UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Ivan Marinković

Klasifikacija H-matrica metodom skaliranja i njena primena u određivanju oblasti konvergencije iterativnih postupaka za rešavanje sistema linearnih jednačina

-MASTER RAD-

Mentor:
docent dr Vladimir Kostić

Novi Sad, 2014.

Sadržaj

Uvod

Rešavanje sistema linearnih jednačina spada u jedan od osnovnih zadataka linearne algebre. Za rešavanje sistema postoje direktne metode, međutim kad se radi o sistemima veće dimenzije, ove metode nisu u praksi primenljive. Na primer, za sistem dimenzije n primenom Kramerovog pravila potrebno je izvršiti $O(n!n)$ aritmetičkih operacija što dovoljno govori o neprihvatljivosti ove metode za rešavanje sistema linearnih jednačina. Nešto bolja situacija je kod Gausove metode eliminacije gde je potrebno $O(n^3)$ operacija.

Sa druge strane, u savremenoj nauci i tehnici diskretizacijom različitih problema raste potreba za rešavanjem upravo sistema velikih dimenzija.

Pored direktnih metoda za rešavanje sistema linearnih jednačina kod kojih se u konkretnom broju koraka dolazi do tačnog rešenja, postoje i iterativne metode gde je rešenje granična vrednost niza uzastopnih aproksimacija. Međutim, kod sistema velike dimenzije konačan broj koraka nije praktično upotrebljiva osobina. Naime, za sistem od 10^6 jednačina Gausovom metodom potrebno je 10^{18} operacija, što bi pri brzini računara od 10^{12} operacija u sekundi, značilo 11 dana. Što se tačnosti tiče, nje u praksi zapravo i nema, jer se operacijom deljenja (koja se često javlja kod direktnih metoda) i zaokruživanjem realnih brojeva na konačan broj decimala, tokom postupka gomila greška. Sa druge strane, i sami ulazni podaci su često rezultat prethodnog merenja i proračuna, pa nisu tačni brojevi, tako da i nema smisla tražiti tačno rešenje.

Pošto se pri ispitivanju konvergencije iterativnih postupaka za rešavanje sistema linearnih jednačina koriste matrične norme, u prvom poglavlju date su definicije, osobine i primeri vektorskih i matričnih normi, kao i preliminarna tvrđenja o konvergenciji nizova i redova vektora i matrica.

Kako se mnogi problemi u fizici, hemiji, biologiji, tehnici, ekonomiji i drugim oblastima nauke svode na rešavanje sistema linearnih jednačina sa posebnom strukturom generalizovane dijagonalne dominacije, upravo su te klase matrica razmatrane u drugom i trećem poglavlju rada. Pri tome je drugo poglavlje posvećeno uslovima dijagonalne dominacije matrica, a treće poglavlje uslovima blok dijagonalne dominacije.

U četvrtom poglavlju rada razmatrani su iterativni postupci tipa fiksne tačke za rešavanje sistema linearnih jednačina. Posebna pažnja je posvećena parametarskim relaksacionim postupcima OR (overrelaxation). Za slučajeve kada je matrica sistema SDD, $S-SDD$ ili $H-$matrica dati su dovoljni uslovi za konvergenciju AOR postupka. Jedno od uopštenja AOR postupka pogodno za primenu na paralelnim računarima (tj. računarima koji imaju više procesora) - PDAOR metod (parallel decomposition-type relaxation methods) obrađeno je u petom poglavlju, gde su izloženi dovoljni uslovi za konvergenciju tog postupka za slučaj blok SDD matrica.

Šesto poglavlje sadrži proširenje oblasti konvergencije za slučaj blok $S-SDD$ matrica ostvareno tehnikom skaliranja.

Glava 1

Preliminarna tvrđenja

1.1 Oznake

U ovom radu koristićemo sledeće oznake:

$\mathbb{N}-$ skup prirodnih brojeva,

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$,

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$\mathbb{R}-$ skup realnih brojeva,

$\mathbb{R}^n-$ skup realnih $n-$dimenzionalnih vektora,

$\mathbb{R}^{n,n}-$ skup $n \times n$ realnih matrica,

$A = [a_{ij}]-$ matrica čiji je element u i-toj vrsti i j-toj koloni a_{ij},

$(A)_{ij}$- ij-ti elemenat matrice A,

A^T - transponovana matrica matrice A,

$x > (\geq)0$, $x \in \mathbb{R}^n-$ vektor čije su sve komponente pozitivne (nenegativne),

$A > (\geq)0$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}-$ matrica čiji su svi elementi pozitivni (nenegativni),

$D = diag[d_1, d_2, \ldots, d_n]-$ dijagonalna matrica sa elementima $d_1, d_2, \ldots, d_n$ na dijagonali,

$D > 0$, D je dijagonalna matrica i svi njeni dijagonalni elementi su pozitivni,

$E-$ jedinična matrica,

$A = D - L - U-$ standardno razlaganje matrica A na njen dijagonalni (D), strogo donji trougaoni (L) i strogo gornji trougaoni (U) deo,

$\sigma(A)$ je skup karakterističnih korena (spektar) matrice A,

$tr(A)$ je trag matrice A.

1.2 Vektorske i matrične norme

Kako se u analizi konvergencije iterativnih postupaka za rešavanje sistema linearnih jednačina koriste pojmovi vektorske i matrične norme, najpre dajemo definicije i osobine ovih pojmova.

Definicija 1.1. *Svako preslikavanje* $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *koje ima sledeće osobine:*

1) $\|x\| \geq 0$

$\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

za svako $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *naziva se vektorska norma na* $\mathbb{R}^n$.

Primer 1.1. Neke od vektorskih normi su:

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2}$
- $\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$
- $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}$, $p \geq 1$.

Teorema 1.1. *Neka je* $\|\cdot\|$ *vektorska norma i* S *regularna matrica. Tada je preslikavanje* N *definisano sa* $N(x) := \|Sx\|$ *takođe vektorska norma.*

Dokaz.

1) Svakako je $N(x) = \|Sx\| \geq 0$.

$$N(x) = 0 \Longleftrightarrow \|Sx\| = 0 \Longleftrightarrow Sx = 0 \Longleftrightarrow x = S^{-1}0 = 0,$$

jer je S regularna matrica.

2) $N(\alpha x) = \|S(\alpha x)\| = \|\alpha Sx\| = |\alpha|\|Sx\| = |\alpha|N(x)$.

3) $N(x + y) = \|S(x + y)\| = \|Sx + Sy\| \leq \|Sx\| + \|Sy\| = N(x) + N(y)$.

□

Teorema 1.2. *Za svake dve vektorske norme* $\|\cdot\|$ *i* $\|\ \|'$ *postoje pozitivne konstante* m *i* M *sa osobinom da za svaki vektor* x *važi:*

$$m\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|.$$

Navedena osobina se naziva ekvivalencija vektorskih normi.

Teorema 1.3. *Neka je dat vektor e za koji vazi $e > 0$. Tada je preslikavanje definisano sa* $\|x\|_e = \max_{1 \le i \le n} \dfrac{|x_i|}{e_i}$ *vektorska norma.*

Dokaz. Izaberimo matricu S na sledeći način:

$$S = diag\left[\frac{1}{e_1}, \frac{1}{e_2}, \ldots, \frac{1}{e_n}\right].$$

Kako je $e > 0$, sledi da je $det(S) = \frac{1}{e_1 e_2 \cdots e_n} > 0$, pa je S regularna matrica. Tada je preslikavanje N definisano sa

$$N(x) = \|Sx\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |(Sx)_i| = \max_{1 \le i \le n} |\frac{x_i}{e_i}| = \max_{1 \le i \le n} \frac{|x_i|}{e_i},$$

vektorska norma, prema Teoremi 1.1. $\square$

Definicija 1.2. *Svako preslikavanje* $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}$ *skupa kvadratnih matrica* $\mathbb{R}^{n,n}$ *u skup nenegativnih realnih brojeva koje zadovoljava sledeće osobine:*

1) $\|A\| \ge 0$

$\|A\| = 0 \Longleftrightarrow A = 0$

2) $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$

3) $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$

4) $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$

za svako $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$*, naziva se matrična norma na* $\mathbb{R}^{n,n}$.

Definicija 1.3. *Kažemo da je matrična norma* $\|\cdot\|_m$ *saglasna sa vektorskom normom* $\|\cdot\|_v$ *ako za svaki vektor x i svaku matricu A važi:*

$$\|Ax\|_v \le \|A\|_m \|x\|_v.$$

Teorema 1.4. *Za svaku matričnu normu postoji vektorska norma sa njom saglasna.*

Definicija 1.4. *Neka je data vektorska norma* $\|\cdot\|_v$*. Tada preslikavanje definisano sa*

$$\|A\|_m = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v},$$

zovemo prirodna matrična norma ili matrična norma indukovana datom vektorskom normom.

Teorema 1.5. *Ekvivalentan zapis za prirodnu matričnu normu je*

$$\|A\|_m = \max_{\|u\|_v = 1} \|Au\|_v.$$

Dokaz. Označimo sa $u = \frac{x}{\|x\|_v}$. Očigledno, tada je $\|u\|_v = 1$. Iz definicije matrične norme imamo:

$$\|A\|_m = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{x \neq 0} \| \frac{Ax}{\|x\|} \| =$$

$$= \sup_{x \neq 0} \| A \frac{x}{\|x\|} \| = \sup_{\|u\|_v = 1} \|Au\|_v.$$

Kako je $\{x \ : \ \|x\|_v = 1\}$ kompaktan skup (zatvoren i ograničen), a $\|Au\|_v$ neprekidna funkcija, koja na kompaktnom skupu dostiže svoj maksimum, time je tvrđenje dokazano. □

Definicija 1.5. *Za kvadratnu matricu $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ definišimo spektralni radijus $\rho(A)$ na sledeći način:*

$$\rho(A) := \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|,$$

gde je $\sigma(A)$ skup svih karakterističnih korena matrice A.

Primer 1.2. Neke od matričnih normi su:

- matrična norma indukovana vektorskom normom beskonačno je :

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

- matrična norma indukovana vektorskom normom jedan je :

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,$$

- matrična norma indukovana vektorskom normom dva je :

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)},$$

- Frobenijusova matrična norma

$$\|A\|_2 = \sqrt{tr(A^T A)}.$$

Teorema 1.6. *Neka je $S \in \mathbb{R}^{n,n}$ regularna matrica i $\| \ \|_v$ proizvoljna vektorska norma u $\mathbb{R}^n$. Ako je $N(x) := \|Sx\|_v$, onda je matrična norma indukovana ovom vektorskom normom data sa $N(A) = \|SAS^{-1}\|_m$, pri čemu je $\| \ \|_m$ matrična norma indukovana vektorskom normom $\| \ \|_v$.*

Dokaz. Prema Teoremi 1.1 $N(x)$ je vektorska norma. Označimo sa $y = Sx$. Tada je $x \neq 0$ ekvivalentno sa $y \neq 0$ (jer je S regularna matrica). Po definiciji matrične norme dalje je

$$N(A) = \sup_{x \neq 0} \frac{N(Ax)}{N(x)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|SAx\|_v}{\|Sx\|_v} =$$

$$= \sup_{x \neq 0} \frac{\|SAS^{-1}Sx\|_v}{\|Sx\|_v} = \sup_{y \neq 0} \frac{\|SAS^{-1}y\|_v}{\|y\|_v} = \|SAS^{-1}\|_m,$$

čime je tvrđenje dokazano. □

TEOREMA 1.7. *Za sve matrične norme $\| \ \|$ važi*

$$\rho(T) \leq \|T\|.$$

Za svaku kvadratnu matricu T i svaki realni broj $\epsilon > 0$ postoji matrična norma $\| \ \|_*$, takva da je

$$\|T\|_* \leq \rho(T) + \epsilon.$$

Dokaz. Neka je $\rho(T) = |\lambda|$, a $z \neq 0$ karakteristični vektor koji odgovara λ. Dalje, na osnovu Teoreme 1.4 postoji vektorska norma $\| \ \|_v$ saglasna sa datom matričnom, pa tada važi

$$|\lambda| \|z\|_v = \|\lambda z\|_v = \|Tz\|_v \leq \|T\| \|z\|_v.$$

Dakle, $\rho(T) = |\lambda| \leq \|T\|$, jer $\|z\|_v > 0$.

Neka je J Žordanova forma matrice T, $J = S^{-1}TS$. Za proizvoljno $\epsilon > 0$ definišimo matricu $D_\epsilon = diag[1, \epsilon, \epsilon^2, \ldots, \epsilon^{n-1}]$. Matrica $D_\epsilon^{-1} J D_\epsilon = (SD_\epsilon)^{-1} T (SD_\epsilon)$ se razlikuje od J samo po tome što iznad dijagonale umesto jedinica ima ϵ. Matrice S i D_ϵ su regularne, pa možemo defnisati sledeću vektorsku normu

$$\|x\|_* := \|(SD_\epsilon)^{-1} x\|_\infty.$$

Na osnovu prethodne teoreme imamo

$$\|T\|_* = \|(SD_\epsilon)^{-1} T (SD_\epsilon)\|_\infty \leq \max_i |\lambda_i| + \epsilon = \rho(T) + \epsilon.$$

□

TEOREMA 1.8. *Neka je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ proizvoljna matrica i vektor $e \in \mathbb{R}^n$ takav da je $e > 0$. Tada je*

$$\|A\|_e := \max_i \sum_{j=1}^{n} \frac{|a_{ij}| e_j}{e_i}$$

matrična norma indukovana vektorskom normom $\| \ \|_e$. Takođe, za $A \geq 0$ važi

$$\|Ae\|_e = \|A\|_e.$$

Dokaz. Prema Teoremi 1.3.

$$\|x\|_e = \max_{1\leq j\leq n} \frac{|x_j|}{e_j} = \|Mx\|_\infty$$

je vektorska norma, gde je

$$M = diag\left[\frac{1}{e_1}, \frac{1}{e_2}, \ldots, \frac{1}{e_n}\right].$$

Dalje, prema Teoremi 1.6. je

$$\|A\|_e = \|MAM^{-1}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |(MAM^{-1})_{ij}| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} \frac{|a_{ij}|e_j}{e_i}.$$

Kako matrica A ime sve pozitivne elemente, tada je

$$\|Ae\|_e = \max_{1\leq i\leq n} \frac{|(Ae)_i|}{e_i} = \max_{1\leq i\leq n} \frac{|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j|}{e_i} = \max_{1\leq i\leq n} \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j}{e_i} = \|A\|_e.$$

□

1.3 Konvergencija nizova vektora i matrica

U ovom odeljku navodimo definicije i važnije teoreme koje se odnose na konvergenciju nizova i redova vektora i matrica neophodne za konstrukciju iterativinih postupaka koje razmatramo.

Definicija 1.6. *Niz vektora* $\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ *konvergira ka* $x \in \mathbb{R}^n$ *akko za svako* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *važi*

$$x_i^k \to x_i, k \to \infty.$$

Teorema 1.9. *Niz vektora* $\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ *konvergira ka* $x \in \mathbb{R}^n$ *akko*

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x\| = 0,$$

za svaku vektorsku normu.

Definicija 1.7. *Red vektora* $\sum_{k=1}^{\infty} x^{(k)}$ *konvergira akko niz parcijalnih suma* $\{s^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergira, gde je* $s^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} x^{(j)}$ *kada* $k \to \infty$.

Definicija 1.8. *Niz matrica* $A^{(1)} = [a_{ij}^{(1)}], A^{(2)} = [a_{ij}^{(2)}], \ldots, A^{(m)} = [a_{ij}^{(m)}], \ldots$ *iz* $\mathbb{R}^{n,n}$ *konvergira ka matrici* $A = [a_{ij}]$ *istog reda, ako i samo ako je*

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} a_{ij}^{(m)} = a_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Teorema 1.10. *Niz kvadratnih matrica* $\{A^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ *reda* n *konvergira ka matrici* $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ *akko*

$$\lim_{k \to \infty} \|A^{(k)} - A\| = 0,$$

za svaku matričnu normu.

Teorema 1.11. *Neka je* $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. *Stepeni red* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ *konvergira akko je* $\rho(A) < 1$. *Pri tome je* $E - A$ *regularna matrica i važi:*

$$(E - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Glava 2

Dijagonalno dominantne matrice i tehnika skaliranja

Konvergencija nekog iterativnog postupka za rešavanje sistema linearnih jednačina zavisi, između ostalog, od oblika matrice tog sistema. Od posebnog značaja su matrice čiju regularnost možemo jednostavno proveriti, ne računajući im determinantu. Tu spadaju strogo dijagonalno dominantne matrice. Međutim, kako je ovo veoma "uska" potklasa klase regularnih matrica, ona se proširuje matricama koje se mogu svesti na SDD matrice množenjem sa desne strane nekom pozitivnom dijagonalnom matricom. Takve matrice se zovu generalizovane dijagonalno dominantne matrice (GDD), a sam postupak njihovog svođenja na SDD matrice se zove skaliranje. U ovom delu rada razmatramo ove klase matrica, kao i neke druge potklase klase GDD matrica dobijene tehnikom skaliranja.

2.1 Strogo dijagonalno dominantne matrice

Definicija 2.1. *Matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ se naziva strogo dijagonalno dominantna matrica ili SDD matrica ako važi*

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

tj. u svakoj vrsti je apsolutna vrednost dijagonalnog elementa veća od zbira apsolutnih vrednosti vandijagonalnih elemenata te vrste.

U literaturi, ova klasa matrica, kao i njena uopštenja, se definišu na skupu kompleksnih kvadratnih matrica. Kako je u ovom radu akcenat na sistemima linearnih jednačina, mi ćemo se zadržati na realnom slučaju.

Ako uvedemo oznaku $r_i(A) := \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$, onda se gornji uslov može jednostavnije zapisati u obliku

$$|a_{ii}| > r_i(A), \; i = 1, 2, \dots, n.$$

Primer 2.1. Matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ nije SDD matrica, jer $r_2(A) = 2 = |a_{22}|$.

Matrica $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ očigledno zadovoljava SDD uslov.

Teorema 2.1. *Svaka SDD matrica je regularna.*

Dokaz. Pretpostavimo da je SDD matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ singularna. Tada postoji nenula vektor $x = [x_1, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ takav da je $Ax = 0$, ili ekvivalentno

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Kako je $x \neq 0$, postoji $k \in \{1, \ldots, n\}$ tako da je

$$0 < |x_k| = \max\{|x_j| : j \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Tada je

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj} x_j = -a_{kk} x_k,$$

odakle sledi

$$|a_{kk}||x_k| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}||x_j| \leq |x_k| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}} |a_{kj}|.$$

Deljenjem poslednje nejednakosti sa $|x_k| > 0$ dobijamo

$$|a_{kk}| \leq r_k(A),$$

što je u kontradikciji sa pretpostavkom. Dakle, A je regularna matrica. $\square$

Prethodna teorema daje dovoljan uslov za regularnost matrice. Ovaj uslov je mnogo jednostavniji za proveru od izračunavanja determinante matrice, naročito ako se radi o matricama velikog reda. Međutim, ovaj uslov nije i potreban, što se vidi iz prethodnog primera. Matrica A nije SDD matrica, ali je regularna jer $detA \neq 0$. Dakle, klasa SDD matrica je potklasa klase regularnih matrica. Međutim, ako se oslabi uslov stroge dijagonalne dominacije u dijagonalnu dominaciju, gubi se regularnost.

Definicija 2.2. *Matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ se naziva dijagonalno dominantna matrica (DD) matrica ako važi*

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

pri čemu za bar jedan indeks $k \in \{1, \ldots, n\}$ važi stroga nejednakost, tj. $|a_{kk}| > r_k(A)$.

Da DD matrice ne moraju biti regularne pokazuje sledeći primer.

Primer 2.2. Matrica $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ je DD-matrica, ali $det(A) = 0$, pa je singularna.

2.2 Generalizovane dijagonalno dominantne matrice

Kako je u praksi uslov stroge dijagonalne dominacije često previše zahtevan, razvijala su se njegova razna uopštenja, [25]. Međutim, ispostavilo se da većina takvih uopštenja podpada pod okvir teorije H-matrica. U nastavku, navodimo definiciju H-matrica i njihovu vezu sa strogom dijagonalnom dominacijom.

Definicija 2.3. *Matrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ je generalizovana dijagonalno dominantna matrica ili GDD matrica, ako postoji pozitivna dijagonalna matrica W takva da je AW SDD matrica.*

Iz definicije sledi da se svaka GDD matrica reda n može dobiti kao proizvod neke SDD matrice i neke pozitivne dijagonalne matrice reda n, odnosno da su GDD matrice generisane SDD matricama.

Generalizovane dijagonalno dominantne matrice su odličan alat u proučavanju $M-$matrica koje imaju široku primenu, kako u matematici, tako i u ekonomiji, inženjerstvu, ekologiji itd. ([5]).

Definicija 2.4. *Matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ je Z-matrica ako važi $a_{ij} \leq 0$, za svako $i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j$.*

Definicija 2.5. *Matrica A koja je Z-matrica naziva se M-matrica ako je regularna i $A^{-1} \geq 0$.*

Teorema 2.2. *Neka je matrica A Z-matrica. Tada, A je M-matrica akko postoji pozitivan vektor z takav da je $Az > 0$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Pretpostavimo da je matrica A M-matrica. Prema definiciji, tada ja matrica A $Z-$matrica, ima inverznu matricu i važi da je $A^{-1} \geq 0$.

Za vektor $\delta = [1 \quad 1 \cdots 1]^T > 0$ imamo da je $z = A^{-1}\delta \geq 0$.

Pretpostavimo da postoji i takvo da je $z_i = 0$. Tada

$$(A^{-1}\delta)_i = 0,$$

odakle sledi da je

$$\sum_{j=1}^{n} (A^{-1})_{ij} = 0,$$

pa zaključujemo da je cela $i-$ ta vrsta matrice A^{-1} jednaka nuli, odnosno matrica A^{-1} nije regularna.

Dakle $z > 0$, pa je

$$Az = AA^{-1}\delta = \delta > 0.$$

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da je A $Z-$matrica i da postoji vektor $z > 0$ takav da je $Az > 0$.

Neka je $A = D - B$ razlaganje matrice A, takvo da je $D = diag[a_{11}, \dots, a_{nn}]$.

Tada je $B \geq 0$, jer je A $Z-$matrica. Na osnovu pretpostavke znamo da je $Az > 0$ pa je $(D - B)z > 0$, a time i

$$0 \leq Bz < Dz,$$

što implicira da D ima pozitivne dijagonalne elemente, tj. $D > 0$. Međutim, tada je i $D^{-1} > 0$, pa množenjem prethodne nejednakosti sa leve strane sa D^{-1} dobijamo

$$D^{-1}Bz < z.$$

Koristeći Teoremu 1.8 dobijamo:

$$\|D^{-1}B\|_z = \|D^{-1}Bz\|_z < \|z\|_z = 1,$$

pa je, po Teoremi 1.6

$$\rho(D^{-1}B) \leq \|D^{-1}B\|_z < 1.$$

Dakle, na osnovu Teoreme 1.11, $E - D^{-1}B = D^{-1}(D - B) = D^{-1}A$ je regularna matrica i važi

$$(E - D^{-1}B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(D^{-1}B)^k.$$

Iz $A = D(E - D^{-1}B)$ sledi da je matrica A regularna (kao proizvod dve regularne matrice). Dalje je

$$(D^{-1}A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(D^{-1}B)^k,$$

odakle sledi

$$A^{-1}D = \sum_{k=0}^{\infty}(D^{-1}B)^k.$$

Množenjem sa D^{-1} sa desne strane dobijamo

$$A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(D^{-1}B)^k D^{-1} \geq 0,$$

pa je matrica A $M-$matrica. $\square$

TEOREMA 2.3. *Matrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ koja je Z i SDD matrica, je i $M-$matrica.*

Dokaz. Neka je matrica A $Z-$matrica i neka je $A = D - B$ razlaganje matrice A na matricu D i B. Kako je A SDD, dijagonalni elementi ne mogu biti nula, tj. $D > 0$. Dakle, važi da je $D^{-1}B \geq 0$.

Pretpostavimo da je $\rho(D^{-1}B) \geq 1$. Tada postoji karakteristični koren λ matrice $D^{-1}B$ sa osobinom $|\lambda| \geq 1$.

Posmatrajmo matricu $C := \lambda D - B$. Za svako $i = 1, 2, \ldots, n$ važi

$$|c_{ii}| = |\lambda a_{ii}| = |\lambda||a_{ii}| \geq |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |c_{ij}|,$$

pa je C SDD matrica.

Kako su sve SDD matrice regularne, onda je i matrica C regularna, pa je $\lambda D - B$ regularna, odnosno $D(\lambda E - D^{-1}B)$ je regularna, tj. $\lambda E - D^{-1}B$ je regularna matrica. Međutim, tada je $\lambda \notin \sigma(D^{-1}B)$ što je u kontradikciji sa pretpostavkom.

Dakle mora biti $\rho(D^{-1}B) < 1$. Po Teoremi 1.11. sledi da je $E - D^{-1}B$ regularna matrica, pa je i $A = D(E - D^{-1}B)$ regularna kao proizvod dve regularne matrice. Dokažimo da je $A^{-1} \geq 0$. Prema Teoremi 1.11 je

$$(E - D^{-1}B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (D^{-1}B)^k \geq 0,$$

pa je

$$A^{-1} = (E - D^{-1}B)^{-1} D^{-1} \geq 0.$$

□

Očigledno, M-matrice se ograničavaju na realne matrice specijalne znakovne strukture, te postoji potreba za proširenjem na realne matrice proizvoljne znakovne strukture, kao i na kompleksne matrice. Tako je nastala klasa H-matrica.

DEFINICIJA 2.6. *Matrica $\langle A \rangle = [\alpha_{ij}]$ je pridružena matrica matrice $A = [a_{ij}]$ ako važi*

$$\alpha_{ii} = |a_{ii}|, \quad \alpha_{ij} = -|a_{ij}|, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq j.$$

DEFINICIJA 2.7. *Matrica A je H-matrica akko $\langle A \rangle$ je M-matrica.*

Da $H-$matrice nisu ništa drugo nego GDD matrice dokazujemo u sledećoj teoremi.

TEOREMA 2.4. *Matrica A je $H-$matrica akko je GDD matrica, tj. ako postoji pozitivna dijagonalna matrica W takva da je AW SDD matrica.*

Dokaz. Matrica A je $H-$matrica akko je prateća matrica $\langle A \rangle$ $M-$matrica, što je po Teoremi 2.2 ekvivalentno sa postojanjem vektora z takvog da je $\langle A \rangle z > 0$, tj. da je $(\langle A \rangle z)_i > 0$, za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ovo je dalje ekvivalentno sa

$$|a_{ii}| z_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| z_j > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ako označimo $W = diag[z_1, \ldots, z_n]$, poslednju relaciju možemo zapisati u obliku

$$|(AW)_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |(AW)_{ij}| = r_i(AW), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

što je ekvivalentno sa uslovom da je AW SDD matrica. $\square$

Definicija 2.8. *Neka je matrica A $H-$matrica. Pozitivna dijagonalna matricu W takva da je AW SDD matrica se zove skalirajuća matrica, a sam postupak svođenja na SDD se zove dijagonalno skaliranje ili samo skaliranje.*

Iz definicije neposredno sledi da je svaka $H-$matrica regularna, jer je proizvod dve regularne matrice: SDD matrice AW i pozitivne dijagonalne matrice W^{-1}. Dakle, H-matrice predstavljaju najšire uopštenje stroge dijagonalne dominacije tehnikom skaliranja. U narednoj sekciji navešćemo i druge klase matrica koje se dobijaju ovom tehnikom. Iako se dobijeni rezultati odnose na potklase klase H-matrica, oni svoju svrhu nalaze sa jedne strane u tome što klasifikuju H-matrice prema obliku skalirajuće matrice praveći "most" od SDD matrica, kao osnovne potklase, do cele klase H-matrica.

2.3 Neke potklase klase $H-$matrica

U literaturi su proučavane i razne potklase klase $H-$matrica koje ispunjavaju neke posebne uslove. Shodno temi ovog rada, navodimo samo one koje se odnose na tehniku skaliranja.

2.3.1 Matrice koje su SDD po kolonama

Definicija 2.9. *Matrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ je SDD po kolonama ako važi*

$$|a_{ii}| > c_i(A) := \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ji}|, \;\; \textit{za svako } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Teorema 2.5. *Ako je matrica A SDD po kolonama, onda je A i $H-$matrica.*

Dokaz. Prvo, primetimo da su klase M- i H-matrica invarijantne na transponovanje. Naime, za sve matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$

(1) A je Z-matrica akko je A^T Z-matrica,

(2) A je regularna akko A^T je regularna,

(3) $A^{-1} \geq 0$ akko $(A^T)^{-1} \geq 0$,

(4) $\langle A^T \rangle = \langle A \rangle^T$.

Dakle, kako je A SDD po kolonama, tada je A^T SDD, pa time i H-matrica, što, na osnovu prethodnog, implicira da je i A H-matrica. □

Kao što smo primetili, uslovi koji definišu H-matrice su invarijantni na transponovanje, dok klasa SDD matrica to nije. Dakle, razne potklase dobijane uopštenjima stroge dijagonalne dominacije se mogu formulisati kako za vrste, tako i za kolone matrice, [22, 25]. Međutim, iako na osnovu prethodne teoreme, tehnika skaliranja primenjena na vrste matrice (što se dobija kada bismo datu matricu A množili skalirajućom matricom W sa leve strane - WA) vodi ponovo ka klasi H-matrica, naredne potklase koje klasifikuju H-matrice se u opštem slučaju razlikuju ukoliko se formulišu po vrstama ili kolonama. Imajući to u vidu, navodimo formulacije po vrstama, dok se na potpuno analogan način može izvrsšiti klasifikacija H-matrica po kolonama.

2.3.2 $S - SDD$ matrice

Definicija 2.10. *Za matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ i podskup S skupa $N = \{1, 2, \dots, n\}$ neka je*

$$r_i^S(A) := \sum_{j \in S \setminus \{i\}} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Definicija 2.11. *Za dati neprazan pravi podskup S skupa indeksa N, matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ je S-SDD (S-strogo dijagonalno dominantna) matrica ako važi*

$$|a_{ii}| > r_i^S(A), \qquad \text{za svako} \quad i \in S, \tag{2.1}$$

$$(|a_{ii}| - r_i^S(A))(|a_{jj}| - r_j^{\overline{S}}(A)) > r_i^{\overline{S}}(A) r_j^S(A), \quad \text{za sve } i \in S, j \in \overline{S}. \tag{2.2}$$

Lema 2.1. *Ako je matrica SDD, onda je ona i S-SDD matrica, za proizvoljan skup $S \subset N$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ SDD matrica i da je $S \subset N$ proizvoljan skup indeksa. Tada, za svako $i \in N$

$$|a_{ii}| > r_i(A) = r_i^S(A) + r_i^{\overline{S}}(A) \geq r_i^S(A),$$

pa uslov (2.1) važi. Za sve $i, j \in N$ važi

$$|a_{ii}| - r_i^S(A) > r_i^{\overline{S}}(A), \quad |a_{jj}| - r_j^{\overline{S}}(A) > r_j^S(A),$$

pa je ispunjen i uslov (2.2). □

Teorema 2.6. *Ako je matrica S-SDD za dati skup indeksa $S \subset N$, onda je ona i $H-$matrica.*

Dokaz. Pretpostavimo da je matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ S-SDD matrica, tj. takva da za neprazan skup indeksa $S \subset N$ važi (2.1) i (2.2). Pokažimo da postoji pozitivna dijagonalna matrica W takva da je AW SDD matrica. Definišimo matricu $W = diag[w_1, \ldots, w_n]$ na sledeći način:

$$w_k = \begin{cases} \gamma, & \text{ako je } k \in S \\ 1, & \text{ako je } k \in \overline{S} \end{cases}.$$

Da bi matrica AW bila SDD matrica, treba da izaberemo γ tako da važi:

$$\gamma |a_{ii}| > \gamma r_i^S(A) + r_i^{\overline{S}}(A), \text{ za svako } i \in S,$$

i

$$|a_{jj}| > r_j^S(A) + \gamma r_j^{\overline{S}}(A), \text{ za svako } j \in \overline{S}.$$

Ovo je ekvivalentno sa uslovima

$$\gamma > \frac{r_i^{\overline{S}}(A)}{|a_{ii}| - r_i^S(A)}, \quad \text{gde je } |a_{ii}| > r_i^S(A)$$

i

$$\gamma < \frac{|a_{jj}| - r_j^{\overline{S}}(A)}{r_j^S(A)}, \qquad \text{za } r_j^S(A) \neq 0.$$

Ako za matricu A definišemo brojeve

$$\mu_1(A) := \max_{i \in S} \frac{r_i^{\overline{S}}(A)}{|a_{ii}| - r_i^S(A)}$$

i

$$\mu_2(A) := \min_{j \in \overline{S}, r_j^S \neq 0} \frac{|a_{jj}| - r_j^{\overline{S}}(A)}{r_j^S(A)},$$

tada će gornji uslovi biti ispunjeni ako i samo ako γ pripada intervalu $(\mu_1(A), \mu_2(A))$.

Da je ovaj interval dobro definisan i neprazan, sledi iz uslova (2.1) i (2.2). Dakle, za ovako određenu matricu W matrica AW je SDD matrica, što znači da je A $H-$matrica. □

Po Teoremi 2.4. za svaku $H-$matricu A postoji regularna dijagonalna matrica W, takva da je AW strogo dijagonalno dominantna. Međutim, često se ta skalirajuća matrica W ne može eksplicitno naći. Iz dokaza prethodne teoreme vidimo da se za $S - SDD$ matrice skalirajuća matrica može eksplicitno odrediti, što pruža odgovarajuće prednosti u radu sa ovom klasom matrica, vid. [8],[9].

2.3.3 PM i PH-matrice

Ove matrice su uvedene u radu [19], a u [18] je data njihova karakterizacija terminologijom generalizovane dijagonalne dominacije.

Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, i neka je $\mathcal{M} = M_1 \cup \ldots \cup M_m$ particija skupa indeksa $N = \{1, \ldots, n\}$ na m disjunktnih podskupova. Označimo $A_{ij} = A[M_i, M_j] = [a_{pq}]_{\substack{p \in M_i, \\ q \in M_j}}$, $\quad i, j = 1, \ldots, m$, i predstavimo matricu A u blok formi

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mm} \end{bmatrix}.$$

Definišimo kolekciju pridruženih matrica

$$A^{(i_1, i_2, \ldots, i_m)} = \begin{bmatrix} r_{i_1}(A_{11}) & r_{i_1}(A_{12}) & \ldots & r_{i_1}(A_{1m}) \\ r_{i_2}(A_{21}) & r_{i_2}(A_{22}) & \ldots & r_{i_2}(A_{2m}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{i_m}(A_{m1}) & r_{i_m}(A_{m2}) & \ldots & r_{i_m}(A_{mm}) \end{bmatrix}, \quad i_k \in M_k, \quad k = 1, \ldots, m,$$

pri čemu je $r_{i_k}(A_{kj}) = \sum_{l \in M_j} a_{i_k l}$.

Definicija 2.12. *Matrica A je PM-matrica u odnosu na particiju $\mathcal{M}$ ako su njeni vandijagonalni elementi nepozitivni i sve pridružene matrice $A^{(i_1, \ldots, i_m)}$, $i_k \in M_k$, $k = 1, \ldots, m$ su regularne $M-$matrice.*

Definicija 2.13. *Matrica A je $PH-$matrica u odnosu na particiju $\mathcal{M}$ ako je njena pridružena matrica $\langle A \rangle$ $PM-$matrica u odnosu na istu particiju skupa indeksa.*

Očigledno, matrica A je $PM-$matrica ($PH-$matrica) u odnosu na najfiniju (tačkastu) particiju ($n = m$) ako i samo ako je regularna $M-$matrica ($H-$matrica). S druge strane, za najgrublju particiju skupa indeksa, tj. $n = 1$, A je $PH-$matrica ako i samo ako je SDD matrica.

Da definicije $PM-$ i $PH-$matrica predstavljaju klasifikaciju M-matrica i H-matrica tehnikom skaliranja rezultat je sledećih tvrđenja pokazanih u [18].

Teorema 2.7. *Neka je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ matrica sa nepozitivnim vandijagonalnim elementima i neka je $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_m\}$, $1 \leq m \leq n$, particija skupa indeksa na disjunktne neprazne podskupove. Tada, A je $PM-$matrica akko postoji pozitivan vektor $x = [x_i] \in \mathbb{R}^n$ oblika $x_i = c_j$ za sve $i \in M_j$ $(j = 1, \ldots, m)$, takav da je $Ax > 0$, tj. A je GDD matrica sa skalirajućom matricom čije sve blok komponente koje odgovaraju podskupovima M_j $(j = 1, \ldots, m)$ imaju na dijagonali konstantne vrednosti.*

Iz ove teoreme se neposredno dobijaju sledeće posledice.

Posledica 2.1. *Ako je A $PM-$matrica u odnosu na neku particiju skupa indeksa, onda je ona i $M-$matrica.*

POSLEDICA 2.2. *Ako je A $PM-$matrica u odnosu na neku particiju skupa indeksa, onda je ona i $PM-$matrica u odnosu na svaku finiju particiju skupa indeksa.*

Analogna tvrđenja važe i za $PH-$matrice.

TEOREMA 2.8. *Neka je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ i neka je $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_m\}$, $1 \leq m \leq n$, particija skupa indeksa na disjunktne neprazne podskupove. Tada je A $PH-$matrica akko postoji pozitivan vektor $x = [x_i] \in \mathbb{R}^n$ oblika $x_i = c_j$ za sve $i \in M_j$ $(j = 1, \ldots, m)$, takav da je $Ax > 0$, tj. A je GDD matrica sa skalirajućom matricom čije sve blok komponente koje odgovaraju podskupovima M_j $(j = 1, \ldots, m)$ imaju konstantne vrednosti na dijagonali.*

POSLEDICA 2.3. *Ako je A $PH-$matrica u odnosu na neku particiju skupa indeksa, onda je ona i $H-$matrica.*

POSLEDICA 2.4. *Ako je A $PH-$matrica u odnosu na neku particiju skupa indeksa, onda je ona i $PH-$matrica u odnosu na svaku finiju particiju skupa indeksa.*

Primetimo da je matrica A $PH-$matrica u odnosu na dvočlanu particiju $M_1 \cup M_2$ akko je S-SDD matrica, gde je $S = M_1$.

PRIMER 2.3. Matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 7 & -2 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & -1 & 11 \end{bmatrix}$$

očigledno nije SDD, ali je PM-matrica u odnosu na particiju $\{1,3\} \cup \{2,4\} \cup \{5\}$, jer je $Z-$matrica i skaliranjem dijagonalnom matricom $W = diag[3,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1]$ dobija se SDD matrica. Ova matrica je i PH-matrica u odnosu na istu particiju skupa indeksa, jer je njena prateća matrica $\langle A \rangle = A$.

Dakle, na osnovu Teoreme 2.8 klasa PH-matrica se može razumeti kao klasifikacija H-matrica prema obliku skalirajuće matrice. Osnovni motiv za formiranje ove klase se nalazi u $S - SDD$ matricama, pa ćemo u nastavku rada ovoj klasi posvetiti posebnu pažnju pri ispitivanju konvergencije iterativnih postupaka.

Glava 3

Blok dijagonalno dominantne matrice i tehnika skaliranja

Pojmove uvedene u glavi 2 možemo uopštiti i na blok matrice, kao što je urađeno u [16].

Neka je data matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ i particija $\pi = \{p_1, \dots, p_l\}$ skupa indeksa N koja ispunjava uslov

$$p_0 := 0 < p_1 < \dots < p_l := n.$$

Tada se matrica A može predstaviti u blok formi

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{l1} & A_{l2} & \dots & A_{ll} \end{bmatrix} = [A_{ij}]_{l \times l}.$$

Ako sa W_j, $j \in \{1, \dots, l\}$, označimo potprostor prostora $\mathbb{R}^{n,n}$ koji generišu vektori $e_{p_{j-1}+1}, \dots e_{p_j}$ standardne baze prostora $\mathbb{R}^{n,n}$, onda podmatrica A_{ij} određuje jedno linearno preslikavanje potprostora W_j u potprostor W_i.

Sada ćemo za klase SDD, $S - SDD$ i $H-$matrica navesti odgovarajuća blok uopštenja. Uvedimo sledeće oznake:

$$L := \{1, 2, \dots, l\},$$

$$\|A_{ij}\|_\infty := \sup_{\substack{x \in W_j \\ x \neq 0}} \frac{\|A_{ij}x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \sup_{\|x\|_\infty = 1} \|A_{ij}x\|_\infty,$$

$$(\|A_{ii}^{-1}\|_\infty)^{-1} := \inf_{\substack{x \in W_i \\ x \neq 0}} \frac{\|A_{ii}x\|_\infty}{\|x\|_\infty}. \tag{3.1}$$

Primetimo da je poslednja definicija u skladu sa uobičajenom definicijom prirodne norme, u slučaju kada je matrica A_{ii} regularna. Ako je A_{ii} singularna, onda je $\inf\limits_{\substack{x \in W_i \\ x \neq 0}} \frac{\|A_{ii}x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ jednako nuli.

Za blok matricu $A = [A_{ij}]_{l\times l}$ definisaćemo pridruženu matricu istih dimenzija $l \times l$. To možemo uraditi na sledeća dva načina:

- pridruženu matricu I tipa označavamo sa $\rangle A \langle^{\pi} = [s_{ij}]$, gde je

$$s_{ij} := \begin{cases} (\|A_{ii}^{-1}\|_\infty)^{-1}, & i = j \text{ i } det(A_{ii}) \neq 0 \\ -\|A_{ij}\|_\infty, & i \neq j, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

- pridruženu matrica II tipa označavamo sa $\langle A \rangle^{\pi} = [m_{ij}]$, gde je

$$m_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j \text{ i } det(A_{ii}) \neq 0 \\ -\|A_{ii}^{-1} A_{ij}\|_\infty, & i \neq j \text{ i } det(A_{ii}) \neq 0, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Zbog dva tipa pridružene matrice sledi da će i svaka tačkasta potklasa $H-$matrica imati po dve svoje blok varijante, I i II tipa. Za blok π matrice koje imaju singularne dijagonalne blokove, pridružene matrice I i II tipa će imati nule na dijagonali, pa ne mogu biti $H-$matrice. Zbog toga ćemo u daljem radu kada god razmatramo blok π matricu $A = [A_{ij}]_{l\times l}$ iz neke od klasa nastalih blok uopštenjima potklasa $H-$matrica, uvek pretpostavljati da su dijagonalni blokovi $A_{11}, \ldots, A_{ll}$ *regularne* matrice.

3.1 Blok SDD matrice

3.1.1 Prvi tip blok uopštenja

Definicija 3.1. *Za datu particiju π, blok matricu $A = [A_{ij}]_{l\times l}$ zovemo blok π SDD matrica I tipa ako je njena pridružena matrica I tipa $\rangle A \langle^{\pi}$ SDD matrica.*

Drugim rečima, za datu particiju π, matrica A je blok π SDD matrica, ako važi

$$(\|A_{ii}^{-1}\|_\infty)^{-1} > \sum_{j \in L\setminus\{i\}} \|A_{ij}\|_\infty \quad \text{za svako } i \in L.$$

Teorema 3.1. *Svaka blok π SDD matrica I tipa je regularna.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da je A singularna matrica, tj. da postoji nenula vektor $x \in \mathbb{R}^n$, tako da je $Ax = 0$. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $\|x\|_\infty = 1$. Zapišimo vektor x u blok formi $x = [X_1\ X_2 \ldots X_l]^T$, pri čemu je dimenzija vektora X_j jednaka redu dijagonalnog bloka A_{jj}, za svako $j \in L$. Tada je

$$\sum_{j \in L} A_{ij} X_j = 0, \quad \text{za svako } i \in L,$$

odnosno,

$$A_{ii}X_i = -\sum_{j\in L\setminus\{i\}} A_{ij}X_j, \quad i \in L.$$

Kako je $\|x\|_\infty = 1$, možemo izabrati indeks k takav da je $\|X_k\|_\infty = 1$. Tada, za $i = k$ dobijamo

$$\|A_{kk}X_k\|_\infty \le \sum_{j\in L\setminus\{k\}} \|A_{kj}X_j\|_\infty \le \sum_{j\in L\setminus\{k\}} \|A_{kj}\|_\infty\|X_j\|_\infty \le \sum_{j\in L\setminus\{k\}} \|A_{kj}\|_\infty.$$

Međutim,

$$\|A_{kk}X_k\|_\infty \ge (\|A_{kk}^{-1}\|_\infty)^{-1}\|X_k\|_\infty = (\|A_{kk}^{-1}\|_\infty)^{-1},$$

pa zaključujemo da je

$$(\|A_{kk}^{-1}\|_\infty)^{-1} \le \sum_{j\in L\setminus\{k\}} \|A_{kj}\|_\infty,$$

što je kontradikcija sa pretpostavkom da je $\rangle A\langle^\pi$ SDD matrica. Dakle, A je regularna matrica. □

3.1.2 Drugi tip blok uopštenja

Definicija 3.2. *Za datu particiju π, blok matricu $A = [A_{ij}]_{l\times l}$ zovemo blok π SDD matrica II tipa ako je njena pridružena matrica II tipa $\langle A\rangle^\pi$ SDD matrica.*

Teorema 3.2. *Svaka blok π SDD matrica II tipa je regularna.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da je A singularna matrica, tj. da postoji nenula vektor $x \in \mathbb{R}^n$, tako da je $Ax = 0$. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $\|x\|_\infty = 1$. Zapišimo vektor x u blok formi $x = [X_1\ X_2 \ldots X_l]^T$, pri čemu je dimenzija vektora X_j jednaka redu dijagonalnog bloka A_{jj}, za svako $j \in L$. Tada je

$$\sum_{j\in L} A_{ij}X_j = 0, \quad \text{za svako } i \in L,$$

odnosno,

$$A_{ii}X_i = -\sum_{j\in L\setminus\{i\}} A_{ij}X_j, \quad i \in L,$$

odakle sledi

$$X_i = -\sum_{j\in L\setminus\{i\}} A_{ii}^{-1}A_{ij}X_j, \quad i \in L.$$

Kako je $\|x\|_\infty = 1$, možemo izabrati indeks k takav da je $\|X_k\|_\infty = \max_{j\in L} \|X_j\|_\infty = 1$. Tada, za $i = k$ dobijamo

$$\begin{aligned} 1 = \|X_k\|_\infty &\le \sum_{j\in L\setminus\{k\}} \|A_{kk}^{-1}A_{kj}X_j\|_\infty \le \sum_{j\in L\setminus\{k\}} \|A_{kk}^{-1}A_{kj}\|_\infty\|X_j\|_\infty \\ &\le \sum_{j\in L\setminus\{k\}} \|A_{kk}^{-1}A_{kj}\|_\infty = \sum_{j\in L\setminus\{k\}} |m_{kj}|, \end{aligned}$$

što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je $\langle A\rangle^\pi$ strogo dijagonalno dominantna. Dakle, A je regularna matrica. □

3.1.3 Odnos I i II tipa blok uopštenja

TEOREMA 3.3. *Ako je A blok π SDD matrica I tipa, onda je A i blok π SDD matrica II tipa.*

Dokaz. Neka je π data particija i neka je matrica A blok π SDD matrica I tipa. Dakle, važi

$$(\|A_{ii}^{-1}\|_\infty)^{-1} > \sum_{j\in L\setminus\{i\}} \|A_{ij}\|_\infty \quad \text{za svako } i \in L.$$

Ovaj uslov se može zapisati i u obliku

$$1 > \|A_{ii}^{-1}\|_\infty \sum_{j\in L\setminus\{i\}} \|A_{ij}\|_\infty \quad \text{za svako } i \in L.$$

Kako je

$$\begin{aligned} \|A_{ii}^{-1}\|_\infty \sum_{j\in L\setminus\{i\}} \|A_{ij}\|_\infty &= \sum_{j\in L\setminus\{i\}} \|A_{ii}^{-1}\|_\infty \|A_{ij}\|_\infty \\ &\geq \sum_{j\in L\setminus\{i\}} \|A_{ii}^{-1}A_{ij}\|_\infty \\ &= \sum_{j\in L\setminus\{i\}} |m_{ij}|, \end{aligned}$$

to znači da je

$$1 > \sum_{j\in L\setminus\{i\}} |m_{ij}|,$$

tj. $\langle A\rangle^\pi$ je SDD matrica, odnosno, A je blok π SDD matrica II tipa. $\square$

Odnose klasa SDD matrica u tačkastom smislu, blok π SDD matrica I tipa i blok π SDD matrica II tipa ilustruju sledeći primeri.

PRIMER 3.1. Za particiju $\pi = \{0, 2, 5\}$ skupa indeksa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ i matricu

$$A = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

imamo

$$s_{11} = (\|A_{11}^{-1}\|_\infty)^{-1} = \frac{1}{3},\ m_{11} = 1$$

$$s_{12} = -\|A_{12}\|_\infty = -\frac{1}{2}, \quad m_{12} = -\|A_{11}^{-1}A_{12}\|_\infty = -\frac{3}{4}$$

$$s_{21} = -\|A_{21}\|_\infty = 0, \quad m_{21} = -\|A_{22}^{-1}A_{21}\|_\infty = 0$$

$$s_{22} = (\|A_{22}^{-1}\|_\infty)^{-1} = \frac{1}{4}, \quad m_{22} = 1,$$

$$\rangle A\langle^\pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad \langle A\rangle^\pi = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrica A nije SDD (u tačkastom smislu), nije blok π SDD matrica I tipa (jer $\rangle A\langle^{\pi}$ nije SDD matrica), a jeste blok π SDD matrica II tipa (jer je $\langle A\rangle^{\pi}$ SDD matrica).

PRIMER 3.2. Za particiju $\pi = \{0, 2, 4\}$ skupa indeksa $\{1, 2, 3, 4\}$ i matricu

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 6 & 0.5 & -2.4 & 3 \\ 6 & 11 & 2 & -2 \\ \hline -2 & 7 & 14 & -4 \\ 0.5 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

imamo

$$\rangle A\langle^{\pi} = \begin{bmatrix} 5.25 & -5.4 \\ -9 & 4.93 \end{bmatrix}, \quad \langle A\rangle^{\pi} = \begin{bmatrix} 1 & -0.98 \\ 0.74 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrica A je SDD (u tačkastom smislu) i blok π SDD matrica II tipa, a nije blok π SDD matrica I tipa (jer $\rangle A\langle^{\pi}$ nije SDD matrica).

3.2 Blok $H-$matrice

Analogno uopštenjima pojma tačkastih SDD matrica na blok SDD matrice, dajemo dva tipa uopštenja $H-$matrice na blok $H-$matrice tehnikom skaliranja.

3.2.1 Prvi tip blok uopštenja

DEFINICIJA 3.3. *Za datu particiju π, blok matricu $A = [A_{ij}]_{l\times l}$ zovemo blok π $H-$matrica I tipa ako je njena pridružena matrica I tipa $\rangle A\langle^{\pi}$ $H-$matrica.*

TEOREMA 3.4. *Svaka blok π $H-$matrica I tipa je regularna.*

Dokaz. Ako je $[A_{ij}]_{l\times l}$ blok π $H-$matrica I tipa, tj. ako je $\rangle A\langle^{\pi}$ $H-$matrica, onda postoji pozitivna dijagonalna matrica

$$X = diag[x_1, x_2, \dots, x_l],$$

takva da je $\rangle A\langle^{\pi} X$ SDD matrica. To znači da za svako $i \in L$ važi

$$(\|A_{ii}^{-1}\|_{\infty})^{-1} x_i > \sum_{j\in L\setminus\{i\}} \|A_{ij}\|_{\infty} x_j.$$

Definišimo matricu $W \in \mathbb{R}^{n,n}$, gde je n red matrice A, na sledeći način:

$$W = diag[x_1 E_{m_1}, x_2 E_{m_2}, \dots, x_l E_{m_l}],$$

gde je E_{m_k} jedinična matrica reda m_k, a m_k je dimenzija bloka A_{kk}, $k \in L$. Tada je

$$AW = \begin{bmatrix} x_1A_{11} & x_2A_{12} & \dots & x_lA_{1l} \\ x_1A_{21} & x_2A_{22} & \dots & x_lA_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1A_{l1} & x_2A_{l2} & \dots & x_lA_{ll} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{l1} & A_{l2} & \dots & A_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1E_{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2E_{m_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_lE_{m_l} \end{bmatrix}.$$

Kako je

$$(\|(\rangle AW\langle^{\pi})_{ii}^{-1}\|_\infty)^{-1} = x_i(\|A_{ii}^{-1}\|_\infty)^{-1},$$
$$\|(\rangle AW\langle^{\pi})_{ij}\|_\infty = x_j\|A_{ij}\|_\infty$$

sledi da je pridružena matrica I tipa $\rangle AW\langle^{\pi}$ SDD matrica, a time da je i AW blok π SDD matrica I tipa. □

3.2.2 Drugi tip blok uopštenja

Definicija 3.4. *Za datu particiju π, blok matricu $A = [A_{ij}]_{l\times l}$ zovemo blok π $H-$matrica II tipa ako je njena pridružena matrica II tipa $\langle A\rangle^{\pi}$ $H-$matrica.*

Teorema 3.5. *Svaka blok π $H-$matrica II tipa je regularna.*

Dokaz. Ako je $[A_{ij}]_{l\times l}$ blok π $H-$matrica II tipa, tj. ako je $\langle A\rangle^{\pi}$ $H-$matrica, onda postoji pozitivna dijagonalna matrica

$$X = diag[x_1, x_2, \dots, x_l],$$

takva da je $\langle A\rangle^{\pi}X$ SDD matrica. To znači da za svako $i \in L$ važi

$$x_i > \sum_{j\in L\setminus\{i\}} \|A_{ii}^{-1}A_{ij}\|_\infty x_j.$$

Definišimo matricu $W \in \mathbb{R}^{n,n}$, gde je n red matrice A, na sledeći način:

$$W = diag[x_1E_{m_1}, x_2E_{m_2}, \dots, x_lE_{m_l}],$$

gde je I_{m_k} jedinična matrica reda m_k, a m_k je dimenzija bloka A_{kk}, $k \in L$. Tada je

$$W^{-1}AW = \begin{bmatrix} A_{11} & \frac{x_2}{x_1}A_{12} & \dots & \frac{x_l}{x_1}A_{1l} \\ \frac{x_1}{x_2}A_{21} & A_{22} & \dots & \frac{x_l}{x_2}A_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{x_1}{x_l}A_{l1} & \frac{x_2}{x_l}A_{l2} & \dots & A_{ll} \end{bmatrix}.$$

Ako uvedemo oznaku $\langle W^{-1}AW\rangle^{\pi} = [\mu_{ij}]$, onda je

$$\begin{aligned}
\mu_{ii} &= 1 = m_{ij} \\
\mu_{ij} &= -\|(W^{-1}AW)_{ii}^{-1}(W^{-1}AW)_{ij}\|_{\infty} = -\left\|\frac{x_j}{x_i}A_{ii}^{-1}A_{ij}\right\|_{\infty} = -\frac{x_j}{x_i}m_{ij},\ i \neq j.
\end{aligned}$$

Kako je $\langle A\rangle^{\pi}X$ SDD matrica, to je i $X^{-1}\langle A\rangle^{\pi}X$, čiji su elementi

$$(X^{-1}\langle A\rangle^{\pi}X)_{ii} = 1, \quad i \in L$$

$$(X^{-1}\langle A\rangle^{\pi}X)_{ij} = -\frac{x_j}{x_i}m_{ij}, \quad i \neq j,\ i,j \in L.$$

Dakle, $\langle W^{-1}AW\rangle^{\pi} = X^{-1}\langle A\rangle^{\pi}X$, pa zaključujemo da je $\langle W^{-1}AW\rangle^{\pi}$ SDD matrica, odnosno, $W^{-1}AW$ je blok π SDD matrica II tipa, pa time i regularna. Tada je i A regularna matrica. □

3.3 Blok $S - SDD$ matrice

Analogno uopštenjima pojma tačkastih klasa iz prethodne dve sekcije, dajemo dva tipa uopštenja i za $S - SDD$ matrice, s obzirom da upravo ove klase igraju bitnu ulogu proširivanju oblasti konvergencije relaksacionih iterativnih postupaka.

3.3.1 Prvi tip blok uopštenja

DEFINICIJA 3.5. *Za datu particiju π i skup $\emptyset \neq S \subset L$, blok matricu $A = [A_{ij}]_{l\times l}$ zovemo blok π S-SDD matrica I tipa ako je njena pridružena matrica I tipa $\rangle A\langle^{\pi}$ S-SDD matrica.*

Direktno na osnovu prethodne definicije sledi naredno tvrđenje.

TEOREMA 3.6. *Svaka blok π S-SDD matrica I tipa je regularna, šta više, ona je blok π $H-$matrica I tipa.*

Dalje, neka je $[A_{ij}]_{l\times l}$ blok π $S - SDD$ matrica I tipa, tj. $\rangle A\langle^{\pi}$ je $S - SDD$ matrica. Tada postoji pozitivna dijagonalna matrica $X = diag[x_1, x_2, \ldots, x_l]$ takva da je $x_i = \gamma > 0$ za sve $i \in L$, $x_i = 1$ za $i \notin L$ i $\rangle A\langle^{\pi}X$ SDD matrica. Tada, kao i u prethodnoj sekciji, za svako $i \in L$ važi

$$(\|A_{ii}^{-1}\|_{\infty})^{-1}x_i > \sum_{j\in L\setminus\{i\}} \|A_{ij}\|_{\infty}x_j,$$

što je ekvivalentno sa uslovom da je $\rangle AW\langle^{\pi}$ SDD matrica, gde je matrica $W \in \mathbb{R}^{n,n}$, definisana sa

$$W = diag[x_1E_{m_1}, x_2E_{m_2}, \ldots, x_lE_{m_l}].$$

Dakle, AW je blok π SDD matrica I tipa, a matrica W je time skalirajuća matrice za blok $S - SDD$ matrice I tipa. Ovaj oblik skalirajuće matrice biće od važnosti u poslednjem poglavlju.

3.3.2 Drugi tip blok uopštenja

Definicija 3.6. *Za datu particiju π i skup $\emptyset \neq S \subset L$, blok matricu $A = [A_{ij}]_{l \times l}$ zovemo blok π S-SDD matrica II tipa ako je njena pridružena matrica II tipa $\langle A \rangle^{\pi}$ S-SDD matrica.*

Ponovo, direktno na osnovu prethodne definicije imamo sledeće tvrđenje.

Teorema 3.7. *Svaka blok π S-SDD matrica II tipa je regularna, šta više, ona je blok π $H-$matrica II tipa.*

Slično prethodnom razmatranju, ako je $[A_{ij}]_{l \times l}$ blok π S-SDD matrica II tipa, dobijamo da postoji skalirajuća matrica $W \in \mathbb{R}^{n,n}$, oblika

$$W = diag[x_1 E_{m_1}, x_2 E_{m_2}, \ldots, x_l E_{m_l}],$$

gde su $x_i = \gamma > 0$ za sve $i \in L$, a $x_i = 1$ za $i \notin L$, takva da je $W^{-1}AW$ je blok π SDD matrica II tipa. Drugim rečima, oblik skalirajuće matrice je isti za oba tipa blok uopštenja.

Iako je svaka blok π SDD matrica I tipa, istovremeno i blok π SDD matrica II tipa, a time kao posledica, svaka blok π $S-SDD$ matrica I tipa, istovremeno i blok π $S-SDD$ matrica II tipa, kao i svaka blok π H-matrica I tipa, istovremeno i blok π H-matrica II tipa, obe vrste uopštenja nalaze svoje primene, vid. [16].

Glava 4

Iterativni postupci za rešavanje sistema linearnih jednačina

Neka je zadata matrica $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ i vektor $b \in \mathbb{R}^m$. Odgovor na pitanje kada linearni sistem $Ax = b$ ima rešenje $x \in \mathbb{R}^n$ i kada je ono jedinstveno daje Kronecker-Capellijeva teorema. Posebna pažnja posvećuje se sistemima kad je matrica A regularna i kvadratna, s obzirom da se oni najčešće javljaju u praksi. U ovom poglavlju izložićemo neke metode za rešavanje regularnih, kvadratnih sistema linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \qquad a_{ij} \in \mathbb{R},\ b_i \in \mathbb{R}.$$

Matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ je matrica sistema, njeni elementi su koeficijenti sistema, a vektor $b = [b_i] \in \mathbb{R}^n$ je vektor desne strane sistema. Rešiti sistem znači odrediti vektor nepoznatih $x = [x_i] \in \mathbb{R}^n$ tako da važi $Ax = b$.

Sa teorijske strane, rešavanje ovog sistema je veoma jednostavan problem. Rešenje x, kada postoji, dato je formulom $x = A^{-1}b$, gde je A^{-1} inverzna matrica matrice A. Navedena formula je jedna metoda za rešavanje sistema koja nije praktična jer je zadati problem zamenjen novim, težim problemom nalaženja inverzne matrice. Do rešenja sistema se može doći i Gausovom metodom eliminacije, kao i primenom Kramerovih formula. Zajednička karakteristika svih pomenutih metoda je da one nakon konačno mnogo izvedenih operacija dovode do tačnog rešenja ako se sve operacije izvode egzaktno. Ovakve metode zovemo direktnim. U slučajevima kada je broj jednačina i nepoznatih mali, ovaj problem smo u stanju rešiti vrlo brzo i pouzdano. U slučaju da je reč o vrlo velikim sistemima linearnih jednačina nailazi se na probleme čak i uz današnje računare. Računar nije ograničen samo po pitanju numeričke tačnosti, već i memorijskog prostora i brzine izvođenja operacija. Opšte je poznato da rešavanje linearnog sistema pomoću Gaussovih eliminacija, u opštem slučaju, zahteva zalihu u memoriji za skladištenje svih n^2 elemenata matrice A, a broj potrebnih operacija je reda n^3. Iako današnji računari imaju fascinantnu brzinu ona ne može odgovoriti problemima sve većih dimenzija koje nameće moderna nauka. Kad još uzmemo u obzir mogućnost da je svaka od $O(n^3)$ operacija u Gaussovom algoritmu izvršena s greškom zaokruživanja, postavlja se pitanje koliko je dobijeno rešenje "tačno". Iz svega navedenog zaključujemo da su direktne metode često nepraktične ako je matrica A velikih dimenzija.

U velikom broju primena (naročito u numeričkom rešavanju parcijalnih diferencijalnih jednačina) matrica A je retko popunjena, u smislu da je veliki broj njenih elemenata jednak nuli, dok su nenula elementi uglavnom pravilno raspoređeni. Direktne metode se mogu prilagoditi tako da iskoriste strukturu takvih matrica kako bi se smanjio broj potrebnih operacija. Međutim, takvu strukturu je mnogo lakše iskoristiti ako se matrica A u algoritmu koristi samo kao faktor.

Pored toga, u praksi se skoro nikada ne radi sa egzaktnim podacima (matrica A može biti rezultat merenja ili prethodnih proračuna, dakle "netačna"), pa nema smisla tražiti "tačno" rešenje $x = A^{-1}b$.

Prethodna diskusija nas motiviše da potražimo drugačije metode za rešavanje linearnih sistema. Cilj je konstruisati niz $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots$ vektora iz $\mathbb{R}^n$, koji konvergira (po normi) ka tačnom rešenju $x = A^{-1}b$, i u čijem formiranju se matrica A (ili neka druga dobijena iz A) koristi samo kao faktor. Ovakve metode zovemo iterativnim.

4.1 Opšti iterativni postupak

Svako rastavljanje matrice A u obliku $A = M - K$, gde je matrica M regularna, bi moglo generisati jednu iterativnu metodu na sledeći način:

$$(M - K)x = b \;\Leftrightarrow\; Mx = Kx + b \;\Leftrightarrow\; x = M^{-1}Kx + M^{-1}b.$$

Uvodenjem oznaka $T = M^{-1}K,\ d = M^{-1}b$ prethodna relacija postaje

$$x = Tx + d,$$

tj. tačno rešenje x je fiksna tačka preslikavanja $f(x) = Tx + d$. Iterativnu metodu defnišemo sa

$$x^{(m+1)} = Tx^{(m)} + d, \quad m \in \mathbb{N}_0. \tag{4.1}$$

Dovoljan uslov za konvergenciju ovakvih metoda daje sledeća teorema.

TEOREMA 4.1. *Niz $\{x^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}_0}$, definisan relacijom (4.1) konvergira ka rešenju linearnog sistema $Ax = b$ za sve početne vektore $x^{(0)}$ i sve $b \in \mathbb{R}^n$, ako je*

$$\|T\| < 1,$$

pri čemu je $\|\ \|$ proizvoljna matrična norma.

Dokaz. Oduzimanjem $x = Tx + d$ od (4.1) dobijamo

$$x^{(m+1)} - x = T(x^{(m)} - x).$$

Dalje, kako na osnovu Teoreme 1.4 za datu matričnu normu postoji vektorska norma sa njiom saglasna, tu vektorsku normu možemo primeniti na prethodnu jednakost i dobijamo:

$$\|x^{(m+1)} - x\| \leq \|T\|\|x^{(m)} - x\| \leq \|T\|^{m+1}\|x^{(0)} - x\|.$$

Iz $\|T\| < 1$ sledi $\|T\|^{m+1} \longrightarrow 0$ kad $m \longrightarrow \infty$, a to znači $\|x^{(m+1)} - x\| \longrightarrow 0$. Na osnovu Teoreme 1.9 sledi $x^{(m+1)} \longrightarrow x$ za svako $x^{(0)}$. $\square$

TEOREMA 4.2. *Niz* $\{x^{(m)}\}_{(m \in \mathbb{N}_0)}$, *defnisan relacijom (4.1) konvergira ka rešenju linearnog sistema* $Ax = b$ *za svaki startni vektor* $x^{(0)}$ *i svako* $b \in \mathbb{R}^n$, *ako i samo ako je*

$$\rho(T) < 1,$$

pri čemu je $\rho(T)$ *spektralni radijus matrice* $T = M^{-1}K$.

Dokaz. Ako je $\rho(T) \geq 1$, izaberimo početni vektor $x^{(0)}$, tako da je $x^{(0)} - x$ karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ, takvom da je

$$|\lambda| = \rho(T).$$

Tada važi

$$\|x^{(m+1)} - x\| = \|T(x^{(m)} - x)\| = \ldots = \|T^{m+1}(x^{(0)} - x)\| = |\lambda|^{m+1}\|x^{(0)} - x\|,$$

što očigledno ne teži ka nuli.

S druge strane, ako je $\rho(T) < 1$, onda možemo izabrati $\epsilon > 0$, takvo da je $\rho(T) + \epsilon < 1$, a zatim i (Teorema 1.7) matričnu normu $\| \, \|_*$, takvu da je

$$\|T\|_* \leq \rho(T) + \epsilon < 1.$$

Primenom prethodne teoreme dobijamo traženi rezultat. $\square$

Na osnovu prethodne teoreme vidimo da spektralni radijus iterativne matrice karakteriše konvergenciju iterativnog postupka. Međutim, važi i više, spektralni radijus je pokazatelj brzine konvergencije opisanih iterativnih postupaka. Naime, što je $\rho(T)$ bliže nuli, to je manji broj iteracija potreban da se dođe do rešenja sistema $x = Tx + d$. U slučaju kada je $\rho(T) = 0$, T je nilpotentna matrica pa iterativni niz postaje stacionaran nakon n iteracija, gde je n dimanzija sistema. Sa druge strane, što je $\rho(T)$ bliže jedinici to je konvergencija sporija, pri čemu se u graničnom slučaju $\rho(T) = 1$ ona narušava.

4.2 Jacobijeva metoda

Neka je dat sistem linearnih jednadčina

$$Ax = b,$$

gde je matrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ regularna i

$$a_{ii} \neq 0, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Neka je

$$A = D - L - U$$

razlaganje matrice A na dijagonalnu matricu D, strogo donje trougaonu matricu L i strogo gornje trougaonu matricu U. Jacobijev iterativni postupak za rešavanje sistema $Ax = b$ definisan je sa

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

odnosno

$$x^{(k+1)} = T_J x^{(k)} + d, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

gde je

$$T_J = D^{-1}(L + U),$$
$$d = D^{-1}b.$$

Kako je $D^{-1} = diag[a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, \ldots, a_{nn}^{-1}]$, to je

$$T_J = -\begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Prema tome, komponente vektora $x^{(k+1)}$ izračunavaju se prema sledećoj formuli

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Uočimo da ovu petlju možemo izvesti bilo kojim redom po j, jer koordinate novog vektora $x^{(k+1)}$ zavise samo od koordinata starog vektora. Zbog toga je Jacobijeva metoda pogodna za paralelno računanje. Sledeća teorema govori o konvergenciji Jacobijeve metode.

Teorema 4.3. *Neka je A SDD matrica. Tada Jacobijeva metoda konvergira za svaku početnu aproksimaciju $x^{(0)}$.*

Dokaz. Prema definiciji strogo dijagonalno dominantne matrice, važi:

$$\|T_J\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |(T_J)_{ij}| = \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < 1,$$

pa prema Teoremi 4.1. Jacobijeva metoda konvergira za svaku početnu aproksimaciju $x^{(0)}$. $\square$

TEOREMA 4.4. *Neka je A $H-$matrica. Tada Jacobijeva metoda konvergira za svaku početnu aproksimaciju* $x^{(0)}$.

Dokaz. Neka je

$$A = D - L - U$$

razlaganje matrice A na dijagonalnu matricu D, strogo donje trougaonu matricu L i strogo gornje trougaonu matricu U.

Matrica A je $H-$matrica ako i samo ako postoji regularna dijagonalna matrica W, takva da je AW SDD matrica, odnosno $W^{-1}AW$ je SDD matrica. Prema teoremama 4.2 i 4.3 važi $\rho(\tilde{T}_J) < 1$, gde je $\tilde{T}_J$ Jacobijeva iterativna matrica za sistem $W^{-1}AW(W^{-1}x) = W^{-1}b$.

Kako je $W^{-1}AW = W^{-1}DW - W^{-1}LW - W^{-1}UW$, dobijamo da je

$$\begin{aligned}\tilde{T}_J &= (W^{-1}DW)^{-1}(W^{-1}LW + W^{-1}UW) = \\ &= (W^{-1}DW)^{-1}(W^{-1}(L+U)W) = \\ &= W^{-1}D^{-1}WW^{-1}(L+U)W = \\ &= W^{-1}(D^{-1}(L+U))W = \\ &= W^{-1}T_JW,\end{aligned}$$

pa je iterativna matrica $\tilde{T}_J$ slična matrici $T_J(A)$.

Pošto je $\rho(\tilde{T}_J) = \rho(T_J)$ i $\rho(\tilde{T}_J) < 1$, onda je i $\rho(T_J) < 1$, pa Jakobijev iterativni postupak konvergira. $\square$

4.3 Gauss-Seidelova metoda

Jacobijevu metodu možemo modifikovati tako da tekuće aproksimacije prethodnih komponenti od $x^{(k+1)}$ koristimo da bi se izračunala njegova sledeća komponenta, tj. za izračunavanje $x_j^{(k+1)}$ koristimo $x_1^{(k+1)}, \ldots, x_{j-1}^{(k+1)}, x_j^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$.

Ako je $A = D - L - U$ standardno razlaganje matrice regularnog sistema $Ax = b$ ovaj iterativni postupak može se zapisati u matričnom obliku

$$(D - L)x^{(k+1)} = Ux^{(k)} + b, \tag{4.2}$$

ili

$$x^{(k+1)} = T_{GS}x^{(k)} + d,$$

gde je

$$T_{GS} = (D-L)^{-1}U, \quad d = (D-L)^{-1}b.$$

Nedostatak ove formule je što treba računati $(D-L)^{-1}$, što je mnogo teže nego D^{-1}. Zato ćemo potražiti pogodniji zapis ovog iterativnog postupka. Množenjem formule (4.2) sa D^{-1} dobijamo

$$(E - D^{-1}\,L)\,x^{(k+1)} = D^{-1}\,U\,x^{(k)} + D^{-1}\,b.$$

Odatle je

$$x^{(k+1)} = D^{-1}\,L\,x^{(k+1)} + D^{-1}\,U\,x^{(k)} + D^{-1}\,b.$$

Prema tome, komponente vektora $x^{(k+1)}$ izračunavaju se na sledeći način

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Uzevši u obzir gore navedene razlike izmedu Jacobijeve i Gauss-Seidelove metode, razumno je očekivati da Gauss-Seidelova metoda konvergira brže od Jacobijeve. U većini slučajeva to je tačno, ali ne uvek.

Primer 4.1. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tada matrice T_J i T_{GS} glase

$$T_J = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{GS} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -6 \end{bmatrix}$$

Sledi

$$\sigma(T_J) = \{0\}, \quad \sigma(T_{GS}) = \{0, 2-2\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2}\},$$

pa je

$$\rho(T_J) = 0, \quad \rho(T_{GS}) = 2(1+\sqrt{2})$$

što znači da Jacobijeva metoda konvergira, a Gauss-Seidelova divergira.

Kada se radi o SDD matricama, obe metode konvergiraju za svaki početni vektor $x^{(0)}$.

Teorema 4.5. *Neka je A SDD matrica. Tada Gauss-Seidelova metoda konvergira za proizvoljan početni vektor $x^{(0)}$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\rho(T_{GS}) \geq 1$. Tada postoji bar jedan karakteristični koren λ iterativne matrice T_{GS} koji je po modulu veći od 1. Kako je

$$\begin{aligned}\lambda \in \sigma(T_{GS}) &\iff det(\lambda E - T_{GS}) = 0\\ &\iff det(\lambda E - (D-L)^{-1}U) = 0\\ &\iff det((D-L)^{-1}(\lambda(D-L) - U)) = 0\\ &\iff det(D-L)^{-1}det(\lambda(D-L) - U) = 0\\ &\iff det(\lambda(D-L) - U) = 0,\end{aligned}$$

zaključujemo da je matrica $C = \lambda(D-L) - U$ singularna. Iz

$$\begin{aligned}|c_{ii}| = |\lambda a_{ii}| = |\lambda||a_{ii}| &> |\lambda|(l_i(A) + u_i(A)) = |\lambda|l_i(A) + |\lambda|u_i(A)\\ &\geq |\lambda|l_i(A) + u_i(A) = l_i(C) + u_i(C),\end{aligned}$$

sledi da je matrica C SDD matrica, pa samim tim i regularna. Time je dokaz završen. □

TEOREMA 4.6. *Neka je A $H-$matrica. Tada Gauss-Seidelova metoda konvergira za proizvoljan početni vektor $x^{(0)}$.*

Dokaz. Pošto je matrica A $H-$matrica, postoji regularna dijagonalna matrica W takva da je $W^{-1}AW$ SDD matrica. Kao i ranije, označimo sa $\tilde{T}_{GS}$ Gauss-Seidelovu iterativnu matricu za sistem $W^{-1}AW(W^{-1}x) = W^{-1}b$. Tada je $\rho(\tilde{T}_{GS}) < 1$.

Iz

$$W^{-1}AW = W^{-1}(D-L-U)W = W^{-1}(D-L)W - W^{-1}UW$$

imamo da je

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{GS} &= (W^{-1}(D-L)W)^{-1}W^{-1}UW\\ &= W^{-1}(D-L)^{-1}WW^{-1}UW\\ &= W^{-1}((D-L)^{-1}U)W\\ &= W^{-1}T_{GS}W,\end{aligned}$$

pa su iterativne matrice $\tilde{T}_{GS}$ i T_{GS} slične i tada $\rho(T_{GS}) = \rho(\tilde{T}_{GS}) < 1$, odnosno da Gauss Zaidelova metoda konvergira. □

4.4 OR (overrelaxation) postupci

Kao što smo već naveli, brzina konvergencije navedenih metoda zavisi od spektralnog radijusa iterativne matrice, pa se time ona može poboljšati uvodeći slobodne parametre sa ciljem da se njihovim izborom smanji vrednost spektralnog radijusa. Ovaj pristup se naziva relaksacija (eng. *overrelaxation* (OR)).

Dakle, posmatramo sistem linearnih jednačina

$$Ax = b,$$

gde je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ uz pretpostavku

$$a_{ii} \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Matricu A rastavimo na sledeći način

$$A = B(\omega) - C(\omega),$$

gde su $B(\omega)$ i $C(\omega)$ matrice reda n zavisne od realnog parametra $\omega \neq 0$. Osim toga $B(\omega)$ treba biti regularna. Parametar ω se zove parametar relaksacije. Tada je

$$B(\omega)\, x = C(\omega)\, x + b.$$

Zbog regularnosti $B(\omega)$, postoji $B(\omega)^{-1}$. Stavimo

$$T(\omega) = B(\omega)^{-1}\, C(\omega), \quad d(\omega) = B(\omega)^{-1}\, b.$$

Zamenom dobijamo

$$x = T(\omega)\, x + d(\omega).$$

Iterativni postupak je tada dat formulom

$$x^{(k+1)} = T(\omega)\, x^{(k)} + d(\omega), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots\ .$$

Za različite izbore matrice $B(\omega)$ dobijamo različite OR postupke. Parametar relaksacije treba odabrati tako da postupak što brže konvergira, drugim rečima, tako da je spektralni radijus iterativne matrice što manji.

4.4.1 Jakobijeva OR metoda (JOR metoda)

Za $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ i standardno razlaganje $A = D - L - U$ izaberimo

$$B_{JOR}(\omega) = \frac{1}{\omega}\, D.$$

Tada je

$$B_{JOR}(\omega)^{-1} = \omega\, D^{-1},$$

$$C_{JOR}(\omega) = \left(\frac{1-\omega}{\omega}\right) D + L + U,$$

$$T_{JOR}(\omega) = B_{JOR}(\omega)^{-1}\, C_{JOR}(\omega) = (1-\omega)\, E + \omega\, D^{-1}\,(L+U),$$

$$d_{JOR}(\omega) = B_{JOR}(\omega)^{-1}\, b = \omega\, D^{-1}\, b.$$

Na taj način dobijamo sledeću formulu za iterativni postupak

$$x^{(k+1)} = \left[(1-\omega)\, E + \omega\, D^{-1}\,(L+U)\right]\, x^{(k)} + \omega\, D^{-1}\, b.$$

Primetimo da za $\omega = 1$ JOR metoda postaje Jacobijeva metoda.

Jasno, konvergencija JOR postupka zavisi od izbora parametra $\omega > 0$. Oblast divergencije, tj. skup vrednosti parametra ω za koji JOR postupak divergira, nezavisna od matrice sistema data je sledećim tvrđenjem.

TEOREMA 4.7. *JOR metoda ne konvergira za $\omega \leq 0$ i $\omega \geq 2$.*

Dokaz. Izračunajmo najpre trag matrice $T_{JOR}(\omega) = n(1-\omega)$. Dalje, neka je $\sigma(T_{JOR}(\omega)) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Tada

$$|tr(T_{JOR}(\omega))| = |\lambda_1 + \ldots + \lambda_n|,$$

odakle je

$$n|1-\omega| = |\sum_{i=1}^{n} \lambda_i| \leq n\rho(T_{JOR}(\omega)).$$

Dakle, za $\omega \notin (0,2)$ važi

$$\rho(T_{JOR}(\omega)) \geq |1-\omega| \geq 1,$$

pa po Teoremi 4.2, JOR ne konvergira. $\square$

Sa druge strane, oblast konvergencije u potpunosti zavisi od matrice sistema. U nastavku navodimo tvrđenja za klase matrica koje posmatramo u ovom radu - SDD i H-matrice.

TEOREMA 4.8. *Neka je A SDD matrica. Tada za*

$$0 < \omega < \frac{2}{1 + \|T_J\|_\infty}$$

JOR iterativni postupak konvergira za proizvoljan početni vektor $x^{(0)}$.

Dokaz ovog tvrđenja ćemo za sada izostaviti jer je on direktna posledica Teoreme 4.13.

TEOREMA 4.9. *Neka je A $H-$matrica i W njena skalirajuća matrica. Tada za*

$$0 < \omega < \frac{2}{1 + \|W^{-1}T_J W\|_\infty}$$

JOR iterativni postupak konvergira za proizvoljan početni vektor $x^{(0)}$.

Kao i ranije, dokaz Teoreme 4.9 sledi na osnovu tehnike skaliranja i činjenice da su JOR iterativne matrice za sistem $Ax = b$ i sistem $W^{-1}AW(W^{-1}x) = W^{-1}b$ slične.

4.4.2 Sukcesivna OR metoda (SOR metoda)

Slično prethodnoj metodi, za matricu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ sistema $Ax = b$, koja ima nenula dijagonalne elemente i standardno razlaganje $A = D - L - U$ izaberimo

$$B_{SOR}(\omega) = \frac{1}{\omega} D - L.$$

Tada je

$$B_{SOR}(\omega)^{-1} = \omega \, (D - \omega L)^{-1},$$

$$C_{SOR}(\omega) = \left(\frac{1-\omega}{\omega} \right) D - U,$$

$$T_{SOR}(\omega) = B_{SOR}(\omega)^{-1} \, C_{SOR}(\omega) = (D - \omega L)^{-1} \, \left[(1-\omega) \, D + \omega \, U \right],$$

$$d_{SOR}(\omega) = B_{SOR}(\omega)^{-1} \, b = \omega \, (D - \omega L)^{-1} \, b.$$

Formula za iterativni postupak tada glasi

$$x^{(k+1)} = (D - \omega L)^{-1} \, [(1-\omega) D + \omega U] \; x^{(k)} + \omega \, (D - \omega L)^{-1} \, b.$$

Kao i do sada, navedimo odgovarajuća tvrđenja o konvergenciji.

Teorema 4.10. *SOR metoda ne konvergira za $\omega \leq 0$ i $\omega \geq 2$.*

Dokaz. Izračunajmo najpre determinantu matrice $T_{SOR}(\omega)$.

$$\begin{aligned} detT_{SOR}(\omega) &= \tfrac{1}{det(D-\omega L)} det((1-\omega)D + \omega U) \\ &= \tfrac{1}{detD} det((1-\omega)D) \\ &= \tfrac{1}{detD} (1-\omega)^n detD \\ &= (1-\omega)^n. \end{aligned}$$

Neka je $\sigma(T_{SOR}(\omega)) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Tada

$$|detT_{SOR}(\omega)| = |\lambda_1 \ldots \lambda_n|,$$

odakle je

$$|1-\omega|^n = \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq \rho(T_{SOR}(\omega))^n.$$

Na kraju, za $\omega \notin (0,2)$ važi

$$\rho(T_{SOR}(\omega)) \geq |1-\omega| \geq 1,$$

pa po Teoremi 4.2, SOR ne konvergira. □

Teorema 4.11. *Neka je A SDD matrica. Tada za*

$$0 < \omega < \frac{2}{1 + \|T_J\|_\infty}$$

SOR iterativni postupak za proizvoljan početni vektor $x^{(0)}$.

Kao i u slučaju JOR postupka, dokaz izostavljamo jer je on direktna posledica Teoreme 4.13, a sledeća teorema se pokazuje tehnikom skaliranja.

Teorema 4.12. *Neka je A H−matrica i W njena skalirajuća matrica. Tada za*

$$0 < \omega < \frac{2}{1 + \|W^{-1}T_J W\|_\infty}$$

SOR iterativni postupak za proizvoljan početni vektor $x^{(0)}$.

4.4.3 Ubrzana OR metoda (AOR metoda)

Takozvani Accelerated Overrelaxation (AOR) postupak definisao je Apostolos Hadjidimos kao dvoparametarsku generalizaciju SOR postupka, vid. [1],[2]. U radu [1] pokazano je da u nekim specijalnim slučajevima spektralni radijus iterativne matrice može biti jednak nuli, što znači da se tačno rešenje dobija nakon najviše n iteracija u tačnoj aritmetici.

Posmatrajmo sistem

$$Ax = b,$$

gde je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$, uz pretpostavku

$$a_{ii} \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Neka je $A = D - L - U$, gde je $D = diag[a_{11}, \ldots, a_{nn}]$, L je strogo donja trougaona matrica, a U je strogo gornja trougaona matrica. Matricu A rastavimo na sledeći način

$$A = B(\gamma, \omega) - C(\gamma, \omega),$$

gde su $B(\gamma, \omega)$ i $C(\omega, \gamma)$ matrice reda n, zavisne od realnih parametara $\omega \neq 0$ i γ. Osim toga $B(\gamma, \omega)$ je regularna. Tada je

$$B(\gamma, \omega)\, x = C(\gamma, \omega)\, x + b.$$

Izaberimo

$$B_{AOR}(\gamma, \omega) = \frac{1}{\omega}(D - \gamma L).$$

Tada je

$$C_{AOR}(\gamma, \omega) = B_{AOR}(\gamma, \omega) - A = \frac{1}{\omega}(D - \gamma L) - D + L + U = \frac{1-\omega}{\omega} D + \frac{\omega - \gamma}{\omega} L + U,$$

pa će iterativni postupak biti dat formulom

$$\frac{1}{\omega}(D-\gamma L)x^{(k+1)} = \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + \frac{\omega-\gamma}{\omega}L + U\right)x^{(k)} + b.$$

Zbog regularnosti matrice $B(\gamma,\omega)$, iterativni postupak se može zapisati i u obliku

$$x^{(k+1)} = \mathcal{F}_{\gamma,\omega}x^{(k)} + f_{AOR}$$

pri čemu je

$$\mathcal{F}_{\gamma,\omega} = (D-\gamma L)^{-1}((1-\omega)D + (\omega-\gamma)L + \omega U),$$
$$f_{AOR} = \omega(D-\gamma L)^{-1}b.$$

Neki specijalni slučajevi ovog postupka su:

- $\gamma = \omega$ daje SOR postupak,
    - * $\omega = 1$ daje Gaus-Zajdelov postupak,
- $\gamma = 0$ daje JOR postupak,
    - * $\omega = 1$ daje Jakobijev postupak.

U izvesnim slučajevima AOR postupak brže konvergira od JOR ili SOR postupaka za optimalni izbor parametara. Dovoljni uslovi za konvergenciju AOR postupka su razmatrani u radovima više autora. Ako matrica sistema A ima neka specijalna svojstva, kao što je stroga dijagonalna dominacija ili pozitivna definitnost, poznato je da AOR metod konvergira ako parametar ω pripada intervalu $(0,\omega_1)$, gde je $1 \leq \omega_1 < 2$, a parametar γ pripada intervalu $(-\gamma_1,\gamma_2)$, gde su γ_1 i γ_2 pozitivni realni brojevi. Međutim, interval konvergencije AOR postupka u opštem slučaju ne mora biti u navedenoj formi.

Postoji više načina da se dobiju dovoljni uslovi za konvergenciju AOR metode u slučaju kada je matrica sistema SDD matrica, vid. [7].

Prvo, pokažimo tvrđenje koje daje gornju granicu spektralnog radijusa AOR iterativne matrice, a time i dovoljan uslov za konvergenciju AOR postupka, tj. oblast parametara ω i γ za koje AOR postupak konvergira.

Teorema 4.13. *Neka su svi dijagonalni elementi matrice $A = D - L - U$ različiti od nule i neka je za svako $i = 1,2,\ldots,n$*

$$l_i = r_i(D^{-1}L) \text{ i } u_i = r_i(D^{-1}U).$$

Ako je $1 - |\gamma| l_i > 0,\ i = 1,2,\ldots,n$, tada je

$$\rho(\mathcal{F}_{\gamma,\omega}) \leq \max_i \frac{|1-\omega| + |\omega-\gamma| l_i + |\omega| u_i}{1-|\gamma| l_i}.$$

Dokaz. Pretpostavimo da postoji karakteristični koren λ matrice $\mathcal{F}_{\gamma,\omega}$ takav da je

$$|\lambda| > \frac{|1-\omega| + |\omega-\gamma|l_i + |\omega|u_i}{1-|\gamma|l_i}, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Tada za svako $i = 1, 2, \ldots n,$ važi

$$|\lambda| - |\lambda||\gamma|l_i > |1-\omega| + |\omega-\gamma|l_i + |\omega|u_i,$$

odakle je

$$\begin{aligned}
|\lambda - 1 + \omega| \ &\geq ||\lambda| - |1-\omega|| \\
&\geq |\lambda| - |1-\omega| \\
&> |\lambda||\gamma|l_i + |\omega-\gamma|l_i + |\omega|u_i \\
&= (|\lambda\gamma| + |\omega-\gamma|)l_i + |\omega|u_i \\
&\geq |\lambda\gamma + \omega - \gamma|l_i + |\omega|u_i \\
&> |\omega + \gamma(\lambda-1)|l_i + |\omega|u_i.
\end{aligned}$$

To znači da matrica

$$C := (\lambda - 1 + \omega)D - (\omega + \gamma(\lambda-1))L - \omega U,$$

zadovoljava uslov

$$|c_{ii}| > r_i(C), \ i = 1, 2, \ldots n.$$

Dakle, matrica C je strogo dijagonalno dominantna, pa samim tim i regularna. Kako je λ karakterističan koren matrice $\mathcal{F}_{\gamma,\omega}$, važi

$$det(\lambda E - \mathcal{F}_{\gamma,\omega}) = 0.$$

Iz

$$\begin{aligned}
\lambda E - \mathcal{F}_{\gamma,\omega} \ &= \lambda(D-\gamma L)^{-1}(D-\gamma L) - (D-\gamma L)^{-1}((1-\omega)D + (\omega-\gamma)L + \omega U) \\
&= (D-\gamma L)^{-1}(\lambda(D-\gamma L) - ((1-\omega)D + (\omega-\gamma)L + \omega U) \\
&= (D-\gamma L)^{-1}\left((\lambda-1+\omega)D - (\omega+\gamma(\lambda-1))L - \omega U\right) \\
&= (D-\gamma L)^{-1}C
\end{aligned}$$

sledi

$$0 = det(\lambda E - \mathcal{F}_{\gamma,\omega}) = det(D-\gamma L)^{-1}det(C).$$

Kako je $(D-\gamma L)^{-1}$ regularna, sledi da je $det(C) = 0$, što je u kontradikciji sa činjenicom da je C regularna. $\square$

Uzimajući u prethodnoj teoremi $\gamma = 0$ za direktnu posledicu dobijamo tvrđenje Teoreme 4.8, dok uzimajući $\gamma = \omega$ dobijamo tvrđenje Teoreme 4.11.

Sledeća teorema pruža metod za uvođenje relaksacionih parametara u postojeći iterativni postupak.

TEOREMA 4.14. *Neka iterativni postupak*

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + d, \ k = 0, 1, ...$$

konvergira ka jedinstvenom rešenju x sistema $x = Mx + d$, za svaki startni vektor, tj. neka je $\rho(M) < 1$. Tada za

$$0 < \omega < \frac{2}{1+\rho(M)}$$

ekstrapolacioni iterativni postupak

$$x^{(k+1)} = ((1-\omega)I + \omega M)x^{(k)} + \omega d, \; k = 0, 1, ...$$

konvergira ka x za svaki startni vektor.

Koristeći ovu teoremu i činjenicu da se AOR postupak može dobiti postupkom ekstrapolacije SOR postupka, može se dobiti sledeći rezultat o konvergenciji AOR postupka za SDD matrice koji navodimo bez dokaza.

Teorema 4.15. *Neka je $A = D - L - U$ SDD matrica, $\mathcal{F}_{\gamma,\gamma}$ iterativna matrica SOR metode sa parametrom γ i neka je*

$$l_i = r_i(D^{-1}L), \quad u_i = r_i(D^{-1}U),$$
$$p = \frac{2}{1+\rho(F_{\gamma,\gamma})}, \quad s = \frac{2}{1+\rho(|L|+|U|)},$$
$$t = \frac{2}{1+\max\limits_{1\le i\le n}\{l_i+u_i\}},$$

Tada AOR postupak konvergira za svaki startni vektor ako parametre izaberemo na sledeći način:

$$0 \le \gamma < s, \quad 0 < \omega < \max\{p, t\},$$

ili

$$0 < \omega \le t, \quad -\omega \min_{1\le i\le n} \frac{1 - l_i - u_i + 2\max\{0, \omega - 1\}}{2l_i} < \gamma < 0,$$

ili

$$0 < \omega < t, \quad 1 \le \gamma < \min_{1\le i\le n} \frac{2\min\{0, 1-\omega\} + \omega(1 + l_i - u_i)}{2l_i}.$$

Sada ćemo pokazati drugačiju tehniku za dobijanje rezultata o konvergenciji AOR postupka u slučaju SDD klase.

Teorema 4.16. *Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ matrica čiji su svi dijagonalni elementi jednaki 1, tj. neka je $D = E$. Za $i = 1, 2, \ldots, n$ označimo sa*

$$p_i(\gamma) = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|(|1-\gamma| + |\gamma|p_j(\gamma)) + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|,$$

i

$$p(\gamma) = \max_i p_i(\gamma).$$

Tada za AOR iterativnu matricu važi:

$$\|\mathcal{F}_{\gamma,\omega}\|_\infty \le |1-\omega| + |\omega|p(\gamma).$$

Dokaz. Iz definicije matrične norme $\| \cdot \|_\infty$ sledi da postoji vektor y takav da je

$$\|y\|_\infty = 1, \ \|\mathcal{F}_{\gamma,\omega}\|_\infty = \|\mathcal{F}_{\gamma,\omega} y\|_\infty.$$

Označimo sa

$$z = \mathcal{F}_{\gamma,\omega} y.$$

Tada je

$$(E - \gamma L)z = ((1-\omega)E + (\omega - \gamma)L + \omega U)y,$$

odnosno:

$$z_1 = (1-\omega)y_1 - \omega \sum_{k=2}^{n} a_{1k} y_k,$$

i za svako $i = 2, \ldots, n$ dobijamo

$$z_i + \gamma \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} z_k = (1-\omega)y_i - (\omega - \gamma) \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} y_k - \omega \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} y_k.$$

Koristeći matematičku indukciju pokažimo da za svako $i = 1, 2, \ldots, n$ važi

$$|z_i - (1-\omega)y_i| \leq |\omega| p_i(\gamma) \text{ i } |z_i| \leq |1-\omega| + |\omega| p_i(\gamma).$$

Za $i = 1$ važi:

$$z_1 = (1-\omega)y_1 - \omega \sum_{k=2}^{n} a_{1k} y_l,$$

$$z_1 - (1-\omega)y_1 = -\omega \sum_{k=2}^{n} a_{1k} y_l,$$

pa, zbog $|y_i| \leq 1$, dobijamo

$$|z_1 - (1-\omega)y_1| \leq |\omega| \sum_{k=2}^{n} |a_{1k}||y_k| \leq |\omega| \sum_{k=2}^{n} |a_{1k}| = |\omega| p_1(\gamma).$$

Takođe,

$$|z_1| = |(1-\omega)y_1 - \omega \sum_{k=2}^{n} a_{ik} y_l| \leq |1-\omega| + |\omega| \sum_{k=2}^{n} |a_{1k}| = |1-\omega| + |\omega| p_1(\gamma).$$

Dalje, pretpostavimo sada da za svako $j = 1, 2, \ldots, i-1$ važi

$$|z_j - (1-\omega)y_j| \leq |\omega| p_j(\gamma) \text{ i } |z_j| \leq |1-\omega| + |\omega| p_j(\gamma).$$

S obzirom da je

$$z_i + \gamma \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} z_k = (1-\omega)y_i - (\omega - \gamma) \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} y_k - \omega \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} y_k,$$

zaključujemo da je

$$z_i - (1-\omega)y_i = -\omega \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}y_k - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}(\gamma z_k + \omega y_k - \gamma y_k) =$$

$$= -\omega \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}y_k - \omega \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}[(1-\gamma)y_k + \frac{\gamma}{\omega}(z_k - (1-\omega)y_k)],$$

i

$$|z_i - (1-\omega)y_i| \leq |\omega| \sum_{k=i+1}^{n} |a_{ik}| + |\omega| \sum_{k=1}^{i-1} |a_{ik}|(|1-\gamma| + \frac{|\gamma|}{|\omega|}|z_k - (1-\omega)y_k|) \leq$$

$$\leq |\omega| \sum_{k=i+1}^{n} |a_{ik}| + |\omega| \sum_{k=1}^{i-1} |a_{ik}|(|1-\gamma| + |\gamma|p_k(\gamma)) = |\omega|p_i(\gamma).$$

Sada se lako vidi da je

$$|z_i| \leq |1-\omega| + |\omega|p_i(\gamma).$$

Konačno,

$$\|z\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |z_i| \leq |1-\omega| + |\omega|p(\gamma),$$

čime je dokaz završen. □

Kao direktnu posledicu prethodne teoreme, dobijamo sledeće tvrđenje:

TEOREMA 4.17. *Neka je $A = [a_{ij}]$ matrica čiji su svi dijagonalni elementi jednaki 1, tj. neka je $D = E$. Ako za svako $i = 1, 2, \ldots, n$ važi $1 - |\gamma|l_i > 0$, tada za AOR iterativnu matricu važi:*

$$\|\mathcal{F}_{\gamma,\omega}\|_\infty \leq \max_{1\leq i\leq n} \frac{|1-\omega| + (|\omega||1-\gamma| - |1-\omega||\gamma|)l_i + |\omega|u_i}{1-|\gamma|l_i},$$

gde je

$$l_i = r_i(L), \ u_i = r_i(U).$$

Dokaz. Neka su $p(\gamma)$ i $p_i(\gamma)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ definisani kao u prethodnoj teoremi. Označimo sa $p(\gamma) = p_k(\gamma) = \max_{1\leq i\leq n} p_i(\gamma)$. Tada je

$$p_k(\gamma) = \sum_{j=1}^{k-1} |a_{kj}|(|1-\gamma| + |\gamma|p_j(\gamma)) + \sum_{j=k+1}^{n} |a_{kj}| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k-1} |a_{kj}|(|1-\gamma| + |\gamma|p_k(\gamma)) + \sum_{j=k+1}^{n} |a_{kj}| =$$

$$= (|1-\gamma| + |\gamma|p_k(\gamma))l_k + u_k,$$

odnosno,

$$(1-|\gamma|l_k)p_k(\gamma) \leq |1-\gamma|l_k + u_k.$$

Pod pretpostavkama navedenim u teoremi važi $1-|\gamma|l_k > 0$, pa zaključujemo

$$p(\gamma) \leq \frac{|1-\gamma|l_k + u_k}{1-|\gamma|l_k} \leq \max_i \frac{|1-\gamma|l_i + u_i}{1-|\gamma|l_i}.$$

Na osnovu Teoreme 4.12 sledi

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_{\gamma,\omega}\|_\infty &\leq |1-\omega| + |\omega| p(\gamma) \\ &\leq |1-\omega| + |\omega| \max_i \frac{|1-\gamma|l_i + u_i}{1-|\gamma|l_i} \\ &= \max_{1\leq i\leq n} \frac{|1-\omega| + (|\omega||1-\gamma| - |1-\omega||\gamma|)l_i + |\omega|u_i}{1-|\gamma|l_i} \end{aligned}$$

□

Sada je moguće naći intervale konvergencije za parametre γ i ω. Naime, potrebno je samo analizirati uslov $\epsilon < 1$, gde smo sa ϵ označili gornju granicu za normu beskonačno, pa samim tim i spektralni radijus AOR iterativne matrice, datu u Teoremi 4.17. Ta gornja granica, očigledno, zavisi od elemenata matrice A i od parametara γ i ω. Teorema o konvergenciji koja se na taj način dobija ima sličan oblik kao Teorema 4.15 i ovde je nećemo navoditi.

Rezultati o konvergenciji za klasu SDD matrica mogu se iskoristiti za dobijanje analognih rezultata o konvergenciji za klasu $H-$matrica.

Na osnovu Teoreme 2.4 sledi da za svaku $H-$matricu postoji regularna dijagonalna matrica W takva da je AW strogo dijagonalno dominantna. Tada je $W^{-1}AW$ takođe SDD matrica, i to takva da su joj dijagonalni elementi svi jednaki 1. Pošto su AOR iterativna matrica za sistem sa matricom A i AOR iterativna matrica za sistem sa matricom $W^{-1}AW$ slične, tj. pošto je

$$\mathcal{F}_{\gamma,\omega}(W^{-1}AW) = W^{-1}\mathcal{F}_{\gamma,\omega}(A)W$$

i pošto slične matrice imaju iste karakteristične korene, sledi da je

$$\rho(\mathcal{F}_{\gamma,\omega}(W^{-1}AW)) = \rho(\mathcal{F}_{\gamma,\omega}(A)).$$

Upravo zbog toga važi sledeća teorema.

Teorema 4.18. *Ako je A $H-$matrica, a relaksacioni parametri γ i ω izabrani kao u Teoremi 4.10, pri čemu je*

$$l_i = r_i(W^{-1}LW),\ u_i = r_i(W^{-1}UW),\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

tada AOR postupak konvergira za svaki startni vektor.

Glava 5

Paralelni iterativni postupci

Zhong-Zhi Bai autor je jedne posebne vrste paralelnih iterativnih postupaka, koji su pogodni za implementaciju na paralelnim računarima takozvanog SIMD tipa. U radu [3] je definisan paralelni AOR postupak i izvedeni neki dovoljni uslovi za njegovu konvergenciju u slučaju $H-$matrica. Slično tehnici koja je pokazana u prethodnom poglavlju, u radu [15] ti su uslovi za konvergenciju poboljšani. Ovde ćemo prikazati neke od njih.

Neka je dat sistem linearnih jednačina oblika

$$Ax = b, \tag{5.1}$$

gde je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ regularna matrica, a $x = [x_i], b = [b_i] \in \mathbb{R}^n$. Zapišimo ovaj sistem u blok formi

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}, \tag{5.2}$$

gde je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm} \end{bmatrix}, \ A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i, n_j}, \ 1 \le i, j \le m,$$

$$\mathbf{X} = [X_1 \, X_2 \dots X_m]^T, \ \mathbf{B} = [B_1 \, B_2 \dots B_N]^T, \ X_i, B_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \ 1 \le i \le N,$$

a $n_i, \ 1 \le i \le m$, su pozitivni celi brojevi takvi da je

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n.$$

Neka se paralelni računar kome prilagođavamo AOR postupak sastoji od α procesora. Pretpostavićemo da postoji pozitivan broj β takav da je $m = \alpha \times \beta$.

Paralelni AOR postupak pogodan za implementaciju na SIMD sistemima, definisan u radu [3], izgleda ovako.

Neka je $j_1, j_2, \ldots, j_m$ permutacija brojeva $1, 2, \ldots, m$, tj.

$$\pi(k) = j_k, \ k = 1, 2, \ldots, m.$$

Označimo sa

$$J_i = \{\pi((i-1)\beta+1), \pi((i-1)\beta+2), \ldots, \pi(i\beta)\},\ i = 1, 2, \ldots, \alpha.$$

Očigledno J_i $(i = 1, 2, \ldots, \alpha)$ formiraju particiju skupa indeksa $\{1, 2, \ldots, m\}$ bez međusobnog preklapanja. U odnosu na ovu particiju, sistem linearnih jednačina (5.2) može se dekomponovati na α podsistema

$$\begin{array}{c}
A_{\pi((i-1)\beta+1),1}X_1 + A_{\pi((i-1)\beta+1),2}X_2 + \ldots + A_{\pi((i-1)\beta+1),m}X_m = A_{\pi((i-1)\beta+1)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_{\pi((i-1)\beta+k),1}X_1 + A_{\pi((i-1)\beta+k),2}X_2 + \ldots + A_{\pi((i-1)\beta+k),m}X_m = A_{\pi((i-1)\beta+k)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_{\pi(i\beta),1}X_1 + A_{\pi(i\beta),2}X_2 + \ldots + A_{\pi(i\beta),m}X_m = A_{\pi(i\beta)} \\
i = 1, 2, \ldots, \alpha.
\end{array}$$

Biramo proizvoljno $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ i za $p = 0, 1, 2, \ldots$ do konvergencije, računamo $X^{(p+1)}$ na sledeći način:

Za svako $k \in \{1, 2, \ldots, \beta\}$ istovremeno računamo $X^{(p+1)}_{\pi((i-1)\beta+k)}(i = 1, 2, \ldots, \alpha)$ kao

$$\begin{aligned}
X^{(p+1)}_{\pi((i-1)\beta+k)} = A^{-1}_{\pi((i-1)\beta+k),\pi((i-1)\beta+k)} \Bigg[& -\gamma \sum_{l=1}^{\alpha} \sum_{j \in J(l;k)} A_{\pi((i-1)\beta+k),j} X_j^{(p+1)} - \\
& -(\omega-\gamma) \sum_{l=1}^{\alpha} \sum_{j \in J(l;k)} A_{\pi((i-1)\beta+k),j} X_j^{(p)} - \omega \sum_{l=1}^{\alpha} \sum_{\substack{j \in \widehat{J}(l;k) \\ j \neq \pi((l-1)\beta+k)}} A_{\pi((i-1)\beta+k),j} X_j^{(p)} \\
& -\omega \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{\alpha} A_{\pi((l-1)\beta+k),\pi((i-1)\beta+k)} X^{(p)}_{\pi((l-1)\beta+k)} + \omega B_{\pi((i-1)\beta+k)} \Bigg] + \\
& +(1-\omega) X^{p}_{\pi((i-1)\beta+k)},
\end{aligned}$$

gde je

$$J(i;k) = \{\pi((i-1)\beta+1), \pi((l-1)\beta+2), \ldots. \pi((i-1)\beta+k-1)\},$$

$$\widehat{J}(i;k) = \{\pi((i-1)\beta+k), \pi((i-1)\beta+k+1), \ldots. \pi(i\beta)\},$$

$$i = 1, 2, \ldots, \alpha,\ k = 1, 2, \ldots, \beta,$$

$$J(i,1) = \emptyset,\ i = 1, 2, \ldots, \alpha,$$

a γ, ω adekvatno izabrani relaksacioni parametri.

Definišimo sledeće blok matrice:

$$A_L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1\alpha} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2\alpha} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\alpha 1} & L_{\alpha 2} & \dots & L_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}, \; A_U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1\alpha} \\ U_{21} & U_{22} & \dots & U_{2\alpha} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{N1} & U_{N2} & \dots & U_{\alpha\alpha} \end{bmatrix},$$

$$A_D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_\alpha \end{bmatrix}, \; A_D^{'} = \begin{bmatrix} 0 & D_{12} & \dots & D_{1\alpha} \\ D_{21} & 0 & \dots & D_{2\alpha} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{\alpha 1} & D_{\alpha 2} & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

gde je $i, j = 1, 2, \dots \alpha$

$$L_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -A_{\pi((i-1)\beta+2,\pi(j-1)\beta+1)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -A_{\pi(i\beta),\pi((j-1)\beta+1)} & -A_{\pi(i\beta),\pi(j-1)\beta+2} & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$U_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -A_{\pi((i-1)\beta+1,\pi(j-1)\beta+2)} & \dots & -A_{\pi((i-1)\beta+1),\pi(j\beta)} \\ 0 & 0 & \dots & -A_{\pi((i-1)\beta+2),\pi(j\beta)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

a za $i, j = 1, 2, \dots \alpha, i \neq j$

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} -A_{\pi((i-1)\beta)+1,\pi((j-1)\beta+1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -A_{\pi((i-1)\beta)+2,\pi((j-1)\beta+2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -A_{\pi(i\beta),\pi(j\beta)} \end{bmatrix},$$

$$D_i = \begin{bmatrix} A_{\pi((i-1)\beta)+1,\pi((i-1)\beta+1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{\pi((i-1)\beta)+2,\pi((i-1)\beta+2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{\pi(i\beta),\pi(i\beta)} \end{bmatrix},$$

Tada se paralelni AOR postupak može ekvivalentno izraziti u sledećem matričnom obliku:

$$\mathbf{X}^{(p+1)} = \mathfrak{L}(\gamma, \omega)\mathbf{X}^{(p)} + \mathbf{b}(\gamma, \omega), \; p = 0, 1, 2, \dots.$$

pri čemu je

$$\mathfrak{L}(\gamma, \omega) = (A_D - \gamma A_L)^{-1}((1-\omega)A_D + (\omega - \gamma)A_L + \omega A_U + \omega A_{D'}),$$

$$\mathbf{b}(\gamma, \omega) = \omega(A_D - \gamma A_L)^{-1}\mathbf{B}.$$

Primetimo da je A_D regularna matrica, pa je i $A_D - \gamma A_L$ takođe regularna.

Paralelni AOR postupak konvergiraće ka jedinstvenom rešenju linearnog sistema (5.2) ako i samo ako je spektralni radijus iterativne matrice $\mathfrak{L}(\gamma, \omega)$ manji od jedan.

Kako matrica linearnog sistema čije se rešenje traži pomoću iterativnih postupaka na paralelnim računarima ima blok formu, koristićemo blok uopštenja II tipa već razmatranih klasa matrica kao što je to do sada u literaturi prisutno. Slični rezultati koji se odnose na I tip blok uopštenja se mogu formulisati, međutim, klase koje se dobijaju na taj način su uže, a samim tim i dobijene teoreme ređe primenljive. Bez obzira na to, da li se blok uopštenjima I tipa mogu dobiti esencijalno novi praktično upotrebljivi rezultati o konvergenciji ostaje predmet daljih izučavanja u ovoj obalsti numeričke linearne algebre.

Prvo ćemo navesti rezultate o konvergenciji za slučaj π blok SDD matrica II tipa, koje ćemo kasnije generalizovati.

Bez gubitka opštosti, do kraja ovog poglavlja pretpostavićemo da je π identična permutacija, tj.

$$\pi(k) = k, \ \ k = 1, 2, \dots, m.$$

Tada je

$$J_i = \{(i-1)\beta + 1, (i-1)\beta + 2, \dots, i\beta\}, \ \ i = 1, 2, \dots, \alpha.$$

Za svako $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ označimo

$$\widetilde{r_i}(\mathbf{A}) := \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \|A_{ij}\|_\infty .$$

Dalje, označimo sa

$$l_i(\mathbf{A}) := \widetilde{r_i}(A_D^{-1} A_L), \ \ d_i(\mathbf{A}) := \widetilde{r_i}(A_D^{-1} A_D^{'}), u_i(\mathbf{A}) := \widetilde{r_i}(A_D^{-1} A_U) \text{ i } r_i(\mathbf{A}) := \widetilde{r_i}(A_D^{-1} \mathbf{A}).$$

Evidentno je $r_i(\mathbf{A}) = l_i(\mathbf{A}) + d_i(\mathbf{A}) + u_i(\mathbf{A})$.

Da bismo pojednostavili zapis, u ovom odeljku, redom označimo $l_i(\mathbf{A}), d_i(\mathbf{A})$, $u_i(\mathbf{A})$ i $r_i(\mathbf{A})$ samo sa l_i, d_i, u_i i r_i.

Sledeća teorema iz [15] daje dovoljne uslove za konvergenciju PDAOR postupka za rešavanje sistema čija je matrica π blok SDD matrica II tipa.

Teorema 5.1. *Neka je $\mathbf{A}$ π blok SDD matrica I tipa. Tada je*

$$\|\mathfrak{L}(\gamma, \omega)\|_\infty < 1$$

ako biramo

$$0 < \omega \leq 1, \ -\min_{1 \leq i \leq N} \frac{1 - l_i - u_i - d_i}{2 l_i} < \gamma < \min_{1 \leq i \leq N} \frac{1 + l_i - u_i - d_i}{2 l_i}, \tag{5.3}$$

ili

$$1 < \omega < \min_{1\le i\le N} \frac{2-2l_i}{1-l_i+u_i+d_i},\ 1 < \gamma < \min_{1\le i\le N} \frac{2-\omega(1-l_i+u_i+d_i)}{2l_i}, \tag{5.4}$$

ili

$$1 < \omega < \min_{1\le i\le N} \frac{2-2\gamma l_i}{1+l_i+u_i+d_i-2\gamma l_i},\ 0 < \gamma \le 1, \tag{5.5}$$

ili

$$1 < \omega < \min_{1\le i\le N} \frac{2+2\gamma l_i}{1+l_i+u_i+d_i},\ -\min_{1\le i\le N} \frac{1-l_i-u_i-d_i}{2l_i} < \gamma < 0. \tag{5.6}$$

Glava 6

Poboljšanje oblasti konvergencije tehnikom skaliranja

Za neke klase matrica dobijeni dovoljni uslovi za konvergenciju AOR i PDAOR postupka se mogu poboljšati.

6.1 AOR postupak

Kada nam je poznata skalirajuća matrica, kao što je slučaj sa $S-SDD$ matricama, možemo značajno proširiti oblast konvergencije kao što pokazuje naredni rezultat iz [11]. Kako je on posledica opštijeg tvrđenja koje pokazujemo u narednom odeljku, izostavićemo njegov dokaz.

Teorema 6.1. *Neka je S neprazan podskup skupa $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots N\}$ i A $S-SDD$ za taj skup. Tada je*

$$\|\mathcal{F}_{\gamma,\omega}\|_\infty < 1,$$

odnosno AOR postupak konvergira, ako parametre γ i ω biramo na sledeći način:

$$0 < \omega < 1, \ -\min\{\Gamma^S, \Gamma^{\overline{S}}\} < \gamma < 1 + \min\{\Gamma^S, \Gamma^{\overline{S}}\},$$

ili

$$1 < \omega < \min\{\Omega^S, \Omega^{\overline{S}}\}, \ 1 < \gamma < \min\{\Phi^S(\omega), \Phi^{\overline{S}}(\omega)\},$$

ili

$$1 < \omega < \min\{\Psi^S(\gamma), \Psi^{\overline{S}}(\gamma)\}, \ 0 < \gamma \leq 1,$$

ili

$$1 < \omega < \min\{\Theta^S(\gamma), \Theta^{\overline{S}}(\gamma)\}, \ -\min\{\Gamma^S, \Gamma^{\overline{S}}\} < \gamma < 0,$$

gde su

$$\Gamma^S := \min_{i \in S} \min_{j \in \overline{S}} \frac{(1 - r_i^S)(1 - r_j^{\overline{S}}) - r_i^{\overline{S}} r_j^S}{2l_i^S - 2l_i^S r_j^{\overline{S}} + 2l_i^{\overline{S}} r_j^S},$$

$$\Omega^S := 2 \min_{i \in S} \min_{j \in \overline{S}} \frac{(1-l_i^S)(1-r_j^{\overline{S}}) - l_i^{\overline{S}} r_j^S}{(1+r_i^S - 2l_i^S)(1-r_j^{\overline{S}}) + (r_i^{\overline{S}} - 2l_i^{\overline{S}}) r_j^S},$$

$$\Phi^S(\omega) := \min_{i \in S} \min_{j \in \overline{S}} \frac{(2-\omega+2\omega l_i^S - \omega r_i^S)(1-r_j^{\overline{S}}) - \omega(r_i\overline{S} - 2l_i^{\overline{S}}) r_j^S}{(1-r_i^S)(1-r_j^{\overline{S}}) - r_i^{\overline{S}} r_j^S 2l_i^S - 2l_i^S r_j^{\overline{S}} + 2l_i^{\overline{S}} r_j^S},$$

$$\Psi^S(\gamma) := 2 \min_{i \in S} \min_{j \in \overline{S}} \frac{(1-\gamma l_i^S)(1-r_j^{\overline{S}}) - \gamma l_i^{\overline{S}} r_j^S}{(1+r_i^S - 2\gamma l_i^S)(1-r_j^{\overline{S}}) + (r_i^{\overline{S}} - 2\gamma l_i^{\overline{S}}) r_j^S}$$

i

$$\Theta^S(\gamma) := 2 \min_{i \in S} \min_{j \in \overline{S}} \frac{(1+\gamma l_i^S)(1-r_j^{\overline{S}}) + \gamma l_i^{\overline{S}} r_j^S}{(1+r_i^S)(1-r_j^{\overline{S}}) + r_i^{\overline{S}} r_j^S}.$$

Na osnovu činjenice da je svaka SDD matrica ujedno i $S-SDD$ matrica za svaki singlton $S = \{i\} \subset N$, dobijamo sledeći rezultat.

Teorema 6.2. *Neka je A SDD matrica. Tada*

$$\|\mathcal{F}_{\gamma,\omega}\|_\infty < 1,$$

ako izaberemo

$$0 < \omega \leq 1, \quad -\Gamma < \gamma < 1 + \Gamma,$$

ili

$$1 < \omega < \Omega, \quad 1 < \gamma < \Phi(\omega),$$

ili

$$1 < \omega < \Psi(\gamma), \quad 0 < \gamma \leq 1,$$

ili

$$1 < \omega < \Theta(\gamma), \quad -\Gamma < \gamma < 0,$$

gde je

$$\Gamma := \max_{i \in N} \min_{j \neq i} \frac{1 - r_j + |a_{ji}|(1-r_i)}{\max\{2l_j - 2\xi_i^j |a_{ji}|(1-r_i), 2l_i|a_{ji}|\}},$$

$$\Omega := 2 \max_{i \in N} \min_{j \neq i} \frac{1}{1 + \max\left\{\frac{r_i - l_i|a_{ji}|}{1-r_j+|a_{ji}|(1-r_i)}, \frac{r_j - l_j - (1-\xi_i^j)|a_{ji}|(1-r_i)}{1-l_j+\xi_i^j|a_{ji}|(1-r_i)}\right\}},$$

$$\Phi(\omega) := \omega + \max_{i \in N} \min_{j \neq i} \left[\min\left\{\frac{2-\omega(1+r_j-|a_{ji}|(1-r_i))}{2l_j - 2\xi_i^j|a_{ji}|(1-r_i)}, \frac{(2-\omega)(1-r_j+|a_{ji}|) - \omega r_i|a_{ji}|}{2l_i|a_{ji}|}\right\}\right]$$

$$\Psi(\gamma) := 2 \max_{i \in N} \min_{j \neq i} \frac{1}{1 + \max\{\frac{r_i - \gamma l_i|a_{ji}|}{1-r_j+|a_{ji}|-\gamma l_i|a_{ji}|}, 1 + \frac{r_j - |a_{ji}|(1-r_i) - 1}{1-\gamma(l_j - \xi_i^j|a_{ji}|(1-r_i))}\}},$$

$$\Theta(\gamma) := 2 \max_{i \in N} \min_{j \neq i} \left[\min\left\{\frac{1-r_j+|a_{ji}|+\gamma l_i|a_{ji}|}{1-r_j+|a_{ji}|+r_i|a_{ji}|}, \frac{1+\gamma(l_j - \xi_i^j|a_{ji}|(1-r_i))}{1+r_j-|a_{ji}|(1-r_i)}\right\}\right],$$

a

$$\xi_i^j := \begin{cases} 1, & i < j, \\ 0, & j \leq i. \end{cases}$$

Dokaz. Neka je S singlton, tj. $S = \{i\}$ za neko $i \in N$. Tada

$$r_i^S = 0, \quad r_i^{\overline{S}} = r_i, \quad r_j^S = |a_{ji}|, \quad r_j^{\overline{S}} = r_j - |a_{ji}|, \quad j \neq i.$$

Analogno

$$l_i^S = 0, \quad l_i^{\overline{S}} = l_i, \quad l_j^S = \xi_i^j |a_{ji}|, \quad l_j^{\overline{S}} = l_j - \xi_i^j |a_{ji}|, \ quad\ j \neq i.$$

Dalje je

$$\Gamma^{\{i\}} = \min_{j \neq i} \frac{1 - r_j + |a_{ji}|(1 - r_i)}{2l_i |a_{ji}|}$$

i

$$\Gamma^{N \setminus \{i\}} = \min_{j \neq i} \frac{1 - r_j - |a_{ji}|(1 - r_i)}{2l_j - 2\xi_i^j |a_{ji}|(1 - r_i)}$$

tako da

$$\min\{\Gamma^S, \Gamma^{\overline{S}}\} = \min_{j \neq i} \frac{1 - r_j + |a_{ji}|(1 - r_i)}{\max\{2l_j - 2\xi_i^j |a_{ji}|(1 - r_i), 2l_j |a_{ji}|\}}.$$

Pošto je svaka SDD matrica takođe i $S - SDD$ matrica za svaki singlton $S = \{i\} \subset N$, primenom prethodne teoreme dobijamo da će postupak konvergirati ako parametre izaberemo na sledeći način:

$$0 < \omega \leq 1, \quad -\min\{\Gamma^S, \Gamma^{\overline{S}}\} < \gamma < 1 + \min\{\Gamma^S, \Gamma^{\overline{S}}\}, \text{ za svako } S = \{i\}, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Najšira oblast konvergencije će se dobiti izborom

$$0 < \omega \leq 1, \quad -\Gamma < \gamma < \Gamma + 1,$$

gde je

$$\Gamma = \max_{i \in N} \min\{\Gamma^S, \Gamma^{\overline{S}}\}.$$

Na isti način možemo dobiti ostale intervale konvergencije za relaksacione parametre. □

6.2 PDAOR postupak

Ukoliko je matrica sistema π blok SDD matrica II tipa koristeći Teoremu 5.1 dobijamo oblast konvergencije PDAOR postupka. Međutim, kako je svaka π blok SDD matrica II tipa matrica ujedno i π blok $S - SDD$ matrica II tipa za proizvoljan skup indeksa S, oblast konvergencije možemo poboljšati primenom Teoreme 6.3. Koristeći se saznanjem o obliku skalirajuće matrice za klasu π blok S-SDD matrica II tipa matrica možemo uopštiti teoremu 5.1.

Za neprazan pravi podskup S skupa indeksa $\{1, 2, \ldots, N\}$ neka je $\mathbf{A}$ π blok SDD matrica II tipa i neka su uvedene oznake kao u glavi 5, tj. sume vrsta se odnose na odgovarajuću pridruženu matricu II tipa.

Za svako $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ podelimo vandijagonalnu sumu $\widetilde{r}_i(\mathbf{A})$ na dva dela, u odnosu na S i njegov komplement $\overline{S}$:

$$\widetilde{r}_i(\mathbf{A}) = \widetilde{r}_i^{\,S}(\mathbf{A}) + \widetilde{r}_i^{\,\overline{S}}(\mathbf{A}),$$

gde je

$$\widetilde{r}_i^{\,S}(\mathbf{A}) = \sum_{j \in S \setminus \{i\}} \|A_{ij}\|_\infty.$$

Analogno, uz oznake iz glave 5, imamo da je $l_i = l_i^S + l_i^{\overline{S}}$ i $r_i = r_i^S + r_i^{\overline{S}}$.

Teorema 6.3. *Neka je $\mathbf{A}$ π blok S-SDD matrica II tipa. Tada je*

$$\|\mathfrak{L}_{PDAOR}(\gamma, \omega)\|_\infty < 1$$

ako biramo parametre γ i ω na sledeći način:

$$0 < \omega \leq 1, \; -\min\{\Gamma^S, \Gamma^{\overline{S}}\} < \gamma < 1 + \min\{\Gamma^S, \Gamma^{\overline{S}}\}, \tag{6.1}$$

ili

$$1 < \omega < \min\{\Omega^S, \Omega^{\overline{S}}\}, \; 1 < \gamma < \min\{\Phi^S(\omega), \Phi^{\overline{S}}(\omega)\}, \tag{6.2}$$

ili

$$1 < \omega < \min\{\Psi^S(\gamma), \Psi^{\overline{S}}(\gamma)\}, \; 0 < \gamma \leq 1, \tag{6.3}$$

ili

$$1 < \omega < \min\{\Theta^S(\gamma), \Theta^{\overline{S}}(\gamma)\}, \; -\min\{\Gamma^S, \Gamma^{\overline{S}}\} < \gamma < 0, \tag{6.4}$$

gde je

$$\Gamma^S := \min_{i \in S} \min_{j \in S} \frac{(1 - r_i^S)(1 - r_j^{\overline{S}}) - r_i^{\overline{S}} r_j^S}{2l_i^S - 2l_i^S r_j^{\overline{S}} + 2l_i^{\overline{S}} r_j^S},$$

$$\Omega^S := 2 \min_{i \in S} \min_{j \in \overline{S}} \frac{(1 - l_i^S)(1 - r_j^{\overline{S}}) - l_i^{\overline{S}} r_j^S}{(1 + r_i^S - 2l_i^S)(1 - r_j^{\overline{S}}) + (r_i^{\overline{S}} - 2l_i^{\overline{S}}) r_j^S},$$

$$\Phi^S(\omega) := \min_{i \in S} \min_{j \in \overline{S}} \frac{(2 - \omega + 2\omega l_i^S - \omega r_i^S)(1 - r_j^{\overline{S}}) - \omega(r_i^{\overline{S}} - 2l_i^{\overline{S}}) r_j^S}{2l_i^S(1 - r_j^{\overline{S}}) + 2l_i^{\overline{S}} r_j^S},$$

$$\Psi^S(\gamma) := 2 \min_{i \in S} \min_{j \in \overline{S}} \frac{(1 - \gamma l_i^S)(1 - r_j^{\overline{S}}) - \gamma l_i^{\overline{S}} r_j^S}{(1 + r_i^S - 2\gamma l_i^S)(1 - r_j^{\overline{S}}) + (r_i^{\overline{S}} - 2\gamma l_i^{\overline{S}}) r_j^S},$$

i

$$\Theta^S(\gamma) := 2 \min_{i \in S} \min_{j \in \overline{S}} \frac{(1 + \gamma l_i^S)(1 - r_j^{\overline{S}}) + \gamma l_i^{\overline{S}} r_j^S}{(1 + r_i^S)(1 - r_j^{\overline{S}}) + r_i^{\overline{S}} r_j^S}.$$

Dokaz. Ideja dokaza je da se koristi oblik skalirajuće matrice $\mathbf{W}$ za koju je $\mathbf{AW}$ π blok SDD matrica II tipa. Kako je iterativna matrica PDAOR postupka za linearan sistem čija je matrica sistema $\mathbf{A}$, slična sa iterativnom matricom za sistem čija je matrica $\mathbf{AW}$, tvrđenje Teoreme 5.1 možemo primeniti na matricu $\mathbf{AW}$, kako bismo dobili oblast konvergencije za relaksacione parametre u PDAOR postupku za rešavanje sistema linearnih jednačina sa matricom sistema $\mathbf{A}$. Na taj način dobijamo (6.1), (6.2), (6.3), (6.4) iz (5.3), (5.4), (5.5) i (5.6) respektivno.

Kako je $\mathbf{A}$ blok S-SDD matrica, za svako η za koje važi

$$\max_{i\in S}\frac{r_i^{\overline{S}}}{1-r_i^S}=\mu_1(\rangle A\langle^\pi):=\mu_1<\eta<\mu_2:=\mu_2(\rangle A\langle^\pi)=\min_{j\in\overline{S}}\frac{1-r_j^{\overline{S}}}{r_j^S}$$

$\mathbf{AW}$ je π blok SDD matrica II tipa gde je

$$\mathbf{W}:=diag[w_1E_1,w_2E_2,\dots,w_NE_N]$$

i

$$w_i=\begin{cases}\eta, & \text{ako je } i\in S\\ 1, & \text{ako je } i\in\overline{S}\end{cases}.$$

Dalje, primenjujemo Teoremu 5.1 na matricu $\mathbf{AW}$. Za minimum (5.3) imamo

$$\min_{1\le i\le N}\frac{1-r_i(\mathbf{AW})}{2l_i(\mathbf{AW})}=\min\{\min_{i\in S}\frac{1-r_i(\mathbf{AW})}{2l_i(\mathbf{AW})},\min_{i\in\overline{S}}\frac{1-r_i(\mathbf{AW})}{2l_i(\mathbf{AW})}\}.$$

Kako za $i\in S$ važi $r_i(\mathbf{AW})=r_i^S+\frac{1}{\eta}r_i^{\overline{S}}$, razlomak

$$\frac{1-r_i(\mathbf{AW})}{2l_i(\mathbf{AW})}=\frac{1-r_i^S-\eta^{-1}r_i^{\overline{S}}}{2l_i^S+2\eta^{-1}l_i^{\overline{S}}}$$

je neopadajuća funkcija po η. Dakle, da bismo maksimalno proširili intervale za η u (5.3) uzimamo $\eta=\mu_2$ i dobijamo

$$\min_{i\in S}\frac{1-r_i(\mathbf{AW})}{2l_i(\mathbf{AW})}=\min_{i\in S}\frac{1-r_i^S-\left(\min\limits_{j\in\overline{S}}\frac{1-r_j^{\overline{S}}}{r_j^S}\right)^{-1}r_i^{\overline{S}}}{2l_i^S+2\left(\min\limits_{j\in\overline{S}}\frac{1-r_j^{\overline{S}}}{r_j^S}\right)^{-1}l_i^{\overline{S}}}=$$

$$=\min_{i\in S}\min_{j\in\overline{S}}\frac{(1-r_i^S)(1-r_j^{\overline{S}})-r_i^{\overline{S}}r_j^S}{2l_i^S-2l_i^Sr_j^{\overline{S}}+2l_i^{\overline{S}}r_j^S}=\Gamma^S.$$

Slično, za $i\in\overline{S}$ imamo $r_i(\mathbf{AW})=\eta r_i^S+r_i^{\overline{S}}$, i zaključujemo da je odgovarajući količnik nerastuća funkcija od η. Uzimajući $\eta=\mu_1$ dobijamo

$$\min_{i\in\overline{S}}\frac{1-r_i(\mathbf{AW})}{2l_i(\mathbf{AW})}=\min_{i\in\overline{S}}\min_{j\in S}\frac{(1-r_i^{\overline{S}})(1-r_j^S)-r_i^Sr_j^{\overline{S}}}{2l_i^{\overline{S}}-2l_i^{\overline{S}}r_j^S+2l_i^Sr_j^{\overline{S}}}=\Gamma^{\overline{S}},$$

što kompletira dokaz za (6.1).

Oblasti date u (6.2), (6.3) i (6.4) dobijamo na sličan način. □

Primetimo da se iz ovog tvrđenja dobija Teorema 6.1 kao specijalni slučaj, kad su blokovi u (5.2) dimenzije 1×1, [11].

Primenom prethodne teoreme možemo poboljšati oblast konvergencije PDAOR postupka kada je matrica sistema π blok SDD matrica II tipa.

Teorema 6.4. *Neka je* $\mathbf{A}$ π *blok* SDD *matrica II tipa. Tada je*

$$\|\mathfrak{L}(\gamma,\omega)\|_\infty < 1,$$

ako biramo

$$0 < \omega \le 1, \ -\Gamma < \gamma < 1 + \Gamma, \tag{6.5}$$

ili

$$1 < \omega < \Omega, \ 1 < \gamma < \Phi(\omega) \tag{6.6}$$

ili

$$1 < \omega < \Psi(\gamma), \ 0 < \gamma \le 1, \tag{6.7}$$

ili

$$1 < \omega < \Theta(\gamma), \ -\Gamma < \gamma < 0, \tag{6.8}$$

gde je

$$\Gamma := \max_{i\in N}\min_{j\neq i} \frac{1 - r_j + |a_{ji}|(1-r_i)}{\max\{2l_j - 2\xi_i^j|a_{ji}|(1-r_i), 2l_i|a_{ji}|\}},$$

$$\Omega := 2\max_{i\in N}\min_{j\neq i} \frac{1}{1+\max\left\{\frac{r_i - l_i|a_{ji}|}{1-r_j+|a_{ji}|(1-r_i)}, \frac{r_j - l_j - (1-\xi_i^j)|a_{ji}|(1-r_i)}{1-l_j+\xi_i^j|a_{ji}|(1-r_i)}\right\}},$$

$$\Phi := \omega + \max_{i\in N}\min_{j\neq i}\left[\min\left\{\frac{2-\omega(1+r_j-|a_{ji}|(1-r_i))}{2l_j - 2\xi_i^j|a_{ji}|(1-r_i)}, \frac{(2-\omega)(1-r_j+|a_{ji}|) - \omega r_i|a_{ji}|}{2l_i|a_{ji}|}\right\}\right]$$

$$\Psi := 2\max_{i\in N}\min_{j\neq i} \frac{1}{1+\max\{\frac{r_i-\gamma l_i|a_{ji}|}{1-r_j+|a_{ji}|-\gamma l_i|a_{ji}|}, 1 + \frac{r_j - |a_{ji}|(1-r_i)-1}{1-\gamma(l_j-\xi_i^j|a_{ji}|(1-r_i))}\}},$$

$$\Theta := 2\max_{i\in N}\min_{j\neq i}\left[\min\left\{\frac{1-r_j+|a_{ji}|+\gamma l_i|a_{ji}|}{1-r_j+|a_{ji}|+r_i|a_{ji}|}, \frac{1+\gamma(l_j-\xi_i^j|a_{ji}|(1-r_i))}{1+r_j-|a_{ji}|(1-r_i)}\right\}\right],$$

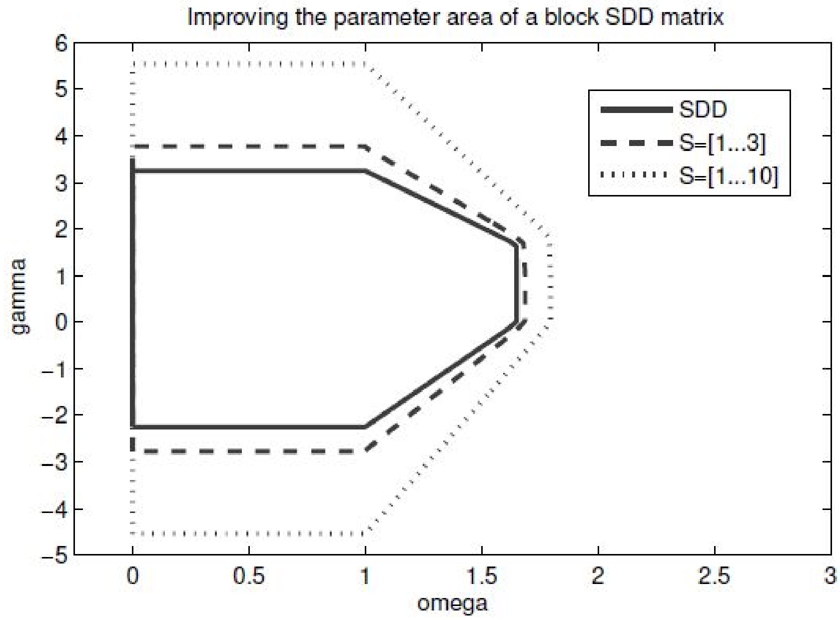
a

$$\xi_i^j := \begin{cases} 1, & i < j, \\ 0, & j \le i. \end{cases}$$

Dokaz. Ideja dokaza je u tome da, pošto je π blok SDD matrica II tipa istovremeno i π blok $S-SDD$ matrica II tipa i to za svaki singlton $S = \{i\}$. Primenom Teoreme 6.3 i optimizovanjem po $i \in N$ dobijamo tvrđenje. □

Oblast konvergencije dobijena pomoću Teoreme 6.4 je uvek šira nego oblast iz Teoreme 5.1.

Koliko značajno ovo poboljšanje može biti pokazuje primer iz [21] koji se odnosi na linearan sistem čija je matrica sistema π blok SDD matrica II tipa reda $n = 100$, podeljena u $m = 20$ blokova implementiranih na $\alpha = 4$ podsistema.



Zaključak

U radu su razmatrani savremeni rezultati o upotrebi teorije H-matrica pri rešavanju sistema linearnih jednačina iterativnim metodama. U tu svrhu je uveden pojam stroge dijagonalne dominacije i pomoću njega je izvršena karakterizacija H-matrica tehnikom skaliranja. Potom je tehnika skaliranja prikazana kao alat pomoću koga se može izvršiti klasifikacija H-matrica, što je učinjeno uvođenjem klasa $S-SDD$ i PH-matrica.

Pored navedenog teorijskog značaja tehnike skaliranja, prikazana je njena praktična vrednost u poboljšanju rezultata o konvergenciji relaksacionih iterativnih postupaka. Naime, razmatrano je kako se saznanje o strukturi skalirajuće matrice za klasu $S-SDD$ matrica može tehnikom skaliranja iskoristiti da se proširi oblast parametara AOR iterativnog postupka primenjenog na sistem linearnih jednačina sa SDD osobinom. Za sisteme velikih dimanzija sa blok SDD osobinom isto je učinjeno za PDAOR iterativni postupak za paralelne računare.

Važno je istaći da obrađeni materijal predstavlja polaznu tačku za dalja istraživanja ovog tipa sa ciljem da se tehnika skaliranja primeni u kombinaciji sa PH-matricama i time ostvare novi korisni rezultati o konvergenciji relaksacionih iterativnih postupaka.

Literatura

[1] Avdelas, G., Hadjidimos, A., *Optimum Accelerated Overrelaxation Method in a Special Case*, Math.Comp. 36(1981), 183–187.

[2] Avdelas, G., Hadjidimos, A., Yeyios, A., *Some Theoretical and Computational Results Concerning the Accelareted Overrelaxation (AOR) Method*, Anal. Numer. Theor. Appox 9(1980), 5–10.

[3] Bai, Z.Z.: *A class of parallel decomposition-type relaxation methods for large sparse systems of linear equations*, Linear Algebra Appl. 282(1998), 1–24.

[4] Bai, Z.Z., Su, Y.-F.: *On the convergence of a class of parallel decompositiontype relaxation methods*, Appl. Math. Comput. 81(1997), 1–21.

[5] Berman A., Plemons R.J., *Nonnegative matrices in the Mathematical Sciences*, Classics in Applied Mathematics, vol. 9, SIAM , Philladelphia, (1994)

[6] Bru, R., Cvetković, Lj., Kostić, V., Pedroche, F., Sums of Σ strictly diagonally dominant matrices, Linear and Multilinear Algebra 58(1) (2010), 75–78

[7] Cvetković, Lj., *Convergence Theory for Relaxation Methods to Solve Systems of Equations*, MB PAMM Series (1998)

[8] Cvetković, Lj., Kostić, V., *Between Geršgorin and minimal Geršgorin sets*, J. Comput. Appl. Math. 196/2 (2006), 452458.

[9] Cvetković, Lj., Kostić, V., *Application of Generalized Diagonal Dominance in Wireless Sensor Network Optimization Problems* Appl. Math. Comput. 218 (2012), 4798-4805

[10] Cvetković, Lj., Kostić, V., *New subclasses of block H-matrices with applications to parallel decompositiontype-relaxation methods*, Numerical Algorithms, 3–4(2006), 325–334.

[11] Cvetković, Lj., Kostić, V., *A note on the convergence of the AOR method*, Appl. Math. Comput. 194/2, (2007), 394-399.

[12] Cvetković, Lj., Kostić, V., Kovačević, M., Szulc, T., *Further results on H-matrices and their Schur complements*, Appl. Math. Comput. 198(2) (2008), 506–510.

[13] Cvetković, Lj., Kostić, V., Rauški, S., *A new subclass of H-matrices* Appl. Math. Comput. 208 (2009), 206210.

[14] Cvetković, Lj., Kostić, V., *New criteria for identifying H-matrices*, J. Comput. Appl. Math. 180/2 (2005), 265278.

[15] Cvetković, Lj., Obrovski, J. *Some convergence results of PD relaxation methods*, Appl. Math. Comput. 107(2000), 103-112.

[16] Doroslovački K., *Generalizovana dijagonalna dominacija za blok matrice i mogućnosti njene primene*, doktorska disertacija, FTN Novi Sad, (2014)

[17] Golub, G. H., Van Loan, C. F., *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, (1996)

[18] Kolotilina, L. Yu., *Diagonal dominance characterization of PM-and PH-matrices*, Journal of Mathematical Sciences, (2010), 165/5, 556–561.

[19] Kolotilina, L. Yu., *Bounds for the infinitary norm of the verses of PM- and PH-matrices*, Journal of Mathematical Sciences, (2010), 165/5, 537–555.

[20] Kostić V., *Benefits from the generalized diagonal dominance*(doktorska disertacija), PMF Novi Sad, (2010)

[21] Kostić V., *Konvergencija paralelnih relaksacionih postupaka za specijalne potklase* $H-matrica$ (seminarski rad), PMF Novi Sad

[22] Kostić, V. R. On general principles of eigenvalue localizations via diagonal dominance. Adv. Comp. Math. (2014) DOI: 10.1007/s10444-014-9349-0

[23] Menon, D., *Metoda sukcesivne nadrelaksacije*, Odjel za matematiku, Osijek, (2005)

[24] Spalević, M., Pranić, M., *Numeričke Metode*, Kragujevac, (2007)

[25] Varga R. S., *Geršgorin and His Circles*, Springer-Verlag, (2004)

[26] Woznicki, Ź., I., *Estimation of the Optimum Relaxation Factors in Partial Factorization Iterative Methods*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 14(1993), 59-73.

Kratka biografija

Ivan Marinković je rođen 8. marta 1989. godine u Kragujevcu. Završio je Osnovnu školu "Stanislav Sremčević" u Kragujevcu kao nosilac Vukove diplome.

Zbog sklonosti ka matematici upisuje se u specijalizovano matematičko odeljenje Prve kragujevačke gimnazije. Gimnaziju je završio 2008. sa odličnim uspehom. Iste godine upisuje osnovne studije primenjene matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer matematika finansija, koje završava 2011. godine sa prosekom 9.42.

Nakon toga, oktobra 2011. godine upisuje master studije na istom fakultetu, smer primenjena matematika. Položio je sve ispite predviđene Nastavnim planom i programom i time stekao uslov za izradu i odbranu master rada.

Bio je stipendista Fonda za mlade talente Republike Srbije na osnovnim studijama.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Ivan Marinković
AU

Mentor: dr Vladimir Kostić
MN

Naslov rada: Klasifikacija H-matrica metodom skaliranja i njena primena u određivanju oblasti konvergencije iterativnih postupaka za rešavanje sistema linearnih jednačina
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / e
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2014.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (6, 67, 1, 0, 0, 0, 0)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Numeričke metode linearne algebre
ND

Predmetna odrednica / Ključne reči: dijagonalna dominacija, H-matrice, metoda skaliranja, blok dijagonalno dominantne matrice, iterativni postupci za rešavanje sistema linearnih jednačina, parametarski relaksacioni postupci.
PO

UDK

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: U radu je razmatrana uloga uslova dijagonalne dominacije u tačkastom i blok slučaju na konvergenciju relaksacionih iterativnih postupaka za rešavanje sistema linearnih jednačina. Posebno je obrađena klasifikacija H-matrica tehnikom skaliranja poznata u literaturi kao PH- matrice. Pri tome je naglasak dat specijalnom slučaju PH-matrica - klasi S-SDD matrica koja je upotrebljena kao alat za poboljšanje oblasti konvergencije AOR postupka pogodnog za implementaciju na jednoprocesorskim računarima, kao i PDAOR postupka namenjenog višeprocesorskim računarima.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 11.6.2013.
DP

Datum odbrane: Septembar 2014.
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Ljiljana Cvetković, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Sanja Rapajić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Vladimir Kostić, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Ivan Marinković
AU

Mentor: Vladimir Kostić, Ph.D.
MN

Title: Classification of the H-matrices by scaling method and its application in determining the convergence of iterative methods for solving systems of linear equations.
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2014.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (6, 67, 1, 0, 0, 0, 0)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Numerical Linear Algebra
SD

Subject / Key words: diagonal dominance, H-matrices, scaling method, block diagonally dominant matrices, iterative methods for solving systems of linear equations, parametric relaxation procedures.
SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: This thesis considers the role of the diagonal dominance property in element-wise and block cases on the convergence of relaxation iterative methods for solving systems of linear equations. Especially, the classification of H- matrices by scaling technique, known in the literature as a class of PH- matrices, is studied. In doing so, emphasis is given to the special case of PH-matrices - class of S-SDD matrix, that is used as a tool for improving the convergence area of AOR method, suitable for implementation on single processor computers, and PDAOR method, designed for multiprocessor computers.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 11.6.2013.
ASB

Defended: September 2014.
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Dr Ljiljana Cvetković, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member:	Dr Sanja Rapajić, associate professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member:	Dr Vladimir Kostić, assistant professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, supervisor