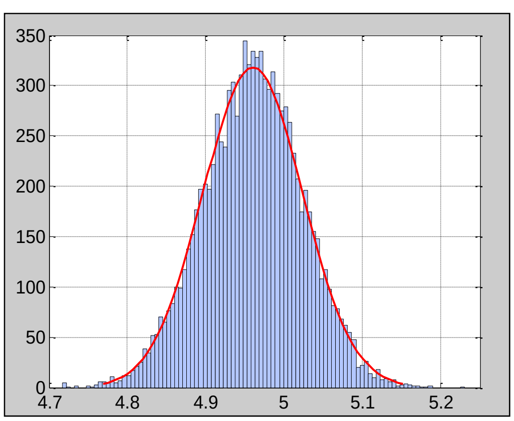
$n = 200$
$B = 100$



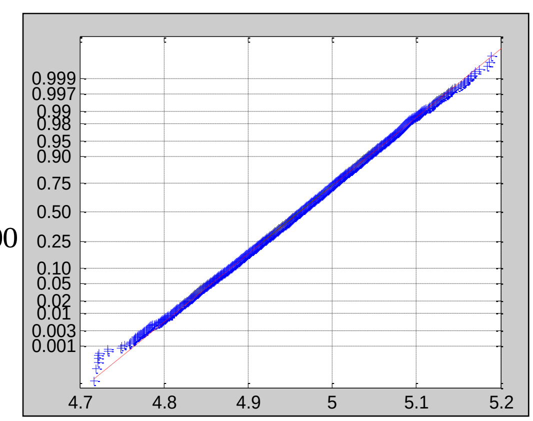


$n = 200$
$B = 1.000$





$n = 200$
$B = 10.000$



2a) Potrebne rezultate dobijamo izvršavanjem „Matlab“ algoritma „NeparBootNorm“ (dodatak D2). Kao i u parametarskom slučaju, kompletan „Matlab“ izlaz dajemo samo za kombinaciju $n=5$, $B=10$. Prvi argument funkcije „NeparBootNorm“ je vektor **x** generisan u simulaciji „ParBootNorm(5,10,5,1)“ (zadatak 1a)), budući da nam je cilj da uporedimo performanse dveju verzija bootstrap postupka pod istim uslovima.

```
>> NeparBootNorm(x,10)
```
$n=5,\ B=10$

```
Polazni uzorak, x
    4.5674
    3.3344
    5.1253
    5.2877
    3.8535
```
$\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_5)$

```
Bootstrap uzorci generisani neparametarskim postupkom
dati su u kolonama naredne matrice:

   3.8535  5.2877  5.2877  5.1253  4.5674  3.3344  4.5674  5.1253  3.8535  5.1253
   3.3344  5.1253  5.2877  3.8535  3.3344  4.5674  5.2877  3.8535  4.5674  5.2877
   5.2877  4.5674  3.8535  3.8535  3.8535  5.2877  5.1253  5.1253  5.2877  5.1253
   5.1253  3.8535  5.2877  5.1253  4.5674  3.3344  3.8535  3.3344  3.3344  3.3344
   3.8535  5.1253  4.5674  3.8535  4.5674  4.5674  5.1253  5.2877  3.8535  4.5674
```
$\mathbf{x}_j^*,\ j=1,2,...,10$

```
Bootstrap replikacije ocenjivaca teta kapa
dobijene neparametarskim postupkom su:

   4.2909  4.7918  4.8568  4.3622  4.1780  4.2183  4.7918  4.5452  4.1793  4.6880
```
$\hat{\theta}_j^*=\hat{\theta}(\mathbf{x}_j^*)=(\bar{x}_5)_j^*,\ j=1,2,...,10$

```
Bootstrap ocena sredine ocenjivaca teta kapa:
    4.4902
```
$\bar{\theta}^*$

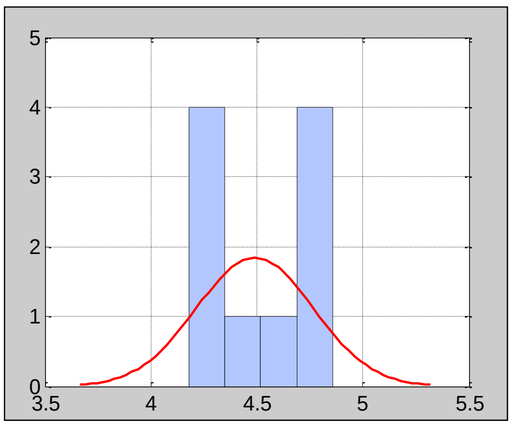
```
Bootstrap ocena varijanse ocenjivaca teta kapa:
    0.0759
```
$\hat{\sigma}^{2*}$

n \ ***B***	**10**	**100**	**1.000**	**10.000**
5	$\bar{\theta}^*=4.4902$ $\hat{\sigma}^{2*}=0.0759$	$\bar{\theta}^*=4.4741$ $\hat{\sigma}^{2*}=0.1151$	$\bar{\theta}^*=4.4467$ $\hat{\sigma}^{2*}=0.1106$	$\bar{\theta}^*=4.4326$ $\hat{\sigma}^{2*}=0.1124$
200	$\bar{\theta}^*=4.9480$ $\hat{\sigma}^{2*}=0.0014$	$\bar{\theta}^*=4.9500$ $\hat{\sigma}^{2*}=0.0050$	$\bar{\theta}^*=4.9595$ $\hat{\sigma}^{2*}=0.0041$	$\bar{\theta}^*=4.9601$ $\hat{\sigma}^{2*}=0.0042$

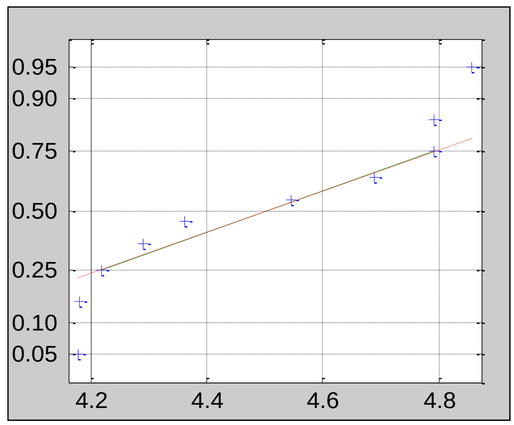
Tabela 2.2 – Bootstrap ocene sredine i varijanse ocenjivača $\hat{\theta}$ dobijene izvršavanjem programa „NeparBootNorm“ za n=5,200 i B=10,100,1.000,10.000, respektivno

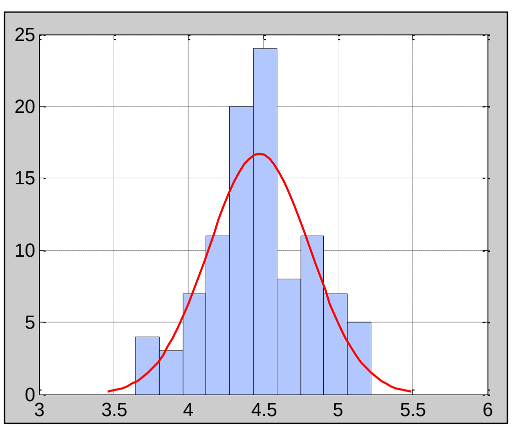
S obzirom na to da u neparametarskoj varijanti nemamo apsolutno nikakve pretpostavke o populaciji iz koje je potekao naš originalni uzorak, celokupna teorijska analiza data u zadatku 1a) ovde ne važi. Dakle, možemo samo da prodiskutujemo vrednosti dobijene izvršavanjem algoritma za različite izbore n i B (*Tabela 2.2*) i odgovarajuće grafičke prikaze na stranama 30, 31 i 32.

Generalno, zaključci su veoma slični onima izvedenim za parametarski slučaj: histogrami i grafički testovi normalnosti jasno ukazuju na saglasnost podataka sa funkcijom gustine normalne raspodele, pri čemu su bootstrap ocene njenih parametara i ovde bliže uzoračkim sredinama (4.4337 za $n = 5$, 4.9605 za $n = 200$) i uzoračkim varijansama (0.1385 za $n = 5$, 0.0041 za $n = 200$). Razlika je samo u tome što za manji obim originalnog uzorka i manji broj generisanih replikacija (tj. $n = 5$ i $B = 10, 100$) neparametarski bootstrap daje nešto slabije aproksimacije u odnosu na parametarski postupak, dok su za veće skupove podataka rezultati podjednako dobri.

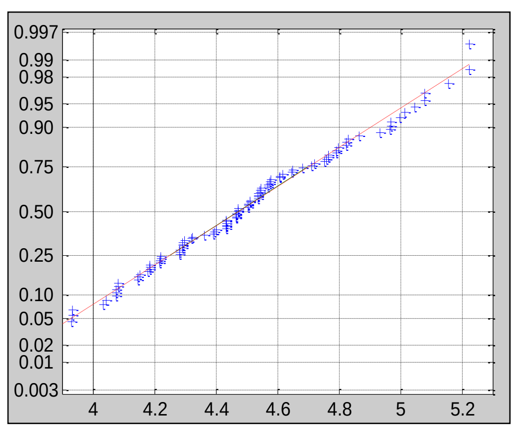


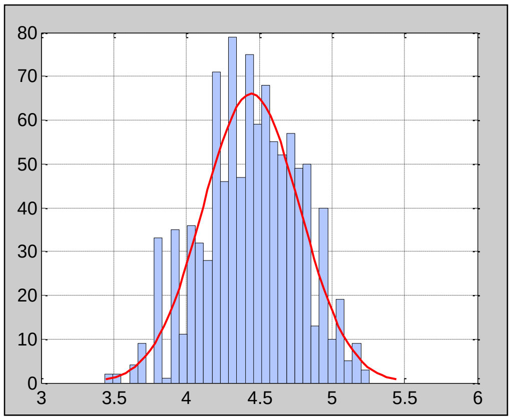
$n = 5$
$B = 10$



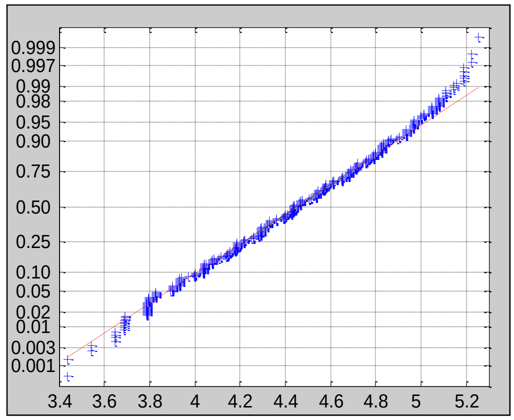


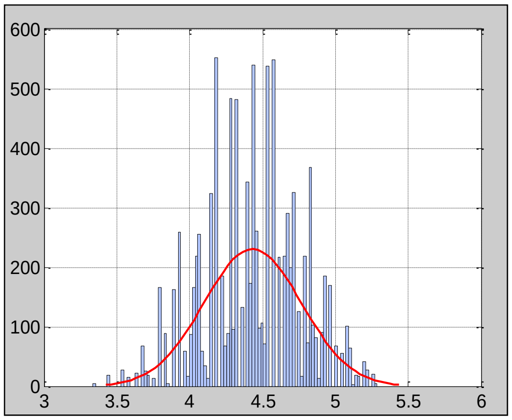
$n = 5$
$B = 100$



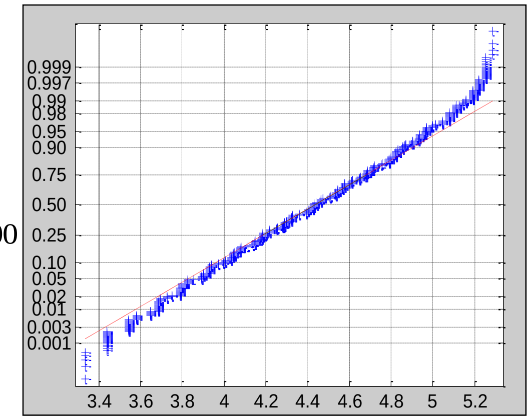


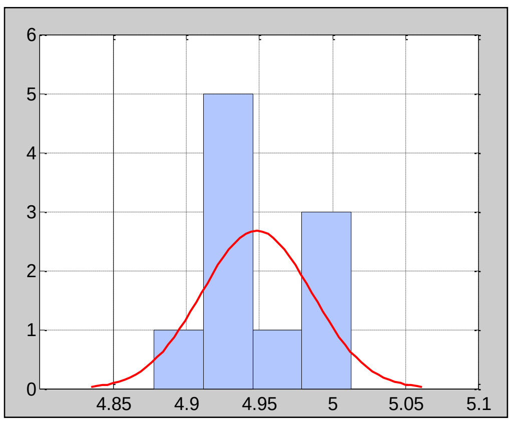
$n = 5$
$B = 1.000$



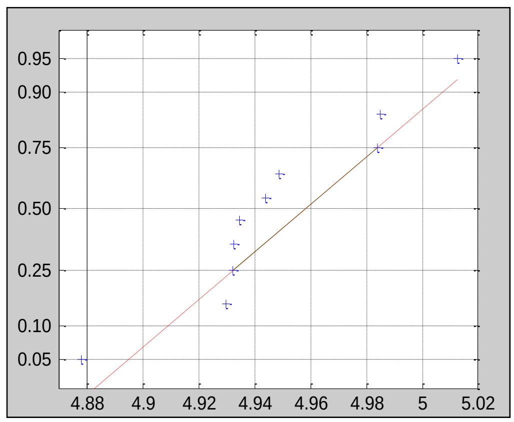


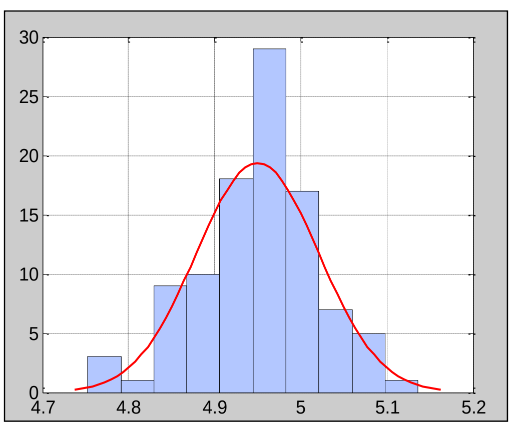
$n = 5$
$B = 10.000$



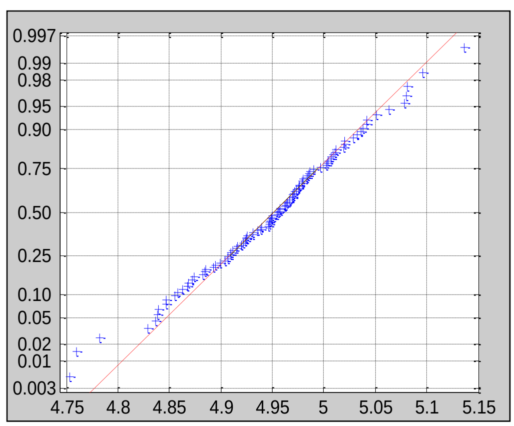


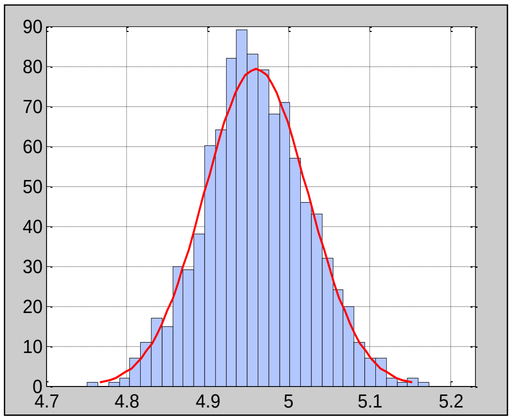
$n = 200$
$B = 10$



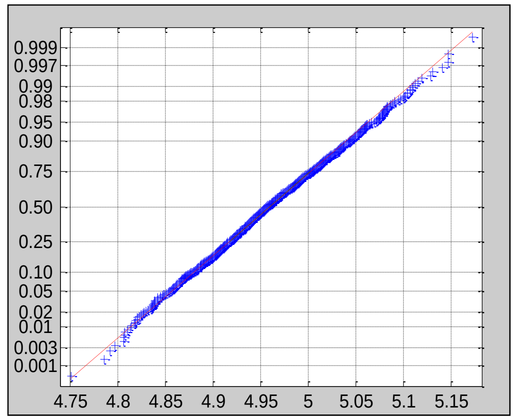


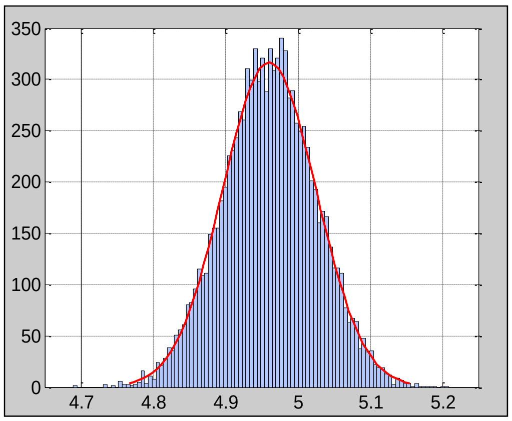
$n = 200$
$B = 100$



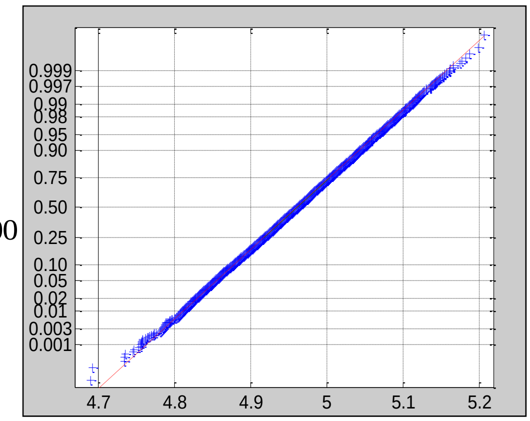


$n = 200$
$B = 1.000$





$n = 200$
$B = 10.000$



1b) Potrebne rezultate dobijamo uz pomoć „Matlab“ algoritma „ParBootExp“ (dodatak D3). S obzirom na to da je deo zadatka koji se odnosi na normalnu raspodelu bio detaljno analiziran, do kraja primera ćemo se skoncentrisati samo na tabele sa konačnim ishodima bootstrap simulacija.

	obim uzorka	$E(\hat{\theta})$	$Var(\hat{\theta})$	
teorija	$n = 5$	5.0000	8.3333	
	$n = 200$	4.0201	0.0816	
uzorak **x**	$n = 5$	4.9859	8.2863	
	$n = 200$	4.2327	0.0905	

Tabela 2.3 – Vrednosti sredine i varijanse ocenjivača $\hat{\theta}$ *određene teorijski i na osnovu originalnog uzorka,* **x**

Pre toga, pogledajmo vrednosti u odnosu na koje se procenjuje njihova preciznost (*Tabela 2.3*). One su određene prema uslovu da je stvarno λ jednako 4 („teorija“), tj. na bazi ocena koje su izračunate za generisani polazni uzorak **x** odgovarajućeg obima („uzorak **x**“), i to korišćenjem formula iz tabele date u postavci zadatka:

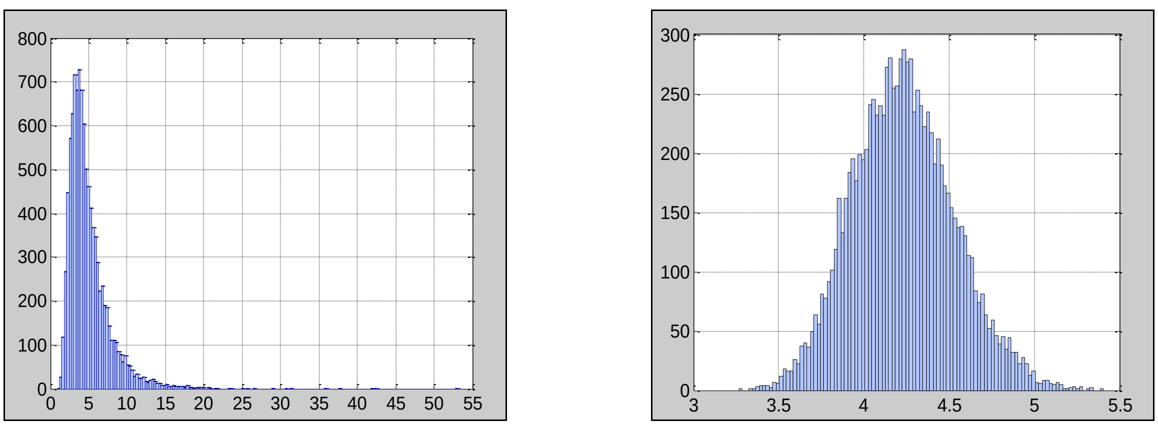
– za $n = 5$: „ParBootExp(5,10,4)“ $\rightarrow \hat{\theta}(\mathbf{x}) = \hat{\lambda} = 1/\bar{x}_5 = 3.9887$,

– za $n = 200$: „ParBootExp(200,10,4)“ $\rightarrow \hat{\theta}(\mathbf{x}) = \hat{\lambda} = 1/\bar{x}_{200} = 4.2115$.

n \ ***B***	**10**	**100**	**1.000**	**10.000**
5	$\bar{\theta}^* = 4.2117$ $\hat{\sigma}^{2*} = 3.1718$	$\bar{\theta}^* = 5.1005$ $\hat{\sigma}^{2*} = 9.8030$	$\bar{\theta}^* = 5.0184$ $\hat{\sigma}^{2*} = 8.1251$	$\bar{\theta}^* = 4.9950$ $\hat{\sigma}^{2*} = 8.0678$
200	$\bar{\theta}^* = 3.9593$ $\hat{\sigma}^{2*} = 0.0357$	$\bar{\theta}^* = 4.2408$ $\hat{\sigma}^{2*} = 0.0703$	$\bar{\theta}^* = 4.2228$ $\hat{\sigma}^{2*} = 0.0882$	$\bar{\theta}^* = 4.2328$ $\hat{\sigma}^{2*} = 0.0887$

Tabela 2.4 – Bootstrap ocene sredine i varijanse ocenjivača $\hat{\theta}$ dobijene izvršavanjem programa „ParBootExp“ za n=5,200 i B=10,100,1.000,10.000, respektivno

Analiziranjem vrednosti u *Tabeli 2.4* može se zaključiti da je primena parametarskog bootstrapa u ovom primeru bila prilično uspešna, budući da su dobijeni rezultati, kao što se i očekuje, veoma bliski brojevima izračunatim na osnovu polaznog uzorka, $\mathbf{x}$ – i to čak i za simulacije skromnijeg obima ($B = 100$). Štaviše, prisutna je i solidna saglasnost između teorijskih i uzoračkih sredina i varijansi ocenjivača nepoznatog parametra λ. Na *Slici 2.4* prikazani su histogrami bootstrap replikacija za $B = 10.000$.



(i) *(ii)*

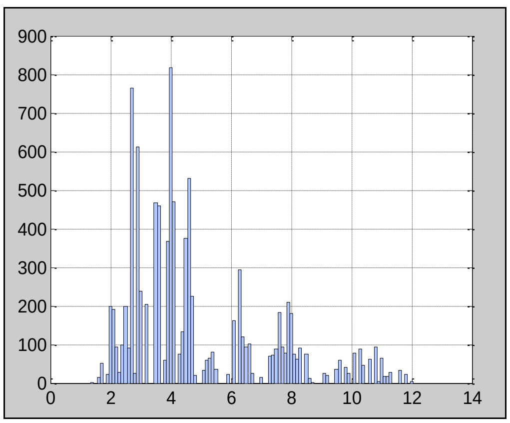
Slika 2.4 – Histogrami bootstrap ocena nepoznatog parametra $\theta = \lambda$ dobijenih parametarskim postupkom za (i) $n = 5$ i (ii) $n = 200$ (program „ParBootExp“, $B = 10.000$)

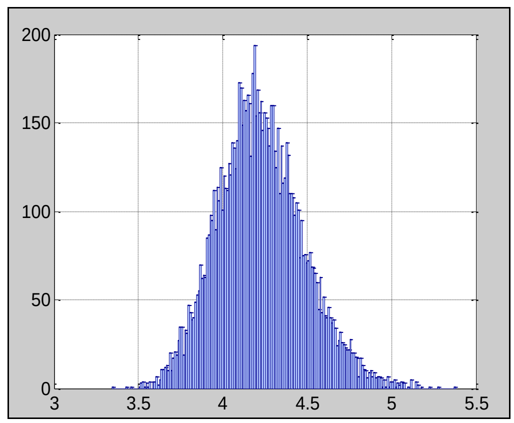
2b) Slično kao u primeru sa normalnom raspodelom, izostanak bilo kakvih pretpostavki o polaznoj populaciji ne ostavlja mnogo prostora za analize pre dobijanja konkretnih rezultata, a njih generišemo uz pomoć „Matlab“ algoritma „NeparBootExp“ (dodatak D4). Još jednom, za ulazni vektor se uzima $\mathbf{x}$ iz parametarske simulacije za odgovarajuće *n*.

B / n	10	100	1.000	10.000
5	$\overline{\theta}^* = 3.9113$ $\hat{\sigma}^{2*} = 7.1399$	$\overline{\theta}^* = 5.0631$ $\hat{\sigma}^{2*} = 5.9566$	$\overline{\theta}^* = 4.9468$ $\hat{\sigma}^{2*} = 5.9747$	$\overline{\theta}^* = 4.8670$ $\hat{\sigma}^{2*} = 5.5187$
200	$\overline{\theta}^* = 4.2231$ $\hat{\sigma}^{2*} = 0.0268$	$\overline{\theta}^* = 4.2183$ $\hat{\sigma}^{2*} = 0.0749$	$\overline{\theta}^* = 4.2272$ $\hat{\sigma}^{2*} = 0.0616$	$\overline{\theta}^* = 4.2236$ $\hat{\sigma}^{2*} = 0.0656$

Tabela 2.5 – Bootstrap ocene sredine i varijanse ocenjivača $\hat{\theta}$ dobijene izvršavanjem programa „NeparBootExp" za n=5,200 i B=10,100,1.000,10.000, respektivno

Zaključke izvedene posmatranjem *Tabele 2.5* mogli bismo formulisati ovako. Bootstrap ocene sredine ocenjivača nepoznatog parametra λ i ovde demonstriraju razumnu saglasnost sa očekivanim uzoračkim vrednostima (*Tabela 2.3*), ali, čini se, za nijansu slabiju u odnosu na parametarski postupak pri velikim B. Kada je reč o varijansi, dobijene su značajno manje vrednosti od predviđenih, što ćemo ponovo pripisati malom broju polaznih informacija. Sve u svemu, opet je potvrđeno da pretpostavka o obliku raspodele, u nekoj meri, ipak doprinosi boljem kvalitetu rezultata parametarske naspram neparametarske procedure. *Slika 2.5* prikazuje histograme neparametarskih bootstrap replikacija za $B = 10.000$.





(i) *(ii)*

Slika 2.5 – Histogrami bootstrap ocena nepoznatog parametra $\theta = \lambda$ dobijenih neparametarskim postupkom za (i) $n = 5$ i (ii) $n = 200$ (program „NeparBootExp", $B = 10.000$)

1c) Na osnovu uslova zadatka da stvarna vrednost parametra p posmatrane binomne raspodele iznosi 0.7 i vrednosti njegovog ocenjivača izračunatih za polazne uzorke generisane algoritmom „ParBootBin" (dodatak D5), tj.

– za $n = 5$: „ParBootBin(5,10,20,0.7)“ $\rightarrow$ $\hat{\theta}(\mathbf{x}) = \hat{p} = \bar{x}_5/20 = 0.6700$,

– za $n = 200$: „ParBootBin(200,10,20,0.7)“ $\rightarrow$ $\hat{\theta}(\mathbf{x}) = \hat{p} = \bar{x}_{200}/20 = 0.6980$,

formirana je *Tabela 2.6* – ona prikazuje brojeve kojima „priželjkujemo“ da teže rezultati određeni primenom bootstrap postupka.

	obim uzorka	$E(\hat{\theta})$	$Var(\hat{\theta})$
teorija	$n = 5$	0.7000	0.0021
	$n = 200$	0.7000	$5.25 \cdot 10^{-5}$
uzorak **x**	$n = 5$	0.6700	0.0022
	$n = 200$	0.6980	$5.27 \cdot 10^{-5}$

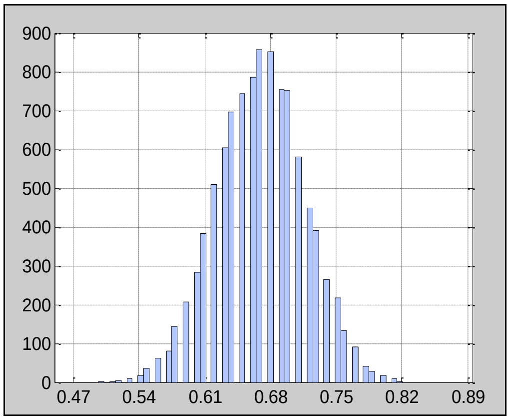
Tabela 2.6 – Vrednosti sredine i varijanse ocenjivača $\hat{\theta}$ određene teorijski i na osnovu originalnog uzorka, **x**

Ishodi parametarskih bootstrap simulacija dati su u *Tabeli 2.7*.

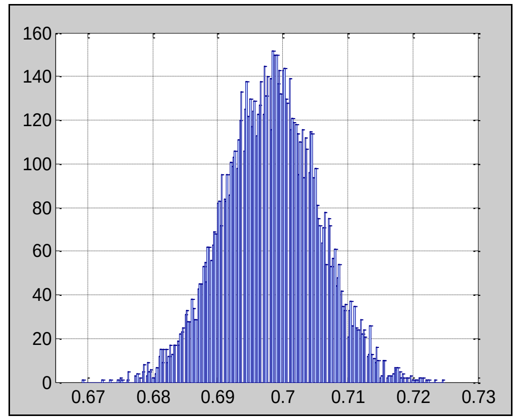
n \ ***B***	**10**	**100**	**1.000**	**10.000**
5	$\bar{\theta}^* = 0.6840$ $\hat{\sigma}^{2*} = 0.0020$	$\bar{\theta}^* = 0.6706$ $\hat{\sigma}^{2*} = 0.0020$	$\bar{\theta}^* = 0.6692$ $\hat{\sigma}^{2*} = 0.0023$	$\bar{\theta}^* = 0.6694$ $\hat{\sigma}^{2*} = 0.0022$
200	$\bar{\theta}^* = 0.6928$ $\hat{\sigma}^{2*} = 3.4737 \cdot 10^{-5}$	$\bar{\theta}^* = 0.6969$ $\hat{\sigma}^{2*} = 5.3285 \cdot 10^{-5}$	$\bar{\theta}^* = 0.6985$ $\hat{\sigma}^{2*} = 5.2497 \cdot 10^{-5}$	$\bar{\theta}^* = 0.6979$ $\hat{\sigma}^{2*} = 5.3387 \cdot 10^{-5}$

Tabela 2.7 – Bootstrap ocene sredine i varijanse ocenjivača $\hat{\theta}$ dobijene izvršavanjem programa „ParBootBin“ za n=5,200 i B=10,100,1.000,10.000, respektivno

Iz gornjeg tabelarnog prikaza je jasno da je upotreba parametarskog bootstrapa u ovom primeru obezbedila izuzetno dobre rezultate. To se prvenstveno odnosi na dobijene vrednosti za sredinu ocenjivača, koje se već u startu, za malo *n* i *B*, gotovo neznatno razlikuju od onih očekivanih (*Tabela 2.6*). Slična je situacija i sa varijansom pri obimu originalnog uzorka $n = 5$, dok su za $n = 200$ registrovane nešto slabije aproksimacije u slučaju kada je broj generisanih bootstrap ocena skroman ($B = 10$). *Slika 2.6* prikazuje histograme parametarskih bootstrap replikacija za $B = 10.000$.



(i)



(ii)

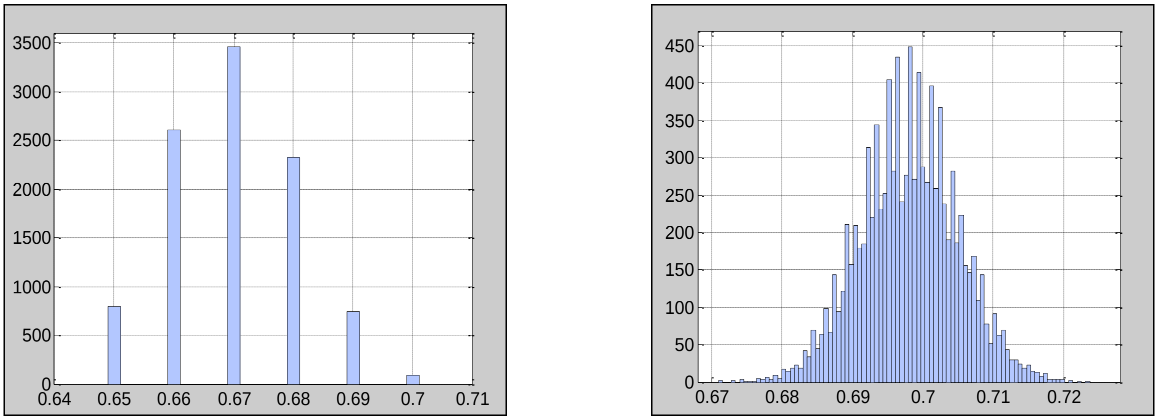
Slika 2.6 – Histogrami bootstrap ocena nepoznatog parametra $\theta = p$ dobijenih parametarskim postupkom za (i) $n = 5$ i (ii) $n = 200$ (program „ParBootBin“, $B = 10.000$)

2c) Rezultati izvršavanja algoritma „NeparBootBin“ (dodatak D6) za različite izbore *n* i *B* i početne uzorke identične onima iz parametarskog slučaja dati su u *Tabeli 2.8*.

n* \ *B	**10**	**100**	**1.000**	**10.000**
5	$\overline{\theta}^* = 0.6720$ $\hat{\sigma}^{2*} = 1.0667 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\theta}^* = 0.6684$ $\hat{\sigma}^{2*} = 1.1459 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\theta}^* = 0.6697$ $\hat{\sigma}^{2*} = 1.1485 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\theta}^* = 0.6699$ $\hat{\sigma}^{2*} = 1.1860 \cdot 10^{-4}$
200	$\overline{\theta}^* = 0.6942$ $\hat{\sigma}^{2*} = 3.1765 \cdot 10^{-5}$	$\overline{\theta}^* = 0.6975$ $\hat{\sigma}^{2*} = 4.5645 \cdot 10^{-5}$	$\overline{\theta}^* = 0.6979$ $\hat{\sigma}^{2*} = 4.7521 \cdot 10^{-5}$	$\overline{\theta}^* = 0.6981$ $\hat{\sigma}^{2*} = 4.7984 \cdot 10^{-5}$

Tabela 2.8 – Bootstrap ocene sredine i varijanse ocenjivača $\hat{\theta}$ dobijene izvršavanjem programa „NeparBootBin“ za n=5,200 i B=10,100,1.000,10.000, respektivno

Analiza ishoda neparametarskih simulacija izgleda ovako. Bootstrap ocene sredine, baš kao i u zadatku 1c), veoma su bliske vrednostima koje smo naslućivali na bazi polaznih uzoraka (*Tabela 2.6*) čak i za male *n* i *B*. Varijanse nisu preterano saglasne sa očekivanim – uočava se samo to da su znatno manje od njih. Histogrami replikacija ocenjivača posmatranog parametra generisanih neparametarskom bootstrap procedurom prikazani su na *Slici 2.7*.



(i) *(ii)*

Slika 2.7 – Histogrami bootstrap ocena nepoznatog parametra $\theta = p$ dobijenih neparametarskim postupkom za (i) $n = 5$ i (ii) $n = 200$ (program „NeparBootBin“, $B = 10.000$)

3 Bootstrap redukcija pristrasnosti ocenjivača

3.1 Prosta redukcija pristrasnosti

Po definiciji, za $\hat{\theta}$ ćemo reći da je **nepristrasan** ili **centriran** ocenjivač nepoznatog parametra θ ukoliko njegovo matematičko očekivanje ima vrednost upravo θ. Drugim rečima, mora da važi jednakost

$$E_\theta(\hat{\theta}) = \theta.$$ [5]

Ukoliko to nije zadovoljeno, znači da postoji neko $b(\theta) \neq 0$ tako da je

$$E_\theta(\hat{\theta}) = \theta + b(\theta). \tag{3.1}$$

Dakle, sredina $E_\theta(\hat{\theta})$ raspodele statistike $\hat{\theta}$ sada nije centrirana u nepoznatoj vrednosti θ, već je od nje pomerena za iznos $b(\theta)$. Ovo odstupanje predstavlja meru **pristrasnosti** ocenjivača $\hat{\theta}$, koja se nekada zove i **bias**.

Ako nam je poznat funkcionalni oblik izraza $b(\theta)$, možemo direktno formirati narednu **ocenu redukovane pristrasnosti**:

$$\hat{\theta}_{rp1} = \hat{\theta} - b(\hat{\theta}). \tag{3.2}$$

Jedinica u indeksu označava da se radi o prvoj u nizu potencijalnih redukcija, budući da se isti postupak može ponoviti i na $\hat{\theta}_{rp1}$, pa i na svim sledećim ocenama, iterativno, o čemu će biti reči u narednom odeljku.

Opisana korekcija najčešće smanjuje pristrasnost originalnog ocenjivača, $\hat{\theta}$, ali je ne eliminiše u potpunosti, osim, razume se, u slučaju kada $b(\hat{\theta})$ nepristrasno ocenjuje $b(\theta)$. Ono što, međutim, nije jednostavno utvrditi jeste uticaj postupka na srednju kvadratnu grešku (*MSE*) od $\hat{\theta}$, budući da efekat redukcije pristrasnosti nekada može biti neutralisan povećanjem varijanse koje uzrokuje oduzeti korekcioni izraz, $b(\hat{\theta})$. Naime, zna se da važi

[5] Indeksom „θ" naglašavamo da se dato matematičko očekivanje određuje u odnosu na originalnu raspodelu iz koje je izvučen naš uzorak, $F = F(\theta)$.

$$MSE_\theta(\hat{\theta}) = E_\theta((\hat{\theta}-\theta)^2) = Var_\theta(\hat{\theta}) + b^2(\theta).$$

Ako raspišemo razliku srednjih kvadratnih grešaka od $\hat{\theta}_{rp1}$ i $\hat{\theta}$, redom:

$$\begin{aligned}
E_\theta((\hat{\theta}_{rp1}-\theta)^2) - E_\theta((\hat{\theta}-\theta)^2) &= E_\theta[\hat{\theta}_{rp1}^2 - 2\theta\hat{\theta}_{rp1} + \theta^2] - E_\theta[\hat{\theta}^2 - 2\theta\hat{\theta} + \theta^2] \\
&= E_\theta[\hat{\theta}_{rp1}^2 - 2\theta\hat{\theta}_{rp1} - \hat{\theta}^2 + 2\theta\hat{\theta}] \\
&= E_\theta[\hat{\theta}_{rp1}^2 - \hat{\theta}^2 - 2\theta(\hat{\theta}_{rp1} - \hat{\theta})] \\
&= E_\theta[(\hat{\theta}_{rp1} - \hat{\theta})(\hat{\theta}_{rp1} + \hat{\theta}) + 2\theta b(\hat{\theta})] \\
&= E_\theta[-b(\hat{\theta})(\hat{\theta}_{rp1} + \hat{\theta}) + 2\theta b(\hat{\theta})] \\
&= E_\theta[b(\hat{\theta})(2\theta - \hat{\theta} - \hat{\theta}_{rp1})] \\
&= E_\theta[b(\hat{\theta})(2\theta - 2\hat{\theta} + \hat{\theta} - \hat{\theta}_{rp1})] \\
&= E_\theta[2b(\hat{\theta})(\theta - \hat{\theta})] + E_\theta[b(\hat{\theta})(\hat{\theta} - \hat{\theta}_{rp1})] \\
&= -2E_\theta[b(\hat{\theta})(\hat{\theta} - \theta)] + E_\theta[(b(\hat{\theta}))^2],
\end{aligned}$$

vidimo da nema očiglednog načina da se okarakteriše nenegativnost krajnjeg izraza, odnosno kada redukcija pristrasnosti ocene dovodi do povećanja njene srednje kvadratne greške, što će biti ilustrovano primerom na kraju ovog poglavlja.

Kako smo naglasili, dosadašnje razmatranje bilo je vršeno pod pretpostavkom da je funkcionalni oblik pristrasnosti $b(\theta)$ poznat. To, međutim, često nije slučaj. U takvim situacijama, pokazalo se da upotreba bootstrap postupka obezbeđuje gotovo identične rezultate, bez ikakvih informacija o $b(\theta)$.

Neka su $\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, ..., \mathbf{x}_B^*$ bootstrap uzorci generisani funkcijom raspodele $F_{\hat{\theta}(\mathbf{x})}$ (parametarski), gde je $\hat{\theta}(\mathbf{x})$ vrednost ocenjivača parametra θ izračunata iz originalnog uzorka, $\mathbf{x}$. Za svaki od njih određujemo bootstrap ocene $\hat{\theta}_j^* = \hat{\theta}(\mathbf{x}_j^*),\quad j = 1,2,...,B,$ Na osnovu zakona velikih brojeva i *(3.1)*, aritmetička sredina ovih ocena zadovoljava

$$\overline{\theta}^* = \frac{1}{B}\sum_{j=1}^{B}\hat{\theta}_j^* \xrightarrow{B\to\infty} E_{\hat{\theta}}(\hat{\theta}^*) = \hat{\theta} + b(\hat{\theta}),$$

tako da $\overline{\theta}^* - \hat{\theta}$ predstavlja preciznu aproksimaciju za $b(\hat{\theta})$. Nivo tačnosti se, jasno, i ovde kontroliše izborom broja replikacija, B.

Dakle, **bootstrap ocena redukovane pristrasnosti** nepoznatog parametra θ ima oblik:

$$\hat{\theta}_{rp1}^* = \hat{\theta} - (\overline{\theta}^* - \hat{\theta}) = 2\hat{\theta} - \overline{\theta}^*.$$

U praksi, ona se za dovoljno veliko *B* zanemarljivo razlikuje od $\hat{\theta}_{rp1}$.

3.2 Iterativna redukcija pristrasnosti

Kako smo pomenuli na početku odeljka 3.1, postupak redukcije pristrasnosti ocenjivača može se iterativno ponavljati, budući da je dobijena ocena $\hat{\theta}_{rp1} = \hat{\theta} - b(\hat{\theta})$ ponovo funkcija od $\hat{\theta}$. Pretpostavimo da ni ona nije nepristrasna, odnosno da postoji neko $b_1(\theta) \neq 0$ tako da je

$$E_\theta(\hat{\theta}_{rp1}) = \theta + b_1(\theta).$$

Iz formula *(3.1)* i *(3.2)* dobija se

$$E_\theta(\hat{\theta}_{rp1}) = E_\theta(\hat{\theta} - b(\hat{\theta})) = \theta + b(\theta) - E_\theta(b(\hat{\theta})).$$

Poređenjem gornjih izraza, zaključujemo da za $b_1(\theta)$ važi

$$b_1(\theta) = E_\theta(\hat{\theta}_{rp1}) - \theta = b(\theta) - E_\theta(b(\hat{\theta})) = E_\theta(-b(\hat{\theta})) - (-b(\theta)),$$

što znači da se $b_1(\theta)$ može interpretirati kao pristrasnost od $-b(\hat{\theta})$ kao ocene za $-b(\theta)$. Otuda, tražena **ocena redukovane pristrasnosti drugog reda** jeste

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{rp2} &= \hat{\theta}_{rp1} - b_1(\hat{\theta}) \\ &= \hat{\theta} - b(\hat{\theta}) - (b(\hat{\theta}) - E_{\hat{\theta}}(b(\hat{\theta}^*))) \\ &= \hat{\theta} - 2b(\hat{\theta}) + E_{\hat{\theta}}(b(\hat{\theta}^*)),\end{aligned}$$

gde oznaka $\hat{\theta}^*$ unutar očekivanja ukazuje na raspodelu određenu sa $\hat{\theta}$ (u indeksu). Kako je i $\hat{\theta}_{rp2}$ funkcija od $\hat{\theta}$, procedura korekcije se može iznova i iznova ponavljati, pa čak i odrediti „granica“ ovih iteracija, što će biti ilustrovano primerom u delu 3.3.

Slično kao u prethodnom odeljku, sada ćemo ispitati mogućnost izvođenja opisanog postupka iterativne redukcije pristrasnosti u situaciji kada nam njeni funkcionalni oblici nisu poznati.

Neka su $\mathbf{x}_j^*$, $j = 1,2,...,B,$ ponovo bootstrap uzorci generisani sa $F_{\hat{\theta}(\mathbf{x})}$ i $\hat{\theta}_j^* = \hat{\theta}(\mathbf{x}_j^*)$ odgovarajuće bootstrap ocene. Polazeći od ovih podataka, formiraćemo novu familiju bootstrap replikacija na sledeći način:

$$\mathbf{x}_j^* = (x_{1j}^*, x_{2j}^*, ..., x_{nj}^*) \xrightarrow{F_{\hat{\theta}_j^*}} \begin{cases} \mathbf{x}_{j1}^{**} = (x_{1j1}^{**}, x_{2j1}^{**}, ..., x_{nj1}^{**}) \Rightarrow \hat{\theta}_{j1}^{**} = \hat{\theta}(\mathbf{x}_{j1}^{**}), \\ \mathbf{x}_{j2}^{**} = (x_{1j2}^{**}, x_{2j2}^{**}, ..., x_{nj2}^{**}) \Rightarrow \hat{\theta}_{j2}^{**} = \hat{\theta}(\mathbf{x}_{j2}^{**}), \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{jC}^{**} = (x_{1jC}^{**}, x_{2jC}^{**}, ..., x_{njC}^{**}) \Rightarrow \hat{\theta}_{jC}^{**} = \hat{\theta}(\mathbf{x}_{jC}^{**}). \end{cases}$$

Drugim rečima, iz svakog od B „primarnih“ bootstrap uzoraka generiše se po C „sekundarnih“, koji se potom koriste za izračunavanje traženih ocena.

Prema zakonu velikih brojeva, važi:

$$\frac{1}{C}\sum_{k=1}^{C} \hat{\theta}_{jk}^{**} \xrightarrow{C\to\infty} E_{\hat{\theta}_j^*}(\hat{\theta}_j^{**}) = \hat{\theta}_j^* + b(\hat{\theta}_j^*),$$

gde se $\hat{\theta}_j^{**}$ tretira kao slučajna promenljiva čije se vrednosti određuju iz realizacija prostog slučajnog uzorka sa funkcijom raspodele $F_{\hat{\theta}_j^*}$ za fiksirano $\hat{\theta}_j^*$.[6] Osim toga,

$$\lambda = \frac{1}{B}\sum_{j=1}^{B} \frac{1}{C}\sum_{k=1}^{C} \hat{\theta}_{jk}^{**} \xrightarrow{C\to\infty} \frac{1}{B}\sum_{j=1}^{B} (\hat{\theta}_j^* + b(\hat{\theta}_j^*)) \xrightarrow{B\to\infty} E_{\hat{\theta}}(\hat{\theta}^* + b(\hat{\theta}^*)),$$

pa važi aproksimacija

$$\lambda \approx E_{\hat{\theta}}(\hat{\theta}^* + b(\hat{\theta}^*)) = \hat{\theta} + b(\hat{\theta}) + E_{\hat{\theta}}(b(\hat{\theta}^*)).$$

Otuda,

$$\hat{\theta}_{rp2}^* = 3\hat{\theta} - 3\overline{\theta}^* + \lambda \approx 3\hat{\theta} - 3(\hat{\theta} + b(\hat{\theta})) + \hat{\theta} + b(\hat{\theta}) + E_{\hat{\theta}}(b(\hat{\theta}^*)) = \hat{\theta} - 2b(\hat{\theta}) + E_{\hat{\theta}}(b(\hat{\theta}^*)) = \hat{\theta}_{rp2}.$$

Dakle, dobijena **bootstrap ocena redukovane pristrasnosti drugog reda** ni na koji način ne zavisi od oblika funkcija $b(\cdot)$ i $b_1(\cdot)$.

[6] U sličnoj vezi su i slučajna promenljiva $\hat{\theta}^*$ i raspodela $F_{\hat{\theta}}$ za fiksirano $\hat{\theta}$, odnosno slučajna promenljiva $\hat{\theta}$ i raspodela F_{θ} za fiksirano (stvarno) θ.

3.3 Primer

Postavka problema

STVARNA RASPODELA OBELEŽJA	$X : N(\mu,\sigma^2),\ \mu=1,\ \sigma^2=2$
SREDINA I VARIJANSA OBELEŽJA	$E(X)=\mu=1,\ Var(X)=\sigma^2=2$
PARAMETAR KOJI OCENJUJEMO	$\theta=\sigma^2$
OCENJIVAČ PARAMETRA	$\hat{\theta}(\mathbf{X})=\bar{S}_n^2$
SREDINA OCENJIVAČA	$E(\hat{\theta})=\frac{n-1}{n}\sigma^2$
VARIJANSA OCENJIVAČA [7]	$Var(\hat{\theta})=\frac{(n-1)^2}{n^3}\mu_4-\frac{(n-1)(n-3)}{n^3}\sigma^4$

Zadatak

Odrediti ocenu redukovane pristrasnosti *i*-tog reda za nepoznati parametar θ sa datim ocenjivačem $\hat{\theta}$, i to:

a) teorijskim putem,

b) primenom bootstrap postupka.

Izrada

a) Ukoliko znamo da prost slučajan uzorak $\mathbf{X}=(X_1,X_2,...,X_n)$ dolazi iz raspodele koja pripada dopustivoj familiji $\{N(\mu,\sigma^2),\mu\in\boldsymbol{R},\sigma>0\}$ i zanima nas nepoznati parametar $\theta=\sigma^2$ sa uobičajenim ocenjivačem *(2.5)*,

$$\hat{\theta}(\mathbf{X})=\bar{S}_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2, \tag{3.3}$$

prisetićemo se da je

$$E_\theta(\hat{\theta})=\theta-\theta/n, \tag{3.4}$$

[7] $\mu_4=E[(X-E(X))^4]$ - četvrti centralni moment obeležja X

što znači da pristrasnost gornje ocene iznosi

$$b(\theta) = -\theta/n. \tag{3.5}$$

Dakle, ocena redukovane pristrasnosti će imati oblik

$$\hat{\theta}_{rp1} = \hat{\theta} + \hat{\theta}/n. \tag{3.6}$$

Kada je reč o varijansi, lako se pokazuje da važi

$$Var_\theta(\hat{\theta}_{rp1}) = [(n+1)/n]^2 Var_\theta(\hat{\theta}) > Var_\theta(\hat{\theta}),$$

dok se za srednje kvadratne greške ocena *(3.3)* i *(3.6)* (podužim izvođenjem) dobija odnos

$$MSE(\hat{\theta}) = E_\theta(\hat{\theta}-\theta)^2 = (\theta^2/n^4)(2n^3 - n^2) <$$
$$(\theta^2/n^4)[2(n+1)^2(n-1)+1] = E_\theta(\hat{\theta}_{rp1}-\theta)^2 = MSE(\hat{\theta}_{rp1}),$$

budući da je za $n > 1$

$$2(n+1)^2(n-1)+1-(2n^3-n^2) = 3n^2 - 2n - 1 = (3n+1)(n-1) > 0.$$

Prema tome, postupak redukcije pristrasnosti je u ovom slučaju rezultirao povećanjem i varijanse i srednje kvadratne greške. Jedan od primera koji potvrđuju da to nije opšte pravilo (razmatranje iz odeljka 3.1) bio bi, recimo,

$$\theta = \mu^2, \ \hat{\theta}(\mathbf{X}) = \overline{X}^2,$$

gde imamo

$$Var_\theta(\hat{\theta}) < Var_\theta(\hat{\theta}_{rp1}) \quad \text{i} \quad MSE(\hat{\theta}) > MSE(\hat{\theta}_{rp1}).$$

Primenom identične procedure na ocenu *(3.6)*, dolazimo do sledećeg:

$$E_\theta(\hat{\theta}_{rp1}) = E_\theta[\hat{\theta}(1+1/n)] = (1+1/n)E_\theta(\hat{\theta}) = \theta(1-1/n^2) \ \Rightarrow \ b_1(\theta) = -\theta/n^2,$$

što znači da je ocena redukovane pristrasnosti drugog reda data sa

$$\hat{\theta}_{rp2} = \hat{\theta}_{rp1} - b_1(\hat{\theta}) = \hat{\theta} + \hat{\theta}/n + \hat{\theta}/n^2 = \hat{\theta}(1+1/n+1/n^2).$$

Daljim nastavljanjem postupka, u opštoj, *i*-toj iteraciji bismo dobili

$$\hat{\theta}_{rpi} = \hat{\theta}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+...+\frac{1}{n^i}\right) = \hat{\theta}\left(1-\frac{1}{n^{i+1}}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{n}\right) = \hat{\theta}\frac{n^{i+1}-1}{n^i(n-1)}.$$

Puštajući da $i \to \infty,$ stižemo do nepristrasne ocene:

$$\hat{\theta}\frac{n^{i+1}-1}{n^i(n-1)} \xrightarrow{i\to\infty} \frac{n}{n-1}\bar{S}_n^2 = S^2. \qquad (3.7)$$

Da bismo prethodnu priču ilustrovali konkretnim primerom, najpre ćemo generisati originalni uzorak iz raspodele $N(1,2)$ (po uslovu zadatka). Neka je njegov obim $n=10.$ Koristimo odgovarajuću „Matlab“ naredbu

„x = normrnd(1, sqrt(2), 10, 1)“,

čime dobijamo vektor

x’ = [0.3883 -1.3555 1.1772 1.4068 -0.6214 2.6842 2.6817 0.9468 1.4629 1.2470].

Vrednost ocenjivača $\hat{\theta}$ za dati uzorak (naredba „var(x,1)“) iznosi

$$\hat{\theta}(\mathbf{x}) = \bar{s}_n^2 = 1.4691. \qquad (3.8)$$

Dakle, sa *(3.8)* smo ocenili „nepoznato“ $\sigma^2 = 2,$ ali ta ocena nije nepristrasna – kao što smo videli, prema statističkoj teoriji je oblik njene pristrasnosti dat izrazom *(3.5)*:

$$b(\theta) = -\theta/n = -\sigma^2/10 = -0.2\,.$$

Budući da, po pretpostavci, ne znamo stvarnu vrednost parametra, gornji bias je prirodno aproksimirati sa

$$b(\hat{\theta}(\mathbf{x})) = -\bar{s}_n^2/n = -0.1469.$$

Prema tome, ocena redukovane pristrasnosti 1. reda (formula *(3.2)*) je:

$$\hat{\theta}_{rp1} = \hat{\theta} - b(\hat{\theta}) = 1.4691 + 0.1469 = 1.6160. \qquad (3.9)$$

Kako je naglašeno na početku odeljka 3.2, osim ukoliko $b(\hat{\theta})$ nepristrasno ocenjuje $b(\theta),$ ni *(3.9)* nije centrirano, tj. postoji neko $b_1(\theta) \neq 0$ tako da važi

$$E_\theta(\hat{\theta}_{rp1}) = \theta + b_1(\theta).$$

U našem primeru je

$$b_1(\theta) = -\theta/n^2 = -\sigma^2/100 = -0.02,$$

što ćemo ponovo oceniti sa

$$b_1(\hat{\theta}(\mathbf{x})) = -\bar{s}_n^2/n^2 = -0.0147.$$

Otuda je ocena redukovane pristrasnosti 2. reda:

$$\hat{\theta}_{rp2} = \hat{\theta}_{rp1} - b_1(\hat{\theta}(\mathbf{x})) = 1.6160 + 0.0147 = 1.6307.$$

Nastavljanjem opisane procedure na potpuno identičan način, dolazimo do rezultata koji su prikazani u *Tabeli 3.1*.

ITERACIJA i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
OCENA $\hat{\theta}_{rpi}$	1.6160220	1.6307131	1.6321822	1.6323291	1.6323438
PRISTRASNOST $b_i(\hat{\theta})$	-0.0146911	-0.0014691	-0.0001469	-0.0000147	-0.0000015

Tabela 3.1 – Ocene redukovane pristrasnosti i-tog reda, i=1,2,...,5, i vrednosti njihovih biasa

Lako je zaključiti da su gornje ocene već u 5. iteraciji postupka redukcije pristrasnosti veoma bliske „granici“ *(3.7)*, tj. nepristrasnoj oceni koja se dostiže za $i \to \infty$:

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\bar{s}_n^2 = \frac{10}{9}\cdot 1.4691109 = 1.6323454.$$

b) Bootstrap redukciju pristrasnosti ćemo izvršiti uz pomoć algoritma „BootRedPris“ (dodatak D7) za $i = 2$. Izlaz koji se dobija pozivanjem komande „BootRedPris(x,1000, 1000)“, gde je argument „x“ originalni uzorak generisan u zadatku a), izgleda ovako:

```
>> BootRedPris(x,1000,1000)
```
$n = 10,\ B = 1.000,\ C = 1.000$

```
Vrednost ocenjivaca teta kapa za originalni uzorak:
    1.4691
```
$\hat{\theta}(\mathbf{x}) = \hat{\sigma}^2 = \bar{s}_n^2$

```
Bootstrap ocena njegove pristrasnosti:
   -0.1532
```
$\bar{\theta}^* - \hat{\theta}(\mathbf{x})$

```
Bootstrap ocena redukovane pristrasnosti 1. reda
za nepoznati parametar teta:
    1.6223
```

$\hat{\theta}^*_{rp1} = 2\hat{\theta}(\mathbf{x}) - \overline{\theta}^*$

```
Bootstrap ocena redukovane pristrasnosti 2. reda
za nepoznati parametar teta:
    1.6443
```

$\hat{\theta}^*_{rp2} = 3\hat{\theta}(\mathbf{x}) - 3\overline{\theta}^* + \lambda$

```
Teorijska granica - nepristrasna ocena (3.7):
    1.6323
```

s^2

Vidimo da su rezultati za nijansu slabiji u odnosu na slučaj pod a), gde nam je funkcionalni oblik pristrasnosti bio poznat, što se verovatno objašnjava činjenicom da smo odredili samo prve dve iteracije. Međutim, jedan od problema u vezi sa primenom bootstrap postupka jeste i to što ga porast broja iteracija znatno „poskupljuje“, tj. uvećava računske i vremenske troškove njegovog izvođenja. U našem primeru, reč je o skoku sa $B = 1.000$ (za $i = 1$) na $B \cdot C = 1.000.000$ generisanih bootstrap uzoraka (za $i = 2$). Prema tome, izračunavanje ocena redukovane pristrasnosti višeg reda u „razumnom“ vremenskom periodu nužno bi podrazumevalo izbor nešto skromnijih vrednosti *B* i *C*.

4 Bootstrap intervali poverenja

4.1 Uvod

Kako je objašnjeno u početnim delovima rada, pri ispitivanju nekog obeležja X često nam je poznato samo to da njegova raspodela pripada dopustivoj familiji $\{F(x,\theta),\ x\in\boldsymbol{R},\ \theta\in\Theta\}$, tj. znamo oblik te raspodele, ali ne i tačnu vrednost parametra koji u njoj figuriše. Po pretpostavci, θ je element zadatog skupa mogućih vrednosti, Θ. Ukoliko je $\mathbf{X}=(X_1,X_2,...,X_n)$ prost slučajan uzorak obima n za obeležje X, interesuje nas kako se na osnovu njega može oceniti nepoznati parametar i time potpuno odrediti posmatrana raspodela.

Razlikovaćemo dva pristupa ovom problemu: tačkasto i intervalno ocenjivanje.

Tačkastom ocenom parametra θ nazivamo adekvatno odabranu statistiku $U=f(\mathbf{X})$ čija se realizovana vrednost uzima kao aproksimacija nepoznatog θ. Da bi U bila dobra ocena, pogodno je da poseduje „lepa" svojstva, poput nepristrasnosti, stabilnosti, efikasnosti,... O ovakvim ocenama je bilo reči u prethodnim poglavljima.

Mana tačkastog ocenjivanja je to što verovatnoća da statistika U uzme vrednost jednaku stvarnoj vrednosti parametra može biti nula (to i jeste slučaj kod neprekidnih raspodela). Zbog ovoga, bilo bi poželjno da uz ocenu parametra dobijemo i izvesnu meru njene moguće greške. Dakle, umesto izvođenja zaključka o stvarnoj vrednosti parametra θ, pokušaćemo da utvrdimo u kojem intervalu se ona nalazi. Tada se govori o **intervalnim ocenama** parametara ili **intervalima poverenja**.

Formalno, interval poverenja se definiše na sledeći način. Neka je X obeležje sa raspodelom koja pripada dopustivoj familiji $\{F(x,\theta),\ x\in\boldsymbol{R},\ \theta\in\Theta\}$, $\mathbf{X}$ prost slučajan uzorak za obeležje X, a $U_1=u_1(\mathbf{X})$ i $U_2=u_2(\mathbf{X})$ dve statistike za koje važi

$$P\{U_1\leq\theta\leq U_2\}=\alpha,$$

pri čemu α ne zavisi od θ. Tada se interval (U_1,U_2) naziva intervalom poverenja za parametar θ na **nivou poverenja** α ili $100\alpha\%-$nim intervalom poverenja za θ. Uobičajene vrednosti α su 0.99, 0.95 i 0.9.

Isto ime koristimo i za realizovano (u_1,u_2), ali treba napraviti razliku: dok neslučajni interval (u_1,u_2) ili sadrži ili ne sadrži θ, za slučajni interval (U_1,U_2) vezujemo tzv. **verovatnoću pokrivanja** nepoznatog parametra. **Stvarna** verovatnoća pokrivanja se ne mora podudarati sa pretpostavljenom, **nominalnom**, tj. α. Ukoliko su poznate tačne raspodele statistika upotrebljenih za konstruisanje intervala poverenja – one će biti jednake, a posmatrani intervali **tačni**. U suprotnom, moramo se zadovoljiti **približnim** intervalima poverenja, zasnovanim na asimptotskoj teoriji ili na bootstrapu.

4.2 Efronov percentilni bootstrap[8]

Pretpostavimo da je $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ prost slučajan uzorak za obeležje X sa raspodelom $F = F(\theta)$ i da želimo da konstruišemo interval poverenja za nepoznati parametar θ.

Ako je $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{X})$ odgovarajući ocenjivač, naš prvi korak će biti generisanje bootstrap replikacija $\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, ..., \hat{\theta}_B^*$ uobičajenim parametarskim postupkom – po „pravilu" $F_{\hat{\theta}(\mathbf{x})}$, gde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ predstavlja posmatranu realizaciju prostog slučajnog uzorka. Kako je objašnjeno na početku rada, „raštrkanost" ovih vrednosti bi trebalo u nekoj meri da reflektuje slučajnost originalne ocene, $\hat{\theta}$. Prema tome, naslućujemo da bi za gornju granicu željenog intervala poverenja za θ mogla biti uzeta adekvatno odabrana veća vrednost iz sortiranog niza bootstrap ocena,

$$\hat{\theta}_{(1)}^* \leq \hat{\theta}_{(2)}^* \leq ... \leq \hat{\theta}_{(B)}^*.$$

Da bismo precizirali prethodnu priču, ponovo ćemo se pozvati na zakon velikih brojeva. Naime, znamo da se za dovoljno veliko B empirijska funkcija raspodele bootstrap replikacija $\hat{\boldsymbol{\theta}}^* = (\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, ..., \hat{\theta}_B^*)$, data sa

$$G_B(\tau \mid \hat{\boldsymbol{\theta}}^*) = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^{B} I(\{\hat{\theta}(X_j^*) < \tau\}), \ \tau \in \boldsymbol{R},$$

može smatrati dobrom aproksimacijom funkcije raspodele $G^* = G_{\hat{\theta}}$ od $\hat{\theta}^* = \hat{\theta}(\mathbf{X}^*)$ (odeljak 2.5.2)[9]:

$$G_{\hat{\theta}}(t) = P_{\hat{\theta}}\{\hat{\theta}^* \leq t\}, \ t \in \boldsymbol{R}.$$

Rešavanjem jednačine

$$G_{\hat{\theta}}(t) = (1+\alpha)/2$$

po t, dobija se **gornja granica nominalnog $100\alpha\%$-nog intervala poverenja** za θ:

$$\hat{\theta}_{EP}^{g}(\alpha) = G_{\hat{\theta}}^{-1}((1+\alpha)/2). \tag{4.1}$$

Ako je B dovoljno veliko, *(4.1)* je u praksi moguće odrediti i upotrebom empirijske funk-

[8] B. Efron, 1981.

[9] Zvezdicu (*) u oznaci za funkciju raspodele „idealne" bootstrap ocene zamenili smo indeksom $\hat{\theta}$ radi naglašavanja činjenice da je reč o parametarskom bootstrapu.

cije raspodele $G_B(\cdot\,|\,\hat{\boldsymbol{\theta}}^*)$, odnosno zamenom

$$G_{\hat{\theta}}^{-1}((1+\alpha)/2) \to G_B^{-1}((1+\alpha)/2\,|\,\hat{\boldsymbol{\theta}}^*),$$

što se čini određivanjem broja

$$m = \frac{1+\alpha}{2} B$$

i proglašavanjem *m*-te po redu vrednosti, $\hat{\theta}^*_{(m)}$, u rastućem nizu $\hat{\theta}^*_{(1)} \le \hat{\theta}^*_{(2)} \le ... \le \hat{\theta}^*_{(B)}$ za gornju granicu. Ukoliko m nije ceo broj, za najveće $k \le m$, $k \in \boldsymbol{Z}$, nalaze se „granične“ replikacije $\hat{\theta}^*_{(k)}$ i $\hat{\theta}^*_{(k+1)}$, a zatim definiše

$$\hat{\theta}^*_{(m)} = \hat{\theta}^*_{(k)} + (m-k)(\hat{\theta}^*_{(k+1)} - \hat{\theta}^*_{(k)}).$$

Još jednom, dovoljno veliko *B* garantuje dobru aproksimaciju originalnog $G_{\hat{\theta}}^{-1}((1+\alpha)/2)$.

Potpuno analogno se izvodi i **donja granica nominalnog $100\alpha\%$-nog intervala poverenja** za θ:

$$\hat{\theta}^d_{EP}(\alpha) = G_{\hat{\theta}}^{-1}((1-\alpha)/2) \approx G_B^{-1}((1-\alpha)/2\,|\,\hat{\boldsymbol{\theta}}^*). \qquad (4.2)$$

Ako stavimo da je

$$l = \frac{1-\alpha}{2} B,$$

slično kao u prethodnom slučaju (zakon velikih brojeva), možemo je aproksimirati statistikom poretka bootstrap ocena $\hat{\theta}^*_{(l)}$. Ukoliko $l \notin \boldsymbol{Z}$, primenjuje se opisani postupak interpolacije.

Zajedno, granice *(4.1)* i *(4.2)* određuju **nominalni $100\alpha\%$-ni interval poverenja sa jednakim repovima** za θ dobijen Efronovim percentilnim metodom:

$$I_{EP}(\alpha) = (\hat{\theta}^d_{EP}(\alpha), \hat{\theta}^g_{EP}(\alpha)).$$

Budući da je, kako smo videli, za njegovo formiranje dovoljno poznavati proceduru konstrukcije jedne od granica, u nekim slučajevima ćemo se baviti samo gornjom, odnosno samo donjom.

4.3 Efronov percentilni bootstrap sa korekcijom pristrasnosti[10]

Kao i u prethodnom odeljku, polazeći od prostog slučajnog uzorka $\mathbf{X}$ generisanog funkcijom raspodele $F = F(\theta)$ i zadatog ocenjivača $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\boldsymbol{X})$ od θ, konstruisaćemo interval poverenja za ovaj nepoznati parametar.

Po definiciji, za ocenu $\hat{\theta}$ koja zadovoljava uslov

$$G_\theta(\theta) = P_\theta\{\hat{\theta} \le \theta\} = 0.5 \qquad (4.3)$$

kažemo da je **nepristrasna u odnosu na medijanu**. Kada je u pitanju bootstrap raspodela $G^* = G_{\hat{\theta}}$, *(4.3)* implicira

$$G_{\hat{\theta}}(\hat{\theta}) = 0.5.$$

Za korigovanje pristrasnosti ocena koje nisu nepristrasne u odnosu na medijanu Efron je predložio određivanje naredne ocenjene korekcije:

$$x_0 = \Phi^{-1}(G_{\hat{\theta}}(\hat{\theta})), \qquad (4.4)$$

gde je sa Φ obeležena funkcija raspodele standardne normalne slučajne promenljive. Naravno, ona se redukuje na nulu ako $\hat{\theta}$ ispunjava uslov *(4.3)*. Kao **gornju granicu nominalnog $100\alpha\%$-nog intervala poverenja** za θ Efron uzima

$$\hat{\theta}^g_{EPkp}(\alpha) = G^{-1}_{\hat{\theta}}(\Phi(2x_0 + z_{(1+\alpha)/2})), \qquad (4.5)$$

gde je $z_p = \Phi^{-1}(p)$ kvantil reda p raspodele $N(0,1)$. Slično,

$$\hat{\theta}^d_{EPkp}(\alpha) = G^{-1}_{\hat{\theta}}(\Phi(2x_0 + z_{(1-\alpha)/2}))$$

predstavlja odgovarajuću **donju granicu**. $\hat{\theta}^d_{EPkp}$ i $\hat{\theta}^g_{EPkp}$ zajedno formiraju **nominalni $100\alpha\%$-ni interval poverenja sa jednakim repovima** za θ. Primetimo da se za $x_0 = 0$, tj. $G_{\hat{\theta}}(\hat{\theta}) = 0.5$, dobijaju „obične“ Efronove percentilne granice.

U praksi, Efronov percentilni bootstrap sa korekcijom pristrasnosti izvodimo na sledeći način. Nakon generisanja kolekcije replikacija $\hat{\theta}^*_1, \hat{\theta}^*_2, ..., \hat{\theta}^*_B$ prema pravilu $F_{\hat{\theta}(\mathbf{x})}$ i određivanja proporcije $\hat{q}$ vrednosti $\hat{\theta}^*_j$ koje nisu veće od $\hat{\theta}(\mathbf{x})$, kao dobru aproksimaciju za x_0 uzimamo

[10] B. Efron, 1981.

$$\Phi^{-1}(\hat{q}).$$

Dalje, nalazimo $q_{(1+\alpha)/2} = \Phi(2x_0 + z_{(1+\alpha)/2})$, računamo broj

$$m = Bq_{(1+\alpha)/2}$$

i imenujemo $m-$ti element, $\hat{\theta}^*_{(m)}$, sortiranog niza $\hat{\theta}^*_{(1)} \leq \hat{\theta}^*_{(2)} \leq ... \leq \hat{\theta}^*_{(B)}$ gornjom granicom intervala poverenja za θ na nivou α. Ako $m \notin \boldsymbol{Z}$, pribegavamo uobičajenoj interpolaciji. Potpuno analogna procedura primenjuje se i za donju granicu (slično kao u prethodnom odeljku, umesto $(1+\alpha)/2$ stavljamo $(1-\alpha)/2$), čime je kompletiran traženi interval poverenja sa jednakim repovima.

4.4 Hallov percentilni bootstrap[11]

Okvir od kojeg polazimo i dalje je nepromenjen: tu je prost slučajan uzorak $\mathbf{X}$ iz raspodele F_θ, nepoznati parametar θ te raspodele i njegov ocenjivač $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\boldsymbol{X})$. Novinu, međutim, predstavlja činjenica da bootstrap postupak ovoga puta primenjujemo ne na funkciju raspodele G_θ statistike $\hat{\theta}$, već na funkciju raspodele H_θ koja odgovara razlici $\hat{\theta} - \theta$:

$$H_\theta(x) = P_\theta\{\hat{\theta} - \theta \leq x\}, \; x \in \boldsymbol{R}.$$

To se čini generisanjem replikacija $\hat{\theta}^*_1, \hat{\theta}^*_2, ..., \hat{\theta}^*_B$ po modelu $F_{\hat{\theta}(\mathbf{x})}$ i formiranjem kolekcije razlika

$$\hat{\theta}^*_j - \hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{x}^*_j) - \hat{\theta}(\mathbf{x}), \; j = 1,2,...,B,$$

čija empirijska funkcija raspodele ima oblik

$$H_B(x \,|\, \hat{\boldsymbol{\theta}}^* - \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{B}\sum_{j=1}^{B} I(\{\hat{\theta}^*_j - \hat{\theta} \leq x\}), \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}^* - \hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}^*_1 - \hat{\theta}, \hat{\theta}^*_2 - \hat{\theta}, ..., \hat{\theta}^*_B - \hat{\theta}), \quad x \in \boldsymbol{R},$$

i za dovoljno veliko B dobro aproksimira

$$H_{\hat{\theta}}(x) = P_{\hat{\theta}}\{\hat{\theta}^* - \hat{\theta} \leq x\}.$$

Naglasimo da se gornja verovatnoća izračunava za fiksirano $\hat{\theta}$ (tj. $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{x})$), dok je izraz

[11] P. G. Hall, 1992.

$\hat{\theta}^* = \hat{\theta}(\mathbf{X}^*)$ slučajan – $\mathbf{X}^*$ predstavlja „bootstrap prost slučajan uzorak“ generisan funkcijom raspodele $F_{\hat{\theta}(\mathbf{x})}$. $H_{\hat{\theta}}(x)$ se smatra adekvatnom aproksimacijom nepoznatog $H_{\theta}(x)$, dok $H_B(x \mid \hat{\boldsymbol{\theta}}^* - \hat{\boldsymbol{\theta}})$ ima ulogu bootstrap „zamene“ za $H_{\hat{\theta}}(x)$. Tačnost aproksimacije $H_B(x \mid \hat{\boldsymbol{\theta}}^* - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \approx H_{\hat{\theta}}(x)$ može se kontrolisati putem broja replikacija, *B*, ali za $H_{\hat{\theta}}(x) \approx H_{\theta}(x)$ ona zavisi od kvaliteta ocene $\hat{\theta}$ parametra θ i obično je pod uticajem obima originalnog uzorka, *n*.

Gornja granica $100\alpha\%$ - nog intervala poverenja za θ dobijenog Hallovim metodom ima oblik

$$\hat{\theta}^g_{HP}(\alpha) = \hat{\theta} - H^{-1}_{\hat{\theta}}((1-\alpha)/2), \tag{4.6}$$

dok je odgovarajuća **donja** data sa

$$\hat{\theta}^d_{HP}(\alpha) = \hat{\theta} - H^{-1}_{\hat{\theta}}((1+\alpha)/2).$$

Nastavak analize biće usmeren na izraz *(4.6)*, budući da su izvođenja za donju granicu potpuno analogna.

Konstrukcija $\hat{\theta}^g_{HP}$ je motivisana tačnom $100\alpha\%-$nom gornjom granicom:

$$\hat{\theta}^g(\alpha) = \hat{\theta} - H^{-1}_{\theta}((1-\alpha)/2),$$

s obzirom na to da je

$$\begin{aligned} P_{\theta}\{\hat{\theta}^g > \theta\} &= P_{\theta}\{\hat{\theta} - H^{-1}_{\theta}((1-\alpha)/2) > \theta\} \\ &= 1 - P_{\theta}\{\hat{\theta} - \theta \le H^{-1}_{\theta}((1-\alpha)/2)\} \\ &= 1 - H_{\theta}[H^{-1}_{\theta}((1-\alpha)/2)] \\ &= (1+\alpha)/2. \end{aligned}$$

Problem u vezi sa $\hat{\theta}^g$ jeste njena posredna zavisnost od nepoznatog parametra θ (preko $H^{-1}_{\theta}((1-\alpha)/2)$. Bootstrap metod ga prevazilazi aproksimirajući $H^{-1}_{\theta}((1-\alpha)/2)$ sa $H^{-1}_{\hat{\theta}}((1-\alpha)/2)$, koje se, za dovoljno veliko *B*, može dobiti sa proizvoljnom preciznošću direktno iz uzorka bootstrap replikacija

$$D_j = \hat{\theta}^*_j - \hat{\theta}, \;\; j = 1,2,\ldots,B. \tag{4.7}$$

Potrebno je samo sortirati vrednosti D_j u rastući niz,

$$D_{(1)} \le D_{(2)} \le ... \le D_{(B)},$$

odrediti broj $l = B(1-\alpha)/2$ i uzeti l-ti element, $D_{(l)}$, kao aproksimaciju za $H_{\hat{\theta}}^{-1}((1-\alpha)/2)$. Ukoliko $l \notin \boldsymbol{Z}$, primenjuje se interpolacija između „granica“ $D_{(k)}$ i $D_{(k+1)}$ – za najveće $k \le l, k \in \boldsymbol{Z}$:

$$D_{(l)} = D_{(k)} + (l-k)(D_{(k+1)} - D_{(k)}),$$

Primetimo da nam nije bio neophodan analitički oblik funkcije raspodele H_{θ}.

U specijalnom slučaju kada $H_{\theta}^{-1}(\alpha)$ ne zavisi od θ, važi da je $H_{\hat{\theta}}^{-1}(\alpha) = H_{\theta}^{-1}(\alpha)$ $= H^{-1}(\alpha)$, tako da rezultujući interval poverenja ima tačnu verovatnoću pokrivanja za $B \to \infty$.

4.5 Primer

Postavka problema

Neka je X obeležje sa raspodelom koja pripada dopustivoj familiji $\{N(\mu,\sigma^2), \mu \in \boldsymbol{R}, \sigma > 0\}$. Ako je dat prost slučajan uzorak $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$, nepoznate parametre μ i σ^2 oce-njujemo uobičajenim ocenjivačima $\overline{X}_n$ i $\overline{S}_n^2$, respektivno.

Zadatak

Konstruisati dvostrani interval poverenja sa jednakim repovima na nominalnom nivou α za nepoznatu varijansu obeležja, $\theta = \sigma^2$, primenom:

a) Efronovog percentilnog bootstrapa,
b) Efronovog percentilnog bootstrapa sa korekcijom pristrasnosti i
c) Hallovog percentilnog bootstrapa.

Izrada

Podsetimo se, klasičan dvostrani $100\alpha\%-$ni interval poverenja za nepoznatu varijansu σ^2 posmatranog obeležja X ima oblik

$$\left(\frac{n\overline{S}_n^2}{c_2}, \frac{n\overline{S}_n^2}{c_1} \right), \tag{4.8}$$

gde su c_1 i c_2, respektivno, kvantili reda $(1-\alpha)/2$ i $(1+\alpha)/2$ raspodele χ^2_{n-1}, što ćemo obeležavati kao

$$c_1 = \chi^2_{n-1,\,(1-\alpha)/2} \ \text{ i } \ c_2 = \chi^2_{n-1,\,(1+\alpha)/2}.$$

Naime, statistika od koje polazimo je

$$\frac{n\bar{S}_n^2}{\sigma^2}.$$

Kako se za nju zna da ima hi-kvadrat raspodelu sa $n-1$ stepeni slobode, c_1 i c_2 određujemo kao brojeve za koje važi:

$$P\{c_1 \le n\bar{S}_n^2/\sigma^2 \le c_2\} = P\{c_1 \le \chi^2_{n-1} \le c_2\} = \alpha.$$

a) Bootstrap postupak (parametarski) započinjemo, kao i obično, generisanjem B bootstrap uzoraka, $\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, ..., \mathbf{x}_B^*$, iz raspodele $N(\bar{x}_n, \bar{s}_n^2)$, gde su $\bar{x}_n$ i $\bar{s}_n^2$ vrednosti ocenjivača nepoznate sredine i varijanse izračunate na osnovu originalnog uzorka, **x**, i određivanjem kolekcije bootstrap replikacija $\hat{\theta}_j^* = \hat{\theta}(\mathbf{x}_j^*) = (\bar{s}_n^2)_j^*,\ j = 1,2,...,B.$ Odgovarajuća EDF, $G_B(\cdot\,|\,\hat{\boldsymbol{\theta}}^*)$, dobro aproksimira funkciju raspodele bootstrap ocene $\hat{\theta}^*$, $G_{\hat{\theta}}(\cdot)$. Ako bismo zamislili da je B veoma veliko (u idealnom slučaju – $B = \infty$), mogli bismo odrediti njen tačan oblik[12]:

$$G_{\hat{\theta}}(x) = P_{\hat{\theta}}\{\hat{\theta}^* \le x\} = P_{\hat{\theta}}\{n\bar{S}_n^{2*}/\bar{s}_n^2 \le nx/\bar{s}_n^2\} = \chi^2_{n-1}(nx/\bar{s}_n^2),\ x \in \boldsymbol{R}. \qquad \textit{(4.9)}$$

Gornji izraz, dakle, sledi iz analitičke činjenice da slučajna promenljiva $n\bar{S}_n^{2*}/\bar{s}_n^2$ ima hi-kvadrat raspodelu sa $n-1$ stepeni slobode. Naravno, bootstrap metod za ovo „ne zna“. Kako je objašnjeno u teorijskom delu, Efronov percentilni postupak uzima $(1+\alpha)/2-$ti percentil kolekcije bootstrap ocena za gornju granicu traženog intervala poverenja, budući da on, za veliko B, predstavlja odličnu aproksimaciju nepoznatog $G_{\hat{\theta}}^{-1}((1+\alpha)/2)$:

$$G_{\hat{\theta}}^{-1}((1+\alpha)/2) = \frac{\bar{s}_n^2}{n}(\chi^2_{n-1})^{-1}((1+\alpha)/2) = \hat{\theta}^g_{EP}(\alpha). \qquad \textit{(4.10)}$$

Stvarna verovatnoća pokrivanja granice *(4.10)* je:

---

[12] Za funkciju raspodele slučajne promenljive χ^2_n upotrebljavaćemo istu oznaku – $\chi^2_n(\cdot)$.

$$\begin{aligned} P_\theta\{\hat{\theta}^g_{EP} \geq \theta\} &= P_\theta\{(\bar{S}^2_n/n)(\chi^2_{n-1})^{-1}((1+\alpha)/2) \geq \sigma^2\} \\ &= P_\theta\{n\bar{S}^2_n/\sigma^2 \geq n^2/(\chi^2_{n-1})^{-1}((1+\alpha)/2)\} \\ &= 1-\chi^2_{n-1}[n^2/(\chi^2_{n-1})^{-1}((1+\alpha)/2)]. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Potpuno analogno, za donju granicu nominalnog $100\alpha\%-$nog intervala poverenja za nepoznatu varijansu obeležja X dobijenu primenom Efronovog percentilnog bootstrapa važe izrazi:

$$\hat{\theta}^d_{EP}(\alpha) = G^{-1}_{\hat{\theta}}((1-\alpha)/2) = \frac{\bar{s}^2_n}{n}(\chi^2_{n-1})^{-1}((1-\alpha)/2), \tag{4.12}$$

$$P_\theta\{\hat{\theta}^d_{EP} \leq \theta\} = \chi^2_{n-1}[n^2/(\chi^2_{n-1})^{-1}((1-\alpha)/2)]. \tag{4.13}$$

Ilustrujmo prethodna razmatranja jednim konkretnim primerom. Pretpostavimo da su stvarne vrednosti parametara normalne raspodele našeg obeležja *X*, recimo, $\mu=3$ i $\sigma^2=$ 0.5, a obim uzorka koji ćemo posmatrati $n=10$. Dakle, originalno **x** generišemo „Matlab“ naredbom:

„x = normrnd(3, sqrt(0.5), 10, 1)“.

Dobijeni rezultat je sledeći:

x’ = [2.6941 1.8223 3.0886 3.2034 2.1893 3.8421 3.8409 2.9734 3.2314 3.1235].

Pretvarajući se da nemamo informaciju o μ i σ^2, konstruisaćemo interval poverenja za nepoznatu varijansu obeležja na nominalnom nivou, po našem izboru, $\alpha = 0.95$.

Prema statističkoj teoriji, klasičan $95\%-$ni interval poverenja (izraz *(4.8)*) je:

$$\left(\frac{n\bar{s}^2_n}{c_2}, \frac{n\bar{s}^2_n}{c_1}\right) = \left(\frac{10\cdot 0.3673}{19.0228}, \frac{10\cdot 0.3673}{2.7004}\right) = (0.1931, 1.3602).$$

Ovo sledi iz činjenice da je varijansa uzorka **x** (naredba „var(x,1)“)

$$\hat{\theta}(\mathbf{x}) = \bar{s}^2_{10} = 0.3673,$$

dok su odgovarajući kvantili hi-kvadrat raspodele

$$c_1 = \chi^2_{9,0.025} = 2.7004,\ \ c_2 = \chi^2_{9,0.975} = 19.0228.$$

Kada je u pitanju bootstrap postupak, videli smo da pretpostavka da je broj posmatranih replikacija veoma veliki $(B=\infty)$ omogućava određivanje analitičkog oblika Efronovog percentilnog intervala poverenja. Drugim rečima, formule *(4.10)* i *(4.12)* daju:

$$\hat{\theta}_{EP}^{g}(\alpha)=\frac{\bar{s}_{10}^{2}}{10}\chi^2_{9,0.975}=0.03673\cdot 19.0228=0.6987, \qquad \text{(gornja granica)}$$

$$\hat{\theta}_{EP}^{d}(\alpha)=\frac{\bar{s}_{10}^{2}}{10}\chi^2_{9,0.025}=0.03673\cdot 2.7004=0.0992. \qquad \text{(donja granica)}$$

Stvarne verovatnoće pokrivanja ovih granica (izrazi *(4.11)* i *(4.13)*) iznose, redom:

$$P_\theta\{\hat{\theta}_{EP}^{g}\geq\theta\}=1-\chi_9^2(10^2/\chi^2_{9,0.975})=1-\chi_9^2(5.2568)=0.8114,$$

$$P_\theta\{\hat{\theta}_{EP}^{d}\leq\theta\}=\chi_9^2(10^2/\chi^2_{9,0.025})=\chi_9^2(37.0315)=0.9999.$$

Praktično, međutim, Efronov percentilni bootstrap realizujemo putem simulacija, što podrazumeva izbor nekog konačnog (što većeg) B. U tu svrhu, poslužili smo se „Matlab“ algoritmom „IntPovEP“ (dodatak D8) i za posmatrani uzorak **x**, $\alpha=0.95$ i $B=10.000$ dobili naredni izlaz:

```
>> IntPovEP(x,0.95,10000)

Interval poverenja dobijen Efronovim percentilnim bootstrapom

-gornja granica:
    0.7085

-donja granica:
    0.0992
```

Zaključujemo da postoji visok stepen saglasnosti između analitičkih i rezultata dobijenih upotrebom simulacija, što se i moglo očekivati, imajući u vidu da je broj generisanih bootstrap uzoraka bio 10.000.

b) Izabrana ocena nepoznate varijanse, $\hat{\theta}(\mathbf{X})=\bar{S}_n^2$, nije nepristrasna u odnosu na medijanu. Naime, znamo da je

$$G_\theta(\theta)=P_\theta\{\hat{\theta}\leq\theta\}=P_\theta\{\bar{S}_n^2\leq\sigma^2\}=P_\theta\{n\bar{S}_n^2/\sigma^2\leq n\}=\chi^2_{n-1}(n)=G_{\hat{\theta}}(\hat{\theta}).$$

Vrednosti funkcije raspodele $\chi^2_{n-1}(n)$ za različite n, odnosno njihova odstupanja (čak i za velike uzorke) od 0.5, prikazani su u narednoj tabeli:

n	2	3	4	5	10	20	50	100	500
$\chi^2_{n-1}(n)$	0.8427	0.7769	0.7385	0.7127	0.6495	0.6054	0.5666	0.5470	0.5210

Ukoliko ponovo pretpostavimo da je B beskonačno veliko, što znači da nam je poznata tačna bootstrap raspodela *(4.9)*, u mogućnosti smo da zapišemo interval poverenja dobijen percentilnim bootstrapom sa korekcijom pristrasnosti u kompaktnom matematičkom obliku i analiziramo njegovu verovatnoću pokrivanja. Još jednom, sve ovo nije neophodno u praktičnim primenama, gde do traženih rezultata dolazimo upotrebom simulacija. Prema *(4.4)* i *(4.5)*, gornja granica željenog intervala poverenja je tada:

$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}^{g}_{EPkp}(\alpha) &= G^{-1}_{\hat{\theta}}(\Phi(2x_0 + z_{(1+\alpha)/2})) \\
&= G^{-1}_{\hat{\theta}}(\Phi(2\Phi^{-1}(G_{\hat{\theta}}(\hat{\theta})) + z_{(1+\alpha)/2}) \\
&= (\bar{s}_n^2/n)\cdot(\chi^2_{n-1})^{-1}[\Phi(2\Phi^{-1}(\chi^2_{n-1}(n)) + z_{(1+\alpha)/2})] \\
&= (0.3673/10)\cdot(\chi^2_9)^{-1}[\Phi(2\Phi^{-1}(\chi^2_9(10)) + z_{0.975})] \\
&= 0.0367\cdot(\chi^2_9)^{-1}[\Phi(2\Phi^{-1}(0.6495) + 1.9600)] \\
&= 0.0367\cdot(\chi^2_9)^{-1}(\Phi(2.7280)) \\
&= 0.0367\cdot\chi^2_{9,0.9968} \\
&= 0.9114.
\end{aligned}
$$

Njena stvarna verovatnoća pokrivanja iznosi:

$$
\begin{aligned}
P_\theta\{\hat{\theta}^{g}_{EPkp} \geq \theta\} &= P_\theta\{(\bar{S}_n^2/n)\cdot(\chi^2_{n-1})^{-1}[\Phi(2\Phi^{-1}(\chi^2_{n-1}(n)) + z_{(1+\alpha)/2})] \geq \sigma^2\} \\
&= P_\theta\{(n\bar{S}_n^2/\sigma^2) \geq n^2/(\chi^2_{n-1})^{-1}[\Phi(2\Phi^{-1}(\chi^2_{n-1}(n)) + z_{(1+\alpha)/2})]\} \\
&= 1 - \chi^2_{n-1}[n^2/(\chi^2_{n-1})^{-1}[\Phi(2\Phi^{-1}(\chi^2_{n-1}(n)) + z_{(1+\alpha)/2})]] \\
&= 1 - \chi^2_9[100/(\chi^2_9)^{-1}[\Phi(2\Phi^{-1}(\chi^2_9(10)) + z_{0.975})]] \\
&= 1 - \chi^2_9[100/(\chi^2_9)^{-1}[\Phi(2\Phi^{-1}(0.6495) + 1.9600)]] \\
&= 1 - \chi^2_9[100/(\chi^2_9)^{-1}(\Phi(2.7280))] \\
&= 1 - \chi^2_9[100/\chi^2_{9,0.9968}] \\
&= 1 - \chi^2_9(4.0303) \\
&= 0.9094.
\end{aligned}
$$

Potpuno analogno, za donju granicu se dobija:

$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}^{d}_{EPkp}(\alpha) &= G^{-1}_{\hat{\theta}}(\Phi(2x_0 + z_{(1-\alpha)/2})) \\
&= (\bar{s}_n^2/n)\cdot(\chi^2_{n-1})^{-1}[\Phi(2\Phi^{-1}(\chi^2_{n-1}(n)) + z_{(1-\alpha)/2})] \\
&= 0.1615,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_\theta\{\hat{\theta}^{d}_{EPkp} \leq \theta\} &= P_\theta\{(\bar{S}_n^2/n)\cdot(\chi^2_{n-1})^{-1}[\Phi(2\Phi^{-1}(\chi^2_{n-1}(n)) + z_{(1-\alpha)/2})] \leq \sigma^2\} \\
&= \chi^2_{n-1}[n^2/(\chi^2_{n-1})^{-1}[\Phi(2\Phi^{-1}(\chi^2_{n-1}(n)) + z_{(1-\alpha)/2})]] \\
&= 0.9932.
\end{aligned}
$$

Sa druge strane, rezultati simulacija izvedenih uz pomoć „Matlab“ algoritma „IntPovEPkp“ (dodatak D9) za ulazne argumente identične onima iz zadatka pod a) su sledeći:

```
>> IntPovEPkp(x,0.95,10000)

Interval poverenja dobijen Efronovim percentilnim bootstrapom
sa korekcijom pristrasnosti

-gornja granica:
    0.9090

-donja granica:
    0.1632
```

Zaključujemo da ishod eksperimenta još jednom pokazuje solidno slaganje sa očekivanim, analitički određenim vrednostima.

c) Funkcija raspodele statistike $\hat{\theta}-\theta=\bar{S}_n^2-\sigma^2$ je:

$$H_\theta(x)=P_\theta\{\bar{S}_n^2-\sigma^2\le x\}=P_\theta\{n\bar{S}_n^2/\sigma^2\le nx/\sigma^2+n\}=\chi_{n-1}^2(nx/\sigma^2+n).$$

Sledi:

$$H_\theta^{-1}((1-\alpha)/2)=\sigma^2[(\chi_{n-1}^2)^{-1}((1-\alpha)/2)/n-1],$$
$$H_{\hat{\theta}}^{-1}((1-\alpha)/2)=\bar{s}_n^2[(\chi_{n-1}^2)^{-1}((1-\alpha)/2)/n-1].$$

Dakle, prema *(4.6)*, gornja granica nominalnog $100\alpha\%-$nog intervala poverenja ima oblik:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{HP}^g&=\bar{s}_n^2-H_{\hat{\theta}}^{-1}((1-\alpha)/2)\\&=\bar{s}_n^2[2-(\chi_{n-1}^2)^{-1}((1-\alpha)/2)/n]\\&=0.3673\cdot[2-\chi_{9,0.025}^2/10]\\&=0.3673\cdot1.7299\\&=0.6354.\end{aligned}$$

Stvarna verovatnoća pokrivanja ove granice je:

$$\begin{aligned}P_\theta\{\hat{\theta}_{HP}^g\ge\theta\}&=P_\theta\{\bar{S}_n^2[2-(\chi_{n-1}^2)^{-1}((1-\alpha)/2)/n]\ge\sigma^2\}\\&=P_\theta\{n\bar{S}_n^2/\sigma^2\ge n^2/[2n-(\chi_{n-1}^2)^{-1}((1-\alpha)/2)]\}\\&=1-\chi_{n-1}^2[n^2/[2n-(\chi_{n-1}^2)^{-1}((1-\alpha)/2)]]\\&=1-\chi_9^2[100/(20-\chi_{9,0.025}^2)]\\&=1-\chi_9^2(5.7805)\\&=0.7617.\end{aligned}$$

Analogno, za donju granicu imamo:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}^{d}_{HP} &= \bar{s}^2_n - H^{-1}_{\hat{\theta}}((1+\alpha)/2) \\ &= \bar{s}^2_n[2-(\chi^2_{n-1})^{-1}((1+\alpha)/2)/n] \\ &= 0.0359,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_\theta\{\hat{\theta}^{d}_{HP} \le \theta\} &= P_\theta\{\bar{S}^2_n[2-(\chi^2_{n-1})^{-1}((1+\alpha)/2)/n] \le \sigma^2\} \\ &= \chi^2_{n-1}[n^2/[2n-(\chi^2_{n-1})^{-1}((1+\alpha)/2)]] \\ &\approx 1.\end{aligned}$$

Praktično izvođenje Hallovog percentilnog bootstrapa („Matlab“ program „IntPovHP“, dodatak D10) opet je rezultiralo razumnim poklapanjem sa gore izračunatim vrednostima:

```
>> IntPovHP(x,0.95,10000)

Interval poverenja dobijen Hallovim percentilnim bootstrapom

-gornja granica:
    0.6356

-donja granica:
    0.0362
```

Analiza rezultata

U radu [11] (odeljak 4.2.2), na jednom numeričkom primeru je analizirana zavisnost greške pokrivanja svake od granica intervala poverenja, kao razlike između njene stvarne i nominalne verovatnoće pokrivanja, od obima polaznog uzorka, tj. od $n^{-1/2}$. U slučaju nominalnog 95%−nog intervala poverenja, kada su nominalne verovatnoće pokrivanja pojedinačnih granica jednake 0.975, pokazalo se da su greške gornjih granica negativne i prilično velike za skromno n, dok su za donje pozitivnog predznaka i znatno umerenije, čak i kada je n malo. Sa tim rezultatom su saglasne i vrednosti koje smo dobili u našem zadatku za $n = 10$ (*Tabela 4.1*).

Generalno, Scholz konstatuje da su pod određenim uslovima regularnosti, pretpostavkom o IID podacima u originalnom uzorku i dovoljno velikom n greške pokrivanja svake od granica proporcionalne sa $n^{-1/2}$, a za čitav interval poverenja sa n^{-1}.

POSTUPAK	***a)*** **EP**	***b)*** **EPkp**	***c)*** **HP**
GORNJA GRANICA	-0.1636	-0.0656	-0.2133
DONJA GRANICA	0.0249	0.0182	≈ 0.0250

Tabela 4.1 – Greške pokrivanja gornjih i donjih granica nominalnih 95% – nih intervala poverenja konstruisanih Efronovim percentilnim postupkom, percentilnim postupkom sa korekcijom pristrasnosti i Hallovim percentilnim postupkom

5 Bootstrap testovi hipoteza

5.1 Uvod

Kao jedan od „alata“ inferencijalne statistike, uz intervalno ocenjivanje, **testovi hipoteza** su u širokoj upotrebi jer omogućavaju sistematično donošenje odluka o problemima koji u sebi sadrže neodređenost. Baveći se pitanjem ispravnosti generalizacije na osnovu uzorka, tj. kombinovanjem raspoloživih podataka i statističke teorije u cilju izvođenja zaključaka o čitavoj populaciji, testiranje hipoteza otklanja uticaj subjektivnosti pojedinca i obezbeđuje racionalnije i tačnije rezultate.

Statističkom hipotezom nazivamo tvrdnju, pretpostavku u vezi sa svojstvom populacije koje nas interesuje, tj. o nekom njenom obeležju. Najčešća svrha testiranja (kojom ćemo se u ovom radu i baviti) jeste provera nekog tvrđenja o raspodeli verovatnoće tog obeležja, odnosno o parametrima koji u njoj figurišu. Budući da nam stvarne vrednosti tih parametara često nisu poznate, prinuđeni smo da se okrećemo procenama na bazi dostupnih uzoraka, a potom i da utvrdimo stepen njihove preciznosti i pouzdanosti.

Polazna statistička hipoteza, tj. ona koju želimo da testiramo, naziva se **nultom hipotezom** i uobičajeno obeležava sa H_0. Testiranje njene istinitosti podrazumeva i formulisanje odgovarajuće **alternativne hipoteze**, H_1, u koju ćemo „verovati“ ukoliko se, sa aspekta datog testa, pokaže da je H_0 neprihvatljiva. Nulta i alternativna hipoteza moraju da budu međusobno isključive i da zajedno iscrpljuju sve mogućnosti. Na primer, ako sa Θ obeležimo skup mogućih vrednosti (**dopustiv skup**) nepoznatog parametra θ posmatrane raspodele verovatnoće, formulacija bi mogla biti ovakva:

$$H_0(\theta \in \Lambda_1), \quad H_1(\theta \in \Lambda_2), \quad \Lambda_1, \Lambda_2 \subset \Theta, \quad \Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing, \quad \Lambda_1 \cup \Lambda_2 = \Theta.$$

Razlikujemo **proste** i **složene** hipoteze. U kontekstu gornjeg primera, prostom bismo okarakterisali onu pretpostavku koja datu raspodelu određuje u potpunosti, pridružujući nepoznatom parametru konkretan broj ($\Lambda_1 = \{\theta_0\}$, $\theta_0 \in \Theta$, $H_0(\theta = \theta_0)$), dok složena taj parametar smešta u neki interval ($\Lambda_1 = [\theta_1, \theta_2]$, $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$, $H_0(\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2)$).

Statističkim testom nazivamo postupak (ne)odbacivanja nulte hipoteze na osnovu realizovanog uzorka $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, tj. nalaženja odgovora na pitanje da li je opažena razlika između uzoračke i populacione, pretpostavljene vrednosti parametra realna ili je posledica slučajnosti. Rezultati testa su izraženi u terminima verovatnoće koja meri stepen saglasnosti datih podataka i posmatrane hipoteze.

Baš kao što ne možemo naći 100% – ni interval poverenja, ni statistički testovi ne garantuju 100% – nu sigurnost u ispravnost naše odluke. Budući da se u postupku testiranja mora voditi računa o tome da biranje uzorka podleže pravilima slučajnosti, može se desiti da dva različita uzorka dovedu do suprotnih odluka, pa je pravilno zaključiti da *na bazi datog uzorka* odbacujemo ili nemamo razloga da odbacimo H_0.

U tom smislu, prilikom testiranja neke hipoteze možemo načiniti dva tipa greške:

- **greška I vrste** – nastaje kada, zbog slučajnosti uzorka, pogrešno odbacimo tačnu nultu hipotezu; verovatnoća da se to desi naziva se **verovatnoćom greške I vrste** i obeležava sa α:

$$\alpha = P\{H_0 \text{ se odbacuje} \mid H_0 \text{ je tačna}\};$$

- **greška II vrste** – na osnovu datog uzorka, ne odbacujemo nultu hipotezu iako ona nije istinita; verovatnoća ovog događaja jeste **verovatnoća greške II vrste**, u oznaci β:

$$\beta = P\{H_0 \text{ se ne odbacuje} \mid H_0 \text{ nije tačna}\}.$$

Izvođenje testa podrazumeva da se unapred zada, a time i kontroliše, greška ili rizik sa kojim ga vršimo. Reč je upravo o verovatnoći greške I vrste, koja se naziva i **nivoom značajnosti (signifikantnosti)**. Cilj nam je, svakako, da i α i β budu što manje, ali smanjenje jedne greške nužno uzrokuje povećanje druge. Zbog toga, hipoteze se formulišu tako da greška I tipa bude ona koja nam je važnija, tj. koju želimo imati pod kontrolom. Uobičajene vrednosti za nivo testa su 0.01, 0.05 i, maksimalno, 0.1.

Verovatnoća $1-\beta$ prihvatanja stvarno istinite alternative zove se **moć** testa. Budući da pokazuje njegovu sposobnost da odbaci nultu hipotezu koja zaista nije tačna, ona predstavlja jedno od najčešćih merila kvaliteta, a time i pogodan kriterijum za poređenje različitih testova.

Da li je razlika između onoga što očekujemo na osnovu H_0 i informacija koje nam pruža izvučeni uzorak realna ili je posledica slučajnosti, testira se upotrebom odgovarajuće **test statistike**, τ, tj. slučajne promenljive koja ima poznatu raspodelu verovatnoće ukoliko je nulta hipoteza tačna (tzv. nulta raspodela), dok je pod alternativnom raspodeljena drugačije. „Procedura“ je sledeća:

- kada je registrovana vrednost test statistike, $\hat{\tau}$, takva da ju je pod H_0 često moguće dobiti na slučajan način, zaključićemo da test nije obezbedio adekvatan dokaz protiv ove hipoteze;
- ako se vrednost $\hat{\tau}$ može okarakterisati kao „ekstrem“, u smislu neuobičajenosti njene slučajne realizacije pod H_0, to predstavlja argument koji ne ide u prilog polaznoj pretpostavci – ispostavi li se da je dovoljno ubedljiv, možemo doneti odluku o njenom odbacivanju.

Da bi bilo jasno precizirano koje se to vrednosti test statistike smatraju nekompatibilnim sa nultom hipotezom, odluku o njenom (ne)odbacivanju donosimo na bazi određenog **pravila odbacivanja**, koje kaže da će H_0 biti proglašena neprihvatljivom ako i samo ako registrovano $\hat{\tau}$ „upadne“ u tzv. **kritičnu oblast (oblast odbacivanja)** tog pravila.

U slučaju **dvostranog testa**, gde se odbacivanje vrši bilo za dovoljno male bilo za dovoljno velike vrednosti test statistike (na primer: $H_0(\theta=\theta_0)$, $H_1(\theta\neq\theta_0)$), kritična oblast je data u vidu unije odgovarajuća dva skupa. Za **jednostrani test**, u zavisnosti od znaka ograničenja zadatog u nultoj hipotezi ($H_0(\theta<\theta_0)$ ili $H_0(\theta>\theta_0)$), pomenutu oblast će sačinjavati one vrednosti $\hat{\tau}$ koje su veće, odnosno one koje su manje od određene „granice“ (**kritična vrednost**).

Dosadašnja priča bila je zasnovana na implicitnoj pretpostavci da je nulta raspodela naše test statistike u potpunosti poznata, tako da imamo tzv. **tačan test** (engleski: exact test). U ekonometriji, međutim, pomenutu raspodelu često znamo samo približno. Tada moramo napraviti razliku između **nominalnog** nivoa testa, tj. verovatnoće da se načini greška I vrste izračunate prema ma kojoj približnoj raspodeli upotrebljenoj za određivanje kritične oblasti, i **stvarne** verovatnoće odbacivanja, koja od nominalnog nivoa može značajno odstupati.

Odluka o tome da li odbaciti nultu hipotezu ili ne može biti doneta i putem izračunavanja tzv. **p-vrednosti** (**marginalnog nivoa značajnosti**) pridružene registrovanom $\hat{\tau}$. Najjednostavnije, to je verovatnoća da test statistika τ uzme još „ekstremniju“ vrednost od ove realizacije, pod pretpostavkom da je H_0 tačna. Ako je, recimo,

$$\alpha = P_{H_0}\{\tau > c\},$$

gde smo sa c obeležili granicu kritične oblasti, odgovarajuća p-vrednost se definiše kao

$$p = P_{H_0}\{\tau > \hat{\tau}\}.$$

Tada, nultu hipotezu odbacujemo za $p \le \alpha,$ dok za $p > \alpha$ nema osnova da se ona odbaci.

5.2 Postupak bootstrap testiranja – osnovni pojmovi

Pretpostavimo da je $\hat{\tau}$ realizovana vrednost posmatrane test statistike τ za raspoloživi uzorak **x** obima n, tj.

$$\hat{\tau} = \tau(x_1, x_2, ..., x_n),$$

i da želimo da izvršimo test na nivou značajnosti $\alpha,$ pri čemu se nulta hipoteza odbacuje za dovoljno velike realizacije $\hat{\tau}$ (drugima rečima, kritična oblast se nalazi u gornjem repu raspodele test statistike). Ako sa $F(\tau)$ označimo funkciju raspodele od τ pod nultom hipotezom („nulta“ raspodela)[13], odgovarajuća p-vrednost je, po definiciji,

$$p(\hat{\tau}) = 1 - F(\hat{\tau}), \tag{5.1}$$

a H_0 se, kako je već rečeno, odbacuje za $p(\hat{\tau}) < \alpha.$ Alternativni pristup bilo bi računanje kritične vrednosti c_α date jednačinom

$$1 - F(c_\alpha) = \alpha,$$

[13] Jasna je razlika između ovako definisanog $F(\tau)$ i oznake $F = F(\theta)$ za funkciju raspodele prostog slučajnog uzorka **X** koja je korišćena u prethodnim delovima.

kada pravilo odbacivanja ima oblik $\hat{\tau} > c_{\alpha}$. Jasno, zaključak u oba slučaja mora biti isti. Problem, međutim, predstavlja to što ekonometristima veoma često nije poznata funkcija $F(\tau)$. Jedno od rešenja jeste njena zamena približnom funkcijom raspodele, obeležimo je sa $F^{\infty}(\tau)$, koja je bazirana na asimptotskoj teoriji, ali je ishod ispitivanja tada uslovljen kvalitetom pomenute aproksimacije.

Postupak koji postaje sve popularniji, kako zbog jednostavnosti njegove primene usled stalnog rasta računarske moći, tako i zbog činjenice da ponekad bolje aproksimira nepoznato $F(\tau)$, jeste **bootstrap testiranje**. Procedura, kao i obično, započinje generisanjem *B* bootstrap uzoraka indeksiranih sa *j*. U opštem slučaju, za mehanizam koji generiše ove simulirane skupove podataka često se koristi naziv **bootstrap DGP** (engleski: DGP – data generating process). Kako je objašnjeno u 2. poglavlju, on može biti (potpuno ili delimično) parametarski ili neparametarski. Za svaki bootstrap uzorak potom se računa tzv. **bootstrap test statistika**, tj.

$$\tau_j^* = \tau(\mathbf{x}_j^*), \quad j = 1,2,\dots,B,$$

najčešće na identičan način na koji je i $\hat{\tau}$ izračunato iz $\mathbf{x}$. Preporuka je da upotrebljeni bootstrap DGP treba da zadovoljava nultu hipotezu, ali to nije uvek moguće, pa se u takvim situacijama τ_j^* ne mogu računati potpuno isto kao $\hat{\tau}$. Konstruisanjem empirijske funkcije raspodele dobijene kolekcije,

$$F_B(x \mid \boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{B}\sum_{j=1}^{B} I(\tau_j^* \le x), \quad \boldsymbol{\tau} = (\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_B^*), \tag{5.2}$$

dobijamo tzv. **bootstrap p-vrednost**, kao ocenu stvarne p-vrednosti *(5.1)*:

$$\hat{p}^*(\hat{\tau}) = 1 - F_B(\hat{\tau} \mid \boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{B}\sum_{j=1}^{B} I(\tau_j^* > \hat{\tau}). \tag{5.3}$$

U slučaju da test odbacuje H_0 za vrednosti $\hat{\tau}$ koje se nalaze u donjem repu raspodele test statistike, nejednakost u prethodnoj formuli bi bila suprotnog smera. Dakle, bootstrap p-vrednost je u opštem slučaju udeo bootstrap test statistika τ_j^* čije su vrednosti „ekstremnije“ u odnosu na originalnu realizaciju, $\hat{\tau}$. Izraz *(5.3)* predstavlja empirijski analog za *(5.1)*. Još jednom, odbacivanje nulte hipoteze kada je $\hat{p}^*(\hat{\tau}) < \alpha$ ekvivalentno je odbacivanju pod uslovom da $\hat{\tau}$ premašuje kvantil reda $1-\alpha$ raspodele $F_B(\cdot \mid \boldsymbol{\tau})$.

Ako pustimo da broj generisanih bootstrap uzoraka, *B*, teži beskonačnosti, EDF *(5.2)* će biti dobra aproksimacija za stvarnu funkciju raspodele vrednosti τ_j^*, u oznaci $F^*(\tau)$, pa će time i bootstrap p-vrednost *(5.3)* biti bliska „idealnoj“ bootstrap p-vrednosti, datoj sa

$$p^*(\hat{\tau}) = 1 - F^*(\hat{\tau}). \tag{5.4}$$

(*Slika 5.1*). Dakle, jasno je da bootstrap testovi u opštem slučaju nisu tačni, odnosno da se se stvarna verovatnoća odbacivanja nulte hipoteze na nivou α generalno ne podudara sa ovim nominalnim pragom. Većina problema u vezi sa bootstrap testiranjem nastaje ne iz razloga što je $F_B(\cdot \mid \boldsymbol{\tau})$ samo ocena za $F^*(\tau)$, već zato što $F^*(\tau)$ može slabo aproksimirati nepoznato $F(\tau)$.

$$p(\hat{\tau}) \xleftarrow{\textit{ocenjuje}} p^*(\hat{\tau}) \xleftarrow{\textit{aproksimira}} \hat{p}^*(\hat{\tau})$$

stvarna p-vrednost	*„idealna“ bootstrap p-vrednost*	*EDF bootstrap replikacija test statistike*

Slika 5.1 – Objašnjenje pojma bootstrap p-vrednosti

Ukoliko želimo da izvršimo dvostrani test, bootstrap p-vrednost više ne možemo računati koristeći formulu *(5.3)*, budući da je, kako je istaknuto na početku analize, ona prikladna samo za slučaj kada se nulta hipoteza odbacuje pri dovoljno velikim pozitivnim vrednostima $\hat{\tau}$. Pretpostavimo li da je statistika τ simetrično raspodeljena oko nule, upotrebićemo izraz za tzv. **simetričnu bootstrap p-vrednost**,

$$\hat{p}_s^*(\hat{\tau}) = \frac{1}{B}\sum_{j=1}^{B} I(|\tau_j^*| > |\hat{\tau}|), \tag{5.5}$$

koja praktično konvertuje dvostrani test u jednostrani. U suprotnom, *(5.5)* je moguće zameniti **bootstrap p-vrednošću za jednake repove**, datom sa

$$\hat{p}_{et}^*(\hat{\tau}) = 2min\left\{\frac{1}{B}\sum_{j=1}^{B} I(\tau_j^* \leq \hat{\tau}), \frac{1}{B}\sum_{j=1}^{B} I(\tau_j^* > \hat{\tau})\right\}. \tag{5.6}$$

Ovde, zapravo, izvodimo dva testa – jedan čiju kritičnu oblast čine vrednosti test statistike u donjem repu njene raspodele i drugi koji odbacuje H_0 za vrednosti $\hat{\tau}$ u gornjem repu. Ovim se objašnjava prisustvo množioca 2, bez kojeg bi $\hat{p}_{et}^*$ ležalo između 0 i 0.5. Ne može se garantovati da će izrazi *(5.5)* i *(5.6)* dati slične rezultate. Štaviše, ukoliko je sredina replikacija τ_j^*, $j = 1,2,...,B$, daleko od 0, ti brojevi se mogu znatno razlikovati, baš kao i svojstva odgovarajućih testova. Osim za uzorke veoma velikog obima, testovi bazirani na $\hat{p}_s^*$ će pod nultom hipotezom najčešće biti pouzdaniji od onih koji računaju p-vrednost $\hat{p}_{et}^*$.

Prema tome, jednakost *(5.5)* je primenljiva samo na test statistike čije vrednosti mogu imati ma koji predznak, poput *t*-statistike. Za one koje su uvek pozitivne, kao χ^2, obično se može koristiti samo formula *(5.3)*. Izraz *(5.6)* je moguće upotrebiti ukoliko želimo da odbacimo nultu hipotezu i za suviše male i za suviše velike vrednosti $\hat{\tau}$.

Važno svojstvo bootstrap testova, koje uočavamo neposredno iz *(5.3)*, *(5.5)* i *(5.6)*, jeste invarijantnost njihovih rezultata u odnosu na monotone transformacije posmatrane test statistike. Naime, ako je $g(\tau)$ monotona funkcija od τ, onda će bootstrap test zasnovan na $g(\tau)$ dati potpuno iste zaključke kao i onaj baziran na statistici τ. Razlog je to što $\hat{\tau}$ i $g(\hat{\tau})$, respektivno, zauzimaju identičnu poziciju u sortiranoj listi vrednosti $\hat{\tau}, \tau_1^*, \tau_2^*, \ldots, \tau_B^*$, odnosno $g(\hat{\tau}), g(\tau_1^*), g(\tau_2^*), \ldots, g(\tau_B^*)$, tako da vršenje transformacije neće imati efekta na odgovarajuću bootstrap p-vrednost.

5.3 Monte Karlo testovi

Specijalan slučaj u kojem maločas opisana procedura rezultira tačnim bootstrap testom podrazumeva zadovoljenost naredna dva uslova:

1) test statistika τ je **pivot**, tj. njena raspodela verovatnoće ne zavisi ni od čega nepoznatog; iz ovoga sledi da su τ i τ_j^*, $j = 1,2,\ldots,B$, jednako raspodeljene ukoliko je nulta hipoteza tačna;
2) broj bootstrap uzoraka, *B*, je takav da $\alpha(B+1) \in \boldsymbol{Z}$, gde α označava nivo testa.

Bootstrap test koji ispunjava navedene stavke naziva se **Monte Karlo testom**. Generalno, eksperimenti sa simulacijama su poznati i kao Monte Karlo eksperimenti, pa otuda i slično ime za testove bazirane na simuliranju pivotskih statistika, koje je originalno predložio Dwas (1957). U vreme kada su kompjuterske simulacije postale izvodljive, najčuveniji kazino bio je onaj u Monte Karlu, pa je inspiracija za naziv potekla iz analogije sa kockarskim igrama, u čijoj osnovi takođe leži postupak generisanja slučajnih brojeva.

Nije teško razumeti zbog čega su Monte Karlo testovi tačni. Zamislimo da su svih $B+1$ vrednosti $\hat{\tau}, \tau_1^*, \tau_2^*, \ldots, \tau_B^*$ sortirane u rastućem poretku. Pravilo odbacivanja nulte hipoteze kaže da se H_0 odbacuje ukoliko je $\hat{\tau}$ jedna od $\alpha(B+1)$ najvećih realizacija. Kako statistike $\hat{\tau}$ i τ_j^* imaju istu raspodelu (prvi uslov), to se dešava sa verovatnoćom (pod H_0) tačno α (drugi uslov).

Pošto je jedini zahtev u vezi sa brojem bootstrap replikacija, *B*, da bi posmatrani test bio tačan taj da $\alpha(B+1)$ mora biti celobrojno, cilj nam je da *B* učinimo što je moguće manjim i time računske troškove postupka testiranja svedemo na minimum. Na primer, za nivo poverenja $\alpha = 0.05$ teoretski bismo mogli uzeti i $B = 19$, zatim $B = 99$ za $\alpha = 0.01$, itd. Međutim, tu se pojavljuju dva problema. Prvi potiče otuda što sa smanjenjem broja *B* opada i moć testa. Drugo, izborom suviše skromnog *B* rezultati testa mogu netrivijalno zavisiti od konkretnog niza slučajnih brojeva upotrebljenih za generisanje bootstrap replikacija test statistike. Iz definicije $\hat{p}^*$ vidimo da je njena varijansa data sa $p^*(1-p^*)/B$. Prema tome, ako je $p^* = 0.05$, odgovarajuća standardna devijacija iznosi 0.0219 za $B = 99$, 0.0069 za $B = 999$ i 0.0022 za $B = 9.999$. Ukoliko računski troškovi ne predstavljaju preveliku brigu, navedene vrednosti upućuju na to da izvođenje zaključaka na bazi manje od 999 bootstrap simulacija može biti rizično, dok $B = 9.999$ predstavlja sasvim razuman izbor.

Kada procedura bootstrap testiranja jeste računski intenzivna, ali ne i ekstremno „skupa", pouzdane rezultate za malo *B* često obezbeđuje iterativni postupak koji su predložili Davidson i MacKinnon (2000). Ideja je da se počne sa malim brojem simuliranih uzoraka, utvrdi da li bi ishod testa skoro sigurno bio isti da je $B = \infty$ i, ako je odgovor „ne", za sledeću iteraciju odabere veće *B*. Ponavljanje se vrši ili dok se ne dobije nedvosmislen odgovor ili dok ne postane jasno da je $\hat{p}^*(\hat{\tau})$ veoma blizu α. U većini slučajeva, naročito kada je nulta hipoteza tačna, postupak se zaustavlja već za $B < 100$.

Za najkomplikovaniji scenario, tj. situaciju kada se suočavamo sa izuzetno visokim računskim troškovima, dva korisna rešenja predložili su Racine i MacKinnon (2007). Prvo je dato u vidu prilično jednostavnog metoda za izvođenje Monte Karlo testova bez uslova $\alpha(B+1) \in \boldsymbol{Z}$, ali problem može predstavljati njihova skromna moć. Nešto složeniji postupak podrazumeva određivanje p-vrednosti koje zavise od konkretnih brojeva $\hat{\tau}$ i τ_j^*, a ne samo od pozicije koju originalna realizacija zauzima u sortiranoj listi svih test statistika. Iako se u ovom slučaju ne dobijaju tačni testovi, moguće je značajno povećati moć za veoma malo *B* (nekada manje i od 20).

Većina test statistika u ekonometriji ipak nisu pivoti. Kao posledica, ni većina bootstrap testova nisu tačni. Određeni teorijski argumenti, međutim, ukazuju na to da će se bootstrap testovi često pokazati boljim od uobičajenih, asimptotskih. U tu svrhu, potrebno je da posmatrana test statistika bude **asimptotski pivot**, tj. da za $n \to \infty$ prati raspodelu koja ne zavisi ni od čega nepoznatog, iako ne moramo imati informaciju o kojoj asimptotskoj raspodeli je konkretno reč. Pomenuta asimptotska poboljšanja podrazumevaju da će **greška verovatnoće odbacivanja** (engleski: ERP – error in rejection probability) bootstrap testa biti manjeg reda po *n* u odnosu na asimptotski test zasnovan na istoj test statistici (u mnogim slučajevima, redukcija je $O(n^{-1/2})$ za jednostrane, odnosno $O(n^{-1})$ za dvostrane simetrične testove). Ukoliko τ nije ni asimptotski pivot, primena bootstrap postupka će rezultirati asimptotski validnim testom, ali prethodna konstatacija u vezi sa njegovom ERP više ne važi.

Dakle, čak i kada je *B* (hipotetički) beskonačno veliko, bootstrap test neće biti tačan ukoliko τ nije pivot, a uzrok tome jeste razlika između stvarne i bootstrap funkcije raspodele te statistike, $F(\tau)$ i $F^*(\tau)$. Ako je τ asimptotski pivot, problem se rešava puštanjem da $n \to \infty$, ali nam uslov $B \to \infty$ u tom smislu nije od koristi. Kada funkcija $F(\tau)$ nije previše „osetljiva“ na vrednosti nepoznatih parametara koji u njoj figurišu, bootstrap testovi bi trebalo da daju solidne rezultate. U slučaju većeg stepena zavisnosti ili slabijih ocena tih parametara (velika pristrasnost, neefikasnost), performanse bootstrap testova mogu biti veoma loše. Generalno, od (eventualno) većeg broja bootstrap DGP-a primenljivih u datoj situaciji uvek bi trebalo odabrati onaj za koji će $F^*(\tau)$ biti što je moguće bliže $F(\tau)$ u okolini kritične vrednosti c_α. To, međutim, nije nimalo jednostavno, jer je odluka o bootstrap DGP-u koji će obezbediti najpouzdaniji test najčešće bazirana ili na sofisticiranoj ekonometrijskoj teoriji ili na obimnim simulacijama.

6 Bootstrap u regresiji

Ekonomska teorija se uglavnom bavi odnosima između različitih promenljivih, poput ponude, tražnje, funkcije troškova, proizvodne funkcije i sl, a zadatak ekonometrije jeste testiranje ustanovljenih teorijskih tvrdnji u tim vezama i procenjivanje parametara koji u njima figurišu.

Odnos između dve promenljive X i Y definišemo kao skup svih mogućih vrednosti (x,y) koje zadovoljavaju zadatu jednačinu. Karakteristični oblik te jednačine obično daje i ime posmatranom odnosu (linearni, eksponencijalni,...).

Svi odnosi se mogu podeliti na determinističke i stohastičke. Odnos između X i Y je **deterministički** ako se svakom elementu domena (skupa svih mogućih vrednosti promenljive X) pridružuje samo jedan element kodomena (skupa svih mogućih vrednosti promenljive Y). Ukoliko, međutim, za svako x postoji čitava raspodela verovatnoće vrednosti y, kažemo da je odnos **stohastički**.

U ekonomskoj teoriji se, po pravilu, svi odnosi izražavaju u determinističkom obliku – ne zbog toga što ekonomisti veruju u potpuno odsustvo slučajnosti u ekonomskim odnosima, već zato što stohastička odstupanja smatraju manje važnim od sistematičnih uticaja. Uplitanje slučajnosti znatno komplikuje posao teoretičara, ali kada bi teorijske veze zaista bile determinističke sve bi se završavalo na prostim merenjima, čineći izlišnim statističke testove.

Sa druge strane, ekonometrija se bavi isključivo stohastičkim odnosima. Najjednostavniji oblik stohastičkog odnosa između promenljivih X i Y, što će i biti polazna tačka u našim ispitivanjima kroz ovo poglavlje, jeste **prost linearni regresioni model**,

$$Y_i = \mu + \delta X_i + \varepsilon_i,$$

gde se X i Y nazivaju **nezavisnom** i **zavisnom promenljivom**, respektivno, μ i δ su nepoznati **parametri regresije**, a ε je **slučajno odstupanje** ili **greška**. Indeks „i“ odnosi se na i-to opažanje; vrednosti promenljivih X i Y možemo registrovati, ali vrednosti grešaka ε ne. Potpuna specifikacija gornjeg modela, uz navedenu **jednačinu**, podrazumeva i odgovarajuće **pretpostavke** o njenim elementima.

6.1 Bootstrap testovi hipoteza o vrednostima regresionih parametara – dva osnovna pristupa

6.1.1 Uvod

Osnovnu ideju ćemo ilustrovati na narednom modelu proste linearne regresije:

$$Y_i = \mu + \delta X_i + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim \text{IID}: F_\varepsilon(0, \sigma^2), \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{6.1}$$

Podsetimo se, oznake X_i i Y_i se odnose na *i*-tu opaženu vrednost nezavisne i zavisne promenljive, redom, ε_i su greške – nezavisne, identično raspodeljene (IID) slučajne promenljive sa nepoznatom funkcijom raspodele F_ε, sredinom 0 i nepoznatom, konačnom varijansom σ^2, dok μ i δ predstavljaju parametre regresije čiju vrednost takođe ne znamo. Ukupan broj elemenata u našem uzorku iznosi *n*.[14]

Pretpostavimo da želimo da testiramo nultu hipotezu $H_0(\delta = \delta_0)$ protiv jednostrane alternativne $H_1(\delta < \delta_0)$, za neko zadato δ_0. U odeljcima koji slede biće objašnjena dva suštinski različita načina da se to uradi primenom bootstrap metoda.

6.1.2 Pristup sa implementacijom restrikcije

Poznato je da se za testiranje hipoteze o tome da je nagib regresione linije, δ, jednak nekoj vrednosti δ_0 upotrebljava test statistika oblika

$$\tau(\delta_0) = \frac{\hat{\delta} - \delta_0}{s_{\hat{\delta}}}, \tag{6.2}$$

gde je sa $\hat{\delta}$ označen ocenjivač nepoznatog parametra δ dobijen metodom najmanjih kvadrata,

$$\hat{\delta} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}, \quad \overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \overline{Y} = \sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

dok $s_{\hat{\delta}}^2$ predstavlja nepristrasnu ocenu varijanse od $\hat{\delta}$,

$$s_{\hat{\delta}}^2 = \frac{s^2}{S_{xx}}, \quad s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} e_i^2.$$

Pod pretpostavkom da su greške ε_i, $i = 1,2,\ldots,n$, normalno raspodeljene slučajne promenljive, tj. da posmatramo standardni normalni linearni model, i da je naša nulta hipoteza $H_0(\delta = \delta_0)$ tačna, gornja statistika će imati Studentovu *t*-raspodelu sa $n-2$ stepeni slobode, odnosno

[14] Konkretne realizacije obeležavamo malim slovima: x_i, y_i, e_i,…

$$\tau(\delta_0) \sim t_{n-2}.$$

Prvi od dva načina za generisanje bootstrap vrednosti zavisne promenljive u modelu *(6.1)* zasnovan je na sledećem DGP-u:

$$Y_i^{*r} = \hat{\mu}_r + \delta_0 X_i + \varepsilon_i^*, \; i = 1,2,...,n. \tag{6.3}$$

Notacija „$*^r$“ upućuje na to da bootstrap DGP *(6.3) implementira restrikciju* $\delta = \delta_0$ zadatu u H_0 (engleski: restricted). Ocenjivač $\hat{\mu}_r$ odsečka regresione linije, μ, takođe je određen pod pretpostavkom da model *(6.1)* zadovoljava nultu hipotezu:

$$\hat{\mu}_r = \overline{Y} - \delta_0 \overline{X},$$

dok se bootstrap greške ε_i^* dobijaju kao slučajna izvlačenja sa vraćanjem[15] iz skupa reziduala $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, koje možemo naći bilo iz modela sa restrikcijom,

$$e_i^r = y_i - \hat{\mu}_r - \delta_0 x_i, \tag{6.4}$$

bilo iz modela bez restrikcije,

$$e_i^u = y_i - \hat{\mu} - \hat{\delta} x_i \tag{6.5}$$

($\hat{\mu}$ – „običan“ ocenjivač parametra μ, tj. $\hat{\mu} = \overline{Y} - \hat{\delta}\overline{X}$). Više reči o načinu definisanja bootstrap grešaka, odnosno o izboru između *(6.4)* i *(6.5)*, biće u delu 6.2.1.

Bootstrap analog statistike *(6.2)* formiran na bazi dobijenog bootstrap uzorka $(x_1, y_1^{*r}), (x_2, y_2^{*r}), ..., (x_n, y_n^{*r})$ dat je sa

$$\tau_r^{*r} \equiv \tau^{*r}(\delta_0) = \frac{\hat{\delta}^* - \delta_0}{s_{\hat{\delta}^*}},$$

gde su $\hat{\delta}^*$ i $s_{\hat{\delta}^*}^2$ bootstrap verzije ocenjivača $\hat{\delta}$ i njegove varijanse, respektivno. Donji indeks „r“ označava da su i u toj statistici, baš kao u DGP-u *(6.3)*, upotrebljeni ocenjivači sa restrikcijom. Ako sa $\tau_{r,\alpha}^{*r}$ obeležimo kvantil reda α njene bootstrap raspodele, tj.

$$P_*\{\tau_r^{*r} \leq \tau_{r,\alpha}^{*r}\} = \alpha,$$

[15] Budući da u specifikaciji modela *(6.1)* nije zadat oblik funkcije raspodele F_ε, bootstrap greške moraju biti generisane neparametarski.

pri čemu je verovatnoća P_* definisana u odnosu na raspoložive podatke i DGP *(6.3)*, ovako formulisana bootstrap test procedura, nazovimo je T_1^*, odbaciće restrikciju $\delta = \delta_0$ protiv alternative oblika $\delta < \delta_0$ na nivou značajnosti α ako realizovana vrednost test statistike $\tau(\delta_0)$ za originalni uzorak nije veća od kvantila $\tau^{*r}_{r,\alpha}$. Beran (1986) je pokazao da, pod pretpostavkom o tačnosti H_0, verovatnoća odbacivanja testa T_1^* zasnovanog na kvantilima teorijske bootstrap raspodele (za $B = \infty$) konvergira ka nominalnom nivou, odnosno

$$P\{\tau(\delta_0) \le \tau^{*r}_{r,\alpha} \mid H_0\} \xrightarrow{B\to\infty} \alpha.$$

6.1.3 Pristup bez implementacije restrikcije

Beran (1987) definiše pojam roota na sledeći način. Neka je **X** prost slučajan uzorak obima *n* određen funkcijom raspodele F_θ, gde je θ nepoznati parametar, a $\psi = \psi(\theta)$ neka njegova funkcionela. Dati su i odgovarajući ocenjivači, $\hat{\theta}$ i $\hat{\psi} = \psi(\hat{\theta})$, respektivno. **Root** predstavlja funkciju

$$R = R(\mathbf{X}, \psi) = R(\mathbf{X}, \psi(\theta))$$

podataka iz **X** i parametra θ (posredno, preko $\psi(\theta)$). Ukoliko funkcija raspodele ovakvog roota,

$$H_\theta(r) = P_\theta\{R \le r\} = P_\theta\{R(\mathbf{X}, \psi(\theta)) \le r\}, \tag{6.6}$$

ne zavisi od θ, kaže se da je R striktni **pivot**. Ideja na kojoj je, zapravo, baziran pojam pivota jeste „premošćivanje“ dvostruke zavisnosti od θ u *(6.6)* – kroz P_θ i $\psi(\theta)$ – sa ciljem da se ona u potpunosti eliminiše. Naravno, to nije uvek izvodljivo.

Pivoti nalaze značajnu primenu u konstruisanju intervala poverenja. Pretpostavimo, dakle, da $H_\theta(r) = H(r)$ ne zavisi od θ. Neka je r_α takvo da važi

$$H(r_\alpha) = \alpha \Leftrightarrow r_\alpha = H^{-1}(\alpha).$$

Tada se

$$C(\mathbf{X}, \alpha) = \{\psi \mid R(\mathbf{X}, \psi) \le r_\alpha\} \tag{6.7}$$

može smatrati skupom poverenja za ψ na nivou α, što sledi iz činjenice da je

$$P_\theta\{\psi \in C(\mathbf{X}, \alpha)\} = P_\theta\{R(\mathbf{X}, \psi) \le r_\alpha\} = H(r_\alpha) = \alpha.$$

Ukoliko je $R(\mathbf{X},\psi)$ monotono po ψ, *(6.7)* će biti neki interval neograničen odgore ili odole, što odgovara donjoj ili gornjoj granici poverenja za ψ. Ako $R(\mathbf{X},\psi)$ najpre opada a zatim raste po ψ – obično se dobija ograničeni interval poverenja.

Prisećajući se razmatranja iz prethodnog odeljka, lako zaključujemo da je root za regresioni parametar δ dat sa

$$R(\delta) = \frac{\hat{\delta} - \delta}{s_{\hat{\delta}}} \tag{6.8}$$

asimptotski pivot, budući da za $n \to \infty$ prati t_{n-2} raspodelu. U ovom delu, definišemo drugi pristup generisanju bootstrap vrednosti zavisne promenljive u modelu *(6.1)*, i to putem narednog DGP-a:

$$Y_i^{*^u} = \hat{\mu} + \hat{\delta} X_i + \varepsilon_i^*, \; i = 1,2,\ldots,n. \tag{6.9}$$

Notacija „$*^u$" ovoga puta znači da bootstrap DGP *(6.9)* *ne implementira* restrikciju iz nulte hipoteze $H_0(\delta = \delta_0)$ (engleski: unrestricted). Ocenjivač $\hat{\mu}$ nepoznatog parametra μ takođe je određen na osnovu modela bez restrikcije *(6.1)*, dok za bootstrap greške važi potpuno isti komentar kao u slučaju DGP-a *(6.3)*.

Bootstrap analog roota *(6.8)* formiran na bazi dobijenog bootstrap uzorka $(x_1, y_1^{*^u})$, $(x_2, y_2^{*^u}),\ldots,(x_n, y_n^{*^u})$ dat je sa

$$R_u^{*^u} \equiv R^{*^u}(\hat{\delta}) = \frac{\hat{\delta}^* - \hat{\delta}}{s_{\hat{\delta}^*}}. \tag{6.10}$$

Primećujemo da je ulogu pivota od δ sada preuzeo njegov ocenjivač, $\hat{\delta}$. Donji indeks „*u*" označava da su i u *(6.10)*, baš kao u DGP-u *(6.9)*, upotrebljene ocene *bez restrikcije*. Ako sa $R_{u,\alpha}^{*^u}$ obeležimo kvantil reda α bootstrap raspodele od $R^{*^u}(\hat{\delta})$, tj.

$$P_*\{R_u^{*^u} \le R_{u,\alpha}^{*^u}\} = \alpha,$$

onda se interval oblika

$$(-\infty, \hat{\delta} - s_{\hat{\delta}} R_{u,\alpha}^{*^u}), \tag{6.11}$$

može smatrati jednostranim bootstrap intervalom poverenja za δ na nivou $1-\alpha$. On odgovara skupu vrednosti $\{\delta \mid R(\delta) > R_{u,\alpha}^{*^u}\}$. Postupak primenjen za njegovo konstruisanje naziva se **percentil-*t* bootstrapom**.

Naime, vratimo li se na opštiju priču sa samog početka ovog odeljka, gornju granicu percentil-*t* intervala poverenja na nivou $1-\alpha$ za funkcionelu $\psi=\psi(\theta)$ nepoznatog parametra θ definisaćemo kao

$$\hat{\psi}_{Pt}^{g}(\alpha)=\hat{\psi}-K_{\hat{\theta}}^{-1}(\alpha)\hat{\sigma}_{\hat{\psi}},$$

gde je sa $K_{\hat{\theta}}$ označena ocena funkcije raspodele K_{θ} pivota[16]

$$T=\frac{\hat{\psi}-\psi}{\hat{\sigma}_{\hat{\psi}}}.$$

Praktično, $K_{\hat{\theta}}^{-1}(\alpha)$ dobijamo simuliranjem raspodele statistike

$$T^{*}=\frac{\hat{\psi}^{*}-\hat{\psi}}{\hat{\sigma}^{*}_{\hat{\psi}}},$$

odnosno generisanjem bootstrap uzoraka $\mathbf{x}_{j}^{*},\ j=1,2,...,B,$ iz $F_{\hat{\theta}},$ računanjem odgovarajućih replikacija T_{j}^{*} i uzimanjem *l*-te po redu vrednosti, $l=\alpha B,$ u sortiranom nizu

$$T_{(1)}^{*}\le T_{(2)}^{*}\le ...\le T_{(B)}^{*}$$

za dobru aproksimaciju $K_{\hat{\theta}}^{-1}(\alpha).$ Ukoliko $l=\alpha B\notin \boldsymbol{Z},$ primenjuje se uobičajena interpolacija.

Skoncentrišimo se ponovo na slučaj testiranja $H_0(\delta=\delta_0)$ protiv $H_1(\delta<\delta_0).$ Vrednost δ_0 leži van intervala *(6.11)* ukoliko je zadovoljen uslov $R(\delta_0)\le R_{u,\alpha}^{*u}.$ Kako je root $R(\delta_0)$ jednak *t*-statistici $\tau(\delta_0),$ odgovarajuća bootstrap test procedura, obeležimo je sa $T_2^{*},$ odbaciće restrikciju $\delta=\delta_0$ na nivou značajnosti α ukoliko $\tau(\delta_0)$ nije veće od kvantila $R_{u,\alpha}^{*u}.$ Freedman (1981) je pokazao da, pod određenim uslovima regularnosti, test T_2^{*} takođe ima tačnu asimptotsku verovatnoću odbacivanja pod nultom hipotezom.

Da rezimiramo, dva pristupa opisana u odeljcima 6.1.2 i 6.1.3 bila su bazirana na konstruisanju bootstrap DGP-a i bootstrap test statistika koji implementiraju, odnosno ne implementiraju restrikciju iz H_0, respektivno. Logično je, stoga, pretpostaviti da bi unakrsno kombinovanje moglo dati još dve nove bootstrap test procedure. U prvom slučaju, DGP bez restrikcije *(6.9)* uparujemo sa *t*-statistikom $\tau^{*}(\delta_0),$ što, prema Hallu i Wilsonu (1991), nije najsrećnije rešenje zbog male moći testa. Druga implementacija podrazumeva DGP sa restrikcijom *(6.3)* u kombinaciji sa rootom $R^{*}(\hat{\delta}).$ Navedeni postupci se u literaturi često označavaju kao **hibridni**.

[16] *T* ne mora biti striktni pivot, ali želimo da K_θ što slabije zavisi od θ.

6.2 Četiri bootstrap test procedure za standardni, ne nužno normalni, linearni model višestruke regresije

6.2.1 Konstrukcija

U ovom delu, skoncentrisaćemo se na standardni, ne nužno normalni (gausovski), linearni model višestruke regresije zadat jednačinom

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{6.12}$$

gde je $\mathbf{y}_{n\times 1}$ vektor vrednosti zavisne promenljive, $\mathbf{X}_{n\times k}$ fiksna matrica regresora, $\boldsymbol{\beta}_{k\times 1}$ vektor nepoznatih parametara regresione funkcije i $\boldsymbol{\varepsilon}_{n\times 1}$ vektor grešaka, tj. slučajnih promenljivih za koje važi $\varepsilon_i \sim \mathrm{IID}: F_{\varepsilon}(0,\sigma^2),\ i = 1,2,...,n.$ Osim toga, pretpostavljamo da je broj koeficijenata β_l, obeležen sa k, fiksiran, da su jedini podaci koje možemo registrovati komponente od $\mathbf{y}$ i $\mathbf{X}$ i da je $\mathrm{rang}(\mathbf{X}) = k.$ Za asimptotsku analizu bitan je i uslov da $\mathbf{X}'\mathbf{X}/n \to \mathbf{Q}$ kada $n \to \infty,$ gde je $\mathbf{Q}$ matrica sa konačnim elementima i pozitivno definitna[17] je.

Podsetimo se, ocenjivač vektora parametara $\boldsymbol{\beta}$ dobijen metodom najmanjih kvadrata ima oblik

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}, \tag{6.13}$$

tako da su odgovarajući reziduali dati sa

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{y} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{y} = \mathbf{M}_{\mathbf{X}}\mathbf{y},$$

gde je $\mathbf{M}_{\mathbf{X}} = \mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ simetrična $(\mathbf{M}_{\mathbf{X}}' = \mathbf{M}_{\mathbf{X}})$, idempotentna $(\mathbf{M}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}_{\mathbf{X}} = \mathbf{M}_{\mathbf{X}})$ matrica za koju važi $\mathbf{M}_{\mathbf{X}}\mathbf{X} = \mathbf{0}.$ Otuda,

$$\mathbf{e} = \mathbf{M}_{\mathbf{X}}\mathbf{y} = \mathbf{M}_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{M}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Matrica varijansi i kovarijansi ocenjivača $\hat{\beta}_l,\ l = 1,2,...,k,$

$$Var(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}, \tag{6.14}$$

ocenjuje se sa

$$s^2_{\hat{\beta}} = s^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}, \tag{6.15}$$

[17] Po definiciji, realna simetrična matrica je pozitivno definitna ako su svi njeni glavni minori striktno pozitivni.

pri čemu je

$$s^2 = \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{n-k} \tag{6.16}$$

ocenjivač od σ^2.

Pretpostavimo da treba testirati skup od $m\,(\le k)$ nezavisnih linearnih ograničenja nad komponentama vektora $\boldsymbol{\beta}$. Tada nultu i alternativnu hipotezu, u najopštijem slučaju, možemo formulisati kao

$$H_0(\mathbf{R}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}_0),\ \ H_1(\mathbf{R}\boldsymbol{\beta} \ne \mathbf{r}_0),$$

gde su $\mathbf{R}$ i $\mathbf{r}_0$ poznati matrica i vektor, dimenzija $m \times k$ i $m \times 1$, redom. Neka je sa $\hat{\boldsymbol{\beta}}_r$ označen ocenjivač od $\boldsymbol{\beta}$ dobijen metodom najmanjih kvadrata, ali pod restrikcijom iz H_0. Važi

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_r = \hat{\boldsymbol{\beta}} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{r}_0 - \mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}),\ \ \mathbf{W} = \mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}',$$

budući da je $\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_r = \mathbf{r}_0$. Reziduali sa restrikcijom su dati sa

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_r.$$

Uobičajena *F*-statistika se može zapisati u obliku

$$\lambda(\hat{\boldsymbol{\beta}}_r) = \frac{1}{m}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_r)'\mathbf{R}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{R}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_r)\big/ s^2$$

i ona ima tačnu Fišerovu raspodelu u konačnim uzorcima pod nultom hipotezom.

Specijalno, u slučaju testiranja ograničenja za jedan koeficijent, tj. $\beta_l = \beta_0,\ l \in \{1,2, ..., k\}$, l-ta komponenta vektora $\hat{\boldsymbol{\beta}}_r$ biće jednaka β_0. Alternativna hipoteza može biti zadata kao jednostrana, $H_1(\beta_l < \beta_0)$ ili $H_2(\beta_l > \beta_0)$, kada upotrebljavamo uobičajenu *t*-statistiku

$$\tau(\beta_0) = \frac{\hat{\beta}_l - \beta_0}{s_{\hat{\beta}_l}}, \tag{6.17}$$

ili pak kao dvostrana, $H_3(\beta_l \ne \beta_0)$, za koju treba kvadrirati *(6.17)*, što se poklapa sa odgovarajućom *F*-statistikom.

Kao što je objašnjeno u delu 6.1, bootstrap zaključivanje će biti zasnovano na podacima koji se generišu putem jednog od narednih bootstrap DGP-a:

- DGP bez implementirane restrikcije („$*^u$“): $\mathbf{y}^{*^u} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\varepsilon}^*,$ *(6.18)*
- DGP sa implementiranom restrikcijom („$*^r$“): $\mathbf{y}^{*^r} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_r + \boldsymbol{\varepsilon}^*.$ *(6.19)*

Zaustavimo se na trenutak na priči o načinu definisanja bootstrap grešaka $\varepsilon_i^*, i = 1,2,...,n.$ Kako je već istaknuto, njihova originalna funkcija raspodele, F_ε, po pretpostavci nije poznata, što znači da se moramo osloniti na neku vrstu ocenjivača, označimo ga sa $\hat{F}_\varepsilon$. Da je zadata makar familija dopustivih raspodela kojoj pripada F_ε (parametarski slučaj), sve nepoznato što u njoj figuriše bismo prosto ocenili na bazi raspoloživih podataka. Međutim, pošto o F_ε nemamo baš nikakvih informacija (neparametarski slučaj), najjednostavnije rešenje jeste primena principa „izvlačenje sa vraćanjem“ nad skupom reziduala $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Pitanje koje se u vezi sa tim dalje postavlja jeste da li upotrebiti reziduale definisane izrazom *(6.4)* ili *(6.5)*. Ukoliko je nulta hipoteza istinita, sasvim je jasno da se ocenjivači sa restrikcijom pokazuju efikasnijim u odnosu na one bez nje, pa se čini da prednost treba dati vršenju resamplinga nad kolekcijom $e_i^r, i = 1,2,...,n.$ Ipak, da ovakav zaključak nije opšte pravilo dokazuju primeri u kojima je H_0 netačna – dok EDF skupa reziduala sa restrikcijom tada najčešće nije preterano dobar reprezent originalne raspodele grešaka ε_i, korišćenje vrednosti e_i^u obezbeđuje konvergenciju $\hat{F}_\varepsilon$ ka F_ε (u odgovarajućoj metrici) bez obzira na (ne)tačnost polazne hipoteze.

Bootstrap analog ocenjivača $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ datog sa *(6.13)* ima oblik

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^* = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}^*$$

i on je zajednički za oba gore navedena DGP-a. Slično *(6.14)*, *(6.15)* i *(6.16)*, odgovarajuća matrica varijansi i kovarijansi ocenjuje se sa

$$s^2_{\hat{\beta}^*} = s^{2*}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1},$$

gde je

$$s^{2*} = \frac{\mathbf{e}^{*}{}'\mathbf{e}^*}{n-k}, \quad \mathbf{e}^* = \mathbf{y}^* - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}^*.$$

U rezimeu na samom kraju dela 6.1, rečeno je da kombinovanje bootstrap DGP-a koji implementira ili ne implementira restrikciju iz nulte hipoteze sa bootstrap test statistikom konstruisanom pomoću ocenjivača sa ili bez restrikcije ima za rezultat četiri različite bootstrap test procedure. U terminima modela *(6.12)*, to izgleda ovako:

1) $\lambda_u^{*u} \equiv \lambda^{*u}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \dfrac{1}{m}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^* - \hat{\boldsymbol{\beta}})'\mathbf{R}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{R}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^* - \hat{\boldsymbol{\beta}})\big/s^{2*}$, vektor $\mathbf{y}^{*u}$ generisan sa *(6.18)*,

2) $\lambda_u^{*r} \equiv \lambda^{*r}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \dfrac{1}{m}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^* - \hat{\boldsymbol{\beta}})'\mathbf{R}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{R}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^* - \hat{\boldsymbol{\beta}})\big/s^{2*}$, vektor $\mathbf{y}^{*r}$ generisan sa *(6.19)*,

3) $\lambda_r^{*u} \equiv \lambda^{*u}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_r) = \dfrac{1}{m}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^* - \hat{\boldsymbol{\beta}}_r)'\mathbf{R}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{R}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^* - \hat{\boldsymbol{\beta}}_r)\big/s^{2*}$, vektor $\mathbf{y}^{*u}$ generisan sa *(6.18)*,

4) $\lambda_r^{*r} \equiv \lambda^{*r}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_r) = \dfrac{1}{m}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^* - \hat{\boldsymbol{\beta}}_r)'\mathbf{R}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{R}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^* - \hat{\boldsymbol{\beta}}_r)\big/s^{2*}$, vektor $\mathbf{y}^{*r}$ generisan sa *(6.19)*.

Dakle, gornji indeks u oznaci za bootstrap oblik *F*-statistike ponovo ukazuje na tip DGP-a upotrebljenog za određivanje bootstrap vrednosti zavisne promenljive, dok se donji odnosi na vrstu ocenjivača oko kojeg je centrirana test statistika. Slična notacija se koristi i za bootstrap verziju *t*-statistike $(\tau_u^{*u}, \tau_u^{*r}, \tau_r^{*u}, \tau_r^{*r})$.

Kvantile reda α bootstrap raspodela test statistika λ^* i τ^* obeležavaćemo sa λ_α^* i τ_α^*, respektivno, tj.

$$P_*\{\lambda^* \le \lambda_\alpha^*\} = \alpha, \quad P_*\{\tau^* \le \tau_\alpha^*\} = \alpha.$$

Radi jasnijeg naglašavanja o kojoj od četiri gore navedene procedure je reč, poslužićemo se identičnim načinom indeksiranja: $\lambda_{l,\alpha}^{*j}$ i $\tau_{l,\alpha}^{*j}$ označavaće, redom, α-kvantile bootstrap raspodela test statistika λ_l^{*j} i τ_l^{*j}, za $j,l \in \{u,r\}$.

6.2.2 Osobine

Može se pokazati da bootstrap test procedure opisane u prethodnom odeljku poseduju naredna svojstva.

1) U linearnom modelu sa fiksnim regresorima *(6.12)*, *F*-statistike $\lambda_u^{*u} \equiv \lambda^{*u}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ i $\lambda_r^{*r} \equiv \lambda^{*r}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_r)$ su ekvivalentne. Isto važi i za *t*-statistike $\tau_u^{*u} \equiv \tau^{*u}(\hat{\beta}_i)$ i $\tau_r^{*r} \equiv \tau^{*r}(\beta_0)$.

2) Pod pretpostavkom da je hipoteza $H_0(\mathbf{R}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}_0)$ tačna, testovi zasnovani na test statistikama $\lambda_u^{*u} \equiv \lambda^{*u}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ i $\lambda_r^{*r} \equiv \lambda^{*r}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_r)$ imaju asimptotsku verovatnoću odbacivanja jednaku nominalnom nivou značajnosti, α. Isto važi i za statistike $\tau_u^{*u} \equiv \tau^{*u}(\hat{\beta}_i)$ i $\tau_r^{*r} \equiv \tau^{*r}(\beta_0)$ kada se u modelu *(6.12)* testira jedno ograničenje oblika $H_0(\beta_i = \beta_0)$, za neko $i \in \{1,2,...,k\}$, protiv jednostrane alternative $H_1(\beta_i < \beta_0)$ ili $H_2(\beta_i > \beta_0)$.

3) Nezavisno od stvarne vrednosti parametra $\boldsymbol{\beta}$, testovi zasnovani na test statistikama $\lambda_r^{*u} \equiv \lambda^{*u}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_r)$ i $\lambda_u^{*r} \equiv \lambda^{*r}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ imaju asimptotsku verovatnoću odbacivanja 0 na nominalnom nivou značajnosti α, pod uslovom da je $\alpha < 0.5$. Isto važi i za testove bazirane na bootstrap raspodelama od $(\tau_r^{*u})^2 \equiv [\tau^{*u}(\beta_0)]^2$ i $(\tau_u^{*r})^2 \equiv [\tau^{*r}(\hat{\beta}_i)]^2$ kada se u modelu *(6.12)* ograničenje oblika $H_0(\beta_i = \beta_0)$ testira protiv dvostrane alternative $H_3(\beta_i \neq \beta_0)$.

4) Pri testiranju nulte hipoteze $H_0(\beta_i = \beta_0)$ protiv jednostrane alternative, tj. $H_1(\beta_i < \beta_0)$ ili $H_2(\beta_i > \beta_0)$, primena hibridnih procedura ponovo rezultira asimptotski netačnim veličinama[18] – jedna odbacuje H_0 ređe, a druga češće nego što se očekuje.

Nezavisno od stvarne vrednosti parametra β_i, test zasnovan na test statistici $\tau_r^{*u} \equiv \tau^{*u}(\beta_0)$ ima asimptotsku verovatnoću odbacivanja 0 na nominalnom nivou značajnosti $\alpha < 0.5$. Nepouzdanost ovog postupka može se objasniti na sledeći način. S obzirom na to da važi

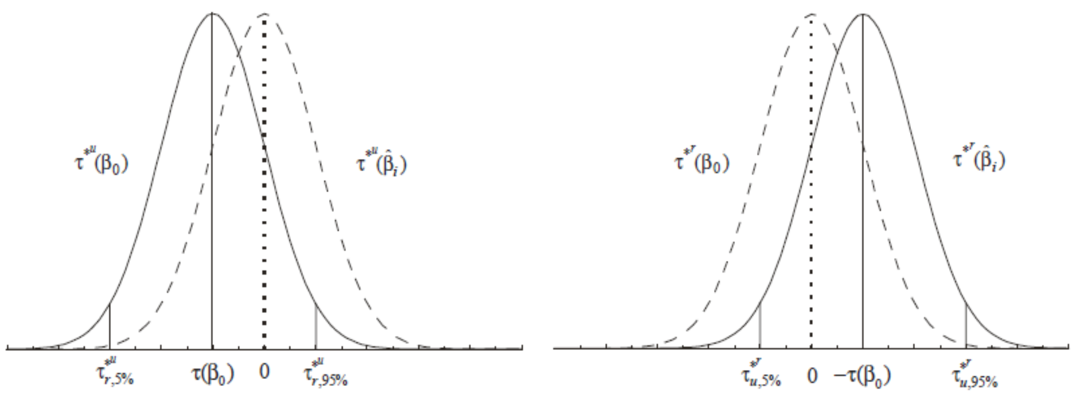
$$\tau^{*u}(\beta_0) = \frac{s}{s^*}\tau(\beta_0) + \tau^{*u}(\hat{\beta}_i),$$

zaključuje se da je $\tau^{*u}(\beta_0)$ pod H_0 približno raspodeljeno oko vrednosti $\tau(\beta_0)$, tj. da $E_*[\tau^{*u}(\beta_0)] \to \tau(\beta_0)$, jer $\tau^{*u}(\hat{\beta}_i) \,|\, (\mathbf{y}, \mathbf{X}) \xrightarrow{d} N(0,1)$ [19] i $s/s^* \xrightarrow{p} 1$. Raspodela verovatnoće test statistike $\tau^{*u}(\beta_0)$ zavisi, dakle, od registrovanog $\tau(\beta_0)$, koje se u bootstrap proceduri smatra fiksnim, što znači da za svaku realizaciju imamo drugačiju bootstrap raspodelu. Na *Slici 6.1 a)* prikazane su asimptotske raspodele *t*-statistika $\tau^{*u}(\beta_0)$ i $\tau^{*u}(\hat{\beta}_i)$ za konkretno $\tau(\beta_0)$. Vidimo da originalna test statistika uvek leži između bootstrap kvantila $\tau_{r,\alpha}^{*u}$ i $\tau_{r,1-\alpha}^{*u}$ za $\alpha < 0.5$. Prema tome, ukoliko se u ulozi test statistike upotrebljava $\tau(\beta_0)$ i kritične vrednosti su zasnovane na bootstrap raspodeli od $\tau^{*u}(\beta_0)$, nulta hipoteza nikada neće biti odbačena, bez obzira na stvarnu vrednost parametra β_i i testiranu, β_0. Ovo je argument zbog kojeg se posmatrana procedura karakteriše kao suštinski nepouzdana.

---

[18] Tehnički, veličina testa je supremum verovatnoća odbacivanja po svim DGP-ima koji su mogli generisati polazni uzorak (u kontekstu naše priče – supremum mogućih vrednosti nepoznatog parametra koje su saglasne sa ograničenjem u H_0).

[19] Konvergencija u raspodeli („d“) niza slučajnih promenljivih ka nekoj slučajnoj promenljivoj X definiše se konvergencijom niza njihovih funkcija raspodele ka funkciji raspodele F_X od X.



a) *b)*

Slika 6.1 – Grafičko poređenje bootstrap raspodela test statistika $\tau^{*u}(\beta_0)$ *(grafikon a), puna linija),* $\tau^{*u}(\hat{\beta}_i)$ *(grafikon a), isprekidana linija),* $\tau^{*r}(\hat{\beta}_i)$ *(grafikon b), puna linija) i* $\tau^{*r}(\beta_0)$ *(grafikon b), isprekidana linija)*

Iako bi se na osnovu svojstva 3) moglo pomisliti da je asimptotska verovatnoća odbacivanja testa baziranog na $\tau_u^{*r} \equiv \tau^{*r}(\hat{\beta}_i)$ takođe 0, to ipak nije slučaj – ona iznosi $\Phi(z_\alpha/2)$ (z_α – kvantil reda α standardne normalne raspodele), što je za $\alpha < 0.5$ veće od nominalnog nivoa značajnosti. Kako je $\Phi(z_{0.05}/2) = \Phi(-1.645/2) = 0.205,$ vidimo da se dve vrednosti mogu znatno razlikovati, pa je komentar o kvalitetu zaključka izvedenog primenom ove procedure sličan onome iz prethodne analize. Objašnjenje za češća odbacivanja je sledeće. Budući da je test statistiku $\tau^{*r}(\hat{\beta}_i)$ moguće predstaviti obliku

$$\tau^{*r}(\hat{\beta}_i) = -\frac{s}{s^*}\tau(\beta_0) + \tau^{*r}(\beta_0),$$

opažamo da je, za razliku od $\tau^{*u}(\beta_0)$, njena asimptotska bootstrap raspodela pod nultom hipotezom centrirana oko $-\tau(\beta_0)$, odnosno da važi $E_*[\tau^{*r}(\hat{\beta}_i)] \to -\tau(\beta_0)$. Otuda su i odgovarajući kvantili „pomereni" u odnosu na kvantile raspodele od $\tau^{*r}(\beta_0)$ približno za iznos $-\tau(\beta_0)$, tj. $\tau^{*r}_{u,\alpha} \to \tau^{*r}_{r,\alpha} - \tau(\beta_0)$, što je prikazano na *Slici 6.1 b)*. Hipoteza $H_0(\beta_i = \beta_0)$ biće odbačena protiv alternative $H_1(\beta_i < \beta_0)$ ukoliko je vrednost *t*-statistike $\tau(\beta_0)$ izrazito negativna. Međutim, u tom slučaju je $-\tau(\beta_0)$ pozitivno, tako da kritična vrednost $\tau^{*r}_{u,\alpha}$ premašuje $\tau^{*r}_{r,\alpha}$. Zato događaj $\tau(\beta_0) \le \tau^{*r}_{u,\alpha}$ ima veću verovatnoću realizacije u odnosu na $\tau(\beta_0) \le \tau^{*r}_{r,\alpha}$, pa je i asimptotska veličina posmatranog testa veća od njegovog nominalnog nivoa značajnosti.

6.3 Bootstrap test procedure u dinamičkim modelima na primeru stacionarnog gausovskog AR(1) procesa

Freedman (1984) je pokazao da se asimptotski rezultati formulisani kao svojstva 2) i 3) u odeljku 6.2.2 prenose i na slučajeve kada u modelu *(6.12)*, osim kolona matrice **X**, ulogu regresora imaju i „pomaknute“ (engleski: lagged) vrednosti zavisne promenljive. Preciznije, govorimo o autoregresivnom modelu reda 1 datom sa

$$\mathbf{y} = \varphi \mathbf{y}_{-1} + \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad |\varphi| < 1, \quad \varepsilon_t \sim \mathrm{IID}: F_\varepsilon, \quad t = 1, 2, ..., n,$$

gde je uvedena oznaka $\mathbf{y}_{-1} = [y_0, y_1, ..., y_{n-1}]'$. Veza između pristupa sa i bez implementacije ograničenja iz nulte hipoteze opisana svojstvom 1) ovde, međutim, više ne važi. Naime, u modelima sa pomaknutom zavisnom promenljivom bootstrap DGP-i moraju biti formulisani rekurzivno, što za jednu od posledica ima to da *t*-statistike $\tau^{*^u}(\hat{\beta}_i)$ i $\tau^{*^r}(\beta_0)$, odnosno *F*-statistike $\lambda^{*^u}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ i $\lambda^{*^r}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_r)$, u opštem slučaju, nisu ekvivalentne.

6.3.1 Konstrukcija

Posmatraćemo stacionarni gausovski AR(1) model

$$y_t = \mu + \varphi y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad |\varphi| < 1, \quad \varepsilon_t \sim \mathrm{IIN}(0, \sigma^2), \quad t = 1, 2, ..., n. \tag{6.20}$$

Startna vrednost y_0 bira se iz stacionarne raspodele, tj.

$$y_0 \sim N(\mu/(1-\varphi), \sigma^2/(1-\varphi^2)).$$

Ako uvedemo notaciju

$$\mathbf{X} \equiv \begin{bmatrix} 1 & y_0 \\ 1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & y_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} \equiv \begin{bmatrix} \mu \\ \varphi \end{bmatrix},$$

model *(6.20)* može biti predstavljen matrično kao

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Naglasimo još jednom da je, za razliku od prethodnih odeljaka, matrica **X** ovde stohastička.

Problem koji nas zanima jeste testiranje hipoteze oblika

$$H_0(\varphi = \varphi_0).$$

Odgovarajuća *t*-statistika data je sa

$$\tau(\varphi_0) = \frac{\hat{\varphi} - \varphi_0}{s_{\hat{\varphi}}}, \tag{6.21}$$

gde su $\hat{\varphi}$ i $s_{\hat{\varphi}}$ ocenjivači dobijeni metodom najmanjih kvadrata. Budući da je y_0 izvučeno iz stacionarne raspodele, raspodela test statistike $\tau(\varphi_0)$ ne zavisi od nepoznatih parametara μ i σ^2. Rekurzivni dinamički bootstrap DGP-i, analogni *(6.3)* i *(6.9)* definisanim u delovima 6.1.2 i 6.1.3, redom, izgledaju ovako:

- DGP sa implementiranom restrikcijom („$*^r$“): $y_t^{*r} = \hat{\mu}_r + \varphi_0 y_{t-1}^{*r} + \varepsilon_t^*$,
- DGP bez implementirane restrikcije („$*^u$“): $y_t^{*u} = \hat{\mu} + \hat{\varphi} y_{t-1}^{*u} + \varepsilon_t^*$.

Ovde se y_0^* bira tako da y_t^* bude stacionarno, dok su $\varepsilon_t^* \sim \mathrm{IIN}(0, \hat{\sigma}^2)$, $t = 1,2,\ldots,n.$ Kako su bootstrap raspodele od $\tau^{*^u}(\hat{\varphi})$ i $\tau^{*^r}(\varphi_0)$ invarijantne u odnosu na ocenjivač $\hat{\sigma}^2$, nije bitno da li je on zasnovan na rezidualima sa ili bez restrikcije.

6.3.2 Numerički rezultati

Postavka problema

U *Tabeli 6.1* su dati istorijski podaci o kretanju vrednosti neke veličine *Y* tokom $n = 100$ uzastopnih vremenskih perioda, odnosno skup $\{y_t,\ t = 1,2,\ldots,100\}$.[20]

Zadatak

a) Ispitati da li se podaci iz *Tabele 6.1* mogu fitovati modelom oblika *(6.20)*, odnosno da li niz $\{y_t,\ t = 1,2,\ldots,100\}$ može biti modeliran kao stacionarni gausovski AR(1) proces.

b) Ukoliko je u zadatku a) dobijen potvrdan odgovor, uporediti performanse dva osnovna bootstrap pristupa (sa i bez implementacije restrikcije) izvođenju zaključaka o vrednosti parametra φ tog procesa.

[20] Izvor: www.ubalt.edu/ntbarsh/Bussiness-stat/otherapplets/Autoreg

t	y_t	**t**	y_t	**t**	y_t	**t**	y_t	**t**	y_t
1	2.5170	21	2.5204	41	-1.1861	61	1.5216	81	1.9933
2	1.9354	22	2.1206	42	3.9071	62	2.3093	82	2.0498
3	2.0253	23	1.0029	43	1.5102	63	4.3321	83	2.3353
4	-0.7771	24	-1.1519	44	-0.1728	64	4.1392	84	1.6331
5	-1.7430	25	0.8660	45	1.1210	65	4.1584	85	1.4143
6	1.0436	26	0.5928	46	0.3247	66	2.6014	86	-0.1453
7	0.9857	27	1.6327	47	-0.6694	67	2.5381	87	0.6752
8	-1.0198	28	1.6951	48	-1.5616	68	1.3488	88	2.0024
9	-0.1928	29	0.9649	49	-0.8586	69	1.2546	89	4.4490
10	-0.4442	30	1.6227	50	1.0735	70	1.2865	90	3.1836
11	1.5296	31	2.6309	51	-0.7784	71	2.8525	91	4.6914
12	1.5078	32	2.3503	52	0.2583	72	2.8616	92	2.6540
13	2.0143	33	2.1783	53	0.8959	73	2.2155	93	0.3073
14	2.5326	34	0.4777	54	0.7524	74	1.3825	94	-0.0849
15	0.6281	35	2.8741	55	2.5626	75	1.1488	95	-0.0616
16	1.2445	36	3.9541	56	3.0079	76	-0.2762	96	1.6285
17	1.2561	37	-0.8315	57	6.4565	77	1.7090	97	-0.2706
18	2.4014	38	-2.5968	58	2.3339	78	3.3058	98	0.4678
19	4.6787	39	-0.0077	59	2.2028	79	1.0328	99	-0.5382
20	3.6461	40	-0.4406	60	3.0287	80	3.7183	100	-3.3892

Tabela 6.1 – Vrednosti veličine Y registrovane tokom 100 uzastopnih vremenskih perioda

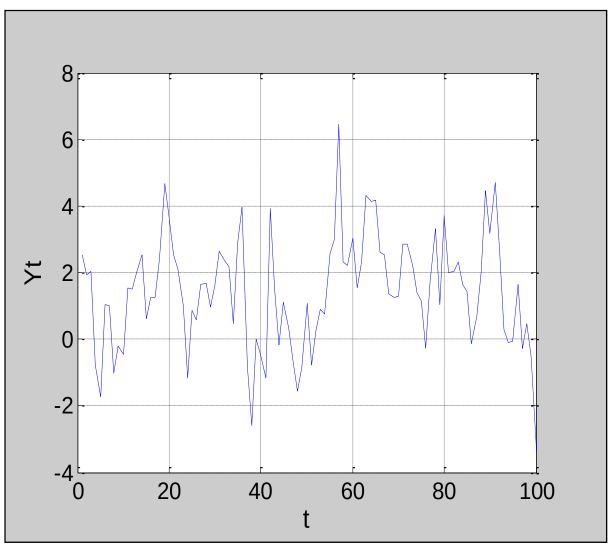
Izrada

a) Procenu adekvatnosti odabranog modela za posmatrani skup vrednosti često je moguće izvršiti prostom grafičkom analizom.

Stacionarnost vremenske serije

Pozivanje „Matlab“ komande „plot (1:100, y)“, gde prvi argument označava vreme t = 1,2,...,100, dok se kao drugi zadaje vektor sa elementima y_t, ima za rezultat *Grafikon 6.1*.

Jasno je da se radi o stacionarnoj vremenskoj seriji.

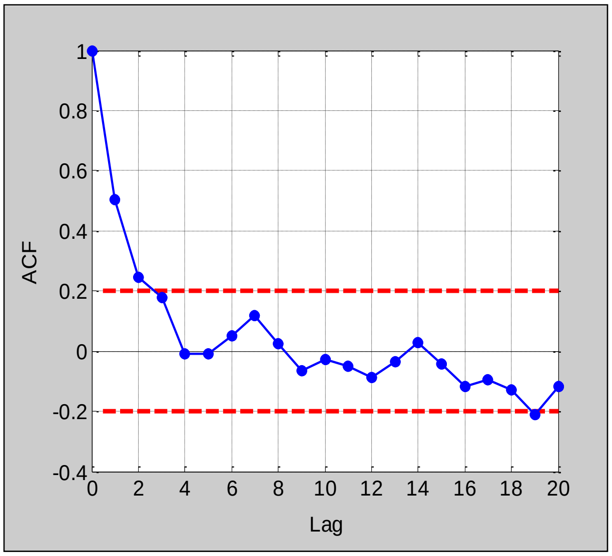


Grafikon 6.1 – Kretanje vrednosti

veličine Y

Adekvatnost tipa modela

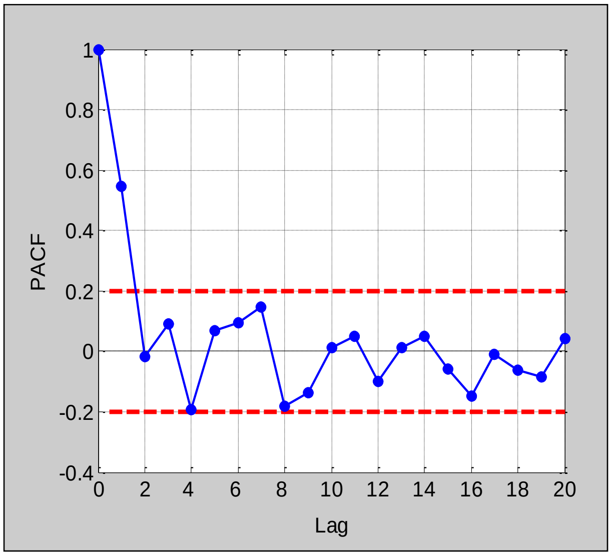
Pomoć pri izboru vrste i reda procesa kojim ćemo modelirati naše podatke nalazimo u autokorelacionoj i parcijalnoj autokorelacionoj funkciji raspoloživog uzorka.



Grafikon 6.2 – Uzoračka autokorelaciona funkcija podataka iz Tabele 6.1

k	ρ_k	k	ρ_k
1	0.5024	11	-0.0483
2	0.2447	12	-0.0873
3	0.1785	13	-0.0337
4	-0.0103	14	0.0282
5	-0.0095	15	-0.0438
6	0.0507	16	-0.1185
7	0.1181	17	-0.0947
8	0.0235	18	-0.1292
9	-0.0648	19	-0.2103
10	-0.0270	20	-0.1175

Tabela 6.2 – Vrednosti autokorelacionih koeficijenata za podatke iz Tabele 6.1



Grafikon 6.3 – Uzoračka parcijalna autokorelaciona funkcija podataka iz Tabele 6.1

k	φ_{kk}	k	φ_{kk}
1	0.5482	11	0.0511
2	-0.0173	12	-0.0981
3	0.0922	13	0.0118
4	-0.1925	14	0.0489
5	0.0702	15	-0.0575
6	0.0929	16	-0.1476
7	0.1486	17	-0.0104
8	-0.1811	18	-0.0631
9	-0.1377	19	-0.0844
10	0.0137	20	0.0417

Tabela 6.3 – Vrednosti parcijalnih autokorelacionih koeficijenata za podatke

iz Tabele 6.1

„Matlab“ komanda

„[ACF, Lags, Bounds] = autocorr(y,20)“

određuje uzoračku autokorelacionu funkciju unetog vektora vrednosti za specificirani broj pomaka, tj. računa autokorelacione koeficijente $\rho(k)$ za k = 1,2,...,20 (*Grafikon 6.2* i *Tabela 6.2*). Na sličan način možemo ispitati i parcijalnu autokorelaciju:

„[PACF, Lags, Bounds] = parcorr(y,20)“

(*Grafikon 6.3* i *Tabela 6.3*).

U opštem slučaju, argumenti koji upućuju na to da je model za kojim tragamo autoregresivni proces reda p jesu lagano odumiranje autokorelacionih koeficijenata, ρ_k, ka nuli i vrednosti parcijalnih autokorelacionih koeficijenata, φ_{kk}, koje su vrlo bliske nuli za $k > p$. Uporednom analizom *Grafikona 6.2* i *6.3*, odnosno rezultata prikazanih u *Tabelama 6.2* i 6.*3*, zaključujemo da našem skupu podataka odgovara model AR(1).

Ocene nepoznatih parametara

Vrednosti nepoznatih parametara μ i φ u modelu oblika *(6.20)* ocenićemo na osnovu uzorka datog u *Tabeli 6.1* uobičajenom primenom metoda najmanjih kvadrata. U tu svrhu, međutim, matrični zapis

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

moramo blago modifikovati:

$$\mathbf{y} \equiv \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{100} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} \equiv \begin{bmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & y_{99} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} \equiv \begin{bmatrix} \mu \\ \varphi \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_{100} \end{bmatrix}. \tag{6.22}$$

Naime, postupak ocenjivanja AR(p) modela podrazumeva izostavljanje prvih p elemenata raspoloživog uzorka; kako je n najčešće veliko, a p uglavnom malo, to ne predstavlja bitan problem. Dakle, upotreba standardne formule

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

daje sledeće rezultate:

$$\hat{\mu} = 0.6078, \;\; \hat{\varphi} = 0.5482.$$

Reziduali – gausovski beli šum?

Poslednje što treba ispitati kako bismo se uverili u to da je model *(6.20)* adekvatan izbor za fitovanje naših podataka jeste da li se reziduali

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \tag{6.23}$$

mogu okarakterisati kao neautokorelirane normalno raspodeljene slučajne promenljive sa očekivanjem 0 i konstantnom varijansom σ^2.

Neautokoreliranost. Testiranje hipoteze o odsustvu autokorelacije reziduala zasniva se na tzv. Ljung-Box Q-statistici

$$Q = n(n+2)\sum_{k=1}^{m}\frac{\rho_k^2}{n-k}, \tag{6.24}$$

gde je, kao i obično, sa ρ_k^2 obeležen kvadrat uzoračkog autokorelacionog koeficijenta u k-tom pomaku, m je broj pomaka uključenih u Q-statistiku, a n ukupan broj elemenata posmatranog uzorka. Pod pretpostavkom da fitovanje jeste ispravno, odnosno da je H_0 tačna, *(6.24)* ima asimptotsku hi-kvadrat raspodelu sa $m-p-q$ stepeni slobode, pri čemu p i q predstavljaju redove AR i MA komponente modela, respektivno.

Test ćemo izvršiti uz pomoć „Matlab“ naredbe „lbqtest“, čiji su argumenti, redom, vektor reziduala, **e**, vektor odabranih vrednosti za m, nivo značajnosti, α, i vektor koji kao komponente sadrži odgovarajuće brojeve stepeni slobode hi-kvadrat raspodele Q-statistike, $m-p-q$. Dakle, komanda

„[H, pValue, Qstat, CriticalValue] = lbqtest(e, [10,15,20,25], 0.05, [9,14,19,24])“

daje rezultate koji su prikazani u tabeli ispod:

m	*Vrednost Ljung-Box-ove Q-statistike*	*Broj stepeni slobode χ^2-raspodele*	*Kritična vrednost χ^2-raspodele*	*p-vrednost testa*	*Ishod testa*
10	9.6208	9	16.9190	0.3820	Ne odbacuje H_0
15	13.3698	14	23.6848	0.4976	Ne odbacuje H_0
20	19.9059	19	30.1435	0.4003	Ne odbacuje H_0
25	22.7718	24	36.4150	0.5333	Ne odbacuje H_0

Zaključak glasi: Ljung-Box-ov test na nivou značajnosti od 5% ne odbacuje nultu hipotezu o neautokoreliranosti reziduala, budući da ni u jednom od posmatranih pomaka (m = 10, 15, 20, 25) nije otkrivena statistički značajna autokorelacija.

Normalnost. Prate li reziduali *(6.23)* normalnu raspodelu (sa ma kojom sredinom μ i varijansom σ^2) utvrdićemo putem tzv. Jarque-Bera testa, baziranom na test statistici

$$JB = n\left[\frac{K_A^4}{6} + \frac{(K_E - 3)^2}{24}\right]$$

sa asimptotskom hi-kvadrat raspodelom. Naime, kako je poznato da vrednosti koeficijenta asimetrije i koeficijenta ekscesa za $N(\mu,\sigma^2)$ iznose, redom,

$$K_A = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{E[(X - E(X))^3]}{(E[(X - E(X))^2])^{3/2}} = 0,$$

$$K_E = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{E[(X - E(X))^4]}{(E[(X - E(X))^2])^2} = 3,$$

testiranje nulte hipoteze o tome da elementi vektora **e** jesu normalno raspodeljeni vrši se ispitivanjem da li postoji neuobičajeno velika razlika između očekivanih i uzoračkih pokazatelja oblika distribucije.

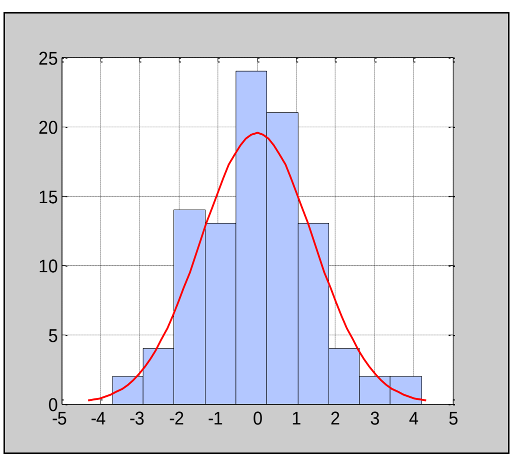
Pozivanjem „Matlab“ naredbe

„[H, pValue, JBstat, CriticalValue] = jbtest(reziduali, 0.05)“

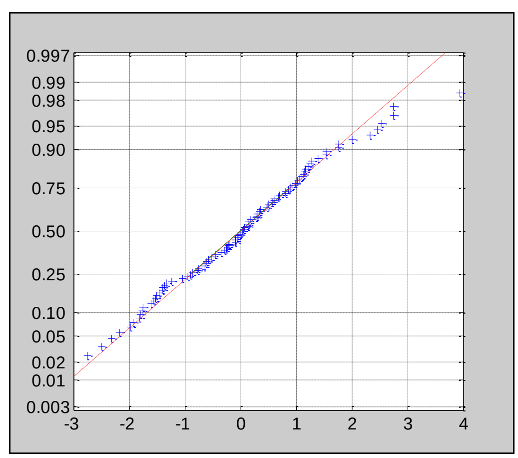
dobili smo:

Vrednost Jarque-Bera test statistike	*Kritična vrednost χ^2-raspodele*	*p-vrednost testa*	*Ishod testa*
1.4960	5.9915	0.4733	Ne odbacuje H_0

Znači, pretpostavku o normalnosti naših reziduala ne odbacujemo na nivou značajnosti od 5%. Do istog zaključka lako se dolazi i grafičkim putem (*Slika 6.2*):



a)



b)

Slika 6.2 – a) Histogram fitovan normalnom raspodelom („histfit(reziduali)“) i b) grafičko testiranje normalnosti skupa reziduala („normplot(reziduali)“)

Sredina jednaka nuli. Standardni test za testiranje hipoteze o tome da je sredina nekog obeležja $X:N(\mu,\sigma^2)$ jednaka μ_0, tj. $H_0(\mu=\mu_0)$, protiv dvostrane alternative $H_1(\mu\neq\mu_0)$, pod uslovom da varijansa σ^2 nije poznata, je Studentov t-test zasnovan na statistici

$$T=\frac{\overline{X}_n-\mu_0}{\overline{S}_n}\sqrt{n-1}\sim t_{n-1},$$

gde su $\overline{X}_n$ i $\overline{S}_n$ aritmetička sredina i standardna devijacija prostog slučajnog uzorka obima n. Za nivo značajnosti α, odgovarajuća kritična oblast ima oblik

$$(-\infty,-c]\cup[c,\infty),$$

gde je sa c obeležen kvantil reda $1-\alpha/2$ raspodele t_{n-1}.

Rezultati dobijeni za naš vektor reziduala, **e**, su sledeći:

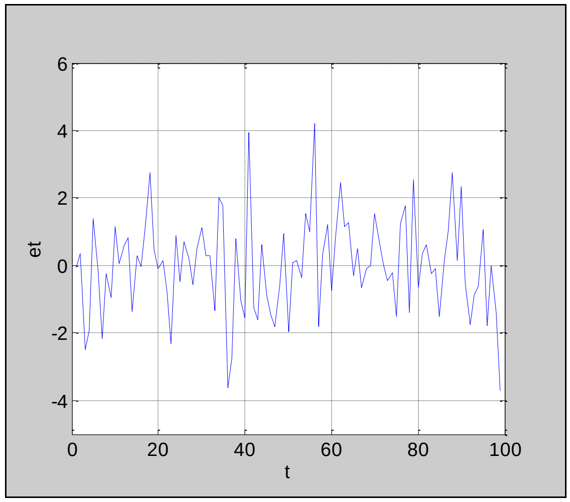
- aritmetička sredina uzorka („mean(reziduali)“): $-3.0303\cdot10^{-6}$
- standardna devijacija uzorka („std(reziduali,1)“): 1.4319
- registrovana vrednost test statistike:

$$t_{reg}=\frac{-3.0303\cdot10^{-6}-0}{1.4319}\sqrt{98}=-2.0950\cdot10^{-5}$$

- kvantil reda $1-\alpha/2=0.975$ Studentove raspodele sa 98 stepeni slobode: 1.9845

Prema tome, t_{reg} nije upalo u kritičnu oblast $(-\infty,-1.9845]\cup[1.9845,\infty)$, što znači da na nivou značajnosti od 5% ne odbacujemo pretpostavku da je sredina normalne raspodele koju prate reziduali 0.

Konstantnost varijanse. Da σ^2 jeste konstantno, možemo se uveriti posmatrajući grafički prikaz elemenata vektora **e** (*Grafikon (6.4)*).



Grafikon 6.4 – Vrednosti reziduala

b) U zadatku a) smo, dakle, utvrdili da se podaci iz *Tabele 6.1* mogu modelirati kao

$$y_t = 0.6078 + 0.5482 y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathrm{IIN}(0, 2.0504), \quad t = 1,2,...,100.$$

U nastavku ćemo napraviti poređenje između dva bootstrap pristupa izvođenju zaključaka o vrednosti parametra φ ovog modela, objašnjena u odeljcima 6.1.2 i 6.1.3, i to kroz konstrukciju 95% – nog intervala poverenja i testiranje hipoteze na nivou značajnosti od 5%.

Razmatranje iz dela 6.1.3 implicira da asimptotski 95% – ni dvostrani percentil-t interval poverenja za φ, konstruisan na bazi pretpostavke da za $n \to \infty$ važi

$$\frac{\hat{\varphi} - \varphi}{s_{\hat{\varphi}}} \sim t_{n-2},$$

ima oblik

$$(\hat{\varphi} - s_{\hat{\varphi}} t_{n-2,0.975}, \hat{\varphi} - s_{\hat{\varphi}} t_{n-2,0.025}).$$

Primetimo sledeće: budući da smo ocene parametara odredili za „modifikovani“ model *(6.22)*, tj. izostavljajući jedan element polaznog uzorka obima 100 (*Tabela 6.1*), u daljim analizama moramo uzimati da je n = 99, što znači da će i u gornjem intervalu biti upotrebljeni odgovarajući kvantili Studentove raspodele sa 97, a ne 98 stepeni slobode! Prema tome, kako je

$$\hat{\varphi} = 0.5482\,,\; s_{\hat{\varphi}}^2 = s^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{97}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = 0.0081\,,\; t_{97,0.975} = 1.9847,\; t_{97,0.025} = -1.9847,$$

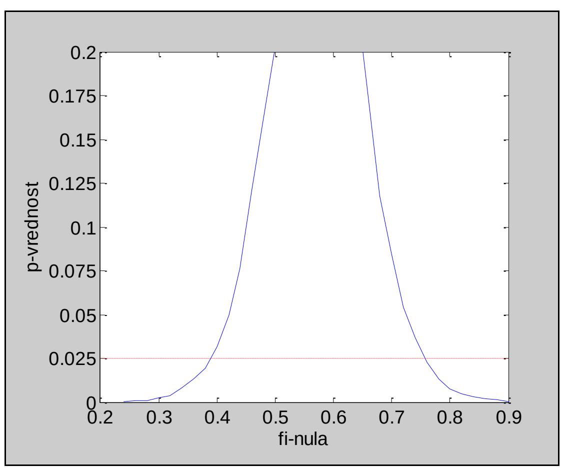
dobijamo traženi asimptotski interval poverenja

$$(0.3696\,, 0.7268).$$

Isti posao primenom bootstrap procedure koja ne implementira nikakve restrikcije ni u DGP za generisanje bootstrap uzoraka ni u posmatranu statistiku izvršen je uz pomoć detaljno objašnjenog „Matlab“ programa „IntPovBezRestrikcije“ (dodatak D11). Situacija sa drugim bootstrap pristupom nije tako jednostavna. Naime, pošto se interval poverenja formira invertovanjem statistike u kojoj figuriše izvesno φ_0 (definisano restrikcijom), njegove granice ćemo naći testiranjem čitavog opsega vrednosti za φ. Dakle, ovaj postupak je računski intenzivniji, što se i vidi iz „Matlab“ algoritma „IntPovSaRestrikcijom“ (dodatak D12). Posebno je interesantan završni deo, gde se na bazi izračunatih bootstrap replikacija i vrednosti statistike registrovane u originalnom uzorku određuju p-vrednosti za testove nulte hipoteze $H_0(\varphi=\varphi_0)$ protiv alternativa $H_1(\varphi<\varphi_0)$ i $H_2(\varphi>\varphi_0)$. Tada, gornja granica željenog bootstrap intervala poverenja predstavlja ono φ_0 za koje p-vrednost testa protiv donje alternative, H_1, iznosi 2.5%, dok je donja jednaka onom φ_0 kojem odgovara p-vrednost od 2.5% u testu protiv gornje alternative, H_2. Ponavljajući simulacije za razne vrednosti φ_0 iz opsega $(0.24, 0.90)$ nacrtali smo *Grafikon 6.5*; granice nalazimo u preseku krivih (plavo) sa horizontalnom linijom (crveno) koja označava nominalni nivo od 2.5% za svaku pojedinačno. Broj bootstrap uzoraka generisanih u oba postupka bio je $B=4.999$, a konačni rezultati su prikazani u *Tabeli 6.4*. (Napomena: U programima „IntPovBezRestrikcije“ i „IntPovSaRestrikcijom“ smo, radi pogodnosti, koristili nešto drugačiji oblik ocene varijanse ocenjivača $\hat{\varphi}$:

$$s_{\hat{\varphi}}^2 = s^2(\boldsymbol{X}_2'\mathbf{M}_1\boldsymbol{X}_2)^{-1},\quad s^2 = \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{n-2},\quad \mathbf{M}_1 = \mathbf{I} - \boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1',$$

gde su sa $\boldsymbol{X}_1$ i $\boldsymbol{X}_2$ obeležene 1. i 2. kolona matrice $\mathbf{X}$.)



Grafikon 6.5 – Grafičko određivanje granica 95% – nog bootstrap intervala poverenja za parametar φ zasnovanog na pristupu sa implementiranjem restrikcije

Tip intervala poverenja	Granice		Mera asimetričnosti
	donja	gornja	
Asimptotski (t_{n-2})	0.3696	0.7268	1.0000
Bootstrap bez restrikcije (τ_u^{*u})	0.3988	0.7484	1.3400
Bootstrap sa restrikcijom (τ_r^{*r})	0.3908	0.7512	1.2897

Tabela 6.4 – Različiti 95% – ni intervali poverenja za parametar φ

Kolona „Mera asimetričnosti" sadrži vrednosti izračunate kao

$$\frac{gornja \;\; granica - \hat{\varphi}}{\hat{\varphi} - donja \;\; granica}.$$

Vidimo da su oba bootstrap intervala poverenja, za razliku od onog baziranog na asimptotskoj aproksimaciji, asimetrična, ali je veća preciznost postignuta u slučaju pristupa sa implementacijom restrikcije.

U nastavku primera, generisali smo $N = 1.000$ novih „originalnih" uzoraka (koji će imati istu ulogu kao podaci iz *Tabele 6.1*) po modelu

$$y_t = 0.61 + 0.55 y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathrm{IIN}(0, 2.05), \quad t = 1,2,...,100, \qquad (6.25)$$

čiji su parametri inspirisani vrednostima ocenjenim u zadatku a) (polazni model), a startni elementi ponovo izabrani iz stacionarne raspodele.

Za svaki od tih uzoraka, testirali smo hipotezu $H_0(\varphi = 0.55)$ protiv jednostranih alternativa $H_1(\varphi < 0.55)$ i $H_2(\varphi > 0.55)$ na nivou značajnosti od 5%. Asimptotski test je zasnovan na poređenju registrovane test statistike

$$\tau(\varphi_0) = \frac{\hat{\varphi} - \varphi_0}{s_{\hat{\varphi}}}$$

sa odgovarajućim kvantilima njene Studentove raspodele za $n \to \infty$. Tako, kritična oblast za donju alternativu, H_1, ima oblik

$$\hat{\tau} < t_{n-2,\alpha} = t_{97,0.05} = -1.6607,$$

dok je za gornju alternativu, H_2, data sa

$$\hat{\tau} > t_{n-2,1-\alpha} = t_{97,0.95} = 1.6607.$$

Pomenuti test, zajedno sa generisanjem potrebnih 1.000 uzoraka (koje smo sačuvali kao kolone matrice „yOrig"), izvršili smo upotrebom „Matlab" algoritma „TestHip-Asimptotski" (dodatak D13) i usput beležili koliko puta je u tih 1.000 pokušaja nulta hipoteza odbačena protiv svake od alternativa na nivou značajnosti od 5%. Rezultati su prikazani u *Tabeli 6.5*.

Isto smo ponovili i angažovanjem bootstrap procedura koje implementiraju, odnosno ne implementiraju ograničenje iz H_0 (programi „TestHipBezRestrikcije“ (dodatak D14) i „TestHipSaRestrikcijom“ (dodatak D15), respektivno), pri čemu su ulazni argumenti bili matrica „yOrig“, $B = 999$ i $\alpha = 0.05$. Slede zaključci.

Budući da posmatrana nulta hipoteza zadovoljava DGP koji je zaista generisao podatke iz matrice „yOrig“, dat sa *(6.25)*, frekvencije odbacivanja jasno reflektuju stvarnu veličinu testa. Rezultati bazirani na asimptotskoj aproksimaciji su korektni, iako je odstupanje od nominalnog nivoa značajno. U odnosu na njih, oba tipa bootstrap testa za ishod su imala poboljšanje. Kada je reč o pristupu sa implementiranjem restrikcije, stepen saglasnosti sa postupkom tačnog zaključivanja je visok, jer se vrednosti ne razlikuju previše od 0.05. Kao i u delu zadatka sa konstruisanjem intervala poverenja, pristup bez restrikcije je pokazao za nijansu slabije ponašanje – primetimo, pre svega, da je učestalost odbacivanja u slučaju gornje alternative bitno veća, dok je kod asimptotskog testa bila bitno manja u poređenju sa nominalnim α. Očigledno, primena bootstrap DGP-a i bootstrap test statistike za čije je formiranje, osim raspoloživog uzorka, iskorišćena još jedna dodatna informacija – konkretno φ_0 – i ovoga puta je doprinela unapređenju performansi bootstrap metoda.

Tip testa	***Alternativna hipoteza***	
	φ < 0.55	***φ > 0.55***
Asimptotski (t_{n-k})	7.40	2.60
Bootstrap bez restrikcije (τ_u^{*u})	5.80	5.90
Bootstrap sa restrikcijom (τ_r^{*r})	5.10	4.70

Tabela 6.5 – Frekvencije odbacivanja nulte hipoteze $H_0(\varphi = 0.55)$ protiv jednostranih alternativa pri testiranju baziranom na asimptotskoj aproksimaciji i na dva bootstrap postupka

Zaključak

S obzirom na to da su sva ključna pitanja kojima smo se bavili na prethodnim stranicama potkrepljena pažljivo analiziranim numeričkim rezultatima, a u isto vreme znajući kako je time obuhvaćen samo delić sve šireg i šireg spektra mogućnosti za upotrebu bootstrap metoda u ekonometrijskim ispitivanjima, čini se da bi, umesto klasičnog rezimiranja poglavlja koja (bar po mišljenju autorke ovog rada) predstavljaju solidnu osnovu za izučavanje većine „naprednijih" primena, na ovom mestu bilo korisnije uputiti čitaoca na neke od interesantnih, a iz razloga prostorne ograničenosti izostavljenih pravaca daljeg istraživanja date teme.

Jedan od njih, kojeg smo se dotakli u delu o redukciji pristrasnosti, jesu iterativne bootstrap procedure. Kako je odmah naglašeno, eventualna poboljšanja u odnosu na zaključke dobijene prostim bootstrapom po pravilu prati ozbiljan porast računskih troškova. Razuman nivo tačnosti bootstrap rezultata može se očekivati samo pri dovoljno velikom broju generisanih replikacija – prema mnogim autorima, za $B > 1.000$ – pa se zato u literaturi priča najčešće zaustavlja na duplom bootstrapu. Naime, ako su B_1 i B_2 veličine primarne i sekundarne kolekcije, već u tom slučaju se radi o skoku sa minimalnih $B_1 = 1.000$ na $B_1 \cdot B_2 = 1.000.000$ bootstrap uzoraka, odnosno $B_1 + B_1 \cdot B_2 = 1.001.000$ odgovarajućih ocena.

Jedan metod za konstrukciju intervala poverenja duplim bootstrapom predložio je Beran (1987), a zasnovan je na ideji prepivotiranja: nakon što se u prvom koraku funkcija raspodele H_θ roota $R(\mathbf{X},\theta)$ za posmatrani nepoznati parametar θ (kao uopštenje pojma pivota o kojem je bilo reči u odeljku 6.1.3) aproksimira EDF-om skupa bootstrap replikacija tog roota, tako ocenjeno $H_{\hat{\theta}}$ koristi se za formiranje novog roota, $H_{\hat{\theta}}(R(\mathbf{X},\theta))$, nad kojim se potom izvodi identičan postupak. Modifikacijom osnovnog metoda dobijen je tzv. automatski dupli bootstrap (Scholz, 1992), koji je skoncentrisan na problem izbora odgovarajućeg roota – kako sam naziv kaže, on automatski pronalazi prirodni pivot ukoliko isti postoji, što rezultira intervalom poverenja sa tačnom verovatnoćom pokrivanja.

Na istom principu funkcionišu i dupli bootstrap testovi hipoteza. Dve procedure koje je predstavio Beran (1987, 1988) razlikuju se po tome imamo li ili nemamo test statistiku koja je asimptotski pivot – ako ne, ona se konstruiše na bazi kolekcija bootstrap uzoraka u oba koraka, ako da – tzv. dupla bootstrap p-vrednost određuje se putem upoređivanja primarne, izračunate iz prve kolekcije, i sekundarnih bootstrap p-vrednosti, koje se računaju za svaku od sekundarnih kolekcija. Brzi dupli bootstrap (Davidson i MacKinnon, 2007) je znatno „jevtiniji“ metod testiranja, budući da iz svakog od B_1 primarnih bootstrap uzoraka treba generisati samo po jedan (a ne po B_2) bootstrap uzorak u okviru sekundarne kolekcije.

Kako smo se pri ispitivanju mogućnosti primene bootstrapa u izvođenju zaključaka o vrednostima regresionih parametara, radi jednostavnije analize, mahom ograničavali na modele sa prilično strogim pretpostavkama (najčešće u vezi sa raspodelom verovatnoće grešaka), potrebno je istaći da je razvijen niz bootstrap procedura specijalizovanih za situacije kada neke od tih hipoteza nisu zadovoljene.

Problem heteroskedastičnosti, tj. slučaj kada greške u našem modelu jesu nezavisne, identično raspodeljene slučajne promenljive sa sredinom 0, ali se njihova varijansa razlikuje od opažanja do opažanja, može se rešiti primenom „divljeg“ (engleski: wild) bootstrapa (Wu, 1986) ili bootstrapa parova (Freedman, 1981). Prvi metod bootstrap uzorak vrednosti zavisne promenljive generiše DGP-om

$$y_i^* = \boldsymbol{X}_i\hat{\boldsymbol{\beta}} + f(e_i)v_i^*,\ i = 1,2,...,n,$$

gde je $\boldsymbol{X}_i$ vrsta matrice $\mathbf{X}$ u kojoj se nalaze i-ta opažanja svake od nezavisnih promenljivih, $f(e_i)$ neka transformacija reziduala e_i, dok je v_i^* slučajna promenljiva sa sredinom 0 i varijansom 1; uobičajeni izbori su

$$f(e_i) = \frac{e_i}{1-(\mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'})_{ii}},\quad v_i^*: \begin{pmatrix} -(\sqrt{5}-1)/2 & (\sqrt{5}+1)/2 \\ (\sqrt{5}+1)/(2\sqrt{5}) & (\sqrt{5}-1)/(2\sqrt{5}) \end{pmatrix}.$$

Bootstrap parova, kako samo ime nagoveštava, zasnovan je na ideji o tome da se bootstrap uzorci (y_i^*, $\boldsymbol{X}_i^*$) generišu ne resamplingom reziduala, već putem izvlačenja sa vraćanjem iz skupa parova opažanja (y_i , $\boldsymbol{X}_i$).

Za konstrukciju bootstrap DGP-a u situacijama kada podaci (greške ili opažanja) nisu nezavisni, dva najpopularnija postupka su „sitasti“ (engleski: sieve) bootstrap (Bühlmann, 1997) i blok-bootstrap (Künsch, 1989). „Sitasti“ bootstrap pretpostavlja da greške prate neki nepoznat stacionarni proces sa homoskedastičnim inovacijama i pokušava da ga aproksimira, u opštem slučaju, AR(p) modelom specijalno izabranog reda p. Blok-bootstrap je još jedan postupak baziran na resamplingu – posmatrane veličine (reziduali ili parovi opažanja) dele se na blokove uzastopnih elemenata (iste ili različitih dužina, preklapajuće ili nepreklapajuće), koji se potom izvlače sa vraćanjem.

Na kraju, treba konstatovati da je jasno zbog čega je u radu naglasak stavljen na upotrebu bootstrap metoda u okviru druge etape ekonometrijskog ispitivanja: podsetimo se (odeljak 1.3), faza zaključivanja je ona koja najintenzivnije angažuje procedure statističke analize. To, naravno, ne znači da bootstrap ne nalazi primenu i u postupku selekcije odgovarajućeg oblika modela i u problemima predviđanja.

Dodatak – korišćeni „Matlab“ algoritmi

D1) Program „ParBootNorm“

```
function ParBootNorm(n,B,mi,sigma)
%generisemo polazni uzorak (x) zadatog obima (n) iz normalne raspodele sa
%specificiranom sredinom (mi) i standardnom devijacijom (sigma)
x=normrnd(mi,sigma,n,1);
%racunamo sredinu, varijansu i standardnu devijaciju od x
xsred=mean(x);
xvar=var(x,1);
xstdev=std(x,1);
%generisemo B bootstrap uzoraka parametarskim postupkom, tj. iz normalne raspodele
%sa parametrima xsred i xstdev, i smestamo ih u kolone matrice PBU
for j=1:B
    PBU(:,j)=normrnd(xsred,xstdev,n,1);
end
%racunamo vrednosti ocenjivaca teta kapa za svaki od bootstrap uzoraka
PBUsredine=mean(PBU);
%odredjujemo bootstrap ocene sredine i varijanse ocenjivaca teta kapa
pbos=mean(PBUsredine);
pbov=var(PBUsredine);
%crtamo histogram bootstrap replikacija i fitujemo ih normalnom raspodelom
histfit(PBUsredine);
%na drugom grafikonu proveravamo normalnost kolekcije bootstrap replikacija
figure
normplot(PBUsredine);
```

D2) Program „NeparBootNorm“

```
function NeparBootNorm(x,B)
%(za polazni uzorak uzimamo vektor x iz odgovarajuce simulacije pomocu programa
%ParBootNorm (za istu vrednost n)); narednom funkcijom primenjujemo neparametarski
%bootstrap na uzorak x: u B kolona matrice NPBUind upisuju se indeksi elemenata iz x
%koji su izabrani u dati bootstrap uzorak (izvlacenje sa vracanjem), dok su u vektor
%NPBUsredine smestene vrednosti ocenjivaca teta kapa za svaki od njih
[NPBUsredine,NPBUind]=bootstrp(B,@mean,x);
%"prevodimo" indekse u konkretne bootstrap uzorke, koje zapisujemo u kolone matrice
%NPBU
for j=1:B
    for i=1:length(x)
        for k=1:length(x)
            if k==NPBUind(i,j)
```

```
                NPBU(i,j)=x(k);
            end
        end
    end
end
%odredjujemo bootstrap ocene sredine i varijanse ocenjivaca teta kapa
npbos=mean(NPBUsredine);
npbov=var(NPBUsredine);
%crtamo histogram bootstrap replikacija i fitujemo ih normalnom raspodelom
histfit(NPBUsredine);
%proveravamo normalnost kolekcije bootstrap replikacija (drugi grafikon)
figure
normplot(NPBUsredine);
```

D3) Program „ParBootExp“

```
function ParBootExp(n,B,lambda)
%generisemo polazni uzorak (x) zadatog obima (n) iz eksponencijalne raspodele sa
%specificiranom vrednoscu parametra (lambda)
for i=1:n
    x(i)=exprnd(1/lambda);
end
%ocenjujemo parametar lambda na osnovu originalnog uzorka, tj. racunamo vrednost
%njegovog ocenjivaca, teta kapa, za x
xlambda=1/mean(x);
%generisemo B bootstrap uzoraka parametarskim postupkom, tj. iz eksponencijalne
%raspodele sa parametrom xlambda, i smestamo ih u kolone matrice PBU
for j=1:B
    for i=1:n
        PBU(i,j)=exprnd(1/xlambda);
    end
end
%racunamo vrednosti ocenjivaca teta kapa za svaki od bootstrap uzoraka
PBUlambde=ones(1,B)./mean(PBU);
%odredjujemo bootstrap ocene sredine i varijanse ocenjivaca teta kapa
pbos=mean(PBUlambde);
pbov=var(PBUlambde);
%crtamo histogram bootstrap replikacija
hist(PBUlambde);
```

D4) Program „NeparBootExp“

```
function NeparBootExp(x,B)
%(za polazni uzorak uzimamo vektor x iz odgovarajuce simulacije pomocu programa
%ParBootExp (za istu vrednost n)); narednom funkcijom primenjujemo neparametarski
%bootstrap na uzorak x: u B kolona matrice NPBUind upisuju se indeksi elemenata iz x
%koji su izabrani u dati bootstrap uzorak (izvlačenje sa vracanjem), dok su u vektor
%NPBUlambde smestene vrednosti ocenjivaca teta kapa za svaki od njih
[NPBUlambde,NPBUind]=bootstrp(B,@(x) 1./mean(x),x);
%"prevodimo" indekse u konkretne bootstrap uzorke, koje zapisujemo u kolone matrice
%NPBU
for j=1:B
    for i=1:length(x)
        for k=1:length(x)
            if k==NPBUind(i,j)
                NPBU(i,j)=x(k);
            end
        end
    end
end
%odredjujemo bootstrap ocene sredine i varijanse ocenjivaca teta kapa
npbos=mean(NPBUlambde);
npbov=var(NPBUlambde);
%crtamo histogram bootstrap replikacija
hist(NPBUlambde);
```

D5) Program „ParBootBin“

```
function ParBootBin(n,B,m,p)
%generisemo polazni uzorak (x) zadatog obima (n) iz binomne raspodele sa
%specificiranim brojem ponavljanja eksperimenta (m) i verovatnocom uspeha (p)
x=binornd(m,p,n,1);
%ocenjujemo parametar p na osnovu originalnog uzorka, tj. racunamo vrednost njegovog
%ocenjivaca, teta kapa, za x
xp=mean(x)/m;
%generisemo B bootstrap uzoraka parametarskim postupkom, tj. iz binomne raspodele sa
%parametrima m i xp, i smestamo ih u kolone matrice PBU
for j=1:B
    PBU(:,j)=binornd(m,xp,n,1);
end
%racunamo vrednosti ocenjivaca teta kapa za svaki od bootstrap uzoraka
PBUp=mean(PBU)./(m*ones(1,B));
%odredjujemo bootstrap ocene sredine i varijanse ocenjivaca teta kapa
pbos=mean(PBUp);
pbov=var(PBUp);
%crtamo histogram bootstrap replikacija
hist(PBUp);
```

D6) Program „NeparBootBin“

```
function NeparBootBin(x,B,m)
%(za polazni uzorak uzimamo vektor x iz odgovarajuce simulacije pomocu programa
%ParBootBin (za istu vrednost n)); narednom funkcijom primenjujemo neparametarski
%bootstrap na uzorak x: u B kolona matrice NPBUind upisuju se indeksi elemenata iz x
%koji su izabrani u dati bootstrap uzorak (izvlacenje sa vracanjem), dok su u vektor
%NPBUs smestene aritmeticke sredine svakog od njih (kasnije ih delimo sa m da bismo
%dobili vrednosti ocenjivaca teta kapa)
[NPBUs,NPBUind]=bootstrp(B,@mean,x);
%"prevodimo" indekse u konkretne bootstrap uzorke, koje zapisujemo u kolone matrice
%NPBU
for j=1:B
    for i=1:length(x)
        for k=1:length(x)
            if k==NPBUind(i,j)
                NPBU(i,j)=x(k);
            end
        end
    end
end
%NPBUp - neparametarske bootstrap replikacije ocenjivaca teta kapa
NPBUp=NPBUs/m;
%odredjujemo bootstrap ocene sredine i varijanse ocenjivaca teta kapa
npbos=mean(NPBUp);
npbov=var(NPBUp);
%crtamo histogram bootstrap replikacija
hist(NPBUp);
```

D7) Program „BootRedPris“

```
function BootRedPris(x,B,C)
%kao argument x unosimo polazni uzorak koji je generisan u zadatku pod a) da bismo
%mogli uporediti rezultate teorijske i bootstrap analize; treba izracunati njegovu
%sredinu, varijansu i standardnu devijaciju
xsred=mean(x);
xvar=var(x,1);
xstdev=std(x,1);
%polazeci od x, generisemo B bootstrap uzoraka parametarskim postupkom, tj. iz
%normalne raspodele sa parametrima xsred i xstdev, i smestamo ih u kolone matrice PBU
for j=1:B
    PBU(:,j)=normrnd(xsred,xstdev,length(x),1);
end
%racunamo vrednosti ocenjivaca teta kapa za svaki od dobijenih uzoraka
PBUocene=var(PBU,1);
%posto "ne znamo" funkcionalni oblik pristrasnosti b(teta), pa je ne mozemo oceniti
```

```
%sa b(tetaKapa) kao u slucaju pod a), koristimo narednu bootstrap aproksimaciju
bias=mean(PBUocene)-xvar;
%formiramo bootstrap ocenu redukovane pristrasnosti prvog reda
BSOrp1=xvar-bias;
%za svaki od B „primarnih‟ bootstrap uzoraka generisemo po C „sekundarnih‟, ponovo
%parametarskim postupkom - iz normalne raspodele ciji ce parametri biti njihove
%sredine i varijanse (tj. standardne devijacije); „sekundarne‟ uzorke smestamo u
%kolone matrice SPBU
PBUsred=mean(PBU);
PBUstdev=std(PBU,1);
rez=zeros(1,B);
for j=1:B
    SPBU=zeros(length(x),C)
    for k=1:C
        SPBU(:,k)=normrnd(PBUsred(j),PBUstdev(j),length(x),1);
        %racunamo vrednosti ocenjivaca teta kapa za svaki od „sekundarnih‟ bootstrap
        %uzoraka i smestamo ih u vektor SPBUocene
        SPBUocene=var(SPBU,1);
        %usrednjavamo dobijene vrednosti i zapisujemo ih na odgovarajuce mesto u
        %vektoru rez, koji je u startu bio definisan kao nula vektor
        rez(j)=mean(SPBUocene);
    end
end
%aritmeticka sredina elemenata vektora rez predstavlja ono sto smo u odeljku 3.2
%oznacili sa lambda
lambda=mean(rez);
%sada imamo sve sto je potrebno za formiranje bootstrap ocene redukovane pristrasnosti
%2. reda
BSOrp2=3*xvar-3*mean(PBUocene)+lambda;
%teorijski, nakon beskonacno mnogo iteracija, i, stigli bismo do sledece nepristrasne
%ocene (formula (3.7))
granica=var(x);
```

D8) Program „IntPovEP“

```
function IntPovEP(x,alfa,B)
%x-originalni uzorak, alfa-nominalni nivo poverenja, B-broj bootstrap replikacija;
%na samom pocetku, odredjujemo sredinu, varijansu i st. devijaciju uzorka x,
%respektivno
xsred=mean(x);
xvar=var(x,1);
xstdev=std(x,1);
%generisemo B bootstrap uzoraka parametarskim postupkom, tj. iz normalne raspodele sa
%parametrima xsred i xstdev, i smestamo ih u kolone matrice PBU
for j=1:B
    PBU(:,j)=normrnd(xsred,xstdev,length(x),1);
end
%racunamo bootstrap ocene za svaki od dobijenih uzoraka i sortiramo ih
PBUocene=var(PBU,1);
sPBUocene=sort(PBUocene);
%odredjujemo gornju granicu
m=((1+alfa)/2)*B;
if m==floor(m)
    gornja=sPBUocene(m);
else
    k=floor(m);
    gornja=sPBUocene(k)+(m-k)*(sPBUocene(k+1)-sPBUocene(k));
end
%odredjujemo donju granicu
l=((1-alfa)/2)*B;
if l==floor(l)
    donja=sPBUocene(l);
else
    t=floor(l);
    donja=sPBUocene(t)+(l-t)*(sPBUocene(t+1)-sPBUocene(t));
end
```

D9) Program „IntPovEPkp“

```
function IntPovEPkp(x,alfa,B)
%x-originalni uzorak, alfa-nominalni nivo poverenja, B-broj bootstrap replikacija;
%na samom pocetku, odredjujemo sredinu, varijansu i st. devijaciju uzorka x,
%respektivno
xsred=mean(x);
xvar=var(x,1);
xstdev=std(x,1);
%generisemo B bootstrap uzoraka parametarskim postupkom, tj. iz normalne raspodele sa
%parametrima xsred i xstdev, i smestamo ih u kolone matrice PBU
for j=1:B
    PBU(:,j)=normrnd(xsred,xstdev,length(x),1);
end
%racunamo bootstrap ocene za svaki od dobijenih uzoraka i sortiramo ih
PBUocene=var(PBU,1);
sPBUocene=sort(PBUocene);
%aproksimiramo x0 (izraz (4.4))
v=find(sPBUocene<=xvar);
qkapa=length(v)/B;
x0=norminv(qkapa,0,1);
%odredjujemo gornju granicu; prvo nam treba broj m
q1=normcdf(2*x0+norminv((1+alfa)/2));
m=B*q1;
if m==floor(m)
    gornja=sPBUocene(m);
else
    k=floor(m);
    gornja=sPBUocene(k)+(m-k)*(sPBUocene(k+1)-sPBUocene(k));
end
%odredjujemo donju granicu; prvo nam treba broj l
q2=normcdf(2*x0+norminv((1-alfa)/2));
l=B*q2;
if l==floor(l)
    donja=sPBUocene(l);
else
    t=floor(l);
    donja=sPBUocene(t)+(l-t)*(sPBUocene(t+1)-sPBUocene(t));
end
```

D10) Program „IntPovHP“

```
function IntPovHP(x,alfa,B)
%x-originalni uzorak, alfa-nominalni nivo poverenja, B-broj bootstrap replikacija;
%na samom pocetku, odredjujemo sredinu, varijansu i st. devijaciju uzorka x,
%respektivno
xsred=mean(x);
xvar=var(x,1);
xstdev=std(x,1);
%generisemo B bootstrap uzoraka parametarskim postupkom, tj. iz normalne raspodele sa
%parametrima xsred i xstdev, i smestamo ih u kolone matrice PBU
for j=1:B
    PBU(:,j)=normrnd(xsred,xstdev,length(x),1);
end
%racunamo bootstrap ocene za svaki od dobijenih uzoraka i sortiramo ih
PBUocene=var(PBU,1);
sPBUocene=sort(PBUocene);
%formiramo kolekciju razlika, (4.7)
D=sPBUocene-xvar*ones(1,B);
%odredjujemo gornju granicu
l=B*(1-alfa)/2;
if l==floor(l)
    gornja=xvar-D(l);
else
    t=floor(l);
    gornja=xvar-(D(t)+(l-t)*(D(t+1)-D(t)));
end
%odredjujemo donju granicu
m=B*(1+alfa)/2;
if m==floor(m)
```

```
    donja=xvar-D(m);
else
    k=floor(m);
    donja=xvar-(D(k)+(m-k)*(D(k+1)-D(k)));
end
```

D11) Program „IntPovBezRestrikcije“

```
function IntPovBezRestrikcije(y,B,alfa)
%vrednosti ocenjenih parametara
miKapaU=0.6078;
fiKapaU=0.5482;
varKapa=2.0504;
%vektor reziduala
yBezPrvog=y(2:100);
yBezPoslednjeg=y(1:99);
X(:,1)=ones(99,1);
X(:,2)=yBezPoslednjeg;
rezidualiU=yBezPrvog-X*[miKapaU fiKapaU]';
%startna vrednost
y0=normrnd(miKapaU/(1-fiKapaU),sqrt(varKapa/(1-fiKapaU^2)));
%generisemo B bootstrap uzoraka
for j=1:B
    %vektore bootstrap gresaka smestamo kolone matrice eBSu
    eBSu(:,j)=normrnd(0,sqrt(varKapa),100,1);
    %prve elemente bootstrap uzoraka upisujemo u vektor "prvi"
    prvi(j)=miKapaU+fiKapaU*y0+eBSu(1,j);
    %bootstrap uzorci - kolone matrice yBSu
    yBSu(1,j)=prvi(j);
    for t=2:100
        yBSu(t,j)=miKapaU+fiKapaU*yBSu(t-1,j)+eBSu(t,j);
    end
end
%ponovo ocenjujemo model za svaki od bootstrap uzoraka
for j=1:B
    %definisemo "pomocne" bootstrap oznake
    yboot=yBSu(2:100,j);
    Xboot(:,1)=ones(99,1);
    Xboot(:,2)=yBSu(1:99,j);
    %bootstrap ocene parametara mi i fi
    oceneBSu(:,j)=((Xboot'*Xboot)^(-1))*Xboot'*yboot;
    miKapaBSu(j)=oceneBSu(1,j);
    fiKapaBSu(j)=oceneBSu(2,j);
    %vektore odgovarajucih bootstrap reziduala smestamo u kolone matrice rezidualiBSu
    rezidualiBSu(:,j)=yboot-Xboot*oceneBSu(:,j);
end
%racunamo B bootstrap replikacija test statistike
for j=1:B
    %nedostaje nam jos ocena varijanse bootstrap ocenjivaca parametra fi
    eKapaBS=rezidualiBSu(:,j);
    Xboot(:,1)=ones(99,1);
    Xboot(:,2)=yBSu(1:99,j);
    Xboot1=Xboot(:,1);
    Xboot2=Xboot(:,2);
    M1boot=eye(99)-Xboot1*((Xboot1'*Xboot1)^(-1))*Xboot1';
    sFiKapa2BS(j)=((eKapaBS'*eKapaBS)/97)*((Xboot2'*M1boot*Xboot2)^(-1));
    %vrednost j-te bootstrap replikacije je...
    tauKapaBSu(j)=(fiKapaBSu(j)-fiKapaU)/sqrt(sFiKapa2BS(j));
end
%redjamo bootstrap replikacije u rastuci niz, biramo odgovarajuce "kvantile" i
%konstruisemo trazeni bootstrap interval poverenja
X1=X(:,1);
X2=X(:,2);
M1=eye(99)-X1*((X1'*X1)^(-1))*X1';
sFiKapa2=((rezidualiU'*rezidualiU)/97)*((X2'*M1*X2)^(-1));
sFiKapa=sqrt(sFiKapa2);
sortirani=sort(tauKapaBSu);
donjaU=fiKapaU-sFiKapa*sortirani((1-alfa/2)*(B+1));
gornjaU=fiKapaU-sFiKapa*sortirani((alfa/2)*(B+1));
```

D12) Program „IntPovSaRestrikcijom“

```
function IntPovSaRestrikcijom(fi0,y,B,alfa)
%vrednosti ocenjenih parametara
fiKapaR=fi0;
yBezPrvog=y(2:100);
yBezPoslednjeg=y(1:99);
miKapaR=mean(yBezPrvog)-fiKapaR*mean(yBezPoslednjeg);
%vektor reziduala
X(:,1)=ones(99,1);
X(:,2)=yBezPoslednjeg;
rezidualiR=yBezPrvog-X*[miKapaR fiKapaR]';
%startna vrednost
varKapa=var(rezidualiR,1);
y0=normrnd(miKapaR/(1-fiKapaR),sqrt(varKapa/(1-fiKapaR^2)));
%generisemo B bootstrap uzoraka
for j=1:B
    %vektore bootstrap gresaka smestamo u kolone matrice eBSr
    eBSr(:,j)=normrnd(0,sqrt(varKapa),100,1);
    %prve elemente bootstrap uzoraka upisujemo u vektor "prvi"
    prvi(j)=miKapaR+fiKapaR*y0+eBSr(1,j);
    %bootstrap uzorci - kolone matrice yBSr
    yBSr(1,j)=prvi(j);
    for t=2:100
        yBSr(t,j)=miKapaR+fiKapaR*yBSr(t-1,j)+eBSr(t,j);
    end
end
%ponovo ocenjujemo model za svaki od bootstrap uzoraka
for j=1:B
    %definisemo "pomocne" bootstrap oznake
    yboot=yBSr(2:100,j);
    Xboot(:,1)=ones(99,1);
    Xboot(:,2)=yBSr(1:99,j);
    %bootstrap ocene parametara mi i fi
    oceneBSr(:,j)=((Xboot'*Xboot)^(-1))*Xboot'*yboot;
    miKapaBSr(j)=oceneBSr(1,j);
    fiKapaBSr(j)=oceneBSr(2,j);
    %vektore odgovarajucih bootstrap reziduala smestamo u kolone matrice rezidualiBSr
    rezidualiBSr(:,j)=yboot-Xboot*oceneBSr(:,j);
end
%racunamo B bootstrap replikacija test statistike
for j=1:B
    %nedostaje nam jos ocena varijanse bootstrap ocenjivaca parametra fi
    eKapaBS=rezidualiBSr(:,j);
    Xboot(:,1)=ones(99,1);
    Xboot(:,2)=yBSr(1:99,j);
    Xboot1=Xboot(:,1);
    Xboot2=Xboot(:,2);
    M1boot=eye(99)-Xboot1*((Xboot1'*Xboot1)^(-1))*Xboot1';
    sFiKapa2BS(j)=((eKapaBS'*eKapaBS)/97)*((Xboot2'*M1boot*Xboot2)^(-1));
    %vrednost j-te bootstrap replikacije je...
    tauKapaBSr(j)=(fiKapaBSr(j)-fiKapaR)/sqrt(sFiKapa2BS(j));
end
%u nastavku ce nam biti neophodna vrednost test statistike za originalni uzorak, radi
%uporedjivanja sa bootstrap replikacijama
oceneOrig=((X'*X)^(-1))*X'*yBezPrvog;
fiKapaOrig=oceneOrig(2);
rezidualiOrig=yBezPrvog-X*oceneOrig;
X1=X(:,1);
X2=X(:,2);
M1=eye(99)-X1*((X1'*X1)^(-1))*X1';
sFiKapa2=((rezidualiOrig'*rezidualiOrig)/97)*((X2'*M1*X2)^(-1));
tauKapaOrig=(fiKapaOrig-fiKapaR)/sqrt(sFiKapa2);
%bootstrap p-vrednost za test H0(fi=fi0) protiv H1(fi<fi0)
suma1=0;
for j=1:B
    if tauKapaBSr(j)<=tauKapaOrig
        suma1=suma1+1;
```

```
    end
end
p1=suma1/(B+1);
%gornja granica trazenog bootstrap intervala poverenja bice ona vrednost fi0 za koju
%je p1=alfa/2
if p1==(alfa/2)
    gornja=fi0;
end
%bootstrap p-vrednost za test H0(fi=fi0) protiv H1(fi>fi0)
suma2=0;
for j=1:B
    if tauKapaBSr(j)>=tauKapaOrig
        suma2=suma2+1;
    end
end
p2=suma2/(B+1);
%donja granica trazenog bootstrap intervala poverenja bice ona vrednost fi0 za koju
%je p2=alfa/2
if p2==(alfa/2)
    donja=fi0;
end
```

D13) Program „TestHipAsimptotski“

```
function TestHipAsimptotski(N,kvantil1,kvantil2,alfa)
%generisemo N uzoraka obima 100 koji prate nas polazni model sa narednim vrednostima
%parametara
miOrig=0.61;
fiOrig=0.55;
varOrig=2.05;
%biramo startne vrednosti
start=normrnd(miOrig/(1-fiOrig),sqrt(varOrig/(1-fiOrig^2)),1,N);
%vektore gresaka smestamo u kolone matrice eOrig; prvi element svakog od uzoraka
%upisujemo na k-to mesto u vektoru prvi; konacni uzorci bice kolone matrice yOrig
for k=1:N
    eOrig(:,k)=normrnd(0,sqrt(varOrig),100,1);
    prvi(k)=miOrig+fiOrig*start(k)+eOrig(1,k);
    yOrig(1,k)=prvi(k);
    for t=2:100
        yOrig(t,k)=miOrig+fiOrig*yOrig(t-1,k)+eOrig(t,k);
    end
end
%odredjujemo N vrednosti test statistike
for k=1:N
    %uvodimo "pomocne" oznake
    yBezPrvog=yOrig(2:100,k);
    yBezPoslednjeg=yOrig(1:99,k);
    X(:,1)=ones(99,1);
    X(:,2)=yBezPoslednjeg;
    X1=X(:,1);
    X2=X(:,2);
    M1=eye(99)-X1*((X1'*X1)^(-1))*X1';
    %ocenjujemo model za svaki od uzoraka
    ocene=((X'*X)^(-1))*X'*yBezPrvog;
    miKapa=ocene(1);
    fiKapa=ocene(2);
    %racunamo vektore reziduala
    reziduali=yBezPrvog-X*ocene;
    %ocena varijanse ocenjivaca fiKapa je...
    sFiKapa2=((reziduali'*reziduali)/97)*((X2'*M1*X2)^(-1));
    %konacno, test statistika iznosi...
    tauKapa(k)=(fiKapa-fiOrig)/sqrt(sFiKapa2);
end
%izvrsavamo test H0(fi=0.55) protiv H1(fi<0.55) na nivou alfa za svaki od N uzoraka
brojOdbacivanja1=0;
for k=1:N
    if tauKapa(k)<kvantil1
        brojOdbacivanja1=brojOdbacivanja1+1;
    end
```

```
end
%frekvencija odbacivanja nulte hipoteze na nominalnom nivou alfa je...
frekvencija1=brojOdbacivanja1/N;
%izvrsavamo test H0(fi=0.55) protiv H2(fi>0.55) na nivou alfa za svaki od N uzoraka
brojOdbacivanja2=0;
for k=1:N
    if tauKapa(k)>kvantil2
        brojOdbacivanja2=brojOdbacivanja2+1;
    end
end
%frekvencija odbacivanja nulte hipoteze na nominalnom nivou alfa je...
frekvencija2=brojOdbacivanja2/N;
```

D14) Program „TestHipBezRestrikcije“

```
function TestHipBezRestrikcije(yOrig,B,alfa)
dim=size(yOrig);
N=dim(2);
%za svaki od N polaznih uzoraka (kolone matrice yOrig), generisacemo po B bootstrap
%uzoraka
for k=1:N
    %prvo odredjujemo ocene parametara postupkom bez implementiranja restrikcije
    yBezPrvog=yOrig(2:100,k);
    yBezPoslednjeg=yOrig(1:99,k);
    X(:,1)=ones(99,1);
    X(:,2)=yBezPoslednjeg;
    X1=X(:,1);
    X2=X(:,2);
    M1=eye(99)-X1*((X1'*X1)^(-1))*X1';
    oceneU=((X'*X)^(-1))*X'*yBezPrvog;
    miKapaU=oceneU(1);
    fiKapaU=oceneU(2);
    %racunamo vektor reziduala
    rezidualiU=yBezPrvog-X*oceneU;
    %bootstrap greske ce biti izvlacene iz normalne raspodele sa sredinom 0 i
    %varijansom...
    varKapa=var(rezidualiU,1);
    %izbor startne vrednosti
    y0=normrnd(miKapaU/(1-fiKapaU),sqrt(varKapa/(1-fiKapaU^2)));
    %generisanje bootstrap uzoraka
    for j=1:B
        %vektore bootstrap gresaka smestamo u kolone matrice eBSu
        eBSu(:,j)=normrnd(0,sqrt(varKapa),100,1);
        %prve elemente bootstrap uzoraka upisujemo u vektor prviBS
        prviBS(j)=miKapaU+fiKapaU*y0+eBSu(1,j);
        %bootstrap uzorci - kolone matrice yBSu
        yBSu(1,j)=prviBS(j);
        for t=2:100
            yBSu(t,j)=miKapaU+fiKapaU*yBSu(t-1,j)+eBSu(t,j);
        end
    end
    %ponovo ocenjujemo model za svaki od bootstrap uzoraka
    for j=1:B
        %definisemo "pomocne" bootstrap oznake
        yboot=yBSu(2:100,j);
        Xboot(:,1)=ones(99,1);
        Xboot(:,2)=yBSu(1:99,j);
        %bootstrap ocene parametara su...
        oceneBSu(:,j)=((Xboot'*Xboot)^(-1))*Xboot'*yboot;
        miKapaBSu(j)=oceneBSu(1,j);
        fiKapaBSu(j)=oceneBSu(2,j);
        %vektore odgovarajucih bootstrap reziduala smestamo u kolone matrice
        %rezidualiBSu
        rezidualiBSu(:,j)=yboot-Xboot*oceneBSu(:,j);
    end
    %racunamo B bootstrap replikacija test statistike
    for j=1:B
        %jos "pomocnih" bootstrap oznaka...
        eKapaBS=rezidualiBSu(:,j);
```

```
            Xboot(:,1)=ones(99,1);
            Xboot(:,2)=yBSu(1:99,j);
            Xboot1=Xboot(:,1);
            Xboot2=Xboot(:,2);
            M1boot=eye(99)-Xboot1*((Xboot1'*Xboot1)^(-1))*Xboot1';
            %ocena varijanse bootstrap ocenjivaca parametra fi
            sFiKapa2BS(j)=((eKapaBS'*eKapaBS)/97)*((Xboot2'*M1boot*Xboot2)^(-1));
            %vrednost j-te bootstrap replikacije je...
            tauKapaBSu(j)=(fiKapaBSu(j)-fiKapaU)/sqrt(sFiKapa2BS(j));
        end
        %izvrsavamo test H0(fi=0.55) protiv H1(fi<0.55): nulta hipoteza se odbacuje na
        %nivou znacajnosti alfa ukoliko je registrovana vrednost test statistike (za
        %originalni, k-ti uzorak) manja od kvantila reda alfa odgovarajuce bootstrap
        %raspodele
        sFiKapa2=((rezidualiU'*rezidualiU)/97)*((X2'*M1*X2)^(-1));
        sFiKapa=sqrt(sFiKapa2);
        tauKapa=(fiKapaU-0.55)/sFiKapa;
        %sortiramo B bootstrap replikacija i originalnu test statistiku u rastuci niz
        niz(1:B)=tauKapaBSu;
        niz(B+1)=tauKapa;
        sortirani=sort(niz);
        %proveravamo da li se tauKapa nalazi medju prvih alfa*(B+1) elemenata sortiranog
        %niza: ako da - odbacujemo H0, ako ne - nema osnova da se H0 odbaci na bazi
        %raspolozivih podataka
        brojOdbacivanja1(k)=0;
        for l=1:(alfa*(B+1))
            if sortirani(l)==tauKapa
                brojOdbacivanja1(k)=brojOdbacivanja1(k)+1;
            end
        end
        %slicno se izvodi i test H0(fi=0.55) protiv H1(fi>0.55); proveravamo da li se
        %tauKapa nalazi medju poslednjih alfa*(B+1) elemenata sortiranog niza: ako da -
        %odbacujemo H0, ako ne - nema osnova da se H0 odbaci na bazi raspolozivih
        %podataka
        brojOdbacivanja2(k)=0;
        for l=((1-alfa)*(B+1)):(B+1)
            if sortirani(l)==tauKapa
                brojOdbacivanja2(k)=brojOdbacivanja2(k)+1;
            end
        end
    end
    %zakljucak - ucestalost odbacivanja nulte hipoteze protiv svake od alternativa u
    %eksperimentu sa N simuliranih uzoraka
    udeo1=sum(brojOdbacivanja1)/N;
    udeo2=sum(brojOdbacivanja2)/N;
```

D15) Program „TestHipSaRestrikcijom“

```
function TestHipSaRestrikcijom(yOrig,B,alfa)
dim=size(yOrig);
N=dim(2);
%za svaki od N polaznih uzoraka (kolone matrice yOrig), generisacemo po B bootstrap
%uzoraka
for k=1:N
    %prvo odredjujemo ocene parametara postupkom sa implementiranjem restrikcije
    fiKapaR=0.55;
    yBezPrvog=yOrig(2:100,k);
    yBezPoslednjeg=yOrig(1:99,k);
    miKapaR=mean(yBezPrvog)-fiKapaR*mean(yBezPoslednjeg);
    %racunamo vektor reziduala
    X(:,1)=ones(99,1);
    X(:,2)=yBezPoslednjeg;
    rezidualiR=yBezPrvog-X*[miKapaR fiKapaR]';
    %bootstrap greske ce biti izvlacene iz normalne raspodele sa sredinom 0 i
    %varijansom...
    varKapa=var(rezidualiR,1);
    %izbor startne vrednosti
    y0=normrnd(miKapaR/(1-fiKapaR),sqrt(varKapa/(1-fiKapaR^2)));
    %generisanje bootstrap uzoraka
```

```
    for j=1:B
        %vektore bootstrap gresaka smestamo u kolone matrice eBSr
        eBSr(:,j)=normrnd(0,sqrt(varKapa),100,1);
        %prve elemente bootstrap uzoraka upisujemo u vektor prviBS
        prviBS(j)=miKapaR+fiKapaR*y0+eBSr(1,j);
        %bootstrap uzorci - kolone matrice yBSr
        yBSr(1,j)=prviBS(j);
        for t=2:100
            yBSr(t,j)=miKapaR+fiKapaR*yBSr(t-1,j)+eBSr(t,j);
        end
    end
    %ponovo ocenjujemo model za svaki od bootstrap uzoraka
    for j=1:B
        %definisemo "pomocne" bootstrap oznake
        yboot=yBSr(2:100,j);
        Xboot(:,1)=ones(99,1);
        Xboot(:,2)=yBSr(1:99,j);
        %bootstrap ocene parametara su...
        oceneBSr(:,j)=((Xboot'*Xboot)^(-1))*Xboot'*yboot;
        miKapaBSr(j)=oceneBSr(1,j);
        fiKapaBSr(j)=oceneBSr(2,j);
        %vektore odgovarajucih bootstrap reziduala smestamo u kolone matrice
        %rezidualiBSr
        rezidualiBSr(:,j)=yboot-Xboot*oceneBSr(:,j);
    end
    %racunamo B bootstrap replikacija test statistike
    for j=1:B
        %jos "pomocnih" bootstrap oznaka...
        eKapaBS=rezidualiBSr(:,j);
        Xboot(:,1)=ones(99,1);
        Xboot(:,2)=yBSr(1:99,j);
        Xboot1=Xboot(:,1);
        Xboot2=Xboot(:,2);
        M1boot=eye(99)-Xboot1*((Xboot1'*Xboot1)^(-1))*Xboot1';
        %ocena varijanse bootstrap ocenjivaca parametra fi
        sFiKapa2BS(j)=((eKapaBS'*eKapaBS)/97)*((Xboot2'*M1boot*Xboot2)^(-1));
        %vrednost j-te bootstrap replikacije je...
        tauKapaBSr(j)=(fiKapaBSr(j)-fiKapaR)/sqrt(sFiKapa2BS(j));
    end
    %izvrsavamo test H0(fi=0.55) protiv H1(fi<0.55): nulta hipoteza se odbacuje na
    %nivou znacajnosti alfa ukoliko je registrovana vrednost test statistike (za
    %originalni, k-ti uzorak) manja od kvantila reda alfa odgovarajuce bootstrap
    %raspodele; najpre, racunamo vrednost test statistike za originalni uzorak
    oceneOrig=((X'*X)^(-1))*X'*yBezPrvog;
    fiKapaOrig=oceneOrig(2);
    rezidualiOrig=yBezPrvog-X*oceneOrig;
    X1=X(:,1);
    X2=X(:,2);
    M1=eye(99)-X1*((X1'*X1)^(-1))*X1';
    sFiKapa2=((rezidualiOrig'*rezidualiOrig)/97)*((X2'*M1*X2)^(-1));
    tauKapaOrig=(fiKapaOrig-fiKapaR)/sqrt(sFiKapa2);
    %sortiramo B bootstrap replikacija i originalnu test statistiku u rastuci niz
    niz(1:B)=tauKapaBSr;
    niz(B+1)=tauKapaOrig;
    sortirani=sort(niz);
    %proveravamo da li se tauKapaOrig nalazi medju prvih alfa*(B+1) elemenata
    %sortiranog niza: ako da - odbacujemo H0, ako ne - nema osnova da se H0 odbaci na
    %bazi raspolozivih podataka
    brojOdbacivanja1(k)=0;
    for l=1:(alfa*(B+1))
        if sortirani(l)==tauKapaOrig
            brojOdbacivanja1(k)=brojOdbacivanja1(k)+1;
        end
    end
    %slicno se izvodi i test H0(fi=0.55) protiv H1(fi>0.55); proveravamo da li se
    %tauKapaOrig nalazi medju poslednjih alfa*(B+1) elemenata sortiranog niza: ako da -
    %odbacujemo H0, ako ne - nema osnova da se H0 odbaci na bazi raspolozivih podataka
    brojOdbacivanja2(k)=0;
    for l=((1-alfa)*(B+1)):(B+1)
        if sortirani(l)==tauKapaOrig
            brojOdbacivanja2(k)=brojOdbacivanja2(k)+1;
```

```
        end
    end
end
%zakljucak - ucestalost odbacivanja nulte hipoteze protiv svake od alternativa u
%eksperimentu sa N simuliranih uzoraka
udeo1=sum(brojOdbacivanja1)/N;
udeo2=sum(brojOdbacivanja2)/N;
```

Literatura

[1] Davidson, R., MacKinnon, J. G., „Bootstrap Tests: How Many Bootstraps?“, in *Econometric Reviews*, Vol. 19 (2000)

[2] Davidson, R., MacKinnon, J. G., *Econometric Theory and Methods* (Oxford University Press, 2009)

[3] Dufour, J. M., Perron, B., „Resampling methods in econometrics“, in *Journal of Econometrics*, Vol. 133 (2006)

[4] Efron, B., *The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans* (Society for Industrial and Applied Mathematics, 1982)

[5] Jeong, J., Maddala, G. S., „A Perspective on Application of Bootstrap Methods in Econometrics“, in Maddala, G. S., Rao, C. R., Vinod, H. D. (eds.), *Handbook of Statistics*, Vol. 11 (Amsterdam: North-Holland, 1993)

[6] Kmenta, J., *Počela ekonometrije* (Zagreb: Mate, 1997)

[7] MacKinnon, J., „Bootstrap Hypothesis Testing“, Queen’s Economics Department Working Paper No. 1127 (Queen’s University, 2007)

[8] MacKinnon, J., „Bootstrap Methods in Econometrics“, Queen’s Economics Department Working Paper No. 1028 (Queen’s University, 2006)

[9] Maddala, G. S., *Introduction to Econometrics* (Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2001)

[10] Moore, D. S., McCabe, G., Duckworth, W. M., Alwan, L., *The Practice of Business Statistics*, 2nd edition (San Francisco: W. H. Freeman, 2008)

[11] Scholz, F. W., „The Bootstrap Small Sample Properties“, edited version of a technical report of same title and issued as bcstech-93-051 (Boeing Computer Services, Research and Technology, 2007)

[12] Van Giersbergen, N. P. A., Kiviet, J. F., „How to implement the bootstrap in static or stable dynamic regression models: test statistic versus confidence region approach“, in *Journal of Econometrics*, Vol. 108 (2002)

[13] www.wikipedia.org

[14] Yu, C. H., „Resampling methods: Concepts, Applications and Justification“, in *Practical Assessment, Research & Evaluation*, Vol. 8, No. 19 (2003)

Kratka biografija

Ivana Malić je rođena 21. februara 1986. godine u Bačkoj Topoli. Pohađala je osnovnu školu „Sever Đurkić“ u Bečeju, završivši je 2001. godine kao nosilac diplome „Vuk Karadžić“, a nakon toga i bečejsku Gimnaziju, opšti smer, gde je maturirala 2005., ponovo kao „vukovac“. Iste godine se upisuje na Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Novom Sadu, smer diplomirani matematičar – matematika finansija. Diplomirala je oktobra 2009. sa prosečnom ocenom 9,94 i odmah potom, na istom fakultetu, nastavila školovanje u okviru master studija primenjene matematike, modul matematika finansija. Do juna 2010. godine, položila je sve ispite predviđene planom i programom sa prosečnom ocenom 10,00 i tako stekla pravo na odbranu master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj (RBR):	
Identifikacioni broj (IBR):	
Tip dokumentacije (TD):	monografska dokumentacija
Tip zapisa (TZ):	tekstualni štampani materijal
Vrsta rada (VR):	master rad
Autor (AU):	Ivana Malić
Mentor (MN):	dr Zorana Lužanin
Naslov rada (NR):	Mali uzorci i primena bootstrap metoda u ekonometriji
Jezik publikacije (JP):	srpski (latinica)
Jezik izvoda (JI):	s /en
Zemlja publikovanja (ZP):	Republika Srbija
Uže geografsko područje (UGP):	Vojvodina
Godina (GO):	2012.

Izdavač (IZ): autorski reprint

Mesto i adresa (MA): Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Trg Dositeja Obradovića 4

Fizički opis rada (FOR): (6/106/14/15/11/5/0) (broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/ grafika/priloga)

Naučna oblast (NO): matematika

Naučna disciplina (ND): ekonometrija

Predmetne odrednice, ključne reči (PO, UDK): bootstrap metod, bootstrap uzorak, bootstrap ocena, bootstrap raspodela, bootstrap redukcija pristrasnosti, bootstrap interval poverenja, bootstrap test hipoteze, bootstrap regresija

Čuva se (ČU): biblioteka Departmana za matematiku i informatiku

Važna napomena (VN):

Izvod (IZ): U ovom radu su predstavljene osnovne ideje jedne od modernih statističkih tehnika, tzv. bootstrap metoda, kao i neke od njegovih najinteresantnijih primena u ekonometrijskom ispitivanju. Različite bootstrap procedure za redukciju pristrasnosti ocena, konstruisanje intervala poverenja, testiranje hipoteza i izvođenje zaključaka o parametrima regresionih modela su objašnjene na ilustrativnim primerima. Pokazano je da bootstrap nekada može obezbediti bolje rezultate od klasičnih asimptotskih aproksimacija.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća (DP): 2.11.2011.

Datum odbrane (DO): oktobar 2012.

Članovi komisije (KO):

Predsednik: dr Danijela Rajter-Ćirić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Andreja Tepavčević, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom sadu

Mentor: dr Zorana Lužanin, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number (ANO):

Identification number (INO):

Document type (DT): monograph type

Type of record (TR): printed text

Contents code (CC): master thesis

Author (AU): Ivana Malić

Mentor (MN): Zorana Lužanin, PhD, Full Professor

Title (TI): Small samples and application of bootstrap method in econometrics

Language of text (LT): Serbian (Latin)

Language of abstract (LA): s /en

Country of publication (CP): Republic of Serbia

Locality of publication (LP): Vojvodina

Publication year (PY): 2012

Publisher (PU):	author's reprint
Publication place (PP):	University of Novi Sad, Faculty of Sciences, Department of Mathematics and Informatics, 4 Dositej Obradović Square
Physical description (PD):	(6/106/14/15/11/5/0) (chapters/pages/references/tables/pictures/ graphs/additional lists)
Scientific field (SF):	mathematics
Scientific discipline (SD):	econometrics
Subject, key words (SKW):	bootstrap method, bootstrap sample, bootstrap estimate, bootstrap distribution, bootstrap bias reduction, bootstrap confidence interval, bootstrap hypothesis test, bootstrap regression
Holding data (HD):	library of the Department of Mathematics and Informatics
Note (N):	
Abstract (AB):	In this paper, basic ideas of one of the modern statistical techniques, the so-called bootstrap method, are presented along with some of its most interesting applications in econometrical research. Different bootstrap procedures for reducing bias in estimates, constructing confidence intervals, testing hypotheses and making inferences about regression parameters are explained on illustrative examples. It is shown that bootstrap can sometimes yield better results than classical asymptotic approximations.
Accepted by the Scientific Board on (ASB):	November 2, 2011
Defended (DE):	October, 2012
Thesis defend board (DB):	
President:	Danijela Rajter-Ćirić, PhD, Full Professor,

Faculty of Sciences, Novi Sad

Member: Andreja Tepavčević, PhD, Full Professor,
Faculty of Sciences, Novi Sad

Mentor: Zorana Lužanin, PhD, Full Professor,
Faculty of Sciences, Novi Sad