UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Ivana Leković

Uniformna obrada postupaka regula-falsi, Njutn-Rafsona, sečice i Stefensena za numeričko rešavanje jednačina

master rad

Novi Sad, 2011.

Predgovor

Numeričko rešavanje nelinearnih jednačina je oblast numeričke matematike koja se dugo i uspešno razvija. Za većinu nelinearnih jednačina nemoguće je odrediti tačno rešenje, pa se ovakve jednačine rešavaju samo približno, primenom nekog numeričkog postupka.

Mnogi iterativni postupci za numeričko rešavanje nelinearnih jednačina s jednom nepoznatom otkrivani su više puta. Svaki put je dat i dokaz konvergencije. Tako, za pojedine postupke postoji više različitih dokaza konvergencije. Često je to i opravdano, pošto su pretpostavke pod kojima se dokazuje konvergencija različite.

Neki od postupaka, kao što je Njutn-Rafsonov, pojavljuju se i kao specijalni slučajevi nekih familija iterativnih postupaka. U takvim slučajevima se i dokaz njihove konvergencije dobija iz dokaza konvergencije cele familije.

U kursevima numeričke analize najčešće se posmatraju Njutn-Rafsonov postupak, postupak sečice i postupak regula falsi. Dokazi konveregencije ovih postupaka izvode se pod različitim pretpostavkama i na različite načine.

U ovom radu posmatramo određivanje aproksimacija realnih rešenja nelinearne jednačine sa jednom nepoznatom i četiri iterativna postupka: Njutn-Rafsonov, regula falsi, postupak sečice i Stefensenov. Dokazi konvergencije ovih postupaka izvedeni su pod istim pretpostavkama i zasnovani su na primeni interpolacije. Na taj način se dokazuje konvergencija za sva četiri posmatrana postupka jednoobrazno. Takođe dajemo i zajednički dokaz konvergencije Njutn-Rafsonovog postupka i postupka sečice za isti skup pretpostavki. Dokaz se zasniva na odgovarajućim dokazima iz knjige [10]. Pored toga što Stefensenov postupak posmatramo zajedno sa preostala tri, kao što je to rađeno u [14], posmatramo ga i posebno. Dajemo dokaz konvergencije Stefensenovog postupka, slično dokazu konvergencije Njutnovog postupka iz [10]. Dokaz nejednakosti zaustavljanja za Stefensenov postupak je nov. Za neke familije postupaka dokazi nejednakosti zaustavljanja dati su u [9]. Ove familije kao specijalne slučajeve sadrže Njutn-Rafsonov postupak i postupak regula falsi. Stefensenov postupak se ne može posmatrati kao specijalan slučaj familije postupaka za koje je nejednačina zaustavljanja dokazana u [9].

Rad je podeljen na 10 delova. U uvodnom delu opisuju se neke klase iterativnih postupaka. Drugi deo sadrži neke oznake, teoreme i definicije koje su potrebne za dalji rad. U sledećem delu opisuju se Njutn-Rafsonov postupak, postupak sečice, Stefensenov postupak i postupak regula falsi. Četvrti deo sadrži zajednički dokaz konvergencije Njutn-Rafsonovog postupka i postupka sečice. U petom delu dajemo dokaz konvergencije Stefensenovog postupka i uslove pod kojima važi nejednakost zaustavljanja. Šesti deo odnosi se na dokaze konvergencije posmatranih postupaka. Sedmi deo sadrži neke numeričke rezultate. U osmom delu daju se kratke biografije Njutna, Rafsona i Stefensena. Deveti deo sadrži prikaz originalnog Njutnovog rešavanja jedne kubne jednačine. Na kraju je navedena korišćena literatura.

Koristim ovu priliku da se zahvalim profesorima i asistentima sa kojima sam tokom svojih osnovnih i master studija sarađivala. Posebno bih se, najsrdačnije, zahvalila profesoru i mentoru dr Dragoslavu Hercegu.

Novi Sad, 30. septembar 2011. godine Ivana Leković

Sadržaj

1 Uvodni deo

Mnogi iterativni postupci za rešavanje jednačina sa jednom nepoznatom otkrivani su više puta. Ponekad su se pojedini postupci pojavljivali nezavisno jedan od drugog gotovo u isto vreme. Uopštavanje nekih postupaka dovelo je toga da se ti postupci i mnogi drugi pojavljuju kao specijalni slučajevi opšteg postupka. Time se omogućava i zajednička analiza postupaka jedne klase, zajednički dokaz konvergencije i određivanje reda konvergencije.

U ovom radu posmatramo zajednički dokaz konvergencije postupaka Njutn-Rafsona, sečice, Hejlija i Stefensena. Ovaj dokaz se zasniva na odgovarajućem korišćenju interpolacije, što se prikazuje u glavi 5.

1.1 Neke klase iterativnih postupaka

1.1.1 Gerlah

J. Gerlach je u svom radu [5] uveo novu klasu funkcija:

Definicija 1. *Za funkciju f kažemo da pripada klasi $D_m(a)$ ako i samo ako je dovoljan broj puta diferencijabilna i*

$$f(a)=0,\quad f'(a)\neq 0,\quad f''(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0,\quad f^{(m)}(a)\neq 0.$$

Gerlach je dokazao da iz $f\in D_m(a)$ sledi $F_n\in D_m(a)$, pri čemu su funkcije F_n definisane za $n\geq m$ na sledeći način:

$$F_n(x)=f(x),\quad n=m$$

$$F_{n+1}(x)=\frac{F_n(x)}{\sqrt[n]{F_n'(x)}},\quad n\geq m\,.$$

Posmatrajući slučaj $m=2$, Gerlach je konstruisao iterativni postupak x

$$x_{k+1}=x_k-\frac{F_{n+1}(x_k)}{F_{n+1}'(x_k)},k=0,1,2,... \tag{1}$$

reda konvergencije $n+1$, tj. postupak za koji važi

$$|x_{k+1}-a|\leq C|x_k-a|^{n+1},$$

za neku pozitivnu konstantu C.

1.1.2 Ford&Pinnline

Direktna primena iterativne formule (1) je ponekad mukotrpna. Zbog toga su Ford i Pennline, [4] predložili sledeću alternativnu formulu:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{Q_{n+1}(x_k)}{Q_{n+2}(x_k)}, k = 0,1,2,... \tag{2}$$

pri čemu su funkcije Q_n definisane rekurzivno sa

$$Q_2(x) = 1$$
$$Q_{n+1}(x) = f'(x)Q_n(x) - \frac{1}{n} f(x)Q_n'(x), \quad n = 2,3,\ldots.$$

Formula (2) je ekvivalentna formuli (1), ali je jednostavnja za implementaciju. Red konvergencije iterativnog postupka (2) je takođe $n+1$.

Uvedimo skraćeno označavanje:

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}, \qquad A_\nu(x) = \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!\, f(x)}, \quad \nu = 1,2,\ldots.$$

Formule (1) i (2) za $n = 1$ daju Njutnov-Rafsonov postupak

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - u(x_k), \quad k = 0,1,\ldots,$$

a za $n = 2,3,\ldots$ dobijamo sledeće iterativne postupke

- *Halejev postupak, [7], red konvergencije 3:*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{u(x_k)}{1 - A_2(x_k)u(x_k)}, \quad k = 0,1,\ldots$$

- *Kišov postupak, [12], red konvergencije 4:*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{u(x_k)\left(1 - A_2(x_k)u(x_k)\right)}{1 - 2A_2(x_k)u(x_k) + A_3(x_k)u(x_k)^2}, \quad k = 0,1,\ldots$$

- *Kišov postupak [12], red konvergencije 5:*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{u(x_k)\left(1 - 2A_2(x_k)u(x_k) + A_3(x_k)u(x_k)^2\right)}{1 - 3A_2(x_k)u(x_k) + \left(2A_3(x_k) + A_2(x_k)^2\right)u(x_k)^2 - A_4(x_k)u(x_k)^3}, \quad k = 0,1,\ldots.$$

Nekoliko prvih iterativnih postupaka izvedenih iz formula (1) i (2) su već poznati iterativni postupci. Da li su i ostali postupci definisani tim formulama već poznati? Odgovor na ovo pitanje, potvrdan, dat je u radu [13], gde je dokazano da su postupci (1) i (2) ekvivalentni sa još pet drugih postupaka, publikovanih ranije.

1.1.3 Herceg&Herceg

U radu [11] prikazana je familija postupaka trećeg reda konvergencije za rešavanje nelinearnih jednačina. Pokazano je da ovoj familiji pripadaju neki već poznati postupci: Halejev postupak i postupak iz rada [1] i super Halejev postupak iz rada [6]. U tom radu su dati dovoljni uslovi za izlazni kriterijum $|x_{n+1} - \alpha| \le |x_{n+1} - x_n|$ za ovu familiju postupaka.

Familija iterativnih postupaka za izračunavanje jednostrukog rešenja nelinearne jednačine $f(x) = 0$ posmatra se pod pretpostavkama

$$f \in C^2[a,b], \quad f'(x) < 0, \; x \in [a,b], \; f(a) > 0 > f(b).$$

Pod ovim pretpostavkama funkcija f *ima jednu i samo jednu nulu* $\alpha \in (a,b)$.

Prvo je posmatran Njutn-Rafsonov postupak za izračunavanje aproksimacije za α

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,1,\ldots$$

za neku odgovarajuću početnu vrednost x_0. Ako je $f''(x) > 0$ ili $f''(x) < 0$ za $x \in [a,b]$, biramo x_0 tako da je $f(x_0)f''(x_0) > 0$, tj. $x_0 \in [a,\alpha)$ ili $x_0 \in (\alpha,b]$. Njutn-Rafsonov postupak konvergira kvadratno u nekoj okolini od α ako je $f'(\alpha) \ne 0$, [3].

Halejev klasičan postupak

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - \dfrac{f(x_n)f''(x_n)}{2f'(x_n)}},$$

može se zapisati i na sledeći način

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{2}{2 - t(x_n)},$$

gde je

$$t(x) = \frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Kod mnogih automatizovanih numeričkih algoritama računanje iterativnih aproksimacija se prekida ako je razlika dve uzastopne aproksimacije manja od date tolerancije. Tako, računaju se aproksimacije $x_1, x_2, \ldots$ i x_{n+1} se prihvata kao dovoljna aproksimacija tačnog rešenja α ako je $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$, gde je ε data tolerancija. Ovaj postupak se može opisati terminom nejednakost zaustavljanja.

Definicija 2. *Nejednakost* $|x_{n+1} - \alpha| \leq |x_{n+1} - x_n|$ *nazivamo nejednakost zaustavljanja.*

Ako za iterativni postupak važi nejednakost zaustavljanja, onda kao izlazni kriterijum, tj. kao kriterijum za prekidanje računanja, prihvatamo $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$, jer to obezbeđuje

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq \varepsilon .$$

Pod pretpostavkama koje su slične onim koje postavljamo za Njutnov postupak, u [11] dat je dokaz globalne monotone konvergencije trećeg reda za familiju postupaka. Takođe su dati i dovoljni uslovi za nejednakost zaustavljanja, tj. za izlazni kriterijum.

Familija postupaka se definiše

$$x_{n+1} = F_k(x_n), \quad n = 0,1,\ldots, \tag{3}$$

gde su funkcije F_k oblika

$$F_k(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \varphi_k(t(x)), \quad k = 1,2,\ldots \tag{4}$$

sa

$$t(x) = \frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2}$$

i funkcijama φ_k definisanim na sledeći način:

$$\varphi_0(s) = 1, \quad \varphi_k(s) = \frac{2}{2 - s \cdot \varphi_{k-1}(s)}, \quad k = 1,2,\ldots .$$

Funkcije φ_k se lako računaju. Navodimo prvih deset $\varphi_k(s)$, $k = 1,2,\ldots,10$:

$$\frac{2}{2-s},\ \frac{2-s}{2(1-s)},\ \frac{4-4s}{4-6s+s^2},\ \frac{4-6s+s^2}{4-8s+3s^2},\ -\frac{2(4-8s+3s^2)}{-8+20s-12s^2+s^3}$$

$$\frac{-8+20t-12t^2+t^3}{4(-2+6t-5t^2+t^3)},\ -\frac{8(-2+6s-5s^2+s^3)}{16-56s+60s^2-20s^3+s^4},\ \frac{16-56s+60s^2-20s^3+s^4}{16-64s+84s^2-40s^3+5s^4}$$

$$\frac{-2(16-64s+84s^2-40s^3+5s^4)}{-32+144s-224s^2+140s^3-30s^4+s^5},\ \frac{-32+144s-224s^2+140s^3-30s^4+s^5}{-32+160s-288s^2+224s^3-70s^4+6s^5}.$$

Lako se vidi da su Njutnova i Halejeva iterativna funkcija specijalni slučajevi za (4) sa F_0 i F_1 respektivno. Njutnov postupak ne pripada familiji postupaka trećeg reda, ali se može posmatrati kao granični slučaj ($s \to 0$).

U [1] konstruisan je novi postupak zasnovan na Njutnov-Rafsonovom postupku. Postupak je dat sa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{\left(f(x_n)\right)^2 f''(x_n)}{2\left(f'(x_n)\right)^3 - 2f(x_n)f'(x_n)f''(x_n)}.$$

Posle jednostavnih transformacija ovaj postupak se može zapisati i na sledeći način

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{2-t(x_n)}{2\left(1-t(x_n)\right)} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\varphi_3\left(t(x_n)\right), \tag{5}$$

To je metod (4) sa

$$F_3(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}\varphi_3\left(t(x)\right). \tag{6}$$

U [6] je posmatrano ubrzavanje Njutnovog postupka. Novi postupak je nazvan super Halejev i dat je sa

$$x_0 = a, \quad x_{n+1} = x_n - \left[1 + \frac{t(x_n)}{2\left(1-t(x_n)\right)}\right]\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{7}$$

Lako se vidi da je postupak (7) isti kao postupak (5), tj. ovo je postupak (3) a F_3 dato sa (6). Pored toga u (7) je $x_0 = a$, jer teorema 2 pretpostavlja $x_0 \in [a, \alpha]$.

1.1.4 Traub

Neka je $\alpha \in D$ rešenje jednačine $f(x) = 0$. Neka je f' funkcija koja nema nulu u D i neka je $f^{(s)}$ neprekidna funkcija u D. Tada f ima inverznu funkciju F i $F^{(s)}$ je neprekidna u okolini nule. Neka je Q_s polinom čiji se prvih $s-1$ izvoda poklapaju sa F u tački $y = f(x)$. Tada je

$$F(t) = Q_s(t) + \frac{F^{(s)}(z(t))}{s!}(t-y)^s$$

i

$$Q_s(t) = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{F^{(j)}(y)}{j!}(t-y)^j,$$

gde $z(t)$ pripada intervalu definisanom sa y i t.

Neka je

$$E_s = Q_s(0)$$

i

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Sada je

$$E_s = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{(-1)^{(j)}}{j!} F^j f^j,$$

ili

$$E_s = x - \sum_{j=1}^{s-1} \frac{(-1)^{(j-1)} F^j}{j!\left(F'\right)^j} u^j$$

Koristeći

$$Y_j(x) = \left. \frac{(-1)^{(j-1)} F^j(y)}{j!\left(F^{'}(y)\right)^j} \right|_{y=f(x)}.$$

Možemo da napišemo

$$E_s = x - \sum_{j=1}^{s-1} Y_j u^j,$$

i

$$\alpha = E_s + \frac{(-1)^s F^{(s)}\big(z(0)\big)}{s!\,(F')^s} u^s.$$

Ako je $x_0 \in D$ neka početna aproksimacija za α, dobija se iterativni postupak

$$x_{n+1} = E_s(x_n), \;\; n = 0,1,\ldots$$

koji pod određenim uslovima konvergira ka α sa redom konvergencije s.

U mnogim radovima su konstruisani postupci sa istom funkcijom koraka E_s i dokazivana je njihova konvergencija reda s. Bogat skup referenci koje upućuju na te radove nalazi se u [16].

2 Neke oznake, definicije i teoreme

2.1 Oznake

Koristićemo sledeće oznake:

- $C[a,b]$ i $C(D)$ skup svih funkcija na $[a,b]$ odnosno na D neprekidnih funkcija
- $C^n[a,b]$ i $C^n(D)$ skup svih funkcija na $[a,b]$ odnosno na D n puta neprekidno diferencijabilnih funkcija
- $In(x_1,x_2,\dots,x_k)=(\min\{x_1,x_2,\dots,x_k\},\max\{x_1,x_2,\dots,x_k\})$

2.2 Definicije i teoreme

Definicija 3. *(Lipšicov uslov) Ako za funkciju* $f:[a,b]\subset R\to R$ *za svako* $x,y\in[a,b]$ *važi*

$$|f(x)-f(y)|\le\gamma|x-y|$$

kažemo da funkcija f *zadovoljava Lipšicov uslov i pišemo* $f\in Lip_\gamma[a,b]$.

Teorema 1. (Darbuova teorema*) Neka je* $f\in C[a,b]$. *Pretpostavimo da* $f'(x)$ *postoji za svako* $x\in[a,b]$ *i da je* $A=f'(a)$ *i* $B=f'(b)$. *Tada za svako* $C\in In(A,B)$ *postoji* $\tau\in(a,b)$ *takvo da je* $C=f'(\tau)$.

2.2.1 Interpolacija

U ovom radu posmatramo realne funkcije jedne realne promenljive. Znači, svi brojevi i nizovi koje posmatramo su realni brojevi, ako se drugačije ne naglasi.

Neka je $F(x;a_0,a_1,\dots,a_n)$ funkcija koja zavisi od $n+1$ parametra $a_0,a_1,\dots,a_n$. Problem interpolacije za funkciju F sastoji se u određivanju parametara a_i tako da za zadate čvorne tačke $(x_i,y_i), i=0,1,\dots,n, x_i\ne x_j$ za $i\ne j$ važi

$$F(x_i;a_0,a_1,\dots,a_n)=y_i,\qquad i=0,1,\dots,n.$$

F se naziva interpolaciona funkcija, ako je $y_i=f(x_i)$ kaže se da je F interpolaciona funkcija za funkciju f, tj. F interpolira f. U daljem radu pretpostavljamo da je uvek $y_i=f(x_i)$.

Ako je F linearna funkcija u odnosu na parametre a_i

$$F(x_i;a_0,a_1,\dots,a_n)=a_0F_0(x)+a_1F_1(x)+\dots+a_nF_n(x)$$

onda se govori o linearnoj interpolaciji. Funkcije $F_i(x)$ pripadaju nekom dopustivom skupu funkcija.

Ako je

$$F_i(x) = x^i, \quad i = 0,1,\ldots,n,$$

govorimo o polinomnoj interpolaciji.

Teorema 2. *Ako su $x_0, x_1, \ldots, x_n$ međusobno različiti brojevi, onda za proizvoljne brojeve $y_0, y_1, \ldots, y_n$ postoji jedan i samo jedan polinom*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

za koji važi

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,\ldots,n.$$

Interpolacioni polinom je za date čvorne tačke jedinstven, ali se može zapisati u više oblika.

Definicija 4. Lagranžov oblik interpolacionog polinoma (Lagranžov polinom) je dat sa

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Drugi oblik interpolacionog polinoma zadaje se preko podeljenih razlika i naziva Njutnov interpolacioni polinom.

Definicija 5. *Neka su date tačke $(x_i, y_i), i = 0,1,\ldots,n, x_i \neq x_j, i \neq j$. Podeljene razlike $k-tog$ reda označavaju se sa $y[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]$ i određuju na sledeći način:*

za $k = 0$

$$y[x_i] = y_i, \quad i = 0,1,\ldots,n$$

za $k = 1,2,\ldots,n$

$$y[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{y[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - y[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}, \quad i = 0,1,\ldots,n-k.$$

Navodimo nekoliko važnih osobina podeljenih razlika koje ćemo kasnije koristiti.

Teorema 3. *Za podeljene razlike važi*

$$y[x_0, x_1, \dots, x_k] = \sum_{i=0}^{k} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k} \frac{1}{x_i - x_j}, \quad k = 1,2,\dots,n.$$

Neposredno iz prethodne teoreme kao posledicu dobijamo da je podeljena razlika $y[x_0, x_1, \dots, x_k]$ simetrična funkcija argumenata x_i, tj. ako je $x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ proizvoljna permutacija brojeva $x_0, x_1, \dots, x_k$ onda je

$$y[x_0, x_1, \dots, x_k] = y\left[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\right].$$

Teorema 4. *Neka su date tačke* $(x_i, y_i), i = 0,1, \dots, n, x_i \neq x_j, i \neq j$. *Interpolacioni polinom za ove tačke se može zapisati u obliku*

$$N_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y[x_0, x_1, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j).$$

Greška interpolacije $f(x) - N_n(x)$ može se iskazati i preko podeljenih razlika.

Teorema 5. *Neka je funkcija* $f(x)$ *definisana u intervalu* $[a, b]$ *i neka su* $x_i \epsilon [a, b], i = 0,1, \dots n$, *međusobno različite vrednosti. Ako je* $N_n(x)$ *interpolacioni polinom za čvorne tačke* $\left(x_i, f(x_i)\right), i = 0,1, \dots, n$, *onda za svako* $x \epsilon [a, b]$ *važi*

$$f(x) - N_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

Teorema 6. *Neka su čvorovi interpolacije* $x, x_0, x_1, \dots, x_k$ *međusobno različiti, neka je funkcija* f *neprekidna na intervalu* $In(x, x_0, x_1, \dots, x_k)$ *i neka* $f^{(k+1)}(x)$ *postoji u svakoj tački istog interval. Tada za neko* $\xi = \xi(x)$ *iz intervala* $In(x, x_0, x_1, \dots, x_k)$ *važi*

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k, x] = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}.$$

Ako su brojevi x_i međusobno različiti i ako su poznate vrednosti funkcije f u ovim tačkama, onda možemo koristiti aproksimaciju

$$\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} \approx f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}].$$

Za razliku od Lagranžove interpolacione formule, Njutnova interpolaciona formula dozvoljava da među čvorovima interpolacije ima i jednakih. Ova fleksibilnost Njtnove formule se često koristi.

Do sada smo pretpostavljali da su čvorovi interpolacije međusobno različiti. Sada ćemo posmatrati i slučaj kada među čvorovima interpolacije ima i jednakih.

U slučajevima kada čvorovi nisu međusobno različiti podeljene razlike se definišu kao granične vrednosti odgovarajućih količnika:

$$y\left[\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{k_0\ puta}; \underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{k_1\ puta}; \ldots; \underbrace{x_n, x_n, \ldots, x_n}_{k_n\ puta}\right] =$$
$$= \lim y\left[x_0, x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(k_0-1)}; x_1, x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(k_1-1)}; \ldots; x_n, x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(k_n-1)}\right]$$

kada $x_i^{(j)} \to x_i$ a svi $x_i^{(j)}$ su međusobno različiti, tj. $x_i^{(j)} \neq x_k^{(j)}$ za $i \neq k$, [2]. Za postojanje takve granične vrednosti potrebne su dodatne pretpostavke za funkciju f. Tako, saglasno našoj definiciji, imamo

$$y[x_0, x_0] = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

pod pretpostavkom da postoji izvod funkcije f u tački x_0. Za podeljene razlike važi:

1. Podeljene razlike su simetrične funkcije svojih argumenata.
2. Neka je $f \in C^m[a,b]$ i $z_i \in [a,b]$, $i = 0,1,\ldots,m$, onda je $f[z_0, z_1, \ldots, z_m]$ neprekidna funkcija argumenata $z_0, z_1, \ldots, z_m$. Na primer,

$$\lim_{y \to y_0} f[x, y, z] = f[x, y_0, z]$$

3. Bez obzira da li su z_i različiti ili ne važi

$$f[z_0, z_1, \ldots, z_m] = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}$$

za neko $\xi \in In(z_0, z_1, \ldots, z_m)$.

Kao posledicu imamo

$$f[z, z, \ldots, z] = \frac{f^{(m)}(z)}{m!}\ , z \in [a, b] \qquad (8)$$

4. Njutnova formula za interpolacioni polinom $p(z)$ funkcije $f(z)$ u tačkama $z_0, z_1, \ldots, z_m$, bez obzira da li se one razlikuju ili ne, data je sa

$$p(z) = f(z_0) + \sum_{i=1}^{m} f[z_0, z_1, \dots, z_i] \prod_{s=0}^{i-1} (z - z_s), \tag{9}$$

a odgovarajuća greška je

$$f(z) - p(z) = f[z_0, z_1, \dots, z_m, z] \prod_{s=0}^{m} (z - z_s). \tag{10}$$

Za razliku od Lagranžove interpolacione formule, Njutnova interpolaciona formula dozvoljava da se tačke interpolacije poklope.

- Kada su z_i međusobno različiti, $p(z)$ se može odrediti pomoću $f(z_0), f(z_1), \dots, f(z_m)$. U ovom slučaju, podeljene razlike se izračunavaju na osnovu definicije podeljenih razlika.
- U slučaju kada je $z_0 = z_1 = \dots = z_m$, po (8) $p(z)$ u (9) postaje Tejlorov polinom $m - tog$ stepena funkcije f u z_0. Izrazi $f(z) - p(y)$ dat u (10) postaju odgovarajući ostatak.
- U slučaju da z_i nisu svi različiti, postupa se na sledeći način: Označavaćemo različite z_i sa $a_1, a_2, \dots, a_r$. Za svako $i = 1, \dots, r$, označavaćemo broj pojavljivanja broja a_i sa s_i. Znači,

$$m + 1 = \sum_{i=1}^{r} s_i.$$

Zatim preuređujemo skup z_i na sledeći način:

$$z_0 = z_1 = \dots = z_{s_1 - 1} = a_1,$$
$$z_{s_1} = z_{s_1+1} = \dots = z_{s_1+s_2-1} = a_2,$$
$$z_{s_1+s_2} = z_{s_1+s_2+1} = \dots = z_{s_1+s_2+s_3-1} = a_3, \dots$$

Polinom $p(z)$ u (9) koji se naziva opšti Hermitov interpolant, interpolira $f(z)$ tako da važi:

$$p^{(j)}(a_i) = f^{(j)}(a_i), \qquad j = 0,1, \dots, s_i - 1, i = 1,2, \dots, r.$$

Za date $f^{(j)}(a_i)$, $j = 0,1, \dots, s_i - 1$, $i = 1, \dots, r$, podeljene razlike mogu se konstruisati kao ranije i pomoću njih se određuje interpolacioni polinom $p(z)$.

2.2.2 Red konvergencije

Definicija 6. *Neka je dat niz* $x_0, x_1, \dots$. *Kažemo da je* $p \in [1, \infty)$ *red konvergencije tog niza ako je*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_{k+1}-\alpha|^{p}}=C,$$

gde je α realan broj a C konstanta različita od nule. Ako je $p=1$, onda dodatno pretpostavljamo da je $C<1$.

Konvergencija reda p implicira da niz $x_0, x_1, \ldots$ konvergira ka α kada $k \to \infty$. Takođe, kaže se da je red konvergencije niza $x_0, x_1, \ldots$ najmanje p ako dozvolimo da konstanta C može biti jednaka nuli.

Ekvivalentan zapis je

Definicija 7. *Niz $x_0, x_1, \ldots$ ima red konvergencije $p \in [1,\infty)$ ako postoje konstanta C različita od nule i prirodan broj n_0 takvi da je*

$$|x_{k+1}-\alpha| \le C|x_k-\alpha|^{p}, \quad k \ge n_0.$$

Ako je $p=1$, onda dodatno pretpostavljamo da je $C<1$.

Red konvergencije se koristi za upoređivanje brzine konvergencije nizova. Pri tome pretpostavljamo da je brzina konvergencije broj iterativnih koraka potrebnih da se približimo graničnoj vrednosti sa zadatom tačnošću. Pretpostavimo da imamo dva konvergentna niza $x_0, x_1, \ldots$ *i* $z_0, z_1, \ldots$ sa istom graničnom vrednošću α i neka su njihovi redovi konvergencije p_1 i p_2 respektivno. Ako je $p_1 > p_2$ kažemo da niz $x_0, x_1, \ldots$ asimptotski konvergira brže od niza $z_0, z_1, \ldots$.

Definicija 8. *Red konvergencije iterativnog postupka jednak je redu konvergencije iterativnog niza dobijenog posmatranim iterativnim postupkom.*

Definicija 9. *Kažemo da je iterativni postupak sa redom konvergencije p_1 brži od iterativnog postupka sa redom konvergencije p_2 ako je $p_1 > p_2$.*

3 Iterativni postupci

3.1 Uvod

Neka je $\alpha \in (a,b)$ rešenje jednačine $f(x) = 0$. Pretpostavimo da je $f(x)$ dva puta neprekidno diferencijabilna na $[a,b]$. Neki iterativni postupci koje se koriste za rešavanje $f(x) = 0$ i koje direktno koriste $f(x)$ su Njutn-Rafsonov postupak, regula falsi postupak (ili postupak lažnog položaja), postupak sečice, i Stefensenov postupak. Sva četiri postupka su izvedena iz postupka linearne interpolacije. U ovom delu posmatraćemo prvo Njutn-Rafsonov postupak, a zatim postupke regula falsi, sečice i Stefensenov postupak. Poslednja tri postupka možemo posmatrati i kao modifikacije Njutnovog postupka nastale aproksimacijom prvog izvoda diferencnim količnicima.

Pretpostavimo da su aproksimacije x_k rešenja α jednačine $f(x) = 0$ određena za sve $k \leq n$, i da je još jedna aproksimacija c na raspolaganju. Sledeća aproksimacija x_{k+1} se određuje kao tačka preseka prave određene tačkama $(x_n, f(x_n))$ i $(c, f(c))$ sa x −osom. Jednačina ove prave je

$$y = f(x_n) + \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c}(x - x_n), \tag{11}$$

a x_{n+1} se izračunava pomoću

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c}}. \tag{12}$$

Oduzimanjem α sa obe strane prethodne jednakosti, dobijamo

$$x_{n+1} - \alpha = -\frac{f(x_n) + \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c}(\alpha - x_n)}{\frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c}}. \tag{13}$$

Primetimo da gornja jednakost važi i kada je $c = x_n$, kao što je slučaj u Njutn-Rafsonovoj metodi. U ovom slučaju, u pitanju je prava, čija je jednačina

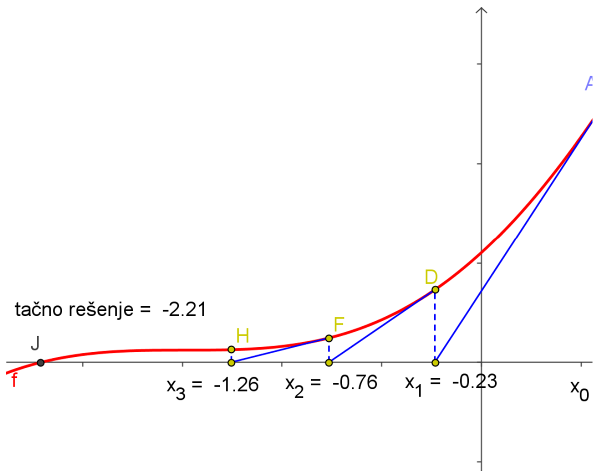
$$y = f(x_n) + f^{'}(x_n)(x - x_n)$$

i koja je tangenta krive $y = f(x)$ u tački $(x_n, f(x_n))$, i može se dobiti kada $c \to x_n$ u (2). Polinom

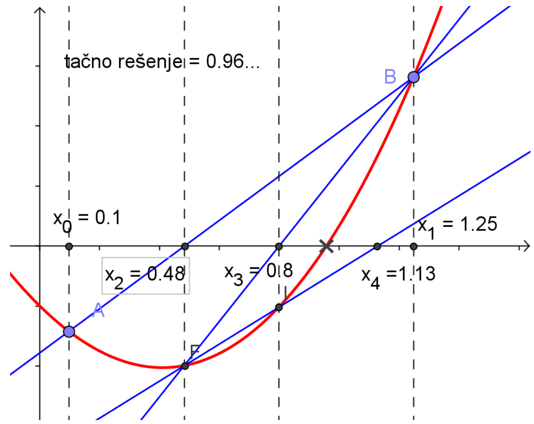
$$p(x) = f(x_n) + f^{'}(x_n)(x - x_n)$$

je linearan interpolant, koji zadovoljava da je $p(x_n) = f(x_n)$ i $p'(x_n) = f'(x_n)$. Može se tretirati kao bilo koji Njutnov interpolacioni polinom.

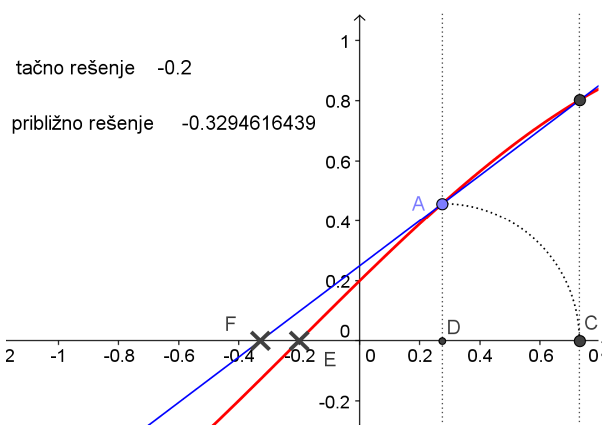
Na sledećim slikama date su geometrijske interpretacije posmatranih postupaka.



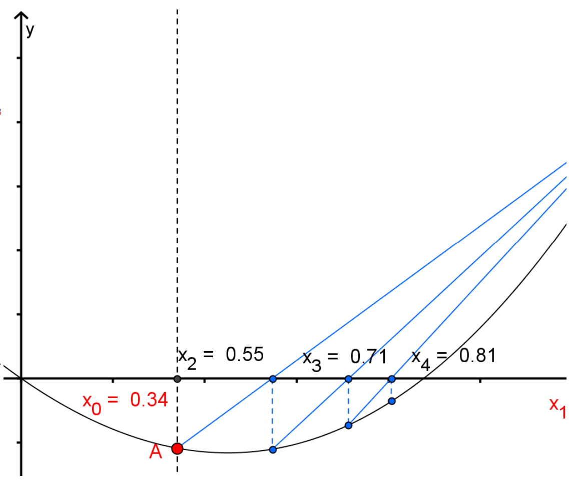
Slika 1. Njutn-Rafsonov postupak



Slika 2. Metoda sečice



Slika 3. Stefensenov postupak



Slika 3.Postupak regula falsi

3.2 Njutn-Rafsonov postupak

Jedan od najpopularnijih metoda za rešavanje jednačina je Njutnov (ili Njutn-Rafsonov) metod. Ovaj postupak potiče od Njutna, ali ga je u današnjem obliku formulisao Rafson. Njutnov originalni pristup dat je u osmoj glavi.

Posmatramo jednačinu

$$f(x) = 0.$$

U osnovi Njutn-Rafsonovog postupka je aproksimacija posmatrane funkcije f linearnom funkcijom u blizini rešenja. Za linearnu funkciju se uzima tangenta na krivu $f(x)$ u tački $\left(x_0, f(x_0)\right)$, gde je x_0 početna aproksimacija traženog rešenja. Presek tangente i x −ose je nova aproksimacija x_1 traženog rešenja. Sada se postavlja tangenta na krivu $f(x)$ u tački (x_1, fx_1) i postupak se nastavlja. Ukoliko je početna aproksimacija dovoljno blizu rešenja jednačine opisanim postupkom se može odrediti približno rešenje sa proizvoljnom tačnošću (ne uzimajući u obzir greške nastale usled računanja u aritmetici konačne preciznosti). Jednačina tangente u tački $\left(x_0, f(x_0)\right)$ je

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Ako je $f'(x_0) \neq 0$, naredna aproksimacija x_1 se dobija kao rešenje jednačine $y(x) = 0$, tj.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Ako je x_k k −ta aproksimacija rešenja posmatrane jednačine, sledeće aproksimacije se dobijaju po iterativnom pravilu

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \;\; k = 0,1, \ldots.$$

Sledeću teoremu dajemo bez dokaza na ovom mestu. Njen dokaz ćemo dati kasnije, zajedno sa dokazom konvergencije postupka sečice.

Teorema 7. *Neka je funkcija $f \in C^2[a,b]$ takva da je $|f'(x)| \geq m > 0$, za $x \in [a,b]$. Ako jednačina $f(x) = 0$ ima rešenje $\xi \in (a,b)$, onda postoji $\eta > 0$ takvo da je za svako x_0 sa osobinom*

$$|x_0 - \xi| \leq \eta,$$

niz $\{x_k\}$ definisan iterativnim pravilom

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \;\; k = 0,1, \ldots$$

postoji i konvergira ka ξ. Pri tome važi

$$|x_k - \xi| \leq \frac{M}{2m}|x_k - x_{k-1}|^2, \;\; k = 1,2, \ldots$$

$$|x_k - \xi| \leq \frac{2m}{M} q^{2^k}, \;\; k = 0,1, \ldots$$

gde je

$$M \geq \left|f''(x)\right|,\ x \in [a,b] \qquad \text{i} \qquad q = \eta \frac{M}{2m} < 1.$$

Prethodna teorema daje uslove za konvergenciju Njutnovog postupka. Ovaj postupak je kvadratno konvergentan. Uslov $|f''(x)| \leq M, x \in D$, može s zameniti i slabijim uslovom $f' \in Lip_\gamma(D)$, [10]. Pretpostavka o konstantnom znaku prvog izvoda nije veliko ograničenje, jer na osnovu Darbuove teoreme iz $f'(x) \neq 0$ na intervalu D za neprekidnu funkciju f sledi i konstantan znak f' na posmatranom intervalu. Ukoliko je ξ rešenje jednačine $f(x) = 0$ višestrukosti 2, Njutnov postupak nije kvadratno već linearno konvergentan.

3.3 Postupak sečice

Njutnov postupak zahteva izračunavanje vrednosti prvog izvoda u svakoj iteraciji, što nije pogodno ako je izvod funkcije komplikovan izraz. Jedan način da se ova teškoća izbegne je pojednostavljeni Njutnov postupak, ali tako se dobija linearno konvergentan postupak. Primenom interpolacionih iterativnih funkcija može se izbeći izračunavanje izvoda u svakoj tački, a dobijeni postupci imaju veći red konvergencije od pojednostavljenog Njutnovog postupka. Kod ovih postupaka formira se interpolacioni polinom $p(x)$ za funkciju $f(x)$ sa čvorovima u već izračunatim aproksimacijama $x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_{k-j}$, a zatim se vrednost $f'(x_k)$ aproksimira izvodom polinoma $p'(x_k)$. Tako se dobija j −koračno iterativno pravilo

$$x_{k+1} = \varphi(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-j}) = x_k - \frac{f(x_k)}{p'(x_k)},\ \ k = j, j+1, \dots$$

Najpoznatiji postupak ovog tipa je postupak sečice. Neka su date dve početne aproksimacije x_0 i x_1 rešenja jednačine $f(x) = 0$. Linearni interpolacioni polinom za funkciju $f(x)$ sa čvornim tačkama $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ ima oblik

$$p(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0),$$

gde je $f[x_0, x_1]$ podeljena razlika prvog reda, pa je njegov izvod

$$p'(x) = f[x_0, x_1].$$

Zamenjujući $f'(x_1)$ u Njutnovom iterativnom pravilu sa $p'(x_1)$, dobija se aproksimacija x_2,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f[x_{0.}, x_1]} = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1).$$

Pri izračunavanju aproksimacije x_{k+1} formira se interpolacioni polinom sa čvornim tačkama $\left(x_k, f(x_k)\right), \left(x_{k-1}, f(x_{k-1})\right)$, pa se na opisan način, uz pretpostavku $x_k \neq x_{k-1}$ i $f(x_k) \neq f(x_{k-1})$, dobija iterativno pravilo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \quad k = 1,2, \dots$$

Uslovi za konvergenciju postupka sečice dati su u sledećoj teoremi. Ovde ovu teoremu dajemo bez dokaza. Njen dokaz ćemo dati kasnije, zajedno sa dokazom konvergencije Njutn-Rafsonovog postupka.

Teorema 8. *Neka je funkcija $f \in C^2[a,b]$ takva da je $|f'(x)| \geq m > 0$, za $x \in [a,b]$. Ako jednačina $f(x) = 0$ ima rešenje $\xi \in (a,b)$, onda postoji $\eta > 0$ takvo da za sve $x_0, x_1 \in (\xi - \eta, \xi + \eta)$, $x_0 \neq x_1$*

postupak sečice konvergira ka ξ i važe ocene

$$|x_k - \xi| \leq \frac{2m}{M} q^{F_k}, \quad k = 2,3, \dots$$

i

$$|x_k - \xi| \leq \frac{M}{2m} |x_{k-1} - x_k| |x_{k-2} - x_k|, k = 2,3, \dots$$

gde je

$$M \geq |f''(x)|, x \in D, \qquad q = \frac{M}{2m} \eta < 1,$$

a F_k su Fibonačijevi brojevi,

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_{k+1} = F_k + F_{k-1}, \quad k = 2,3, \dots$$

ili se postupak prekida zbog $f(x_k) = 0$.

Kako za Fibonačijeve brojeve važi

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}\right), \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right),$$

broj λ_1 postaje dominantan za veliko k, pa se može pokazati da je red konvergencije postupka sečice $\lambda_1 \approx 1.618 \dots$

3.4 Stefensenov postupak

Kod Stefensenovog postupka ponovo aproksimiramo prvi izvod funkcije izvodom interpolacionog polinoma određenog sa dve tačke.

Neka su date dve početne aproksimacije x_0 i x_1 rešenja jednačine $f(x) = 0$. Linearni interpolacioni polinom za funkciju $f(x)$ sa čvornim tačkama $\big(x_1, f(x_1)\big)$, $(x_1 + f(x_1), f(x_1 + f(x_1))$ ima oblik

$$p(x) = f(x_1) + f[x_1, x_1 + f(x_1)](x - x_1),$$

gde je $f[x_1, x_1 + f(x_1)]$ podeljena razlika prvog reda, pa je njegov izvod

$$p'(x) = f[x_1, x_1 + f(x_1)].$$

Zamenjujući $f'(x_1)$ u Njutnovom iterativnom pravilu sa $p'(x_1)$, dobija se aproksimacija x_2,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f[x_1, x_1 + f(x_1)]} = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1 + f(x_1)) - f(x_1)} f(x_1).$$

Pri izračunavanju aproksimacije x_{k+1} formira se interpolacioni polinom sa čvornim tačkama $\big(x_k, f(x_k)\big), \Big(x_k + f(x_k), f\big(x_k + f(x_k)\big)\Big)$, pa se na opisan način dobija iterativno pravilo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f\left(x_k + f(x_k)\right) - f(x_k)}{f(x_k)}} = x_n - \frac{f(x_k)}{f[x_k, x_k + f(x_n)]}.$$

3.4.1 Ejtkenov proces

Postoji još jedan pristup Stefensenovoj metodi, u kome se koristi postupak nepokretne tačke i Ejtken Δ^2-proces koji se koristi da se ubrza linearna konvergencija. Možemo početi od jednačine $x = \phi(x)$, čije rešenje ćemo označavati sa α. Neka je dato x_0, početna aproksimacija α. Postupak se odvija u nekoliko koraka:

Korak 0. Neka je $z_0 = x_0$ i $n = 0$.

Korak 1: Izračunati z_1 i z_2 preko $z_1 = \phi(z_0)$ i $z_2 = \phi(z_1)$.

Korak 2: Primeniti Ejtken Δ^2-proces na $\{z_0, z_1, z_2\}$ da se dobije x_{n+1}:

$$x_{n+1} = \frac{z_0 z_2 - z_1^2}{z_0 - 2z_1 + z_2} = z_0 - \frac{(z_1 - z_0)^2}{z_0 - 2z_1 + z_2}$$

Korak 3: Neka je $z_0 = x_{n+1}$ i neka $n \leftarrow n + 1$, i vtatiti se na Korak 1.

Sada, neka je $f(x) = \phi(x) - x$. Onda je α rešenje za $f(x) = 0$. Shodno tome, u smislu $f(z)$, imamo

$$z_1 = z_0 + f(z_0)$$

$$z_1 - z_0 = f(z_0)$$

$$z_2 - z_1 = f(z_1) = f\big(z_0 + f(z_0)\big).$$

Zbog toga je

$$z_0 - 2z_1 + z_2 = (z_2 - z_1) - (z_1 - z_0) = f(z_1) - f(z_0) = f\big(z_0 + f(z_0)\big) - f(z_0).$$

Kombinovanjem svega ovoga, Korak 2 izgleda ovako

$$x_{n+1} = z_0 - \frac{[f(z_0)]^2}{f\big(z_0 + f(z_0)\big) - f(z_0)} = z_0 - \frac{f(z_0)}{\dfrac{f\big(z_0 + f(z_0)\big) - f(z_0)}{f(z_0)}}.$$

Pošto je $z_0 = x_n$, imamo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f\big(x_n + f(x_n)\big) - f(x_n)}{f(x_n)}}.$$

Znamo da je $f(x) = \phi(x) - x$, uslov da je $f^{'}(\alpha) \neq 0$ je isto što i $\phi^{'}(\alpha) \neq 1$.

3.5 Postupak regula falsi

U ovoj metodi počinjemo sa dve početne tačke, $x_0 = c$ i x_1, takvo da je $f(c)f(x_1) < 0$, tako da $f(x) = 0$ ima rešenje α između c i x_1. Pretpostavimo da je α jedinstveno rešenje za $f(x) = 0$ između c i x_1. Tačka x_2 se određuje kao tačka preseka prave određene tačkama $\big(c, f(c)\big)$ i $\big(x_1, f(x_1)\big)$ sa $x - osom$. Ako je $f(x_2) = 0$, tada je $\alpha = x_2$ i onda se postupak završava. Ako je $f(c)f(x_2) < 0$, onda je c nepromenjeno i računamo sledeću iteraciju, inače, postavimo da je $c = x_1$ i na isti način nastavljamo izračunavanje sledeće iteracije.

U slučaju kada $f^{'}(x)$ i $f^{''}(x)$ imaju fiksne znake u intervalu koji sadrži α, tačka c ostaje fiksna. Dakle, u ovom slučaju, metoda regula falsi postaje metoda fiksne tačke u nekom trenutku tokom iteracionog postupka. Bez gubitka opštosti, pretpostavićemo da $c = x_0$ ostaje fiksna.

Pod uslovom da $c, x_n \in I$, formula za x_{n+1} u (12) i formula greške (13) mogu se izraziti kao

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(\eta_n)}$$

i

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{f''(\xi_n)(c - \alpha)}{2f'(\eta_n)}(x_n - \alpha)$$

$$\xi_n \in int(x_n, c, \alpha)$$

$$\eta_n \in int(x_n, c) \tag{14}$$

Ako $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ onda (13) daje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = \frac{f[c, \alpha, \alpha]}{f[c, \alpha]}(c - \alpha) = \frac{f''\overline{(\xi)}(c - \alpha)}{2f'(\bar{\eta})}$$

za $\bar{\xi}, \bar{\eta} \in int(c, \alpha)$, takođe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = 1 - \frac{f'(\alpha)}{f[c, \alpha]}$$

što govori da bi konvergencija niza $\{x_n\}$ mogla biti linearna.

4 Zajednički dokaz konvergencije Njutn-Rafsonovog postupka i postupka sečice

Delovi teoreme i dokaza koji se odnose samo na Njut-Rafsonov postupak pisani su u levoj koloni i odvojeni su od delova koji se odnose samo na postupak sečice vertikalnom linijom.

Teorema 10. *Neka je funkcija* $f \in C^2[a,b]$ *takva da je* $|f'(x)| \geq m > 0$, *za* $x \in [a,b]$. *Ako jednačina* $f(x) = 0$ *ima rešenje* $\xi \in (a,b)$, *onda postoji* $\eta > 0$ *takvo da je za svako*

$x_0 \in (\xi - \eta, \xi + \eta)$	$x_0, x_1 \in (\xi - \eta, \xi + \eta), \quad x_0 \neq x_1$

iterativni niz

$x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \ \ k = 0,1,\ldots$	$x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \ \ k = 1,2,\ldots$

dobro definisan i konvergira ka ξ. *Pri tome važi*

$\lvert x_k - \xi \rvert \leq \dfrac{M}{2m} \lvert x_k - x_{k-1} \rvert^2, \ \ k = 1,2,\ldots$	$\lvert x_k - \xi \rvert \leq \dfrac{M}{2m} \lvert x_{k-1} - x_k \rvert \lvert x_{k-2} - x_k \rvert, k = 2,3,\ldots$
$\lvert x_k - \xi \rvert \leq \dfrac{2m}{M} q^{2^k}, \ \ k = 0,1,\ldots$	$\lvert x_k - \xi \rvert \leq \dfrac{2m}{M} q^{F_k}, \ \ k = 0,1,\ldots$

gde je

$$M \geq \left| f''(x) \right|, \ \ x \in [a,b] \qquad i \qquad q = \eta \frac{M}{2m} < 1,$$

	a F_k *su Fibonačijevi brojevi,*
	$F_0 = F_1 = 1, \ \ F_{k+1} = F_k + F_{k-1}, \ \ k = 2,3,\ldots.$

Dokaz. Neka je $\tilde{\eta}$ najveći broj za koji važi $[\xi - \tilde{\eta}, \xi + \tilde{\eta}] \subset [a, b]$ i $0 < \eta < min\left\{\tilde{\eta}, \frac{2m}{M}\right\}$. Tada je $q = \eta \dfrac{M}{2m} < 1$. Prvo dokazujemo konvergenciju. Indukcijom dokazujemo da za svako $k = 0,1, \ldots$ važi

$$|x_{k+1} - \xi| \leq \frac{M}{2m} |x_k - \xi|^2$$

i da je

$$|x_{k+1} - \xi| \leq q|x_k - \xi| < \eta.$$

Tada je niz $\{x_k\}$ dobro definisan i konvergentan, jer je $x_k \in [\xi - \eta, \xi + \eta] \subset [a, b]$ i važi

$$|x_{k+1} - \xi| \leq q|x_k - \xi| \leq \cdots \leq q^{k+1}|x_0 - \xi|,$$

pa je

$$\lim_{k \to \infty} |x_{k+1} - \xi| = 0.$$

Prvo, za $x_0, x_1 \in (\xi - \eta, \xi + \eta)$, $x_0 \neq x_1$, važi

$$\frac{M}{2m}\left|x_j - \xi\right| \leq \frac{M}{2m}\eta = \mathrm{q}, \quad \mathrm{j} = 0,1.$$

Ako je

	$x_0 \neq \xi$	$x_0 \neq \xi$ i $x_1 \neq \xi$
onda je		

$$\begin{aligned} x_1 - \xi &= x_0 - \xi - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \xi - \frac{f(x_0) - f(\xi)}{f'(x_0)} \\ &= \frac{f(\xi) - f(x_0) - f'(x_0)(\xi - x_0)}{f'(x_0)} \\ &= \frac{f''(\tau)(\xi - x_0)^2}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 - \xi &= x_1 - \xi - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1) \\ &= x_1 - \xi - \frac{f(x_1) - f(\xi)}{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}} \\ &= (x_1 - \xi)\left(1 - \frac{f[\xi, x_1]}{f[x_0, x_1]}\right) \\ &= (x_1 - \xi)(x_0 - \xi)\frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, \xi]}{f[x_0, x_1](x_0 - \xi)} \\ &= (x_1 - \xi)(x_0 - \xi)\frac{f[x_0, x_1, \xi]}{f[x_0, x_1]} \end{aligned}$$

Kako je

$$M \geq \left|f''(x)\right|, \ \ x \in [a, b]$$

$$|f'(x_0)| \geq m$$

$$f[x_0, x_1, \xi] = \frac{f''(\beta)}{2}, \ \ \beta \in In(x_0, x_1, \xi)$$

$$f[x_0, x_1] = f'(\tau), \ \ \tau \in In(x_0, x_1)$$

sledi

$$|x_1 - \xi| \leq \frac{M}{2m}|x_0 - \xi|^2$$

$$|x_1 - \xi| \leq \frac{M}{2m}|x_0 - \xi|^2 \leq \frac{M}{2m}\eta|x_0 - \xi| \leq q|x_0 - \xi| < |x_0 - \xi| \leq \eta$$

$$|f[x_0, x_1, \xi]| \leq \frac{M}{2}, \ \ |f[x_0, x_1]| \geq m$$

$$|x_2 - \xi| \leq |x_1 - \xi||x_0 - \xi|\frac{M}{2m} \leq |x_1 - \xi|\eta\frac{M}{2m} \leq q|x_1 - \xi| < |x_1 - \xi| \leq \eta$$

$$|x_2-\xi| \le |x_1-\xi||x_0-\xi|\frac{M}{2m} \le |x_0-\xi|\eta\frac{M}{2m} \le q|x_0-\xi| < |x_0-\xi| \le \eta$$

Odavde se vidi da

$$x_1 \in [\xi-\eta, \xi+\eta]$$

$$x_2 \in [\xi-\eta, \xi+\eta] \quad \text{i} \quad x_2 \neq x_1$$

Dokaz se analogno sprovodi za svako k, tj. da važi

$$x_k \in [\xi-\eta, \xi+\eta]$$

$$x_k \in [\xi-\eta, \xi+\eta] \quad \text{i} \quad x_k \neq x_{k-1}$$

$$|x_{k+1}-\xi| \le q|x_k-\xi|.$$

Ukoliko je $f(x_{k+1})=0$, postupak se prekida, a ako je $f(x_{k+1}) \neq 0$, nastavlja se na opisan način.

Znači, dokazano je

$$|x_{k+1}-\xi| \le q|x_k-\xi| \le \cdots \le q^{k+1}|x_0-\xi|,$$

pa je

$$\lim_{k\to\infty}|x_{k+1}-\xi| = 0$$

odnosno

$$\lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \xi.$$

Na osnovu definicije iterativnih postupaka i Lagranžove teoreme, imamo za neko $\tau_k \in In(x_{k-1}, x_k)$ i neko $\theta_k \in In(x_{k-2}, x_{k-1}, x_k)$

$$f(x_k) = \underbrace{f(x_{k-1}) + f'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})}_{=0} + \frac{f''(\tau_k)}{2}(x_k -$$

$$= \frac{f''(\tau_k)}{2}(x_k - x_{k-1})^2$$

$$|x_k - \alpha| \le \frac{|f(x_k)|}{m} \le \frac{M}{2m}(x_k - x_{k-1})^2$$

$$f(x_k) = \underbrace{f(x_{k-1}) + f[x_{k-1}, x_{k-2}](x_k - x_{k-1})}_{=0} + \frac{f''(\theta_k)}{2}(x_k - x_{k-1})(x_k -$$

$$= \frac{f''(\theta_k)}{2}(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k-2})$$

$$|x_k - \alpha| \le \frac{|f(x_k)|}{m} \le \frac{M}{2m}|x_k - x_{k-1}||x_k - x_{k-2}|$$

Dokazaćemo indukcijom da važi

$$|x_k - \alpha| \le \frac{2m}{M} q^{2^k}$$

$$|x_k - \alpha| \le \frac{2m}{M} q^{F_k}$$

Već smo dokazali, to je slučaj $k = 1$, odnosno $k = 2$,

$$|x_1 - \alpha| \le \frac{M}{2m}(\alpha - x_0)^2 = \frac{2m}{M}\left(\frac{M}{2m}(\alpha - x_0)\right)^2 \le \frac{2m}{M} q^2$$

$$|x_2 - \alpha| \le \frac{M}{2m}|\alpha - x_0||\alpha - x_1| = \frac{2m}{M}\left(\frac{M}{2m}|\alpha - x_0|\right)\left(\frac{M}{2m}|\alpha - x_1|\right) \le$$

i

$$\left|x_{k+1}-\alpha\right| \le \frac{M}{2m}\left(\alpha - x_k\right)^2$$

$$\left|x_{k+1}-\alpha\right| \le \frac{M}{2m}\left|\alpha - x_k\right|\left|\alpha - x_{k-1}\right|$$

sada na osnovu induktivne pretpostavke

$$\left|x_k-\alpha\right| \le \frac{2m}{M} q^{2^k}$$

$$\left|x_k-\alpha\right| \le \frac{2m}{M} q^{F_k}$$

sledi

$$|\, x_{k+1}-\alpha \,| \le \frac{M}{2m}(\alpha - x_k)^2 = \frac{M}{2m}\left(\frac{2m}{M} q^{2^k}\right)^2 \le \frac{2m}{M}\left(q^{2^k}\right)^2 = \frac{2m}{M}$$

$$|\, x_{k+1}-\alpha \,| \le \frac{M}{2m}\left(\frac{2m}{M} q^{F_k}\right)\left(\frac{2m}{M} q^{F_{k-1}}\right) \le \frac{2m}{M} q^{F_k+F_{k-1}} = \frac{2m}{M} q^{F_{k+1}}$$

Ovim je dokaz završen.

Kako za Fibonačijeve brojeve važi

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}\right), \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right),$$

veličina λ_1 postaje dominantna za veliko k, pa se može pokazati da je red konvergencije postupka sečice $\lambda_1 \approx 1.618$ .... Red konvergecije Njutn-Rafsonovog postupka je 2.

5 Izlani kriterijum Stefensenovog postupka

U radu [9] posmatrane su familije postupaka i uslovi pod kojima za ove familije važi nejednačina zaustavljanja. Pokazano je da ovim familijama pripadaju neki već poznati postupci: Njutn-Rafsonov i postupak regula falsi. U tom radu su dati dovoljni uslovi za izlazni kriterijum $|x_{n+1}-\alpha| \le |x_{n+1}-x_n|$ za ova dva postupka, a dokazi su izvedeni na osnovu teorema koje se ne mogu primeniti na Stefensenov postupak. U ovom delu prvo ćemo dati dokaz konvergencije Stefensenovog postupka pod uslovima koji su praktično isti kao uslovi za konvergenciju Njutnovog postupka iz [10]. Potom, navodimo dovoljne uslove pod kojima za Stefensenov postupak važi nejednakost zaustavljanja.

Familija iterativnih postupaka za izračunavanje jednostrukog rešenja nelinearne jednačine $f(x)=0$ posmatra se pod pretpostavkama

$$f \in C^2[a,b], \quad f'(x) > 0, \ x \in [a,b], \ f(a) < 0 < f(b).$$

Pod ovim pretpostavkama funkcija f *ima jednu i samo jednu nulu* $\alpha \in (a,b)$.

Stefensenov postupak za izračunavanje aproksimacije za α je

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\dfrac{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}{f(x_k)}} \qquad k = 0,1,\ldots$$

za neku odgovarajuću početnu vrednost x_0.U [10] je dokazana konvergenciju Njutnovog postupka pod istim uslovima iz sledeće teoreme, s tim da je četvrti uslov glasio

$x_0 \in [a,b]$*je takvo da važi* $f(x_0) f''(x_0) > 0$.

Teorema 9. *Neka je* $f \in C^2[a,b]$. *Ako su zadovoljeni sledeći uslovi*

1) $f(a) < 0 < f(b)$

2) $f'(x) > 0, \ x \in [a,b]$

3) $f''(x) \le 0, x \in [a,b]$ *ili* $f''(x) \ge 0, x \in [a,b]$

4) $x_0 \in [a,b]$ *je takvo da važi* $f(x_0) f''(x_0) > 0$ *i*

   a. $x_0 + f(x_0) \le b$ *ako je* $f''(x) \ge 0$

   b. $a \le x_0 + f(x_0)$ *ako je* $f''(x) \le 0$

onda Stefensenov iterativni postupak konvergira ka jedinstvenom rešenju $\alpha \in (a,b)$ *jednačine* $f(x) = 0$. *Pored toga, ukoliko se postupak ne prekine zbog* $f(x_k) = 0$, *važi za* $k = 0,1,\ldots$

$x_k > x_{k+1}$ *ako je* $f''(x) \geq 0$ *i* $x_k < x_{k+1}$ *ako je* $f''(x) \leq 0$.

Dokaz. Na osnovu prvog uslova sledi da jednačina ima rešenje $\alpha \in (a,b)$, a to rešenje je jedinstveno jer je prvi izvod veći od nule u intervalu $[a,b]$, pa je funkcija f monotono rastuća. Neka je $f''(x) \geq 0$. Tada se x_0 bira iz intervala $(\alpha,b]$ tako da važi $x_0 + f(x_0) \leq b$.

Kako je $f(x_0) > 0$ Stefensenov postupak daje

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{\dfrac{f(x_0 + f(x_0)) - f(x_0)}{f(x_0)}} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(\tau_0)} \quad \text{za neko} \quad \tau_0 \in (x_0, x_0 + f(x_0)).$$

Očigledno je $x_1 < x_0$, jer je $f(x_0) > 0$ i $f'(x) > 0,\ x \in [a,b]$.

Prema Tejlorovoj formuli je

$$0 = f(\alpha) = f(x_0) + f'(x_0)(\alpha - x_0) + \frac{1}{2} f''(\theta_0)(\alpha - x_0)^2$$

za neko $\theta_0 \in (\alpha, x_0)$. Kako je f' na posmatranom intervalu neopadajuća funkcija, važi $f'(\tau_0) \geq f'(x_0)$ i

$$0 = f(\alpha) \geq f(x_0) + f'(\tau_0)(\alpha - x_0) + \frac{1}{2} f''(\theta_0)(\alpha - x_0)^2$$

i

$$\alpha \leq x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(\tau_0)} - \frac{f''(\tau_0)}{2f'(\tau_0)}(\alpha - x_0)^2.$$

Kako je $f''(x) \geq 0$ i $f'(x) > 0,\ x \in [a,b]$ sledi

$$\alpha \leq x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(\tau_0)} = x_1.$$

Znači, $\alpha \le x_1 < x_0$.

Ukoliko je $f(x_1)=0$ rešenje je određeno i postupak se prekida, a ako je $f(x_1)>0$, ponavljajući opisani postupak dobija se $\alpha \le x_2 < x_1$. Na taj način dobijamo da je niz $\{x_k\}$ monotono nerastući i ograničen, pa ima graničnu vrednost. Zbog neprekidnosti funkcija f sledi da je ta granična vrednost baš α.

Ako je $f''(x) \le 0$. Tada x_0 biramo iz intervala $[a,\alpha)$ tako da važi $a \le x_0 + f(x_0)$. Sada imamo

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{\dfrac{f(x_0+f(x_0))-f(x_0)}{f(x_0)}} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(\tau_0)} \quad \text{za neko} \quad \tau_0 \in (x_0+f(x_0),x_0).$$

Očigledno je $x_0 < x_1$, jer je $f(x_0)<0$ i $f'(x)>0,\ x\in[a,b]$.

Prema Tejlorovoj formuli je

$$0 = f(\alpha) = f(x_0) + f'(x_0)(\alpha - x_0) + \frac{1}{2} f''(\theta_0)(\alpha - x_0)^2$$

za neko $\theta_0 \in (x_0,\alpha)$. Sada je

$$\alpha = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f''(\tau_0)}{2f'(x_0)}(\alpha - x_0)^2$$

Kako je f' na posmatranom intervalu nerastuća funkcija, važi $f'(\tau_0) > f'(x_0)$ i

$$\alpha \ge x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(\tau_0)} - \frac{f''(\tau_0)}{2f'(\tau_0)}(\alpha - x_0)^2.$$

$$0 = f(\alpha) \le f(x_0) + f'(\tau_0)(\alpha - x_0) + \frac{1}{2} f''(\theta_0)(\alpha - x_0)^2$$

Kako je $f''(x) \le 0$ i $f'(x)>0,\ x\in[a,b]$ sledi

$$\alpha \ge x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(\tau_0)} = x_1.$$

Znači, $\alpha \le x_1 < x_0$.

Ukoliko je $f(x_1)=0$ rešenje je određeno i postupak se prekida, a ako je $f(x_1)<0$, ponavljajući opisani postupak dobija se $\alpha \geq x_2 > x_1$. Na taj način dobijamo da je niz $\{x_k\}$ monotono neopadajući i ograničen, pa ima graničnu vrednost. Zbog neprekidnosti funkcija f sledi da je ta granična vrednost baš α.

Koristeći rezultate ove teereme možemo dokazati sledeću teoremu, koja daje dovoljne uslove za važenje nejednakosti zaustavljanja kod Stefensenovog iterativnog postupka.

Teorema 10. *Neka je $f \in C^2[a,b]$. Ako su zadovoljeni sledeći uslovi*

1) $f(a)<0<f(b)$

2) $f'(x)>0,\ x\in[a,b]$

3) $f''(x)>0, x\in[a,b]$

4) $x_0 \in [a,b]$ *je takvo da važi* $f(x_0)>0$ *i* $x_0+f(x_0)\leq b$

5) $f'(b)\leq 2f'(a)$

onda za Stefensenov postupak važi nejednakost zaustavjanja

$$|x_{n+1}-\alpha| \leq |x_{n+1}-x_n|.$$

Dokaz. Na osnovu prvog uslova sledi da jednačina ima rešenje $\alpha\in(a,b)$, a to rešenje je jedinstveno jer je prvi izvod veći od nule u intervalu $[a,b]$, pa je funkcija f monotono rastuća. Kako je $f''(x)>0$, x_0 se bira iz intervala $(\alpha,b]$ tako da važi $x_0+f(x_0)\leq b$. Prema prethodnoj teoremi Stefensenov iterativni postupak konvergira ka jedinstvenom rešenju α jednačine $f(x)=0$. Takođe, za x_0 izabrano tako da važi da važi

$$f(x_0)>0 \ \ i \ \ x_0+f(x_0)\leq b$$

dobijamo iterativni niz za koji važi

$$\alpha < x_k < x_{k-1} \leq b$$

za sve $k=0,1,2,\ldots$ ili za $k=1,2,\ldots,n_0$ za neko fiksno n_0 i $x_{n_0+i}=\alpha$ za $i=1,2,\ldots$. (U ovoj teoremi je pretpostavljeno da je drugi izvod funkcije pozitivan, a ne nenegativan kao u prthodnoj teoremi, pa je zato $\alpha < x_k$.) Dakle, svi članovi niza pripadaju intervalu $(\alpha,b]$.

Prema Stefensenovom postupku imamo

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f\left(x_k\right)}{\dfrac{f\left(x_k+f\left(x_k\right)\right)-f\left(x_k\right)}{f\left(x_k\right)}}=x_k-\frac{f\left(x_k\right)}{f'\left(\tau_k\right)} \quad \text{za neko} \quad \tau_k\in\left(x_k+f\left(x_k\right),x_k\right).$$

$$x_{k+1}-\alpha=x_k-\alpha-\frac{f\left(x_k\right)-f\left(\alpha\right)}{f'\left(\tau_k\right)}=\left(x_k-\alpha\right)\left(1-\frac{f'\left(\theta_k\right)}{f'\left(\tau_k\right)}\right)$$

za neko $\theta_k\in\left(\alpha,x_k\right)$ i

$$x_{k+1}-x_k=-\frac{f\left(x_k\right)-f\left(\alpha\right)}{f'\left(\tau_k\right)}=\left(\alpha-x_k\right)\frac{f'\left(\theta_k\right)}{f'\left(\tau_k\right)}$$

Iz poslednje dve jednakosti sledi

$$x_{k+1}-\alpha=\left(x_{k+1}-x_k\right)\left(1-\frac{f'\left(\tau_k\right)}{f'\left(\theta_k\right)}\right)$$

Iz ove relacije dobijamo nejednakost zaustavljanja ako je

$$\left|1-\frac{f'(\tau_k)}{f'(\theta_k)}\right|\le 1$$

tj. ako je

$$0\le\frac{f'\left(\tau_k\right)}{f'\left(\theta_k\right)}\le 2$$

Kako je prvi izvod rastuća funkcija, zaključujemo na osnovu pete pretpostavke da je

$$0<\frac{f'\left(\tau_k\right)}{f'\left(\theta_k\right)}\le\frac{f'\left(b\right)}{f'\left(a\right)}\le 2\,.$$

Time je dokaz završen.

Potpuno isto se dokazuje sledeća teorema.

Teorema 11. *Neka je* $f\in C^2\left[a,b\right]$. *Ako su zadovoljeni sledeći uslovi*

6) $f\left(a\right)<0<f\left(b\right)$

7) $f'\left(x\right)>0,\ x\in\left[a,b\right]$

8) $f''(x) < 0, x \in [a,b]$

9) $x_0 \in [a,b]$ *je takvo da važi* $f(x_0) < 0$ *i* $a \leq x_0 + f(x_0)$

10) $f'(a) \leq 2f'(b)$

onda za Stefensenov postupak važi nejednakost zaustavjanja

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq |x_{n+1} - x_n|.$$

6 Završetak dokaza o konvergenciji

Ovde ćemo pokazati kako se dokazi konvergencije prethodne četiri metode mogu završiti. Metoda regula falsi, sa fiksnom tačkom c, ima poseban dokaz. Preostale tri metode mogu se pokaztai na jedinstven način preko sledećih jednostavnih i dobro poznatih rezultata:

Podsetimo se da je $f \epsilon C^2[a,b]$ i $\alpha \in (a,b)$. Kod postupka sečice, Njutn-Rafsonovog postupka i Stefensenovog postupka pretpostavili smo da je $f^{'}(\alpha) \neq 0$ i izabrali interval $I = [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$ za neko $\rho > 0$ tako da je $f^{'}(x) \neq 0$ na tom intervalu. Dakle, možemo pretpostaviti da je

$$0 < m \leq \left|f^{'}(x)\right| \leq L \qquad \text{i} \qquad \left|f^{''}(x)\right| \leq M$$

za neke pozitivne konstante m, L i M i svako $x \epsilon [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$.

Njutn-Rafsonov postupak, postupak sečice i Stefensenov postupak smo izveli iz

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c}}$$

odgovarajućim izborom c. Zatim smo pomoću

$$x_{n+1} - \alpha = -\frac{f(x_n) + \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c}(\alpha - x_n)}{\frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c}}$$

određivali greške.

6.1.1 Greška Njutn-Rafsonovog postupak

Za $c = x_n$ dobijamo iz (12) Njutn-Rafsonov postupak i odgovarajuću grešku

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{f[x_n, x_n, \alpha]}{f^{'}(x_n)}(x_n - \alpha)^2$$

koja pod uslovom da $x_n \in I$,

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{f^{''}(\xi_n)}{2f^{'}(\eta_n)}(x_n - \alpha)^2,$$

za neko

$$\xi_n \in In(x_n, \alpha).$$

U slučaju $f^{'}(\alpha) \neq 0$ i kada je x_0 dovoljno blizu α dokazaćemo da je $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$. Zbog toga je i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

Zaključak je, da je red konvergencije Njutn-Rafsonovog postupka najmanje dva.

6.1.2 Greška postupka sečice

Postupak sečice dobijamo kada izaberemo $c = x_{n-1}$ i tada za grešku dobijamo

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \alpha]}{f[x_n, x_{n-1}]}(x_n - \alpha)(x_{n-1} - \alpha),$$

i pod uslovom da $x_{n-1}, x_n \in I$, dobijamo

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{f^{''}(\xi_n)}{2f^{'}(\eta_n)}(x_n - \alpha)(x_{n-1} - \alpha)$$

za neke

$$\xi_n \in In(x_n, x_{n-1}, \alpha) \quad i \quad \eta_n \in In(x_n, x_{n-1})$$

U slučaju kada je $f^{'}(\alpha) \neq 0$ i kada su x_0 i x_1 dovoljno blizu α, imamo da je $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$, a samim tim i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)(x_{n-1} - \alpha)} = \frac{f^{''}(\alpha)}{2f^{'}(\alpha)}.$$

Na osnovu ovoga se može dokazati da je red konvergencije u metodi sečice najmanje $\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$.

6.1.3 Greška Stefensonovog postupaka

Kod Stefensenovog postupka biramo $c = x_n + f(x_n)$. Greška se dobija malo teže. Imamo

$$c - \alpha = x_n - \alpha + f(x_n) - f(\alpha) = (1 + f[x_n, \alpha])(x_n - \alpha).$$

Sada greška postaje

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{f[x_n, x_n + f(x_n), \alpha]}{f[x_n, x_n + f(x_n)]}(1 + f[x_n, \alpha])(x_n - \alpha)^2.$$

Pod uslovom da $x_n, x_n + f(x_n) \in I$, i dobijamo

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{f^{''}(\xi_n)}{2f^{'}(\eta_n)}[1 + f^{'}(\theta_n)](x_n - \alpha)^2$$

za neke

$$\xi_n \in In(x_n, x_n + f(x_n), \alpha), \qquad \eta_n \in In\big(x_n, x_n + f(x_n)\big), \qquad \theta_n \in In(x_n, \alpha)$$

U slučaju $f^{'}(\alpha) \neq 0$ i kada je x_0 dovoljno blizu α, imamo da je $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ a samim tim

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} = \frac{f^{''}(\alpha)}{2f^{'}(\alpha)}[1 + f^{'}(\alpha)].$$

Zaključujemo da je red konvergencije u Stefensenovoj metodi najmanje dva.

Sada ćemo dokazati konvergenciju sva četiri postupka koje posmatramo. Postupak regula falsi sa fiksnim c ima svoj poseban dokaz. Ostala tri postupka dajemo jednoobrazno, koristeći sledeći jednostavan i dobro poznat rezultat.

Teorema 12. *Ako za niz* $x_0, x_1, \ldots$ *važi*

$$x_{n+1} - \alpha = C_n(x_n - \alpha), \quad |C_n| \leq \bar{C} < 1 \quad \forall n,$$

onda važi

1. $|x_{n+1} - \alpha| < |x_n - \alpha|$
2. $x_n \epsilon [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ *gde je* $\delta = |x_0 - \alpha|$
3. $|x_n - \alpha| \leq \bar{C}^n |x_0 - \alpha|$
4. $lim_{n\to\infty} x_n = \alpha.$

Ukoliko je

$$0 < \lim_{n\to\infty} |C_n| < 1$$

niz $\{x_n\}$ konvergira linearno, a ako je

$$\lim_{n\to\infty} C_n = 0,$$

onda niz konvergira superlinearno.

Kao što je pokazano

$$C_n = \frac{(x_{n+1} - \alpha)}{(x_n - \alpha)}$$

je od značaja za primenu prethodne teoreme. Imamo:

$$C_n = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(\eta_n)}(x_{n-1} - \alpha), \quad \xi_n, \eta_n \epsilon I, ako\ x_{n-1}, x_n \epsilon I \quad (sečica)$$

$$C_n = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(x_n - \alpha), \quad \xi_n \epsilon I, ako\ x_n \epsilon I \quad (Njutn - Rafson)$$

$$C_n = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(\eta_n)}[1 + f'(\theta_n)](x_n - \alpha), \quad \xi_n, \eta_n, \theta_n \epsilon I, ako\ x_n, x_n + f(x_n) \epsilon I \quad (Stefensen)$$

Dakle, pošto je $\left|\frac{f''(x)}{f'(y)}\right| \leq \frac{M}{m}$ kada $x, y \epsilon I$, i ako je $Q = \frac{M}{2m}$ onda

$$|C_n| \leq Q|x_{n-1} - \alpha|, \ \ ako\ x_{n-1}, x_n \epsilon I \quad (sečica)$$

$$|C_n| \leq Q|x_n - \alpha|, \ \ ako\ x_n \epsilon I \quad (Njutn - Rafson)$$

$$|C_n| \leq Q(1 + L)|x_n - \alpha|, \ \ ako\ x_n, x_n + f(x_n) \epsilon I \quad (Stefensen)$$

Da bi mogli da koristimo ova ograničenja za $|C_n|$, moramo pokazati da $x_{n-1}, x_n, x_n + f(x_n) \epsilon I$ za svaki od posmatranih postupaka.

6.1.4 Konvergencija Njutn-Rafsonovog postupak

Biramo x_0, dovoljno blizu α, da bi zadovoljili nejednakost

$$\bar{C} \equiv Q|x_0 - \alpha| < 1.$$

Posledica je, da je $|C_0| \leq \bar{C}$. Dalje iz

$$|x_1 - \alpha| = |C_0||x_0 - \alpha|$$

sledi da je $x_1 \in I$ i $|x_1 - \alpha| < |x_0 - \alpha|$. Pored toga, iz

$$|C_1| \leq Q|x_1 - \alpha| < Q|x_0 - \alpha| = \bar{C},$$

sledi $|C_1| \leq \bar{C}$. Na taj način smo dokazali da je za svako $n = 1, 2, \ldots$

$$x_n \epsilon I, \quad |x_n - \alpha| < |x_{n-1} - \alpha| \quad \text{i} \quad |C_n| \leq \bar{C}\,.$$

Sada primenjujući teoremu 8 dobijamo konvergenciju Njutn-Rafsonovog postupka.

6.1.5 Konvergencija Stefensenovog postupaka

Posmatramo

$$x + f(x) - \alpha = x - \alpha + f(x) - f(\alpha) = \left[1 + f'\big(\theta(x)\big)\right](x - \alpha)$$

za neko $\theta(x) \epsilon In(x, \alpha)$, pod uslovom da $x \epsilon I$. Iz ovoga sledi

$$|x + f(x) - \alpha| \leq (1 + L)|x - \alpha|$$

pod uslovom da $x \epsilon I$.

Sada, biramo $x_0 \epsilon I$ tako da je $|x_0 - \alpha| \leq \frac{\rho}{(1+L)}$, koji garantuje da $x_0 + f(x_0) \epsilon I$ zato što je

$$|x_0 + f(x_0) - \alpha| \leq (1 + L)|x_0 - \alpha| \leq \rho.$$

Dalje, izaberimo x_0 tako da bude dovoljno blizu α i da zadovoljimo nejednakost

$$Q(1 + L)^2|x_0 - \alpha| < 1.$$

Iz ovoga dobijamo

$$\bar{C} \equiv Q(1 + L)|x_0 - \alpha| < 1$$

i

$$\bar{C}(1 + L) < 1.$$

Sada je

$$|C_0| \leq \bar{C}$$

što sa

$$|x_1 - \alpha| = |C_0||x_0 - \alpha|$$

daje

$$|x_1 - \alpha| \leq \bar{C}|x_0 - \alpha|$$

pošto je $x_1 \epsilon I$ i $|x_1 - \alpha| < |x_0 - \alpha|$.

Zbog toga je

$$|x_1 + f(x_1) - \alpha| \leq (1 + L)|x_1 - \alpha| \leq \bar{C}(1 + L)|x_0 - \alpha| < \rho,$$

a $x_1 + f(x_1) \epsilon I$. Pored toga,

$$|C_1| \leq Q(1+L)|x_1 - \alpha| < Q(1+L)|x_0 - \alpha| = \bar{C},$$

pa je $|C_1| \leq \bar{C}$. Nastavljajući dalje indukcijom dokazujemo da je za svako $n = 1,2,\ldots$

$$x_n, x_n + f(x_n) \epsilon I, \quad |x_n - \alpha| < |x_{n-1} - \alpha|, \quad \text{i} \quad |C_n| \leq \bar{C} \;\; \forall n.$$

Sada primenjujući teoremu 8 dobijamo konvergenciju Stefensenovog postupka.

6.1.6 Konvergencija postupka sečice

Biramo x_0 i x_1 iz intervala I dovoljno blizu α da bi zadovoljili nejednakost

$$\bar{C} \equiv Q max\{|x_0 - \alpha|, |x_1 - \alpha|\} < 1.$$

Posledica toga je $|C_1| \leq \bar{C}$. Iz

$$|x_2 - \alpha| = |C_1||x_1 - \alpha|$$

sledi da $x_2 \epsilon I$ i da važi

$$|x_2 - \alpha| < |x_1 - \alpha|.$$

Pored toga je

$$|C_2| \leq Q|x_2 - \alpha| < Q|x_1 - \alpha| \leq \bar{C},$$

tj. $|C_2| \leq \bar{C}$. Indukcijom se može pokazati da je za svako $n = 1,2,\ldots$

$$x_n \epsilon I, |x_n - \alpha| < |x_{n-1} - \alpha|, \text{i } |C_n| \leq \bar{C} \;\; \forall n.$$

Sada primenjujući teoremu 8 dobijamo konvergenciju postupka sečice.

6.1.7 Konvergencija postupka regula falsi

Neka je $c, x_1 \epsilon I$, $f(c) > 0$, $f(x_1) < 0$, $f'(x) > 0$ i $f''(x) > 0$ na I. Iz ovoga i iz (14), sledi da je c i dalje fiksna i da je $x_1 < x_2 < \cdots < \alpha < c$. $\{x_n\}$ je niz koji je ograničen sa gornje strane sa α, tako da je granica $\leq \alpha$. Zbog neprekidnosti funkcija $f(x)$ i $f'(x)$ i zbog pretpostavki da je $f'(x) > 0$ na I, iz (12) sledi da je $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$. Iz $x_n < x_{n+1} < \alpha$ sledi da je

$$0 < C_n = \frac{(x_{n+1} - \alpha)}{(x_n - \alpha)} < 1$$

za svako n. Da bi pokazali da je konvergencija linearna, moramo dokazati da je

$$0 < \lim_{n\to\infty} C_n < 1.$$

Podsetimo se da je

$$C_n = \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = \frac{f[x_n, c, \alpha]}{f[x_n, c]}(c - \alpha).$$

Prvo, kako je $x_n \epsilon I$ za sve n i

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \epsilon I$$

i zbog pretpostavki za $f(x)$, imamo da je

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \frac{f[\alpha, \alpha, c]}{f[\alpha, c]}(c - \alpha) = \frac{f''(\bar{\xi})(c - \alpha)}{2f'(\bar{\eta})} > 0,$$

za neke $\bar{\xi}, \bar{\eta} \epsilon In(c, \alpha)$. Po definiciji podeljenih razlika imamo

$$f[\alpha, \alpha, c] = \frac{f[\alpha, c] - f[\alpha, \alpha]}{c - \alpha}.$$

Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \frac{f[\alpha, c] - f[\alpha, \alpha]}{f[\alpha, c]} = 1 - \frac{f[\alpha, \alpha]}{f[\alpha, c]} = 1 - \frac{f'(\alpha)}{f[\alpha, c]}.$$

Vidimo da za koeficijent pravca $f[\alpha, c]$ prave određene tačkama $(\alpha, f(\alpha))$ i $(c, f(c))$ i koeficijent pravca $f[\alpha, \alpha] = f'(\alpha)$ tangente na $f(x)$ u tački $(\alpha, f(\alpha))$ važi $f[\alpha, \alpha] < f[\alpha, c]$. Iz ovoga, zaključujemo da je

$$\lim_{n\to\infty} C_n < 1.$$

Ovim se završava dokaz.

Pretpostavili smo u dokazu da su i prvi izvod i drugi izvod funkcije f pozitivni na intervalu I. Lako se vidi da se dokaz u slučajevima da prvi i drugi izvod ne menjaju znak na I može sprovesti analogno.

6.1.8 Ocena greške

Posmatrali smo postupak sečice, Njutn-Rafsonov postupak, Stefensenov postupak i postupak regula falsi pod pretpostavkom da je $f'(\alpha) \neq 0$ i izabrali interval $I = [\alpha - \rho, \alpha + \rho$ za neko $\rho>0$ tako da je $f'x\neq 0$ na tom intervalu. Dakle, možemo pretpostaviti da je

$$0 < m \leq |f'(x)|$$

za neku pozitivnu konstantu m i svako $x\epsilon[\alpha-\rho,\alpha+\rho]$. Imajući u vidu ove pretpostavku, možemo za ocenu greške aproksimacije tačnog rešenja članovima iterativnog niza svakog od posmatranih postupaka iskoristiti ocenu koju daje primena Lagranžove teoreme. Na osnovu Lagranžove teoreme lako se dokazuje sledeća teorema.

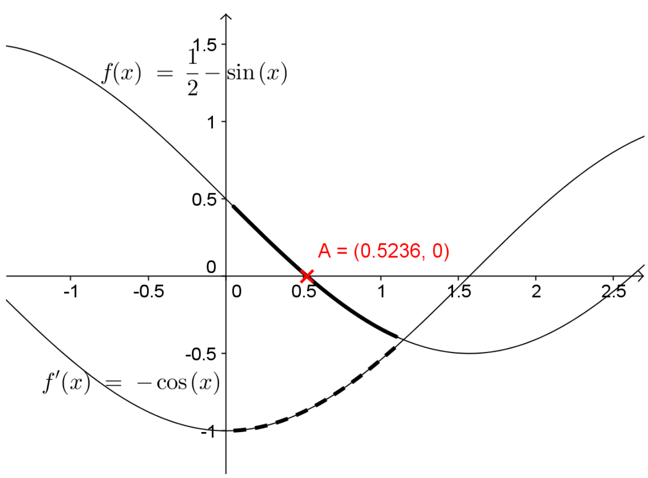
Teorema 13. *Neka je* $f\in C[a,b]$ *i neka je* $\alpha\in[a,b]$ *rešenje jednačine* $f(x)=0$ *i* $x_0\in[a,b]$. *Ako je za neko pozitivno* m $|f'(x)|\geq m$ *za* $x\in[a,b]$ *onda je*

$$|\alpha-x_0|\leq\frac{|f(x_0)|}{m}.$$

Ova ocena je nezavisna od načina dobijanja aproksimacije x_0 rešenja α, pa se može primeniti na svaki od posmatranih postupaka.

7 Numerički primer

Prikazujemo rezultate nekih numeričkih testova koje smo uradili sa posmatranim postupcima. Posmatrali smo jednačinu $\frac{1}{2}-\sin x=0$. Grafik funkcije $f(x)=\frac{1}{2}-\sin x$ i njenog prvog izvoda prikazan je na slici 5. Funkcija je prikazana neprekidnom linijom a njen izvod isprekidanom. Podebljani su delovi grafika koji pripadaju intervalu $[0.05,1.1]$.



Slika 5. Grafik funkcije $f(x)=\frac{1}{2}-\sin x$ i njenog izvoda

Sva računanja su urađena u programskom paketu *Mathematica* 8.0. Koristili smo `SetPrecision` da bi povećali numeričku preciznost. Možemo da biramo broj *prec* cifara u floating point aritmetici. U tabelama navodimo *prec*. Broj α^* označava dobru aproksimaciju tačnog rešenja posmatrane jednačine.

U primerima kao kriterijum zaustavljanja koristimo

$$|x_n - \alpha^*| < \varepsilon \wedge |f(x_n)| < \varepsilon$$

Sa *it* označavamo broj iterativnih koraka potrebnih da se ispuni kriterijum zaustavljanja.

Numerički red konvergencije određujemo kao broj

$$Ord_k = \frac{\log\left|\dfrac{x_{k+2}-\alpha}{x_{k+1}-\alpha}\right|}{\log\left|\dfrac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha}\right|}.$$

Funkcija $f(x) = \frac{1}{2} - \sin x$, posmatrana u intervalu $x \in [0.05, 1.1]$ zadovoljava uslove naših teorema. Time obezbeđujemo konvergenciju posmatranih postupaka. Tačno rešenje jednačine $f(x) = 0$ u intervalu $x \in [0.05, 1.1]$je $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Računamo aproksimaciju α^* tačnog rešenja sa preciznošću *prec,* ali prikazujemo samo prvih 20 cifara: $\alpha^* \approx 0.52359877559829887308$. Iterativni niz prikazujemo takođe sa 20 cifara, kao i numerički red konvergencije.

Pored tabela sa numeričkim rezultatima dati su i odgovarajući programi pisani u *Mathematica*-i 8.0.

Na osnovu rezultata prikazanih u tabelama koje slede, vidi se da postupci koje posmatramo imaju red konvergencije koji smo očekivali na osnovu dokazanih teorema. Za prva tri postupka smo dali i grešku poslednje izračunate iteracije. Za postupak regula falsi ta greška je 5.4×10^{-948}.

Tabela 1. Njutn-Rafsonov postupak			
$prec = 10\,000$, $\varepsilon = 10^{-1000}$, kriterijum zaustavljanja: $\lvert x_n - \alpha^* \rvert < \varepsilon \wedge \lvert f(x_n) \rvert < \varepsilon$ $it = 11$			
k	x_k	$\lvert \alpha - x_k \rvert$	Ord_k
0	1.1000000000000000888	5.8×10^{-1}	-
1	0.23754253711002741556	2.9×10^{-1}	-
2	0.50987496926551626627	1.4×10^{-2}	4.3348400961875584850l
3	0.52354568547905115801	5.3×10^{-5}	1.8290396022527698527
4	0.52359877478472528182	8.1×10^{-10}	1.9957284688017053852
5	0.52359877559829887289	1.9×10^{-19}	1.99999170543565269576
6	0.52359877559829887308	1.1×10^{-38}	1.99999999993644468804
7	0.52359877559829887308	3.2×10^{-77}	1.99999999999999999999
8	0.52359877559829887308	3.0×10^{-154}	2.00000000000000000000
9	0.52359877559829887308	2.5×10^{-308}	2.00000000000000000000
10	0.52359877559829887308	1.9×10^{-616}	2.00000000000000000000
11	0.52359877559829887308	1.0×10^{-1232}	2.00000000000000000000

```
Clear[prec, f, α, φN, ε, x0, x, niz];
prec = 10000;
f[x_] := SetPrecision[1/2 - Sin[x], prec];
α = SetPrecision[π/6, prec];
φN[x_] := SetPrecision[x - f[x]/(D[f[y], y] /. y -> x), prec];
(* funkcija koraka Njutnovog postupka *)
ε = 10^-1000;
x0 = 1.1;
x = SetPrecision[x0, prec];
niz = {x}; i = 0;
While[Abs[x - α] > ε ∨ Abs[f[x]] > ε, i++;
  niz = Append[niz, x = φN[x]]];
```

Tabela 2. Postupak sečice			
$prec = 10\,000$, $\varepsilon = 10^{-1000}$, kriterijum zaustavljanja: $\lvert x_n - \alpha^* \rvert < \varepsilon \wedge \lvert f(x_n) \rvert < \varepsilon$ $it = 16$			
k	x_k	$\lvert \alpha - x_k \rvert$	Ord_k
0	0.05000000000000000000		-
1	1.1000000000000000888	5.8×10^{-1}	-
2	0.61170475197890812600	8.8×10^{-2}	1.24242095858090551516
3	0.53214035795267535302	8.5×10^{-3}	1.53767874833883756931
4	0.52336264535782674242	2.4×10^{-4}	1.67155535556292241206
5	0.52359936203607249596	5.9×10^{-7}	1.59947796213443613784
6	0.52359877563826520872	4.0×10^{-11}	1.6251826720123009624
7	0.52359877559829886631	6.8×10^{-18}	1.6153154781666479431
8	0.52359877559829887308	7.8×10^{-29}	1.61907411494453126831
9	0.52359877559829887308	1.5×10^{-46}	1.61763695112515558813
10	0.52359877559829887308	3.4×10^{-75}	1.6181856808503570141
11	0.52359877559829887308	1.5×10^{-121}	1.61797605295487457832

```
Clear[prec, f, α, ε, x0, x, niz];
prec = 10 000;
f[x_] := SetPrecision[1/2 - Sin[x], prec];
φS[x_, y_] := SetPrecision[x - (x - y)/(f[x] - f[y]) f[x], prec];
(* funkcija koraka postupka sečice *)
α = SetPrecision[π/6, prec];
ε = 10^-1000; x1 = 1.1; x0 = 0.05;
x = SetPrecision[x1, prec]; y = SetPrecision[x0, prec];
niz = {x}; i = 0;
While[Abs[x - α] > ε ∨ Abs[f[x]] > ε, i++;
  niz = Append[niz, z = φS[x, y]]; x = y; y = z];
```

Tabela 3. Stefensenov postupak			
$prec = 10\,000$, $\varepsilon = 10^{-1000}$, kriterijum zaustavljanja: $\lvert x_n - \alpha^* \rvert < \varepsilon \wedge \lvert f(x_n) \rvert < \varepsilon$ $it = 10$			
k	x_k	$\lvert \alpha - x_k \rvert$	Ord_k
0	1.0500000000000000444	5.3×10^{-1}	-
1	0.47948658179636920078	4.4×10^{-2}	-
2	0.52353247073869993441	6.6×10^{-5}	2.6217708004720287579
3	0.52359877542830215400	1.7×10^{-10}	1.9805449822235468201
4	0.52359877559829887308	1.1×10^{-21}	1.9999853314324375602 4
5	0.52359877559829887308	4.8×10^{-44}	1.9999999999811959234
6	0.52359877559829887308	9.0×10^{-89}	2.0000000000000000000
7	0.52359877559829887308	3.2×10^{-178}	2.0000000000000000000
8	0.52359877559829887308	3.8×10^{-357}	2.0000000000000000000
9	0.52359877559829887308	5.7×10^{-715}	2.0000000000000000000
10	0.52359877559829887308	1.3×10^{-1430}	2.0000000000000000000

```
Clear[prec, f, α, ε, x0, x, niz];
prec = 10 000;
f[x_] := SetPrecision[1/2 - Sin[x], prec];
φST[x_] := SetPrecision[x - f[x]^2/(f[x + f[x]] - f[x]), prec];
(* funkcija koraka Stefensenovog postupka *)
α = SetPrecision[π/6, prec];
ε = 10^-1000; x0 = 1.05;
x = SetPrecision[x0, prec];
niz = {x}; i = 0;
While[Abs[x - α] > ε ∨ Abs[f[x]] > ε, i++;
  niz = Append[niz, x = φST[x]]];
```

Tabela 4. Postupak regula falsi			
$prec = 10\,000$, $\varepsilon = 10^{-1000}$, $c = 0.05$, kriterijum zaustavljanja: $\lvert x_n - \alpha^* \rvert < \varepsilon \wedge \lvert f(x_n) \rvert < \varepsilon$ *it* =951			
k	x_k	$\lvert \alpha - x_k \rvert$	Ord_k
0	1.1000000000000000888	5.8×10^{-1}	-
1	0.6117047519789081260	8.8×10^{-2}	-
2	0.53214035795267535302	8.5×10^{-3}	1.24242095858090551516
3	0.52436233752385155876	7.6×10^{-4}	1.03475893242380658940
4	0.52366648188254542120	6.8×10^{-5}	1.00335771546467740976
5	0.52360477486187793723	6.0×10^{-6}	1.0003000836897403182
6	0.52359930714190703233	5.3×10^{-7}	1.0000266083464218714
7	0.52359882269357801873	4.7×10^{-8}	1.00000235768637961040
8	0.52359877977098416334	4.2×10^{-9}	1.0000002088944585287
9	0.52359877596800263249	3.7×10^{-10}	1.0000000185082513280
10	0.52359877563105496650	3.3×10^{-11}	1.00000000163984818362
11	0.52359877560120109311	2.9×10^{-12}	1.0000000001452920592
12	0.52359877559855601244	2.6×10^{-13}	1.0000000000128730102
13	0.52359877559832165586	2.3×10^{-14}	1.0000000000011405606
14	0.52359877559830089165	2.0×10^{-15}	1.0000000000001010547
15	0.52359877559829905192	1.8×10^{-16}	1.0000000000000089535
1	0.52359877559829888892	1.6×10^{-17}	1.0000000000000007933
17	0.52359877559829887448	1.4×10^{-18}	1.0000000000000000703
18	0.52359877559829887320	1.2×10^{-19}	1.0000000000000000062
19	0.52359877559829887309	1.1×10^{-20}	1.0000000000000000006
20	0.52359877559829887308	9.8×10^{-22}	1.0000000000000000000
21	0.52359877559829887308	8.7×10^{-23}	1.0000000000000000000

```
Clear[prec, f, α, ε, x0, x, niz];
prec = 10000;
f[x_] := SetPrecision[1/2 - Sin[x], prec];
φRF[x_, c_] := SetPrecision[x - (x - c)/(f[x] - f[c]) f[x], prec];
α = SetPrecision[π/6, prec];
ε = 10^-1000; x0 = 1.1; x1 = 0.05;
x = SetPrecision[x0, prec]; c = SetPrecision[x1, prec];
niz = {x}; i = 0;
While[Abs[x - α] > ε ∨ Abs[f[x]] > ε, i++;
  niz = Append[niz, x = φRF[x, c]]];
```

8 Njutn, Rafson i Stefensen

Isak Njutn je bio jedan od najvećih naučnika svih vremena. Rođen je na Božić 1642., a umro je 1727. godine. Njegov najpoznatiji rad „Matematički principi prirodne filozofije", objavljen je 1687. godine. Poznat je po tome što je postavio osnove mehanike i objavio zakon gravitacije. Međutim, Njutn nije bio dobar učenik, čak je i bio izbačen iz škole na zahtev svoje majke koja je htela da on bude farmer. Upisao je koledž u Kembridžu, gde je 1665. godine diplomirao. Bio je najbolji student, a zahvaljujući uspesima iz matematike i fizike postao je profesor matematike. Nakon studija, ozbiljno se posvetio istraživačkom radu u oblasti matematike, fizike, astronomije, ali i teologije.

Slika 6. Isak Njutn

U radu *Analysis per aequationes numero terminorum infinitas* je numerički rešavao nelinearne jednačine, posle čega je njegov metod često proučavan i korišćen. Njegov metod se često naziva Njutn-Rafsonov metod jer je Rafson dao postupku današnju formulaciju. Isak Njutn je umro 31. marta 1727. godine u Londonu.

Džozef Rafson je rođen u Engleskoj 1648., a umro je 1715. godine. Magistrirao je na umetnosti 1692. godine na Univerzitetu u Kembridžu. Napisao je knjigu pod nazivom Analysis aequationum universalis, koja se zasniva na Njutnovoj metodi za aproksimaciju rešenja jednačina, koja se naziva Njutn-Rafsonova metoda. Rafson je preveo sva Njutnova dela iz oblasti algebre sa latinskog na engleski jezik, kao i Njutnovu univerzalnu aritmetiku. Rafsonovo najbolje istorijsko delo bilo je teološko delo, „De spatio reali" i „Demonstratio de deo". U tim knjigama opisivao je svoju filozofiju. Pisao je o beskonačnosti, kretanju u prostoru, gde je prostor definisan kao beskonačan, a objekti u njemu su konačni.

Džon Frederik Stefensen (1873-1961) je bio danski matematičar i statističar koji se bavio istraživanjem konačnih razlika i interpolacijom. U početku je on bio advokat. 1912. godine doktorirao je na temu iz analitičke teorije brojeva. 1919. godine postao je predavač aktuarske matematike na Univerzitetu u Kopenhagenu. Objavio je oko 100 naučnih članaka. Stefensenova nejednakost i Stefensenov metod (numerički iterativni postupak) nazvani su po njemu.

9 Originalni Njutnov postupak

U radu „Analysis per aequationes numero terminorum infinitas” objavljenom 1666.godine, [17], Njutn je numerički rešavao jednačinu

$$x^3 - 2x = 5.$$

Pokazaćemo kako je on to uradio. Neka je

$$f(x) = x^3 - 2x - 5.$$

Kako je

$$f(2) = 8 - 4 - 5 = -1 \quad \text{i} \quad f(3) = 27 - 6 - 5 = 16,$$

zaključujemo da je jedno rešenje posmatrane jednačine, tj. jedna nula funkcije $f(x)$, između 2 i 3. Ako uzmemo 2 kao prvu aproksimaciju, $x_0 = 2$, i pretpostavimo da je tačno rešenje $2 + z$, onda dobijamo

$$0 = f(2 + z) = (2 + z)^3 - 2(2 + z) - 5 = z^3 + 6z^2 + 10z - 1.$$

Ako pretpostavimo da z nije veliki broj, tj. da se tačno rešenje malo razlikuje od 2, onda izjednačavajući linearni deo $10z - 1$ od $f_1(z)$ sa nulom, tj. rešavajući jednačinu $10z - 1 = 0$ dobijamo

$$z = \frac{1}{10}.$$

Na taj način nova aproksimacija, obeležimo je sa x_1, traženog rešenja postaje

$$x_1 = x_0 + z = 2 + z = 2\frac{1}{10}.$$

Kako se iz $f_1(z) = 0$ dobija

$$z = \frac{1}{10} - \frac{z^3 + 6z^2}{10} < \frac{1}{10},$$

sledi da je tačno rešenje polazne jednačine manje od $2 + \frac{1}{10} = 2\frac{1}{10}$.

Pošto je

$$-\frac{f(2)}{f'(2)} = \frac{1}{10}$$

Vidimo da je Njutn početnu aproksimaciju $x_0 = 2$ konvergirao sa $-\frac{f(2)}{f'(2)}$ tako da je

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 + \frac{1}{10}.$$

Nastavljajući sa x_1 umesto x_0, Njutn je dobio novu aproksimaciju rešenja posmatrane jednačine:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Sledeći ovu ideju, dobija se iterativni postupak

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \;\; k = 0,1, \dots$$

poznat kao Njutnov iterativni postupak. U sledećoj tabeli pokazujemo prvih šest aproksimacija dobijenih Njutnovim postupkom, polazeći od $x_0 = 2$ i odgovarajuće vrednosti funkcije f.

k	x_k	$f(x_k)$
0	2.0000000000	-1.000×10^0
1	2.1000000000	0.061×10^0
2	2.0945681211	1.857×10^{-4}
3	2.0945514817	1.760×10^{-9}
4	2.0945514815	-4.724×10^{-10}
5	2.0945514815	-4.724×10^{-10}

Tačna rešenja Njutnove jednačine

$$x^3 - 2x = 5$$

su

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{5}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{1929}} + \frac{2}{\sqrt[3]{\frac{5}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{1929}}} \approx 2.09455148154,$$

i

$$x_2 = \alpha + i\beta, \;\; x_3 = \alpha - i\beta$$

gde je

$$\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{5}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{1929}} - \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{5}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{1929}}} \approx -1.04727574077$$

i

$$\beta = \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{\frac{5}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{1929}} - \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{5}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{1929}}}\right) \approx 1.13593988909.$$

10 Literatura

[1] Basto, M. , Semiao, V., Calheiros, F. L., A new iterative method to compute nonlinear equations, Applied Mathematics and Computation 173(2006) 468-483.

[2] Berezin I.S., Zidkov, N.P., Metody vyčislenii : Tom pervyi, Fizmatgiz, - Moskva, 1962. -

[3] Dennis, J.E., Schnabel, R.B., Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Non-linear Equations (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983).

[4] Ford, W.F., Pennline, J.A., Accelerated convergence in Newton's method, SIAM Rev. 38 (1996) 658–659.

[5] Gerlach, J., Accelerated convergence in Newton's method, SIAM Rev. 36 (1994) 272–276.

[6] Gutierrez, J. M., Hernandez, M. A., An acceleration of Newton's method: super-Halley method, Applied Mathematics and Computation 117(2001) 223-239.

[7] Halley, E., A new and general method of finding the roots of equations, Philos. Trans. Roy. Soc. London 18 (1694),136–148.

[8] Henrici, P., Elements of Numerical Analysis. Wiley, New York, 1964.

[9] Herceg, D., *Exit criteria for some iterative methods*. Univ. u Novom Sadu, Zb. Rad. Prirod.- Mat. Fak. Ser. Mat.12(1982), 139-150.

[10] Herceg, D., Krejić, N., Numerička analiza, Univerzitet u Novom Sadu, Stylos, Novi Sad, 1997.

[11] Herceg, Đ., Herceg, D., On a third order family of methods for solving nonlinear equations, International Journal of Computer Mathematics, 2010, 1-9.

[12] Kiss, I., Uber die Verallgemeinerung des Newtonschen N aherungsverfahrens, Z. Angew. Math. Mech. 34 (1954), 68–69.

[13] Petković, M., Herceg, D., On rediscovered methods for solving equations, Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 107 Issue 2, July 31, 1999.

[14] Sidi, A., Unified Treatment of Four Methods for Solving Nonlinear Equations, J. Online Math. Appl., 6 (2006). http://mathdl.maa.org/mathDL/4/?pa=content&sa=viewDocument&nodeID=1152

[15] Stoer, J., Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002.

[16] Traub, J.F., Iterative Methods for the Solution of Equations (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1964); (Chelsea, New York, 1982).

[17] Wait, R., The numerical solution of algebraic equations, John Wiley&Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, 1979.

11 Biografija

Rođena sam 24. januara 1987. godine u Novom Sadu. Završila sam Osnovnu školu „Nikola Tesla“ 2002. godine. Gimnaziju „Isidora Sekulić“ u Novom Sadu pohađala sam u periodu 2002-2006. godine.

Prirodno-matematički fakultet, odsek matematika, smer inženjer matematike sam upisala 2006. godine. Osnovne akademske studije završila sam 2010. godine, iste upisala master studije.

Sve ispite predvođene planom i programom položila sam do jula 2011. godine.

Novi Sad, 30. septembar 2011. godine

Ivana Leković

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Ivana Leković
AU
Mentor: dr Dragoslav Herceg
MN
Naslov rada: Uniformna obrada postupaka regula falsi, Njutn-Rafsona, sečice i Stefensena za numeričko rešavanje jednačina
MR
Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski i engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2011.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku
Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 3
MA
Fizički opis rada: 10 poglavlja/57 strana/2 fotografija/5 grafikona/6 slika/17 literature/
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Numerička analiza
ND
Ključne reči: Postupci, interpolacija, red konvergencije, greške postupaka
KR

Predmetna odrednica: Numeričko rešavanje nelinearnih jednačina
PO
Čuva se: u Biblioteci Departmana za matematiku i informatiku
ČU
Važna napomena: /
VN
Izvod: U master radu obrađeni su postupci Njutn-Rason, sečica, Stefensen i regula falsi za numeričko rešavanje nelinearne jednačine. Dat je uniforni dokaz za konvergenciju posmatranih postupaka. Ovaj dokaz se bazira na linearnoj interpolaciji, a analiza je napravljena na osnovu Njutnovog interpolacionog polinoma sa podeljenim razlikama. Za Stefensonov postupak dati su i dovoljni uslovi za nejednakost zaustavljanja.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 25. avgust 2011.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: dr Nataša Krejić,
redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Zorana Lužanin,
redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Dragoslav Herceg,
redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTAMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monographic publication
DT
Type of record: Textual printed material
TR
Contents Code: Master thesis
CC

Author: Ivana Leković
AU
Mentor: dr Dragoslav Herceg
MN

Title: Unified Treatment of Regula Falsi, Newton-Raphson, Secant and Steffensen Methods for Nonlinear Equations
XI

Language of text: Serbian (Latinic)
LT
Language of abstract: Serbian and English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2011
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics,
Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 3
PP
Physical description: 10 chapters/57 pages/2 photographs/5 charts/6 pictures/ 17 references
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Numerical Analysis
SD
Key words: Methods, interpolation, order of convergence, error of methods
KW
Holding data: Library of Department of Mathematics and Informatics
HD
Note: /
N

Abstract: Convergence results Regula falsi, Newton-Raphson, secant, and Steffensen methods are four very efective numerical procedures used for solving nonlinear equations of the form $f(x) = 0$.

They are derived via linear interpolation procedures. Their analyses can be carried out by making use of interpolation theory through divided diferences and Newton's interpolation formula. Also, sufficient conditions for the stopping inequality for Steffensen's method are given.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 25. August 2011.
ASB
Defended:
DE
Thesis defense board:
DB
President: Dr Nataša Krejić,
Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member: Dr Zorana Lužanin,
Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member: Dr Dragoslav Herceg,
Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad