



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU



Gordana Divljakov

Frakciona Furijeova transformacija

Master rad

Mentor:
Prof. dr Nenad Teofanov

Novi Sad, 2018

Sadržaj

Predgovor	3
1 Furijeova transformacija	5
1.1 Definicija Furijeove transformacije	5
1.2 Osobine Furijeove transformacije	9
1.3 Inverzna Furijeova transformacija	13
1.4 Konvolucija	18
1.5 Proširenje definicije na prostor L^2	25
2 Frakciona Furijeova transformacija	28
2.1 Rotacija u vremensko-frekvencijskoj ravni	28
2.2 Izvođenje definicije	30
2.3 Integralna reprezentacija frakcione Furijeove transformacije . .	33
2.4 Osobine frakcione Furijeove transformacije	40
3 Vignerova distribucija	48
3.1 Vremensko-frekvencijska reprezentacija signala	48
3.2 Veza frakcione Furijeove transformacije i Vignerove distribucije	49
4 Diskretna Frakciona Furijeova transformacija	55
4.1 Uvođenje definicije	55
4.2 Karakteristični vektori diskretne Furijeove transformacije . . .	58
4.3 Jedinственost zajedničkog skupa karakterističnih vektora . . .	60
4.4 Sortiranje karakterističnih korena i algoritam	63
5 Primena frakcione Furijeove transformacije u kompresiji slika	67
5.1 Osnovni pojmovi u digitalnoj obradi slike	67
5.2 Postupak kompresije	69
5.3 Primer kompresije i analiza rezultata	72
Dodatak	79

Zaključak	85
Literatura	87
Biografija	89
Ključna dokumentacija	91

Predgovor

Tema ovog rada je frakciona Furijeova transformacija koja je uvedena u matematičku teoriju kao generalizacija klasične Furijeove transformacije.

Furijeova transformacija jedna je od najšire korišćenih transformacija u oblasti obrade signala i komunikacije i može se, u izvesnom smislu, interpretirati kao rotacija signala u vremensko-frekvencijskom domenu za ugao $\pi/2$. Frakciona Furijeova transformacija daje mogućnost rotacije za proizvoljan ugao $\alpha = a\pi/2$, $a \in \mathbb{R}$.

Ideja o frakcionim stepenima operatora Furijeove transformacije pojavila se u matematičkoj literaturi 20-tih godina prošlog veka ali isprva nije izazvala veliko interesovanje. Viktor Namias ([17]) 1980.-te godine ponovo uvodi ovaj pojam u oblasti kvantne mehanike, pokazuje osnovne osobine ove transformacije i koristi je za rešavanje nekoliko tipova Šredingerove jednačine. Medjutim, interesovanje za ovu transformaciju naglo raste počev od 90-tih godina, od kada se pronalaze njene brojne primene u oblasti optike i obrade signala, kao na primer u filtriranju, kompresiji, prepoznavanju obrazaca i dr. U mnogim oblastima u kojima se koristi klasična Furijeova transformacija, pokazano je da se korišćenjem njenog uopštenja - frakcione transformacije, postižu bolji rezultati.

U prvom delu ovog rada navešćemo teorijske osnove klasične Furijeove transformacije. Pokazaćemo njene osobine kao što su neprekidnost i opadanje u beskonačnosti, formule množenja, pomeranja i izvoda i na kraju svojstvo konvolucije koje je od ključnog značaja za primene u obradi signala. Na primeru filtriranja slike ćemo pokazati primenu teoreme o konvoluciji.

U drugom poglavlju definisaćemo frakcionu Furijeovu transformaciju uopštavajući koncept rotacije u vremensko-frekvencijskoj ravni. Izvešćemo integralni oblik definicije i spektralnu dekompoziciju jezgra koristeći karakteristične funkcije klasične Furijeove transformacije. Zatim ćemo navesti i

pokazati neke od njenih osobina kao što su linearnost, aditivnost indeksa, formula množenja, formula izvoda, skaliranje i Planšerelov identitet.

Treće poglavlje bavi se odnosom frakcione Furijeove transformacije i Vignerove distribucije. Navešćemo definiciju Vignerove distribucije i izvesti odnos sa frakcionom Furijeovom transformacijom. Korišćenjem osobine frakcionih martingala Vignerove distribucije opisaćemo i ilustrovati efikasniji metod filtriranja signala u rotiranom vremensko - frekvencijskom domenu.

U četvrtom poglavlju izvodimo definiciju diskretne frakcione Furijeove transformacije polazeći od spektralne dekompozicije jezgra neprekidne frakcione transformacije. Pokazujemo proceduru za nalaženje karakterističnih vektora matrice klasične diskretne Furijeove transformacije koji se koriste u definiciji i na kraju utvrdjujemo algoritam za izračunavanje diskretne frakcione Furijeove transformacije.

U poslednjoj oblasti bavimo se primenom frakcione Furijeove transformacije u kompresiji digitalnih slika. Navode se osnovni pojmovi u vezi digitalnih slika. Zatim se opisuje postupak kompresije slike pomoću diskretne frakcione Furijeove transformacije. Kao primer, kompresovana je test slika korišćenjem algoritma opisanog u prethodnom poglavlju i prikazani su i analizirani rezultati koji se dobijaju pri različitim nivoima kompresije i pri različitim stepenima same transformacije. Time je na primeru pokazana prednost frakcione transformacije u odnosu na klasičnu.

Zahvaljujem se svom mentoru, dr Nenadu Teofanovu na podršci prilikom izrade ovog rada. Takodje, zahvaljujem se i članovima komisije dr. Ljiljani Gajić i dr Milici Žigić, kao i svim profesorima sa kojima sam saradjivala u toku studija.

Najveću zahvalnost dugujem svojoj porodici na beskrajnoj podršci i razumevanju tokom studiranja.

Glava 1

Furijeova transformacija

U prvom delu rada uvešćemo definiciju klasične Furijeove transformacije. Pokazaćemo njene osnovne osobine, formulu inverzije i teoremu o konvoluciji koja je od ključnog značaja za njenu primenu u obradi signala. Razmotrićemo proširenje definicije na skup L^2 kvadratno integrabilnih funkcija koristeći argument o proširenju sa gustog podskupa, što će nam koristiti i u kasnijem delu rada. Korišćena je literatura [1], [13], [15].

1.1 Definicija Furijeove transformacije

Neka nam realna funkcija $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ predstavlja signal koji nosi određene informacije. Promenljivu $x \in \mathbb{R}$ interpretiramo kao vreme a $f(x)$ je vremenski opis datog signala. U primenama je potrebno analizirati i svojstva tog signala u frekvencijskom/spektralnom domenu. Za to se definiše nova funkcija $\mathcal{F}(\omega) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gde je $\omega \in \mathbb{R}$ frekvencija i $\mathcal{F}(\omega)$ frekvencijski opis signala koji govori da li se frekvencija ω pojavljuje u signalu i u kojoj meri. Formalno, funkciju $\mathcal{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definišemo sa:

$$\mathcal{F}(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

Kada nesvojstveni integral sa desne strane postoji funkciju $\mathcal{F}$ nazivamo Furijeova transformacija funkcije f . Moguće je definisati je i sa konstantom $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ispred integrala umesto navedene ili sa jedinicom. Takodje može se koristiti i $e^{i\omega x}$ umesto $e^{-i\omega x}$, kao i $e^{i2\pi\omega x}$ ili $e^{-i2\pi\omega x}$. Potpuno je svejedno koji oblik ćemo koristiti jer ne utiče na teorijske rezultate, već samo na izgled formula koje se koriste u radu.

Neka nam je dalje $G(\mathbb{R})$ familija funkcija $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ koje su po delovima neprekidne i koje su apsolutno integrabilne.

Ako je funkcija po delovima neprekidna na celom $\mathbb{R}$, to znači da je deo po deo neprekidna na svakom konačnom intervalu $[a, b]$, odnosno može imati beskonačan broj tačaka prekida na $\mathbb{R}$ ali na svakom konačnom podintervalu ih ima najviše konačno mnogo. Ako je apsolutno integrabilna na $\mathbb{R}$ to znači da pripada skupu $L^1(\mathbb{R})$ tj. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ postoji i konačan je.

Skup $G(\mathbb{R})$ je vektorski prostor nad $\mathbb{C}$. Sada uvodimo definiciju Furijeove transformacije nad ovim skupom.

Definicija 1.1.1. *Neka je funkcija $f(x) \in G(\mathbb{R})$. Furijeova transformacija funkcije f je funkcija $\mathcal{F}$ data sa:*

$$\mathcal{F}(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Funkcija $\mathcal{F}$ je definisana za svako $f \in G(\mathbb{R})$ a pokazaćemo i njenu neprekidnost na $\mathbb{R}$ i opadanje u beskonačnosti:

Teorema 1.1.1. *Za svaku funkciju $f \in G(\mathbb{R})$ važi:*

1. $\mathcal{F}(\omega)$ je definisana za svako $\omega \in \mathbb{R}$,
2. $\mathcal{F}(\omega)$ je neprekidna na $\mathbb{R}$
3. $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(\omega) = 0$.

Za dokaz ove teoreme koristićemo sledeću teoremu, tzv. Lebegovu teoremu o dominantnoj konvergenciji.

Teorema 1.1.2. *Neka je $\{f_h\}_{h \in \mathbb{R}}$ familija po delovima neprekidnih funkcija za koju važi $\lim_{h \rightarrow 0} f_h(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Ako postoji funkcija g takva da je $|f_h(x)| \leq g(x)$ za svako $x \in \mathbb{R}$ i $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx < \infty$, onda važi:*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_h(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

Ova teorema nam omogućava da limes može ući pod integral, tj. dozvoljena je promena redosleda operacija.

Dokaz teoreme 1.1.1.:

1. Kako važi da je $|e^{-i\omega x}| = 1$ za svako realno x i ω , odatle sledi da važi:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) e^{-i\omega x}| dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$$

što znači da je funkcija $f(x) e^{-i\omega x}$ apsolutno integrabilna na $\mathbb{R}$ za svako $\omega \in \mathbb{R}$. Kako je i po delovima neprekidna, sledi da pripada klasi $G(\mathbb{R})$. Znači funkcija $\mathcal{F}(\omega)$ je dobro definisana za svako $\omega \in \mathbb{R}$.

2. Neka je $\omega \in \mathbb{R}$. Potrebno je pokazati da je funkcija $\mathcal{F}$ neprekidna u tački ω što po definiciji neprekidnosti znači $\lim_{h \rightarrow 0} |\mathcal{F}(\omega + h) - \mathcal{F}(\omega)| = 0$.

Iz definicije funkcije $\mathcal{F}$ imamo da je:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\omega + h) - \mathcal{F}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+h) e^{-i(\omega+h)x} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} [e^{-ihx} - 1] dx\end{aligned}$$

Ako za svako $h \in \mathbb{R}$ definišemo funkciju $f_h(\omega) = e^{-i\omega x} [e^{-ihx} - 1]$ onda za svako $x \in \mathbb{R}$ važi:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} f_h(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x) e^{-i\omega x} [e^{-ihx} - 1] \\ &= f(x) e^{-i\omega x} \lim_{h \rightarrow 0} [e^{-ihx} - 1] \\ &= f(x) e^{-i\omega x} \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

Pored toga važi i:

$$|f_h(x)| \leq |f(x)| |e^{-i\omega x}| (|e^{-ihx}| + 1) \leq |f(x)| \cdot 1 \cdot 2 = 2 \cdot |f(x)|$$

Zaključujemo da funkcija $g(x) = 2|f(x)|$ zadovoljava uslove prethodne teoreme te iz nje sledi:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_h(x) dx = 0$$

tj.

$$\lim_{h \rightarrow 0} [\mathcal{F}(\omega + h) - \mathcal{F}(\omega)] = 0$$

što po definiciji znači da je Furijeova transformacija neprekidna funkcija po ω .

3. Iz definicije Furijeove transformacije i Ojlerove formule sledi da je

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \mathcal{F}(\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \omega x dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \omega x dx \right).\end{aligned}$$

Stoga da bi se dokazalo da je $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \mathcal{F}(\omega) = 0$ dovoljno je pokazati:

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \omega x dx = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \omega x dx = 0 \quad (1.1)$$

Pokazaćemo desnu jednakost a leva se dokazuje analogno.

Neka je dato proizvoljno $\varepsilon > 0$. Iz apsolutne integrabilnosti funkcije f sledi da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $M > 0$ takvo da je $\int_{|x|>M} |f(x)| dx < \varepsilon$ te je

$$\left| \int_{|x|>M} f(x) \cos \omega x dx \right| \leq \int_{|x|>M} |f(x) \cos \omega x| dx \leq \int_{|x|>M} |f(x)| dx < \varepsilon.$$

Ovim smo dobili ograničenje funkcije $|f(x) \cos \omega x|$ na $(-\infty, -M) \cup (M, +\infty)$ pa preostaje da se proceni i na $[-M, M]$. Kako je funkcija f po delovima neprekidna na intervalu $[-M, M]$, sledi da postoji podela intervala $[-M, M]$:

$$-M = x_0 < x_1 < \dots < x_m = M$$

takva da za dato ε stepena funkcija $h(x) = f(x_k)$, $x_{k-1} < x < x_k$, $k = 1, 2, \dots, m$ zadovoljava:

$$\int_{-M}^M |f(x) - h(x)| dx < \varepsilon,$$

odnosno, f se može aproksimirati stepenastom funkcijom h . Dalje imamo da je:

$$\int_{-M}^M f(x) \cos \omega x dx = \int_{-M}^M (f(x) - h(x)) \cos \omega x dx + \int_{-M}^M h(x) \cos \omega x dx,$$

pri čemu je:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-M}^M (f(x) - h(x)) \cos \omega x dx \right| &\leq \int_{-M}^M |f(x) - h(x)| |\cos \omega x| dx \\ &\leq \int_{-M}^M |f(x) - h(x)| dx < \varepsilon. \end{aligned}$$

Sa druge strane je,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-M}^M h(x) \cos \omega x dx \right| &= \left| \sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) \cos \omega x dx \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^m f(x_k) \frac{\sin \omega x_k - \sin \omega x_{k-1}}{\omega} \right| \leq \sum_{k=1}^m |f(x_k)| \frac{2}{|\omega|} \leq \frac{2m}{|\omega|} \max_{-M \leq x \leq M} |f(x)| \end{aligned}$$

te za dovoljno veliko ω važi:

$$\frac{2m}{|\omega|} \max_{-M \leq x \leq M} |f(x)| < \varepsilon.$$

Kako smo umanjili oba sabirka, dobijamo da za dovoljno veliko ω važi $\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \omega x dx \right| < 3\varepsilon$ čime smo po definiciji dokazali graničnu vrednost a odatle sledi da važi i treći deo teoreme. $\square$

PRIMER 1. *Posmatramo funkciju:*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{inače,} \end{cases} \quad \text{gde je } -\infty < a < b < +\infty$$

Ova funkcija naziva se karakteristična funkcija intervala $[a, b]$ ili jedinični (pravougaoni) impuls na $[a, b]$. Njena Furijeova transformacija je:

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_a^b e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \Big|_a^b = \frac{e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b}}{2\pi i\omega}$$

Specijalno, za $a = -b$, $b > 0$, dobijamo:

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{e^{i\omega b} - e^{-i\omega b}}{2\pi i\omega} = \frac{\sin \omega b}{\omega \pi}.$$

Funkcija $\frac{\sin \omega}{\omega}$ označava se i sa $\text{sinc } \omega$.

1.2 Osobine Furijeove transformacije

Navešćemo neke od najbitnijih osobina Furijeove transformacije.

Teorema 1.2.1. (Linearnost Furijeove transformacije) Neka su $f(x), g(x)$ dve funkcije iz $G(\mathbb{R})$ i $a, b \in \mathbb{C}$ proizvoljni. Tada važi:

$$\mathcal{F}(af + bg)(\omega) = a\mathcal{F}(f)(\omega) + b\mathcal{F}(g)(\omega).$$

Dokaz teoreme 1.2.1.:

Ova osobina sledi direktno iz osobine linearnosti nesvojstvenih integrala:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(af + bg)(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (af + bg)(x) e^{-i\omega x} dx \\
&= a \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx + b \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i\omega x} dx \\
&= a\mathcal{F}(f)(\omega) + b\mathcal{F}(g)(\omega).
\end{aligned}$$

Teorema 1.2.2. *Neka je $f \in G(\mathbb{R})$ realna funkcija, tj. $f(x) \in \mathbb{R}$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Tada je $\mathcal{F}(-\omega) = \overline{\mathcal{F}(\omega)}$.*

Dokaz teoreme 1.2.2.:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(-\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i(-\omega)x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega x} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx} = \overline{\mathcal{F}(\omega)}.
\end{aligned}$$

Teorema 1.2.3. *(Parnost) Ako je $f \in G(\mathbb{R})$ realna i parna funkcija, onda je i $\mathcal{F}(\omega)$ parna i realna. Ako je $f \in G(\mathbb{R})$ realna i neparna, onda je i $\mathcal{F}(\omega)$ neparna i čisto imaginarna funkcija.*

Dokaz teoreme 1.2.3.:

Pokazaćemo prvi deo tvrdjenja.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^0 f(x) e^{-i\omega x} dx + \int_0^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(- \int_{+\infty}^0 f(-t) e^{i\omega t} dt + \int_0^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} f(x) (e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x) \cos \omega x dx,
\end{aligned}$$

gde smo koristili smenu $t = -x$ i parnost funkcije f . Ovim smo dobili da je funkcija $\mathcal{F}(\omega)$ realna funkcija i takodje je i parna jer je $\cos \omega x$ parna funkcija po ω . Drugi deo tvrdjenja se pokazuje analogno. $\square$

Teorema 1.2.4. (Formula pomeranja) Ako je $f \in G(\mathbb{R})$ onda je funkcija $f(ax + b)$ takodje u klasi $G(\mathbb{R})$ za svako $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ i važi:

$$\mathcal{F}(f(a \cdot + b))(\omega) = \frac{1}{|a|} e^{\frac{i\omega b}{a}} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Dokaz teoreme 1.2.4.:

Smenom promenljive $y = ax + b$ dobijamo da je za $a > 0$:

$$\mathcal{F}(f(a \cdot + b))(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax + b) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\omega(\frac{y-b}{a})} \frac{1}{a} dy,$$

odnosno, za $a < 0$ dobijamo:

$$\mathcal{F}(f(a \cdot + b))(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax + b) e^{-i\omega x} dx = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\omega(\frac{y-b}{a})} \frac{1}{a} dy.$$

Dakle,

$$\mathcal{F}(f(a \cdot + b))(\omega) = \frac{1}{|a|} e^{\frac{i\omega b}{a}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{\frac{-i\omega y}{a}} dy = \frac{1}{|a|} e^{\frac{i\omega b}{a}} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Ako promenljivu x interpretiramo kao vreme a promenljiva ω kao frekvenciju-učestalost, ova osobina nam kaže da je pomeranje u vremenskom domenu ekvivalentno rotaciji u frekvencijskom domenu. Važi i obrnuto, da modulacija u vreme-nskom domenu odgovara pomeranju u frekvencijskom domenu, što nam daje sledeća teorema:

Teorema 1.2.5. Ako funkcija $f(x)$ pripada skupu $G(\mathbb{R})$ i ako je $a \in \mathbb{R}$ onda važi

$$\mathcal{F}(e^{iax} f(\cdot))(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega - a).$$

Dokaz teoreme 1.2.5.:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{iax} f(\cdot))(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i(\omega - a)x} dx = \mathcal{F}(f)(\omega - a). \end{aligned}$$

Teorema 1.2.6. (Formula modulacije) Ako $f \in G(\mathbb{R})$ i ako je $a \in \mathbb{R}$ proizvoljno, onda važi:

$$\mathcal{F}(f(\cdot) \cos a \cdot)(\omega) = \frac{1}{2} (\mathcal{F}(f)(\omega - a) + \mathcal{F}(f)(\omega + a)),$$

$$\mathcal{F}(f(\cdot) \sin a \cdot)(\omega) = \frac{1}{2i} (\mathcal{F}(f)(\omega - a) - \mathcal{F}(f)(\omega + a)).$$

Dokaz teoreme 1.2.6.:

Iz Ojlerove formule $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ sledi $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, odnosno $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$, pa odatle i iz prethodne osobine sledi da važi:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(\cdot) \cos a \cdot)(\omega) &= \frac{1}{2} (\mathcal{F}(f(\cdot)e^{ia \cdot})(\omega) + \mathcal{F}(f(\cdot)e^{-ia \cdot})(\omega)) \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{F}(f)(\omega - a) + \mathcal{F}(f)(\omega + a)),\end{aligned}$$

odnosno,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(\cdot) \sin a \cdot)(\omega) &= \frac{1}{2i} (\mathcal{F}(f(\cdot)e^{ia \cdot})(\omega) - \mathcal{F}(f(\cdot)e^{-ia \cdot})(\omega)) \\ &= \frac{1}{2i} (\mathcal{F}(f)(\omega - a) - \mathcal{F}(f)(\omega + a)).\end{aligned}$$

Teorema 1.2.7. (Formula izvoda) Ako je funkcija $f \in G(\mathbb{R})$ neprekidna i diferencijabilna i za njen izvod važi $f' \in G(\mathbb{R})$ onda važi:

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega \mathcal{F}(f)(\omega).$$

Dokaz teoreme 1.2.7.:

Kako je funkcija f apsolutno integrabilna važi da je $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Po definiciji nesvojstvenog integrala imamo da je:

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\omega x} dx = \lim_{L, M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^L f'(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Parcijalnom integracijom dobijamo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-M}^L f'(x) e^{-i\omega x} dx &= \frac{1}{2\pi} \left[f(x) e^{-i\omega x} \Big|_{-M}^L - \int_{-M}^L f(x) (-i \cdot \omega) e^{-i\omega x} dx \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[f(L) e^{-i\omega L} - f(-M) e^{i\omega M} + i\omega \int_{-M}^L f(x) e^{-i\omega x} dx \right]\end{aligned}$$

Iz $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ sledi $\lim_{a \rightarrow b} f(a) = f(b)$, te je

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = \lim_{L, M \rightarrow \infty} \frac{i\omega}{2\pi} \int_{-M}^L f(x) e^{-i\omega x} dx = i\omega \mathcal{F}(f)(\omega).$$

Važi i uopštenje ove formule, tj. ako su funkcije $f, f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ neprekidno diferencijabilne i ako je $f^{(n)} \in G(\mathbb{R})$ važi:

$$\mathcal{F}(f^{(n)})(\omega) = (i\omega)^n \mathcal{F}(f)(\omega).$$

Teorema 1.2.8. (Množenje polinomom) Ako je funkcija $f \in G(\mathbb{R})$ takva da integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)| dx$ konvergira, onda je Furijeova transformacija funkcije $xf(x)$ neprekidno diferencijabilna i važi:

$$\mathcal{F}(xf(x))(\omega) = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}(f)(\omega).$$

Dokaz teoreme 1.2.8.:

Ako je funkcija f neprekidna na celom $\mathbb{R}$, iz $\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)| dx < \infty$ sledi da je integral $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-i\omega x} dx$ uniformno konvergentan na $\mathbb{R}$. Korišćenjem Lajbnicovog pravila dobijamo da važi:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}(f)(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\omega} [f(x)e^{-i\omega x}] dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} -ixf(x)e^{-i\omega x} dx \\ &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-i\omega x} dx = -i \mathcal{F}(xf(x))(\omega) \end{aligned}$$

U slučaju kada je funkcija f samo po delovima neprekidna, ako sa $\{(a_n, b_n)\}_{n \in I}$ označimo familiju intervala nad kojima je f neprekidna i čija je unija ceo $\mathbb{R}$, onda važi:

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \sum_{n \in I} \frac{1}{2\pi} \int_{a_n}^{b_n} f(x)e^{-i\omega x} dx$$

i važi da navedeni red konvergira uniformno na $\mathbb{R}$. Stoga možemo diferencirati $\mathcal{F}(f)(\omega)$ na isti način pod sumom kao i pod integralom da bi se dobio traženi rezultat. Analogno se može pokazati i uopštenje formule, to jest ako je $f \in G(\mathbb{R})$ i ako za dato $n \in \mathbb{N}$ integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |x^n f(x)| dx$ konvergira, onda je Furijeova transformacija funkcije f n -puta neprekidno diferencijabilna i važi:

$$\mathcal{F}(x^n f(x))(\omega) = i^n \frac{d^n}{d\omega^n} \mathcal{F}(f)(\omega)$$

1.3 Inverzna Furijeova transformacija

Zanima nas da li je i kako moguće rekonstruisati funkciju f ako je poznata njena Furijeova transformacija. Preslikavanje definisano sa:

$$\mathcal{F}(\omega)x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\omega)e^{i\omega x} d\omega$$

zovemo inverzna Furijeova transformacija. Ono što nas zanima je, ako je $\mathcal{F}$ Furijeova transformacija funkcije f , da li se ovakvim preslikavanjem dobija sama f , odnosno da li važi:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\omega)e^{i\omega x} d\omega.$$

Već smo napomenuli da se Furijeova transformacija može definisati na različite načine. Moguće je definisati je sa različitim konstantama ispred integrala, takodje je moguće definisati je i sa $e^{i\omega x}$ u podintegralnoj funkciji. U skladu sa time, i inverzna Furijeova transformacija se može definisati na različite načine. Ono što je bitno je da, dok se u jednoj formuli pojavljuje $e^{-i\omega x}$, u drugoj treba da je $e^{i\omega x}$ i takodje proizvod konstanti ispred oba integrala treba da je jednak $\frac{1}{2\pi}$.

Da bismo dokazali da je integral od gore inverzni proces, korišćemo sledeću teoremu, tzv. Fubinijevu teoremu o razmeni redosleda integracije.

Teorema 1.3.1. (*Fubinijeva teorema*) Neka je $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ po delovima neprekidna funkcija. Pretpostavimo da integrali $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)| dx$ i $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)| dy$ konvergiraju. Tada, ako konvergira jedan od integrala:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)| dx dy \quad \text{ili} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)| dy dx$$

onda konvergira i drugi i integrali:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx$$

su međusobno jednaki.

Teorema 1.3.2. (*O inverznoj Furijeovoj transformaciji*) Ako funkcija f pripada skupu $G(\mathbb{R})$, onda za svaku tačku $x \in \mathbb{R}$ u kojoj postoje jednostrani izvodi funkcije f važi:

$$\frac{f_-(x) + f_+(x)}{2} = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \mathcal{F}(f)(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

Dokaz teoreme 1.3.2.:

Korišćenjem Fubinijeve teoreme dobijamo:

$$\begin{aligned} \int_{-M}^M \mathcal{F}(\omega) e^{i\omega x} d\omega &= \int_{-M}^M \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy \right] e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \left[\int_{-M}^M e^{-i\omega y} e^{i\omega x} d\omega \right] dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \left[\frac{e^{i\omega(x-y)}}{i(x-y)} \Big|_{-M}^M \right] dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \frac{2 \sin M(x-y)}{x-y} dy \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{f(y) \sin M(x-y)}{x-y} dy + \frac{1}{\pi} \int_x^{+\infty} \frac{f(y) \sin M(x-y)}{x-y} dy$$

Uvodjenjem smene $t = y - x$ dobijamo:

$$\int_{-M}^M \mathcal{F}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt$$

Dalje treba dokazati da su granične vrednosti poslednja dva sabirka kada $M \rightarrow \infty$ jednake polovinama jednostranih izvoda funkcije f , tačnije:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt = \frac{f_+(x)}{2}$$

i

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt = \frac{f_-(x)}{2}$$

Pokazujemo prvi rezultat. S obzirom da važi:

$$\int_0^{+\infty} f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt = \int_0^{\pi} f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt + \int_{\pi}^{+\infty} f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt$$

uvešćemo novu funkciju:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x+t)}{t}, & t > \pi \\ 0, & t \leq \pi \end{cases}$$

Kako je po uslovu teoreme $f \in G(\mathbb{R})$ sledi da je i $g \in G(\mathbb{R})$ te iz dokaza teoreme 1.1.1. (treći deo - opadanje u beskonačnosti) sledi:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \sin Mtdt = 0, \quad \text{to jest,} \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{+\infty} f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt = 0$$

Posmatramo graničnu vrednost;

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt = \frac{f_+(x)}{2}$$

Za funkciju h definisanu sa $h(t) = (f(x+t) - f_+(t))/t$ važi da je po delovima neprekidna na $[0, \pi]$ pa se na nju može primeniti osobina opadanja u beskonačnosti, te važi:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) - f_+(x) + f_+(x)) \frac{\sin Mt}{t} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) - f_+(x)}{t} \sin Mt dt + \frac{1}{\pi} f_+(x) \int_0^\pi \frac{\sin Mt}{t} dt \right) \\
&= \frac{1}{\pi} f_+(x) \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sin Mt}{t} dt
\end{aligned}$$

Ostaje da se pokaže da je poslednja granična vrednost jednaka $\frac{\pi}{2}$.

Uvodimo smenu $u = Mt$ pa dobijamo:

$$\int_0^\pi \frac{\sin Mt}{t} dt = \int_0^{M\pi} \frac{\sin u}{u} du.$$

Dakle važi:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sin Mt}{t} dt = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du.$$

Kako je funkcija $\frac{\sin u}{u}$ neprekidna na intervalu $(0, +\infty)$, da bi se dokazalo da je nesvojstveni integral $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du$ konvergentan, dovoljno je da se pokaže da $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R \frac{\sin u}{u} du$ postoji za svako $a > 0$.

Parcijalnom integracijom dobijamo

$$\begin{aligned}
\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R \frac{\sin u}{u} du &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-\frac{\cos u}{u} \Big|_a^R - \int_a^R \frac{\cos u}{u^2} du \right) \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-\frac{\cos R}{R} + \frac{\cos a}{a} - \int_a^R \frac{\cos u}{u^2} du \right)
\end{aligned}$$

Iz $-1 \leq \cos R \leq 1$ sledi $-\frac{1}{R} \leq \frac{\cos R}{R} \leq \frac{1}{R}$ a $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} = 0$ pa je i

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\cos R}{R} = 0$$

Analogno dobijamo i $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\cos R}{R^2} = 0$ odnosno $\left| \frac{\cos u}{u^2} \right| \leq \frac{1}{u^2}$ pri čemu je funkcija $\frac{1}{u^2}$ apsolutno integrabilna na $[a, \infty)$ za $a > 0$ pa

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R \frac{\cos u}{u^2} du = \int_a^\infty \frac{\cos u}{u^2} du$$

konvergira te i polazni integral konvergira.

Njegova vrednost je, prema tome, jednaka sa:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{R_m} \frac{\sin u}{u} du$$

gde je $\{R_m\}_{m=1}^\infty$ proizvoljan niz koji teži ka beskonačnosti. Izborom tačaka $R_m = (m + 1/2)/\pi$ dobija se:

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{(m+1/2)\pi} \frac{\sin u}{u} du.$$

Smenom $t = u/(m + 1/2)$ dobija se:

$$\int_0^{(m+1/2)\pi} \frac{\sin u}{u} du = \int_0^\pi \frac{\sin(m + 1/2)t}{t} dt.$$

Dalje imamo:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sin(m + 1/2)t}{t} dt &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{2 \sin(t/2) \sin(m + 1/2)t}{2t \sin(t/2)} dt \\ &= \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin(x/2)}{x} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

gde smo koristili da za Dirihleovo jezgro reda $m \in \mathbb{N}$ definisano sa

$$D_m(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m \cos k$$

važi

$$D_m(x) = \frac{1}{2} \frac{\sin(m + 1/2)x}{\sin(x/2)} \quad i \quad važi \quad \int_0^\pi D_m(x) dx = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

Granična vrednost $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M g(x) dx$, ako postoji, naziva se Košijeva glavna vrednost integrala i označava se sa $P.V. \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$. Ako nesvojstveni integral $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$ konvergira onda konvergira i $P.V. \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$ a obrnuto ne mora da važi.

Dakle, ako je f neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$ i ako je f' po delovima neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$, onda su levi i desni izvod funkcije f u tački $x \in \mathbb{R}$ jednaki pa iz prethodne teoreme sledi da važi:

$$f(x) = P.V. \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ako važi da $\mathcal{F}(f)(\omega) \in G(\mathbb{R})$ onda su nesvojstveni integral funkcije $\mathcal{F}(f)(\omega) e^{i\omega(-x)}$ i odgovarajuća Košijeva glavna vrednost jednaki, pa važi:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{F}(f)(\omega))(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\omega) e^{i\omega(-x)} d\omega = \frac{1}{2\pi} f(-x) \end{aligned}$$

odakle sledi da važi inverzna formula:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad (1.2)$$

Da smo kao definiciju Furijeove transformacije koristili

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx,$$

dobili bismo da je formula inverzne transformacije:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

1.4 Konvolucija

U ovom delu ćemo definisati i ilustrovati konvoluciju dveju funkcija a zatim navesti i dokazati teoremu o Furijeovoj transformaciji konvolucije, koja je od velikog značaja u primenama Furijeove transformacije. Zatim ćemo pokazati na primeru filtriranja digitalnih slika kako se dato tvrdjenje koristi.

Definicija 1.4.1. *Neka su f i g funkcije čiji je domen ceo $\mathbb{R}$. Konvolucija funkcija f i g , u oznaci $f * g$ definiše se na sledeći način:*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y)g(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ako nesvojstveni integral iz definicije postoji, smenom se dobija:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x - y)dy$$

odnosno konvolucija je komutativna operacija. Iz Fubinijeve teoreme direktno sledi:

Lema 1.4.1. *Ako $f, g \in G(\mathbb{R})$, onda je konvolucija $f * g$ dobro definisana i apsolutno integrabilna funkcija.*

Osvrnimo se na to šta nam je dato u definiciji. Za signal $f(y)$, gde je y promenljiva po kojoj integralimo u definiciji konvolucije, $f(-y)$ je njemu simetričan signal u odnosu na ordinatu. Kada uvrstimo promenljivu $x \in \mathbb{R}$, $f(x - y)$ predstavlja signal $f(y)$ pomeren ulevo po apcisi za x . Kada pustimo da promenljiva x prolazi kroz $\mathbb{R}$ dobijamo signal f koji se kreće duž x -ose i prelazi preko fiksnog signala $g(y)$. Konvolucija onda predstavlja integraciju pri kojoj preko zadatog signala g prelazi drugi signal f koji je dizajniran na odgovarajući način da bi se dobio željeni efekat. Grafički ćemo to prikazati na sledećem primeru:

PRIMER 2. Posmatramo karakterističnu funkciju jediničnog intervala, tzv. jedinični impuls, $\chi_{[0,1]}$. Odredimo funkciju $\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}(x)$:

$$\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[0,1]}(y) \chi_{[0,1]}(x-y) dy = \int_{x-1}^x \chi_{[0,1]}(y) dy,$$

jer je funkcija $\chi_{[0,1]}(x-y)$ jednaka jedan ako $y \in [x-1, x]$, a nula inače. Dakle, dobijamo:

$$\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}(x) \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ ili } 2 \leq x \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Na slici 1.4.1. vidimo kako se jedan signal kreće po vremenskoj osi i prelazi preko drugog signala. Konvolucijom smo u ovom primeru dobili širi interval nad kojim je funkcija različita od nule nego u slučaju početne a takodje je dobijena funkcija neprekidna dok je polazna bila po delovima neprekidna.

Osnovno svojstvo konvolucije je da se ona Furijeovom transformacijom transformiše u množenje u frekvencijskom domenu, što je od ključnog značaja za primene Furijeove transformacije u obradi signala kao i u diferencijalnim jednačinama. Dakle, pokazaćemo da važi naredna teorema:

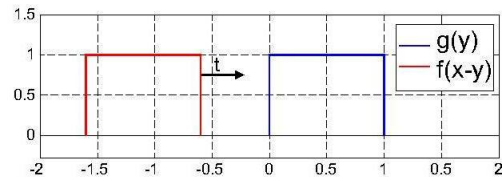
Teorema 1.4.1. Za svake dve funkcije $f, g \in G(\mathbb{R})$ važi:

$$\mathcal{F}(f * g)(\omega) = 2\pi \mathcal{F}(f)(\omega) \cdot \mathcal{F}(g)(\omega)$$

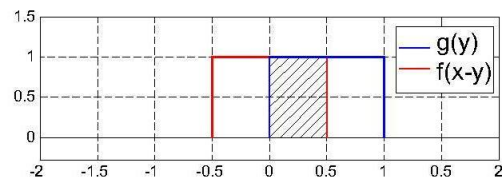
Dokaz teoreme 1.4.1.:

Iz leme 1.4.1. sledi da je funkcija $f * g$ dobro definisana i apsolutno integrabilna. Primenom Fubinijeve teoreme dobija se:

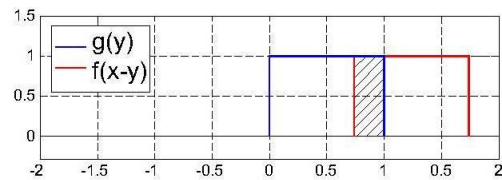
$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g)(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) g(y) dy \right) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) e^{-i\omega(x-y)} g(y) e^{-i\omega y} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) e^{-i\omega(x-y)} dx \right) g(y) e^{-i\omega y} dy \end{aligned}$$



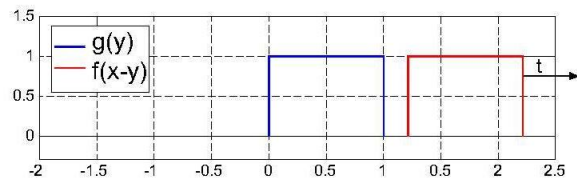
(a) Signali se ne preklapaju



(b) Signal f "klizi" u signal g



(c) Signal f "klizi" iz signala g



(d) Signali se ne preklapaju

Slika 1.4.1.

Smenom promenljive dobija se:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) e^{-i\omega(x-y)} dx = \mathcal{F}(f)(\omega)$$

odakle sledi:

$$\mathcal{F}(f * g)(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-i\omega y} dy = 2\pi \mathcal{F}(f)(\omega) \mathcal{F}(g)(\omega). \quad \square$$

Sada ćemo pokazati primenu ove teoreme u signalnoj analizi. Za početak uvodimo pojam sistema i impulsnog odziva sistema.

Kao što znamo, signal nam daje opis kako jedan parametar varira u odnosu na neki drugi parametar.

Sistem predstavlja bilo koji proces koji proizvodi neki izlazni signal kao odgovor na neki ulazni signal. Razlikujemo neprekidne sisteme koji primaju i izbacuju neprekidne signale, kao npr. u analognoj elektronici, i diskretne sisteme koji primaju i izbacuju diskretne signale, kao što npr. kompjuterski programi manipulišu vrednostima koje se čuvaju u matricama.

Preciznije, sistem je preslikavanje L koje ulaznom signalu f dodeljuje izlazni signal y , koji se naziva i odziv sistema. Postoji mnogo razloga za ispitivanje sistema. To može biti potreba za dizajniranjem sistema koji uklanja šum u elektrokardiogramu ili sistema koji pojačava oštrinu unete slike ili uklanjanja efekat eha u snimanju zvuka. U nekim drugim slučajevima, sistem može imati efekat ometanja koje je potrebno izmeriti ili može predstavljati neki fizički proces koji želimo analizirati.

Većina korisnih sistema spada u kategoriju linearnih sistema što je bitno jer bez osobine linearnosti bismo morali ispitivati pojedinačne karakteristike nepovezanih sistema a ovako se možemo fokusirati na osobine linearnih sistema uopšte.

Kažemo da je sistem linearan ako važi:

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g),$$

odnosno ako pri unosu linearne kombinacije signala f i g u sistem, kao izlaz dobijamo linearnu kombinaciju njihovih izlaznih signala $L(f)$ i $L(g)$.

Sistem je vremenski neprekidan ako su ulazna i izlazna funkcija definisane nad nekim vremenskim intervalom $[a, b]$.

Kažemo da je sistem invarijantan u vremenu ako iz $f(t)x \mapsto g(t)$ sledi $f(t - t_0)x \mapsto g(t - t_0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$.

Linearne vremensko-neprekidne i vremensko-invarijantne sisteme označavamo sa LTC.

Signal oblika $ce^{i\omega t}$ gde su $c \in \mathbb{C}$ i $\omega \in \mathbb{R}$ dati fiksni a $t \in \mathbb{R}$ zovemo vremenski harmonik. Ako kompleksan broj c prikažemo u obliku $c = Ae^{i\phi_0}$ onda važi $ce^{i\omega t} = Ae^{i(\omega t + \phi_0)}$ gde se A zove amplituda, ω frekvencija a ϕ_0 početna faza vremenskog harmonika.

Odziv LTC sistema L za vremenski harmonik je takodje vremenski harmonik oblika $H_\omega e^{i\omega t}$. Funkciju $H(\omega) = H_\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ zovemo frekvencijski odziv sistema, funkcija sistema ili funkcija prelaza (prenosa). Kako važi $H(\omega) = |H(\omega)| e^{i\Phi(\omega)}$, $|H(\omega)|$ je amplituda odziva a $\Phi(\omega)$ faza odziva.

Ako posmatramo funkciju f i njenu Furijeovu transformaciju $\mathcal{F}$ i spektar $\mathcal{F}$ sadrži neželjene frekvencije, njih možemo odstraniti propuštanjem kroz određene filtere. Na primer, frekvencije iznad neke granice tolerancije $\omega_0 > 0$

mogu se ukloniti množenjem funkcije $\mathcal{F}(\omega)$ karakterističnom funkcijom intervala $[-\omega_0, \omega_0]$. Znači, modifikacije se vrše množenjem u frekvencijskom domenu. Stoga, ako je $Y(\omega) = H(\omega) \cdot \mathcal{F}(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$ modifikovani spektar funkcije f , onda u vremenskom domenu njemu, prema teoremi o konvoluciji, odgovara konvolucija funkcija f i h , gde je H Furijeova transformacija funkcije h , dakle važi:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} (f * h)(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dalje posmatramo Dirakov delta impuls (tzv. delta funkciju) δ , koji nije funkcija u pravom smislu reči i definisan je kontradiktornim uslovima:

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \delta(x) = \infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) = 1.$$

Za ovako definisani Dirakov delta impuls važi da je on neutralni (jedinični) element za operaciju konvolucije:

$$f(t)(f * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t - \tau)d\tau, \quad t \in \mathbb{R}$$

Odziv sistema s obzirom na Dirakovu deltu zovemo impulsni odziv, označimo ga sa $h = L\delta$.

Za LTC sisteme važi da je $h(\cdot - \tau)$ odziv za $\delta(\cdot - \tau)$, za svako $\tau \in \mathbb{R}$. Linearnost dozvoljava zamenu beskonačnih suma integralima pa važi:

$$\begin{aligned} Lf(t) &= L(f * b)(t) = L \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)L\delta(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau = (h * f)(t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ovo znači da se LTC sistemi mogu okarakterisati konvolucijom i impulsnim odzivom.

Ako je ulazni signal vremenski harmonik $e^{i\omega t}$ i ako sa $H(\omega)$ označimo Furijeovu transformaciju impulsnog odziva $h(t)$, onda iz prethodne jednakosti i definicije konvolucije sledi da važi:

$$Le^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-\tau)} h(\tau)d\tau = H(\omega)e^{i\omega t}.$$

Dakle, frekvencijski odziv sistema kada je na ulazu vremenski harmonik je Furijeova transformacija njegovog impulsnog odziva.

Ako sa F, Y, H označimo Furijeove transformacije ulaza f , izlaza y i impulsnog odziva h , redom, onda iz gorepomenute jednakosti i teoreme o konvoluciji, sledi da je

$$Y(\omega) = 2\pi H(\omega)F(\omega).$$

Ako se pored toga, može koristiti i formula inverzne Furijeove transformacije za izlaz y , dobija se da važi:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega)e^{i\omega t}d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Ovo nam govori da je za fiksirano t , svaka frekvencijska komponenta $e^{i\omega t}$ spektra F ulaznog signala f pojačana ili oslabljena sa H pa $H = \mathcal{F}h$ zapravo ima ulogu filtriranja u frekvencijskom domenu.

Sada ćemo na primeru digitalne slike pokazati efekat nekih drugih filtera i primenu teoreme o konvoluciji. Digitalna crno-bela slika predstavlja dvodimenzionalni diskretni signal, predstavljen u vidu matrice celih brojeva koji predstavljaju jačinu svetlosti datog piksela. Diskretna Furijeova transformacija funkcije (slike) $f(x, y)$ veličine $M \times N$ data je matricom:

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)e^{-i2\pi(ux/M+vy/N)}$$

pri čemu se izraz računa za $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$ i $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Slično, za dato $F(u, v)$, $f(u, v)$ možemo dobiti formulom inverzne diskretne Furijeove transformacije:

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v)e^{i2\pi(ux/M+vy/N)}.$$

Diskretna konvolucija dve funkcije $f(x, y)$ i $g(x, y)$ veličine $M \times N$ označava se sa $f(x, y) * g(x, y)$ i definiše se sa:

$$f(x, y) * g(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)g(x-m, y-n)$$

I u diskretnom slučaju važi teorema o konvoluciji pa je

$$f(x, y) * g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)G(u, v).$$

Ako nam $g(x, y)$ predstavlja matricu filtera koju želimo da primenimo na datu sliku $f(x, y)$, filtriranje slike datim filterom u prostornom domenu

(ovde umesto vremenske imamo prostornu promenljivu) vrši se konvolucijom matrica. Medjutim, teorema o konvoluciji nam omogućava da filtriranje izvršimo u frekvencijskom domenu, pri čemu i sliku i filter preslikavamo u frekvencijski domen diskretnom Furijeovom transformacijom, zatim dobijene frekvencijske reprezentacije matrica množimo i dobijenu matricu inverznom diskretnom Furijeovom transformacijom vraćamo u prostorni domen i tako dobijamo prostornu reprezentaciju filtrirane slike koju možemo prikazati kao i inače.

Razlog što se filtriranje radi u frekvencijskom domenu umesto u prostornom je što, zahvaljujući algoritmima za brzo izračunavanje diskretne Furijeove transformacije, značajno je brže izvršiti račun množenjem frekvencijskih matrica nego izvesti konvoluciju matrica u prostornom domenu. Što je veća veličina matrica (slike), razlika je veća.

Na slici 1.2.1. vidimo u gornjem levom uglu originalnu crno-belu sliku Lena. Primenom filtera izoštravanja koji je dat matricom formata 3×3 :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

dobijamo izoštrenu sliku, prikazanu u gornjem desnom uglu.

Primenom filtera zamagljenja, datog matricom:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

dobija se zamagljena slika prikazana u donjem levom uglu, a primenom reljefnog filtera:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

dobija se slika u donjem desnom uglu. Filtriranje je uradjeno korišćenjem programskog paketa Matlab i ugradjenih funkcija za brzo izračunavanje diskretne Furijeove transformacije.



Slika 1.2.1. - Rezultati filtriranja slike

1.5 Proširenje definicije na prostor L^2

Kao što smo videli, da bi Furijeova transformacija bila definisana, dovoljno je da funkcija f bude u skupu L^1 apsolutno integrabilnih funkcija. Medjutim teško je okarakterisati sliku funkcije $\mathcal{F}$ u L^1 , te ćemo uvesti pojam restriktivnijeg skupa na kome se $\mathcal{F}$ lepo ponaša, a koji se zove Švarcov prostor funkcija ili drugačije, prostor brzo opadajućih funkcija.

Definicija 1.5.1. (*Švarcova klasa*) Švarcov prostor funkcija $S(\mathbb{R})$ sastoji se od svih beskonačno puta diferencijabilnih funkcija (tzv. glatkih funkcija) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ za koje važi:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m f^{(n)}(x)| = \|x^m f^{(n)}(x)\|_{\infty} < \infty, \quad m, n \geq 0.$$

Dakle, $f \in S(\mathbb{R})$ ako i samo ako za svaki izbor $m, n \in \mathbb{N}_0$ postoje konstante $C_{m,n} > 0$ tako da važi:

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{C_{m,n}}{|x|^m}, \quad x \neq 0,$$

odnosno i funkcija i svi njeni izvodi opadaju u beskonačnosti brže od recipročne vrednosti bilo kojeg polinoma.

Skup $S(\mathbb{R})$ je vektorski prostor u odnosu na uobičajene operacije. Jedna od brzo opadajućih funkcija je npr. funkcija $e^{-\pi x^2}$. Takodje, prostor $C_c^\infty(\mathbb{R})$ beskonačno puta diferencijabilnih funkcija kompaktnog nosača je takodje podskup od $S(\mathbb{R})$. Kako je $C_c^\infty(\mathbb{R})$ gust u svim $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, u normi prostora L^p , sledi da je i $S(\mathbb{R})$ gust u tim prostorima.

Kako je očigledno i $S(\mathbb{R}) \subseteq G(\mathbb{R})$, Furijeova transformacija je dobro definisana na $S(\mathbb{R})$ i za brzo opadajuće funkcije važi sve što smo do sada dokazali.

Ovaj prostor je bitan jer za Furijeovu transformaciju važi sledeća teorema koju ćemo navesti bez dokaza:

Teorema 1.5.1. *Furijeova transformacija je homomorfizam vektorskog prostora $S(\mathbb{R})$ na njega samog, sa inverznom transformacijom definisanom sa (1.2).*

Iz ove teoreme direktno sledi Planšerov identitet na $S(\mathbb{R})$:

Teorema 1.5.2. *Neka su $f, g \in S(\mathbb{R})$. Tada važi:*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\omega) \overline{\mathcal{F}(g)(\omega)} d\omega.$$

Za $f = g$ direktno se dobija da za svaku funkciju $f \in S(\mathbb{R})$ važi:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(\omega)|^2 d\omega,$$

odnosno:

$$\frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\mathcal{F}\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

što je takozvana formula održanja energije. Na levoj strani jednakosti imamo energiju signala u vremenskom domenu a na desnoj njegovu energiju u frekvencijskom domenu.

Sada na osnovu teoreme o ograničenoj linearnoj transformaciji sledi da se $\mathcal{F}$ može jedinstveno proširiti na ograničenu linearnu transformaciju sa $S(\mathbb{R})$ na $L^1(\mathbb{R})$:

Teorema 1.5.3. *je $S \subseteq H_1$ gust podprostor od H_1 i $T : S \rightarrow H_2$ ograničena linearna transformacija za koju važi:*

$$\|Tf\|_{H_2} \leq M \|f\|_{H_1}, \quad f \in S.$$

Tada se T može proširiti jedinstveno na ograničenu linearnu transformaciju iz H_1 u H_2 .

Analogno se Furijeova transformacija može proširiti i na prostor $L^2(\mathbb{R})$, pri čemu se vodi računa o tome da integral iz definicije transformacije ne konvergira u opštem slučaju za sve $f \in L^2(\mathbb{R})$. Koristeći to da je $S(\mathbb{R})$ gust podskup od $L^2(\mathbb{R})$, definišemo Furijeovu transformaciju za $f \in L^2(\mathbb{R})$ kao limes niza funkcija iz $S(\mathbb{R})$ koje konvergiraju ka f u L^2 a koji postoji zbog gustog podskupa, tj.

za $\{h_k\} \subset S(\mathbb{R})$ za koji važi $h_k \rightarrow f$ u L^2 definišemo:

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = L^2 - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_k(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Sledeća lema nam daje jednostavniji način za izračunavanje Furijeove transformacije na $L^2(\mathbb{R})$:

Lema 1.5.1. *Neka je $f \in L^2(\mathbb{R})$. Tada važi:*

$$\mathcal{F}(f) = L^2 - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{|x| \leq R} f(x) e^{-2ix \cdot \omega} dx,$$

$$f(x) = L^2 - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{|\omega| \leq R} \mathcal{F}(\omega) e^{2ix \cdot \omega} d\omega.$$

Na isti način ćemo i definiciju uopštenja Furijeove transformacije proširiti sa Švarcovog prostora na L^1 i L^2 .

Glava 2

Frakciona Furijeova transformacija

U ovom delu rada ilustrovaćemo klasičnu Furijeovu transformaciju kao rotaciju signala u vremensko - frekvencijskoj ravni za ugao $\pi/2$ a onda ćemo dati ideju za definisanje frakcione Furijeove transformacije kao uopštenje koncepta rotacije na proizvoljan ugao. Zatim ćemo izvesti integralni oblik frakcione Furijeove transformacije i pokazati njene osobine, koje su uopštenja odgovarajućih osobina klasične transformacije. Korišćena je literatura [3],[7], [9], [11] [17].

2.1 Rotacija u vremensko-frekvencijskoj ravni

Kao što smo rekli u prethodnom delu, Furijeovu transformaciju za funkciju $f \in S(\mathbb{R})$, gde je $S(\mathbb{R})$ Švarcov prostor funkcija, možemo definisati i sa:

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx,$$

dok je inverzna transformacija tada definisana sa:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

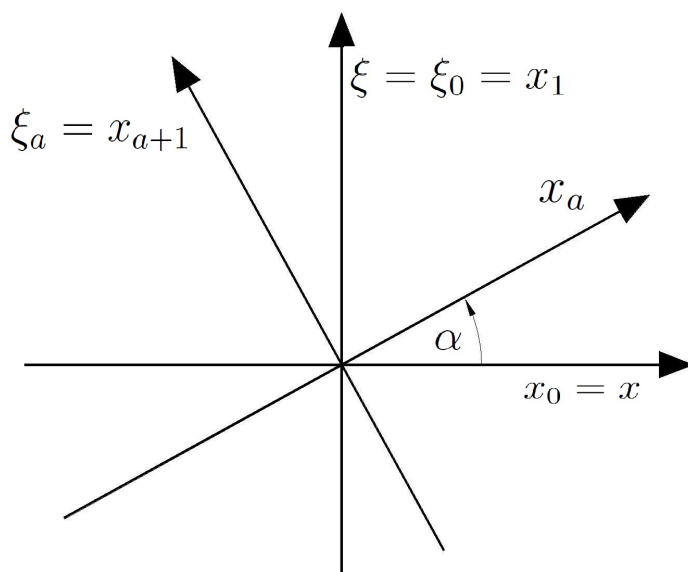
Promenljiva x u definiciji Furijeove transformacije je obično vremenska promenljiva a promenljiva ω predstavlja frekvencijsku promenljivu. Na dalje ćemo koristiti x i ξ kao neutralne promenljive, pri čemu je x promenljiva iz domena funkcije f .

Takodje, uvešćemo oznake za promenljive u rotiranom sistemu osa. Ako imamo koordinatni sistem (x, ξ) , sa $x = x_0$ ćemo označiti promenljivu koja pripada apcisi a sa $\xi = x_1$ promenljivu čije vrednosti su na ordinati, baš kao što su to vreme i frekvencija u vremensko-frekvencijskoj ravni. Ako se ovakav sistem zarotira suprotno od smera kazaljke na satu za ugao $\alpha = a\pi/2$, $a \in \mathbb{R}$, onda ćemo dobijene rotirane promenljive označavati sa x_a i ξ_a , kao što je prikazano na slici 2.1.1. Dakle, dobija se da je:

$$\begin{bmatrix} x_a \\ \xi_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix},$$

što se može označiti i sa $(x_a, \xi_a) = \mathcal{R}_a(x_0, \xi_0)$. Oznaku $\mathcal{R}$ ćemo koristiti i kao oznaku operatora koji deluje na funkciju dve promenljive, u smislu $\mathcal{R}_a f(x, \xi) = f(\mathcal{R}_a(x, \xi)) = f(x_a, \xi_a)$.

Pri tome uvek pretpostavljamo da je $\xi_a = x_{a+1}$, tj. da su zarotirane ose uvek ortogonalne. Ujedno to znači i $x_{a+2} = \xi_{a+1} = -x_a$ i $x_{a-1} = -\xi_a$.



Slika 2.1.1.

Sada, neka nam je dat vremenski signal $f(x)$ promenljive $x = x_0$, dakle ta promenljiva leži na apcisi. Furijeova transformacija ovog signala, funkcija $\mathcal{F}(f)(\xi)$ je onda funkcija promenljive $\xi = x_2$ (frekvencije) i ta promenljiva onda uzima vrednosti na ordinati. Stoga, klasičnom Furijeovom transformacijom se reprezentacija funkcije menja iz reprezentacije u vremenskom

domenu ($x = x_0$) u reprezentaciju u frekvencijskom domenu ($\xi = x_1$), što zapravo odgovara rotaciji za ugao $\pi/2$ u smeru suprotnom od smera kazaljke na satu, u (x, ξ) -ravni.

Već smo pokazali da važi $(\mathcal{F}^2 f)(x) = f(-x)$, te $\mathcal{F}^2$ zovemo operatorom parnosti, što znači da se je osa kodomena zapravo zaokrenuta vremenska osa, tj. vremenska osa rotirana za ugao π .

Analogno, primenom Furijeove transformacije tri puta zaredom, dobijamo da je

$$(\mathcal{F}^3 f)(\xi) = (\mathcal{F}(\mathcal{F}^2 f))(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x) e^{-i\xi x} dx = \mathcal{F}(-\xi),$$

to jest važi:

$$(\mathcal{F}^3 f)(\xi) = (\mathcal{F} f)(-\xi) = \mathcal{F}(-\xi).$$

Očigledno, još jednom uzastopnom primenom transformacije, dobijamo rotaciju za još $\pi/2$, odnosno vraćamo se na vremensku osu. To znači da $\mathcal{F}^4$ odgovara identičnom operatoru:

$$(\mathcal{F}^4)(f) = f \quad \text{odnosno} \quad \mathcal{F}^4 = \mathcal{I}.$$

Na osnovu ovog zaključujemo da operator Furijeove transformacije odgovara rotaciji funkcije u vremensko-frekvencijskoj ravni za ugao $\pi/2$, dok inverzni Furijeov operator predstavlja rotaciju za ugao $-\pi/2$.

Frakciona Furijeova transformacija ima više različitih definicija. Intuitivni način za njeno definisanje je da se generalizuje navedeni koncept rotacije za ugao $\pi/2$ u vremensko-frekvencijskoj ravni, odnosno da frakciona Furijeova transformacija predstavlja rotaciju za proizvoljan ugao $\alpha = a\pi/2$, gde $a \in \mathbb{R}$, to jest, da se njom reprezentacija signala f iz vremenskog domena prevede u reprezentaciju na osi negde između vremenske i frekvencijske. Operator ovakve transformacije se označava sa $\mathcal{F}^\alpha$, $\mathcal{F}^a$, ili $\mathcal{F}_\alpha$, zavisno od literature, pri čemu za $\alpha = \pi/2$, odnosno $a = 1$, treba da važi $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_{\pi/2} = \mathcal{F}$.

2.2 Izvodjenje definicije

Frakcionu Furijeovu transformaciju (skraćeno FRFT) uvešćemo za početak na bazi Švarcovog prostora $S(\mathbb{R})$ definisanog u prvom poglavlju. Kao bazu korišćićemo potpun skup karakterističnih vektora operatora $\mathcal{F}$ klasične Furijeove transformacije.

Kako je $\mathcal{F}^4 = \mathcal{I}$, svi karakteristični koreni su u skupu $\{1, -i, -1, i\}$. Pošto ih ima samo 4 različita, karakteristični vektori, koji se u prostoru funkcija

zovu i karakteristične (sopstvene) funkcije, nisu jedinstveni. Jedan od izbora karakterističnih funkcija Furijeovog operatora $\mathcal{F}$ jesu tzv. Hermitsko-Gausovske funkcije:

$$\psi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), \quad n \in \mathbb{N}$$

gde su:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

Hermitski polinomi stepena n .

U skladu sa svojstvom rotacije, označavaćemo operator klasične Furijeove transformacije sa $\mathcal{F}_{\pi/2}$ a njemu inverzni operator sa $\mathcal{F}_{-\pi/2}$.

Kako su $\psi_n(x)$ karakteristične funkcije operatora $\mathcal{F}_{\pi/2}$, to znači da postoje karakteristični koreni λ_n takvi da važi:

$$\mathcal{F}_{\pi/2}(\psi_n) = \lambda_n \psi_n$$

Preciznije,

$$\lambda_n = e^{-in\pi/2} = \lambda^n, \quad \text{gde } \lambda = -i = e^{-i\pi/2}$$

predstavlja rotaciju za ugao $\pi/2$.

Dakle, karakteristična jednačina operatora $\mathcal{F}_{\pi/2}$ je:

$$\mathcal{F}_{\pi/2}(e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x))(\xi) = e^{-in\pi/2} e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi).$$

Posmatrajmo sada uopšteni operator $\mathcal{F}_\alpha$ koji zadovoljava jednačinu:

$$\mathcal{F}_\alpha(e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x))(\xi) = e^{-in\alpha} e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi).$$

Iz definicije Hermitskih polinoma sledi da se operator $\mathcal{F}_\alpha$ može prikazati u obliku $e^{-i\alpha A}$ te je:

$$e^{-i\alpha A}(e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x))(\xi) = e^{-in\alpha} e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi).$$

Sada diferenciranjem po α dobijamo:

$$e^{-i\alpha A}(e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x))(\xi) \cdot iA(e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x))(\xi) = in e^{-in\alpha} e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi),$$

pa za $\alpha = 0$ dobijamo:

$$A(e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x))(\xi) = n e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi).$$

Kako su Hermitski polinomi rešenja diferencijalne jednačine

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0,$$

za njih važi:

$$H_n(x)'' - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

Primenom ove jednačine dobićemo oblik parametra A . Naime, važi:

$$\begin{aligned} ne^{-x^2/2}H_n(x) &= e^{-x^2/2} \left(xH_n'(x) - \frac{1}{2}H_n''(x) \right) \\ &= xe^{-x^2/2}H_n'(x) - \frac{1}{2}e^{-x^2/2}H_n''(x) \pm \frac{1}{2}e^{-x^2/2}H_n(x) \pm \frac{1}{2}x^2e^{-x^2/2}H_n(x) \\ &= -\frac{1}{2} \left[\left(-e^{-x^2/2} + x^2e^{-x^2/2} \right) H_n(x) - 2xe^{-x^2/2}H_n'(x) + e^{-x^2/2}H_n''(x) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2}x^2e^{-x^2/2}H_n(x) - \frac{1}{2}e^{-x^2/2}H_n(x) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} \left(-xe^{-x^2/2} \right) H_n(x) - xe^{-x^2/2}H_n'(x) + \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2/2}H_n'(x) \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}x^2e^{-x^2/2}H_n(x) - \frac{1}{2}e^{-x^2/2}H_n(x) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} \left(-xe^{-x^2/2}H_n(x) \right) + \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2/2}H_n'(x) \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}x^2e^{-x^2/2}H_n(x) - \frac{1}{2}e^{-x^2/2}H_n(x) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(e^{-x^2/2}H_n(x) \right) \right) + \frac{1}{2}x^2e^{-x^2/2}H_n(x) - \frac{1}{2}e^{-x^2/2}H_n(x) \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \left(e^{-x^2/2} H_n(x) \right) + \frac{1}{2} x^2 e^{-x^2/2} H_n(x) - \frac{1}{2} e^{-x^2/2} H_n(x),$$

odnosno parametar A je oblika:

$$A = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2}.$$

Kako su Hermitsko-Gausovske funkcije baza prostora $S(\mathbb{R})$, dovoljno je definisati operator frakcione Furijeove transformacije na njima.

Dakle, korišćenjem oznake $\alpha = a\pi/2$, $a \in \mathbb{R}$, operator frakcione Furijeove transformacije definišemo sa:

$$\mathcal{F}_\alpha \psi_n = \mathcal{F}^a \psi_n = e^{-ina\pi/2} \psi_n = \lambda_n^a \psi_n = \lambda_a^n \psi_n,$$

gde $\lambda_a = e^{-ia\pi/2} = e^{-i\alpha} = \lambda^a$ dovodi do rotacije za ugao α . Oznake $\mathcal{F}_\alpha$ i $\mathcal{F}^a$ su ekvivalentne i koristićemo ih ravnopravno u zavisnosti od konteksta, pri čemu se donji indeks uvek odnosi na ugao α a gornji na a .

Ovim su ispunjeni uslovi da $\mathcal{F}^1$ predstavlja operator klasične Furijeove transformacije i ovako operator frakcione Furijeove transformacije predstavlja stepen klasične.

2.3 Integralna reprezentacija frakcione Furijeove transformacije

Kao što smo rekli, Hermitsko-Gausovske funkcije su karakteristične funkcije operatora $\mathcal{F}_\alpha$, $\alpha = a\pi/2$, $a \in \mathbb{R}$. Za svaku funkciju $f(x)$ iz $S(\mathbb{R})$, kao i za svaku funkciju iz L^2 , važi da se može prikazati preko ovih funkcija, u smislu:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-x^2/2} H_n(x),$$

pri čemu su koeficijenti a_n dati sa:

$$a_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) e^{-x^2/2} f(x) dx.$$

Odavde, koristeći karakterističnu jednačinu za $\mathcal{F}_\alpha$ i linearnost $\mathcal{F}_\alpha$ koja sledi direktno iz oblika operatora, dobijamo:

$$\mathcal{F}_\alpha(f) = \mathcal{F}_\alpha \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathcal{F}_\alpha(\psi_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-in\alpha} \psi_n.$$

Ovo nam daje definiciju frakcione Furijeove transformacije u vidu reda. Na dalje ćemo izvesti integralni oblik.

Zamenom izraza za a_n dobijamo iz prethodne jednakosti:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\alpha(f)(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} e^{-n\alpha} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) e^{-x^2/2} f(x) dx \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} e^{-n\alpha} H_n(\xi) H_n(x) e^{-(x^2+\xi^2)/2} f(x) dx.\end{aligned}\quad (2.1)$$

Sada koristimo Mehlerovu formulu koja glasi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n\alpha} H_n(\xi) H_n(x)}{2^n n! \sqrt{\pi}} = \frac{\exp \left\{ \frac{2x\xi e^{-i\alpha} - e^{-2i\alpha}(\xi^2+x^2)}{1-e^{-2i\alpha}} \right\}}{\sqrt{\pi} (1-e^{-2i\alpha})},$$

pa dobijamo da je:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\alpha(f)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{1-e^{-2i\alpha}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ \frac{2x\xi e^{-i\alpha} - e^{-2i\alpha}(\xi^2+x^2)}{1-e^{-2i\alpha}} \right\} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ -\frac{\xi^2+x^2}{2} \right\} f(x) dx.\end{aligned}$$

Kako bismo dobili jednostavniji oblik, iskoristićemo jednakosti date u sledećoj lemi:

Lema 2.3.1. *Za svako $x, \xi \in \mathbb{R}$ i svako $\alpha = a\pi/2$, $a \in \mathbb{R}$, takvo da je $\sin \alpha \neq 0$, pri čemu je $\hat{\alpha} = \text{sgn}(\sin \alpha)$, važi:*

1. $\frac{2x\xi e^{-i\alpha}}{1-e^{-2i\alpha}} = -ix\xi \csc \alpha$
2. $\frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{1-e^{-2i\alpha}}} = \frac{e^{-\frac{i}{2}(\frac{\pi}{2}\hat{\alpha}-\alpha)}}{\sqrt{2\pi|\sin \alpha|}}$
3. $\frac{e^{-2i\alpha}}{1-e^{-2i\alpha}} + \frac{1}{2} = -\frac{i}{2} \cot \alpha$

Dokaz:

1. Primenom adicijih formula dobijamo:

$$\begin{aligned}
 \frac{2x\xi e^{-i\alpha}}{1 - e^{-2i\alpha}} &= \frac{2x\xi (\cos \alpha - i \sin \alpha)}{1 - (\cos 2\alpha - i \sin 2\alpha)} = \frac{2x\xi (\cos \alpha - i \sin \alpha)}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - (\cos 2\alpha - i \sin 2\alpha)} \\
 &= \frac{2x\xi (\cos \alpha - i \sin \alpha)}{(\cos \alpha - i \sin \alpha)(\cos \alpha + i \sin \alpha) - (\cos 2\alpha - i \sin 2\alpha)} \\
 &= \frac{2x\xi (\cos \alpha - i \sin \alpha)}{(\cos \alpha - i \sin \alpha)(\cos \alpha + i \sin \alpha) - (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - 2i \sin \alpha \cos \alpha)} \\
 &= \frac{2x\xi (\cos \alpha - i \sin \alpha)}{(\cos \alpha - i \sin \alpha)(\cos \alpha + i \sin \alpha) - (\cos \alpha - i \sin \alpha)^2} \\
 &= \frac{2x\xi (\cos \alpha - i \sin \alpha)}{(\cos \alpha - i \sin \alpha)(\cos \alpha + i \sin \alpha - \cos \alpha + i \sin \alpha)} \\
 &= \frac{2x\xi}{2i \sin \alpha} = -\frac{ix\xi}{\sin \alpha} = -ix \csc \alpha
 \end{aligned}$$

2. Pokazujemo slučaj kada je $\sin \alpha > 0$. Tada treba pokazati:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2i\alpha}}} = \frac{e^{-i(\pi/4 - \alpha/2)}}{\sqrt{2 \sin \alpha}}.$$

Na osnovu dokaza pod 1., sledi da je:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2i\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{(\cos \alpha - i \sin \alpha) 2i \sin \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{e^{-i\alpha} 2i \sin \alpha}}$$

te ostaje pokazati:

$$\frac{1}{\sqrt{e^{-i\alpha} \cdot i}} = e^{-i(\pi/4 - \alpha/2)}.$$

Važi:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{e^{-i\alpha} \cdot i}} &= e^{i\alpha/2} i^{-1/2} = e^{i\alpha/2} (-1)^{-1/4} \\
 &= e^{i\alpha/2} (\cos \pi + i \sin \pi)^{-1/4} = e^{i\alpha/2} e^{-i\pi/4},
 \end{aligned}$$

čime smo dokazali tvrdjenje 2. Slučaj $\sin \alpha < 0$ se pokazuje analogno.

3. Koristeći dokaz pod 1.,dobijamo:

$$\begin{aligned}
 \frac{e^{-2i\alpha}}{1 - e^{-2i\alpha}} + \frac{1}{2} &= \frac{(\cos \alpha - i \sin \alpha)^2}{(\cos \alpha - i \sin \alpha) 2i \sin \alpha} + \frac{1}{2} = \frac{\cos \alpha - i \sin \alpha + i \sin \alpha}{2i \sin \alpha} \\
 &= \frac{1}{2i} \cot \alpha = -\frac{i}{2} \cot \alpha. \quad \square
 \end{aligned}$$

Dakle, korišćenjem prethodne leme, sledi da važi:

$$\mathcal{F}_\alpha(f)(\xi) = \frac{e^{-\frac{i}{2}(\frac{\pi}{2}\hat{\alpha}-\alpha)} e^{\frac{i}{2}\xi^2 \cot \alpha}}{\sqrt{2\pi} |\sin \alpha|} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -i \frac{x\xi}{\sin \alpha} + \frac{i}{2} x^2 \cot \alpha \right\} f(x) dx$$

gde je $\hat{\alpha} = \text{sgn}(\sin \alpha)$ i važi $\sin \alpha \neq 0$, odnosno $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$, tj. $a \notin 2\mathbb{Z}$. Grana $\sqrt{\sin \alpha}$ koju koristimo kada je $\sin \alpha < 0$ je ona za koju je $0 < |\alpha| < \pi$.

Ranije smo definisali da je $\mathcal{F}_\alpha(f)(\xi) = f(\xi)$ kada je $\alpha = 0$ i $\mathcal{F}_\alpha(f)(\xi) = f(-\xi)$ kada je $\alpha = \pm\pi$. Ovo zadržavamo i kod integralne definicije i time obezbeđujemo neprekidnost funkcije $\mathcal{F}_\alpha$ u tim tačkama jer važi $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_{\alpha+\epsilon} = \mathcal{F}_\alpha$. Stoga možemo preptostaviti da integralna definicija frakcione Furijeove transformacije važi na čitavom intervalu $|\alpha| \leq \pi$. Očigledno, kao i kod parametarskog oblika, važi periodičnost, odnosno, za $|\alpha| > \pi$ definicija ima moduo 2π i svodi se na interval $[-\pi, \pi]$.

Ovim smo dobili definiciju frakcione Furijeove transformacije u integralnom obliku:

Definicija 2.3.1. *Neka je $\alpha = a\pi/2$, $a \in \mathbb{R}$ i neka je $f \in S(\mathbb{R})$. Frakciona Furijeova transformacija stepena a , odnosno za ugao α , funkcije f ima integralni oblik:*

$$\mathcal{F}^a(f)(\xi) = \mathcal{F}_\alpha(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_a(\xi, x) f(x) dx,$$

pri čemu je jezgro frakcione Furijeove transformacije dato na sledeći način: Za $a \notin 2\mathbb{Z}$, odnosno $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$K_a(\xi, x) = C_\alpha \exp \left\{ -i \frac{x\xi}{\sin \alpha} + \frac{i}{2} (x^2 + \xi^2) \cot \alpha \right\},$$

gde je:

$$C_a = \frac{e^{-\frac{i}{2}(\frac{\pi}{2}\hat{\alpha}-\alpha)}}{\sqrt{2\pi} |\sin \alpha|} = \sqrt{\frac{1 - i \cot \alpha}{2\pi}}, \quad \hat{\alpha} = \text{sgn}(\sin \alpha).$$

Za $a \in 4\mathbb{Z}$, tj. $\alpha = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, FRFT postaje identitet, odnosno:

$$K_{4n}(\xi, x) = \delta(\xi - x), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Za $a \in 2 + 4\mathbb{Z}$, tj. $\alpha = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, FRFT je operator parnosti, tj.

$$K_{2+4n}(\xi, x) = \delta(\xi + x), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Iz jednakosti (2.1) vidimo da važi:

$$\begin{aligned} K_a(\xi, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} e^{-in\alpha} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi) e^{-x^2/2} H_n(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} e^{-in\alpha} \psi_n(\xi) \psi_n(x) \end{aligned}$$

što je takozvana spektralna dekompozicija jezgra. Kao što smo koristili Hermitsko-Gausovske funkcije, mogli smo koristiti i bilo koji drugi potpun ortogonalni skup karakterističnih vektora Furijeove transformacije, koja i sama, kao što smo napomenuli u prvoj oblasti, može biti definisana na više načina. Tako se mogu dobiti različite definicije frakcione Furijeove transformacije koje se pojavljuju u literaturi.

Za frakcionu Furijeovu transformaciju važi i sledeće tvrdjenje:

Teorema 2.3.1. $\mathcal{F}_\alpha$ je homomorfizam na $S(\mathbb{R})$, sa inverznom transformacijom $F_{-\alpha}$.

Iz ovog tvrdjenja sledi da je formula inverzne frakcione Furijeove transformacije:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 + i \cot \alpha}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_\alpha(f)(\xi) \exp \left\{ i \frac{x\xi}{\sin \alpha} - \frac{i}{2} (x^2 + \xi^2) \cot \alpha \right\} d\xi.$$

Na osnovu prethodnog tvrdjenja i činjenice da je Švarcov prostor $S(\mathbb{R})$ gust u prostorima $L^1(\mathbb{R})$ i $L^2(\mathbb{R})$, definicija frakcione Furijeove transformacije se može proširiti na $L^1(\mathbb{R})$ i $L^2(\mathbb{R})$, analogno kao što smo to pokazali za klasičnu Furijeovu transformaciju. To znači da frakciona Furijeova transformacija postoji pod istim uslovima kao i klasična.

Direktno iz integralne reprezentacije frakcione Furijeove transformacije kao i njene definicije putem rotacije, dobija se da važe sledeće osobine jezgra:

Teorema 2.3.2. Ako je $K_a(x, t)$ jezgro frakcione Furijeove transformacije iz definicije 2.3.1., onda važi:

1. $K_a(\xi, x) = K_a(x, \xi)$ (dijagonalna simetrija)
2. $K_{-a}(\xi, x) = \overline{K_a(\xi, x)}$ (kompleksno-konjugovano jezgro)
3. $K_a(-\xi, x) = K_a(\xi, -x)$ (simetrija u tački)

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} K_a(\xi, t) K_b(t, x) dt = K_{a+b}(\xi, x)$ (aditivnost)
5. $\int_{-\infty}^{+\infty} K_a(t, \xi) \overline{K_a(t, x)} dt = \delta(\xi - x)$ (ortogonalnost).

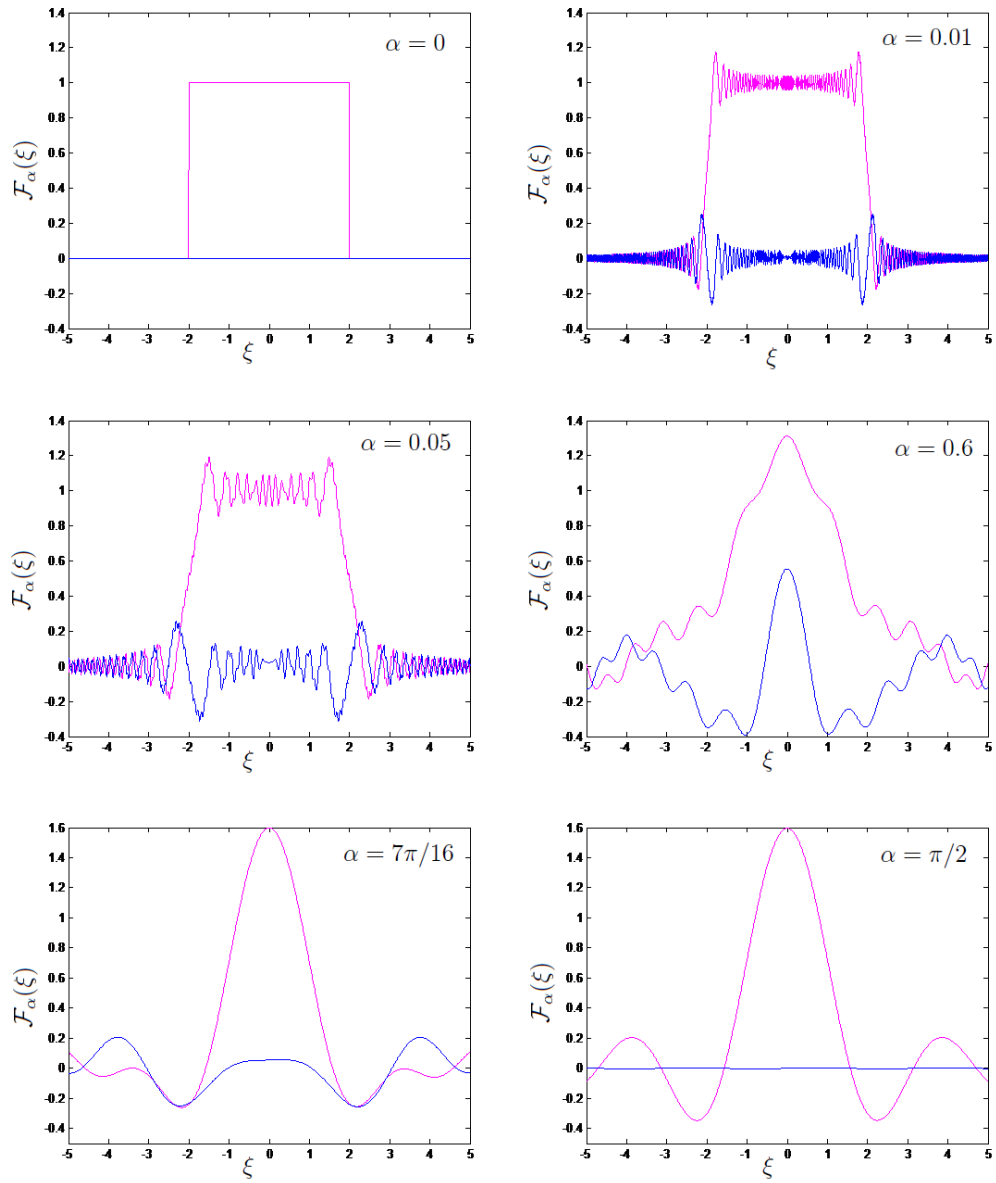
PRIMER 3. U tabeli 1. prikazane su frakcione Furijeove transformacije nekih elementarnih funkcija za koje se integral iz teoreme 2.3.1. može izračunati analitički. Takodje, na slici 2.3.1. vidimo grafik frakcione Furijeove transformacije funkcije $\chi_{[-10,10]}$ pri čemu se stepen transformacije α menja od 0 ka $\pi/2$. Kao što smo rekli, za $\alpha = 0$ dobija se originalna funkcija, što je u ovom slučaju karakteristična (pravougaona) funkcija intervala $[-10, 10]$, a kako stepen transformacije raste ka $\alpha = \pi/2$, tako je grafik frakcione Furijeove transformacije sve bliži grafiku klasične transformacije da bi se na kraju za $\alpha = \pi/2$ dobila sinc funkcija, za koju smo u Primeru 1. pokazali da je klasična Furijeova transformacija pravougaone funkcije.

	$f(x)$	$\mathcal{F}_\alpha(f)(\xi)$
1.	1	$\sqrt{1 + i \tan \alpha} \exp \left\{ -\frac{i}{2} \xi^2 \tan \alpha \right\}$
2.	$\delta(x - c)$	$\sqrt{\frac{1 - i \cot \alpha}{2}} \exp \left\{ -i c \xi \csc \alpha + i \frac{c^2 + \xi^2}{2} \cot \alpha \right\}$
3.	$\cos(c \cdot x)$	$\sqrt{1 + i \tan \alpha} \exp \left\{ -\frac{i}{2} (\xi^2 + c^2) \tan \alpha \right\} \cos(c \xi \sec \alpha)$
4.	$\sin(c \cdot x)$	$\sqrt{1 + i \tan \alpha} \exp \left\{ -\frac{i}{2} (\xi^2 + c^2) \tan \alpha \right\} \sin(c \xi \sec \alpha)$
5.	$\psi_n(x)$	$\exp \{ -i n \alpha \} \psi_n(\xi)$
6.	$e^{i 2 \pi c x}$	$\sqrt{1 + i \tan \alpha} \exp \{ -i \pi (\xi^2 \tan \alpha - 2 \xi c \sec \alpha + c^2 \tan \alpha) \}$
7.	$e^{i \pi c x^2}$	$\sqrt{\frac{(1 + i \tan \alpha)}{(1 + c \tan \alpha)}} \exp \left\{ i \pi \xi^2 \frac{(c - \tan \alpha)}{(1 + c \tan \alpha)} \right\}$

Tabela 1. - Frakciona Furijeova transformacija nekih signala.

U levoj koloni su date originalne funkcije a u desnoj njihove transformacije.

Konstanta $c \in \mathbb{R}$, dok za α važi: u 2. $\alpha \neq \pi \mathbb{Z}$, a u 3. i 4. $\alpha \neq \pi/2 \mathbb{Z}$.



Slika 2.3.1.- FRFT pravougaone funkcije, sa različitim vrednostima α . Ljubičastom bojom označen je realni deo a plavom imaginarni deo.

2.4 Osobine frakcione Furijeove transformacije

Sada ćemo navesti i pokazati osobine frakcione Furijeove transformacije koristeći njene različite oblike. Za mnoge od ovih osobina već smo dokazali da važe kod klasične Furijeove transformacije a sada ćemo pokazati da važe i za njeno uopštenje.

Iz eksponencijalnog oblika operatora frakcione Furijeove transformacije direktno slede sledeća svojstva:

1. za $\alpha = \pi/2$, odnosno $a = 1$, dobija se oblik operatora klasične transformacije: $\mathcal{F}^1 = e^{-i\pi A/2}$ sa inverznim $\mathcal{F}^{-1} = e^{i\pi A/2}$.
2. Za $\alpha = a = 0$ dobija se operator identiteta: $\mathcal{F}^0 = e^0 = \mathcal{I}$.
3. Za $\alpha = \pi$, odnosno $a = 2$, dobija se da je operator parnosti $\mathcal{F}^2 = e^{-i\pi A}$.
4. Aditivnost indeksa: $\mathcal{F}^a \mathcal{F}^b = e^{-ia\pi A/2} e^{-ib\pi A/2} = e^{-i(a+b)\pi A/2} = \mathcal{F}^{a+b}$.
5. Iz aditivnosti i osobine 2, sledi da je inverzni operator za $\mathcal{F}^a$ zapravo $\mathcal{F}^{-a}$.
6. Linearnost:

$$\mathcal{F}^a(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \mathcal{F}^a(f(x)) + \beta \mathcal{F}^a(g(x)).$$

7. Unitarnost: $(\mathcal{F}^a)^{-1} = \overline{\mathcal{F}^a}$.
8. Komutativnost: $\mathcal{F}^{a_1} \mathcal{F}^{a_2} = \mathcal{F}^{a_2} \mathcal{F}^{a_1}$.
9. Asocijativnost: $(\mathcal{F}^{a_1} \mathcal{F}^{a_2}) \mathcal{F}^{a_3} = \mathcal{F}^{a_1} (\mathcal{F}^{a_2} \mathcal{F}^{a_3})$.

Koristeći integralni oblik transformacije pokazaćemo sledeće osobine:

Teorema 2.4.1. (*Formula množenja polinomom*) Za funkciju $f(x) \in S(\mathbb{R})$ i $\alpha = a\pi/2$, $a \in \mathbb{R}$, važi:

$$\mathcal{F}_\alpha(xf(x))(\xi) = \xi \cos \alpha \mathcal{F}_\alpha(f)(\xi) + i \sin \alpha \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}_\alpha(f)(\xi)$$

Dokaz teoreme 2.4.1.:

Za funkciju $f(x) \in S(\mathbb{R})$ važi da i $xf(x) \in S(\mathbb{R})$ takodje te su obe strane date jednakosti elementi iz $S(\mathbb{R})$. Pokazaćemo da tvrdjenje važi za

$f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ - glatke funkcije kompaktnog nosača, pa će zbog toga što je $C_c^\infty(\mathbb{R})$ gust podskup u $S(\mathbb{R})$ slediti da tvrdjenje važi i na $S(\mathbb{R})$.

Takodje, pretpostavićemo da $-\pi \leq \alpha \leq \pi$ te će za ostale vrednosti α tvrdjenje važiti zbog periodičnosti funkcije $\mathcal{F}_\alpha$.

Za $\alpha = 0$ iz definicije $\mathcal{F}_\alpha$ sledi da važi:

$$\mathcal{F}_0(xf(x))(\xi) = \xi f(\xi) = \xi \cos 0 \mathcal{F}_0(f)(\xi) + \imath \sin 0 \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}_0(f)(\xi).$$

Za $\alpha = \pi$ važi:

$$\mathcal{F}_\pi(xf(x))(\xi) = -\xi f(-\xi) = \xi \cos \pi \mathcal{F}_\pi(f)(\xi) + \imath \sin \pi \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}_\pi(f)(\xi).$$

Analogno dobijamo i za $\alpha = -\pi$.

Za $0 < |\alpha| < \pi$ važi:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha(xf(x))(\xi) &= C_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ \frac{1}{2} \imath \xi^2 \cot \alpha - \imath \frac{\xi x}{\sin \alpha} + \frac{1}{2} \imath x^2 \cot \alpha \right\} x f(x) dx \\ &= \imath C_\alpha \sin \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ \frac{1}{2} \imath \xi^2 \cot \alpha - \imath \frac{\xi x}{\sin \alpha} + \frac{1}{2} \imath x^2 \cot \alpha \right\} \cdot \\ &\quad \left(-\frac{\imath x}{\sin \alpha} + \imath \xi \cot \alpha \right) f(x) dx + \\ &\quad + \xi \cos \alpha C_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ \frac{1}{2} \imath \xi^2 \cot \alpha - \imath \frac{\xi x}{\sin \alpha} + \frac{1}{2} \imath x^2 \cot \alpha \right\} f(x) dx \\ &= \imath \sin \alpha C_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\xi} \exp \left\{ \frac{1}{2} \imath \xi^2 \cot \alpha - \imath \frac{\xi x}{\sin \alpha} + \frac{1}{2} \imath x^2 \cot \alpha \right\} f(x) dx + \\ &\quad + \xi \cos \alpha \mathcal{F}_\alpha(f)(\xi) \\ &= \imath \sin \alpha C_\alpha \frac{d}{d\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ \frac{1}{2} \imath \xi^2 \cot \alpha - \imath \frac{\xi x}{\sin \alpha} + \frac{1}{2} \imath x^2 \cot \alpha \right\} f(x) dx + \\ &\quad + \xi \cos \alpha \mathcal{F}_\alpha(f)(\xi) \\ &= \xi \cos \alpha \mathcal{F}_\alpha(f)(\xi) + \imath \sin \alpha C_\alpha \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}_\alpha(f)(\xi), \end{aligned}$$

pri čemu smo koristili jednakost:

$$\begin{aligned} x &= x - \xi \cos \alpha + \xi \cos \alpha = x - \xi \sin \alpha \cot \alpha + \xi \cos \alpha \\ &= \imath \sin \alpha \left(-\frac{\imath x}{\sin \alpha} + \imath \xi \cot \alpha \right) + \xi \cos \alpha \end{aligned}$$

i zamenu redosleda izvoda i integracije što je dozvoljeno jer $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Ovo tvrdjenje može se matematičkom indukcijom proširiti na proizvoljno $m \in \mathbb{N}$ i tada važi:

$$\mathcal{F}_\alpha(x f^m(x))(\xi) = (\xi \cos \alpha + \imath \sin \alpha D)^m \mathcal{F}_\alpha(f)(\xi),$$

gde je operator $D = \frac{d}{d\xi}$. $\square$

Teorema 2.4.2. (*Formula izvoda*) Za funkciju $f(x) \in S(\mathbb{R})$ i $\alpha = a\pi/2$, $a \in \mathbb{R}$, važi:

$$\mathcal{F}_\alpha \left(\frac{df(x)}{dx} \right) (\xi) = \imath \xi \sin \alpha \mathcal{F}_\alpha(f(x))(\xi) + \cos \alpha \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}_\alpha(f(x))(\xi).$$

Dokaz teoreme 2.4.2.:

Kako $f(x) \in S(\mathbb{R})$ važi i $f(x)' \in S(\mathbb{R})$ te su obe strane date jednakosti elementi iz $S(\mathbb{R})$.

Dalje, za $a \notin 2\mathbb{Z}$, tj. $\alpha \neq \pi\mathbb{Z}$, važi:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha \left(\frac{df(x)}{dx} \right) (\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} C_\alpha \exp \left\{ -\imath \frac{x\xi}{\sin \alpha} + \frac{\imath}{2} (x^2 + \xi^2) \cot \alpha \right\} f'(x) dx \\ &= C_\alpha \exp \left\{ \frac{\imath}{2} \xi^2 \cot \alpha \right\} \left(\int_{-\infty}^0 \exp \left\{ -\imath \frac{\xi}{\sin \alpha} + \frac{\imath}{2} \cot \alpha x^2 \right\} f'(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{+\infty} \exp \left\{ -\imath \frac{\xi}{\sin \alpha} + \frac{\imath}{2} \cot \alpha x^2 \right\} f'(x) dx \right) \\ &= C_\alpha \exp \left\{ \frac{\imath}{2} \xi^2 \cot \alpha \right\} \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 \exp \left\{ -\imath \frac{\xi}{\sin \alpha} + \frac{\imath}{2} \cot \alpha x^2 \right\} f'(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \exp \left\{ -\imath \frac{\xi}{\sin \alpha} + \frac{\imath}{2} \cot \alpha x^2 \right\} f'(x) dx \right). \end{aligned}$$

Označimo prvi integral u prethodnoj jednakosti sa I_1 a drugi sa I_2 . Parcijalnom integracijom dobijamo:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-R}^0 \exp \left\{ -\imath \frac{\xi}{\sin \alpha} + \frac{\imath}{2} \cot \alpha x^2 \right\} f'(x) dx \\ &= \exp \left\{ -\imath \frac{\xi}{\sin \alpha} x + \frac{\imath}{2} \cot \alpha x^2 \right\} \cdot f(x) \Big|_{-R}^0 \\ &\quad - \int_{-R}^0 \left(-\imath \frac{\xi}{\sin \alpha} + \imath \cot \alpha x \right) \exp \left\{ -\imath \frac{\xi}{\sin \alpha} x + \frac{\imath}{2} \cot \alpha x^2 \right\} f(x) dx. \end{aligned}$$

Kako je $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ sledi da je

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_1 = f(0) - \int_{-\infty}^0 \left(-\imath \frac{\xi}{\sin \alpha} + \imath \cot \alpha x \right) \exp \left\{ -\imath \frac{\xi x}{\sin \alpha} + \frac{\imath}{2} \cot \alpha x^2 \right\} f(x) dx$$

Analogno se dobija i

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_2 = -f(0) - \int_0^{+\infty} \left(-\imath \frac{\xi}{\sin \alpha} + \imath \cot \alpha x \right) \exp \left\{ -\imath \frac{\xi x}{\sin \alpha} + \frac{\imath}{2} \cot \alpha x^2 \right\} f(x) dx,$$

pa je

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha \left(\frac{df(x)}{dx} \right) (\xi) &= -C_\alpha \exp \left\{ \frac{\imath}{2} \xi^2 \cot \alpha \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\imath \frac{\xi}{\sin \alpha} + \imath \cot \alpha x \right) \\ &\quad \cdot \exp \left\{ -\imath \frac{\xi x}{\sin \alpha} + \frac{\imath}{2} \cot \alpha x^2 \right\} f(x) dx \\ &= \imath \frac{\xi}{\sin \alpha} \mathcal{F}_\alpha(f(x))(\xi) - \imath \cot \alpha \mathcal{F}_\alpha(xf(x))(\xi). \end{aligned}$$

Korišćenjem formule množenja dobijamo dalje:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha \left(\frac{df(x)}{dx} \right) (\xi) &= \imath \frac{\xi}{\sin \alpha} \mathcal{F}_\alpha(f(x))(\xi) - \imath \cot \alpha \left(\xi \cos \alpha \mathcal{F}_\alpha(f(x))(\xi) \right. \\ &\quad \left. + \imath \sin \alpha \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}_\alpha(f(x))(\xi) \right) \\ &= \imath \xi \mathcal{F}_\alpha(f(x))(\xi) \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \right) - \imath^2 \cos \alpha \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}_\alpha(f(x))(\xi) \\ &= \imath \xi \sin \alpha \mathcal{F}_\alpha(f(x))(\xi) + \cos \alpha \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}_\alpha(f(x))(\xi) \quad . \end{aligned}$$

U slučaju kada je $a \in 4\mathbb{Z}$, to jest $\alpha = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, iz definicije sledi da je:

$$\mathcal{F}_\alpha(f(x))(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - x)f(x)dx = f(\xi),$$

$$\mathcal{F}_\alpha\left(\frac{df(x)}{dx}\right)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - x)f'(x)dx = f'(\xi)$$

i kako je $\sin \alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$, važi:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\alpha\left(\frac{df(x)}{dx}\right)(\xi) &= i\xi \sin \alpha \mathcal{F}_\alpha(f(x))(\xi) + \cos \alpha f'(\xi) \\ &= i\xi \sin \alpha(\xi) + \cos \alpha \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}_\alpha(f(x))(\xi).\end{aligned}$$

Za $a \in 2 + 4\mathbb{Z}$, to jest $\alpha = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, korišćenjem smene $t = -x$ dobijamo:

$$\mathcal{F}_\alpha(f(x))(\xi) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - t)f(-t)dt = -f(-\xi),$$

$$\mathcal{F}_\alpha\left(\frac{df(x)}{dx}\right)(\xi) = -f'(-\xi),$$

pa kako je $\sin \alpha = 0$ a $\cos \alpha = -1$, dobijamo:

$$\mathcal{F}_\alpha\left(\frac{df(x)}{dx}\right)(\xi) = i\xi \sin \alpha \mathcal{F}_\alpha(f(x))(\xi) + \cos \alpha \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}_\alpha(f(x))(\xi). \square$$

I ova osobina se matematičkom indukcijom može uopštiti tako da za svako $m \in \mathbb{N}$ važi:

$$\mathcal{F}_\alpha\left(\frac{df(x)}{dx}\right)(\xi) = (i\xi \sin \alpha + \cos \alpha D)^m \mathcal{F}_\alpha(f(x))(\xi),$$

gde je sa D označen diferencijalni operator $\frac{d}{d\xi}$.

Teorema 2.4.3. (Skaliranje) Neka je $f(x) \in S(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$ i $\alpha = a\pi/2$, $a \in \mathbb{R}$. Tada važi:

$$\mathcal{F}_\alpha(f(c \cdot x))(\xi) = \sqrt{\frac{1 - i \cot \alpha}{c^2 - i \cot \alpha}} \exp \left\{ \frac{i}{2} \xi^2 \cot \alpha \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} \right) \right\} \mathcal{F}_\beta \left(\xi \frac{\sin \beta}{c \cdot \sin \alpha} \right),$$

gde je $\beta = \operatorname{arccot}[(\cot \alpha)/c^2] = \arctan(c^2 \tan \alpha)$.

Dokaz teoreme 2.4.3.:

Iz definicije frakcione Furijeove transformacije imamo:

$$\mathcal{F}_\alpha(f(c \cdot x))(\xi) = \sqrt{\frac{1 - \imath \cot \alpha}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(cx) \exp \left\{ \imath \frac{x^2 + \xi^2}{2} \cot \alpha - \imath \frac{\xi x}{\sin \alpha} \right\} dx.$$

Uvodjenjem smene $t = c \cdot x$ dobijamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha(f(t))(\xi) &= \sqrt{\frac{1 - \imath \cot \alpha}{2\pi}} \frac{1}{|c|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp \left\{ \imath \frac{t^2/c^2 + \xi^2}{2} \cot \alpha - \imath \frac{\xi t}{c \sin \alpha} \right\} dt \\ &= \sqrt{\frac{1 - \imath \cot \alpha}{2\pi c^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp \left\{ \imath \frac{t^2 + c^2 \xi^2}{2} \frac{\cot \alpha}{c^2} - \imath \frac{\xi t}{c \sin \alpha} \right\} dt. \end{aligned}$$

Ako definišemo $\beta = \operatorname{arccot}[(\cot \alpha)/c^2] = \arctan(c^2 \tan \alpha)$, dobijamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha(f(t))(\xi) &= \sqrt{\frac{1 - \imath \cot \alpha}{2\pi c^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp \left\{ \imath \frac{t^2 + c^2 \xi^2}{2} \cot \beta \right. \\ &\quad \left. - \imath \xi t \frac{\csc \alpha}{c \cdot \csc \beta} \csc \beta \right\} dt \\ &= \sqrt{\frac{1 - \imath \cot \alpha}{2\pi c^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp \left\{ \imath \frac{t^2 + \left(\xi \frac{\csc \alpha}{c \cdot \csc \beta} \right)^2}{2} \cot \beta - \imath t \left(\xi \frac{\csc \alpha}{c \cdot \csc \beta} \right) \csc \beta \right. \\ &\quad \left. - \imath \frac{\left(\xi \frac{\csc \alpha}{c \cdot \csc \beta} \right)^2}{2} \cot \beta + \imath \frac{c^2 \xi^2}{2} \cot \beta \right\} dt \\ &= \sqrt{\frac{1 - \imath \cot \alpha}{2\pi c^2}} \exp \left\{ \frac{\imath}{2} \xi^2 c^2 \cot \beta \left(1 - \frac{\csc^2 \alpha}{c^4 \csc^2 \beta} \right) \right\} \cdot \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp \left\{ \imath \frac{t^2 + \left(\xi \frac{\csc \alpha}{c \cdot \csc \beta} \right)^2}{2} \cot \beta - \imath \left(\xi \frac{\csc \alpha}{c \cdot \csc \beta} \right) t \csc \beta \right\} dt \\ &= \sqrt{\frac{1 - \imath \cot \alpha}{c^2(1 - \imath \cot \alpha)}} \exp \left\{ \frac{\imath}{2} \xi^2 \cot \alpha \left(1 - \frac{\csc^2 \alpha}{c^4 \csc^2 \beta} \right) \right\} \cdot \mathcal{F}_\beta(f)\left(\xi \frac{\csc \alpha}{c \cdot \csc \beta}\right) \\ &= \sqrt{\frac{1 - \imath \cot \alpha}{c^2(1 - \imath \cot \alpha)}} \exp \left\{ \frac{\imath}{2} \xi^2 \cot \alpha \left(1 - \frac{\csc^2 \alpha}{c^4 \csc^2 \beta} \right) \right\} \cdot \mathcal{F}_\beta(f)\left(\xi \frac{\sin \beta}{c \cdot \sin \alpha}\right). \end{aligned}$$

Osobina skaliranja, iako je kompleksnija nego u slučaju klasične transformacije, važna je jer pokazuje efekat skaliranja (promene jedinica) nezavisne

promenljive s . Kod klasične transformacije, efekat ovakve promene je odgovarajuće skaliranje frekvencijske promenljive i skaliranje amplitude, što direktno sledi iz osobine pomeranja koju smo dokazali u prvom delu rada, kada se uzme $b = 0$. Tačnije, osobina skaliranja klasične transformacije glasi:

$$\mathcal{F}(f(c \cdot x))(\omega) = \frac{1}{|c|} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{c}\right).$$

Kod frakcione Furijeove transformacije, skaliranje nezavisne promenljive x dovodi do skaliranja zavisne promenljive ξ sa $\sin \beta / c \sin \alpha$, zatim skaliranja amplitude, pa množenja eksponencijalnom funkcijom i na kraju, najbitnije, promene ugla za koji računamo transformaciju od α na $\beta = \arctan(c^2 \tan \alpha)$. Ova promena ugla može se interpretirati na sledeći način: vremenska osa se množenjem promenljive x sa a , sažima a frekvencijska osa, zbog osobine klasične transformacije, širi, obe za faktor c . Uz ove dve operacije, osa između vremenske i frekvencijske, nad kojom računamo frakcionu transformaciju i koja je originalno bila pod uglom α u odnosu na vremensku osu, će se pomeriti na novu poziciju to jest biće pod promenjenim uglom β .

Teorema 2.4.4. (*Planšerelov identitet*) Za $f(x), g(x) \in S(\mathbb{R})$ važi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_\alpha(f)(\xi) \overline{\mathcal{F}_\alpha(g)(\xi)} d\xi.$$

Dokaz teoreme 2.4.4.:

Izražavajući $f(x)$ preko formule inverzne transformacije:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 + i \cot \alpha}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_\alpha(f)(\xi) \exp \left\{ i \frac{x\xi}{\sin \alpha} - \frac{i}{2} (x^2 + \xi^2) \cot \alpha \right\} d\xi$$

dobijamo:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_\alpha(f)(\xi) \sqrt{\frac{1 + i \cot \alpha}{2\pi}} \right. \\ &\quad \cdot \exp \left\{ i \frac{x\xi}{\sin \alpha} - \frac{i}{2} (x^2 + \xi^2) \cot \alpha \right\} d\xi \Big) \overline{g(x)} dx. \end{aligned}$$

Zamenom redosleda integracije, što je dozvoljeno na osnovu Fubinijeve teoreme, dobijamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_\alpha(f)(\xi) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{1 + i \cot \alpha}{2\pi}} \overline{g(x)} \exp \left\{ i \frac{x\xi}{\sin \alpha} - \frac{i}{2} (x^2 + \xi^2) \cot \alpha \right\} dx \right) d\xi$$

$$\cdot \exp \left\{ i \frac{x\xi}{\sin \alpha} - \frac{i}{2} (x^2 + \xi^2) \cot \alpha \right\} dx \Big) d\xi.$$

Dalje, iz osobine jezgra $K_{-\alpha}(x, \xi) = \overline{K_{\alpha}(x, \xi)}$ i definicije frakcione Furijeove transformacije, sledi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_{\alpha}(f)(\xi) \cdot \overline{\mathcal{F}_{\alpha}(g)(\xi)} d\xi. \quad \square$$

Kao i kod klasične Furijeove transformacije, u specijalnom slučaju $f = g$ dobijamo formulu održanja energije:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}_{\alpha}(f)(\xi)|^2 d\xi$$

koja kaže da je ukupna energija signala tokom vremena jednaka njegovoj energiji u domenu frakcione Furijeove transformacije, koji je između vremenskog i frekvencijskog domena, te i pri promeni stepena transformacije, ukupna energija ostaje ista.

Glava 3

Vignerova distribucija

U ovom delu rada definisaćemo Vignerovu distribuciju signala a zatim pokazati vezu frakcione Furijeove transformacije sa ovom distribucijom, što je važna osobina za mnoge primene. Zatim ćemo ilustrovati efekat FRFT na Vignerovu distribuciju pri filtriranju signala. Korišćena je literatura [8],[9],[11], [16].

3.1 Vremensko-frekvencijska reprezentacija signala

Da bi se izdvojile najvažnije osobine signala potrebno je da se koristi prava transformacija za izdvajanje tih karakteristika. U inženjerstvu, klasična Furijeova transformacija je najčešće korišćena transformacija za analizu spektralnog sadržaja signala. Međutim, kako se kod Furijeove transformacije integracija signala vrši kroz vremenski domen i obrnuto kod njene inverzne, to znači da su argumenti funkcija signala i njegove Furijeove transformacije međusobno isključivi, odnosno pojava jedne promenljive garantuje odsustvo druge. Stoga Furijeova transformacija nije pogodna za proučavanje nestacionarnih signala čije se karakteristike menjaju tokom vremena, a kakvi su većina prirodnih signala, npr. muzika ili govor. U poslednje vreme se zato pažnja posvećuje vremensko-frekvencijskim transformacijama koje omogućavaju istovremeno ispitivanje i vremenskih i frekvencijskih osobina signala. Jedna od značajnijih jeste Vignerova distribucija, kvadratna vremensko-frekvencijska transformacija koja ima veliki broj poželjnih matematičkih osobina i čiji se značaj ogleda u tome da se mnoge druge transformacije mogu izraziti preko nje. Tako postoji i veza između Vignerove sa kako klasičnom, tako i frakcionom Furijeovom transformacijom, pri čemu frakciona zbog mogućnosti promene domena reprezentacije signala daje bolje rezultate, naročito u oblasti

filtriranja, kao što ćemo videti.

Vignerova distribucija W signala $f(x)$ definiše se na sledeći način:

$$W_f(x, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x + \frac{\tau}{2}\right) \bar{f}\left(x - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (3.1)$$

što se smenom integracione promenljive može izraziti i kao:

$$W_f(x, \omega) = 2e^{2i\omega x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \bar{f}(2x - \tau) e^{-2i\omega\tau} d\tau. \quad (3.2)$$

Grubo govoreći, može se interpretirati kao funkcija koja pokazuje raspodelu energije signala po vremenu i frekvenciji.

Iz definicije može se pokazati da, ako je $\mathcal{F}(f)$ Furijeova transformacija signala f , onda važi:

$$W_f(x, \omega) = W_{\mathcal{F}(f)}(\omega, -x), \quad (3.3)$$

što znači da će reprezentacija signala u vremensko-frekvencijskoj ravni biti ista bilo da računamo Vignerovu transformaciju originalnog vremenskog signala $f(x)$ ili Vignerovu transformaciju Furijeove transformacije tog signala, dokle god se $W_{\mathcal{F}}$ računa u sopstvenom koordinatnom sistemu koji je rotiran za 90 stepeni u odnosu na horizontalnu vremensku osu.

3.2 Veza frakcione Furijeove transformacije i Vignerove distribucije

Pokazaćemo vezu izmedju frakcione Furijeove transformacije i Vignerove distribucije, što je jedna od najbitnijih osobina FRFT i osnova je mnogih primena.

Ako iskoristimo osobinu 2 iz Tabele 1 (frakciona Furijeova transformacija delta funkcije), dobijamo:

$$\begin{aligned} \bar{f}(2x - \tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\mathcal{F}}_{\alpha}(-z + 2x \cos \alpha) \\ &\cdot \exp \left\{ -2ix^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2izx \sin \alpha \right\} K_{\alpha}(\tau, z) dz, \end{aligned}$$

te je:

$$\begin{aligned} W_f(x, \omega) &= 2e^{2i\omega x} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \bar{\mathcal{F}}_{\alpha}(-z + 2x \cos \alpha) \\ &\cdot \exp \left\{ -2ix^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2izx \sin \alpha \right\} \cdot K_{\alpha}(\tau, z) e^{-2i\omega\tau} d\tau dz \end{aligned}$$

$$= 2e^{2i\omega x} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathcal{F}}_{\alpha}(-z + 2x \cos \alpha) \cdot \exp \{ -2ix^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2izx \sin \alpha \} \\ \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) K_{\alpha}(\tau, z) e^{-2i\omega\tau} d\tau dz.$$

Unutrašnji integral se može izračunati korišćenjem 1. osobine iz tabele 1, te dobijamo:

$$W_f(x, \omega) = 2e^{2i\omega x} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_{\alpha}(Z + 2\omega \sin \alpha) \cdot \overline{\mathcal{F}}_{\alpha}(-Z + 2x \cos \alpha) \\ \cdot \exp \{ -2i(x^2 + \omega^2) \sin \alpha \cos \alpha + 2izx \sin \alpha - 2iz\omega \cos \alpha \} dz$$

Smenom promenljive $\xi = z + 2\omega \sin \alpha$ dobijamo:

$$W_f(x, \omega) = 2e^{2i\omega x} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_{\alpha}(\xi) \overline{\mathcal{F}}_{\alpha}(-\xi + 2x \cos \alpha + 2\omega \sin \alpha) \\ \cdot \exp \{ 2i(\omega^2 - x^2) \sin \alpha \cos \alpha + 2i\xi(x \sin \alpha - \omega \cos \alpha - 4\omega x \sin^2 \alpha) \} dz.$$

Dalje, smenom promenljivih na desnoj strani jednakosti:

$$x_a = x \cos \alpha + \omega \sin \alpha,$$

$$\xi_a = -x \sin \alpha + \omega \cos \alpha,$$

što odgovara rotaciji osa za ugao α , dobijamo da važi:

$$W_f(x, \omega) = 2e^{2ix_a \xi_a} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_{\alpha}(\xi) \overline{\mathcal{F}}_{\alpha}(2x_a - \epsilon) e^{-2i\xi_a \epsilon} d\epsilon.$$

Sa leve strane imamo Vignerovu distribuciju signala $f(x)$ izračunatu sa promenljivima x i ω , a desna strana jednakosti je Vignerova distribucija frakcione Furijeove transformacije $\mathcal{F}_{\alpha}$, izračunata sa parametrima (x_a, ξ_a) , koji su rotirane promenljive (x, ω) . Dakle, dobili smo da je Vignerova distribucija od $\mathcal{F}_{\alpha}$ zapravo Vignerova distribucija signala f rotirana za ugao α ili drugačije, Vignerova distribucija od f izražena u novom sistemu koordinata (x_a, ξ_a) . Ovo svojstvo frakcione Furijeove transformacije da rotira Vignerovu distribuciju je od velikog značaja u primenama. Takodje znači i da je rotirana Vignerova distribucija takodje validna transformacija, a kako inače ima simetrične osobine u vremenskom i frekvencijskom domenu, ovo nam daje da je simetrija tih osobina zapravo rotaciona simetrija.

Pokazana jednakost može se uopštiti na prizvoljan rotiran sistem osa (x_a, x_{a+1}) :

$$W_{\mathcal{F}^a}(x_a, x_{a+1}) = W_f(x_a \cos \alpha - x_{a+1} \sin \alpha, x_a \sin \alpha + x_{a+1} \cos \alpha), \quad (3.4)$$

pri čemu smo koordinate Vignerove distribucije funkcije f predstavili kao unazad rotirane x_a i x_{a+1} . Svojstvo (3.4) je očigledno uopštenje osobine (3.3) koja se dobija za $\alpha = \pi/2$, što je u skladu sa tim da je klasična Furijeova transformacija specijalan slučaj frakcione.

Kao što smo rekli, Vignerova distribucija poseduje nekoliko poželjnih osobina. Jedna od njih su vremenski i frekvencijski martingali koji se odnose na projekciju raspodele energije datog signala u vremensko-frekvencijskoj ravni na pojedinačne ose:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_f(x, \omega) d\omega = |f(x)|^2 \quad (3.5)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_f(x, \omega) dx = |\mathcal{F}(\omega)|^2. \quad (3.6)$$

Dalje, proširenje ovih osobina, što se zove frakcioni martingal, glasi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_{\mathcal{F}^a}(x_a, x_{a+1}) dx_{a+1} = |\mathcal{F}^a(x_a)|^2, \quad (3.7)$$

gde je $\mathcal{F}^a(x_a) = \mathcal{F}^a(\xi_{a-1}) = \mathcal{F}^1[\mathcal{F}^{a-1}(x_{a-1})]$, pri čemu je korišćena aditivnost indeksa. Vidimo da su jednakosti (3.5) i (3.6) specijalni slučajevi (3.7), koji se dobijaju za $a = 0$ i $a = 1$, redom. Korišćenjem jednakosti (3.4) integral iz (3.7) postaje takozvana Radon transformacija Vignerove transformacije:

$$R_\alpha(W_f) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_f(x_a \cos \alpha - x_{a+1} \sin \alpha, x_a \sin \alpha + x_{a+1} \cos \alpha) dx_{a+1} \quad (3.8)$$

Jednakosti (3.7) i (3.8) nam govore da je integralna projekcija Vignerove distribucije originalnog signala na osu x_a , koja je pod uglom α sa vremenskom osom $x = x_0$, jednaka kvadratu magnitude frakcione Furijeove transformacije reda α posmatranog signala.

To dalje govori da svaka modifikacija signala u rotiranom domenu ima globalni efekat u vremensko-frekvencijskoj ravni duž pravca ortogonalnog na odgovarajuću zarotiranu osu x_a . Kombinovanjem ove osobine sa svojstvom rotacije frakcione Furijeove transformacije, možemo definisati efikasniji metod filtriranja a to je filtriranje u rotiranim vremensko-frekvencijskim domenima.

Princip je sličan filtriranju u frekvencijskom domenu. Preciznije, signal $f(x)$ se preslikava frakcionom Furijeovom transformacijom u frakcioni domen, pa se na njega može primeniti filter, $g_a(x_a)$. Primena filtera ostvaruje se množenjem funkcija, i tako se dobija filtrirani signal u frakcionom frekvencijskom domenu:

$$\hat{\mathcal{F}}^a(x_a) = g_a(x_a) \mathcal{F}^a(x_a).$$

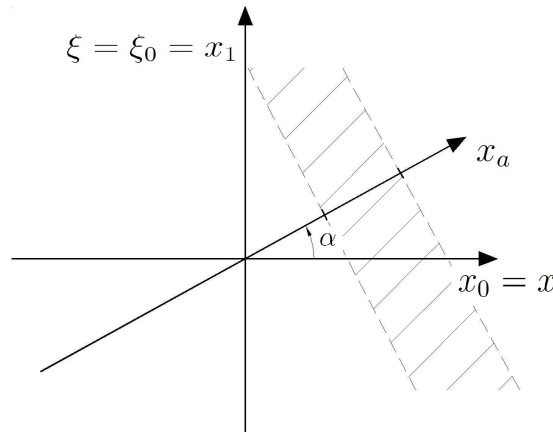
Primenom inverzne transformacije isfiltriran signal se konvertuje u početni, vremenski domen i tako se dobija:

$$\hat{f}(x) = \mathcal{F}^{-a}(g_a(x_a)f_a(x_a)),$$

gde je $f_a(x_a) = \mathcal{F}^{-a}(f(x))$.

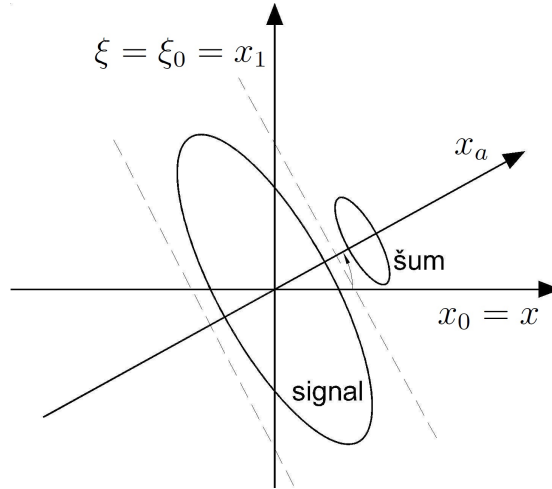
Fleksibilnost koju nam daje mogućnost izbora različitih vrednosti za parametar a frakcione Furijeove transformacije (odnosno za signal α), od značaja je u procesima razdvajanja signala i eliminacije šuma, naročito u slučajevima kada se željene i neželjene komponente primljenog signala minimalno preklapaju u određenim domenima različitim od standardnog vremenskog ili frekvencijskog domena.

Sledi ilustracija procesa filtiranja i primene rezultata koji smo dobili na osnovu Vignerove distribucije. Za filter koji se koristi u rotiranom domenu posmatramo tzv. "window" filter - prozorsku funkciju. To je funkcija čije su vrednosti van zadatog intervala jednake nuli a unutar njega su različite od nule. Primer ovakve funkcije je već razmatrana pravougaona funkcija. Primena prozorske funkcije na neku drugu funkciju h će "odseći" one vrednosti funkcije h koje su van tog intervala dok će unutar njega, ako se koristi pravougaona funkcija, vrednosti funkcije h biti nepromenjene. Taj efekat se proširuje u vremensko-frekvencijskoj ravni na išrafiranu oblast ortogonalnu na osu x_a (Slika 3.2.1.), u smislu da će daljim rotiranjem filtriranog signala, uvek sve vrednosti van išrafirane oblasti biti jednake nuli.



Slika 3.2.1.

Sada posmatrajmo na slici 3.2.2. ilustraciju preprojekcije Vignerove distribucije primljenog signala koji se sastoji od korisnog (željenog) dela i neželjenog dela - šuma.

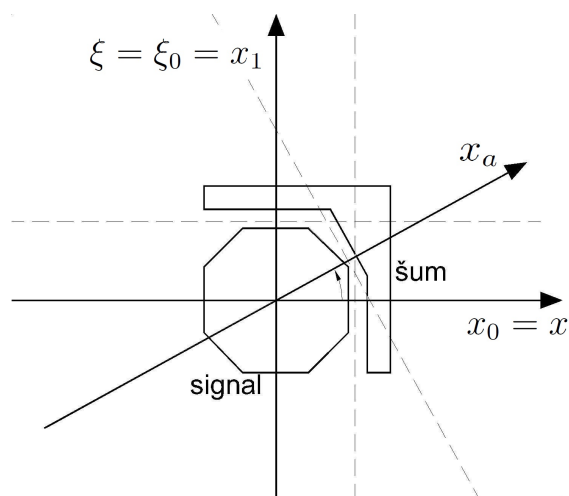


Slika 3.2.2.

Vidimo da se signal i šum preklapaju bilo da ih projektujemo na frekven-
 cijsku osu $\xi = x_1$ ili na vremensku osu $x = x_0$. Stoga metoda filtriranja
 klasičnom Furijeovom transformacijom (za $a = 1$) u frekvencijskom domenu
 u ovakvom slučaju neće u potpunosti razdvojiti željeni signal od šuma. Ali
 zato očigledno postoji domen x_a (osa pod uglom $\alpha = a\pi/2$ u odnosu na vre-
 mensku osu) u koji možemo dati signal sa šumom projektovati frakcionom
 Furijeovom transformacijom stepena a i u kom će komponente signala i šuma
 biti razdvojene. Primenom odgovarajućeg prozorskog filtera u domenu x_a od
 mešavine signala i šuma dobijamo da samo vrednosti signala ostaju različite
 od nule a šum se poništava. Tako modifikovai signal inverznom Furijeovom
 transformacijom vraćamo u vremenski domen. Zbog osobina (3.7) i (3.8)
 ono što dobijamo u vremenskom domenu je sigurno reprezentacija signala
 bez šuma.

Dakle, mogućnost odabira domena izmedju vremenskog i frekvencijskog,
 odnosno korišćena frakciona Furijeova transformacija, može dati bolje rezul-
 tate nego što bi dalo filtriranje u frekvencijskom domenu odnosno primena
 klasične Furijeove transformacije. Ovo se može i proširiti na više uzastopnih
 primena FRFT i filtriranje u više domena zaredom, kao što je ilustrovano na
 slici 3.2.3.

Na slici 3.2.3 vidimo da, iako se željeni signal i šum ne preklapaju u Vig-
 nerovom domenu (cela vremensko-frekvencijska ravan), njihove projekcije se
 preklapaju u svim frakcionim domenima, te ne postoji frakcioni domen u kom
 bi jednostavan filter poput prozorskog filtera, jednom primenom, mogao raz-
 dvojiti šum od željenog signala. Medjutim, ako tri puta zaredom primenimo
 opisan proces filtriranja i to u domenima za $a = 0$, $a = 0.5$ i $a = 1$, redom, pa



Slika 3.2.3.

inverznom frakcionom Furijeovom transformacijom vratimo filtriran signal u vremenski domen, može se izdvojiti željeni signal od šuma.

Glava 4

Diskretna Frakciona Furijeova transformacija

Kao što postoji više različitih definicija frakcione Furijeove transformacije, koje su razvijene u poslednjih tridesetak godina, tako postoji i više različitih metoda za njenu diskretnu aproksimaciju kada je dat konačan vektor sa uzorcima signala. U ovom delu rada prikazaćemo poslednje predloženu definiciju diskretne frakcione Furijeove transformacije koja je u istom odnosu sa diskretnom Furijeovom transformacijom u kojem je i neprekidna frakciona sa klasičnom neprekidnom.

Da bi posmatrana diskretna transformacija dobro aproksimirala neprekidnu frakcionu Furijeovu transformaciju, potrebno je da poseduje njene najvažnije osobine a to su unitarnost i aditivnost indeksa, zatim za stepen $a = 1$ treba da se svodi na diskretnu Furijeovu transformaciju kako bi bila njena generalizacija kao što je neprekidna FRFT generalizacija klasične FT, i na kraju, treba da zadovoljava što je više moguće osobina neprekidne FRFT.

U ovom delu rada korišćena je literatura [4], [5], [6], [10].

4.1 Uvodjenje definicije

Hermitsko-Gausovske funkcije

$$\psi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), \quad n \in \mathbb{N}$$

dobijaju se kao rešenja diferencijalne jednačine:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} - x^2 f(x) = (2n + 1) f(x) \quad (4.1)$$

i kao što smo rekli, one su karakteristične funkcije Furijeove transformacije date sa:

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx.$$

Jednačina može se modifikovati skaliranjem vremenske ose Hermitsko-Gausovskih funkcija sa $\sqrt{2\pi}$ čime se dobija jednačina:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} - 4\pi^2 x^2 f(x) = 2\pi(2n+1)f(x). \quad (4.2)$$

Jedinstvena rešenja konačne energije ove jednačine su normalizovane Hermitsko-Gausovske funkcije:

$$\varphi_n(x) = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\sqrt{2\pi} x) e^{-\pi x^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

koje čine potpun ortonormiran skup u $S(\mathbb{R})$. Ovako definisane funkcije su takodje i karakteristične funkcije Furijeove transformacije kada je ona definisana u obliku koji se češće koristi u fizici:

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx,$$

a u kome se frekvencija signala meri u hercima (broju oscilacija u sekundi), umesto u radijanima.

Analogno kao i u poglavlju 2, i za ovu bazu prostora $S(\mathbb{R})$ može se definisati frakciona Furijeova transformacija, pri čemu se dobija da je integralni oblik transformacije:

$$\mathcal{F}^a(f)(\xi) = \mathcal{F}_\alpha(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_a(\xi, x) f(x) dx, \quad \alpha = \frac{a\pi}{2}, \quad a \in \mathbb{R},$$

gde je

$$K_a(\xi, x) = \frac{\exp\left\{-\frac{i}{2}(\hat{\alpha}\frac{\pi}{2} - \alpha)\right\}}{\sqrt{|\sin \alpha|}} \exp\left\{-2\pi i \frac{\xi x}{\sin \alpha} + i\pi(x^2 + \xi^2) \cot \alpha\right\},$$

u slučaju $a \notin 2\mathbb{Z}$, $\hat{\alpha} = \text{sgn}(\sin \alpha)$ i analogno za $a \in 2\mathbb{Z}$ kao u poglavlju 2. Tada je spektralna dekompozicija jezgra data sa:

$$K_a(\xi, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\xi) e^{-in\alpha} \varphi_n(x). \quad (4.3)$$

Sve pokazane osobine važe i za ovaj oblik definicije frakcione Furijeove transformacije, razlika je samo u izgledu formula. Zbog jednostavnijeg izraza za spektralnu dekompoziciju jezgra korist ćemo ovu definiciju i gorepomenutu definiciju klasične transformacije da bismo definisali diskretnu frakcionu Furijeovu transformaciju.

Na ovom mestu pokazaćemo i da su Hermitsko-Gausovske funkcije zaista karakteristične funkcije klasične Furijeove transformacije. Naime, levu stranu jednačine (4.2) možemo izraziti i u obliku operatora na sledeći način:

$$(\mathcal{D}^2 + \mathcal{F}\mathcal{D}^2\mathcal{F}^{-1})f(x) = \lambda f(x), \quad (4.4)$$

gde je $\mathcal{D} = d/dx$ diferencijalni operator i $\mathcal{F}$ operator klasične Furijeove transformacije.

Dalje ćemo označiti $\mathcal{D}^2 + \mathcal{F}\mathcal{D}^2\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{S}$, te poslednja jednačina postaje:

$$\mathcal{S}f(x) = \lambda f(x). \quad (4.5)$$

Da bismo dokazali da su funkcije $\varphi_n(x)$, koje su očigledno karakteristične funkcije operatora $\mathcal{S}$, ujedno i karakteristične funkcije operatora $\mathcal{F}$, iskoristićemo sledeću teoremu o komutativnosti operatora:

Teorema 4.1.1. *Ako dva operatora, $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ komutiraju, odnosno važi $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$, onda postoji zajednički skup karakterističnih vektora izmedju ta dva operatora.*

Pokazujemo komutativnost operatora $\mathcal{F}$ i $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{FS} &= \mathcal{F}(\mathcal{D}^2 + \mathcal{F}\mathcal{D}^2\mathcal{F}^{-1}) = \mathcal{F}\mathcal{D}^2 + \mathcal{F}^2\mathcal{D}^2\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}\mathcal{D}^2 + \mathcal{F}^2\mathcal{D}^2\mathcal{F}^{-2}\mathcal{F} \\ &= \mathcal{F}\mathcal{D}^2 + \mathcal{D}^2\mathcal{F} = \mathcal{SF}, \end{aligned}$$

pri čemu smo koristili da je $\mathcal{F}^2\mathcal{D}^2\mathcal{F}^{-2} = \mathcal{J}\mathcal{D}^2\mathcal{J} = \mathcal{D}^2$, gde je $\mathcal{J} = \mathcal{F}^2 = \mathcal{F}^{-2}$ operator parnosti.

Iz teoreme 4.1.1 sledi da su Hermitsko-Gausovske funkcije $\varphi_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, koje su jedinstvene karakteristične funkcije operatora $\mathcal{S}$ na $S(\mathbb{R})$, takodje i karakteristične funkcije operatora $\mathcal{F}$.

Ideja za definisanje diskretne frakcione Furijeove transformacije je da se ona definiše kao diskretna verzija spektralne dekompozicije jezgra date sa (4.3). Preciznije, pretpostavimo da imamo skup ortonormiranih karakterističnih vektora $p_k[n]$, $k = 0, \dots, N-1$, gde n predstavlja n -tu koordinatu vektora, $n = 0, \dots, N-1$ i njima odgovarajuće karakteristične korene λ_k , matrice diskretne Furijeove transformacije koja je, za dati vektor kompleksnih brojeva $x[n]$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ definisana sa:

$$\mathbf{F}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i(2\pi k/N)n}$$

gde dobijamo diskretne frekvencije $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Ideja je da se tada matrica diskretne frakcione Furijeove transformacije definiše na sledeći način:

$$\mathbf{F}^a[m, n] = \sum_{k=0}^{N-1} p_k[m](\lambda_k)^a p_k[n], \quad (4.6)$$

$m, n = 0, \dots, N-1$ a diskretna frakciona Furijeova transformacija $f_a[n]$ (skraćeno DFRT) za vektor $f = f[n] = [f[0], f[1], \dots, f[N-1]]^T$ koji sadrži N uzoraka signala se dobija množenjem vektora $f[n]$ matricom $\mathbf{F}^a$:

$$f_a[n] = \mathbf{F}^a[m, n] \cdot f[n].$$

Matrica klasične diskretne Furijeove transformacije ima samo 4 različita karakteristična korena, odnosno za svako $k = 0, \dots, N-1$ važi $\lambda_k = \exp(-i\pi k/2)$ i $\lambda_k \in \{1, -1, i, -i\}$. Za njihov frakcioni stepen uzećemo, analogno neprekidnom slučaju, $\lambda_k = \exp(-i\pi a k/2)$.

Kako skup karakterističnih vektora matrice $\mathbf{F}$ nije jedinstven, da bismo potpuno definisali diskretnu frakcionu Furijeovu transformaciju, treba odrediti i koji skup karakterističnih vektora koristiti u (4.4). U neprekidnom slučaju, za karakteristične vektore koristili smo Hermitsko-Gausovske funkcije koje su istovremeno karakteristične funkcije i $\mathcal{F}$ i $\mathcal{S}$. Da bismo sada definisali diskretnu transformaciju koja je potpuno analogna neprekidnoj, za te vektore izabraćemo one koji su istovremeno karakteristični koreni matrice $\mathbf{F}$ i diskretnog analoga operatora $\mathcal{S}$. Označimo ih sa $u_k[n]$. Tada definicija DFRT postaje:

$$\mathbf{F}^a[m, n] = \sum_{k=0}^{N-1} u_k[m] e^{-i\frac{\pi}{2}ka} u_k[n], \quad (4.7)$$

U nastavku ćemo eksplicitno definisati vektore $u_k[n]$, $k = 0, \dots, N - 1$.

4.2 Karakteristični vektori diskretne Furijeove transformacije

Vektore $u_k[n]$, $k = 0, \dots, N-1$. definisaćemo kao rešenja diferencne jednačine analogne jednačini (4.2).

Za to koristimo centralni diferencni količnik drugog reda $\tilde{\mathcal{D}}$, koji je aproksimacija drugog izvoda $\mathcal{D}^2 = \frac{d^2}{dx^2}$ i definisan je sa:

$$\tilde{\mathcal{D}}^2 f(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}, \quad (4.8)$$

i važi $\tilde{\mathcal{D}}^2 = \mathcal{D}^2 + \mathcal{O}(h^2)$.

Operator translacije može se prikazati u hiperdiferencijalnom obliku kao: $f(x+h) = e^{h\mathcal{D}}f(x)$, što kada ubacimo u (4.8) i iskoristimo Tejlorov razvoj funkcije e^x , dobijamo:

$$\tilde{\mathcal{D}}^2 = \frac{e^{h\mathcal{D}} - 2 + e^{-h\mathcal{D}}}{h^2} = \mathcal{D}^2 + \underbrace{\frac{2h^2}{4!}\mathcal{D}^4 + \frac{2h^4}{6!}\mathcal{D}^6 + \dots}_{\mathcal{O}(h^2)} \quad (4.9)$$

Dalje, ako u (4.4) ubacimo izraz za $\tilde{\mathcal{D}}^2$ dobijamo diferencni analog operatora $\mathcal{F}\mathcal{D}^2\mathcal{F}^{-1}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\tilde{\mathcal{D}}^2\mathcal{F}^{-1} &= \mathcal{F}\left[\frac{e^{h\mathcal{D}} - 2 + e^{-h\mathcal{D}}}{h^2}\right]\mathcal{F}^{-1} \\ &= \frac{e^{i2\pi hx} - 2 + e^{-i2\pi hx}}{h^2} = \frac{2(\cos(2\pi hx) - 1)}{h^2} \\ &= -4\pi^2 x^2 + \frac{h^2}{12}(16\pi^4 x^4) + \mathcal{O}(h^4) \end{aligned} \quad (4.10)$$

gde smo koristili da važi $\mathcal{F}e^{h\mathcal{D}}\mathcal{F}^{-1} = e^{i2\pi hx}$ i Tejlorovu formulu. Sada ako u operatoru $\mathcal{S}$ ubacimo $\tilde{\mathcal{D}}^2$ umesto $\mathcal{D}^2$ dobijamo njegovu aproksimaciju koju ćemo označiti sa $\tilde{\mathcal{S}}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}} &= \tilde{\mathcal{D}}^2 + \mathcal{F}\tilde{\mathcal{D}}^2\mathcal{F}^{-1} = \frac{e^{h\mathcal{D}} - 2 + e^{-h\mathcal{D}}}{h^2} + \frac{2(\cos(2\pi hx) - 1)}{h^2} \\ &= \mathcal{D}^2 - 4\pi x^2 + \frac{h^2}{12}(\mathcal{D}^4 + 16\pi^4 x^4) + \mathcal{O}(h^4) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Oдавde vidimo da je $\tilde{\mathcal{S}}$ jedna $\mathcal{O}(h^4)$ aproksimacija operatora $\mathcal{S}$. Diferencnu jednačinu $\tilde{\mathcal{S}}f(x) = \lambda f(x)$ možemo korišćenjem definicije diferencnog količnika i operatora $\tilde{\mathcal{S}}$ zapisati na sledeći način:

$$f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) + 2(\cos(2\pi hx) - 1)f(x) = h^2\lambda f(x). \quad (4.12)$$

Diskretizacijom vremenske promenljive tako što ćemo uzeti $t = nh$, $0 \leq n \leq N-1$, odnosno posmatranjem N tačaka iz vremenskog domena međjusobno udaljenih za rastojanje $h = 1/\sqrt{N}$, dobijamo diferencnu jednačinu analognu diferencijalnoj jednačini Hermitsko-Gausovskih funkcija:

$$f[n+1] - 2f[n] + f[n-1] + 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) - 1\right)f[n] = \lambda f[n], \quad (4.13)$$

gde je $f[n] = f(nh)$. Koeficijenti ove jednačine su periodični sa periodom N , što implicira postojanje periodičnih rešenja sa istim periodom.

Kada (4.13) zapišemo za svako $0 \leq n \leq N - 1$ s obzirom da radimo sa konačnim uzorkom signala, dobijamo sistem jednačina koji se može zapisati u matričnom obliku na sledeći način:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) - 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N}2\right) - 4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N}(N-1)\right) - 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ f[2] \\ \vdots \\ f[N-2] \\ f[N-1] \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ f[2] \\ \vdots \\ f[N-2] \\ f[N-1] \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

pri čemu smo koristili $f[n+N] = f[n]$. Matricu koju smo dobili označićemo sa **S**. Ona dakle predstavlja diskretni analog operatora $\mathcal{S}$ i njeni karakteristični vektori su rešenja diferencne jednačine (4.13) u jednom periodu. Za ovu matricu važi:

Teorema 4.2.1. *Matrica **S** i matrica **F** diskretne Furijeove transformacije komutiraju.*

Iz ove teoreme i teoreme (4.1.1) sledi da **S** i **F** imaju zajednički skup karakterističnih vektora, koji su rešenja diferencne jednačine (4.13) te za vektore $u_k[n]$ uzimamo upravo taj zajednički skup karakterističnih vektora.

4.3 Jedinstvenost zajedničkog skupa karakterističnih vektora

U ovom delu pokazaćemo da je zajednički skup karakterističnih vektora matrica **S** i **F** jedinstven i da su medjusobno ortogonalni.

Za početak ćemo navesti definiciju parnog i neparnog vektora u $\mathbb{C}^N$:

Definicija 4.3.1. *Neka je $c[n] = [c[0], c[1], \dots, c[N-1]]^T$ proizvoljan vektor iz $\mathbb{C}^N$, za neko $N \in \mathbb{N}$. Tada sa $c[-n]$ označavamo vektor $c[-n] = [c[0], c[N-1], c[N-2], \dots, c[1]]^T$ i kažemo da je vektor $c[n]$ paran (neparan) ako je $c[n] = c[-n]$ (odnosno $c[n] = -c[-n]$).*

Sledeća osobina matrice $\mathbf{F}$ će nam biti od značaja:

Teorema 4.3.1. *Karakteristični vektori matrice diskretne Furijeove transformacije su ili parni ili neparni vektori.*

Za matricu $\mathbf{S}$ datu u (4.14) važi da su joj, kada je $N \neq 4m$, $m \in \mathbb{N}$, svi karakteristični koreni međusobno različiti. Kako je $\mathbf{S}$ realna i simetrična, karakteristični koreni su joj takodje realni i skup karakterističnih vektora koji im odgovaraju je ortogonalan i jedinstven. Samim tim, kako $\mathbf{S}$ i $\mathbf{F}$ imaju zajednički skup karakterističnih vektora, upravo taj jedinstven skup mora biti i skup karakterističnih vektora matrice $\mathbf{F}$.

Kada je $N = 4m$, $m \in \mathbb{N}$, matrica $\mathbf{S}$ i dalje ima različite karakteristične korene osim jednog koji ima vrednost 0 i višestrukost 2. Karakteristični vektori koji odgovaraju svim ostalim korenima osim ovog jednog su međusobno ortogonalni a zbog toga što je matrica $\mathbf{S}$ realna i simetrična i ova dva vektora koji odgovaraju dvostrukom korenu mogu se izabrati tako da budu ortogonalni međusobno i u odnosu na ostale. Pri tome postoji samo jedan način da se izaberu tako da jedan bude paran a drugi neparan (što je potrebno da bi ceo skup bio i skup karakterističnih vektora matrice $\mathbf{F}$). Dakle, za koren višestrukosti 2 biramo da jedan karakteristični vektor bude paran a drugi neparan. Na ovaj način opet imamo jedinstveno odredjen zajednički skup karakterističnih vektora matrice $\mathbf{S}$ i matrice $\mathbf{F}$.

Kako taj skup mora biti sastavljen od samo parnih i neparnih vektora, odredićemo ga upravo u prostorima parnih i neparnih vektora. U tu svrhu koristimo transformacionu matricu P koja vrši dekompoziciju vektora na parne i neparne komponente.

Naime, svaki vektor $f[n]$, $0 \leq n \leq N-1$ može se prikazati kao zbir jednog parnog i jednog neparnog vektora, na sledeći način:

$$f[n] = \frac{1}{2}(f[n] + f[-n]) + \frac{1}{2}(f[n] - f[-n]).$$

Matrica P dati vektor $f[n]$ preslikava u vektor $g[n]$ čije su prve $\lfloor N/2 + 1 \rfloor$ komponente parne komponente vektora $f[n]$, odnosno dovoljne su za konstruisanje parnog dela $f[n]$ a preostale koordinate vektora $g[n]$ daju neparne komponente vektora $f[n]$, onosno dovoljne su za konstruisanje neparnog dela. Na primer, za dimenziju vektora $N = 5$, primer matrice P je:

$$P_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

te primenom na vektor $f[n]$ dobijamo vektor $g[n]$, to jest $Pf = g$, takav da su njegove prve 3 koordinate:

$$\begin{aligned} [g[0], g[1], g[2]]^T &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\sqrt{2}f[0], f[1] + f[-1], f[2] + f[-2]]^T \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\sqrt{2}f[0], f[1] + f[4], f[2] + f[3]]^T \end{aligned}$$

zapravo komponente iz parnog dela vektora $f[n]$, podeljene sa $\sqrt{2}$, a preostale 2 koordinate su:

$$\begin{aligned} [g[3], g[4]]^T &= \frac{1}{\sqrt{2}}[f[2] - f[-2], f[1] - f[-1]]^T \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[f[2] - f[3], f[1] - f[4]]^T \end{aligned}$$

su komponente iz neparnog dela vektora $f[n]$.

U slučajevima kada je $f[n]$ paran, poslednje $N - \lfloor N/2 + 1 \rfloor$ koordinate vektora $g[n]$ biće jednake nuli i obrnuto, kada je $f[n]$ neparan onda su prve $\lfloor N/2 + 1 \rfloor$ koordinate $g[n]$ sigurno jednake nuli.

Za matricu P važi da je simetrična i unitarna, odnosno $P = P^T = P^{-1}$. Množenjem matrice $\mathbf{S}$ sleva sa P i zdesna sa P^{-1} , dobijamo matricu PSP^{-1} koja je slična sa matricom $\mathbf{S}$, te imaju iste karakteristične korene i važi da, ako je v karakteristični vektor matrice $\mathbf{S}$ za koren λ , onda je Pv karakteristični vektor matrice PSP^{-1} za isti koren λ .

U skladu sa prethodno rečenim, očekujemo da je matrica PSP^{-1} blok dijagonalna matrica, odnosno oblika:

$$PSP^{-1} = PSP = \begin{bmatrix} \text{Ev} & 0 \\ 0 & \text{Od} \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

jer u suprotnom matrica $\mathbf{S}$ ne bi mogla imati sve parne/neparne karakteristične vektore.

Karakteristični vektor matrice PSP^{-1} mogu se odrediti posebno od matrice Ev i Od i odgovarajući vektor od $\mathbf{S}$ se dobijaju kao parna/neparna ekstenzija vektora matrice PSP^{-1} . Preciznije, ako je $\hat{e}_k$ karakteristični vektor matrice Ev onda se dopunjavanjem $\hat{e}_k$ nulama dobija vektor $e = [\hat{e}_k, 0, \dots, 0]^T$ koji je karakteristični vektor matrice PSP^{-1} i konačno, karakteristični vektor matrice $\mathbf{S}$ se dobija transformacijom tog nulama dopunjenog vektora sa $P^{-1} = P$ (jer iz $PSP^{-1}e = \lambda e$ sledi $\mathbf{S}(P^{-1}e) = \lambda(P^{-1}e)$).

Ovim se problem nalaženja zajedničkog skupa karakterističnih vektora svodi na nalaženje karakterističnih vektora matrica Ev i Od.

Matrica $\mathbf{S}$ ima tridijagonalnu strukturu, izuzev dva elementa u gornjem desnom i donjem levom uglu. Nakon transformacije sličnosti, $\mathbf{PSP}^{-1}$ postaje tačno tridijagonalna matrica, što znači da su joj i podmatrice $\mathbf{E}_v$ i $\mathbf{O}_d$ takodje tridijagonalne. Za tridijagonalne matrice važi da imaju različite karakteristične korene što znači da su karakteristični vektori matrica $\mathbf{E}_v$ i $\mathbf{O}_d$ jedinstveni što potvrđuje jedinstvenost zajedničkog skupa vektora.

4.4 Sortiranje karakterističnih korena i algoritam

U ovom delu ćemo odrediti koji karakteristični vektor matrice $\mathbf{S}$ predstavlja koju Hermitsko-Gausovsku funkciju.

Definišaćemo za početak šta je promena znaka vektora (engl. *zero-crossing*).

Definicija 4.4.1. *Kažemo da vektor $x[n] \in \mathbb{R}^N$, $0 \leq n \leq N-1$ ima promenu znaka na koordinati k , ako je $x[k]x[k+1] < 0$, $k \in \{0, \dots, N-2\}$. Takodje, pod promenom znaka računamo i ako je $x[0]x[N-1] < 0$.*

Ideja je da se pokaže da svi karakteristični vektori matrice $\mathbf{S}$ imaju različit broj promena znaka i da se kao diskretne verzije, dodele Hermitsko-Gausovskim funkcijama sa istim brojem nula, jer važi da n -ta Hermitsko-Gausovska funkcija ima n realnih nula, za svako $n \in \mathbb{N}$.

Za matrice $\mathbf{E}_v$ i $\mathbf{O}_d$ važi da karakteristični koren sa najvećom vrednošću nema promena znaka, zatim da koren sa drugom najvećom vrednošću ima jednu promenu znaka i tako dalje.

Dalje ćemo pokazati sledeće:

Teorema 4.4.1. *Karakteristični koreni matrice $\mathbf{F}$ diskretne Furijeove transformacije dimenzije N dobijeni od matrica $\mathbf{E}_v$ i $\mathbf{O}_d$ imaju različite brojeve promena znaka.*

Dokaz teoreme 4.4.1.:

Slučaj 1:

Neka je $N = 2r+1$. Ako je $\hat{e}_k$ karakteristični vektor matrice $\mathbf{E}_v$ sa k promena znaka, $0 \leq k \leq r$, paran karakteristični vektor matrice $\mathbf{S}$ se od njega dobija dodavanjem nula u $\hat{e}_k$ pa množenjem sa P :

$$e = P[\hat{e}_k^T \mid 0 \dots 0]^T,$$

čime se dobija:

$$e = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{2}\hat{e}_k[0] \quad \hat{e}_k[1] \quad \dots \quad \hat{e}_k[r] \mid \hat{e}_k[r] \quad \dots \quad \hat{e}_k[1] \right]^T.$$

Za lakše prebrajanje promena znaka, dodajemo prvi element na kraj vektora e :

$$[e \mid e[0]] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\underbrace{\sqrt{2}\hat{e}_k[0] \ \hat{e}_k[1] \ \dots \ \hat{e}_k[r]}_{k \text{ promena znaka}} \mid \underbrace{\hat{e}_k[r] \ \dots \ \hat{e}_k[1] \ \sqrt{2}\hat{e}_k[0]}_{k \text{ promena znaka}} \right]^T$$

Dakle vidimo da vektor e ima $2k$ promena znaka.

Analogno se dobijaju i neparni vektori. Ako je $\hat{o}_k$ neparan karakteristični vektor matrice $\mathbf{O}$ sa k promena znaka, pri čemu $0 \leq k \leq r-1$, odgovarajući karakteristični koren matrice $\mathbf{S}$ dobija se dodavanjem nula iznad postojećih koordinata i množenjem matricom P . Označimo takav vektor sa o :

$$o = P[0 \ \dots \ 0 \mid \hat{o}_k^T]^T$$

te se dobija:

$$o = \frac{1}{\sqrt{2}} [0 \ \hat{o}_k[1] \ \dots \ \hat{o}_k[r] \mid -\hat{o}_k[r] \ \dots \ -\hat{o}_k[1]]^T.$$

Ponovo, dodavanjem prve komponente vidimo da očigledno, ako vektor $\hat{o}_k$ ima k promena znaka, vektor o će imati $2k+1$ promenu znaka:

$$[o \mid o[0]] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\underbrace{0 \ \hat{o}_k[1] \ \dots \ \hat{o}_k[r]}_k \mid \underbrace{-\hat{o}_k[r] \ \dots \ -\hat{o}_k[1]}_k \ 0 \right]^T$$

Slučaj 2:

Neka je $N = 2r$. Neka je $\hat{e}_k$ karakteristični vektor matrice $\mathbf{E}$. Kao paran, dopunjen vektor matrice $\mathbf{S}$ dobija se:

$$[e \mid e[0]] = \frac{1}{\sqrt{2}} [\sqrt{2}\hat{e}_k[0] \ \hat{e}_k[1] \ \dots \ \hat{e}_k[r-1] \mid \hat{e}_k[r] \ \hat{e}_k[r-1] \ \hat{e}_k[1] \ \sqrt{2}\hat{e}_k[0]]$$

i ovaj vektor ima ponovo $2k$ promena znaka, pri čemu $0 \leq k \leq r$. Pona-
vljanjem postupka za neparne vektore dobijamo da dopunjen karakteristični vektor matrice $\mathbf{O}$:

$$[o \mid \hat{o}_k[0]] = \frac{1}{\sqrt{2}} [0 \ \hat{o}_k[1] \ \dots \ \hat{o}_k[r-1] \ 0 \mid -\hat{o}_k[r-1] \ \dots \ -\hat{o}_k[1] \ 0]$$

ima $2k+1$ promena znaka pri čemu je $0 \leq k \leq r-2$. $\square$

Dakle pokazali smo da parni karakteristični koreni matrice $\mathbf{S}$ uvek imaju $2k$ promena znaka a neparni $2k+1$ promenu znaka, međjutim, u slučaju kada je N neparan broj, indeks $k = \{0, \dots, N-1\}$ a u slučaju kada je N paran broj, $k = \{0, \dots, N-2, N\}$, odnosno, kada je N paran broj ne postoji

karakteristični vektor od $\mathbf{S}$ sa $N - 1$ promena znaka, a u slučaju kada je N neparan broj, ne postoji vektor sa N promena znaka. Svaki karakteristični koren sa k promena nule pridružuje se k -toj Hermitsko-Gausovskoj funkciji kao njena diskretna aproksimacija.

Sada kada imamo tačno definisanu proceduru za izračunavanje i sortiranje zajedničkih karakterističnih vektora $\mathbf{F}$ i $\mathbf{S}$, možemo dati konačnu definiciju diskretne frakcije Furijeove transformacije:

Definicija 4.4.2. *Matrica $\mathbf{F}^a$ diskretne frakcije Furijeove transformacije dimenzije N , stepena a ($\alpha = a\pi/2$) data je sa:*

$$\mathbf{F}^a[m, n] = \sum_{k=0, k \neq (N+1+(N)_2)}^N u_k[m] e^{-ika\pi/2} u_k[n], \quad (4.16)$$

gde je $u_k[n]$ k -ta diskretna verzija Hermitsko-Gausovske funkcije (karakteristični vektor matrice $\mathbf{S}$ sa k promena znaka) i $(N)_2 \equiv N \bmod 2$. Za vektor $f[n]$, $0 \leq n \leq N - 1$ sa uzorcima signala diskretna frakciona Furijeova transformacija se računa množenjem vektora $f[n]$ sleva matricom $\mathbf{F}^a$:

$$\mathbf{F}^a(f[n]) = \mathbf{F}^a \cdot f[n]$$

Dakle, možemo utvrditi algoritam za izračunavanje diskretne frakcije Furijeove transformacije:

1. Generisati matrice $\mathbf{S}$ i P .
2. Generisati matrice $\mathbf{E}_v$ i $\mathbf{O}_d$ na osnovu (4.15).
3. Naći karakteristične korene i vektore matrica $\mathbf{E}_v$ i $\mathbf{O}_d$.
4. Sortirati karakteristične vektore matrice $\mathbf{E}_v$ ($\mathbf{O}_d$) po broju promena znaka u rastućem redosledu i označiti ih tako sortirane sa e_k (e_k).
5. Izračunati $u_{2k}[n] = P \cdot [e_k^T \mid 0 \dots 0]^T$.
Izračunati $u_{2k+1}[n] = P \cdot [0 \dots 0 \mid o_k^T]^T$.
6. Definirati $\mathbf{F}^a[m, n] = \sum_{k \in \mathcal{M}} u_k[m] e^{-ika\pi/2} u_k[n]$.
7. Izračunati $\mathbf{F}^a(f[n]) = \mathbf{F}^a \cdot f[n]$.

Ovako definisana transformacija zadovoljava osobine koje smo naveli kao najbitnije:

- unitarna je jer karakteristični koreni $\lambda_k = e^{-i\pi k/2}$ Furijeove transformacije imaju jediničnu magnitudu.
- Svodi se na klasičnu diskretnu Furijeovu transformaciju za $a = 1$ jer se (4.16) svodi na spektralnu dekompoziciju diskretne Furijeove transformacije.
- Važi aditivnost indeksa: $\mathbf{F}^{a_1}\mathbf{F}^{a_2} = \mathbf{F}^{a_1+a_2}$ što sledi direktno iz definicije množenja matrica i ortonormiranosti skupa karakterističnih vektora $u_k[n]$.

Glava 5

Primena frakcione Furijeove transformacije u kompresiji slika

U ovom poglavlju predstavimo osnovne pojmove u vezi digitalnih slika i njihove kompresije. Zatim će biti objašnjena primena frakcione Furijeove transformacije u kompresiji i na primeru će biti prikazani rezultati koji se dobijaju pri različitim nivoima kompresije i prilikom promene stepena frakcione Furijeove transformacije. Uporedićemo dobijene rezultate za stepen $a = 1$ koji odgovara klasičnoj transformaciji u odnosu na rezultate koji se dobijaju za različite vrednosti $a \in (0, 1)$.

5.1 Osnovni pojmovi u digitalnoj obradi slike

Slika predstavlja vizuelnu reprezentaciju objekta ili grupe objekata. Može se predstaviti kao dvodimenzionalna funkcija, $f(x, y)$ gde su x i y prostorne koordinate i za datu tačku (x, y) u prostoru, magnituda od $f(x, y)$ zove se intenzitet slike u toj tački. U slučaju kada imamo konačne diskretne vrednosti za x , y i $f(x, y)$ govorimo o digitalnoj slici.

Digitalna slika sastoji se od konačnog broja elemenata od kojih svaki ima svoju lokaciju i vrednost. Uobičajeno je da se digitalna slika predstavlja matricom brojeva dimenzija $M \times N$, koja se u literaturi često naziva i bitna mapa (engl. *bitmap*). Najčešće je $N = M$ i tipične dimenzije su 128, 256, 512, 1024 itd. Elementi matrice zovu se pikseli. Merenjem boje realne slike u velikom broju tačaka dobijaju se digitalne slike kao njihove aproksimacije. Svaki piksel u digitalnoj slici predstavlja boju, ili nivo sive boje kod crno-belih slika, u određenoj tački slike a na ekranima digitalnih uređaja ta boja

je predstavljena u maloj tački ekrana koja je te određene boje. Dakle, postoje dva osnovna tipa digitalnih slika:

- *Crno-bele slike* - Svaki piksel (element matrice) od kojih je sastavljena crno-bela slika je broj koji predstavlja određenu nijansu sive boje originalne slike u odgovarajućoj tački. Te vrednosti pokrivaju obično veliki broj nijansi - nivoa sive, počev od same bele boje pa sve do crne. Najčešće je reč o 256 različitih nijansi i za čuvanje jednog takvog piksela dovoljan je jedan bajt (8 bita) memorije računara.
- *Slike u boji* - Slika u boji sastoji se od piksela od kojih je svaki sastavljen od 3 broja koji odgovaraju nivou crvene, zelene i plave boje u toj određenoj tački slike. Takva slika predstavlja se takozvanom tro-dimenzionalnom matricom ili sa 3 dvodimenzionalne matrice od kojih svaka sadrži nivoe jedne od ove tri boje. Svaka od tri boje se najčešće prikazuje u takodje 256 nijansi, te je za čuvanje jednog piksela slike u boji potrebno tri puta više memorije nego u slučaju crno bele slike, odnosno 3 bajta (24 bita).

Za memorisanje slika i multimedija i njihovo slanje putem interneta, neophodno je kompresovati podatke. Kompresija digitalne slike podrazumeva razne tehnike za smanjenje količine podataka potrebnih za njeno predstavljanje. To znači ukloniti suvišne podatke, pri čemu razlikujemo termin podatak i informacija. Podatak je način za reprezentaciju informacije i ista informacija može biti prikazana potpuno drugačijim skupovima podataka. Ako određena informacija ima dve reprezentacije različitih veličina, onda se kaže da jedna od njih ima suvišne podatke, ili drugačije, redundansu podataka (engl. *data redundancy*). Kod većine digitalnih slika pikseli koji su jedni do drugih su međusobno korelisani i stoga sadrže suvišne podatke te je cilj naći manje korelisanu reprezentaciju slike.

Redundansa podataka može se i izmeriti: ako su n_1 i n_2 broj simbola potrebnih za predstavljanje iste informacije u dva skupa podataka, relativna redundansa podataka R_D prvog skupa podataka (okarakterisanog sa n_1) definisana je sa:

$$R_D = 1 - \frac{1}{CR},$$

gde se $CR = n_1/n_2$ zove odnos kompresije.

Redundansa podataka može se podeliti u tri tipa:

- Redundansa kodovanja - koja postoji u skoro svim slikama čiji su pikseli direktno binarno kodovani, odnosno isti broj bitova je dodeljen svakom pikselu. Može se ukloniti prelaskom na kodiranje sa promenljivim dužinama kodnih reči.

- Prostorna redundansa - ona je prisutna kada su pikseli slike korelisani usled geometrijskih relacija te se vrednost jednog piksela može predvideti na osnovu vrednosti suseda i on nosi malo informacija. Uklanja se metodama kao što su RLC kodovanje (run-length), delta kompresija, prediktivno kodovanje idr.
- Psihovizuelna redundansa - odnosi se na to da pri obradi slike u ljudskom mozgu neke informacije imaju manju važnost od drugih. Pri posmatranju slike, mozak traži specifične delove slike kao što su konture i teksture i onda ih kombinuje u prepoznatljive grupe pa ih povezuje. Pri tome oko ne registruje isto sve vizuelne informacije koje prima te neke imaju manju relativnu važnost u odnosu druge. Za takve kažemo se da su psihovizuelno redundantne. Za uklanjanje podataka koji ih predstavljaju koristi se proces kvantitizacije. Ovo je proces u kom se podaci gube ali zbog načina na koje mozak registruje sliku, posmatrač uglavnom ne primeti tu razliku.

Kompresija podataka postiže se kada se jedna ili više ovih redundansi uklone ili smanje. Sama kompresija može biti bez gubitaka i sa gubicima.

Pri kompresiji bez gubitaka, slika se nakon kompresije može rekonstruisati, odnosno dekompresovati tako da bude numerički identična originalnoj slici.

Kompresija sa gubicima je takva da se nakon dekompresije dobija rekonstruisana slika slabijeg kvaliteta u odnosu na original ali uz razmatranje vizuelne precepcije može se postići da se degradacija u kvalitetu ne primećuje a ostvaruje se veći odnos kompresije nego pri kompresiji bez gubitaka. Kompresija slike korišćenjem frakcione Furijeove transformacije spada u ovaj tip kompresije.

5.2 Postupak kompresije

Generalno, sistem za kompresiju primenom transformacije sastoji se od dva dela - kodera i dekodera. U koder se unosi slika nad kojom se izvode tri operacije: dekompozicija slike na podslike, transformacija i kvantitizacija. Time se dobija kompresovana slika koja zahteva manje memorije za čuvanje i slanje podataka. Dekoder vrši inverzne korake suprotnim redosledom kako bi se kompresovana slika rekonstruisala na što bližu originalu. S obzirom da kvantitizacija dovodi do nepovratnih gubitaka, njen inverzni korak pri dekodiranju se preskače.

U prvom koraku, digitalna crno-bela slika (kasnije ćemo proširiti na slike u boji), predstavljena matricom dimenzije $N \times M$ deli se na podmatrice - podslike dimenzija $n \times n$. Dimenzije podmatrica su stepeni broja 2, najčešće

se koriste dimenzije 8×8 ili 16×16 . Što je veća veličina podslika, greška pri kompresiji je manja ali raste i kompleksnost računskih operacija. U slučaju da su dimenzije cele slike takve da nisu stepeni broja 2, slika se dopunjuje nulama do prvog stepena dvojke pa se potom deli.

U drugom koraku se primenjuje dvodimenzionalna diskretna frakciona Furijeova transformacija na svaku od podmatrica, odnosno podslika. Zbog separabilnosti transformacije to se može učiniti primenom jednodimenzionalne diskretne frakcione Furijeove transformacije koju smo definisali u prethodnom poglavlju, tako što se matrica jednodimenzionalne transformacije primeni na svaku vrstu podmatrice a onda na svaku kolonu prethodno dobijene transformisane podmatrice. Primenom transformacije nijanse sive u pikselima iz prostornog domena transformišu se u koeficijente nad frakcionim frekvencijskim domenom.

Naredni korak je kvantitizacija koja zapravo predstavlja kompresiju. Vršiti se takozvano odsecanje (engl. *cutoff*) koeficijenata. To se radi tako što se izračuna najveća magnituda od svih koeficijenata u podmatrici, označimo je na primer sa r . Zatim se odbace, odnosno pretvore u nulu, svi koeficijenti u podmatrici čija je magnituda manja od nekog, unapred određenog, procenta broja r . Taj procenat ćemo označavati kao *cutoff*. Ovaj postupak se ponavlja za svaku podmatricu zasebno. Time se zadržavaju dovoljno veliki koeficijenti koji odgovaraju pikselima u prostornom domenu (ovde imamo prostor umesto vremenskog domena) koji su bitni delovi slike, a odbacuju se svi manje bitni. Dobijanjem velikog broja nula u matrici omogućava se da se, kodovanjem promenljive duzine, kompresovana slika sačuva sa manjom količinom potrebne memorije.

Ono što je prednost frakcione Furijeove transformacije u odnosu na klasičnu je što se promenom stepena transformacije a nekada mogu postići isti stepeni kompresije uz manje razlike kasnije dekompresovane slike od originala, nego u slučaju klasične transformacije. Dakle može se dobiti bolji kvalitet dekompresovane slike uz isti nivo kompresije.

Kada dobijemo dekompresovanu sliku, stepen transformacije ćemo, kao što smo već napomenuli, oceniti procentom odnosa kompresije CR (engl. *Compression ratio*), koji predstavlja odnos veličine (memorije potrebne za snimanje) kompresovane slike i veličine originalne slike:

$$\text{CR \%} = \frac{\text{Veličina kompresovane slike}}{\text{Veličina originalne slike}} \times 100. \quad (5.1)$$

Da bismo dekompresovali sliku, primenjujemo inverznu diskretnu frakcionu Furijeovu transformaciju (dakle transformaciju reda $-a$) na svaki red podmatrice kompresovane slike a potom na svaku kolonu. Spajanjem podmatrica dobijamo dekompresovanu sliku koja se razlikuje od originala upravo

zbog odbačenih koeficijenata u procesu kvantitizacije, ali oku posmatrača te razlike uglavnom nisu mnogo uočljive.

Za merenje razlike dekompresovane slike i originala obično se koriste sledeća dva parametra:

- Srednje kvadratna greška - koja se dobija kao:

$$\text{MSE} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N [g(i, j) - f(i, j)]^2, \quad (5.2)$$

gde je $g(i, j)$ matrica dekompresovane slike a $f(i, j)$ matrica originalne slike.

- PSNR (engl. *Peak Signal to Noise Ratio*):

$$\text{PSNR} = 10 \log_{10} \left[\frac{255 \times 255}{\text{MSE}} \right] \text{dB}, \quad (5.3)$$

koji se meri u decibelima i pokazuje odnos između maksimalne moguće snage signala (originalne slike) i snage šuma (srednje kvadratne greške između dekompresovane slike i originala) koji utiču na kvalitet vizuelnog sadržaja.

Što je manja srednje kvadratna greška, veći je PSNR i kvalitet dekompresovane slike je bolji.

Kada je u pitanju kompresija slike u boji, vodi se računa o tome da se slika u boji prikazuje kao 3 matrice, koje se zovu RGB kanalima. Prva matrica sadrži nijanse crvene boje u svakom pikselu slike, druga matrica sadrži nijanse zelene a treća nijanse plave boje po svakom od piksela. Svi opisani koraci se rade tri puta, posebno za svaku od ove tri matrice a onda se njihove kompresovane/dekompresovane matrice sklapaju u kompresovanu/dekompresovanu sliku u boji.

5.3 Primer kompresije i analiza rezultata

Sada ćemo na konkretnom primeru analizirati rezultate koje dobijamo kompresijom slike putem diskretne frakcije Furijeove transformacije.



Slika 5.3.1. Lena

Posmatramo crno-belu test sliku `Lena.tiff` (slika 5.2.1) koju smo koristili i u prvom poglavlju. Ovo je najčešće korišćena test slika u istoriji digitalne obrade signala koja je dostupna za naučne i edukativne svrhe. U pitanju je slika dimenzija 512×512 piksela, koju kao matricu obradjujemo u programskom paketu Matlab a snimljena je u tiff formatu u računaru. Neobradjena, ova slika zauzima 264 584 bajta, odnosno 258kB memorije računara.

Sproveden je proces kompresije a zatim i dekompresije slike, gore opisan, za različite stepene a diskretne frakcije Furijeove transformacije i različite nivoe odsecanja frakcionih koeficijenata.

Slika je pri svakom procesu kompresije/dekompresije podeljena na podmatrice veličine 8×8 piksela (dakle ukupno 64×64 podmatrica). Zatim je za svaku od podmatrica pojedinačno izvršena diskretna frakciona Furijeova transformacija određenog stepena a na svakom redu podmatrice a onda na tako dobijenoj matrici je opet izvršena jednodimenzionalna diskretna FRFT po svakoj koloni. Kod koji je korišćen za izračunavanje diskretne FRFT odgovara algoritmu opisanom u prethodnom poglavlju i naveden je u dodatku. Dostupan je na veb sajtu navedenom u stavci [12] literature.

Proces kvantitizacije podrazumeva pretvaranje u nulu svih onih koeficijenata u transformisanim podmatricama čije su magnitude manje od cutoff procenta najveće magnitude u odgovarajućoj podmatrici. Za vrednosti tog procenta uzimane su redom sledeće vrednosti: $\text{cutoff} = 0,05 = 5\%$, $\text{cutoff} = 0,06 = 6\%$, $\text{cutoff} = 0,08 = 8\%$ i $\text{cutoff} = 0,1 = 10\%$. Nakon kvantitizacije podmatrice se ponovo spajaju u matricu 512×512 koja predstavlja kompresovanu sliku.

Za svaku dobijenu kompresovanu sliku izračunat je stepen kompresije CR dat sa (5.1), pri čemu je slika snimljena u računaru takodje u tiff formatu a vizuelno je prikazana programskim paketom Matlab.

Dekompresija je izvršena primenom diskretne FRFT stepena $-a$ (inverzne prvobitnoj transformaciji). Radi toga je kompresovana matrica ponovo podeljena na podmatrice i za svaku pojedinačno je izračunata inverzna transformacija, da bi se na kraju spojile u celu dekompresovanu sliku.

U tabelama 5.2.1-5.2.4 su prikazani rezultati za CR, MSE i PSNR koji se dobijaju za navedene četiri vrednosti cutoff procenta, pri raznim stepenima transformacije, polazeći od $a = 0.4$ pa sve do $a = 1$ što odgovara klasičnoj diskretnoj Furijeovoj transformaciji.

Iz svih navedenih rezultata u tabelama izdvojimo, na primer, rezultate kojima se dobija nivo kompresije CR od 74%. U tim slučajevima je približno isti broj bita potreban za skladištenje slike u memoriji računara i taj broj je značajno manji od prvobitne memorije koja je potrebna za čuvanje neobradjene slike. Taj isti nivo kompresije dostignut je pri vrednostima $\text{cutoff} = 0,05$, $\text{cutoff} = 0,06$ i $\text{cutoff} = 0,08$. Ono što vidimo u tim slučajevima je da je pri stepenu transformacije $a = 0.94$ dostignuta manja srednja kvadratna greška između dekompresovane i originalne slike, kao i veći PSNR, što znači bolji kvalitet dekompresovane slike, nego pri ostalim stepenima transformacije kao što su $a = 0,92$, $a = 0,96$ $a = 0,98$ pa na kraju i $a = 1$ što odgovara klasičnoj diskretnoj Furijeovoj transformaciji. Ovo je dakle jedan primer kada diskretna frakciona Furijeova transformacija stepena $a \in (0,1)$ daje bolji rezultat nego klasična transformacija koja se dobija za $a = 1$. U praksi je kroz brojne primere pokazano da se bolji rezultati dobijaju za vrednosti stepena manje od 1.

Izdvojene primere kompresovanih i dekompresovanih slika za CR = 74% vidimo na slikama 5.2.5-5.2.8 na kojima je uočljivo da je dekompresovana slika koja se dobija pri $a = 0,94$ boljeg kvaliteta od ostalih.

U opisanom postupku korišćeni su Matlab kodovi dati u Dodatku.

a	MSE	PSNR	CR
0.4	0.0028	73.6652	73
0.5	0.0030	73.3620	73
0.55	0.0068	69.7950	85
0.6	0.0136	66.7944	92
0.65	0.0597	60.3680	92
0.7	0.7157	49.5837	92
0.75	12.3808	37.2033	85
0.8	36.6697	32.4877	75
0.85	17.6588	35.6612	76
0.9	35.8958	32.5804	75
0.92	25.3360	34.0934	74
0.94	17.4848	35.7042	74
0.95	14.9725	36.3778	75
0.96	13.7735	36.7403	76
0.98	26.2693	33.9363	74
1	14.6643	36.4682	77

Tabela 5.2.1 - cutoff = 5%

a	MSE	PSNR	CR
0.4	0.0155	66.2277	73
0.5	0.0235	64.4232	73
0.55	0.0492	61.2086	85
0.6	0.1519	56.3144	92
0.65	1.3158	46.9389	92
0.7	28.9378	33.5161	83
0.75	82.0320	28.9910	70
0.8	44.0012	31.6962	68
0.85	100.1437	28.1246	67
0.9	47.5541	31.3589	68
0.92	33.8231	32.8387	68
0.94	27.4300	33.7485	69
0.95	33.1023	32.9322	69
0.96	79.4882	29.1278	67
0.98	39.7115	32.1416	69
1	25.2780	34.1034	74

Tabela 5.2.3 - cutoff = 8%

a	MSE	PSNR	CR
0.4	0.0051	71.0646	73
0.5	0.0071	69.6398	73
0.55	0.0125	67.1654	85
0.6	0.0295	63.4277	92
0.65	0.1721	55.7741	92
0.7	3.3262	42.9113	91
0.75	38.0410	32.3283	80
0.8	39.7871	32.1334	72
0.85	20.7500	34.9606	74
0.9	40.7938	32.0249	72
0.92	28.3281	33.6086	72
0.94	20.3608	35.0428	72
0.95	18.3649	35.4909	73
0.96	19.6209	35.2036	74
0.98	31.0147	33.2151	73
1	18.2781	35.5115	76

Tabela 5.2.2 - cutoff = 6%

a	MSE	PSNR	CR
0.4	0.0326	62.9945	73
0.5	0.0603	60.3296	73
0.55	0.1392	56.6954	85
0.6	0.4957	51.1785	92
0.65	23.8832	34.3499	89
0.7	137.3762	26.7517	73
0.75	87.4418	28.7136	66
0.8	52.2942	30.9463	64
0.85	118.0185	27.4113	61
0.9	52.4454	30.9337	64
0.92	39.9399	32.1167	65
0.94	51.7310	30.9933	65
0.95	123.7949	27.2038	63
0.96	94.1812	28.3912	64
0.98	46.6699	31.4404	66
1	31.3998	33.1615	72

Tabela 5.2.4 - cutoff = 10%



Slika 5.2.5. - Rezultati dobijeni za $a = 0.92$ i cutoff = 5%. Postignut je CR = 74% pri čemu je MSE = 25.3360 a PSNR = 34.0934



Slika 5.2.6. - Rezultati dobijeni za $a = 0.94$ i cutoff = 5%. Postignut je CR = 74% pri čemu je MSE = 17.4848 a PSNR = 35.7042



Slika 5.2.7. - Rezultati dobijeni za $a = 0.96$ i cutoff = 6%. Postignut je CR = 74% pri čemu je MSE = 19.6209 a PSNR = 35.2036



Slika 5.2.8. - Rezultati dobijeni za $a = 1$ i cutoff = 8%. Postignut je CR = 74% pri čemu je MSE = 25.2780 a PSNR = 34.1034

Dodatak

Navodimo Matlab kodove koje smo koristili u prethodnoj glavi.

Matlab kod za korake kompresije:

```
function [komp,dekomp] = frft_KD2(image,alpha)

img=double(image);
idx=image==0;
brojNulaOriginala=sum(idx(:));

%pravljenje podmatrica
podmatrice={};
for n=1:64
    for m=1:64
        podmatrice{n,m} = img(n*8-7 : n*8, m*8-7 : m*8);
    end
end

F=dFRT_Oz(8,alpha);

%primena dfrft po redovima
podmatriceR={};
for n=1:64
    for m=1:64
        for k=1:8
            podmatriceR{n,m}(k,:)=podmatrice{n,m}(k,:)*F;
        end
    end
end

%primena dfrft po kolonama
```

```

podmatriceK={};
for n=1:64
    for m=1:64
        for k=1:8
            podmatriceK{n,m}(:,k)=F*podmatriceR{n,m}(:,k);
        end
    end
end

%kvantitizacija
podmatriceQ={};
cutOff=0.05; %definisanje cut-off procenta
brojNula=512*512;
for k=1:64
    for l=1:64
        thresh=cutOff*max(abs(podmatriceK{k,l}));
        ind=abs(podmatriceK{k,l})>thresh;
        podmatriceQ{k,l}=podmatriceK{k,l}.*ind;
        brojNula=brojNula-sum(sum(ind));
    end
end

%sastavljanje podmatrica u matricu
komp1=[];
for n=1:64
    for m=1:64
        komp1((n-1)*81:n*8,(m-1)*81:m*8)=podmatriceQ{n,m};
    end
end

%prebacivanje u uint8
komp=uint8(komp1);

%snimanje kompresovane slike u kompjuter
imwrite(komp, 'lenaKDK.tiff');

%citanje podatka o velicini slike u kompjuteru
info=imfinfo('lenaKDK.tiff');
kompSize=info.FileSize;

%racunanje CR-a

```

```

CR=(kompSize/264584)*100;    %broj sa kojim se deli
                                %je velicina u bitima
                                %originalne slike

%crtanje kompresovane
figure , imshow(real(komp));

%DEKOMPRESIJA

%pravljenje podmatrica od kompresovane
kPodmatrice={};
for n=1:64
    for m=1:64
        kPodmatrice{n,m}=komp1(n*8-7:n*8,m*8-7:m*8);
    end
end

Finv=dFRT_Oz(8, -alpha);

%primena inverzne dfrft po redovima
dekompR={};
for n=1:64
    for m=1:64
        for k=1:8
            dekompR{n,m}(k,:)=kPodmatrice{n,m}(k,:)*Finv;
        end
    end
end

%primena inverzne dfrft po kolonama
dekompK={};
for n=1:64
    for m=1:64
        for k=1:8
            dekompK{n,m}(:,k)=Finv*dekompR{n,m}(:,k);
        end
    end
end

%sastavljanje matrice od podmatrica
dekomp1=[];
for n=1:64

```

```

    for m=1:64
        dekompl( (n-1)*81:n*8, (m-1)*81 : m*8) = dekomplK{n,m};
    end
end

%prebacivanje u uint8
dekompl=uint8(dekompl);

%racunanje MSE i PSNR
MSE=immse(image, dekompl);
PSNR=10*log10(255*255/MSE);

%crtanje dekompresovane
figure, imshow(real(dekompl)),
brojNulaOriginala
brojNula
MSE
PSNR
CR
end

```

Matlab kod za diskretnu frakcionu Furijeovu transformaciju:

```

function F=dFRT_Oz(N,a,ord)
%Funkcija F=dfrft(N,a,ord) vraca matricu diskretne
%frakcione Furijeove transformacije
%dimenzija NxN reda a.
%Argument ord je opcioni i predstavlja red aproksimacije
%za izracunavanje matrice S.
%Ako se ne unosi, podrazumeva se ord=2.

global Kvektori Kkoreni ordp

%Ako nije uneta vrednost za argument ord,
%odnosno, broj unetih parametara je 2,
%argument ord se postavlja na 2
if nargin==2, ord=2;end;

%pozivanje funkcije za kreiranje
%matrica karakteristicnih vektora i korena
if (length(Kvektori)~=N | ordp~=ord),

```

```

        [Kvektori , Kkoreni]=dis_s (N, ord );
        ordp=ord;
end;

paran=~rem(N,2);
%ako je N parno, even je 1 i obrnuto

F = Kvektori * diag (exp(-j*pi/2*a*([0:N-2 N-1 paran]))) *Kvek-
tori';

function [Kvektori , Kkoreni]=dis\_s (N, ord)

%funkcija [Kvektori , Kkoreni]=dis\_s (N)
%vraca sortirane karakteristicne vektore
%i karakteristicne korene
%za odgovarajuće vektore

if nargin==1, ord=2;end;

%Kreiranje matrice S
S=diag (2*cos (2*pi/N*([0:N-1]))) +
diag (ones (1 ,N-1),1)+diag (ones (1 ,N-1), -1);

S (1 ,N)=1;S (N,1)=1;

%Konstruisanje matrice P

p=N;
r=floor (p/2);
P=zeros (p,p);

P (1 ,1)=1;
paran=~rem (p,2);
for k=1:r-paran ,
    P (k+1,k+1)=1/sqrt (2);
    P (k+1,p-(k+1)+2)=1/sqrt (2);
end;

```

```

if (paran), P(r+1,r+1)=1; end;
for k=r+1:p-1,
    P(k+1,k+1)=-1/sqrt(2);
    P(k+1,p-(k+1)+2)=1/sqrt(2);
end;
CS=P*S*P';
C2=CS(floor(1:N/2+1),floor(1:N/2+1));
S2=CS(floor(N/2+2):N,floor(N/2+2):N);

[vc,ec]=eig(C2);[vs,es]=eig(S2);
qvc=[vc;zeros(ceil(N/2-1),floor(N/2+1))];
SC2=P*qvc;          %Parni karakteristikni vektori matrice S

qvs=[zeros(floor(N/2+1),ceil(N/2-1));vs];
SS2=P*qvs;          %Neparni karakteristikni vektori matrice S

es=diag(es);ec=diag(ec);
[d,in]=sort(-ec);
SC2=SC2(:,in);
ec=ec(in);

[d,in]=sort(-es);
SS2=SS2(:,in);
es=es(in);

if rem(N,2)==0,
    S2C2=zeros(N,N+1);
    SS2(:,size(SS2,2)+1)=zeros(N,1);
    S2C2(:,[0:2:N]+1)=SC2;
    S2C2(:,[1:2:N]+1)=SS2;
    S2C2(:,N)=[];
else
    S2C2=zeros(N,N);
    S2C2(:,[0:2:N]+1)=SC2;
    S2C2(:,[1:2:N-1]+1)=SS2;
end;

Kvektori=S2C2;
Kkoreni=(-j).^ [ 0:N-2 (N-1)+paran ];

```

Zaključak

Furijeova analiza predstavlja standardan alat koji se koristi za predstavljanje signala u frekvencijskom domenu, što je važno u mnogobrojnim primenama. Uvodjenjem frakcione Furijeove transformacije uopštava se klasična transformacija. U svim oblastima gde se koristi klasična Furijeova transformacija postoji mogućnost generalizacije i postizanja boljih rezultata korišćenjem frakcione transformacije.

U ovom radu analizirali smo Furijeovu transformaciju i njene najvažnije osobine. Zatim smo izveli definiciju frakcione Furijeove transformacije, pokazali njene osobine i vezu sa Vignerovom distribucijom. Definisali smo algoritam za izračunavanje njene diskretne aproksimacije i pokazali na primeru kompresije digitalne slike da se njenim korišćenjem mogu postići bolji rezultati nego sa klasičnom transformacijom.

Literatura

- [1] N. Teofanov, *Predavanja iz primenjene analize*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2011.
- [2] A. Bultheel, H. Martinez-Sulbaran, *Computation of the Fractional Fourier Transform*, Applied and Computational Harmonic Analysis, 2014.
- [3] A. C. McBride, F. H. Kerr, *On Namias's Fractional Fourier Transform*, IMA Journal of Applied Mathematics, 1987.
- [4] B. W. Dickinson, K. Steiglitz, *Eigenvectors and Functions of the Discrete Fourier Transform*, IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1982.
- [5] C. Candan, M. A. Kutay, H. M. Ozaktas, *The Discrete Fractional Fourier Transform*, IEEE Transactions on Signal Processing, 2000.
- [6] C. Candan, *The Discrete Fractional Fourier Transform*, Bilkent University, Ankara, 1998.
- [7] H. Martinez, A. Bultheel, *A shattered survey of the Fractional Fourier Transform*, Department of Computer Science, K.U.Leuven, 2002.
- [8] H. M. Ozaktas, B. Barshan, D. Mendlovic, L. Onural, *Convolution, filtering and multiplexing in fractional Fourier domains and their relation to chirp and wavelet transforms*, Journal of the Optical Society of America, 1994.

- [9] H. M. Ozaktas, M. A. Kutay, D. Mendlovic, *Introduction to the Fractional Fourier Transform and its Applications*, Advances in Imaging and Electron Physics, 1999.
- [10] J. H. McClellan, T. W. Parks, *Eigenvalue and eigenvector decomposition of the discrete Fourier transform*, IEEE Transactions on Acoustic, Speech and Signal Processing, 1972.
- [11] L. B. Almeida, *The Fractional Fourier Transform and Time-Frequency Representations*, IEEE Transactions on Signal Processing, 1994.
- [12] <https://www.mathworks.com/matlabcentral/mlc-downloads/downloads/submissions/51103/versions/1/previews/Code>
- [13] R. C. Gonzales, R. E. Woods, *Digital Image Processing*, Prentice Hall, New Jersey, 2002.
- [14] S. J. Bagul, N. G. Shimpi, P. M. Patil, *Color Image Compression Using Discrete Fractional Fourier Transform*, International Journal of Engineering and Innovative Technology, 2014.
- [15] Steven W. Smith, *The Scientist and Engineers's Guide to Digital Signal Processing*, California Technical Publishing, San Diego, 1997.
- [16] S. R. Subramanian, *Fractional Fourier-based Filtering and Applications*, Division of Engineering, King's College London, 2013.
- [17] Victor Namias, *The fractional order of Fourier transform and its application in quantum mechanic*, IMA Journal of Applied Mathematics, 1980.
- [18] K. Singh, *Performance of Discrete Fractional Fourier Transform Classes in Signal Processing Applications*, Department of Electronics and Communication Engineering, Thapar Institute of Engineering and Technology, Patiala, 2006.
- [19] K. Singh, R. Kumar, R. Khanna, *Satellite Image Compression using Fractional Fourier Transform*, International Journal of Computer Applications, 2012.

Biografija



Gordana Divljakov rodjena je 02.07.1990. u Vršcu. Pohadjala je Osnovnu školu 'Dositej Obradović' u Plandištu. Gimnaziju "Borislav Petrov Braca" iz Vršca završila je 2009.godine i iste godine upisala je osnovne studije Prime-njene matematike, modul Matematika finansija, na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Osnovne studije završila je 2013. godine kada je upisala i master studije na istom smeru. Nakon rada u osnovnoj školi, trenutno je zaposlena u kompaniji Sixsentix.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Gordana Divljakov

AU

Mentor: dr Nenad Teofanov

ME

Naslov rada: Frakciona Furijeova transformacija

NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s / en

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2018

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (5/94/0/4/12/0/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)

FO:

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Primenjena analiza

ND

Ključne reči: signal, Furijeova transformacija, frakciona Furijeova transformacija, kompresija, digitalna slika, diskretna frakciona Furijeova transformacija, Vignerova distribucija

PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: Ovaj rad bavi se analizom frakcione Furijeove transformacije koja je uopštenje klasične Furijeove transformacije. Analizirana je klasična Furijeova transformacija i njene najvažnije osobine, uključujući teorem o konvoluciji. Potom je na osnovu nje izvedena definicija frakcione Furijeove transformacije generalizacijom koncepta rotacije u vremensko - frekvencijskoj ravni i izveden je integralni oblik definicije. Pokazane su najvažnije osobine frakcione Furijeove transformacije analogne osobinama klasične transformacije kao i njena

veza sa Vignerovom distribucijom. Izvedena je definicija diskretne frakcione Furijeove transformacije polazeći od spektralne dekompozicije jezgra. Potom je objašnjen koncept kompresije digitalnih slika i na primeru je pokazana kompresija slike korišćenjem frakcione Furijeove transformacije i analizirani su dobijeni podaci.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća:

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

ČK

Predsednik: dr Ljiljana Gajić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Milica Žigić, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Mentor: dr Nenad Teofanov, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master's thesis

CC

Author: Gordana Divljakov

AU

Mentor: dr Nenad Teofanov

MN

Title: The Fractional Fourier Transform

TI

Language of text: Serbian (Latin)

LT

Language of abstract: s / en

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2018

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4

PP

Physical description: (5/94/0/4/12/0/0)(chapters/ pages/ quotations/
tables/ pictures/ graphics/ enclosures)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Applied Calculus

SD

Subject/Key words: signal, Fourier Transform, Fractional Fourier Transform, compression, digital image, Discrete Fractional Fourier Transform, Wigner distribution

SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract: This master thesis is about Fractional Fourier Transform which is the generalization of Fourier Transform. The Fourier transform has been analyzed and some of its most important properties have been proved, including the convolution theorem. After that, the definition of Fractional Fourier Transform has been derived using generalization of rotational concept in time-frequency plane and integral definition has been showed. Basic properties analog to properties of classical Fourier transform have been proved. Also, the relation of Wigner distribution and Fractional Fourier transform

has been showed. The Discrete Fractional Fourier transform definition was derived from spectral decomposition of fractional kernel. In the last Chapter, basic terms of digital images and process of image compression are explained. The test image was compressed using Fractional Fourier Transform and results were analyzed.

AB

Accepted by the Scientific Board on:
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: dr Ljiljana Gajić, full professor at Faculty of Sciences in Novi Sad

Member: dr Milica Žigić, assistant professor at Faculty of Sciences in Novi Sad

Mentor: dr Nenad Teofanov, full professor at Faculty of Sciences in Novi Sad