UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Gordana Stanojković

LEONARD OJLER I

OJLER-MAKLORENOVA SUMACIONA FORMULA

- Master rad -

Novi Sad, 2014.

Predgovor

Čovek ne nestaje svojom smrću, on živi dok postoji sećanje na njega, sve dok ima onih koji ga pamte. Neki žive i posle toga, nadžive i svoje unuke i praunuke, jednostavno - žive večno. Tu večnost obezbedili su onim što je ostalo da živi posle njihove smrti, a to su njihova dela. Leonard Ojler je oličenje jedne takve večnosti. Rodio se u XVIII veku ali kroz dela koja je za sobom ostavio, živi i danas. " Računao je i stvarao bez vidljivog napora, slično kao što čovek diše ili kako se orao održava na vetru!" - za Ojlera je govorio Arago. Čak i potpuni gubitak vida, koji bi mnoge obeshrabrio, nije usporio velikog genija. Njegova stvaralačka produktivnost baš tih godina bila je u najvećoj ekspanziji.

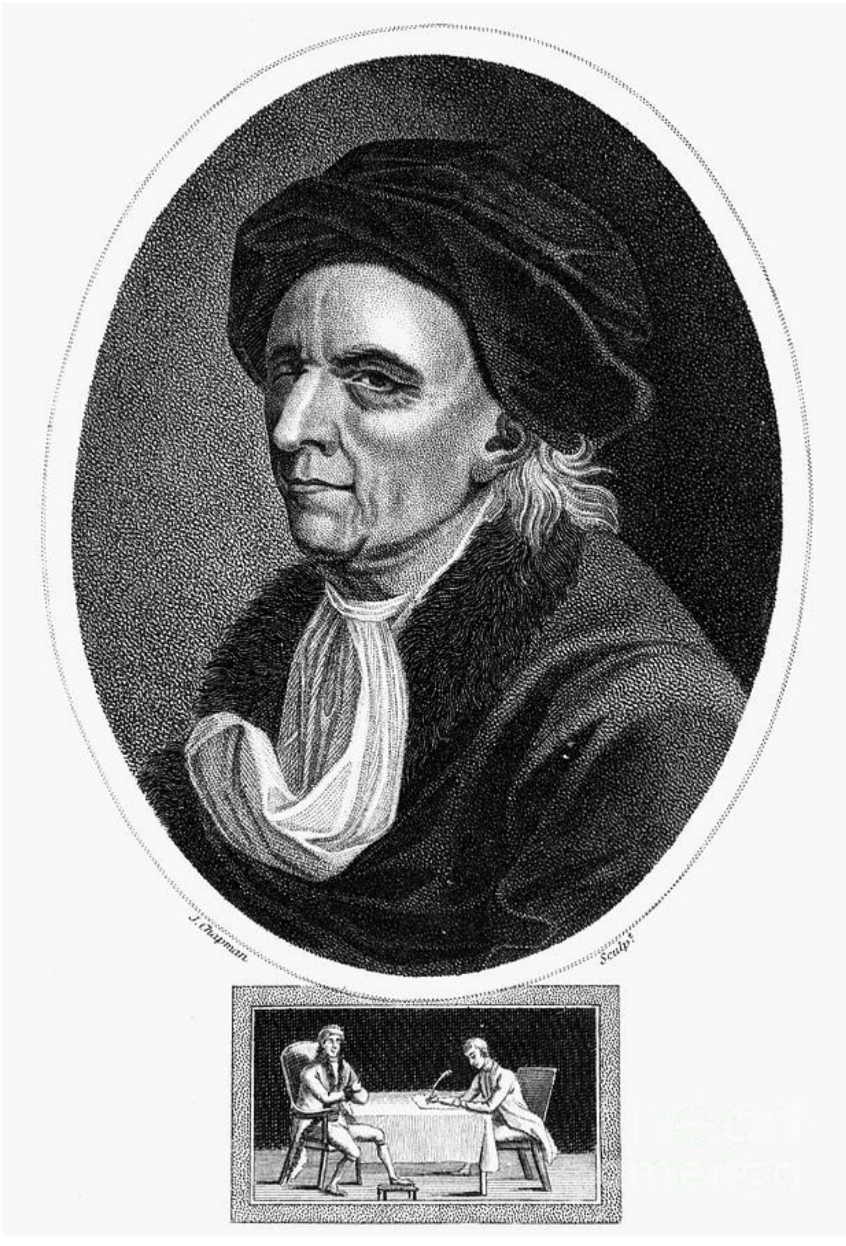
Taj čovek koji je kroz svoja dela nastavio da živi vekovima, bio je moja inspiracija za ovaj master rad. U prvoj glavi su prikazani ključni momenti iz bogate biografije Leonarda Ojlera kao matematičara, u drugoj glavi je dat savremeni prikaz Ojler - Maklorenove formule. Na veoma pristupačan način prikazano je samo izvođenje formule, proučavanje ostatka i kroz nekoliko primera prikazano računanje pomoću Ojler - Maklorenove formule.Treća glava je i najobimnija jer objašnjava Ojlerovo izvođenje pomenute formule. Osim samog principa izvođenja formule po Ojleru, prikazani su i Bernulijevi brojevi i polinomi u izvornom obliku, procena ostatka i Stirlingova formula. Kroz primere je prikazana primena Ojlerovog tvrđenja ali je ipak, akcenat stavljen na Ojlerovo formiranje sume reda preko opšteg člana.

Zahvaljujem se svom mentoru, prof. dr Đuri Pauniću na pomoći u odabiru teme za ovaj rad, na svim savetima, sugestijama, i razumevanju. Takođe se zahvaljujem i članovima komisije prof. dr Vojislavu Petroviću i prof. dr Milošu Kuriliću bez čije podrške sigurno ne bih uspela.

Novi Sad, jun 2014 Gordana Stanojković

S A D R Ž A J

LEONARD OJLER



(1707-1783)

Glava 1:

Biografija Leonarda Ojlera kao matematičara

Leonard Paul Ojler – jedan od najproduktivnijih matematičara, rođen je 15. aprila 1707. godine u Bazelu (Švajcarska) a umro je 18. septembra 1783. godine u Sankt Peterburgu (nekadašnji Lenjingrad u Rusiji). Bio je veoma značajan matematičar toga vremena koga su njegovi savremenici zvali "otelotvorena analiza" putem koje je otkrivao i tumačio tajne fenomena prirode i određivao dalje tokove razvitka matematike u neprekidnom ljudskom nastojanju da spozna prirodu i da je menja.

Prva znanja iz matematike, Leonard Ojler dobio je od svoga oca koji je bio sveštenik i učenik Jakova Bernulija. Ojlerov otac je smatrao da njegov sin treba da studira teologiju i orijentalne jezike i da postane sveštenik. Međutim, matemetika je sve više ulazila u životne pore mladog Ojlera i u potpunosti osvajala njegov duhovni svet. Matematika je postala sfera njegovog neprekidnog interesovanja a on je istovremeno nastojao da se posveti isključivo i samo njoj. Iz tog razloga Ojlerov otac je odustao od sopstvene ambicije da mu se sin bavi teologijom i dozvolio mu da studira matematiku.

Svoje studije započeo je na Univerzitetu u Bazelu gde je ubrzo po dolasku bio zapažen od strane Johana Bernulija koji je u to vreme bio veoma istaknut profesor matematike na pomenutom univerzitetu. Ojler je odlazio na privatne časove kod Bernulija i za kratko vreme došao do takvog nivoa da ravnopravno sa svojim profesorom raspravlja o mnogim matematičkim problemima toga vremena. Tokom svoga učenja Ojler se sprijateljio sa Danijelom i Nikolom, sinovima Johana Bernulija koji su tada poput svog oca već uživali ugled istaknutih matematičara. O njihovom zajedničkom radu, ubrzo se čulo na daleko. Prvi samostalan rad Ojler je uradio sa svojih devetnaest godina i time pokazao da zaista poseduje ogroman talenat koji je u kombinaciji sa velikim radom garantovao i vrtoglavi uspeh. Naime, Pariska akademija raspisala je 1727. godine konkurs za rešavanje problema postavljanja katarki i jedara na jedrenjacima. Te godine Ojler nije dobio nagradu ali je dobio posebno priznanje čime naravno nije bio zadovoljan. To nezadovoljstvo rešio je tako što je kasnije dvanaest puta osvajao tu prestižnu godišnju nagradu. Glavna odlika ovog rada bila je analiza- tehnička matematika ali mu je nedostajala praktična primena.

Visoko priznanje stiglo je iste godine sa dvora ruske carice Katarine I. Ona je lično ponudila Ojleru i braći Bernuli da organizuju i razviju matemetičko odeljenje na Akademiji nauka (čiji je ona osnivač) u Petrogradu. Na Petrogradskoj akademiji, objavljujući svoje publikacije Ojler je za kratko vreme prevazišao braću Bernuli i na taj način postao čuven po svojoj genijalnosti širom čitave Evrope. Posle smrti carice Katarine I u Rusiji je došlo do velikih previranja pa se u to vreme Ojler okrenuo svom stvaralačkom radu kako bi izbegao sve novonastale društvene probleme. U prilog tome da se taj njegov trud i rad isplatio govori i činjenica da je Ojler sa svojih 26 godina zauzeo vodeći položaj matemetičara na Petrogradskoj akademiji. Bilo je izvesno da će ostati da živi i radi u Petrogradu pa je rešio da tu formira i bračnu zajednicu. Izabranica njegovog srca bila je Katarina, ćerka slikara Gsella. Iz dana u dan, političke prilike u zemlji su postajale sve gore i gore pa je Ojler želeo da napusti Petrograd, međutim, brzim dolaskom njegove dece na svet ipak je ostao i izlaz našao u neprekidnom radu. Osim matematike obožavao je i svoju decu, imao ih je trinaestoro ali je petoro, na žalost umrlo u ranom detinjstvu. Narednih desetak godina živeo je vrlo povučeno i bavio se isključivo radom. Kada je raspisana pariska nagrada za astronomski problem za koji su neki istaknuti matematičari tražili nekoliko meseci, Ojler je odlučio da je osvoji tako što je problem rešio za tri dana. Ali, zbog veoma velikog uloženog napora, on se razboleo i oslepeo na desno oko.

Na predlog čuvenog francuskog matematičara Dalambera, pruski kralj Fridrih II 1741. godine poziva Ojlera u Berlin i poverava mu rukovođenje matematičkim odeljenjem Berlinske akademije nauka. Svoju plodnu matematičku aktivnost koju je veoma razvio u Petrogradu sada nastavlja u Berlinu kroz formiranje širokog kruga matematičara. Veze sa Petrogradom nikada ne prekida, naprotiv, svoje naučne rasprave objavljuje ne samo u publikacijama Berlinske, već i u publikacijama Petrogradske akademije. Narednih dvadesetak godina Ojler je živeo u Berlinu gde ga je kralj Fridrih II osim u naučne svrhe angažovao i u rešavanju praktičnih problema kao što su kovanje novca, kanalima za vodu, kanalima za plovidbu. Kako nije bio u velikoj ljubavi sa kraljem Fridrihom II zbog svoje nesposobnosti da učestvuje u diskusijama o filozofskim pitanjima jer ga to nije zanimalo rado je prihvatio srdačan poziv Katarine Velike i 1766. godine se vratio u Petrograd. U to vreme, Ojler je počeo da gubi vid i na drugom oku pa je ubrzo posle neke bolesti potpuno oslepeo. U svojoj 59. godini ostao je sasvim slep. Ali to nimalo nije uticalo na njegov duh i umanjilo njegov talenat. Kada su ga jednom prilikom posle neuspele operacije oka upitali kako će nastaviti sa radom, on je vedro odgovorio: "Sada mi bar ništa neće ometati pažnju." Nastavio je sa radom tako što je formule i objašnjenja diktirao svojim sinovima koji su sve vredno prenosili na papir. Umesto da se smanjuje, njegova matematička produktivnost se povećavala.

Bez obzira na ovaj nedostatak, Ojler je imao fantastično pamćenje tokom čitavog svog života. U prilog tome govori činjenica da je znao Virgilijevu *Aeneidu* napamet. Osim toga, posedovao je izuzetnu sposobnost da računa napamet i to ne samo aritmetičke izraze već i komplikovana izračunavanja koja su zahtevala infinitezimalni račun i višu algebru. Sve važne matematičke formule koje su postojale u Ojlerovo doba bile su memorisane u njegovoj glavi. Zahvaljujući neverovatnoj memoriji, nastavio je da radi i tokom poslednjih 17 godina života kada je bio potpuno slep. U stanju slepila izveo je i čuvenu lunarnu teoriju - kretanje Meseca koja je i samom Njutnu zadavala dosta poteškoća. Tom prilikom, sve složene analize Ojler je u potpunosti izvršio u svojoj glavi.

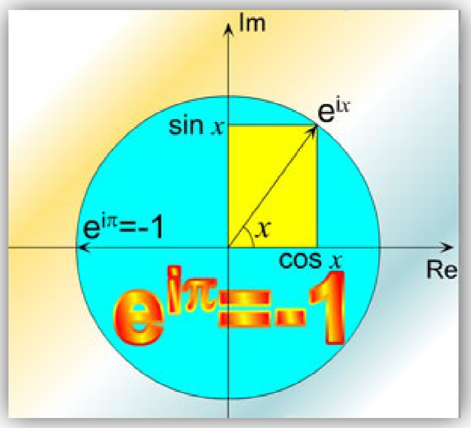
1771. godine, (pet godina nakon povratka u Petrograd) u velikom požaru izgorela je Ojlerova kuća i sav nameštaj u njoj a zahvaljujući požrtvovanosti njegovog odanog sluge i sam je izbegao smrt. Tom prilikom izgorela je i biblioteka ali svi Ojlerovi rukopisi su spašeni. Kompletan gubitak sanirala je carica Katarina tako da je Ojler ubzo mogao da se ponovo vrati svom radu. U 69. godini svoga života (zbog smrti) ostao je bez svoje prve supruge pa se nakon godinu dana oženio po drugi put. Njegova druga žena bila je sestričina prve žene i zvala se Saloma Abigail Gsell.

Kada govorimo o Ojlerovim delima neophodno je spomenuti njegova istraživanja na području teorijske matematike i to specijalno iz oblasti matematičke analize. Njegova najznačajnija istraživanja u oblasti matematičke analize sadržana su u delima: *Uvod u infinitezimalnu analizu; Osnovi diferencijalnog računa; Osnovi integralnog računa; Metoda iznalaženja krivih linija koje imaju osobine maksimuma i minimuma.* Ova kapitalna dela klasične matematičke analize Ojler je objavio na latinskom jeziku u periodu od 1744. do 1770. godine. a istovremeno su bila izvor iz koga su potekli fundamentalni tokovi razvitka klasične matematičke analize u XVIII i XIX veku.

Ojler je u matematičku notaciju uveo nekoliko konvencija koje je publikovao kroz svoje mnogobrojne udžbenike. Spomenućemo neke od bitnijih: prvi je uveo pojam funkcije za argument x u obliku *f(x)*, uveo je moderan zapis trigonometrijskih funkcija, slovo e kao oznaku za osnovu prirodnog logaritma (danas poznatu i kao **Ojlerov broj**), grčko slovo Σ za označavanje sumiranja i slovo i za označavanje imaginarne jedinice, koristio je grčko slovo π da označi odnos obima i poluprečnika kruga, iako to nije bila originalno njegova ideja. Poznat je po velikom doprinosu u razvoju stepenih redova, prikazivanju funkcija u obliku zbira beskonačno mnogo sabiraka. Uveo je eksponencijalne funkcije i logaritam u analitičke dokaze. Otkrio je način da se izraze različite logaritamske funkcije pomoću stepenih redova, i uspešno je definisao logaritme negativnih i kompleksnih brojeva, i na taj način proširio domen matematičke primene logaritama. Definisao je eksponencijalnu funkciju za kompleksne brojeve i otkrio njenu vezu sa trigonometrijskim funkcijama.

Za proizvoljan realan broj φ, prema Ojlerovoj formuli, važi jednakost: $\boldsymbol{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$ gde je poseban slučaj te formule, koji se dobija za vrednost $\varphi = \pi$ poznat kao **Ojlerov identitet** ,

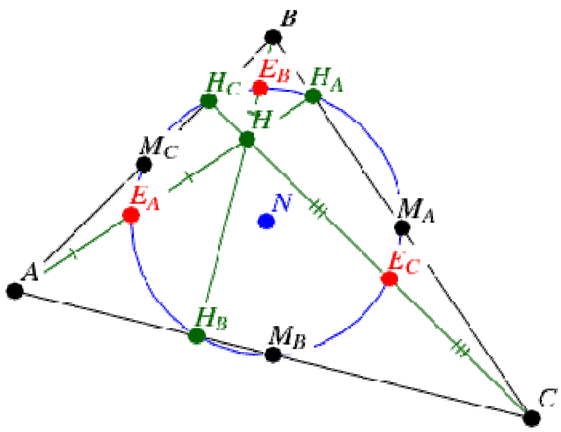
$$\boldsymbol{e^{i\pi}+1 = 0}$$



Slika1. Ojlerov identitet

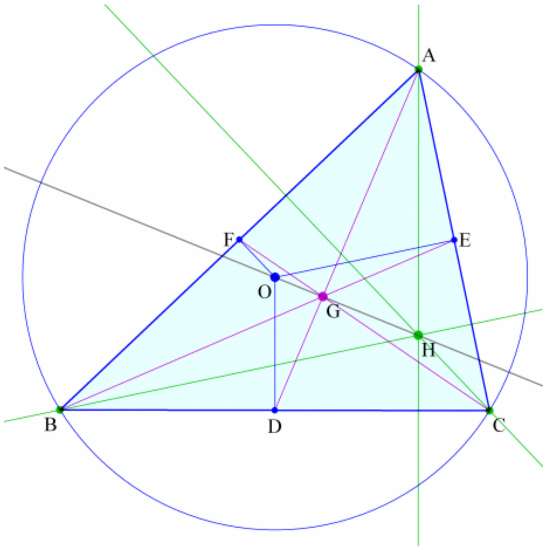
Još jedan primer njegovog fenomenalnog otkrića je **Ojlerova kružnica** ili kružnica 9 tačaka. To je kružnica koja se može konstruisati za svaki trougao a ime je dobila po sledećim tačkama koje sadrži:

- Podnožja visina trougla, (tri tačke u kojima se normale iz temena trougla seku sa stranicama na koje su normalne H_A , H_B , H_C)
- Podnožja težišnih duži trougla, (težišna duž je duž koja spaja teme trougla i središte nasprame strane i ovih tačaka takođe ima tri M_A , M_B , M_C)
- Sredine rastojanja ortocentra trougla od svakog temena E_A , E_B , E_C .



Slika2. Ojlerova kružnica

Osim ove kružnice, neophodno je spomenuti i pravu koja u svakom trouglu prolazi kroz tri tačke: ortocentar (H), težište (G) i centar opisanog kruga oko tog trougla (O). Dokaz da su te tri tačke kolinearne prvi je izveo Ojler a sama prava dobila je, njemu u čast, ime **Ojlerova prava**.



Slika3. Ojlerova prava

Interesantno je pomenuti kako je Ojler definisao funkciju. Po njemu, funkcija od x je svaki analitički izraz po x koji sadrži osnovne aritmetičke operacije, stepen, logaritam i trigonometrijski izraz. Osim ove definicije, podstaknut matematičkim rešenjima nekih konkretnih problema fizike on izvodi još jednu definiciju koja tvrdi da je funkcija svaka veza između veličina x i y koja se u ravni xOy izražava ma kojom krivom, povučenom slobodnom rukom. Ova definicija funkcije bila je primenjivana sve dok Dirihle u prvoj polovini XIX veka nije izveo opštiju definiciju.

Od izuzetnog značaja za matematička istraživanja je činjenica da je osnovni obrazac na kome se bazira teorija funkcija kompleksne promenljive zapravo Ojlerov obrazac kojim se preko imaginarnih brojeva uspostavlja veza između eksponencijalne funkcije i trigonometrijskih funkcija. Ovaj obrazac daje vezu između jedne monotone funkcije i oscilatornih funkcija. Pojava ovog obrasca je od posebnog značaja za teoriju logaritma i to naročito za rešavanje pitanja logaritma negativnih i imaginarnih brojeva.

Kakav i koliki doprinos u oblasti određenih integrala specijalnog tipa je Ojler ostavio proizilazi iz same činjenice da su i danas u matematici oni poznati kao Ojlerovi integrali. Poseban doprinos je dao u izučavanju eliptičnih integrala stvarajući uslov za razvoj teorije eliptičnih funkcija kao posebne oblasti u matematičkoj analizi. Takođe, od velikog su značaja i Ojlerova istraživanja u teoriji beskonačnih redova. On je sumirao niz konkretnih numeričkih redova i pokazao kako se mogu sumirati drugi numerički redovi. Na ovaj način dao je veliki doprinos numeričkoj infinitezimalnoj analizi, kada je u pitanju primena beskonačnog reda.

Ipak, sa sigurnošću možemo reći da je najobimniji i najznačajniji Ojlerov doprinos u oblasti diferencijalnih jednačina (običnih i parcijalnih). U ovim Ojlerovim istraživanjima zapravo je došlo do izražaja jedinstvo teorije i prakse. Za njega su, diferencijalne jednačine zapravo bile sredstvo matematičke analize za proučavanje različitih pojava u prirodi. To objašnjava njegovo veliko interesovanje za probleme matematičke fizike i mehanike koje je fantastično znao da formuliše u obliku diferencijalnih jednačina a zatim im nalazio odgovarajuća rešenja. Ustanovio je veliki broj kriterijuma integrabiliteta diferencijalnih jednačina i rešio priličan broj diferencijalnih jednačina. Izveo je niz opštih metoda za integraciju diferencijalnih jednačina-posebno parcijalnih. Dao je sistemsku teoriju singularnih integrala diferencijalnih jednačina prvog reda i razradio metodu diferencijacije, kao metodu za rešavanje diferencijalnih jednačina. Zaslužan je za formiranje metode karakteristika i metode integracije parcijalnih diferencijalnih jednačina pa ga slobodno možemo smatrati tvorcem teorije diferencijalnih jednačina kao posebne matematičke discipline.

Kao posebnu oblast matematičke analize, Ojler je osnovao varijacioni račun koji se bazira na njegovim istraživanjima vezanim za razne linije na površi. Naime, radi se o iznalaženju krivih koje imaju specijalne osobine u vidu ekstremuma (minimuma ili maksimuma). Do Ojlera su ovi problemi rešavani geometrijski i to na prilično komplikovan način ali ih je on veoma uprostio uvodeći prikladan analitički metod za njihovo rešavanje.

Od velikog značaja su i Ojlerova dostignuća iz oblasti geometrije gde zapravo dolazi do izražaja primena metoda matematičke analize u geometriji. U tu svrhu ćemo pomenuti analitički prikaz konusnih preseka i analizu opšte jednačine drugog stepena sa tri promenljive kojom je potpuno ustanovio kakve površi predstavlja pomenuta jednačina u Dekartovim koordinatama. Na osnovu radova vezanih za oblast diferencijalne geometrije smatra se jednim od njenih tvoraca. Isto važi i za topologiju i trigonometriju.

Ojlerova istraživanja su ostavila ogroman doprinos i u oblasti verovatnoće, računa konačnih diferencija, astronomije i fizike, razvitku raznih grana primenjene matematike u kojima uglavnom koristi matematičku analizu kao instrument istraživanja i na taj način postiže neverovatne rezultate. To potvrđuju i njegova dela: *Mehanika ili nauka o kretanju analitički izložena; Teorija kretanja planeta i kometa; Teorija kretanja meseca*(objavljena na latinskom u periodu od 1736. do 1753. godine).

Ojlerova mehanika je prvo veliko delo u kome on primenom matematičke analize rešava gomilu problema iz mehanike. U ovom svom delu prikazao je primenu matematičke analize na nauku o kretanju. Prikazana su veoma obimna proučavanja koja se odnose na kretanje čvrstog tela, a takođe je u tim svojim istraživanjima postavio i opšte jednačine hidrodinamike. Veliki je njegov doprinos i u oblasti nebeske mehanike i astronomije gde je na genijalan način primenio metodu varijacije konstanata. Razradio je teoriju kretanja meseca i dao je značajan doprinos rešavanju problema plime i oseke kao i teoriji problema triju tela. Primenom matematičke analize u nebeskoj mehanici i teorijskoj astronomiji stvorio je fantastičnu naučnu podlogu za razvoj tih oblasti koje su svoju veliku ekspanziju doživele tokom XIX veka u delima Gausa i Leverijeva otkrićem planete Neptun. Osim ovih, predmet naučnih istraživanja Ojlera bili su teorijski i praktični problemi balistike, brodogradnje, akustike, optike, magnetizma i mnogih drugih oblasti matematičke fizike.

Ojlerov matematički genije ostavio je dubokog traga skoro u svim oblastima teorijske i primenjene matematike. On je podjednako lako i podjednako genijalno prilazio rešavanju razno-raznih problema u teorijskoj i primenjenoj matematici. Napisao je oko 900 naučnih radova iz oblasti algebre, matematičke analize, diferencijalnih jednačina, stepenih redova, specijalnih funkcija, diferencijalne geometrije, teorije brojeva, racionalne mehanike, varijacionog računa, muzike, optike, fizike, hidrodinamike i astronomije. Svoj prvi samostalni rad napisao je sa devetnaest godina, poslednji samo nekoliko dana pre svoje smrti u 77. godini života a skoro polovinu svojih radova napisao je kao potpuno slep. U znak zahvalnosti što je takav genije postojao veći broj matemetičkih termina nosi njegovo ime.

Glava 2

Savremen prikaz Ojler-Maklorenove formule

2.1. Izvođenje formule

U svom poznatom delu *Kurs diferencijalnog i integralnog računa,* Fihtengoljc je na veoma pristupačan način dao savremeni prikaz Ojler-Maklorenove formule, obrazložio njegovo proučavanje ostatka i kroz nekoliko interesantnih primera pokazao sam postupak računanja pomoću pomenute formule.

U daljem tekstu dat je prevod iz VI paragrafa Fihtengoljceve knjige *Kurs diferencijalnog i integralnog računa (583-594 str.)* gde on detaljno prikazuje kako je nastala Ojler-Maklorenova formula.

Posmatrajmo Tejlorovu formulu sa ostatkom za analitičku funkciju, odnosno, dovoljno puta diferencijalnu funkciju, u formi određenog integrala:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = \mathrm{h}\, f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(x_0) + \rho$$

gde je:

$$\rho = \frac{1}{m!} \int_{x_0}^{x_0+h} f^{(m)}(t)(x_0 + h - t)^m dt = \int_0^h f^{(m+1)}(x_0 + h - z) \frac{z^m}{m!} dz$$

Uzmimo sada umesto f naizmenično funkcije:

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x} f(t)dt, \quad f(x), \quad \mathrm{h} f'(x), \quad h^2 f''(x), \ \dots \ h^{m-2} f^{m-2}(x),$$

istovremeno zamenjujući m, odnosno $m, \ m-1, \ m-2, \ m-3, \dots, 1$.

Na ovaj način dobijamo sistem od m jednačina:

$$\mathbf{1:}\ \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = f\ (x_0) + \frac{\mathrm{h}}{2!} f'(x_0) + \frac{h^2}{3!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^{(m-1)}}{m!} f^{(m-1)}(x_0) + \rho_0$$

$$\boldsymbol{A_1}: \quad \Delta f(x_0) = \quad \mathrm{h} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^{(m-1)}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x_0) + \rho_1$$

$$\boldsymbol{A_2}: \quad \mathrm{h}\,\Delta f'(x_0) = \quad + h^2 f''(x_0) + \dots + \frac{h^{(m-1)}}{(m-2)!} f^{(m-1)}(x_0) + \rho_2$$

.
.
.

$$\boldsymbol{A_{m-1}}: h^{m-2}\Delta f^{(m-2)}(x_0) = \quad \frac{h^{(m-1)}}{1!} f^{(m-1)}(x_0) + \rho_{m-1}$$

Isključujući iz ovog sistema sve izvode sa desne strane i radi toga usklađujući prvu jednakost sa svim ostalim, množeći redom sa brojevima $A_1, A_2, \dots A_{m-1}$, koje ćemo izabrati tako da važi:

$$\frac{1}{2!} + A_1 = 0; \quad \frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} A_1 + A_2 = 0; \dots$$

$$\frac{1}{m!} + \frac{1}{(m-1)!} A_1 + \frac{1}{(m-2)!} A_2 + \ \dots + A_{m-1} = 0$$

dobijamo sledeći rezultat:

$$f(x) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt + A_1\Delta f(x_0) + A_2 h f'(x_0) + \dots + A_{m-1} h^{m-2}\Delta f^{(m-2)}(x_0) + \ r$$

gde je $r = -\rho_0 - A_1\rho_1 - A_2\rho_2 - \dots - A_{m-1}\rho_{m-1} = -\frac{1}{h}\int_0^h f^{(m)}(x_0 + h - z)\ \cdot$

$$\cdot \left\{ \frac{z^m}{m!} + A_1 \frac{h\, z^{m-1}}{(m-1)!} + A_2 \frac{h^2 z^{m-2}}{(m-2)!} + \dots + A_{m-1} h^{m-1} z \right\} dz \qquad \text{ili kraće:}$$

$$r = -\frac{1}{h}\int_0^h f^{(m)}(x_0 + h - z)\varphi_{\mathrm{m}}(z)dz,$$

gde je $\varphi_m(z) = \frac{z^m}{m!} + A_1 \frac{h\, z^{m-1}}{(m-1)!} + A_2 \frac{h^2 z^{m-2}}{(m-2)!} + \cdots + A_{m-1} h^{m-1} z$

Očigledno, iz sistema linearnih jednačina, o kojima je ranije bilo reči**,** koeficijenti $A_1, A_2, \dots A_{m-1}$su jedinstveno određeni jedan za drugim, i pri tome ne zavise od izbora funkcije f i brojeva x_0 i h. Međutim, ti koeficijenti su nam već poznati - to su koeficijenti $\frac{\beta_k}{k!}$ iz razlaganja $\frac{x}{e^x-1}$ po stepenima od x**.**

Zaista, ako se podsetimo jednakosti $(\beta+1)^k - \beta^k = 0$ kojoj odgovaraju brojevi β, lako ćemo se uveriti da su brojevi $\frac{\beta_k}{k!}$ zapravo rešenja jednakosti koje smo definisali za koeficijente $A_1, A_2, \dots\ A_{m-1}$. Na osnovu toga za brojeve β_k imamo da važi:

$$A_1 + \frac{\beta_1}{1!} = -\frac{1}{2}; \qquad A_{2p-1} = \frac{\beta_{2p-1}}{(2p-1)!} = 0 \quad \text{za } p > 1$$

$$A_{2p} = \frac{\beta_{2p}}{(2p)!} = (-1)^{p-1} \frac{B_p}{(2p)!}$$ gde je $\boldsymbol{B_p}$ **Bernulijev broj**.

Posmatrajmo funkciju $f(x)$ na određenom intervalu $[a,b]$ i neka je $h = \frac{b-a}{n}$;

gde je n prirodan broj i ako za x_0 uzmemo naizmenično brojeve:

$a,\quad a+h,\quad a+2h, \dots a+(n-1)h = -h$, pa za svaki interval

$[a+(i-1)h\,, a+ih] \quad (i = 1,2,3, \dots n)$ pojedinačno formiramo jednakost oblika:

$$f(x) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt + A_1 \Delta f(x_0) + A_2 h f'(x_0) + \cdots + A_{m-1} h^{m-2} \Delta f^{(m-2)}(x_0) + r$$

sa ostatkom $r = -\frac{1}{h}\int_0^h f^{(m)}(x_0+h-z)\varphi_m(z)dz,$

Ako sada sve te jednakosti složimo dobićemo:

$$\sum_{i=1}^{n} f(a+(i-1)h) \equiv \sum_{a}^{b} f(x) = \frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx + A_1[f(b) - f(a)] +$$

$$A_2 h\left[f'(b) - f'(a)\right] + \dots + A_{m-1} h^{m-2}\left[f^{(m-2)}(b) - f^{(m-2)}(a)\right] + R \text{ gde je}$$

$$R = -\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}\int_0^h f^{(m)}(a+ih-z)\,\varphi_m(z)dz \equiv -\frac{1}{h}\sum_{a}^{b}\int_0^h f^{(m)}(x+h-z)\,\varphi_m(z)dz$$

Ovo je **Ojler-Maklorenova formula sa ostatkom**, za razne vrednosti m počev od broja 2.

2.2. Proučavanje ostatka

Na koji način je Ojler proučavao novonastali ostatak prikazano je u narednom tekstu kroz prevod iz takođe Fihtengoljcevog dela *Kurs diferencijalnog i integralnog računa*, u VI paragrafu (586 str.)

Diferenciranjem izraza koji definiše $\varphi_m(z)$ dobićemo:

$$\varphi_m{}'(z) = \varphi_{m-1}(z) + A_{m-1}h^{m-1}$$

Osim toga, imamo da važi da je $\varphi_m(0) = 0$ i $\varphi_m(h) = 0$ za ma koje $m \geq 2$ (sledi iz ranije definisanih uslova za brojeve $A_1, A_2, \dots A_{m-1}$)

Sada smo u mogućnosti da dokažemo sledeće tvrđenje:

Funkcija $\varphi_{2k}(z)$ (parnog reda) može imati različitu vrednost više od dva puta na intervalu $[0, h]$.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno. To znači da pretpostavimo da je njen izvod:

$\varphi_{2k}{}'(z) \equiv \varphi_{2k-1}(z)$ i da je pri tome $A_{2k} = 0$.

Po Rolovoj teoremi tada bi ova funkcija unutar intervala $[0, h]$ imala vrednost 0 ne manje od dva puta. U tom slučaju i izvod

$$\varphi_{2k-1}{}'(z) \equiv \varphi_{2k-2}(z) + A_{2k-2}h^{2k-2}$$

po toj teoremi bi morao da ima vrednost 0 unutar intervala $[0, h]$ ne manje od tri puta, tj. funkcija $\varphi_{2k-2}(z)$ unutar tog interval bi dobijala jednu i samo jednu vrednost: $-A_{2k-2}h^{2k-2}$ ne manje od tri puta. Na osnovu toga, ako sada formiramo postepeno red funkcija φ_{2k} sa dva člana, došli bi do zaključka da funkcija $\varphi_2(z) = \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}$ (kvadratni binom) dobija nekada vrednost 0 ne manje od tri puta, što je apsolutno nemoguće. Ovim je tvrđenje dokazano.

Iz ovog tvrđenja proizilazi veoma važna posledica:

Funkcija $\varphi_{2k}(z)$ zadržava svoj znak u intervalu $(0,h)$, čak može da ima vrednost 0 na krajevima intervala i pri tome unutar intervala više ne može imati vrednost 0.

Lako je konstatovati, kakav znak zadržava (očuvava) funkcija $\varphi_{2k}(z)$ za dovoljno male z a to znači za sve unutar intervala $(0,h)$) ovaj složeni član ima znak takav da je određen članom

$$A_{2k-2}h^{2k-2}z^2 \quad (A_{2k-1} = 0)$$ tj. kako je

$$A_{2k-2} = (-1)^{k-2} \frac{B_{k-1}}{(2k-2)!}$$ znak je $(-1)^k$.

Na taj način, dve uzastopne funkcije parnog reda $\varphi_{2k}(z)$ i $\varphi_{2k+2}(z)$ zadržavaju (čuvaju) svaka određeni znak u $(0,h)$ ali su ti znaci suprotni.

Vratimo se sada na ostatak R i pretpostavimo da je m paran broj tj. $m = 2k$ i pretpostavimo da su izvodi $f^{(2k)}(z)$ i $f^{(2k+2)}(z)$ u intervalu $[a,b]$ oba pozitivna ili oba negativna. Iz izraza za R posle dvostruke integracije po delovima dobijamo:

$$\underline{R = -\frac{1}{h}\sum_a^b \int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(x+h-z)\, dz =}$$

$$= \frac{1}{h}\sum_a^b \int_0^h (A_{2k}h^{2k} - \varphi_{2k+1}{}'(z)) f^{(2k)}(x+h-z)\, dz =$$

$$= \frac{1}{h} A_{2k}h^{2k} \sum_a^b \left[f^{(2k-1)}(x+h) - f^{(2k-1)}(x)\right] - \frac{1}{h}\sum_a^b \int_0^h \varphi_{2k+1}(z) f^{(2k+1)}(x+h-z)\, dz =$$

$$= A_{2k}h^{2k-1}\left[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right] - \frac{1}{h}\sum_a^b \int_0^h \varphi_{2k+2}{}'(z) f^{(2k+1)}(x+h-z)\, dz =$$

$$= A_{2k}h^{2k-1}\left[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right] \underline{- \frac{1}{h}\sum_a^b \int_0^h \varphi_{2k+2}(z) f^{(2k+2)}(x+h-z)\, dz =}$$

Na osnovu formiranih pretpostavki, podvučene sume integrala imaju suprotne znake a prva od njih ima isti znak kao izraz

$$A_{2k}h^{2k-1}\left[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right]$$ i po apsolutnoj vrednosti manje od nje.

Na taj način možemo konstatovati da važi:

$$R = R_{2k} = \theta \cdot A_{2k}h^{2k-1}\left[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right] =$$

$$= \theta \cdot (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} h^{2k-1}\left[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right] \qquad (0 < \theta < 1)$$

Ako sada pretpostavimo da svi izvodi $f^{(2k)}(z)$ parnog reda zadržavaju (čuvaju) u intervalu jedan i samo jedan znak, i ako umesto konačne Ojler-Maklorenove formule napišemo beskonačan red korišćenjem već definisanih vrednosti za koeficijente A_m dobićemo beskonačan Ojler-Maklorenov red:

$$\sum_a^b f(x) = \frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{2}[f(b) - f(a)] +$$

$$+\frac{B_1}{2!}h[f'(b) - f'(a)] - \frac{B_2}{4!}h^3\left[f'''(b) - f'''(a)\right] + \ldots +$$

$$+ (-1)^{k-2}\frac{B_{k-1}}{(2k-2)!}h^{2k-3}\left[f^{(2k-3)}(b) - f^{(2k-3)}(a)\right] +$$

$$+ (-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}h^{2k-1}\left[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right] + \ldots$$

Ovaj red uopšteno govoreći divergira (tako da je znak = ovde postavljen uslovno). Na osnovu pomenutih pretpostavki, on u krajnjoj meri počinje od trećeg člana koji može biti promenljivog znaka. Ako još spomenemo prethodno konstatovani ostatak R možemo reći da napisani red definiše sumu $\sum_a^b f(x)$.

Ako tu sumu i integral $\frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx$ preuredimo, izmenivši pri tome znakove svih ostalih članova u suprotne,dobijamo red koji definiše imenovani integral.

Parcijalne sume tih redova dozvoljavaju ponekad da se sa velikom tačnošću izračuna suma $\sum_a^b f(x)$ znajući integral, ili integral $\frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx$ znajući sumu. Naravno, u svemu ovom osnovnu ulogu ima činjenica da nam je unapred poznata procena ostatka.

2.3. Primeri računanja pomoću Ojler-Maklorenove formule

U naredna tri primera prikazana je konkretna primena Ojler-Maklorenove formule prilikom određivanja približnih vrednosti (prevod, Fihtengoljc $-$ *Kurs diferencijalnog i integralnog računa*, VI paragraf ,588 str.)

Primer 1. Naći približnu vrednost sume 900(!) članova

$\sum_{i=100}^{i=999}\frac{1}{i} \equiv \sum_{100}^{1000}\frac{1}{x}$; uzimajući za $f(z) = \frac{1}{z}$, $a = 100$, $b = 1000$ i $h = 1$.

$f'(z) = -\frac{1}{z^2}$; $f''(z) = \frac{2}{z^3}$; $f'''(z) = -\frac{6}{z^4}$; $f'^{v}(z) = \frac{24}{z^5}$; $f^{v}(z) = -\frac{120}{z^6}$;

i uopšte $f^{(2k)}(z) = \frac{(2k)!}{z^{2k+1}}$ su već poznati uslovi za izračunavanje izvoda parnog reda.

Produžićemo razlaganje do člana koji sadrži f''' tako da u ostatak ulazi već f^{v}.

U tom slučaju na osnovu Ojler-Maklorenove formule imamo:

$$\sum_{100}^{1000}\frac{1}{x}=\int_{100}^{1000}\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{1000}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{100^2}-\frac{1}{1000^2}\right)-$$

$$-\frac{6}{720}\left(\frac{1}{100^4}-\frac{1}{1000^4}\right)+\theta\cdot\frac{12}{3024}\left(\frac{1}{100^6}-\frac{1}{1000^6}\right)\qquad (0<\theta<1)$$

Kako je

$$\int_{100}^{1000}\frac{dx}{x}=\ln 10=2{,}302585092994045\ldots$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{1000}\right)=0{,}0045$$

$$\frac{1}{12}\left(\frac{1}{100^2}-\frac{1}{1000^2}\right)=0{,}00000825$$

$$-\frac{6}{720}\left(\frac{1}{100^4}-\frac{1}{1000^4}\right)=0{,}000000000083325$$

$$\overline{2{,}307093342910720}$$

$$\theta\cdot\frac{12}{3024}\left(\frac{1}{100^6}-\frac{1}{1000^6}\right)<0{,}000000000000004$$

Dakle, s tačnošću do $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10^{14}}}$ možemo reći da je $\sum_{\mathbf{100}}^{\mathbf{1000}}\frac{\mathbf{1}}{x}=\mathbf{2{,}30709334291072}$

Primer 2. Izračunati $\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln 2$; ako je $f(z)=\frac{1}{1+z}$,

$$a=0,\quad b=1\ \text{ i } h=\frac{1}{10}$$

(n=10) Imamo da je:

$$f'(z)=-\frac{1}{(1+z)^2};\quad f''(z)=\frac{2}{(1+z)^3};\quad f'''(z)=-\frac{6}{(1+z)^4};$$

$$f^{iv}(z)=\frac{24}{(1+z)^5};\quad f^{v}(z)=-\frac{120}{(1+z)^6};\ \text{ i uopšte }\ f^{(2k)}(z)=\frac{(2k)!}{(1+z)^{2k}}$$

tako da su naši uslovi opet ispunjeni. Iskoristićemo modifikovanu Ojler-Maklorenovu formulu, razložićemo je i ovoga puta do člana koji sadrži f''' :

$$\int_0^1 \frac{dz}{1+z} = \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} - \frac{1}{20}(1-\frac{1}{2}) -$$

$$-\frac{1}{1200}(1-\frac{1}{4}) + \frac{6}{7200000}(1-\frac{1}{16}) - \theta\frac{12}{3024000000}(1-\frac{1}{64}) \quad (0< \theta < 1)$$

Dalje imamo da je :

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{19} = 0{,}718771403$$

$$-\frac{1}{20}(1-\frac{1}{2}) = -0{,}025$$

$$-\frac{1}{1200}(1-\frac{1}{4}) = -0{,}000625$$

$$\frac{6}{7200000}(1-\frac{1}{16}) = 0{,}000000871$$

$$\overline{\qquad\qquad 0{,}693147184}$$

$$\theta \cdot \frac{12}{3024000000}(1-\frac{1}{164}) < 0{,}000000004$$

Prema tome, sa tačnošću do $\mathbf{\frac{1}{2\cdot 10^8}}$ dobijamo da je $\mathbf{\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = 0{,}69314718}$

Primer 3. U ovom primeru pokazaćemo kako pomoću Ojler-Maklorenove formule može biti približno izračunata suma sporo konvergirajućeg beskonačnog reda.

U tu svrhu posmatraćemo : $\pi^2 = 6\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$

Zamenimo u Ojler-Maklorenovu formulu sa ostatkom $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $h = 1$, $b = a + nh$ gde su a i n bilo koji prirodni brojevi. Integral i izvodi se jednostavno izračunavaju pa posle njihove zamene umesto A_m dobijamo:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(a+i)^2} = -\left[\frac{1}{a+n} - \frac{1}{a}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(a+n)^2} - \frac{1}{a^2}\right] -$$

$$-B\left[\frac{1}{(a+n)^3} - \frac{1}{a^3}\right] + \left[\frac{1}{(a+n)^5} - \frac{1}{a^5}\right] - \ldots$$

$$\ldots (-1)^{k-2}B_{k-1}\left[\frac{1}{(a+n)^{2k-1}} - \frac{1}{a^{2k-1}}\right] - \theta_n(-1)^{k-1}B_k\left[\frac{1}{(a+n)^{2k+1}} - \frac{1}{a^{2k+1}}\right]$$

pri čemu je $(0< \theta_n < 1)$. Za određeno a i k dolazimo do granice kada n teži ∞.

Lako je konstatovati da θ_n takođe teži nekoj granici θ, (0≤ θ ≤1) pa imamo:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(a+i)^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^2} + B_1 \frac{1}{a^3} - B_2 \frac{1}{a^5} + B_3 \frac{1}{a^7} - \ldots +$$

$$+ (-1)^{k-2} B_{k-1} \frac{1}{a^{2k-1}} + \theta(-1)^{k-1} B_k \frac{1}{a^{2k+1}} .$$

Ako sada odredimo da je $a = 10$ i k =10 i ako iskoristimo poznata svojstva Bernulijevih brojeva dobijamo da je:

$$\pi^2 = 6\sum_{i=1}^{9} \frac{1}{i^2} + \frac{6}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000} - \frac{1}{5 \cdot 10^5} + \frac{1}{7 \cdot 10^7} - \frac{1}{5 \cdot 10^9} + \frac{1}{11 \cdot 10^{11}} -$$

$$- \frac{691}{455 \cdot 10^{13}} + \frac{7}{10^{15}} - \frac{3617}{85 \cdot 10^{17}} + \frac{43867}{133 \cdot 10^{19}} - \theta \cdot \frac{174611}{55 \cdot 10^{21}}$$

Izračunavanje ćemo vršiti do 19 decimala:

$$6\sum_{i=1}^{9} \frac{1}{i^2} = 9{,}2386063869992441421$$

$$\frac{6}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000} = 0{,}631$$

$$- \frac{1}{5 \cdot 10^5} = 0{,}000002$$

$$\frac{1}{7 \cdot 10^7} = 0{,}0000000142857142857$$

$$- \frac{1}{5 \cdot 10^9} = -0{,}0000000002$$

$$\frac{1}{11 \cdot 10^{11}} = 0{,}0000000000045454545$$

$$- \frac{691}{455 \cdot 10^{13}} = -0{,}0000000000001518681$$

$$\frac{7}{10^{15}} = 0{,}000000000000007$$

$$- \frac{3617}{85 \cdot 10^{17}} = -0{,}0000000000000004255$$

$$\frac{43867}{133 \cdot 10^{19}} = 0{,}0000000000000000330$$

9,8696044010893586217

Ako uzmemo u obzir zaokruživanje greške i ostatak dobijamo da je

$$\boldsymbol{\pi^2} = \mathbf{9{,}86960440108935862} \quad \text{sa tačnošću do} \quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2 \cdot 10^{17}}}$$

Sumu π^2 konvergentnog reda smo izračunali sa veoma velikom preciznošću pomoću Ojler-Maklorenove formule, koristeći se parcijalnom sumom divergentnog reda koji definiše broj π^2.

Ako bi hteli da postignemo isto a da pri tome koristimo samo konvergentan red, tada bi morali uzeti više od milijardu njegovih članova.

2.4. Drugi oblik Ojler-Maklorenove formule

U prethodnom tekstu dat je savremeni prikaz Ojler-Maklorenove formule koji je detaljno prikazao i razradio Fihtengoljc ali se on nije na tome zaustavio već nam je omogućio još jedno viđenje pomenute formule.(prevod, Fihtengoljc *Kurs diferencijalnog i integralnog računa*, VI paragraf ,592 str.)

Poći ćemo od već poznatog oblika Ojler-Maklorenove formule i pretpostavićemo da izvodi funkcija $f(x)$ bilo kog reda postoje u beskonačnom intervalu $[a, \infty)$ i zadovoljavaju uslove:

$\boldsymbol{a}$) svi izvodi $f^{(2k)}(z)$ parnog reda imaju u tom intervalu jedan i samo jedan određen znak;

$\boldsymbol{b}$) svi izvodi $f^{(2k-1)}(z)$ neparnog reda teže 0 kada $z \to \infty$;

Neka je broj m paran tj. $m = 2k$. Brojevi a i h su određeni, $b = a + nh$ gde je n bilo koji prirodan broj. Ostatak R predstavićemo na sledeći način:

$$-\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(a + ih - z)\, dz + \frac{1}{h}\sum_{i=n+1}^{\infty}\int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(a + ih - z)\, dz \equiv$$

$$\equiv -\frac{1}{h}\sum_{i=a}^{\infty}\int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(x + h - z)\, dz + \frac{1}{h}\sum_{i=b}^{\infty}\int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(x + h - z)\, dz$$

Dalje, izvršićemo kombinovanje ovih suma sa svim članovima Ojler-Maklorenove formule koji sadrže a i na taj način formirati novu konstantu koja ne zavisi od b:

$$C_k = -A_1 f(a) - A_2 h f'(a) - \cdots - A_{2k-2} h^{2k-3} f^{(2k-3)}(a) - \frac{1}{4}\sum_a^{\infty}\int_0^h f(x)dx \ ;$$

Ako sada ovu konstantu uvrstimo u već postojeću Ojler-Maklorenovu formulu dobićemo:

$$\sum_a^b f(x) = C_k + \frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx + A_1 f(b) + A_2 h f'(b) + \cdots + A_{2k-2} h^{2k-3} f^{(2k-3)}(b) + R'$$

gde je $\quad R' = \frac{1}{h}\sum_{i=n+1}^{\infty}\int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(a + ih - z)\, dz =$

$$= \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(b + ih - z)\, dz \equiv \frac{1}{h}\sum_{i=b}^{\infty}\int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(x + h - z)\, dz$$

Ostalo je još da se potvrdi konvergencija korišćenih beskonačnih redova. U tu svrhu, a na osnovu do sada rečenog možemo konstatovati da važi:

$$0 < \frac{\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n-1}\int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(a+ih-z)}{A_{2k} h^{2k-1}\left[f^{(2k-1)}(a) - f^{(2k-1)}(b)\right]} < 1$$

Na osnovu svojstva funkcije $\varphi_{2k}(z)$ i prema uslovu a) svi članovi u brojiocu imaju jedan i samo jedan znak koji se poklapa sa znakom u imeniocu. Otuda, određujući granicu kada $n \to \infty$ i na osnovu uslova b) možemo da govorimo o konvergenciji reda:

$$\frac{1}{h}\sum_a^{\infty}\int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(x + h - z)\, dz \equiv \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(a + ih - z)\, dz$$

pri čemu njegove sume imaju isti znak kao izraz $A_{2k} h^{2k-1} f^{(2k-1)}(a)$ i po apsolutnoj veličini nije veći od njega. Zamenjujući u prethodnom obrazloženju brojeve a i b potvrdićemo konvergenciju reda:

$$\frac{1}{h}\sum_b^{\infty}\int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(x + h - z)\, dz \equiv \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(b + ih - z)\, dz$$

a takođe i to da njegova suma ima takav znak kakav ima izraz $A_{2k} h^{2k-1} f^{(2k-1)}(b)$ a po apsolutnoj veličini nije veći od njega.

Dakle, ne samo da smo dokazali konvergenciju primenjenih beskonačnih redova, već smo pokazali da se ostatak R' može napisati u obliku:

$$R' = \theta \cdot A_{2k} h^{2k-1} f^{(2k-1)}(b) = \theta \cdot (-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!} h^{2k-1} f^{(2k-1)}(b) \qquad (0 < \theta < 1)$$

Neophodno je još spomenuti da za konstantu C_k koju smo ovde formirali i koristili nije isključena mogućnost zavisnosti od indikatora k. Da bi se u to uverili dovoljno je uporediti formule:

$$\sum_a^b f(x) = C_k + \frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx + A_1 f(b) + A_2 h f'(b) + \cdots + A_{2k-2} h^{2k-3} f^{(2k-3)}(b) + R'$$

i $\quad R' = \theta \cdot A_{2k}h^{2k-1}f^{(2k-1)}(b) = \theta \cdot (-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}h^{2k-1}f^{(2k-1)}(b) \qquad (0 < \theta < 1)$

sa formulama napisanim za $k = 1$:

$$\sum_a^b f(x) = C_1 + \frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx + A_1 f(b) + R'', \quad R'' = \theta' A_2 h f'(b) \quad (0 < \theta' < 1)$$

Dakle,

$$C_1 + \theta' A_2 h f'(b) = C_k + A_2 h f'(b) + \ldots + A_{2k-2}h^{2k-3}f^{(2k-3)}(b) + \theta A_{2k}h^{2k-1}f^{(2k-1)}(b)$$

i ako težimo granici kada $b \to \infty$ i na osnovu uslova $b)$ dobijamo da je $C_k = C_2 = C$. Ova konstanta naziva se **Ojler-Maklorenova konstanta** za funkciju $f(x)$. Osim od izbora same funkcije ova konstanta zavisi i od izbora a i h.

Napomena: Kada smo govorili o jednakosti granice, bilo je neophodno znacima nejednakosti pridružiti i znak broja θ u poslednjoj formuli za R' tj. $(0 \leq \theta \leq 1)$. Kako se jednakost nuli isključuje, odmah je jasno da suma beskonačnog reda sa članovima istog znaka ne može biti nula. Ako se pretpostavi da je $\theta = 1$ i ako bi u formuli

$$\sum_a^b f(x) = C_k + \frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx + A_1 f(b) + A_2 h f'(b) + \cdots + A_{2k-2}h^{2k-3}f^{(2k-3)}(b) + R'$$

uzeli za $k = 1$ tada bi $R' = 0$ a to nije moguće (već smo pokazali). Dakle, važi $(0 < \theta < 1)$ kako smo ranije konstatovali.

Ako sada, umesto konačne sume

$$\sum_a^b f(x) = C_k + \frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx + A_1 f(b) + A_2 h f'(b) + \cdots + A_{2k-2}h^{2k-3}f^{(2k-3)}(b) + R'$$

posmatramo beskonačan red, dobićemo Ojler-Maklorenov red u sledećem obliku:

$$\sum_a^b f(x) = C + \frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{2}f(b) + \frac{B_1}{2!}hf'(b) - \frac{B_2}{4!}h^3 f''(b) + \ldots +$$

$$+ (-1)^{k-1}\frac{B_{k-1}}{(2k-2)!}h^{2k-3}f^{(2k-3)}(b) + (-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}h^{2k-1}f^{(2k-1)}(b) + \ldots$$

(znak jednakosti ovde ima samo uslovni smisao)

Na osnovu uslova $a)$ svi izvodi $f^{(2k-1)}(b)$ sa rastom b menjaju se u istom pravcu, a istovremeno na osnovu uslova $b)$ kada $b \to \infty$ oni teže 0, sa sigurnošću možemo zaključiti da oni imaju jedan i samo jedan znak. Prema tome, a i na osnovu

$$R' = \theta \cdot A_{2k}h^{2k-1}f^{(2k-1)}(b) = \theta \cdot (-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}h^{2k-1}f^{(2k-1)}(b) \qquad (0 < \theta < 1)$$

konstatujemo da i u novom obliku Ojler-Maklorenov red definiše sumu $\sum_a^b f(x)$ potpuno istu kao onu o kojoj smo ranije govorili.

Još je ostalo da napomememo, ako izaberemo neko $b > a$ za koje se i suma i integral izračunavaju bez teškoća, moguće je za konstantu C dobiti red koji je definiše:

$$C = \sum_a^b f(x) - \frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx + \frac{1}{2}\ f(b) - \frac{B_1}{2!}hf^{'}(b) + \frac{B_2}{4!}h^3 f''(b) + \ldots$$

koji u mnogim slučajevima i dozvoljava da se nađe približna vrednost za C.

Glava 3

Ojlerovo izvođenje Ojler-Maklorenove formule

Ovu formulu su oba matematičara isto izvela, nezavisno jedan od drugog, Ojler - 1736. godine a Makloren - 1742. godine. Ona je veoma bitna za izračunavanje (pomoću diferencijalnog računa) takvih suma kao što je red $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + . . . + \frac{1}{n}$, suma logaritama ln2 + ln3 + ln4 + . . . + ln n = ln n! suma stepena $1^k + 2^k + 3^k + . . . + n^k$ ili suma recipročnih stepena $1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + . . . + \frac{1}{n^k}$.

Dakle, pitanje je bilo: Ako je zadata funkcija $f(x)$ naći formulu za izračunavanje sume:

$$S = f(1) + f(2) + f(3) + . . . + f(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i)$$

3.1. Izvođenje formule po Ojleru:

Sam Ojler je imao više ideja za izvođenje svoje verzije sumacione formule koja je u analizi u to vreme napravila veliki korak napred. U narednom tekstu prikazaćemo dve njegove originalne ideje (prevod, Э. Хайрер, Г. Ваннер – *Математический анализ в свете его истории* – Научный мир; II paragraf, 160-169 str.)

I ideja: Posmatraćemo dodatno sumu

$$s = f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)$$

Da bi izračunali razliku $S - s$ iskoristićemo Tejlorovu formulu u kojoj ćemo uzeti da je

$x - x_0 = -1$ tako da iz $f(i-1) - f(i) = -\frac{f'(i)}{1!} + \frac{f''(i)}{2!} - \frac{f'''(i)}{3!} + \ldots$
kao rezultat dobijamo:

$$f(n) - f(0) = \sum_{i=1}^{n} f'(i) - \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n} f''(i) + \frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{n} f'''(i) - \frac{1}{4!}\sum_{i=1}^{n} f^{\prime v}(i) + \ldots$$

Ova formula sadrži $\sum_{i=1}^{n} f'(i)$ ali ako je napišemo za prethodno formiranu po f i zatim izrazimo tu prethodnu preko f dobićemo formulu za $\sum_{i=1}^{n} f(i)$:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)dx + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n} f'(i) - \frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{n} f''(i) + \frac{1}{4!}\sum_{i=1}^{n} f'''(i) - \ldots$$

II ideja: Bazira se na tome da se isključe sume

$\sum_{i=1}^{n} f'(i)$, $\sum_{i=1}^{n} f''(i)$, $\sum_{i=1}^{n} f'''(i)$, ... sa desne strane izraza

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)dx + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n} f'(i) - \frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{n} f''(i) + \frac{1}{4!}\sum_{i=1}^{n} f'''(i) - \ldots$$

pomoću formule u kojoj se f redom zamenjuje sa f', f'', f''', ... To nas dovodi do formule oblika:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)dx - \alpha\big(f(n) - f(0)\big) + \beta\big(f'(n) - f'(0)\big) -$$

$$- \gamma(f''(n) - f''(0)) + \delta(f'''(n) - f'''(0)) - \ldots$$

Da bi izračunali koeficijente $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ redom ćemo zameniti f u

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)dx - \alpha\big(f(n) - f(0)\big) + \beta\big(f'(n) - f'(0)\big) -$$

$$-\gamma(f''(n) - f''(0)) + \delta(f'''(n) - f'''(0)) - \ldots$$

umesto f', f'', f''', ... i dobićemo:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)dx - \alpha(f(n) - f(0)) + \beta(f'(n) - f'(0)) - \ldots,$$

$$-\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n} f'(i) = \qquad -\frac{1}{2!}(f(n) - f(0)) + \frac{\alpha}{2!}(f'(n) - f'(0)) - \ldots,$$

$$-\frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{n} f''(i) = \qquad +\frac{1}{3!}(f'(n) - f'(0)) - \ldots,$$

$$\vdots$$

Shodno $\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)dx + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n} f'(i) - \frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{n} f''(i) + \frac{1}{4!}\sum_{i=1}^{n} f'''(i) - \ldots$ suma svih tih izraza neophodno bi trebala da bude jednaka $\int_0^n f(x)dx$. Na osnovu toga dobijamo:

$\alpha + \frac{1}{2!} = 0, \quad \beta + \frac{\alpha}{2!} + \frac{1}{3!} = 0, \quad \gamma ++ \frac{\beta}{2!} + \frac{\alpha}{3!} + \frac{1}{4!} = 0 \ldots$ odakle sledi da je:

$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{12}, \quad \gamma = 0, \quad \delta = -\frac{1}{720} \ldots$ pa je onda

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \frac{1}{12}(f'(n) - f'(0)) - \\ -\frac{1}{720}(f'''(n) - f'''(0)) + \frac{1}{30240}(f^v(n) - f^v(0)) + \ldots}$$

Primer. Ako primenimo ovu formulu za izračunavanje sume od milion članova dobićemo:

$$\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \ldots + \frac{1}{1000000} = \ln(10^6) - \ln(10) + \frac{1}{2}10^{-6} - \frac{1}{20} +$$

$$+\frac{1}{1200} - \frac{1}{120}10^{-4} + \frac{1}{252}10^{-6} + \ldots \approx 11{,}463758469,$$

na ovaj način dobijamo prilično lepo približno rešenje pomoću samo nekoliko članova. Istovremeno, ova formula je beskorisna za izračunavanje sume prvih članova

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10}$$

3.2. Bernulijevi brojevi

U ovom delu biće reči o tome kako je Ojler izračunavao Bernulijeve brojeve (prevod, Э. Хайрер, Г. Ваннер – *Математический анализ в свете его истории* – Научный мир; II paragraf, 171-173 str.)

Kada koeficijente α, β, γ, δ, . . . zamenimo sa $\frac{B_i}{i!}$

($B_0 = 1$, $\alpha = \frac{B_1}{1!}$, $\beta = \frac{B_2}{2!}$, . . .) dobijamo:

$$2B_1 + B_0 = 0\,,\ 3B_2 + 3B_1 + B_0 = 0\,,\ \ldots \qquad \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}B_i = 0$$

Ojler je na sledeći način izračunavao Bernulijeve brojeve:

$$B_0 = 1,\ \ B_1 = -\frac{1}{2},\ \ B_2 = \frac{1}{6},\ \ B_4 = -\frac{1}{30},\ \ B_6 = \frac{1}{42},\ \ B_8 = -\frac{1}{30},\ \ B_{10} = \frac{5}{66},$$

$$B_{12} = -\frac{691}{2730},\ \ B_{14} = \frac{7}{6},\ B_{16} = -\frac{3617}{510},\ \ B_{18} = \frac{43867}{798},\ \ B_{20} = -\frac{174611}{330},$$

$$B_{22} = \frac{854513}{138},\ \ B_{24} = -\frac{236364091}{2730},\ \ B_{26} = \frac{8553103}{6},\ \ B_{28} = -\frac{23749461029}{870},$$

$$B_{30} = \frac{8615841276005}{14322},\ \text{ i } B_3 = B_5 = B_7 = \ldots 0$$

pa sada na osnovu ovih brojeva formula:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \frac{1}{12}(f'(n) - f'(0)) -$$

$$-\frac{1}{720}(f'''(n) - f'''(0)) + \frac{1}{30240}(f^{v}(n) - f^{v}(0)) + \ldots$$

dobija sledeći izgled:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \sum_{k\geq 1}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)\right)}$$

Ako je $f(x) = x^q$ tada je prethodni red konačan i predstavlja dobro poznatu Bernulijevu formulu.

Da bi lakše razumeli šta su to Bernulijevi brojevi, analiziraćemo jednu od mnogih Ojlerovih ideja:

Posmatrajmo funkciju $V(u)$ sa koeficijentima Tejlorovog reda tj. odredimo je tako da važi:

$$V(u) = 1+ \alpha u + \beta u^2+ \gamma u^3+ \delta u^4+ \dots$$

$$= 1+ \frac{B_1}{1!} u + \frac{B_2}{2!} u^2+ \frac{B_3}{3!} u^3+ \frac{B_4}{4!} u^4+ \dots$$

dalje na osnovu prethodnih formula imamo da je :

$$V(u)\left(1 + \frac{u}{2!} + \frac{u^2}{3!} + \frac{u^3}{4!} + \dots\right) = 1 \qquad \text{tj.} \qquad V(u) = \frac{u}{e^u - 1}$$

Na ovaj način,beskonačan broj algebarskih jednakosti se izražava preko jedne analitičke formule. Iz činjenice da je funkcija

$$V(u) + \frac{u}{2} = \frac{u}{e^u - 1} + \frac{u}{2} = \frac{u}{2} \cdot \frac{e^{u/2} + e^{-u/2}}{e^{u/2} - e^{-u/2}} \quad \text{parna,}$$

sledi da je $B_3 = B_5 = B_7 = \cdots = 0$

Posmatrajmo sada funkciju $f(x) = \cos(2\pi x)$, za koju važi da je $f(i) = 1$ za svako i u formuli

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \sum_{k \geq 1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)\right)$$

Sa leve strane tog izraza imaćemo 1 + 1 +. . . + 1 a sa desne strane 0 + 0 + . . . + 0 jer je funkcija $\cos(2\pi x)$ zajedno sa svim svojim izvodima periodična sa periodom 1. Dakle, napisana formula nije tačna. Druga kontradiktornost odnosi se na to da pri povećavanju funkcije f beskonačan red divergira. Prema tome, neophodno je ograničiti red posle konačnog broja članova i formirati izraz za ostatak.

3.3. Bernulijevi polinomi

Prethodni dokaz se može bazirati na ponovnom diferenciranju po delovima. Veoma važnu ulogu u ovom dokazivanju imaju Bernulijevi polinomi koji se mogu predstaviti na ovaj način: (prevod, Э. Хайрер, Г. Ваннер – *Математический анализ в свете его истории* – Научный мир; II paragraf, 173-175 str.)

$$B_1(x) = B_0x + B_1 \qquad = x - \frac{1}{2}$$

$$B_2(x) = B_0x^2 + 2B_1x + B_2 \qquad = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$B_3(x) = B_0x^3 + 3B_1x^2 + 3B_2x + B_3 \qquad = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$B_4(x) = B_0x^4 + 4B_1x^3 + 6B_2x^2 + 4B_3x + B_4 \qquad = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$$

ili u opštem obliku:

$B_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B_i\, x^{k-i}$ pri čemu zadovoljavaju uslove:

$$B_k{}'(x) = k\, B_{k-1}(x)\,, \qquad B_k(0) = B_k(1) = B_k$$

U suštini,ova formula zapravo prikazuje binomne koeficijente.

Teorema1: Neka je

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \sum_{j=2}^{k} \frac{B_j}{j!}\left(f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(0)\right) + R_k{}'$$

gde je: $R_k{}' = \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_0^n B_k{}'(x) f^{(k)}(x)dx$ pri čemu se $B_k{}'(x)$ pojavljuje kao funkcija koja je dobijena od polinoma $B_k(x)$ za $0 \leq x \leq 1$ putem njenog periodičnog produžetka sa periodom 1.

Dokaz: Prvo ćemo dokazati tvrđenje teoreme za $n = 1$.

Ako uzmemo da je $B_1{}'(x) = 1$ posle integracije po delovima dobijamo:

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 B_1{}'(x)f(x)dx = B_1(x)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 B_1(x)f'(x)dx$ pa je prema tome prvi član $\frac{1}{2}\left(f(1) + f(0)\right)$. Na osnovu zakonitosti koje važe za Bernulijeve polinome u drugom članu uvešćemo zamenu $B_1(x) = \frac{1}{2} B_2{}'(x)$ i još jednom primeniti integral pa dobijamo:

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}(f(1) + f(0)) - \frac{B_2}{2!}(f'(1) - f'(0)) + \frac{1}{2!}\int_0^1 B_2(x)f''(x)dx .$$

Ako dalje nastavimo sa ponavljanjem tog principa dobićemo jednakost:

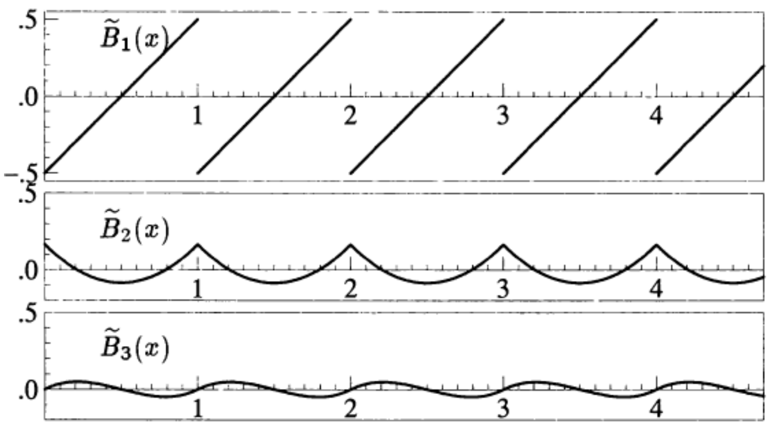
$$\frac{1}{2}\big(f(1) + f(0)\big) = \int_0^1 f(x)dx + \sum_{j=2}^{k} \frac{(-1)^j B_j}{j!} \big(f^{(j-1)}(1) - f^{(j-1)}(0)\big) + R_k$$

gde je $\quad R_k = \frac{(-1)^k}{k!}\int_0^1 B_k(x) f^{(k)}(x)dx$

Sada primenimo ovu formulu na funkciju $f(x + i - 1)$. Uočićemo da je

$$\int_0^1 B_k(x) f^{(k)}(x + i - 1)dx = \int_{i-1}^{i} B_k{}'(x) f^{(k)}(x)dx$$

i dobićemo tvrđenje Teoreme1, sabiranjem tih formula od $i=1$ do $i=n$.



Slika4. Bernulijevi polinomi

Iz procena (za $0 \le x \le 1$) $\quad |B_1(x)| \le \frac{1}{2} \qquad |B_2(x)| \le \frac{1}{6} \qquad |B_3(x)| \le \frac{\sqrt{3}}{36}$

$|B_4(x)| \le \frac{1}{30}$ koje je jednostavno proveriti i na osnovu činjenice da je :

$$\left|\int_0^n g(x)dx\right| \le \int_0^n |g(x)|\, dx \quad \text{očigledno je}$$

$$|R_1{}'| \le \frac{1}{2}\int_0^n |f'(x)|\, dx , \qquad |R_2{}'| \le \frac{1}{12}\int_0^n |f''(x)|\, dx$$

Ovo i jesu stroge procene ostatka u Ojler-Maklorenovoj formuli sabiranja koje smo zapravo i hteli da dobijemo.

Napomena: Ako formulu iz prethodne teoreme primenimo na funkciju $f(t) = hg(a+th)$, gde je $h = (b-a)/n$ i kada prebacimo $(f(n)+f(0))/2$ dobićemo: (uzevši za $x_i = a+ih$)

$$\frac{h}{2}g(x_0) + h\sum_{i=1}^{n-1} g(x_i) + \frac{h}{2}g(x_n) = \int_a^b g(x)dx + \sum_{j=2}^{k}\frac{h^j B_j}{j!}\left(g^{(j-1)}(b) - g^{(j-1)}(a)\right) +$$

$$+\frac{(-1)^{k-1}h^{k+1}}{k!}\int_0^n B_k{}'(t)g^{(k)}(a+th)dt$$

iz člana $\sum_{j=2}^{k}\frac{h^j B_j}{j!}\left(g^{(j-1)}(b) - g^{(j-1)}(a)\right)$ je očigledno da je glavni član greške

$$\frac{h^2}{12}(g'(b) - g'(a))$$

Istovremeno, ako je g periodična funkcija tada svi članovi u Ojler-Maklorenovom redu nestaju (iščezavaju) i tada je ostatak jednak sa $R_k{}'$ za proizvoljno k.

3.4. Stirlingova formula

U ovom delu, još jednom ćemo prikazati praktičnu primenu Ojler-Maklorenove sumacione formule (prevod, Э. Хайрер, Г. Ваннер – *Математический анализ в свете его истории* – Научный мир; II paragraf, 175-176 str.)

Zamenimo funkciju $f(x) = \ln x$ u Ojler-Maklorenovu formulu. Pošto je

$$\sum_{i=2}^{n} f(i) = \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ldots + \ln n = \ln n!$$

dobijamo približan izraz za faktorijel

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot n$$

Teorema2 : Validna formula

$$n! = \frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n}{e^n}\cdot \exp\left(\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \frac{1}{1680n^7} + R_9{}'\right),$$

gde je $|R_9'| \leq 0{,}0006605/\, n^8$, kada $n \to \infty$ daje aproksimaciju:

$$n! \approx \frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n}{e^n}$$

(Ova formula je od veoma velikog značaja za kombinatoriku, statistiku i teoriju verovatnoće.)

TABLICA: Faktorijel i njegova aproksimacija iz Stirlingove formule

$\boldsymbol{n = 10}$ Stirling 0 = 0,35986956187410359216231759328 3 · 10^7

Stirling 1 = 0,36288100514269335299411653167 5 · 10^7

Stirling 2 = 0,36287999714130129253859122394 1 · 10^7

Stirling 3 = 0,36288000002130128127907761286 2 · 10^7

$n!$ = 0,36288000000000000000000000000 0 · 10^7

$\boldsymbol{n = 100}$ Stirling 0 = 0,93248476252693432477647561271 8 · 10^{158}

Stirling 1 = 0,93326215703176234098961919514 6 · 10^{158}

Stirling 2 = 0,93326215443936746394638335662 4 · 10^{158}

Stirling 3 = 0,93326215443944153237133886491 8 · 10^{158}

$n!$ = 0,93326215443944152681699238856 3 · 10^{158}

Dokaz: Na osnovu do sada rečenog mogli smo zaključiti da Ojler-Maklorenova formula postaje neefektivna kada viši izvodi funkcije $f(x)$ na posmatranom intervalu postaju veći.

U tu svrhu iskoristićemo formulu $f(x) = \ln x$ za sumu od $i = n+1$ do $i = m$. Pošto je

$$\int \ln x dx = x \ln x - x, \qquad \frac{d^j}{dx^j}(\ln x) = \frac{(-1)^{j-1}(j-1)!}{x^j},$$

iz prethodne Teoreme1 dobijamo da je:

$$\sum_{i=n+1}^{m} f(i) = \ln m! - \ln n! = m \ln m - m - (n\ln n - n) + \frac{1}{2}(\ln m - \ln n) +$$

$$+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{360}\left(\frac{1}{m^3} - \frac{1}{n^3}\right) + R_5{}' \qquad \text{gde je} \quad |R_5{}'| \leq 0{,}00123/n^4$$

za sve $m > n$. Ova procena dobijena je na osnovu ranije dokazanih formula i činjenice da je $|B_5(x)| \leq 0{,}02446$ za $0 \leq x \leq 1$. U prethodnom izrazu svaki od članova $\ln n!$, $n\ln n$, n, $\frac{1}{2}\ln n$, po definiciji divergira kada $n \to \infty$. Ako sada sve te članove saberemo dobićemo:

$$\gamma_n = \ln n! + n - (n + \tfrac{1}{2})\ln n$$

pa se sada prethodni izraz može napisati u sledećem obliku:

$$\gamma_n = \gamma_m + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) - \frac{1}{360}\left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{m^3}\right) - R_5{}' \ .$$

Za dovoljno veliko n, m, γ_n, γ_m postaju proizvoljno blizu. Na osnovu toga možemo pretpostaviti da γ_m kada $m \to \infty$ konvergira ka broju koji ćemo označiti sa γ.

Dakle, kada $m \to \infty$ prethodna jednakost će sada izgledati ovako:

$$\ln n! + n - \left(n + \tfrac{1}{2}\right) \ln n = \gamma + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + R_5{}' \quad \text{gde je}$$

$$|R_5{}'| \leq 0{,}00123/n^4$$

Ako sada izračunamo eksponencijalnu funkciju ovog izraza imaćemo:

$$n! = D_n \frac{\sqrt{n} \cdot n^n}{e^n}, \quad \text{gde je}$$

$$D_n = e^{\gamma} \cdot \exp\left(\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + R_9{}'\right)$$

Ova jednakost će biti dokaz teoreme ako dokažemo da je granica D_n (tj. $D = e^{\gamma}$) jednaka $\sqrt{2\pi}$. U tu svrhu koristeći poslednji izraz imaćemo:

$$\frac{D_n \cdot D_n}{D_{2n}} = \frac{n! \cdot n! \cdot (2n)^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot \sqrt{2n}}{n^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot n \cdot (2n)!} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n-1)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \quad \text{koji takođe teži ka } D.$$

Zaista, ako sada izvršimo kvadriranje ovog izraza dobićemo:

$$\left(\frac{D_n \cdot D_n}{D_{2n}}\right)^2 = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8 \ldots 2n\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot \ldots (2n-1)(2n-1)} \cdot \frac{2(2n+1)}{n} \quad \text{pri čemu}$$

$$\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8 \ldots 2n\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot \ldots (2n-1)(2n-1)} \to \frac{\pi}{2} \quad \text{a} \quad \frac{2(2n+1)}{n} \to 4$$

pa imamo izraz čija desna strana teži ka 2π odakle jasno zaključujemo da je D=$\sqrt{2\pi}$.

Procena $R_9{}'$ koja je ovom prilikom nastala je logičan sled teoreme i nejednakosti

$$|B_9(x)| \leq 0{,}04756.$$

3.5. Primena Ojlerovog tvrđenja iz Teoreme1

Kroz primenu Ojlerovog tvrđenja iz Teoreme1 u sledećem primeru možemo jasno videti na koji način je Ojler došao do granice prilikom sabiranja divergentnih članova reda (prevod, Э. Хайрер, Г. Ваннер – *Математический анализ в свете его истории* – Научный мир; II paragraf, 177 str.)

Pokušajmo da izračunamo sumu reda :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} \quad \text{uzimajući za } f(x) = \frac{1}{x} \text{ u Teoremi1.}$$

Kako je $f^{(j)}(x) = (-1)^j j!\, x^{-j-1}$ imaćemo da je:

$$\sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{i} = \int_n^m \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{120}\left(\frac{1}{m^4} - \frac{1}{n^4}\right) - \frac{1}{252}\left(\frac{1}{m^6} - \frac{1}{n^6}\right) + \frac{1}{240}\left(\frac{1}{m^8} - \frac{1}{n^8}\right) + R_9{}'$$

pri čemu iz činjenice da je $|B_9(x)| \leq 0{,}04756$ imamo da je $\left|R_9{}'\right| \leq 0{,}00529/n^9$.

Dalje, sabiranjem divergentnih članova dobijamo:

$$\gamma_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln n$$

za šta možemo pokazati da konvergira i da pri tome dobijamo granicu:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \to \boldsymbol{\gamma = 0{,}57721566490153286\ldots}$$

Ova nova granica naziva se **"Ojlerova konstanta"**

Ako sada posmatramo m→ ∞ i gore navedeni izraz dobićemo:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}=\gamma+\ln n+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{120n^4}-\frac{1}{252n^6}+\frac{1}{240n^8}+R_9{}'$$

gde je $|R_9{}'|\leq\frac{0{,}00529}{n^9}$.

Da bi izračunali granicu γ uzećemo, na primer za $n=10$ u prethodnoj jednakosti (kao što je to radio Ojler) i dobićemo γ = 0,57721566490153286 . . .

Ovu granicu γ preciznije je izračunao D. Knut (1962.godine) ali do današnjeg dana je ostalo neizvesno da li je ona racionalan ili iracionalan broj.

3.6. Formiranje sume reda preko opšteg člana

U narednom tekstu imaćemo priliku da se upoznamo sa suštinskim načinom samog (izvornog) formiranja sume reda preko opšteg člana, formiranja Bernulijevih brojeva i njihovom konkretnom primenom prilikom traženja sume članova reda.
(prevod, Леонард Эйлер– *Дифференциальное исчисление* V paragraf, 281-302 str.)

Neka je opšti član nekog reda y koji možemo predstaviti kao neku funkciju od x. Neka je dalje Sy suma koja predstavlja rezultat sabiranja svih članova od prvog ili bilo kog fiksnog člana do y. Računaćemo sumu redova od prvog člana tako da, ako je x = 1, tada je y prvi član i Sy takođe predstavlja taj prvi član. Ako uzmemo da je x = 0, tada će se i opšti član pretvoriti u nulu tako da nećemo imati članove za sabiranje.Na taj način, suma Sy će biti takva funkcija od x koja nestaje kada je x = 0.

Ako se opšti član y sastoji iz nekoliko delova koje možemo predstaviti kao $y = p + q + r + . . .$ tada i sam red možemo posmatrati kao zbir nekoliko drugih redova čiji su opšti članovi p, q, r . . . Prema tome, ako je poznata suma tih pojedinačnih redova tada se istovremeno može odrediti suma početnog reda kao rezultat sabiranja svih tih pojedinačnih suma.

Dakle, ako je $y = p + q + r + . . .$ tada je $Sy = Sp + Sq + Sr + \ldots$ Kako smo ranije odredili sume redova čiji su opšti članovi izraženi kao stepen x sa pozitivnim celim eksponentom, moguće je naći opšti član svakog reda pa imamo $ax^{\alpha} + bx^{\beta} + +cx^{\gamma} + . . .$ gde su α,β,γ, . . . celi pozitivni brojevi tj. dobili smo opšti član reda kao racionalnu funkciju od x.

Neka je u redu čiji opšti član odgovara indeksu x jednak y a prethodni član koji odgovara indeksu $x - 1$ jednak ν. Ukoliko ν dobijamo iz y ako umesto x uzmemo $x - 1$ imaćemo:

$$\nu = y - \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{2dx^2} - \frac{d^3y}{6dx^3} + \frac{d^4y}{24dx^4} - \ldots$$

Ako y predstavlja opšti član reda

$$\begin{array}{l} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \ldots x - 1 \quad x \\ a + b + c + d \ldots \nu + y \end{array}$$

i član ovog reda koji odgovara indeksu 0 bude jednak A tada ν, ukoliko je izraženo kao funkcija od x predstavlja opšti član reda

$$\begin{array}{l} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \ldots x \\ A + a + b + c + d + \ldots + \nu \end{array}$$

Prema tome, ako je $S\nu$ suma ovog reda tada je $S\nu = Sy - y + A$. Na taj način kada je $x = 0$ imamo da je $Sy = 0$ i $y = A$ pri čemu i $S\nu$ nestaje tj. $S\nu = 0$

Kako je $\nu = y - \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{2dx^2} - \frac{d^3y}{6dx^3} + \frac{d^4y}{24dx^4} - \ldots$ to je prema pokazanom

$$S\nu = Sy - S\frac{dy}{dx} + S\frac{d^2y}{2dx^2} - S\frac{d^3y}{6dx^3} + S\frac{d^4y}{24dx^4} - \ldots$$ a iz izraza

$$S\nu = Sy - y + A$$

imamo $y - A = S\frac{dy}{dx} + S\frac{d^2y}{2dx^2} - S\frac{d^3y}{6dx^3} + S\frac{d^4y}{24dx^4} - \ldots$

Na taj način dobijamo

$$S\,\frac{dy}{dx} = y - A + S\,\frac{d^2y}{2dx^2} - S\,\frac{d^3y}{6dx^3} + S\,\frac{d^4y}{24dx^4} - \ldots$$

Tada ako su poznate sume redova čiji su opšti članovi $\frac{d^2y}{dx^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3}$; $\frac{d^4y}{dx^4}$ . . . možemo naći sumu reda čiji je opšti član $\frac{dy}{dx}$. Konstanta *A* treba da se odredi tako da pri $x = 0$ suma $S\,\frac{dy}{dx}$ nestaje što je lakše nego da kažemo da je član koji odgovara indeksu 0 u redu čiji je opšti član jednak y.

Sada imamo mogućnost da odredimo sumu stepena prirodnih brojeva.

U tu svrhu neka je $y = x^{n+1}$ i kako je

$$\frac{dy}{dx} = (n+1)x^n; \qquad \frac{d^2y}{2dx^2} = \frac{(n+1)n}{1\cdot 2}\,x^{n-1};$$

$$\frac{d^3y}{6dx^3} = \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\,x^{n-2}\ ; \quad \frac{d^4y}{24dx^4} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,x^{n-3} \quad \ldots$$

pa korišćenjem ovih izraza dobijamo:

$$(n+1)\,Sx^n = x^{n+1} - A + \frac{(n+1)n}{1\cdot 2}\,Sx^{n-1} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\,Sx^{n-2} + \ldots$$

ako obe strane jednakosti podelimo sa $n + 1$ dobijamo

$$Sx^n = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + \frac{n}{2}\,Sx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2\cdot 3}\,Sx^{n-2} + \ldots - \text{const.}$$

Konstanta mora biti određena tako da pri $x = 0$ opšti član nestane. Na taj način, pomoću ove formule iz već poznatih suma nižih stepena čiji su opšti članovi izraženi preko x^{n-1}, x^{n-2}. . . možemo naći sumu viših stepena koji su izraženi opštim članom x^n.

Ako je u ovom izrazu n ceo pozitivan broj tada će i broj članova biti konačan. Na taj način, suma nižih stepena će biti poznata u potpunosti. Zaista, ako je $n = 0$ imamo da je $Sx^0 = x$. Ako uzmemo za $n = 1$ imaćemo

$Sx^1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}Sx^0 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$; ako sada uzmemo za n = 2 dobićemo

$Sx^2 = \frac{1}{3}x^3 + S\,x - \frac{1}{3}Sx^0 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$; ako nastavimo imaćemo

$Sx^3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}\,Sx^2 - S\,x + \frac{1}{4}Sx^0 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$;

$Sx^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{2}\,Sx^3 - \frac{4}{2}\,Sx^2 + Sx - \frac{1}{5}Sx^0$; ili

$Sx^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$

Iz čega sa sigurnošću možemo zaključiti da će se i dalje sume viših stepena sastojati od suma nižih stepena. To možemo lakše objasniti na sledeći način:

Posmatrajmo izraz:

$$S\,\frac{dy}{dx} = y + \frac{1}{2}S\,\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{6}S\,\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{1}{24}S\,\frac{d^4y}{dx^4} - \ldots$$

i ako uzmemo da je $\frac{dy}{dx} = z$ tada ćemo imati da je $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2z}{dx^2}$; ...

Pošto je $dy = zdx$ možemo reći da ćemo vrednost y dobiti iz diferencijala koji je jednak zdx što je moguće napisati kao $y = \int zdx$.

Iako nalaženje vrednosti y za poznato z traži primenu integralnog računa istovremeno se možemo koristiti formulom $\int zdx$ osim ako ne budemo koristili umesto z neke druge funkcije od x, za koje bi njihov diferencijal bio jednak zdx. Na osnovu toga imamo:

$$Sz = \int zdx + \frac{1}{2}\,S\,\frac{dz}{dx} - \frac{1}{6}\,S\,\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{24}\,S\,\frac{d^3z}{dx^3} - \ldots$$

pri čemu je neophodno postaviti takav uslov da za $x = 0$ suma Sz teži nuli.

Ako diferenciramo prethodni izraz dobićemo:

$$S\,\frac{dz}{dx} = z + \frac{1}{2}\,S\,\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{6}S\,\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{24}\,S\,\frac{d^4z}{dx^4}\ldots$$

i ako umesto y uzmemo $\frac{dz}{dx}$ tada ćemo imati:

$$S\,\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dz}{dx} + \frac{1}{2}S\,\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{1}{6}S\,\frac{d^4z}{dx^4} + \frac{1}{24}S\,\frac{d^5z}{dx^5} - \,.\,.\,.$$ na sličan način, ako

umesto y sukcesivno zamenimo $\frac{d^2z}{dx^2}$ i $\frac{d^3z}{dx^3}$ . . . nalazimo da je

$$S\,\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{2}S\,\frac{d^4z}{dx^4} - \frac{1}{6}S\,\frac{d^5z}{dx^5} + \frac{1}{24}S\,\frac{d^6z}{dx^6} - \,.\,.\,.$$

$$S\,\frac{d^4z}{dx^4} = \frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{2}S\,\frac{d^5z}{dx^5} - \frac{1}{6}S\,\frac{d^6z}{dx^6} + \frac{1}{24}S\,\frac{d^7z}{dx^7} - \,.\,.\,.$$

.
.
.

i tako dalje do beskonačnosti.

Ako sada vrednosti $S\,\frac{dz}{dx};\ S\,\frac{d^2z}{dx^2};\ S\,\frac{d^3z}{dx^3}$ ... sukcesivno zamenimo u izraz

$$Sz = \int zdx + \frac{1}{2}S\,\frac{dz}{dx} - \frac{1}{6}S\,\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{24}\,S\,\frac{d^3z}{dx^3} - \,.\,.\,.$$

dobijamo za Sz izraz koji se sastoji od članova $\int zdx;\ \ z;\ \ \frac{dz}{dx};\ \ \frac{d^2z}{dx^2};\ \ \frac{d^3z}{dx^3}\ \ .\,.\,.$ čije je koeficijente lako naći na sledeći način.

Neka je

$$Sz = \int zdx + \alpha z + \beta\frac{dz}{dx} - \gamma\frac{d^2z}{dx^2} + \delta\frac{d^3z}{dx^3} - \,.\,.\,.$$

umesto tih članova uzmimo izraze koje smo dobili iz prethodnih redova i iz kojih možemo zaključiti sledeće:

$$\int zdx = Sz - \frac{1}{2}S\frac{dz}{dx} + \frac{1}{6}S\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{24}S\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{120}S\frac{d^4z}{dx^4} - \ldots$$

$$\alpha z = \quad + \alpha S\frac{dz}{dx} - \frac{\alpha}{2}S\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{\alpha}{6}S\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{\alpha}{24}S\frac{d^4z}{dx^4} - \ldots$$

$$\beta\frac{dz}{dx} = \quad \beta S\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{\beta}{2}S\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{\beta}{6}S\frac{d^4z}{dx^4} - \ldots$$

$$\gamma\frac{d^2z}{dx^2} = \quad \gamma S\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{\gamma}{2}S\frac{d^4z}{dx^4} + \ldots$$

$$\delta\frac{d^3z}{dx^3} = \quad \delta S\frac{d^4z}{dx^4} - \ldots$$

$$\vdots$$

su složene vrednosti pomoću kojih ćemo formirati Sz. Tada koeficijente $\alpha,\beta,\gamma,\delta\ldots$ određujemo iz sledećih jednakosti:

$$\alpha - \frac{1}{2} = 0\,; \qquad \beta - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{6} = 0\,; \qquad \gamma - \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{6} - \frac{1}{24} = 0\,;$$

$$\delta - \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{6} - \frac{\alpha}{24} + \frac{1}{120} = 0\,; \qquad \varepsilon - \frac{\delta}{2} + \frac{\gamma}{6} - \frac{\beta}{24} + \frac{\alpha}{120} - \frac{1}{720} = 0\,;$$

$$\zeta - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\delta}{6} - \frac{\gamma}{24} + \frac{\beta}{120} - \frac{\alpha}{720} + \frac{1}{5040} = 0 \quad \ldots$$

Kada iz ovih jednakosti izrazimo $\alpha,\beta,\gamma,\delta\ldots$ dobijamo da je:

$$\alpha = \frac{1}{2}\,; \qquad \beta = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}\,; \qquad \gamma = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{24} = 0\,;$$

$$\delta = \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{6} + \frac{\alpha}{24} - \frac{1}{120} = -\frac{1}{720}\,; \quad \varepsilon = \frac{\delta}{2} - \frac{\gamma}{6} + \frac{\beta}{24} - \frac{\alpha}{120} + \frac{1}{720} = 0\ldots$$

nastavljajući sa formiranjem ovih izraza dalje dobijamo da oni naizmenično nestaju tj. imaju vrednost 0.

Naime, članovi koji se nalaze na trećem, petom, sedmom **. . .** mestu imaju vrednost 0. Ali, kako je prvi član izuzet iz ovoga to red dolazi u suprotnost sa zakonima neprekidnosti. S tim u vezi posebno je potrebno dokazati da svi neparni članovi osim prvog neophodno nestaju tj. imaju vrednost 0.

Kako su pojedinačni članovi određeni na osnovu ranije dokazanih zakona možemo reći da oni obrazuju rekurentni red. Da bi ga predstavili posmatrajmo red:

$$1 + \alpha\, u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \zeta u^6 + \ldots$$

i neka je njegova vrednost jednaka sa ν, tada je očigledno da pomenuti rekurentni red proizilazi iz dela razlomka:

$$V = \frac{1}{1-\frac{1}{2}u + \frac{1}{6}u^2 - \frac{1}{24}u^3 + \frac{1}{120}u^4 \ldots}$$

i ako je moguće ovaj razlomak na drugi način razložiti u red,koji se formira sa stepenima po u tada neophodno dobijamo baš red:

$$V = 1 + \alpha\, u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \zeta u^6 + \ldots$$

Na ovaj način će biti pronađen drugi zakon na osnovu koga se mogu odrediti vrednosti $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$

Neka je broj e takav da je njegov hiperbolički logaritam jednak jedinici tada imamo:

$$e^{-u} = 1 - u + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{24}u^4 - \frac{1}{120}u^5 + \ldots$$

Dalje dobijamo da je :

$$\frac{1-e^{-u}}{u} = 1 - \frac{1}{2}\, u + \frac{1}{6}u^2 - \frac{1}{24}u^3 + \frac{1}{120}u^4 - \frac{1}{720}u^5 + \ldots$$

a ako uzmemo da je $V = \frac{u}{1-e^{-u}}$ i zamenimo drugi član u redu $\alpha u = \frac{1}{2}u$

tada dobijamo:

$$V - \frac{1}{2}u = 1 + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \zeta u^6 + \ldots$$

Dakle, imaćemo da je:

$$V - \frac{1}{2}u = \frac{\frac{1}{2}u\,(1+e^{-u})}{1-e^{-u}}$$

pa ako pomnožimo brojilac i imenilac sa $e^{\frac{1}{2}u}$ dobićemo da je:

$$V - \frac{1}{2}u = \frac{u\,(e^{\frac{1}{2}u} + e^{-\frac{1}{2}u})}{u\,(e^{\frac{1}{2}u} - e^{-\frac{1}{2}u})}$$

Daljim razlaganjem $e^{\frac{1}{2}u}$ i $e^{-\frac{1}{2}u}$ u redove dobijamo

$$V - \frac{1}{2}u = \frac{1 + \frac{u^2}{2\cdot 4} + \frac{u^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \frac{u^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} + \dots}{2(\frac{1}{2} + \frac{u^2}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{u^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} + \frac{u^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14} + \cdots)}, \text{ odnosno}$$

$$V - \frac{1}{2}u = \frac{1 + \frac{u^2}{2\cdot 4} + \frac{u^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \frac{u^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} + \dots}{1 + \frac{u^2}{4\cdot 6} + \frac{u^4}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} + \frac{u^6}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14} + \cdots}$$

Kako u ovom razlomku uopšte nemamo neparne stepene, tako se ni u njegovom razloženom obliku ne nalaze parni stepeni. Prema tome, kako je

$$V - \frac{1}{2}u = 1 + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \zeta u^6 + \dots$$

imamo da koeficijenti neparnih stepena γ, ε, ζ . . . teže nuli tj. nestaju. Na taj način, možemo konstatovati činjenicu, pošto u redu

$$1 + \alpha\, u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \zeta u^6 + \dots$$

članovi koji imaju parna mesta teže nuli, osim drugog, imamo očuvan zakon neprekidnosti. Prema tome ako imamo da je

$$u = 1 + \frac{1}{2}u + \beta u^2 + \delta u^4 + \zeta u^6 + \theta u^8 + \dots$$

i ako su vrednosti $\beta,\delta,\zeta,\theta$ . . . određene na osnovu prethodno razloženih razlomaka, dobijamo zbirni član Sz reda čiji opšti član odgovara indeksu x, jednak z u obliku

$$Sz = \int z dx + \frac{1}{2}z + \beta\frac{dz}{dx} + \delta\frac{d^3z}{dx^3} + \zeta\frac{d^5z}{dx^5} + \dots$$

Kako red $1 + \beta u^2 + \delta u^4 + \zeta u^6 + \theta u^8 \dots$ proizilazi iz razvijanja razlomaka

$$\frac{1 + \frac{u^2}{2\cdot 4} + \frac{u^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \frac{u^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} + \dots}{1 + \frac{u^2}{4\cdot 6} + \frac{u^4}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} + \frac{u^6}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14} + \cdots}$$

imamo da vrednosti $\beta,\delta,\zeta,\theta$ . . . podležu sledećim zakonima:

$$\beta = \frac{1}{2\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 6}\,;$$

$$\delta = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} - \frac{\beta}{4\cdot 6} - \frac{1}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\,;$$

$$\zeta = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} - \frac{\delta}{4\cdot 6} - \frac{\beta}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} - \frac{1}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14}\,;$$

$$\theta = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\ldots\cdot 16} - \frac{\zeta}{4\cdot 6} - \frac{\delta}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} - \frac{\beta}{4\cdot 6\cdot 8\ldots\cdot 14} - \frac{1}{4\cdot 6\cdot 8\cdot\ldots\cdot 18}\,;$$

.
.
.

pri čemu primećujemo da su te vrednosti naizmenično pozitivne i negativne.

Ako za te vrednosti, proizvoljno, odredimo negativne vrednosti, tada se u izrazu

$$Sz = \int z dx + \frac{1}{2} z + \beta\frac{dz}{dx} + \delta\frac{d^3 z}{dx^3} + \zeta\frac{d^5 z}{dx^5} + \ldots$$

vrednosti $\beta,\delta,\zeta,\theta \ldots$ određuju iz razlomka

$$\frac{1 + \frac{u^2}{2\cdot 4} + \frac{u^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \frac{u^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} + \cdots}{1 + \frac{u^2}{4\cdot 6} + \frac{u^4}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} + \frac{u^6}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14} + \cdots}$$

kada ih razložimo u red $1 + \beta u^2 + \delta u^4 + \zeta u^6 + \theta u^8 \ldots$
Na osnovu toga ćemo imati:

$$\beta = \frac{1}{4\cdot 6} - \frac{1}{2\cdot 4};$$

$$\delta = \frac{\beta}{4\cdot 6} - \frac{1}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}$$

$$\zeta = \frac{\delta}{4\cdot 6} - \frac{\beta}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} + \frac{1}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14} - \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}\;;$$

i sada će svi članovi biti pozitivni.

Neka je $\beta = -A;\quad \delta = -B;\quad \zeta = -C\,; \ldots$ tako da je

$$Sz = \int z dx + \frac{1}{2} z + A\frac{dz}{dx} - B\frac{d^3 z}{dx^3} + C\frac{d^5 z}{dx^5} - \ldots$$

a za određivanje vrednosti slova *A,B,C,D* **. . .** posmatramo red

$$1 - Au^2 - Bu^4 - Cu^6 - Du^8 - \ldots$$

koji proizilazi iz razlomka

$$\frac{1 - \frac{u^2}{2\cdot 4} + \frac{u^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} - \frac{u^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} + \ldots}{1 - \frac{u^2}{4\cdot 6} + \frac{u^4}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} - \frac{u^6}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14} + \ldots}$$

ili možemo posmatrati red:

$$\frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - Eu^9 \ldots = S$$

koji proizilazi iz razlomka

$$S = \frac{1 - \frac{u^2}{2\cdot 4} + \frac{u^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} - \frac{u^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} + \ldots}{u - \frac{u^3}{4\cdot 6} + \frac{u^5}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} - \frac{u^7}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14} + \ldots} \qquad \text{a kako je}$$

$$cos\frac{1}{2}u = 1 - \frac{u^2}{2\cdot 4} + \frac{u^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} - \frac{u^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} + \ldots$$

$$sin\frac{1}{2}u = \frac{u}{2} - \frac{u^3}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{u^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} - \frac{u^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14} + \ldots$$

dobijamo da je

$$S = \frac{cos\,\frac{1}{2}u}{2sin\frac{1}{2}u} = \frac{1}{2}\,ctg\frac{1}{2}u$$

Prema tome, ako kotangens ugla $\frac{1}{2}u$ možemo razložiti u red po stepenima od u tada je iz tog reda moguće naći vrednosti za $A, B, C, D, E \ldots$

Kako je

$$S = \frac{1}{2}\,ctg\frac{1}{2}u \text{ imamo da je } \frac{1}{2}u = arc\ tg\ 2s$$

pa diferenciranjem dobijamo

$$\frac{1}{2}du = \frac{-2ds}{1+4s^2} \quad \text{ili} \quad 4ds + du + 4s^2du = 0 \quad \text{ili} \quad 4\frac{ds}{du} + 1 + 4s^2 = 0$$

Takođe, iz jednakosti

$$S = \frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - Eu^9 \ldots \text{ imamo da je}$$

$$4\frac{ds}{du} = -\frac{1}{u^2} - 4A - 3 \cdot 4Bu^2 - 5 \cdot 4\, Cu^4 - \ \ldots$$

$$4S^2 = \frac{4}{u^2} - 8A - 8Bu^2 - 8\, Cu^4 - 8\, Du^6 - \ldots$$

$$+\, 4A^2u^2 + 8\, ABu^4 + 8\, ACu^6 + \ldots$$

$$+\, 4\, B^2u^6 + \ldots$$

izjednačavanjem sa nulom sume istorodnih članova imaćemo:

$$A = \frac{1}{12}; \quad B = \frac{A^2}{5}; \quad C = \frac{2AB}{7}; \quad D = \frac{2AC+B^2}{9}; \quad E = \frac{2AD+2BC}{11};$$

$$F = \frac{2AE+2BD+C^2}{13}; \quad G = \frac{2AF+2BE+2CD}{15}; \ \ldots$$

a iz ovih formula je jasno da je njihova vrednost pozitivna.

Kako su imenioci ovih razlomaka veoma veliki što je i ozbiljna smetnja pri njihovom izračunavanju možemo umesto slova *A,B,C,D*... da uvedemo nove oznake:

$$A = \frac{\alpha}{1\cdot2\cdot3}; \quad B = \frac{\beta}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}; \quad C = \frac{\gamma}{1\cdot2\cdot\ldots7}; \quad D = \frac{\delta}{1\cdot2\cdot\ldots9}; \quad E = \frac{\varepsilon}{1\cdot2\cdot\ldots11}; \ \ldots$$

tada dobijamo da je:

$$\alpha = \frac{1}{2}; \quad \beta = \frac{2}{3}\alpha^2; \quad \gamma = 2\cdot\frac{3}{3}\alpha\beta; \quad \delta = 2\cdot\frac{4}{3}\alpha\gamma + \frac{8}{4}\cdot\frac{7}{5}\beta^2;$$

$$\varepsilon = 2\cdot\frac{5}{3}\alpha\delta + 2\cdot\frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot\ldots5}\beta\gamma; \quad \zeta = 2\cdot\frac{12}{1\cdot2\cdot3}\alpha\varepsilon + 2\cdot\frac{12\cdot11\cdot10}{1\cdot2\cdot\ldots5}\beta\delta + \frac{12\cdot11\cdot\ldots8}{1\cdot2\cdot\ldots7}\gamma^2;$$

$$\eta = 2\cdot\frac{14}{1\cdot2\cdot3}\alpha\zeta + 2\cdot\frac{14\cdot13\cdot12}{1\cdot2\cdot\ldots5}\beta\varepsilon + 2\cdot\frac{14\cdot13\cdot\ldots10}{1\cdot2\cdot\ldots7}\gamma\delta; \ \ldots$$

Jednostavnije će biti da koristimo formule:

$$\alpha = \frac{1}{2}; \quad \beta = \frac{4}{3}\,\frac{\alpha^2}{2}; \quad \gamma = \frac{6}{3}\alpha\beta; \quad \delta = \frac{8}{3}\alpha\gamma + \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot4\cdot5}\,\frac{\beta^2}{2};$$

$$\varepsilon = \frac{10}{3}\alpha\delta + \frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot4\cdot5}\beta\gamma; \quad \zeta = \frac{12}{3}\alpha\varepsilon + \frac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot4\cdot5}\beta\delta + \frac{12\cdot11\cdot\ldots8}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}\,\frac{\gamma^2}{2};$$

$$\eta = \frac{14}{3}\alpha\zeta + \frac{14\cdot 13\cdot 12}{3\cdot 4\cdot 5}\beta\varepsilon + \frac{14\cdot 13\cdot\ldots 10}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\gamma\delta;$$

$$\theta = \frac{16}{3}\alpha\eta + \frac{16\cdot 15\cdot 14}{3\cdot 4\cdot 5}\beta\zeta + \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\gamma\varepsilon + \frac{16\cdot 15\cdot\ldots 10}{3\cdot 4\cdot\ldots 9}\frac{\delta^2}{2}; \ldots$$

Shodno ovom zakonu izračunavanje se vrši bez teškoća, a kada su nađene vrednosti $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon \ldots$ zbirni član bilo kog reda čiji opšti član odgovara indeksu x i jednak je sa z možemo izraziti na sledeći način:

$$Sz = \int z dx + \frac{1}{2}z + \frac{\alpha dz}{1\cdot 2\cdot 3dx} - \frac{\beta d^3z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5dx^3} + \frac{\gamma d^5z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7dx^5} - \frac{\delta d^7z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots 9dx^7} +$$

$$+ \frac{\varepsilon d^9z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots 11dx^9} - \frac{\zeta d^{11}z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots 11dx^{11}} + \ldots$$

Vrednosti $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon \ldots$ koje smo našli imaju sledeća značenja:

$\alpha = \frac{1}{2}$ ili $1\cdot 2\alpha = 1$

$\beta = \frac{1}{6}$ $1\cdot 2\cdot 3\beta = 1$

$\gamma = \frac{1}{6}$ $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\gamma = 4$

$\delta = \frac{3}{10}$ $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\delta = 36$

$\varepsilon = \frac{5}{6}$ $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\varepsilon = 600$

$\zeta = \frac{691}{210}$ $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots 7\zeta = 24\cdot 691$

$\eta = \frac{35}{2}$ $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots 8\eta = 20160\cdot 35$

$\theta = \frac{3617}{30}$ $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots 9\theta = 12006\cdot 3617$

$\iota = \frac{43867}{42}$ $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots 10\iota = 86400\cdot 43867$

$\kappa = \frac{1\,222\,277}{110}$ $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots 11\kappa = 362880\cdot 1\,222\,277$

$\lambda = \frac{854\,513}{6}$ $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots 12\lambda = 79\,833\,600\cdot 854\,513$

$\mu = \frac{1\,181\,820\,455}{546}$ $\quad 1\cdot2\cdot3\cdot...13\mu = 11\,404\,800\cdot1\,181\,820\,455$

$\nu = \frac{76\,977\,927}{2}$ $\quad 1\cdot2\cdot...14\nu = 43\,589\,145\,600\cdot76\,977\,927$

a u prvom izdanju je bilo $\quad 1\cdot2\cdot...14\nu = 109\,109\,145\,600\cdot7697\,792$

$\varepsilon = \frac{23749461029}{30}$ $\quad 1\cdot2\cdot...15\varepsilon = 43589145600\cdot23749461029$

$\pi = \frac{8615841276005}{402}$ $\quad 1\cdot2\cdot...16\pi = 45287424000\cdot8615841276005$

.
.
.

Ovi brojevi imaju veoma široku primenu u svim učenjima o redovima. U suštini, kao najvažnije, iz tih brojeva je moguće obrazovati poslednje članove u sumama parnih stepena, koji se kako smo ranije primetili, ne smeju naći iz prethodnih suma kao ostali članovi. U sumama parnih stepena poslednji članovi sadrže proizvod x i nekih brojeva.

Ti brojevi za stepene II, IV, VI, VIII . . . reda su $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{1}{42}$; $\frac{1}{30}$ . . . sa naizmeničnim znacima + i $-$. Oni se formiraju tako što se ranije definisane vrednosti za α,β,γ,δ,ε ... pridruže redom neparnim brojevima 3,5,7,9. . . i nazivaju se **Bernulijevim brojevima** po Jakovu Bernuliju koji ih je otkrio.

On je te brojeve izrazio kroz *A,B,C,D* . . . kao koeficijente u traženom redu i izrazio preko njih sumu stepena pripodnih brojeva:

$$Sn^c = 1^c + 2^c + ... + n^c =$$

$$= \frac{n^c+1}{c+1} + \frac{n^c}{2} + \frac{c}{2}An^{c-1} + \frac{c(c-1)(c-2)}{2\cdot3\cdot4}Bn^{c-3} +$$

$$+ \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}Cn^{c-5}$$

$\mathfrak{Bernulijevi\ brojevi}$:

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{1}{6} = \mathfrak{A}$$

$$\frac{\beta}{5} = \frac{1}{30} = \mathfrak{B}$$

$$\frac{\gamma}{7} = \frac{1}{42} = \mathfrak{C}$$

$$\frac{\delta}{9} = \frac{1}{30} = \mathfrak{D}$$

$$\frac{\varepsilon}{11} = \frac{5}{66} = \mathfrak{E}$$

$$\frac{\zeta}{13} = \frac{691}{2730} = \mathfrak{F}$$

$$\frac{\eta}{15} = \frac{7}{6} = \mathfrak{G}$$

$$\frac{\theta}{17} = \frac{3617}{510} = \mathfrak{H}$$

$$\frac{\iota}{19} = \frac{43867}{796} = \mathfrak{I}$$

$$\frac{\kappa}{21} = \frac{174611}{330} = \mathfrak{K} = \frac{283\cdot617}{330}$$

$$\frac{\lambda}{23} = \frac{854\,513}{138} = \mathfrak{L} = \frac{11\cdot131\cdot593}{2\cdot3\cdot23}$$

$$\frac{\mu}{25} = \frac{236\,364\,001}{2730} = \mathfrak{M}$$

$$\frac{\nu}{27} = \frac{8\,553\,103}{6} = \mathfrak{N} = \frac{13\cdot657931}{6}$$

$$\frac{\varepsilon}{29} = \frac{23749461029}{870} = \mathfrak{O}$$

$$\frac{\pi}{31} = \frac{8615841276005}{14322} = \mathfrak{P}$$

Ove Bernulijeve brojeve možemo dobiti i iz sledećih jednakosti:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{6}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{4\cdot3}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{5}\,\mathfrak{A}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{6\cdot5}{1\cdot2}\cdot\frac{2}{7}\,\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{8\cdot7}{1\cdot2}\cdot\frac{2}{9}\,\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{C} + \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot\frac{1}{9}\mathfrak{B}^2$$

$$\mathfrak{E} = \frac{10\cdot9}{1\cdot2}\cdot\frac{2}{11}\,\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{D} + \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot\frac{2}{11}\,\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}$$

$$\mathfrak{F} = \frac{12\cdot11}{1\cdot2}\cdot\frac{2}{13}\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{E} + \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot\frac{2}{13}\,\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{D} + \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot\frac{1}{13}\,\mathfrak{C}^2$$

$$\mathfrak{G} = \frac{14\cdot13}{1\cdot2}\cdot\frac{2}{15}\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{F} + \frac{14\cdot13\cdot12\cdot11}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot\frac{2}{15}\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{E} + \frac{14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot\frac{1}{15}\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{D}$$

pri čemu možemo zaključiti da je način formiranja ovih brojeva očigledan sam po sebi a takođe je neophodno primetiti da tamo gde imamo kvadrat nekog broja, koeficijent je duplo manji, tako da on zapravo treba da bude opšte pravilo. U stvari članovi koji sadrže proizvod različitih slova su neophodni da se pojavljuju dva puta, na primer:

$$13\mathfrak{F}=\frac{12\cdot 11}{1\cdot 2}\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{E}+\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{D}+\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\mathfrak{C}^2+$$

$$+\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\ldots 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots 8}\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{B}+\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\ldots 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots 10}\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{A}$$

Ova izvanredna formula data je u Bernulijevom delu „Ars conjectandi“(„Veština nagađanja“ tj. teorija verovatnoće) koja je objavljena posle njegove smrti 1713 godine, a koja je nastala oko 1685 godine – Formule(1) koje predstavljaju uvod u osnovne formule za Sn^c gde je c = 1,2,3,...10. One imaju isti oblik kao formule § 62 č.1 „ Diferencijalnog računa“ Ojlera. Dokaze opšte formule (1) Bernuli nije dao. Moguće je pomisliti da se putem sravnjivanja koeficijenata odgovarajućih članova osnovnih Bernulijevih formula kvari multiplikovani zakon obrazovanja trećeg, četvrtog...koeficijenta kako je to radio Ojler u § 63 č.1.Dokaze formule (1) u razvijenom obliku prvi je dao Ojler u pomenutoj knjizi §132 č.2. Kako je formula sume koja dolazi od Ojlera bila objavljena u „Publikacijama peterzburške Akademije“ oko 1733/34 godine (a za koje je dokaz dat malo kasnije- takođe u „Publikacijama“) nesumljivo govori da je početkom tridesetih godina tog veka Ojler imao dokaze za formule (1).

Posmatrajmo sledeći red:

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\ldots \text{ gde je } n \text{ paran pozitivan broj.}$$

Ove sume možemo prikazati preko stepena polukruga π kruga radijusa 1 i možemo uočiti da u sastav koeficijenata tih stepena ulaze brojevi α,β,γ,δ,ε ... Da bi potvrdili da ovo nije slučajnost, neophodno je da te sume odredimo na poseban način zahvaljujući kojem će biti lako otkriti zakon određivanja tih suma.

Posmatrajmo:

$$\frac{\pi}{n}ctg\frac{m}{n}\pi=\frac{1}{m}-\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\frac{1}{3n-m}+\ldots$$

I sjedinjujući članove u paru dobijamo:

$$\frac{\pi}{n}ctg\frac{m}{n}\pi=\frac{1}{m}-\frac{2m}{n^2-m^2}-\frac{2m}{4n^2-m^2}-\frac{2m}{9n^2-m^2}-\frac{2m}{16n^2-m^2}-\ldots$$

odakle zaključujemo da je:

$$\frac{1}{n^2-m^2}+\frac{1}{4n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}+\frac{1}{16n^2-m^2}+\ldots=\frac{1}{2m^3}-\frac{\pi}{2mn}\,ctg\,\frac{m}{n}\,\pi$$

Ako sada uzmemo da je $n = 1$ a za m uzmemo u dobićemo:

$$\frac{1}{1-u^2}+\frac{1}{4-u^2}+\frac{1}{9-u^2}+\frac{1}{16-u^2}+\ldots=\frac{1}{2u^2}-\frac{\pi}{2u}\,ctg\,\pi\,u$$

Svaki od ovih razlomaka možemo razložiti u red:

$$\frac{1}{1-u^2}=1+u^2+u^4+u^6+u^8+\ldots$$

$$\frac{1}{4-u^2}=\frac{1}{2^2}+\frac{u^2}{2^4}+\frac{u^4}{2^6}+\frac{u^6}{2^8}+\frac{u^8}{2^{10}}+\ldots$$

$$\frac{1}{9-u^2}=\frac{1}{3^2}+\frac{u^2}{3^4}+\frac{u^4}{3^6}+\frac{u^6}{3^8}+\frac{u^8}{3^{10}}+\ldots$$

$$\frac{1}{16-u^2}=\frac{1}{4^2}+\frac{u^2}{4^4}+\frac{u^4}{4^6}+\frac{u^6}{4^8}+\frac{u^8}{4^{10}}+\ldots$$

.
.
.

Ako uzmemo da je :

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=a \qquad 1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\ldots=d$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots=b \qquad 1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\ldots=e$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\ldots=c \qquad 1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\ldots=f$$

.
.
.

Tada ranije pomenuti red možemo napisati kao:

$$a+bu^2+cu^4+du^6+eu^8+fu^{10}+\ldots..=\frac{1}{2u^2}+\frac{\pi}{2u}\,ctg\,\pi\,u$$

Takođe, kako smo ranije konstatovali brojevi koje smo označili sa *A,B,C,D* **. . .** imaju takva svojstva da ako uzmemo da je

$$S = \frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - Eu^9 - \ldots \text{ tada je } \quad S = \frac{1}{2}\, ctg\, \frac{1}{2} u$$

Prema tome, ako zamenimo πu umesto $\frac{1}{2}u$ ili $2\pi u$ umesto u dobijamo:

$$\frac{1}{2}\, ctg\, \pi u = \frac{1}{2\pi u} - 2A\pi u - 2^3 B\pi^3 u^3 - 2^5 C\pi^5 u^5 - \ldots$$

pa ako sada ovaj izraz pomnožimo sa $\frac{\pi}{n}$ dobićemo:

$$\frac{\pi}{2u}\, ctg\, \pi u = \frac{1}{2u^2} - 2A\pi^2 - 2^3 B\pi^4 u^2 - 2^5 C\pi^6 u^4 - 2^7 D\pi^8 u^6 - \ldots$$

a odatle dalje sledi da je:

$$\frac{1}{2u^2} - \frac{\pi}{2u}\, ctg\, \pi u = 2A\pi^2 + 2^3 B\pi^4 u^2 + 2^5 C\pi^6 u^4 + 2^7 D\pi^8 u^6 + \ldots$$

pa kada iskoristimo saznanja iz izraza:

$$\frac{1}{2u^2} - \frac{\pi}{2u}\, ctg\, \pi u = a + bu^2 + cu^4 + du^6 + eu^8 + fu^{10} + \ldots$$

možemo zaključiti da važi:

$$a = 2A\pi^2 = \frac{2\alpha}{1\cdot 2\cdot 3} \qquad \pi^2 = \frac{2\mathfrak{A}}{1\cdot 2}\pi^2$$

$$b = 2^3 B\pi^4 = \frac{2^3\beta}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \qquad \pi^4 = \frac{2^3\mathfrak{B}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\pi^4$$

$$c = 2^5 C\pi^6 = \frac{2^5\gamma}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} \qquad \pi^6 = \frac{2^5\mathfrak{C}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\pi^6$$

$$d = 2^7 D\pi^8 = \frac{2^7\delta}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 9} \qquad \pi^8 = \frac{2^7\mathfrak{D}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 8}\pi^8$$

$$e = 2^9 E\pi^{10} = \frac{2^9\varepsilon}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 11} \qquad \pi^{10} = \frac{2^9\mathfrak{E}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 10}\pi^{10}$$

$$f = 2^{11} F\pi^{12} = \frac{2^{11}\zeta}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 13} \qquad \pi^{12} = \frac{2^{11}\mathfrak{F}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 12}\pi^{12}$$

$$\vdots$$

Ovo veoma jednostavno rasuđivanje ne dozvoljava da se lako saberu svi redovi obrnutih stepena, koje smo dobili u prethodnoj analizi, ali u isto vreme se pokazuje na koji način se obrazuju te sume korišćenjem poznatih vrednosti $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ . . . ili iz Bernulijevih brojeva $\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C},\mathfrak{D}$ …

Kako smo ranije odredili 15 takvih brojeva, na osnovu njih možemo naći sve sume inverznih parnih stepena sve do sume reda:

$$1+\frac{1}{2^{30}}+\frac{1}{3^{30}}+\frac{1}{4^{30}}+\frac{1}{5^{30}}+\ldots$$

Naime, suma tog reda će biti jednaka:

$$\frac{2^{29}\pi}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot31}\pi^{30}=\frac{2^{29}\mathfrak{B}}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot30}\pi^{30}$$

Ako želimo da nastavimo ovo izračunavanje dalje to će biti vrlo jednostavno; dovoljno će biti da se produži izračunavanje brojeva $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ . . . ili brojeva *A,B,C,D* . . .

Brojeve $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ . . . ili $\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C}.\mathfrak{D}$ . . . koji se pomoću njih formiraju lakše je dobiti razlaganjem kotangensa ma kog ugla u beskonačan red. Zaista, kako je

$$\frac{1}{2}ctg\ \frac{1}{2}u=\frac{1}{u}-A\,u-Bu^3-Cu^5-Du^7-Eu^9-\ldots$$ imamo da je

$$Au^2+Bu^4+Cu^6+Du^8+Eu^{10}+\ldots=1-\frac{u}{2}ctg\ \frac{1}{2}u$$

pa ako umesto koeficijenata *A,B,C,D* . . . zamenimo $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ . . . imamo:

$$\frac{\alpha u^2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{\beta u^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{\gamma u^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}+\frac{\delta u^8}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot9}+\cdots=1-\frac{u}{2}ctg\ \frac{1}{2}u$$

Korišćenjem Bernulijevih brojeva imaćemo:

$$\frac{\mathfrak{A}u^2}{1\cdot2}+\frac{\mathfrak{B}u^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{\mathfrak{C}u^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}+\frac{\mathfrak{D}u^8}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot8}+\cdots=1-\frac{u}{2}ctg\ \frac{1}{2}u$$

Iz ovih redova diferenciranjem možemo dobiti bezbroj drugih redova i na taj način sabirati beskonačne redove u koje spadaju i ovi veoma posebni brojevi.

Posmatrajmo prethodnu jednakost koju smo pomnožili sa u i tada dobijamo novu jednakost oblika:

$$\frac{\alpha u^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{\beta u^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{\gamma u^7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}+\frac{\delta u^9}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot9}+\cdots=1-u\,ctg\ u+\frac{u^2}{4sin^2\frac{1}{2}u}$$

Ako sada ovaj izraz diferenciramo i podelimo obe strane sa du dobićemo:

$$\frac{\alpha u}{1}+\frac{\beta u^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\gamma u^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{\delta u^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 7}+\cdots=-\,ctg\,\frac{1}{2}u+\frac{u}{sin^2\frac{u}{2}}-\frac{u^2cos\frac{1}{2}u}{4sin^3\frac{1}{2}u}$$

Ako se sada ponovo diferencira poslednja jednakost imaćemo:

$$\frac{\mathfrak{A}u}{1}+\frac{\mathfrak{B}u^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\mathfrak{C}u^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{\mathfrak{D}u^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 7}+\cdots=-\frac{1}{2}\,ctg\,\frac{1}{2}u+\frac{u}{4sin^2\frac{1}{2}u}$$

izvršimo li sada još zamenu $u=\pi$ iz prethodnih jednakosti i činjenice da je

$ctg\,\frac{1}{2}\pi=0$ i $sin\frac{1}{2}\pi=1$ dobijamo sledeće sume:

$$1=\frac{\alpha\pi^2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\beta\pi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{\gamma\pi^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+\frac{\delta\pi^8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 9}+\ldots$$

$$1+\frac{\pi^2}{4}=\frac{\alpha\pi^2}{1\cdot 2}+\frac{\beta\pi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{\gamma\pi^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\frac{\delta\pi^8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 8}+\ldots$$

$$\pi=\frac{\alpha\pi}{1}+\frac{\beta\pi^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\gamma\pi^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{\delta\pi^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 7}+\ldots$$

pa ako poslednju jednakost podelimo sa π dobijamo

$$1=\alpha+\frac{\beta\pi^2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\gamma\pi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{\delta\pi^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 7}+\ldots$$ a odavde dalje imamo:

$$\alpha=\frac{(\alpha-\beta)\pi^2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{(\beta-\gamma)\pi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{(\gamma-\delta)\pi^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 7}+\ldots$$

tako da na ovaj način dobijamo:

$$1=\frac{\mathfrak{A}\pi^2}{1\cdot 2}+\frac{\mathfrak{B}\pi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{\mathfrak{C}\pi^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\frac{\mathfrak{D}\pi^8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 8}+\ldots$$

$$\frac{\pi}{4}=\frac{\mathfrak{A}\pi}{1}+\frac{\mathfrak{B}\pi^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\mathfrak{C}\pi^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{\mathfrak{D}\pi^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 7}+\ldots$$

$$\frac{1}{4}=\frac{\mathfrak{A}}{1}+\frac{\mathfrak{B}\pi^2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\mathfrak{C}\pi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{\mathfrak{D}\pi^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 7}+\ldots$$

Iz tablice vrednosti brojeva $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ . . . koje smo ranije formirali uočavamo da se oni u početku smanjuju a kasnije povećavaju i rastu do beskonačnosti. Sada bi trebalo ustanoviti u kakvom su odnosu ti brojevi, zatim kako se oni dalje produžavaju i pri tome nastavljaju da rastu. Neka je φ neki broj iz tog niza brojeva $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ . . . dovoljno daleko od početka tog niza i neka je ψ sledeći broj posle φ. Kako se pomoću tih brojeva određuje suma inverznih stepena, tada ako je *2n* eksponent tih stepena u čiju sumu ulazi broj φ, onda će *2n + 2* biti eksponent sume u čiji sastav ulazi broj ψ. Ovo možemo prikazati na sledeći način:

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \ldots = \frac{2^{2n-1}\varphi}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots (2n+1)}\pi^{2n}$$

$$1 + \frac{1}{2^{2n+2}} + \frac{1}{3^{2n+2}} + \frac{1}{4^{2n+2}} + \ldots = \frac{2^{2n+1}\psi}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots (2n+3)}\pi^{2n+2}$$

Ako sada drugi izraz podelimo sa prvim dobićemo:

$$\frac{1 + \frac{1}{2^{2n+2}} + \frac{1}{3^{2n+2}} + \frac{1}{4^{2n+2}} + \ldots}{1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \ldots} = \frac{4\psi\pi^2}{(2n+2)(2n+3)\varphi}$$

pa za dovoljno veliko n svaki od ova dva reda teži 1 i tada dobijamo:

$$\frac{\psi}{\varphi} = \frac{(2n+2)(2n+3)}{4\pi^2} = \frac{n^2}{\pi^2}$$

Osim toga, pošto n označava i koje mesto u tom nizu brojeva $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ . . . zauzima broj φ tada će se broj φ prema broju ψ odnositi kao π^2 prema n^2 pri čemu n teži beskonačnosti. Kako je π^2 približno 10 i ako uzmemo da je $n = 100$ tada će stoti član biti približno hiljadu puta manji od sledećeg (101) člana. Dakle, brojevi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ . . . isto kao i Bernulijevi brojevi $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ . . . obrazuju divergentan red koji divergira brže od ma koje geometrijske progresije čiji su članovi rastući.

Pošto su definisane vrednosti brojeva $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ . . . ili $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ . . . ako sada posmatramo red čiji je opšti član z neka funkcija promenljive x tada se suma Sz tog reda može izraziti na sledeći način:

$$Sz = \int zdx + \frac{1}{2}z + \frac{1}{6}\cdot\frac{dz}{1\cdot 2dx} - \frac{1}{30}\cdot\frac{d^3z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^3} + \frac{1}{42}\cdot\frac{d^5z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6dx^5} -$$

$$-\frac{1}{30}\cdot\frac{d^7z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots 8dx^7} + \frac{5}{66}\cdot\frac{d^9z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots 10dx^9} - \frac{691}{2730}\cdot\frac{d^{11}z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots 12dx^{11}} +$$

$$+\frac{7}{6}\cdot\frac{d^{13}z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots 14dx^{13}} - \frac{3617}{510}\cdot\frac{d^{15}z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots 16dx^{15}} + \frac{43867}{798}\cdot\frac{d^{17}z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots 18dx^{17}} - \frac{174611}{330}\cdot$$
$$\frac{d^{19}z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots 20dx^{19}} + \frac{854513}{138}\cdot\frac{d^{21}z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots 22dx^{21}} - \frac{236364001}{2730}\cdot\frac{d^{23}z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots 24dx^{23}} + \frac{8553103}{6}\cdot$$
$$\frac{d^{25}z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots 26dx^{25}} - \frac{23749461029}{870}\cdot\frac{d^{27}z}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 28dx^{27}} + \frac{8615841276005}{14322}\cdot\frac{d^{29}z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots 30dx^{29}} - \ldots$$

Samim tim, ako je poznat $\int zdx$ tj. vrednost čiji je diferencijal jednak zdx tada se opšti član nalazi pomoću sledećeg diferenciranja. Pri tome obavezno treba naglasiti da taj izraz treba izabrati tako da će suma biti jednaka 0 ako uzmemo za x da je 0.

Dakle, ako je z racionalna funkcija od x i ukoliko svi njeni diferencijali na kraju krajeva iščezavaju, opšti član se može predstaviti konačnim izrazom.

Ovu konstataciju ćemo pojasniti kroz sledeće primere:

Primer 1. Neka se traži opšti član reda

1 2 3 4 5 x

$1 + 9 + 25 + 49 + 81 + \ldots + (2x-1)^2$ kako je ovde

$z = (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$ imamo da je

$$\int zdx = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x$$

zapravo, diferenciranjem ovog izraza dobijamo

$$zdx = 4x^2dx - 4xdx + dx$$

dalje, pomoću diferenciranja dobijamo

$$\frac{dz}{dx} = 8x - 4; \qquad \frac{d^2z}{dx^2} = 8; \qquad \frac{d^3z}{dx^3} = 0;$$

znači traženi opšti član će biti

$$\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x + 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \pm const$$

Neophodno je uništiti članove $\frac{1}{2}$ i $-\frac{1}{3}$ pa shodno tome imamo

$$S(2x-1)^{2} = \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{3}x = \frac{x}{3}(2x-1)(2x+1)$$

Tako je za $x = 4$ suma prva četiri člana jednaka:

$$1 + 9 + 25 + 49 = \frac{4}{3}\, 7 \cdot 9 = 84$$

Primer 2. Neka se traži opšti član reda

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & & x \\ 1 + & 27 + & 125 + & 343 + & \ldots & + (2x-1)^{3} \end{matrix}$$ kako je ovde

$z = (2x-1)^{3} = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$ imamo da je

$$\int z dx = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x$$

daljim, diferenciranjem ovog izraza dobijamo

$$\frac{dz}{dx} = 24x^2 - 24x + 6\,; \qquad \frac{d^2z}{dx^2} = 48x - 24\,; \qquad \frac{d^3z}{dx^3} = 48\,;$$

i sledećim diferenciranjem nestaje. Prema tome

$$\begin{aligned} S\,(2x-1)^{3} = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x\ &+ \\ + 4x^3 - 6x^2 + 3x - \tfrac{1}{2}\ &+ \\ + 2x^2 - 2x + \tfrac{1}{2}\ &- \\ - \tfrac{1}{15} \pm const\ & \end{aligned}$$ tj.

$$S\,(2x-1)^{3} = 2x^4 - x^2 = x^2(2x^2 - 1)$$

Tako da za $x = 4$ suma prva četiri člana iznosi:

$$1 + 27 + 125 + 343 = 496$$

Na ovaj način dobili smo izraz za opšti član koji se jednostavno formira za stepene prirodnih brojeva o kojima smo ranije govorili ali nismo imali dokaza.

U tu svrhu, ako sada uzmemo da je $z = x^n$ tada je $\int z dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ čiji se diferencijali izražavaju kao:

$$\frac{dz}{dx} = nx^{n-1}; \quad \frac{d^2z}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}; \quad \frac{d^3z}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3};$$

$$\frac{d^5z}{dx^5} = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5};$$

$$\frac{d^7z}{dx^7} = n(n-1)(n-2) \dots (n-6)x^{n-7};$$

Odatle mi dobijamo sledeći opšti član koji odgovara stepenu x^n:

$$Sx^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \frac{1}{2}x^n + \frac{1}{6}\frac{n}{2}x^{n-1} - \frac{1}{30}\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot3\cdot4}x^{n-3} +$$
$$+ \frac{1}{42}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}x^{n-5} - \frac{1}{30}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-6)}{2\cdot3\cdots8}x^{n-7} +$$
$$+ \frac{5}{66}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-8)}{2\cdot3\cdots10}x^{n-9} - \frac{691}{2730}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-10)}{2\cdot3\cdots12}x^{n-11} +$$
$$+ \frac{7}{6}\frac{n(n-1)\cdots(n-12)}{2\cdot3\cdots14}x^{n-13} - \frac{3617}{510}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-14)}{2\cdot3\cdots16}x^{n-15} +$$
$$+ \frac{43867}{798}\frac{n(n-1)\cdots(n-16)}{2\cdot3\cdots18}x^{n-17} - \frac{174611}{330}\frac{n(n-1)\cdots(n-18)}{2\cdot3\cdots20}x^{n-19} +$$
$$+ \frac{854513}{138}\frac{n(n-1)\cdots(n-20)}{2\cdot3\cdots22}x^{n-21} - \frac{236364091}{2730}\frac{n(n-1)\cdots(n-22)}{2\cdot3\cdots24}x^{n-23} +$$
$$+ \frac{8553103}{6}\frac{n(n-1)\cdots(n-24)}{2\cdot3\cdots26}x^{n-25} - \frac{23749461029}{870}\frac{n(n-1)\cdots(n-26)}{2\cdot3\cdots28}x^{n-27}$$
$$+ \frac{8615841276005}{14322}\frac{n(n-1)\cdots(n-28)}{2\cdot3\cdots30}x^{n-29}$$

Ovaj izraz se ne razlikuje od ranije formiranog izraza osim što smo ovde uveli Bernulijeve brojeve $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, ... tamo gde smo koristili brojeve α, β, γ, δ, ε ... Međutim, saglasnost u oba izraza je sama po sebi očigledna.Prema tome, odatle mi možemo dobiti članove zbira za sve stepene do trideset. Ako bi pokušali na neki drugi način, to bi bilo moguće uraditi samo pomoću veoma dugačkih i komplikovanih izraza.

Kako smo ranije dali takav izraz sume članova reda kroz opšti član koji se formira na taj način da se svaki naredni član dobijao diferenciranjem prethodnog opšteg člana; on se od neformalnog reda razlikuje u glavnom po tome što on ne sadrži izraze od $\int zdx$ ali se zato pojedinačni diferencijali opšteg člana množe sa nekim funkcijama od x.

Sada mi iznova dobijamo takav izraz na nov način koji je relevantniji prirodi redova; iz tog načina je u to vreme bio jasniji taj zakon na osnovu koga se koeficijenti diferenciranjem nižu jedan za drugim.

Dakle, neka je opšti član reda z neka funkcija po promenljivoj x i neka je tražena suma članova reda S i kao što smo videli ta suma je takva funkcija od x koja nestaje (isčezava) za $x = 0$. Saglasno ranije dokazanom svojstvu tih funkcija imaćemo

$$S - \frac{xds}{1dx} + \frac{x^2d^2s}{1\cdot 2dx^2} - \frac{x^3d^3s}{1\cdot 2\cdot 3dx^3} + \frac{x^4d^4s}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4} - \ldots = 0$$

Kako je S suma svih članova od prvog do poslednjeg z, očigledno da ako u S umesto x uzmemo x-1 tada se početna suma lišava svog poslednjeg člana, znači tada ćemo imati:

$$S - x = S - \frac{ds}{dx} + \frac{d^2s}{2dx^2} - \frac{d^3s}{6dx^3} + \frac{d^4s}{24dx^4} - \ldots \text{ a kako je}$$

$$z = \frac{ds}{dx} - \frac{d^2s}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} - \frac{d^4s}{24dx^4} + \ldots$$

Ovaj izraz daje mogućnost određivanja opšteg člana na osnovu date sume članova , što je samo po sebi vrlo jednostavno. Dakle, pomoću uspešne kombinacije tog izraza i onog što smo imali u ranijem tekstu, možemo odrediti S preko x i z. U tu svrhu uzmimo da je:

$$S - Az + \frac{Bdz}{dx} - \frac{Cd^2z}{dx^2} + \frac{Dd^3z}{dx^3} - \frac{Ed^4z}{dx^4} + \ldots = 0$$

gde su *A,B,C,D,E*, . . . neophodni koeficijenti, konstantni ili promenljivi. Kako je

$$z = \frac{ds}{dx} - \frac{d^2s}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} - \frac{d^4s}{24dx^4} + \frac{d^5s}{120dx^5} - \ldots \text{ i ako sada iskoristimo}$$

ranije dobijene vrednosti

$$z,\ \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^3z}{dx^3} \ldots \text{ i zamenimo ih u prethodni izraz dobićemo:}$$

$$S = S$$

$$-Az = -\frac{Ads}{dx} + \frac{Ad^2s}{2dx^2} - \frac{Ad^3s}{6dx^3} + \frac{Ad^4s}{24dx^4} - \frac{Ad^5s}{120dx^5} + \ldots$$

$$+\frac{Bdz}{dx} = \qquad + \frac{Bd^2s}{2dx^2} - \frac{Bd^3s}{6dx^3} + \frac{Bd^4s}{24dx^4} - \frac{Bd^5s}{120dx^5} + \ldots$$

$$-\frac{Cd^2z}{dx^2} = \qquad - \frac{Cd^3s}{6dx^3} + \frac{Cd^4s}{24dx^4} - \frac{Cd^5s}{120dx^5} + \ldots$$

$$+\frac{Dd^3z}{dx^3} = \qquad + \frac{Dd^4s}{24dx^4} - \frac{Dd^5s}{120dx^5} + \ldots$$

$$-\frac{Ed^4z}{dx^4} = \qquad - \frac{Ed^5s}{120dx^5} + \ldots$$

$$\vdots$$

Na ovaj način, ovi redovi, uzeti zajedno biće = 0.
Kako smo ranije imali da je

$$0 = S - \frac{xds}{dx} + \frac{x^2d^2s}{2dx^2} - \frac{x^3d^3s}{6dx^3} + \frac{x^4d^4s}{24dx^4} - \ldots$$

ako sada ranije izraze uporedimo sa ovim poslednjim dobićemo da se vrednosti za $A, B, C, D \ldots$ mogu izraziti na sledeći način:

$$A = x; \qquad B = \frac{x^2}{2} - \frac{A}{2}; \qquad C = \frac{x^3}{6} - \frac{B}{2} - \frac{A}{6};$$

$$D = \frac{x^4}{24} - \frac{C}{2} - \frac{B}{6} - \frac{A}{24}; \qquad E = \frac{x^5}{120} - \frac{D}{2} - \frac{C}{6} - \frac{B}{24} - \frac{A}{120} \ldots$$

Na osnovu toga kako su određene vrednosti $A, B, C, D \ldots$ odredićemo po opštem članu z sumu članova $S = Sz$ na sledeći način:

$$Sz = Az - \frac{Bdz}{dx} + \frac{Cd^2z}{dx^2} - \frac{Dd^3z}{dx^3} + \frac{Ed^4z}{dx^4} - \frac{Fd^5z}{dx^5} + \cdots$$

Prema tome kako je: $A = x;\ B = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2};\quad C = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12};$

$$D = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24};\ \ldots$$

to je očigledno da se ovi koeficijenti poklapaju sa onim koeficijentima koje smo ranije definisali pa je moguće reći da je:

$$A = Sx^0 = S1;\quad B = \frac{1}{1}Sx^1 - \frac{1}{1}x;\quad C = \frac{1}{2}Sx^2 - \frac{1}{2}x^2;$$

$$D = \frac{1}{6}Sx^3 - \frac{1}{6}x^3;\quad E = \frac{1}{24}Sx^4 - \frac{1}{24}x^4;\ \ldots$$

Otuda ćemo imati:

$$Sz = xz - \frac{dz}{dx}Sx + \frac{d^2z}{2dx^2}Sx^2 - \frac{d^3z}{6dx^3}Sx^3 + \frac{d^4z}{24dx^4}Sx^4 - \cdots$$

$$+\frac{xdz}{dx} - \frac{x^2d^2z}{2dx^2} + \frac{x^3d^3z}{6dx^3} - \frac{x^4\,d^4z}{24dx^4} + \ldots$$

Ako u opštem članu z uzmemo da je $x = 0$ dobićemo član čiji je indeks jednak nuli. Dalje, ako uzmemo da je taj član jednak sa a tada ćemo imati

$$a = z - \frac{xdz}{dx} + \frac{x^2d^2z}{2dx^2} - \frac{x^3d^3z}{6dx^3} + \ldots \text{ dalje}$$

$$\frac{xdz}{dx} - \frac{x^2d^2z}{2dx^2} + \frac{x^3d^3z}{6dx^3} - \frac{x^4\,d^4z}{24dx^4} + \ldots = z - a$$

Posle ove zamene imaćemo:

$$Sz = (x+1)z - a - \frac{dz}{dx}Sx + \frac{d^2z}{2dx^2}Sx^2 - \frac{d^3z}{6dx^3}Sx^3 + \frac{d^4z}{24dx^4}Sx^4 - \cdots$$

Dakle, ako su poznate sume stepena, tada za bilo koji opšti član možemo naći sumu odgovarajućih članova. Kako smo našli izraz koji predstavlja sumu članova Sz na dva načina a u jednom od njih se nalazi $\int zdx$, kada ta dva izraza izjednačimo, dobićemo značenje integrala $\int zdx$ koje je predstavljeno pomoću reda. Zapravo kako je

$$\int zdx = \frac{1}{2}z + \frac{Adz}{1\cdot 2dx} - \frac{Bd^3z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^3} + \frac{Cd^5z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6dx^5} - \cdots =$$

$$= (x+1)z - a - \frac{dz}{dx}Sx + \frac{d^2z}{2dx^2}Sx^2 - \frac{d^3z}{6dx^3}Sx^3 + \frac{d^4z}{24dx^4}Sx^4 - \cdots$$

dobijamo da je:

$$\int zdx = (x+\tfrac{1}{2})z - a - \frac{dz}{dx}(Sx + \tfrac{1}{2}A) + \frac{d^2z}{2dx^2}Sx^2 -$$

$$- \frac{d^3z}{6dx^3}(Sx^3 - \tfrac{1}{4}B) + \frac{d^4z}{24dx^4}Sx^4 - \frac{d^5z}{120dx^5}\left(Sx^5 + \tfrac{1}{6}C\right) + \ \dots$$

gde su *A, B, C* **…** Bernulijevi brojevi koje smo ranije definisali.

Neka je na primer $z = x^2$, tada je $\alpha = 0$, $\frac{dz}{dx} = 2x$, i $\frac{d^2z}{2dx^2} = 1$

tada shodno tome imamo da je:

$$\int x^2dx = (x+\tfrac{1}{2})x^2 - 2x(\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{12}) + 1(\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x)$$

ili $\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3$; zaista jer diferenciranjem izraza $\frac{1}{3}x^3$ dobijamo x^2dx

Sada se pred nama otvara novi put za nalaženje sume članova stepenog reda. Zaista, te sume se lako obrazuju od koeficijenata *A,B,C,D*. . . koje smo ranije definisali a pri tome se svaki od njih izražava preko prethodnog. Na osnovu svega do sada rečenog možemo reći da je:

$$Sx^1 - x = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x\,,$$

$$Sx^2 - x^2 = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{2}(Sx - x)\,,$$

$$Sx^3 - x^3 = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{4}x - \tfrac{3}{2}(Sx^2 - x^2) - \tfrac{3\cdot 2}{2\cdot 3}(Sx - x)\,,$$

$$Sx^4 - x^4 = \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{5}x - \tfrac{4}{2}(Sx^3 - x^3) - \tfrac{4\cdot 3}{2\cdot 3}(Sx^2 - x^2) - \tfrac{4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 3\cdot 4}(Sx - x), \dots$$

odavde proizilazi da sume viših stepena možemo izraziti preko sume nižih stepena.

Ako pažljivo analiziramo zakon na osnovu koga smo ranije definisali koeficijente *A,B,C,D*. . . jedan za drugim možemo zaključiti da oni obrazuju rekurentni red. Zaista, ako razložimo razlomak

$$\frac{x + \frac{1}{2}x^2u + \frac{1}{6}x^3u^2 + \frac{1}{24}x^4u^3 + \frac{1}{120}x^5u^4 + \dots}{1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}u^2 + \frac{1}{24}u^3 + \frac{1}{120}u^4 + \dots}$$

po stepenima od u i kako smo ranije pokazali dobićemo red

$$A + B\,u + Cu^2 + Du^3 + Eu^4 + \cdots$$

a takođe kako smo ranije pokazali imamo da je

$$A = x\,, \quad B = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}A\,, \; \ldots$$

Na taj način, na osnovu toga kako je formiran taj red dobićemo sumu članova stepenog reda. Razlomak, čijim smo razlaganjem dobili ovaj red možemo predstaviti u obliku

$$\frac{e^{xu}-1}{e^u-1}$$

a ovaj razlomak ako je x ceo pozitivan broj prelazi u oblik

$$1 + e^u + e^{2u} + e^{3u} + \cdots + e^{(x-1)u}$$

Dakle, kako je 1 = 1

$$e^u = 1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1\cdot2} + \frac{u^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{u^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \cdots$$

$$e^{2u} = 1 + \frac{2u}{1} + \frac{4u^2}{1\cdot2} + \frac{8u^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{16u^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \cdots$$

$$e^{3u} = 1 + \frac{3u}{1} + \frac{9u^2}{1\cdot2} + \frac{27u^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{81u^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \cdots$$

$$\vdots$$

$$e^{(x-1)u} = 1 + \frac{(x-1)u}{1} + \frac{(x-1)^2u^2}{1\cdot2} + \frac{(x-1)^3u^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{(x-1)^4u^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \cdots$$

imamo da je

$$A = x\,,$$

$$B = S\,(x-1) = Sx - S\,,$$

$$C = \frac{1}{2}\,S(x-1)^2 = \frac{1}{2}Sx^2 - \frac{1}{2}x^2\,,$$

$D = \frac{1}{6}\,S(x-1)^3 = \frac{1}{6}Sx^3 - \frac{1}{6}x^3 \quad \ldots$ ovim se u potpunosti potvrđuje i dokazuje ranije ustanovljena veza između koeficijenata stepena i njihovih suma.

4. Zakjlučak

Čitajući o Ojleru i njegovim delima možemo sebi približiti i konkretno prikazati detalje iz života ovog genija. Na taj način postajemo svesni koliki je doprinos mnogim naukama (posebno matematici) dao ovaj neponovljivi čovek. Proučavajući njegov život i delo spoznajemo činjenice koje su ga uvrstile među velikane neprolaznih razmera.

Ono što je kod Ojlera najviše fascinantno jeste sam način njegovog stvaranja. Stvarao je u svako vreme i na svakom mestu nadahnut neverovatnom stvaralačkom inspiracijom. Kakav je i koliki perfekcionista bio objašnjeno je u trećoj glavi ovog rada gde je prikazano kako je Ojler definisao formule, Bernulijeve brojeve, donosio zaključke i potvrđivao svoje ideje kroz konkretne primere. Bio je prilično temeljan i na veoma specifičan način prikazao kako se formira suma reda preko opšteg člana. Same formule su izuzetno složene i sadržajne a ne izostaje ni činjenica da je i način zapisivanja veoma poseban i njemu svojstven. Ovu konstataciju potvrđuje i sama formula:

$$Sz = \int zdx + \frac{1}{2}z + \frac{1}{6}\cdot\frac{dz}{1\cdot 2dx} - \frac{1}{30}\cdot\frac{d^3z}{1\cdot2\cdot3\cdot4dx^3} + \frac{1}{42}\cdot\frac{d^5z}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6dx^5} - \frac{1}{30}\cdot$$

$$\cdot\frac{d^7z}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots8dx^7} + \frac{5}{66}\cdot\frac{d^9z}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots10dx^9} - \frac{691}{2730}\cdot\frac{d^{11}z}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots12dx^{11}} + \frac{7}{6}\cdot\frac{d^{13}z}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots14dx^{13}} -$$

$$-\frac{3617}{510}\cdot\frac{d^{15}z}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots16dx^{15}} + \frac{43867}{798}\cdot\frac{d^{17}z}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots18dx^{17}} - \frac{174611}{330}\cdot\frac{d^{19}z}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots20dx^{19}} +$$

$$+\frac{854513}{138}\cdot\frac{d^{21}z}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots22dx^{21}} - \frac{236364001}{2730}\cdot\frac{d^{23}z}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots24dx^{23}} + \frac{8553103}{6}\cdot\frac{d^{25}z}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots26dx^{25}} -$$

$$-\frac{23749461029}{870}\cdot\frac{d^{27}z}{1\cdot2\cdot3\ldots28dx^{27}} + \frac{8615841276005}{14322}\cdot\frac{d^{29}z}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots30dx^{29}} - \ldots$$

U drugoj glavi bilo je reči o savremenom pristupu Ojler-Maklorenovoj formuli i jasno je pokazano koliko je ona u poređenju sa Ojlerovom osnovnom idejom pojednostavljena i pristupačnija za korisnike. Zapravo to i jeste suština: ideje i dela velikog genija prikazati što je moguće jednostavnije i pristupačnije. O tome svedoči i njihova formula:

$$\sum_{i=1}^{n} f(a+(i-1)h) \equiv \sum_{a}^{b} f(x) = \frac{1}{h}\int_{a}^{b} f(x)dx + A_1[f(b)-f(a)] +$$

$$A_2 h\left[f^{'}(b) - f^{'}(a)\right] + \ldots + A_{m-1}h^{m-2}\left[f^{(m-2)}(b) - f^{(m-2)}(a)\right] + R \text{ gde je}$$

$$R = -\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{h} f^{(m)}(a+ih-z)\,\varphi_{\mathrm{m}}(z)dz \equiv -\frac{1}{h}\sum_{a}^{b}\int_{0}^{h} f^{(m)}(x+h-z)\,\varphi_{\mathrm{m}}(z)dz$$

Na osnovu svega do sada rečenog sa sigurnošću možemo doneti zaključak da je kako u matematici tako i u životu sve bazirano na principu "od jednostavnog ka složenom" tj. da sume viših stepena možemo izraziti preko suma nižih stepena što je i na konkretnim primerima pokazano.

L I T E R A T U R A

[1] Э. Хайрер, Г. Ваннер, Математический анализ в свете его истории "Научный мир", Москва 2008.

[2] Фихтенголъц Г. М., Курс дифференциалъного и интегралъного исчисления "Физмалит", Санкт - Петербург 2003.

[3] Леонард Эйлер, Дифференциалъное исчисление "Государственное издателъство технико – теоретической литературы", Москва 1949. Ленинград.

[4] Под редакцией А. П. Юшкевича. М ,История математики с древнейших времен до начала XIX столетия –Том третий, "Наука" 1970.

[5] Евклид . Начала Евклида , Классики естествознания - математика, механика, физика, астрономия , "Государственное издателъство технико –теоретической литературы" Москва, Ленинград 1950.

[6] Е. Т. Белл ,Велики математичари, Накладни Завод "Знање", Загреб 1972.

[7] Ernest Stipanić, Leonard Ojler i njegova matematička analiza, "Putevi razvitka matematike", Vuk Karadžić, Beograd 1987.

[8] А. П. Юшкевич – История математики с древнейших времен до начала XIX столетия –"Академия наук СССР", Москва, Ленинград 1946.

[9] Lj. Petković, M. Petković, Матeматriks iz života velikih matematičara, "Nova Jugoslavija", Vranje 2000.

[10] William Dunham, Euler: The Master of Us All, The Mathematical Association of America, 1999: 17

[11] Ian Bruce, Prevod Ojlerove doktorske teze na engleski jezik 2013.

[12] Nicolas Fuss. „Eulogy of Leonhard Euler“2008.

[13]J.J. O'Connor, E.F. Robertson. „Leonhard Euler“2008.

[14] Leonard Ojler, Institutiones calculi differentialis,. 2013.

[15] Marquis de Condorcet. „Eulogy of Euler“2008.

[16] Carl B. Boyer, A History of Mathematics, John Wiley & Sons, стр. 439–445, 19. Stephen Wolfram. „Mathematical Notation: Past and Future“2013..

[17]а б Gerhard Wanner, Ernst Harrier, Analysis by its history, Springer, 2005,:62

[18]Chris Caldwell. „The largest known prime by year: A Brief History“2008.

[19]Gerald Alexanderson, Euler and Königsberg's bridges: a historical view, Bulletin of the American Mathematical Society, juli 2006: 567

[20] R.W. Home, Leonhard Euler's 'Anti-Newtonian' Theory of Light, Annals of Science, 1988:521-533

[21]John Derbyshire, Prime Obsession: Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics, Plume, 2004.

[22] Lexikon der Naturwissenschaftler, , Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.2000.

[23] Bogolyubov, Mikhailov, and Yushkevich, Euler and Modern Science, 2007.

[24] Mathematical Association of America. Bradley, Robert E., D'Antonio, Lawrence A., and C. Edward Sandifer ,Euler, 2007: 300.

[25]An Appreciation, Mathematical Association of America. Demidov, S.S., "Treatise on the differential calculus" in Grattan-Guinness, I., ed., Landmark Writings in Western Mathematics. Elsevier. 2005: 191–98.

[26] Dunham, William, The Genius of Euler: Reflections on his Life and Work, Mathematical Association of America 2007.
[27] Fraser, Craig G., "Leonhard Euler's 1744 book on the calculus of variations" in
[28] Grattan-Guinness, I, ed., Landmark Writings in Western Mathematics. Elsevier 2005 : 168–80.
[29] Gladyshev, Georgi, P. "Leonhard Euler's methods and ideas live on in the thermodynamic hierarchical theory of biological evolution," International Journal of Applied Mathematics & Statistics (IJAMAS) 11 (N07), Special Issue on Leonhard Paul Euler's: Mathematical Topics and Applications (M. T. A.) ,2007.

Biografija

Gordana Stanojković rođena je 29.06.1964. godine u Vršcu. Osnovnu školu završila je u Plandištu, a gimnaziju – prirodno-matematički smer u Vršcu. Diplomirala je 1988. godine na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, na smeru Numerička matematika sa kibernetikom i stekla zvanje diplomirani matematičar. Po završetku studija zaposlila se u Srednjoj hemijskoj školi "Braća Acketa" u Vršcu kao profesor matematike gde je radila jedu školsku godinu. Naredne dve školske godine radila je u Poljoprivredno-prehrambenoj školi "Dr Siniša Stanković" u Futogu, a od 1991. godine prešla u MUP, u Srednju školu unutrašnjih poslova u Sremskoj Kamenici gde je i danas zaposlena. Srednja škola unutrašnjih poslova je 2006. godine reformisana u Centar za osnovnu policijsku obuku i sada funkcioniše kao takva. Udata je i majka dva sina.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Gordana Stanojković

AU

Mentor: Prof. dr Đura Paunić

MN

Naslov rada: Leonard Ojler i Ojler-Maklorenova sumaciona formula

NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: srpski / engleski

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2014

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: 4/71/29/2/1/4/0

(broj poglavlja/strana/literatura/citata/tabela/slika/grafika)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Primenjena matematika

ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: Sumaciona formula, Ojler-Maklorenova formula,

PO

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku PMF, Univerzitet u Novi Sad

ČU

Važna napomena: Nema

VN

Izvod:

IZ

Datum prihvatanja teme od NN veća: 19.06.2014.

DP

Datum odbrane: 02.07.2014.

DO

Članovi komisije:

Predsednik: Prof. dr Vojislav Petrović, redovni profesor, PMF, Novi Sad

Mentor: Prof. dr Đura Paunić, redovni profesor, PMF, Novi Sad

Član: Prof. dr Miloš Kurilić, redovni profesor, PMF, Novi Sad

KO

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEYWORDS DOCUMENTATION

Accession number:	
ANO	
Identification number:	
INO	
Document type:	Monograph type
DT	
Tye of record:	Printed text
TR	
Contents code:	Master thesis
CC	
Author:	Gordana Stanojkovic
AU	
Mentor:	Djura Paunic, PhD
MN	
Title:	Leonhard Euler and Euler–Maclaurin summation formula
TI	
Language of text:	Serbian (latin)
LT	
Language of abstract:	Serbian / English
LA	
Country of publication:	Serbia
CP	
Locality of publication:	Vojvodina
LP	
Publication year:	2014
PY	
Publisher:	Author's reprint
PU	

Publ. place: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovica 4

PP

Physical description: 4/71/29/2/1/4/0

(no. chapters/pages/references/quotes/tables/figures/graphs)

PD

Scienticfic field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Applied Mathematics

SD

Subjet/key words: Summation formula, Euler–Maclaurin formula

SKW

Holding data: Library of Department of Mathematics, Faculty of Science, Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract:

AB

Accepted by the Scientific Board on: 19.06. 2014.

ASB

Defended: 02.07.2014.

DE

Thesis defend board:

(First and last name/degree/title/faculty)

President: Vojislav Petrović, PhD, full profesor, Faculty of Sciences, Novi Sad

Mentor: Djura Paunic, PhD, full profesor, Faculty of Sciences, Novi Sad

Member: Miloš Kurilić, PhD, full profesor, Faculty of Sciences, Novi Sad