UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Gala Tomić

Heteroskedastičnost cena finansijskih instrumenata

-master rad-

Novi Sad, 2015. godina

Sadržaj

Predgovor

Analiza vremenskih serija je statistička disciplina koja beleži najdinamičniji razvoj poslednjih decenija zbog svoje mnogostruke primene. Vremenska serija predstavlja niz opservacija uređenih u odnosu na vreme, beleženih u jednakim vremenskim razmacima. Posebnu grupu vremenskih serija čine finansijske vremenske serije. Njihova važna karakteristika je neodređenost, a mera te neodređenosti se naziva volatilnost. Nasuprot klasičnim vremenskim serijama, kod kojih je volatilnost konstantna veličina, kod finansijskih vremenskih serija se ona menja tokom vremena, i ta osobina se naziva heteroskedastičnost.

Finansijske odluke se zasnivaju na odnosu između rizika i prinosa. Predviđanje volatilnosti cena akcija, kao kvantitativna reprezentacija rizika, od posebnog je značaja prilikom investicionog odlučivanja, utvrđivanja cene finansijskih derivata, upravljanja rizikom, selekcije portfolija i oblikovanja strategija trgovanja i hedžinga. Predviđanje volatilnosti hartija od vrednosti jedan je od najvažnijih ulaznih parametara za određivanje cene finansijskih instrumenata.

Rad se sastoji iz četiri poglavlja. Kako vremenska serija predstavlja jednu realizaciju stohastičkog procesa, u prvom delu rada biće data definicija stohastičkog procesa i njegovih osobina. Neke od tih osobina su stacionarnost, ergodičnost, autokovarijansna i autokorelaciona funkcija procesa. Takođe, biće opisane neke osobine finansijskih vremenskih serija kao što su trend, sezonska komponenta i strukturni lom.

U drugom delu će biti izloženi osnovni pojmovi analize linearne vremenske serije. U ovom delu biće prikazani neki od modela linearnih vremenskih serija, a to su: autoregresivni model (AR), model pokretnih proseka (MA), autoregresivni model pokretnih proseka (ARMA). Biće data analiza ovih modela i predviđanje budućih vrednosti vremenskih serija na osnovu ovih modela.

U centralnom delu rada predstavićemo analitičke modele za analiziranje volatilnosti. Prvi koji se bavio ovom temom bio je Robert F. Engle i on je 1982. godine uveo formulaciju pod nazivom ”autoregressive conditional heteroskedasticity (ARCH)” model, odnosno model autoregresione uslovne heteroskedastičnosti. Prilikom empirijske primene ARCH modela, postojala je potreba za velikim brojem parametara. Da bi poboljšao ove nedostatke, Tim Bollerslev je 1986. godine osmislio generalizovani ARCH, ili GARCH model. U ovom poglavlju biće takođe opisani i drugi uslovni heteroskedastični modeli koji su nastali različitim modifikacijama dva prethodno navedena modela.

U četvrtom delu rada, teorijska analiza biće primenjena na realne podatke sa finansijskog tržišta. Koristićemo uslovne heteroskedastične modele vremenskih serija prilikom donošenja odluka. Posmatraćemo kretanje cene akcija preduzeća „NIS – Naftna industrija Srbije“ iz Novog

Sada. Podaci su javni i nalaze se na web sajtu Beogradske berze. Za analizu podataka koristićemo programski paket MATLAB, koji je pogodan za to zbog svojih već ugrađenih funkcija za analiziranje finansijskih vremenskih serija.

Novi Sad, 2015. godina Gala Tomić

1. Osnovni pojmovi analize vremenskih serija

Osnovni pojam u analizi vremenskih serija jeste vremenska serija. Pod pojmom vremenske serije podrazumevamo uređeni niz opservacija. Uređenje se ostvaruje u odnosu na vreme i to najčešće u jednakim vremenskim intervalima.

Vremenske serije srećemo u različitim oblastima ljudskog života. U meteorologiji se razmatraju kretanja temperature, vlažnosti vazduha, brzine vetra i slično. U demografiji se posmatraju i analiziraju natalitet, mortalitet i prirodni priraštaj. U geofizici pratimo aktivnosti zemlje (zemljotresi). U medicini pratimo pacijentov elektrokardiogram (EKG). U ekonomiji pratimo dnevne fluktuacije deviznog kursa, mesečno kretanje industrijske proizvodnje i cena, godišnju vrednost društvenog proizvoda. U ovom radu bavićemo se analizom kretanja cene akcija preduzeća. ([1] , [2])

Analiza vremenskih serija jeste statistička disciplina, ali ćemo ukazati na jednu od suštinskih razlika u odnosu na klasičnu statističku analizu. Naime, osnovni pojam u klasičnoj statističkoj analizi je prost slučajan uzorak, pod kojim se podrazumeva skup od n nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih. U analizi vremenskih serija se takođe razmatra skup slučajnih promenljivih, za koje se, međutim, pretpostavlja da su međusobno zavisne, a najčešće korelisane. Ovu međusobnu zavisnost opservacija koristimo u cilju formiranja modela vremenskih serija, koji kasnije koristimo da na osnovu prošlih opservacija predvidimo buduće opservacije.

Vremenske serije se mogu klasifikovati na osnovu različitih kriterijuma. U zavisnosti od toga kako registrujemo podatke, vremenske serije mogu biti:

- prekidne i
- neprekidne.

Neprekidna je ona vremenska serija kod koje opservacije možemo registrovati u bilo kojem vremenskom trenutku. Primeri takvih vremenskih serija su temperature, vrednost akcije na berzi ili cene. Prekidna vremenska serija je serija kod koje opservacije beležimo u istim vremenskim intervalima (dnevno, mesečno, kvartalno ili godišnje). Od neprekidne vremenske serije moguće je napraviti prekidnu korišćenjem jednog od sledećih metoda:

- metod sistematskog uzorka
- metod vremenske agregacije.

Metod sistematskog uzorka podrazumeva da se vrednosti neprekidne vremenske serije beleže u određenim trenucima. Na primer, nivo cena nekog finansijskog instrumenta postoji u svakom trenutku, ali se mesečni podaci dobijaju njihovim registrovanjem oko petnaestog dana u mesecu. Ili, cena akcije na berzi postoji tokom celog dana, ali se registruje po zatvaranju berze. Metod vremenske agregacije se sastoji u kumulaciji vrednosti koje vremenska serija uzima u određenom intervalu. Na primer, vrednosti bruto domaćeg proizvoda, uvoza ili izvoza se ne posmatraju u svakom trenutku već najčešće kvartalno ili godišnje.

Ciljevi analize vremenskih serija

1. **Deskripcija** najčešće predstavlja prvu etapu u analizi vremenskih serija. Služi nam za dobijanje informacija o osnovnim karakteristikama vremenske serije. Često se već nakon grafičkog prikaza serije vide neke njene bitne osobine, pa i nije potrebno ulaziti u dublju statističku analizu.

2. **Objašnjenje** je faza u kojoj vršimo izbor ekonometrijskog modela koji na zadovoljavajući način opisuje datu vremensku seriju.

3. **Prognoziranje** je etapa u kojoj na osnovu prošlih opservacija identifikujemo i ocenjujemo model vremenske serije koji nakon toga koristimo za predviđanje budućih vrednosti serije. Takođe, na osnovu ocenjenog modela mogu se simulirati različite mere ekonomske politike.

4. **Kontrola** je cilj za čije postizanje je neophodno kreirati funkciju prenosa. Ulaznu vremensku seriju prilagođavamo tako da rezultirajući, izlazni proces bude u blizini željenog cilja. ([1] , [2])

1.1. Stohastički procesi

Kako bismo definisali pojam stohastičkog procesa, a nakon toga i vremenske serije, prvo moramo uvesti neke osnovne pojmove iz verovatnoće i stohastičke analize.

Definicija 1.1.1. [3] Neka je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$ skup svih mogućih ishoda jednog eksperimenta. Elementi ovog skupa se nazivaju **elementarni događaji**.

Definicija 1.1.2. (Aksioma σ-polja)
Podskup $\mathcal{F}$ partitivnog skupa $\mathcal{P}(\Omega)$ je **σ-polje** (σ-algebra) nad Ω ako važe sledeći uslovi:

1) $\Omega \in \mathcal{F}$,
2) Ako $A \in \mathcal{F}$, onda i $\bar{A} \in \mathcal{F}$,
3) Ako $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, onda $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Definicija 1.1.3. Najmanje σ-polje koje sadrži sve otvorene podskupove od $\mathbb{R}^n$ zove se **Borelovo σ-polje** nad $\mathbb{R}^n$ i označavamo ga sa $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ili $\mathcal{B}^n$.

Definicija 1.1.4. (Aksioma verovatnoće)
Neka je Ω skup elementarnih događaja, a $\mathcal{F}$ σ-algebra nad Ω. Funkcija

$P: \mathcal{F} \to [0,1]$ se naziva **verovatnoća** na skupu $(\Omega, \mathcal{F})$ ako zadovoljava sledeće uslove:

1) $P(\Omega) = 1$,
2) Ako $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1,2, \dots$,onda

$$P(\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se naziva **prostor verovatnoća**.

Definicija 1.1.5. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća. Preslikavanje $X: \Omega \to \mathbb{R}$ se naziva **slučajna promenljiva** ako za svako $S \in \mathcal{B}$ važi da je

$$X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$$

gde je $\mathcal{B}$ Borelova σ-algebra. Za X kažemo da je $\mathcal{F}$- merljivo.

Definicija 1.1.6. [4] **Stohastički (slučajni) proces** je familija slučajnih promenljivih $\{X_t(\omega): t \in T, \omega \in \Omega\}$ definisanih nad istim prostorom verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, a T je **indeksni skup**.

- Za svako fiksirano $t \in T$, $X_t(\omega)$ predstavlja slučajnu promenljivu definisanu na skupu događaja Ω. U tom slučaju indeks *t* se može izostaviti, tako da se koristi oznaka $X(\omega)$. Ovako dobijena funkcija naziva se *zasek ili sečenje*.

- Ako fiksiramo $\omega \in \Omega$, onda skup vrednosti slučajnih promenljivih $X_t(\omega)$ postaje samo funkcija skupa indeksa *T*. Uobičajeno je koristiti oznake: $\{X_t: t \in T\}, \{X_t\}_{t \in T}$ ili samo $X_t, t \in T$. Ovu funkciju vremena nazivamo *trajektorija* ili *realizacija* stohastičkog procesa.

Kako se definiše skup indeksa *T* ? Navodimo sledeće primere:

- Ako je skup *T* jednak skupu realnih brojeva ili je njegov podskup ($T \subseteq \mathbb{R}$), onda je slučajan proces definisan na realnoj pravoj i naziva se slučajan proces sa **neprekidnim parametrom**. Upotrebljava se i oznaka $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ ili $\{X_t\}_{-\infty}^{\infty}$.
- Ako je *T* skup celih ili prirodnih brojeva, tada se odgovarajući slučajan proces naziva slučajan proces sa **prekidnim (diskretnim) parametrom**. U slučaju skupa prirodnih brojeva imamo $T = \mathbb{N} = \{1,2, \dots\}$, odnosno $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ ili $\{X_t\}_1^{\infty}$.

1.2. Neke osobine stohastičkih procesa

Već smo rekli da fiksiranjem $t \in T$ dobijamo jednu slučajnu promenljivu koju zovemo zasek ili sečenje stohastičkog procesa u trenutku *t*. Ta slučajna promenljiva ima svoju funkciju raspodele:

$$F_t(x) = P\{X(t) < x\}, x \in \mathbb{R}.$$

U opštem slučaju nije dovoljno da poznajemo ovaj jednodimenzionalni zakon raspodele kako bismo poznavali čitav proces, već je neophodno poznavati višedimenzionalne raspodele, tj. takozvane konačno-dimenzionalne raspodele stohastičkog procesa.

Definicija 1.2.1. [4] Neka je skup $\zeta = \{(t_1, t_2, \dots, t_n) \in T^n, t_1 < t_2 < \dots < t_n, n = 1,2, \dots\}$. Funkcije $\{F_t(\cdot), t \in \zeta\}$ definisane sa:

$$F_t(x) = P\{X_{t_1} < x_1, X_{t_2} < x_2, \dots, X_{t_n} < x_n\}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

zovu se **konačno-dimenzionalne funkcije raspodele** stohastičkog procesa.

Konačno-dimenzionalne funkcije raspodele zadovoljavaju sledeća dva uslova:

- Uslov simetrije: za svaku permutaciju $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ skupa $\{1,2, \dots, n\}$ važi

$$F_{t_{i_1}, \dots, t_{i_n}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n),$$

- Uslov saglasnosti: ako je $m < n$ i proizvoljno $t_1, \dots, t_n \in T^n$ važi

$$F_{t_1, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_m, \infty, \dots, \infty) = F_{t_1, \dots, t_m}(x_1, \dots, x_m).$$

Teorema 1.2.1. **Fundamentalna teorema Kolmogorova**
Za svaku familiju funkcija raspodele koje zadovoljavaju uslove simetrije i saglasnosti postoji prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i stohastički process $\{X_t : t \in T\}$ definisan na njemu koji ima date raspodele kao svoje konačno-dimenzionalne raspodele.

Definicija 1.2.2. Stohastički proces X_t je **Gausovski** proces ako sve njegove konačno-dimenzionalne funkcije raspodele imaju višedimenzionalnu normalnu raspodelu.

Neka je $\{X_t : t \in T\}$ stohastički proces. Tada je:

- Srednja vrednost (očekivanje) stohastičkog procesa

$$E(X_t) = \mu_t, t \in T,$$

- Varijansa stohastičkog procesa

$$Var(X_t) = \sigma_t^2, t \in T,$$

- Kovarijansa stohastičkog procesa

$$\gamma_x(t,s) = Cov(X_t, X_s) = E\Big(\big(X_t - E(X_t)\big)\big(X_s - E(X_s)\big)\Big), t, s \in T,$$

- Koeficijent korelacije stohastičkog procesa

$$\rho_x(t,s) = \frac{Cov(X_t, X_s)}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_s)}}, t, s \in T.$$

Neki tipovi stohastičkog procesa su:

1) Stohastički proces $\{X_t : t \in T\}$ je proces sa *nezavisnim* vrednostima ako su slučajne promenljive $X(t_1), \dots, X(t_n)$ nezavisne za proizvoljan izbor $t_1, \dots, t_n \in T$:

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{t_n}(x_n).$$

2) Stohastički proces $\{X_t : t \in T\}$ je proces sa *nekoreliranim* vrednostima ako za sve $t, s \in T$, $t \neq s, \rho_x(t,s) = 0$.
3) Stohastički proces $\{X_t : t \in T\}$ je proces sa *ortogonalnim* vrednostima ako za sve $t, s \in T$, $t \neq s, E(X_t, X_s) = 0$.
4) Stohastički proces $\{X_t : t \in T\}$ je proces sa *nezavisnim priraštajima* ako su slučajne promenljive $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots$ nezavisne za svaki izbor $t_0, t_1, t_2, \dots \in T$, gde $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots$

Definicija 1.2.3. Stohastički procesi X_t i $\overline{X_t}$ su **(stohastički) ekvivalentni** ako, za svako $t \in T$ važi $X_t = \overline{X_t}$ sa verovatnoćom 1. U tom slučaju kažemo da je X_t **verzija** procesa $\overline{X_t}$ i obrnuto.

Konačno-dimenzionalne raspodele stohastički ekvivalentnih procesa se poklapaju. Međutim, ekvivalentni procesi mogu imati različita analitička svojstva.

Primer 1.2.1. Procesi $X_t(\omega) \equiv 0$ i $Y_t(\omega) = \begin{cases} 0, \omega \neq t \\ 1, \omega = t \end{cases}$ su ekvivalentni jer se poklapaju svuda osim u jednoj tački, a njihove trajektorije imaju drugačija svojstva neprekidnosti, tj. trajektorija procesa X_t su svuda neprekidne, dok trajektorije procesa Y_t imaju prekid.

Vremenska serija

U literaturi ne postoji jedinstven stav oko toga šta je vremenska serija. Izdvajaju se dva dominantna mišljenja [1]:

1. Vremenska serija predstavlja jednu realizaciju slučajnog procesa. U tom smislu odnos vremenske serije i slučajnog procesa odgovara odnosu uzorka i osnovnog skupa.
2. Ne postoji razlika između vremenske serije i slučajnog procesa. To znači da možemo smatrati da vremenska serija predstavlja niz slučajnih promenljivih koje su uređene u odnosu na vreme.

Mi ćemo se u ovom radu držati drugog mišljenja.

Stacionarnost

U zavisnosti od toga da li se statistička svojstva vremenske serije menjaju tokom vremena ili ne, vremenska serija može biti *stacionarna* ili *nestacionarna*. Slobodno rečeno, vremenska serija je stacionarna ukoliko je njeno kretanje predvidivo tokom vremena. To znači da stacionarna vremenska serija ispoljava isti ili sličan obrazac ponašanja tokom vremena. U suprotnom, vremenska serija je nestacionarna. Nestacionarnost je osobina mnogih finansijskih vremenskih serija. Ona nam govori da, posmatrano tokom vremena, promenljiva nema tendenciju da se „vrati” na konstantnu vrednost. Postoje dva koncepta stacionarnosti [1]:

1. Koncept stroge stacionarnosti (striktna stacionarnost, jaka stacionarnost ili stacionarnost u užem smislu)
2. Koncept slabe stacionarnosti (stacionarnost u širem smislu, kovarijantna stacionarnost).

Definicija 1.2.3. Vremenska serija je **strogo stacionarna** ako su njene konačno-dimenzionalne funkcije raspodele invarijantne u odnosu na translaciju vremena:

$$F_{t_1+k,\ldots,t_n+k}(x_1,\ldots,x_n) = F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n),\ t_1,\ldots,t_n, t_1+k,\ldots,t_n+k \in T.$$

Definicija 1.2.4. Vremenska serija je **slabo stacionarna** ako važe sledeći uslovi:

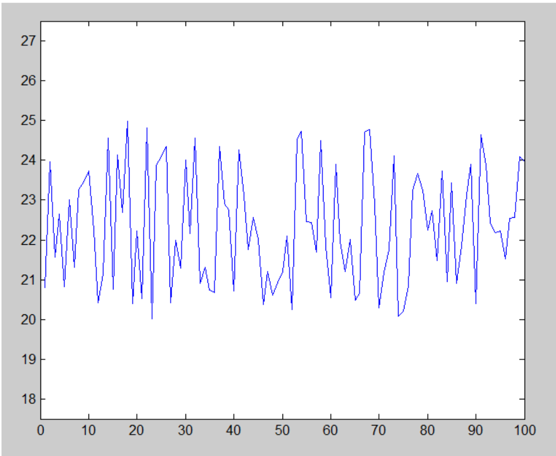
1) $E(X_t) = \mu = const, t = 1,2,\ldots$
2) $Var(X_t) = E(X_t-\mu)^2 = const, t = 1,2,\ldots$
3) $Cov(X_t, X_{t-k}) = E(X_t-\mu)(X_{t-k}-\mu) = \gamma(k) = \gamma_k, t = 1,2,\ldots$

Iz definicije slabe stacionarnosti zaključujemo sledeće:

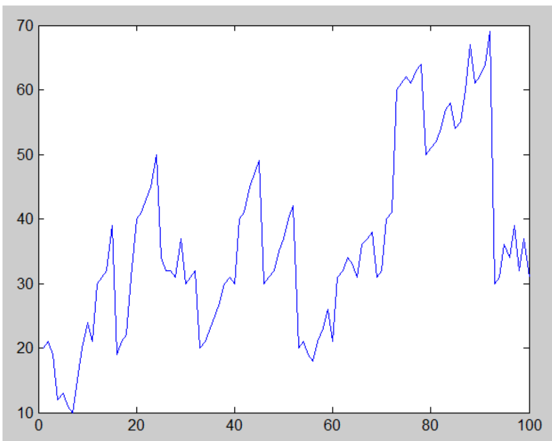
- Očekivana vrednost i varijansa slabo stacionarne vremenske serije se ne menjaju tokom vremena i
- Kovarijansa između svaka dva člana slabo stacionarne vremenske serije je samo funkcija vremenskog rastojanja (kašnjenja) između njih.

Uslov broj 2 iz definicije slabe stacionarnosti proizilazi iz uslova broj 3 za $k = 0$.

Kakav je odnos između stroge i slabe stacionarnosti? Može se uočiti da stroga stacionarnost implicira slabu, ali da obrnuto ne važi. Specijalan slučaj u Gausovski procesi kod kojih slaba stacionarnost implicira jaku.



Slika 1.2.1. Primer stacionarne vremenske serije



Slika 1.2.2. Primer nestacionarne vremenske serije

Definicija 1.2.5. [3] Niz slučajnih promenljivih $X_1, X_2, ...$ **konvergira u verovatnoći** ka slučajnoj promenljivoj X ako za svako $\varepsilon > 0$ važi:

$$P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \to 0, n \to \infty.$$

Definicija 1.2.6. Neka je $\{X_t : t \in T\}$ slabo stacionarna vremenska serija čije je očekivanje $E(X_t) = \mu$. Takva vremenska serija je **ergodična** u odnosu na srednju vrednost ako važi uslov:

$$\bar{X} \xrightarrow{p} \mu, T \to \infty,$$

gde je $\bar{X} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}(X_i)$.

Dakle, vremenska serija je ergodična u odnosu na srednju vrednost ako aritmetička sredina datog skupa konvergira u verovatnoći ka stvarnoj srednjoj vrednosti vremenske serije kako povećavamo obim uzorka. Za vremenske serije ovo znači da sa povećanjem dužine vremenske serije momenti iz uzorka konvergiraju u srednje kvadratnom smislu ka odgovarajućim momentima populacije.

Autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija

Autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija omogućavaju sagledavanje korelacione strukture vremenske serije i stoga predstavljaju fundamentalno sredstvo analize vremenskih serija. [1]

Posmatramo slabo stacionarnu i ergodičnu vremensku seriju X_t, čija je srednja vrednost μ.

Autokovarijacioni koeficijent sa kašnjenjem k, $\boldsymbol{\gamma_k}$, za vremensku seriju X_t definiše se sa:

$$\gamma_k = Cov(X_t, X_{t-k}) = E(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu), k = 1,2, ...$$

U pitanju je kovarijansa između slučajnih promenljivih date vremenske serije koje se nalaze na rastojanju k. Budući da slučajne promenljive predstavljaju članove iste vremenske serije, prirodno se dodaje naziv „auto”.

Niz $\gamma_1, \gamma_2, ...$ naziva se **autokovarijaciona funkcija**. Za $k = 0$, autokovarijacioni koeficijent se svodi na varijansu procesa X_t: $\gamma_0 = Var(X_t) = E(X_t - \mu)^2$.

Autokorelacioni koeficijent sa kašnjenjem k, $\boldsymbol{\rho_k}$, predstavlja koeficijent korelacije između X_t i X_{t-k}:

$$\rho_k = \frac{Cov(X_t, X_{t-k})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t-k})}}.$$

Kako važi $Var(X_t) = Var(X_{t-k}) = \gamma_0$, prethodna jednakost se svodi na:

$$\rho_k = \frac{Cov(X_t, X_{t-k})}{Var(X_t)} = \frac{E(X_t-\mu)(X_{t-k}-\mu)}{E(X_t-\mu)^2} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}, k = 1,2, ...$$

Skup autokorelacionih koeficijenata koji su uređeni u odnosu na vreme, $\rho_1, \rho_2, ...$ označava **autokorelacionu funkciju**. Grafički prikaz vrednosti autokorelacionih koeficijenata u odnosu na kašnjenja 1,2,… naziva se **korelogram**.

Osnovna svojstva autokovarijacione funkcije su:

1. Autokovarijacioni koeficijent sa kašnjenjem $k = 0$ označava varijansu vremenske serije i otuda ne može biti negativan:

$$\gamma_0 = Var(X_t) = E(X_t - \mu)^2 \geq 0.$$

2. Autokovarijaciona funkcija je simetrična u odnosu na nulu: $\gamma_k = \gamma_{-k}$. Pokazaćemo zašto:

$$\gamma_k = Cov(X_t, X_{t-k}) = Cov(X_{t-k}, X_t) = Cov(X_t, X_{t+k}) = \gamma_{-k}.$$

Ovo svojstvo omogućava da se ponašanje autokovarijacione funkcije prati samo za pozitivne vrednosti k, odnosno za kašnjenja 1,2,...

3. Apsolutna vrednost autokovarijacionog koeficijenta nije veća od varijanse vremenske serije. To ćemo pokazati u nastavku.

Neka je $Z_t = \omega_1 X_t + \omega_2 X_{t-k}$. Tada važi:

$Var(Z_t) \geq 0$

$Var(Z_t) = Var(\omega_1 X_t + \omega_2 X_{t-k}) = {\omega_1}^2 Var(X_t) + {\omega_2}^2 Var(X_{t-k}) + 2\omega_1\omega_2 Cov(X_t, X_{t-k}) \geq 0$

$Var(Z_t) = ({\omega_1}^2 + {\omega_2}^2)\gamma_0 + 2\omega_1\omega_2\gamma_k \geq 0$

Odatle, specijalno za:

$\omega_1 = 1, \omega_2 = 1: \gamma_0 + \gamma_k \geq 0 \;\Rightarrow\; \gamma_k \geq -\gamma_0$

$\omega_1 = 1, \omega_2 = -1: \gamma_0 - \gamma_k \geq 0 \;\Rightarrow\; \gamma_k \leq \gamma_0$

pa je:

$|\gamma_k| \leq \gamma_0, k = 0,1,2, ...$

4. Autokovarijaciona funkcija je pozitivno semidefinitna.

Dato svojstvo zahteva dodatno objašnjenje. Realna funkcija q ($q{:}\,\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, gde je $\mathbb{Z}$ skup celih brojeva) je pozitivno semidefinitna ako zadovoljava sledeći uslov:

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} a_i a_j q(i-j) \geq 0$$

za proizvoljni prirodni broj k i proizvoljni vektor parametara $\boldsymbol{a}$ (dimenzije $k \times 1$) sa komponentama $a_1, a_2, \dots, a_k$. Da bismo pokazali da je autokovarijaciona funkcija pozitivno semidefinitna uvodimo matricu autokovarijacionih koeficijenata Γ_k na sledeći način:

$$\Gamma_k = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & & \gamma_{k-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & & \gamma_{k-2} \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{k-1} & \gamma_{k-2} & \gamma_{k-3} & \gamma_{k-4} & & \gamma_0 \end{bmatrix}$$

Neka je $\mathbf{X}$ vektor dimenzije $k \times 1$ definisan na sledeći način:

$$\boldsymbol{X} = [X_t - \mu, X_{t-1} - \mu, X_{t-2} - \mu, \dots, X_{t-k+1} - \mu]'$$

Tada važi:

$$Var(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{X}) \geq 0 \ \Rightarrow$$

$$Var(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{a}'E(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}')\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'\Gamma_k\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} a_i a_j \gamma(i-j) \geq 0.$$

Sledi da je autokovarijaciona funkcija pozitivno semidefinitna. Takođe, matrica autokovarijacionih koeficijenata Γ_k je pozitivno semidefinitna. Ovo svojstvo nastaje uopštenjem osobine broj 3 i sugeriše da je varijansa proizvoljne linearne kombinacije, na primer $a_1X_t + a_2X_{t-1} + a_3X_{t-2} + \dots + a_kX_{t-k+1}$, nenegativna.

Na osnovu navedenih svojstava autokovarijacione funkcije rezimiraćemo svojstva autokovarijacione i autokorelacione funkcije:

1. $\gamma_0 = Var(X_t) = E(X_t - \mu)^2 \Rightarrow \rho_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1.$
2. $\gamma_k = \gamma_{-k} \Rightarrow \rho_k = \rho_{-k}.$
3. $|\gamma_k| \leq \gamma_0 \Rightarrow |\rho_k| \leq 1.$
4. Autokovarijaciona funkcija je pozitivno semidefinitna. To znači da je matrica autokorelacionih koeficijenata pozitivno semidefinitna. Ta matrica označava se sa P_k i definiše se na sledeći način:

$$\mathrm{P}_k = \frac{1}{\gamma_0}\Gamma_k = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 & & \rho_{k-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \rho_{k-4} & & 1 \end{bmatrix}$$

Dakle, autokorelacioni koeficijent je jednak vrednosti jedan sa kašnjenjem 0, a manji je po modulu od jedan za kašnjenja koja su različita od nule. Kako je autokorelaciona funkcija simetrična u odnosu na nulu, dovoljno je razmatrati vrednosti autokorelacionih koeficijenata za pozitivne vrednosti *k*. Konačno, matrica autokorelacionih koeficijenata je pozitivno semidefinitna.

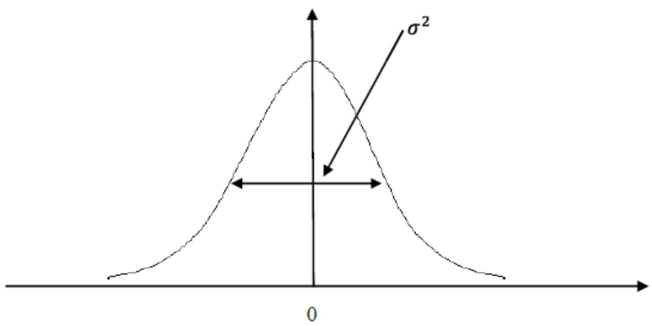
Beli šum

Najjednostavniji stacionarni slučaj vremenske serije se naziva beli šum. Označavaćemo ga sa $\varepsilon_t, t = 1,2, \dots$. Taj slučajan proces poseduje sledeća svojstva [5]:

1. $E(\varepsilon_t) = 0, t = 1,2, \dots$
2. $Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t)^2 = \sigma_\varepsilon^2 = const, t = 1,2, \dots$
3. $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) = 0, t = 1,2,3, \dots, k = 1,2, \dots$

Proces beli šum predstavlja niz nekorelisanih slučajnih promenljivih sa nultom srednjom vrednošću i konstantnom disperzijom. Ukoliko navedenim uslovima dodamo i uslov da su članovi niza nezavisne slučajne promenljive, čija je zajednička raspodela normalna, tada je razmatrani slučaj proces Gausov beli šum.

Beli šum je potpuno slučajan proces, koji na izvestan način korespondira slučajnoj grešci klasičnog linearnog regresionog modela. Sam termin beli šum izveden je iz spektralne analize bele svetlosti.



Slika 1.2.3. Raspodela procesa belog šuma [5]

Dakle, beli šum je stacionaran proces čije su autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija:

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2, k = 0 \\ 0 \ \ , k \neq 0 \end{cases},$$

$$\rho_k = \begin{cases} 1, k = 0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases},$$

respektivno.

Pokazatelji raspodele

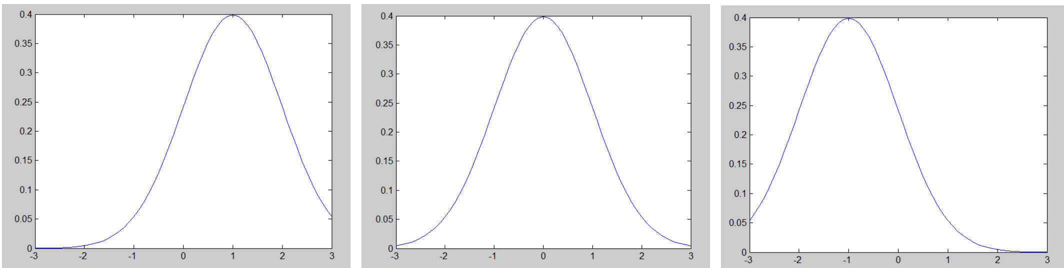
Koeficijent asimetrije (engl. skewness) [6] pokazuje u kojoj meri postoji koncentracija podataka vremenske serije oko tačke koja je veća ili manja od srednje vrednosti. Raspodela je simetrična ako su podaci raspoređeni približno simetrično u odnosu na srednju vrednost. Tada su oba repa podjednake dužine. Ako je desni rep raspodele duži od levog, tada je raspodela simetrična udesno. Ukoliko je levi rep raspodele duži od desnog tada je raspodela simetrična ulevo.

Koeficijent asimetrije za obeležje *X* se računa na sledeći način:

$$K_A = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - m)^3}{(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - m)^2)^{3/2}},$$

gde *m* predstavlja srednju vrednost, a obim uzorka je *N*.

Koeficijent asimetrije jednak je nuli kod simetričnih raspodela. Asimetriju udesno prati vrednost koeficijenta koja je veća od nule, a asimetriju ulevo vrednost koeficijenta koja je manja od nule.



$K_A < 0$ $K_A = 0$ $K_A > 0$

Asimetrična ulevo Simetrična Asimetrična udesno

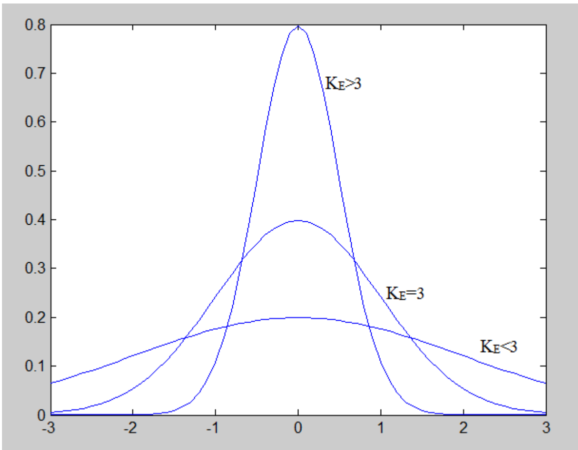
Slika 1.2.4. Koeficijent asimetrije

Koeficijent spljoštenosti (engl. kurtosis) opisuje repove (krajeve) raspodele. Spljoštenost se uvek izražava u odnosu na spljoštenost normalne raspodele. Vrednost ovog koeficijenta kod normalne raspodele je tri. Ako je koeficijent spljoštenosti veći od tri, tada su repovi date raspodele teži od repova normalne raspodele i obrnuto, ako je vrednost koeficijenta spljoštenosti manja od tri, onda su repovi raspodele lakši od repova normalne raspodele.

Koeficijent spljoštenosti obeležja *X* definiše se na sledeći način:

$$K_E = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - m)^4}{(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - m)^2)^2}\ .$$

Ako je $K_E = 3$ kažemo da raspodela ima normalnu spljoštenost ili da je mezokurtična (mesocurtic). Ako je $K_E > 3$ distribucija je više izdužena u odnosu na normalnu raspodelu ili leptokurtična (leptocurtic), a kod $K_E < 3$ raspodela je više spljoštena u odnosu na normalnu raspodelu ili platikurtična (platycurtic).



Slika 1.2.5. Koeficijent spljoštenosti

1.3. Finansijske vremenske serije

Finansijske vremenske serije služe za definisanje modela koji opisuju realne podatke sa finansijskog tržišta. Podaci se najčešće odnose na cene akcija, berzanske indekse i devizne stope. Zbog niza statističkih razloga, preporučuje se da se ne radi sa nizom cena, već da se taj niz pretvori u niz prinosa datih finansijskih aktiva. To se može uraditi na dva načina, pomoću prostog prinosa i prinosa kontinuiranog kapitalisanja. Oni se definišu na sledeći način [11]:

Prost prinos:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \times 100\%$$

Prinos kontinuiranog kapitalisanja:

$$r_t = 100\% \times ln\,(\frac{P_t}{P_{t-1}})\ ,$$

gde je R_t-prost prinos u trenutku *t*, r_t-kontinuiran prinos u trenutku *t*, P_t - cena aktive u trenutku *t*, a *ln* je prirodni logaritam.

<u>Logaritamski prinos (*Log Return*)</u>

Logaritamski prinos koristimo iz sledeća dva razloga:

1) Može se interpretirati kao prinos kontinuiranog kapitalisanja. U tom slučaju, frekvencija kapitalisanja se ne uzima u obzir i prinosi aktiva se mogu lakše međusobno porediti.
2) Prinosi kontinuiranog kapitalisanja se mogu zbrajati tokom vremena. Na primer, pretpostavimo da nam treba prinos za jednu nedelju, a dati su logaritamski prinosi za 5 dana u nedelji.

Prinos za ponedeljak: $r_1 = ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right) = ln(\rho_1) - ln\,(\rho_0)$

Prinos za utorak: $r_2 = ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = ln(\rho_2) - ln\,(\rho_1)$

Prinos za sredu: $r_3 = ln\left(\frac{\rho_3}{\rho_3}\right) = ln(\rho_3) - ln\,(\rho_2)$

Prinos za četvrtak: $r_4 = ln\left(\frac{\rho_4}{\rho_3}\right) = ln(\rho_4) - ln\,(\rho_3)$

Prinos za petak: $r_5 = ln\left(\frac{\rho_5}{\rho_4}\right) = ln(\rho_5) - ln\,(\rho_4)$

Prinos za celu nedelju: $ln(\rho_5) - ln(\rho_0) = ln\left(\frac{\rho_5}{\rho_0}\right)$

Logaritamski prinos se najčešće koristi u finansijskoj literaturi zbog prednosti koje smo naveli, ali i on ima određene nedostatke.

Prost prinos za portfolio aktiva je težinska sredina pojedinačnih prostih prinosa aktiva.

$$R_{pt} = \sum_{i=1}^{N} \omega_i R_{it} .$$

Ali ovo ne važi kod prinosa kontinuiranog kapitalisanja. Razlog za to je taj što suma logaritama nije jednaka logaritmu sume, odnosno logaritam je ne-linearna transformacija. U ovom slučaju, računanje prinosa portfolia obuhvata određivanje vrednosti tog portfolio za svaki posmatrani trenutak. Ili alternativno, ako pretpostavimo da je u trenutku $t - K$ aktiva kupljena po ceni P_{t-K} i K perioda kasnije prodata po ceni P_t, računamo proste prinose: $R_t, R_{t+1}, \dots, R_k$, pa je agregatni prinos za K perioda:

$$R_{Kt} = \frac{P_t - P_{t-K}}{P_{t-K}} = \frac{P_t}{P_{t-K}} - 1 = \left[\frac{P_t}{P_{t-1}} \times \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \times \dots \times \frac{P_{t-K+1}}{P_{t-K}}\right] - 1 =$$

$$= [(1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \dots (1 + R_{t-K+1})] - 1$$

Specifičnosti ekonomskih vremenskih serija

1. **Trend**

Trend komponenta izražava osnovnu dugoročnu tendenciju razvoja pojave u vremenu. U teorijskom smislu, trend je zamišljena prava ili kriva linija varijacija pojave na duži rok, koja predstavlja prosečno kretanje posmatrane pojave. U zavisnosti od toga da li vrednosti vremenske serije tokom vremena sistematski rastu ili opadaju, trend može biti [1]:

- rastući
- opadajući.

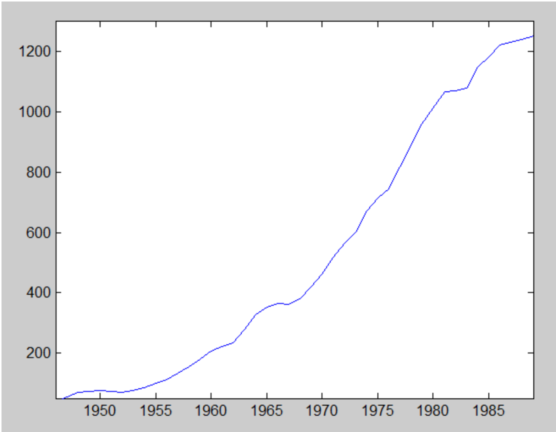
Najveći broj ekonomskih vremenskih serija poseduje rastući trend.

U zavisnosti od toga da li se promene serije tokom vremena mogu predvideti ili ne, trend može biti:

- deterministički
- stohastički.

Postojanje determinističkog trenda se modelira uključivanjem u analizu funkcije oblika $a + bt$, gde je t oznaka za promenljivu trenda, dok su a i b parametri ($b > 0$ u slučaju rastućeg trenda). Ako su vrednosti parametara a i b poznate, tada se kretanje vremenske serije prognozira prema funkciji linearnog trenda. Osim linearne, mogu se koristiti funkcije trenda drugog tipa (kvadratna, trigonometrijska, eksponencijalna, logaritamska…).

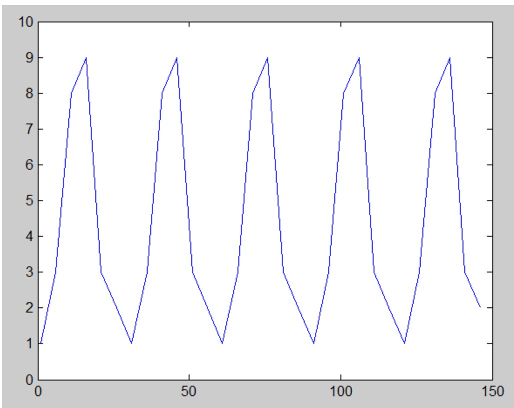
Stohastički trend označava dugoročnu tendenciju rasta koja se ne može predvideti na osnovu poznavanja podataka u prošlosti. Najveći broj ekonomskih vremenskih serija poseduje trend stohastičkog tipa.



Slika 1.3.1. Primer stohastičkog trenda rasta (Godišnji indeks industrijske proizvodnje u Srbiji 1946-1989) [2]

2. **Postojanje sezonske komponente**

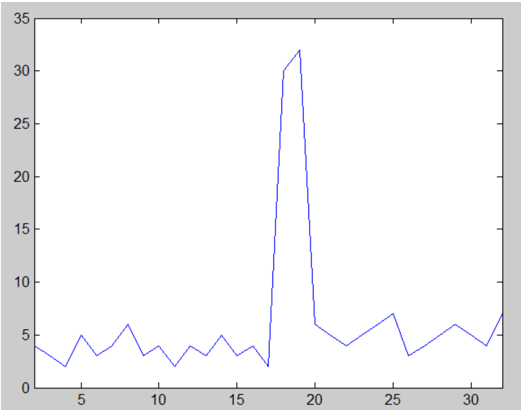
Pojedine vremenske serije ispoljavaju pravilnosti u svom kretanju koje se javljaju u toku jedne kalendarske godine. Za njih kažemo da imaju izraženu sezonsku komponentu. Sezonska komponenta predstavlja periodične oscilacije neke pojave.



Slika 1.3.2. Primer postojanja sezonske komponente

3. **Postojanje strukturnog loma**

Strukturni lom označava skup opservacija koji nije saglasan sa prethodnim tokom vremenske serije i on je rezultat neke intervencije. Dejstvo intervencije može biti jednokratno i trajno. Dok se jednokratno dejstvo intervencije odražava kroz pojavu jedne ili nekoliko nestandardnih opservacija vremenske serije, trajni uticaj označava permanentnu promenu u kretanju vremenske serije.



Slika 1.3.3. Primer postojanja strukturnog loma

4. **Postojanje nestabilne varijanse**

Promenljivost varijabiliteta je često karakteristika vremenskih serija na finansijskim tržištima, pre svega cena finansijskih instrumenata. Potrebno je naglasiti da se ovde razmatra tzv. uslovna varijansa, koja se naziva volatilnost. Promenljiva volatilnost u toku vremena naziva se uslovna heteroskedastičnost. O ovome će biti više reči u trećem poglavlju.

2.Linearne vremenske serije

2.1. Linearna regresija

Jedan od ciljeva u velikom broju istraživanja je da se opišu veze između pojava koje nas okružuju. To može da se postigne pronalaženjem formule ili jednačine koja povezuje veličine koje posmatramo. Preciznije, određuje se oblik funkcionalne zavisnosti između promenljivih veličina $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$ na osnovu informacije dobijene merenjem promenljivih veličina $X_1, X_2, \dots, X_k$. Često se promenljive $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$ nazivaju **zavisne** promenljive ili **nekontrolisani** faktori a promenljive $X_1, X_2, \dots, X_k$ **nezavisne** promenljive ili **konrolisani** faktori. U modelu višestruke regeresije se analitički određuje statistička povezanost jedne zavisne promenljive sa dve ili više nezavisnih promenljivih. Posmatraćemo uticaj p nezavisnih promenljivih na zavisnu promenljivu *Y* na osnovu uzorka obima *n* gde je $p \leq n$. Opšti oblik modela je

$$Y_i = f_i\left(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ip}\right) + \varepsilon_i, i = 1,2, \dots, n$$

$\varepsilon_i, i = 1,2, \dots, n$ su reziduali, slučajne promenljive koje predstavljaju odstupanje od funkcionalne veze. ([5] , [11])

Model višestruke regresije

Model višestruke linearne regresije je oblika:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

gde su

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \dots & X_{1p} \\ 1 & X_{21} & \dots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & \dots & X_{np} \end{bmatrix} = \left[1\ X_1\ X_2 \dots X_p\right], \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}.$$

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ su regresijski koeficijenti. Regresijski koeficijent uz *j*-tu promenljivu β_j se interpretira kao promena očekivane vrednosti zavisne promenljive *Y* ako se promenljiva X_j promeni za jednu jedinicu uz pretpostavku da je ostalih $p - 1$ promenljivih ostalo nepromenjeno ili drugim rečima

$$\beta_j = \frac{\partial E(Y)}{\partial X_j}, j = 1,2, \dots, p$$

Konstantni član β_0 se interpretira kao vrednost slučajne promenljive *Y* kada su vrednosti nezavisnih promenljivih $X_j, j = 1,2, \dots, p$ jednake nuli.

Specifikacija modela višestruke linearne regresije

Da bismo što preciznije i lakše vršili regresionu analizu uvešćemo dodatne pretpostavke za promenljive u modelu:

1. Y je slučajna promenljiva koja može da se meri;
2. $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ip}, i = 1,2, \dots, n$ su neslučajne promenljive sa fiksnim vrednostima i pretpostavićemo da su nezavisne;
3. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ imaju normalnu raspodelu;
4. $E(\varepsilon_i) = 0, i = 1,2, \dots, n$;
5. $var(\varepsilon_i) = \sigma^2, i = 1,2, \dots, n$. Pretpostavka da su varijanse reziduala konstantne naziva se homoskedastičnost;
6. Reziduali su nekorelirani odnosno važi $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \forall i, j = 1,2, \dots, n$.

Ekvivalentno možemo da kažemo da slučajna promenljiva $\boldsymbol{\varepsilon}$ ima n-dimenzionalnu normalnu raspodelu

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 E)$$

gde je

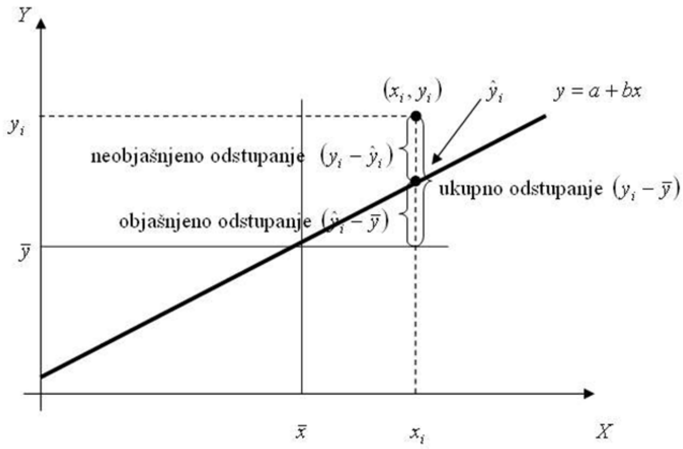
$$\sigma^2 E = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

varijansno-kovarijansna matrica reziduala.

Analiza varijanse u modelu višestruke regresije

Analizom varijanse rastavljamo ukupnu varijansu zavisne promenljive SST (total sum of square) na dve komponente:

- Regresijsku komponentu koja predstavlja deo varijanse promenljive Y objašnjen modelom SSP;
- Rezidualnu komponentu ili slučajni deo modela koji je rezultat uticaja spoljašnjih faktora SSE.



Slika 2.1.1. Odstupanje zavisne promenljive Y [5]

$$SST = SSP + SSE$$

$$SST = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 = \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{Y}$$

$$SSP = \sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = \widehat{\boldsymbol{\beta}}^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y}$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{Y} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y}$$

Gde je $\widehat{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ocenjeni (fitovani) model višestruke regresije.

Izvor	Stepeni slobode (SP)	Suma kvadrata odstupanja (SS)	Sredine kvadrata odstupanja $MS = SS / SP$
Regresiona komponenta	p	SSP	MS_{Reg}
Rezidualna komponenta	$n-(p+1)$	SSE	MS_{Rez}
Ukupno	$n-1$	SST	

Tabela 2.1.1. Analiza varijanse [5]

Koeficijent višestruke determinacije

Postoji više mera za ocenjivanje reprezentativnosti modela. Jedna od njih je da posmatramo udeo komponente varijanse objašnjene regresijom u ukupnoj varijansi promenljive Y. Tako dolazimo do izraza:

$$R^2 = \frac{SSP}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}, 0 \leq R^2 \leq 1.$$

koji se naziva **koeficijent višestruke determinacije**. Što je veći koeficijnet višestruke detreminacije to je posmatrani model reprezentativniji. Tada je rezidualna suma kvadrata odstupanja manja, pa je manji stohastički udeo u ukupnoj varijansi, odnoso veći deo varijanse je objašnjen modelom. Osnovni nedostatak koeficijenta višestruke determinacije je taj što se njegova vrednost povećava sa dodavanjem novih nezavisnih promenljivih u model. To znači da se uključivanjem više promenljivih u model povećava pouzdanost modela što ne mora da bude slučaj.

Korigovani koeficijent višestruke determinacije

U cilju otklanjanja nedostataka koeficijenta višestruke determinacije koristi se izraz:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{SSE/(n-p-1)}{SST/(n-1)}$$

koji se naziva korigovani koeficijent višestruke detereminacije. Uopšteno govoreći, uvodeći dodatne nezavisne promenljive u model, povećava se broj ocenjenih parametara uz nepromenjen obim uzorka, čime se povećava broj stepeni slobode pa se smanjuje pouzdanost ocenjivanja. Stoga je prednost korigovanog koeficijenta determinacije to što on uzima u obzir odnos broja promenljivih i obim uzorka, pa ga je prikladno koristiti za modele koji sadrže različit broj nezavisnih promenljivih. Treba primetiti da $\bar{R}^2$ može da uzme negativne vrednosti i da važi relacija $\bar{R}^2 \leq R^2$. Ukoliko je $\bar{R}^2$ mnogo manji od R^2 to može da nam govori da je previše nezavisnih promenljivih uključeno u model. Ako uključimo novu promenljivu u model i vrednost $\bar{R}^2$ se smanji to je pokazitelj da data promenljiva narušava performanse modela pa je isključujemo.

2.2. Linearne vremenske serije

U statističkom modeliranju jedan od najbitnijih zadataka jeste pronalaženje odgovarajuće funkcionalne veze između ulaznih i izlaznih podataka. Jedna od najčeščih pretpostavki je da je ta veza linearna. U analizi vremenskih serija linearni filter je operator koji transformiše vremensku seriju $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ u vremensku seriju $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$

$$Y_t = L(X_t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \omega_j X_{t-j}$$

gde su ω_j vremenski invarijantni. Definicija linearnog filtera implicira da vrednost vremenske serije $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ u trenutku *t* zavisi od sopstvenih prošlih i budućih vrednosti. Kako su u praksi na raspolaganju istorijski podaci, uvodi se pretpostavka da je $j \geq 0$, pa se dolazi do definicije linearnog filtera

$$Y_t = L(X_t) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j X_{t-j}$$

pa vrednost $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ u trenutku *t* zavisi samo od sopstvenih prošlih vrednosti.
Ukoliko suma koeficijenata apsolutno konvergira

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \mid \omega_j \mid < \infty$$

kaže se da su **stabilni**. [1]

Definicija 2.0.1 [1].Vremenska serija je **linearna** ako se može prikazati u sledećem obliku:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \psi_1\varepsilon_{t-1} + \psi_2\varepsilon_{t-2} + \cdots = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \ , \psi_0 = 1$$

gde je μ očekivanje od X_t, $\{\varepsilon_t, t = 0,1,2,..\}$ niz nekorelisanih slučajnih promenljivih sa normalnom raspodelom koji nazivamo *beli šum* (*white noise*) ili *potpuno slučajan proces*.

Sada ćemo prikazati rezultat Volda iz 1938. godine, poznat kao Voldova teorema razlaganja. Ona kaže da se svaki stacionaran proces može izraziti kao zbir dva međusobno nekorelisana procesa, jednog čisto determinističkog i jednog čisto stohastičkog.

Deterministička komponenta slabo stacionarne vremenske serije se potpuno precizno može predvideti na osnovu informacija iz prošlosti. Reč je o konstanti (srednjoj vrednost) i/ili funkciji linearnog trenda *t*. Stohastička komponenta se ne može rekonstruisati prema sopstvenom kretanju iz prošlosti. Voldova teorema razlaganja odnosi se na ponašanje slučajne komponente slabo stacionarne vremenske serije.

Teorema 2.0.1. [1] (**Voldova teorema razlaganja**)
Stohastička komponenta slabo stacionarne vremenske serije X_t može se predstaviti u obliku linearnog procesa na sledeći način:

$$X_t - \mu = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \text{ }, \psi_0 = 1$$

Determinističku komponentu vremenske serije X_t čini srednja vrednost, tj. očekivanje $\mu = E(X_t)$. Sa ε_t označen je beli šum.

Proces beli šum označava slučajne šokove koji obuhvataju dejstvo neanticipiranih uticaja tokom vremena. Ovi uticaji prenose se na vremensku seriju X_t preko parametara modela $(\psi_1, \psi_2, \ldots)$ koji se uobičajeno nazivaju **$\boldsymbol{\psi}$-ponderi**. Imajući u vidu da se linearnim procesom opisuje reakcija vremenske serije na neočekivane slučajne uticaje, ova forma se naziva i **funkcija impulsnog odziva.**

Odredimo očekivanje,varijansu, autokovarijacionu i autokorelacionu funkciju linearne vremenske serije.

1. Očekivanje

$E(X_t) = \mu$

2. Varijansa

$$\begin{aligned}
&Var(X_t) = E(X_t - \mu)^2 = \\
&= E(\varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots)^2 = \\
&= E(\varepsilon_t^2) + \psi_1^2 E(\varepsilon_{t-1}^2) + \psi_2^2 E(\varepsilon_{t-2}^2) + \cdots + 2\psi_1 E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) + 2\psi_2 E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}) + \cdots = \\
&= \sigma^2 (1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \cdots) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2
\end{aligned}$$

3. Autokovarijaciona funkcija

$$\begin{aligned}
&\gamma_k = Cov(X_t, X_{t-k}) = E(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu) = \\
&= E(\varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \psi_k \varepsilon_{t-k} + \psi_{k+1} \varepsilon_{t-k-1} + \psi_{k+2} \varepsilon_{t-k-2} + \cdots)(\varepsilon_{t-k} + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \\
&\psi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots) = \\
&= \sigma^2 (\psi_k + \psi_1 \psi_{k+1} + \psi_2 \psi_{k+2} + \cdots) = \\
&= \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{k+i}
\end{aligned}$$

4. Autokorelaciona funkcija

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k}}{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2}$$

Na osnovu izvedenih vrednosti zaključujemo sledeće:

1. Varijansa linearnog procesa je funkcija varijanse belog šuma i ψ-pondera. Varijansa je konačna za $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$.
2. Autokovarijacioni koeficijent linearnog procesa je funkcija varijanse belog šuma i ψ-pondera.
3. Autokorelacioni koeficijent linearnog procesa je funkcija samo ψ-pondera.

Operatori u analizi vremenskih serija

1. Operator kašnjenja

U literaturi koja je vezana za analizu vremenskih serija često se koristi L (*lag*) operator. ([1] , [2]) Neka je dat proizvoljan proces $\{X_t, t \in T\}$. L operator transformiše proces iz sadašnjeg vremenskog trenutka u isti proces u prethodnom vremenskom trenutku

$$LX_t = X_{t-1}.$$

Koristeći navedenu jednakost dolazimo do sledećih jednakosti:

$$\begin{gathered} X_{t-2} = LX_{t-1} = LLX_t = L^2 X_t \\ X_{t-3} = LX_{t-2} = LL^2 X_t = L^3 X_t \\ \vdots \\ X_{t-m} = LX_{t-(m-1)} = LL^{m-1} X_t = L^m X_t \end{gathered}$$

Ranije definisan linearan proces se pomoću L operatora može prikazati na sledeći način:

$$X_t - \mu = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j L^j \varepsilon_t = \psi(L) \varepsilon_t \ .$$

Za operator L važe sledeće osobine:
1. $L^k X_t = X_{t-k},\ k = 1,2, \dots$
2. $L^{-k} X_t = X_{t+k},\ k = 1,2, \dots$
3. $L\delta = \delta$, gde je δ konstanta
4. $L^0 X_t = X_t$
5. $L^i (L^j X_t) = L^j (L^i X_t) = X_{t-i-j}$
6. $L(\beta X_t) = \beta(LX_t) = \beta X_{t-1}$, gde je β konstanta.

2. Diferencni operator

Diferencni operator se definiše na sledeći način:

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = X_t - LX_t = (1-L)X_t.$$

Diferencni operator drugog reda se definiše:

$$\begin{aligned}\nabla^2 X_t = \nabla(\nabla X_t) = \nabla(X_t - X_{t-1}) = (X_t - X_{t-1}) - (X_{t-1} - X_{t-2}) = \\ = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2} = X_t - 2LX_t + L^2 X_t = \\ = (1 - 2L + L^2)X_t = (1-L)^2 X_t,\end{aligned}$$

a diferencni operator reda d je

$$\nabla^d X_t = \nabla(\nabla^{d-1} X_t) = \cdots = (1-L)^d X_t.$$

Postoje tri modela kojima se mogu opisati slabo stacionarne vremenske serije. To su:

- Autoregresioni modeli
- Modeli pokretnih proseka (modeli pokretnih sredina)
- Autoregresioni modeli pokretnih proseka.

2.2.1. Autoregresioni modeli, AR

Autoregresioni model je model kod koga je zavisna promenljiva predstavljena članom vremenske serije u trenutku *t,* a skup nezavisnih promenljivih čine članovi iste vremenske serije ali u trenucima $t-1, t-2, \dots, t-p$. Drugim rečima, data promenljiva opisuje se u funkciji od sopstvenih prethodnih vrednosti. ([1] , [2])

Autoregresioni model reda p, u oznaci AR(p) model, definiše se na sledeći način:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t = \sum_{j=1}^{p} \phi_j X_{t-j} + \varepsilon_t$$

gde su $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ autoregresioni parametri, i ε_t je beli šum.
Autoregresionom modelu reda p može se pridružiti karakteristična jednačina oblika:

$$g^p - \phi_1 g^{p-1} - \phi_2 g^{p-2} - \cdots - \phi_p = 0$$

u kojoj $g_1, g_2, \dots, g_p$ označavaju rešenja (korene) karakteristične jednačine. Stacionarnost vremenske serije koja je generisana AR(p) modelom zavisi od rešenja $g_1, g_2, \dots, g_p$ karakteristične jednačine.

Teorema 2.1.1. [1]

a) Ukoliko su svi koreni $g_1, g_2, \dots, g_p$ po modulu strogo manji od jedan, onda je vremenska serija stacionarna.
b) Ukoliko postoji barem jedan koren $g_i, i = 1,2, \dots, p$, koji je jednak vrednosti jedan po modulu, dok su drugi koreni strogo manji od jedan po modulu, onda je vremenska serija nestacionarna. Takva vremenska serija se naziva **vremenska serija sa jediničnim korenom**. Ova vrsta nestacionarnosti se otklanja postupkom diferenciranja.
c) Ukoliko postoji barem jedan koren $g_i, i = 1,2, \dots, p$, koji je strogo veći od jedan, dok su drugi strogo manji od jedan po modulu, tada je **vremenska serija eksplozivna.** To znači da je vremenska serija pod uticajem aditivnog dejstva trajno rastućeg efekta neočekivanih slučajnih šokova.

Autoregresioni model prvog reda, AR(1)

Autoregresioni model prvog reda, u oznaci AR(1) model, definiše se na sledeći način:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

gde je ϕ_1 autoregresioni parametar. [1]

Osobine:

1. Uslov stacionarnosti

Rekurzivnom zamenom unazad polazeći od jednačine $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$ dobijamo:

$$\begin{aligned}
X_t &= \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \phi_1[\phi_1 X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}] + \varepsilon_t \\
&= \phi_1^2[\phi_1 X_{t-3} + \varepsilon_{t-2}] + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} \\
&= \cdots \\
&= \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \phi_1^3 \varepsilon_{t-3} + \cdots
\end{aligned}$$

Odavde izvodimo varijansu vremenske serije X_t:

$Var(X_t) = Var(\varepsilon_t + \phi_1\varepsilon_{t-1} + \phi_1^2\varepsilon_{t-2} + \phi_1^3\varepsilon_{t-3} + \cdots) = \sigma^2(1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \phi_1^6 + \cdots)$

na osnovu $\sigma^2 = Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t)^2$.

Ova varijansa će biti konačna, a vremenska serija slabo stacionarna, jedino ako $|\phi_1| < \infty$. Pri ovom uslovu imamo:

$$Var(X_t) = \sigma^2(1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \phi_1^6 + \cdots) = \frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2}.$$

2. AR(1) je specijalan slučaj linearnog procesa

Korišćenjem operatora *L,* AR(1) model se zapisuje na sledeći način:

$$(1 - \phi_1 L)X_t = \varepsilon_t \Rightarrow X_t = \frac{1}{(1 - \phi_1 L)}\varepsilon_t$$

Za $|\phi_1| < 1$, $\frac{1}{(1-\phi_1 L)}$ predstavlja zbir članova geometrijske progresije $(1 + \phi_1 L + \phi_1^2 L^2 + \phi_1^3 L^3 + \cdots)$, tako da će važiti:

$X_t = \frac{1}{(1 - \phi_1 L)}\varepsilon_t =$

$= (1 + \phi_1 L + \phi_1^2 L^2 + \phi_1^3 L^3 + \cdots)\varepsilon_t =$

$= \varepsilon_t + \phi_1\varepsilon_{t-1} + \phi_1^2\varepsilon_{t-2} + \phi_1^3\varepsilon_{t-3} + \cdots$

Ako stavimo da je $\psi_1 = \phi_1, \psi_2 = \phi_1^2, \psi_3 = \phi_1^3$ ... dolazimo reprezentacije linearnog procesa.

3. Autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija

Kao što je ranije navedeno, autokovarijacioni koeficijent na rastojanju *k* se definiše na sledeći način:

$$\gamma_k = E(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu).$$

Kako važi da je $E(X_t) = 0$, koeficijent sa kašnjenjem *k* je: $\gamma_k = E(X_t X_{t-k})$.

Kako je:

$X_t = \varepsilon_t + \phi_1\varepsilon_{t-1} + \phi_1^2\varepsilon_{t-2} + \phi_1^3\varepsilon_{t-3} + \cdots + \phi_1^k\varepsilon_{t-k} + \phi_1^{k+1}\varepsilon_{t-k-1} + \cdots$

pa važi:

$X_{t-k} = \varepsilon_{t-k} + \phi_1 \varepsilon_{t-k-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-k-2} + \cdots$

tako da je autokovarijacioni koeficijent sa kašnjenjem *k*:

$\gamma_k = E(X_t X_{t-k}) = E\big(\varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \phi_1^3 \varepsilon_{t-3} + \cdots + \phi_1^k \varepsilon_{t-k} + \phi_1^{k+1} \varepsilon_{t-k-1} + \cdots\big)(\varepsilon_{t-k} + \phi_1 \varepsilon_{t-k-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-k-2} + \cdots) = \sigma^2\big(\phi_1^k + \phi_1 \phi_1^{k+1} + \phi_1^2 \phi_1^{k+2} + \cdots\big) = \sigma^2 \phi_1^k (1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \cdots) = \frac{\sigma^2 \phi_1^k}{1-\phi_1^2}$

Za dato kašnjenje *k*, autokovarijaciona funkcija zavisi samo od parametara: varijanse belog šuma, σ^2, i autoregresionog parametra ϕ_1.

Autokorelacioni koeficijent sa kašnjenjem *k*, ρ_k, dobija se prema: $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$. Već smo odredili da je varijansa vremenske serije data sa: $(X_t) = \gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2}$.

Sledi da je autokorelacioni koeficijent sa kašnjenjem k kod razmatrane vremenske serije:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\frac{\sigma^2 \phi_1^k}{1-\phi_1^2}}{\frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2}} = \phi_1^k \ .$$

Prema tome, autokorelaciona funkcija vremenske serije opisane AR(1) modelom je:

$$\rho_k = \phi_1^k, k = 1,2, \ldots$$

Autoregresioni model drugog reda, AR(2)

Autoregresioni model drugog reda, AR(2) model, definiše se na sledeći način:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

Ako uzmemo u obzir koeficijent kašnjenja *L,* gornji izraz se može predstaviti na sledeći način:

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) X_t = \varepsilon_t$$

Autoregresioni parametri modela su ϕ_1 i ϕ_2.

1. Uslov stacionarnosti

AR(2) model predstavlja stohastičku diferencnu jednačinu drugog reda:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = \varepsilon_t$$

kojoj se pridružuje sledeća karakteristična jednačina:

$$g^2 - \phi_1 g - \phi_2 = 0$$

Rešenja ove jednačine su:

$$g_1 = \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}, g_2 = \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}$$

Ova rešenja su realna za $\phi_1^2 + 4\phi_2 \geq 0$, a kompleksna za $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$.

Da bi se modelom $X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = \varepsilon_t$ opisala slabo stacionarna vremenska serija potrebno je da rešenja g_1 i g_2 po modulu budu strogo manja od jedan: $|\, g_1 \,| < 1$ i $|\, g_2 \,| < 1$.

Rešenja g_1 i g_2 kvadratne jednačine $g^2 - \phi_1 g - \phi_2 = 0$, i parametre ϕ_1 i ϕ_2 povezuju tzv. Vietove formule.

$$g_1 + g_2 = \phi_1, \quad g_1 \cdot g_2 = -\phi_2$$

Na osnovu uslova:

$|\, g_1 \,| < 1$ i $|\, g_2 \,| < 1$ i

$g_1 + g_2 = \phi_1,\ g_1 \cdot g_2 = -\phi_2$

Sledi:

$|\, \phi_1 \,| < 2\ i\ \ |\, \phi_2 \,| < 2.$

Imajući u vidu da je ispunjeno:

$|\, g_1 \,| < 1$ i $|\, g_2 \,| < 1$

$$g_1 = \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}, g_2 = \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}$$

$g_2 \leq g_1$

Sledi:

$$-1 \leq \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} \leq \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} \leq 1$$

Iz prve relacije sledi: $\phi_2 - \phi_1 < 1$, a iz poslednje: $\phi_1 + \phi_2 < 1$.

Tako dobijamo da se uslov stacionarnosti vremenske serije AR(2) modela opisuje sledećim sistemom nejednakosti:

$$\phi_2 - \phi_1 < 1$$

$$\phi_1 + \phi_2 < 1$$

$$-1 < \phi_2 < 1.$$

2. Da li je AR(2) model specijalan slučaj linearnog procesa?

Pokazaćemo da se na osnovu parametara AR(2) modela:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t \Leftrightarrow (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) X_t = \varepsilon_t \Leftrightarrow \Phi(L) X_t = \varepsilon_t$$

mogu rekonstruisati parametri linearnog procesa:

$$X_t = \varepsilon_t + \psi_1 L \varepsilon_t + \psi_2 L^2 \varepsilon_t + \cdots = (1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \cdots)\varepsilon_t = \psi(L)\varepsilon_t$$

Da bi AR(2) specifikacija posedovala adekvatnu formu linearnog procesa , neophodno je da budu ispunjeni sledeći uslovi:

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) X_t = \varepsilon_t \Rightarrow X_t = \frac{1}{\Phi(L)} \varepsilon_t$$

$$X_t = (1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \psi_3 L^3 + \cdots)\varepsilon_t = \Psi(L)\varepsilon_t$$

odakle sledi da treba da je ispunjen sledeći uslov:

$$\Psi(L)\Phi(L) = 1$$

koji se svodi na:

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)(1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \psi_3 L^3 + \cdots) = 1$$

Polinom po operatoru kašnjenja L beskonačnog reda na levoj strani jednakosti je jednak vrednosti 1 ukoliko je zbir članova ovog polinoma sa zajedničkim elementom L istog stepena jednak nuli. To znači sledeće:

$$L: \psi_1 L - \phi_1 L = 0 \Rightarrow \psi_1 = \phi_1$$

$$L^2: \psi_2 L^2 - \phi_1 \psi_1 L^2 - \phi_2 L^2 = 0 \Rightarrow \psi_2 = \phi_1 \psi_1 + \phi_2$$

$$L^3: \psi_3 L^3 - \phi_1 \psi_2 L^3 - \phi_2 \psi_1 L^3 = 0 \Rightarrow \psi_3 = \phi_1 \psi_2 + \phi_2 \psi_1$$

$$\vdots$$

odakle sledi da je:

$$\psi_j = \phi_1 \psi_{j-1} + \phi_2 \psi_{j-2}, j = 2,3, \ldots$$

Zaključujemo da je AR(2) model specijalan slučaj linearnog procesa pri izvedenom uslovu:

$\psi_j = \phi_1\psi_{j-1} + \phi_2\psi_{j-2}, j = 2,3, \ldots$

i $\psi_1 = \phi_1$.

Takođe važi: $E(X_t) = 0$.

3. Autokovarijansna i autokorelaciona funkcija

Prema polaznom modelu, $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$, dobijamo:

$E(X_t X_{t-k}) = \phi_1 E(X_{t-1}X_{t-k}) + \phi_2 E(X_{t-2}X_{t-k}) + E(\varepsilon_t X_{t-k})$

što je ekvivalentno sa:

$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} + E(\varepsilon_t X_{t-k})$

uz pretpostavku $E(X_t) = 0$.

Imajući u vidu da važi:

$$E(\varepsilon_t X_{t-k}) = E(\varepsilon_t)(\varepsilon_{t-k} + \phi_1\varepsilon_{t-k-1} + (\phi_1^2 + \phi_2)\varepsilon_{t-k-2} + \cdots) = \begin{cases} E(\varepsilon_t)^2 = \sigma^2, k = 0 \\ 0 \qquad\qquad\quad , k \neq 0 \end{cases}$$

relacija

$E(X_t X_{t-k}) = \phi_1 E(X_{t-1}X_{t-k}) + \phi_2 E(X_{t-2}X_{t-k}) + E(\varepsilon_t X_{t-k})$

postaje

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} + E(\varepsilon_t X_{t-k}) = \begin{cases} \gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} + \sigma^2, k = 0 \\ \gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} \qquad , k > 0 \end{cases}$$

Prema tome, za $k = 0$, autokovarijacioni koeficijent je varijansa procesa i može se predstaviti na sledeći način:

$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + \sigma^2$,

što je ekvivalentno sa:

$\gamma_0 = \phi_1\rho_1\gamma_0 + \phi_2\rho_2\gamma_0 + \sigma^2$,

odakle sledi:

$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1-\phi_1\rho_1-\phi_2\rho_2}$.

Za $k > 0$, autokovarijaciona funkcija je:

$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}$

Deljenjem prethodnog izraza sa γ_0 dolazimo do relacije koja opisuje autokorelacionu funkciju:

$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}, k = 1,2, \dots$

Za $k = 1$, autokorelacioni koeficijent sa prvim kašnjenjem je:

$\rho_1 = \phi_1 \rho_0 + \phi_2 \rho_1 \Rightarrow \rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}.$

Za $k = 2$, autokorelacioni koeficijent sa drugim kašnjenjem je:

$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_0 \Rightarrow \rho_2 = \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} + \phi_2.$

Zamenom autokorelacionih koeficijenata sa prvim i drugim kašnjenjem u izraz za varijansu vremenske serije dobijamo varijansu kao funkciju parametara modela:

$\gamma_0 = \frac{(1-\phi_2)\sigma^2}{(1+\phi_2)[(1-\phi_2)^2 - \phi_1^2]}.$

Relacija $\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}, k = 1,2, \dots$,koja opisuje autokorelacione koeficijente, predstavlja determinističku diferencnu jednačinu drugog reda.Ta diferencna jednačina određena je rešenjima g_1 i g_2 kvadratne jednačine. Otuda se vrednosti autokorelacionih koeficijenata mogu predstaviti u funkciji od ovih rešenja na sledeći način:

$\rho_k = b_1 (g_1)^k + b_2 (g_2)^k, k = 0,1,2, \dots$

gde se parametri početnih uslova b_1 i b_2 dobijaju iz sledećeg sistema jednačina:

$k = 0, \rho_0 = 1 = b_1 + b_2$

$k = 1, \rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} = g_1 b_1 + g_2 b_2.$

Zaključujemo da ponašanje autokorelacione funkcije zavisi od rešenja karakteristične jednačine.

Autoregresioni model reda p, AR(p)

Autoregresioni model reda p, AR(p) model, je oblika:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

Sa $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ označeni su autoregresioni parametri, dok je sa ε_t obeležen beli šum.

Autokovarijaciona funkcija AR(p) modela dobija se uopštenjem prethodnih izvođenja kod AR(1) i AR(2) modela na sledeći način:

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-1} + \cdots + \phi_p\gamma_{k-p} + E(\varepsilon_t X_{t-k})$$

odakle sledi da je

$$\gamma_k = \begin{cases} \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-1} + \cdots + \phi_p\gamma_{k-p} + \sigma^2, k = 0 \\ \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-1} + \cdots + \phi_p\gamma_{k-p} \qquad , k > 0 \end{cases}.$$

Za $k = 0$ autokovarijacioni koeficijent se svodi na varijansu vremenske serije:

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1-\phi_1\rho_1-\phi_2\rho_2-\cdots-\phi_p\rho_p}.$$

Kada je $k > 0$ autokovarijaciona funkcija je:

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-1} + \cdots + \phi_p\gamma_{k-p}$$

Deljenjem prethodnog izraza sa γ_0, dobijamo autokorelacionu funkciju:

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-1} + \cdots + \phi_p\rho_{k-p}$$

Zaključujemo da je autokorelaciona funkcija generisana determinističkom diferencnom jednačinom reda *p*, tako da je određena rešenjima karakteristične jednačine:

$$g^p - \phi_1 g^{p-1} - \phi_2 g^{p-2} - \cdots - \phi_p = 0$$

na sledeći način:

$$\rho_k = b_1(g_1)^k + b_2(g_2)^k + \cdots + b_p(g_p)^k, k = 0,1,2, \ldots$$

gde su $b_1, b_2, \ldots, b_p$ parametri koji su definisani početnim uslovima.

Razvojem prethodne relacije za kašnjenja $k = 1,2, \ldots p$ dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$k = 1, \rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1 + \phi_3\rho_2 + \cdots + \phi_p\rho_{p-1}$$

$$k = 2, \rho_2 = \phi_1\rho_1 + \phi_2 + \phi_3\rho_1 + \cdots + \phi_p\rho_{p-2}$$

$$k = 3, \rho_3 = \phi_1\rho_2 + \phi_2\rho_1 + \phi_3 + \cdots + \phi_p\rho_{p-3}$$

$$\vdots$$

$$k = p, \rho_p = \phi_1\rho_{p-1} + \phi_2\rho_{p-2} + \phi_3\rho_{p-3} + \cdots + \phi_p$$

Dati sistem jednačina u literature je poznat kao Džul-Volkerov (Yule-Walker) sistem jednačina. Ovaj sistem jednačina može se predstaviti u matričnoj formi na sledeći način:

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 & & \rho_{p-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \rho_{p-4} & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix}$$

odnosno

$$\rho = P\Phi,$$

gde je ρ matrica dimenzija $p \times 1$ (vektor), P matrica dimenzija $p \times p$, a Φ matrica dimenzija $p \times 1$ (vektor).

Odavde se vektor autoregresionih parametara Φ može dobiti kao funkcija prvih *p* autokorelacionih koeficijenata:

$$\Phi = P^{-1}\rho$$

odnosno:

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 & & \rho_{p-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \rho_{p-4} & & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix}$$

Zaključujemo da skup autokorelacionih koeficijenata jednoznačno određuje parametre autoregresionog modela.

Parcijalna autokorelaciona funkcija

Stepen korelisanosti između X_t i X_{t-k} uobično se meri autokorelacionim koeficijentom sa kašnjenjem k, koji smo definisali relacijom:

$$\rho_k = \frac{Cov(X_t, X_{t-k})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t-k})}}, k = 1,2, \dots$$

Međutim, autokorelacioni koeficijent sa kašnjenjem k, ρ_k, može biti pod uticajem korelisanosti X_t i X_{t-k} sa članovima vremenske serije na kašnjenju između vremenskih trenutaka t i $t-k$ ($X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-k+1}$). Eliminacijom uticaja članova X_{t-1}, X_{t-2}, …, X_{t-k+1} dobija se pokazatelj korelisanosti između X_t i X_{t-k}, koji se naziva *parcijalni autokorelacioni koeficijent*. Ovaj koeficijent sa kašnjenjem k označava se sa ϕ_{kk}. Niz $\phi_{11}, \phi_{22}, \dots$predstavlja *parcijalnu autokorelacionu funkciju,* čiji se grafički prikaz naziva parcijalni korelogram. [2]

Parcijalna autokorelaciona funkcija autoregresionih modela

Posmatramo model oblika:

$$X_t = \phi_0 + \phi_{11}X_{t-1} + \phi_{22}X_{t-2} + \cdots + \phi_{kk}X_{t-k} + \varepsilon_t$$

U pitanju je autoregresioni model reda *k*. Parcijalni autokorelacioni koeficijent, ϕ_{kk}, definiše se kao *k*-ti autoregresioni parameter u modelu.

Za $k = 1$, parcijalni autokorelacioni koeficijent sa kašnjenjem jedan je:

$$\phi_{11} = \rho_1.$$

Za $k = 2$, parcijalni autokorelacioni koeficijent sa kašnjenjem dva sledi iz sledeće dve jednačine:

$\rho_1 = \phi_{11} + \phi_{22}\rho_1$

$\rho_2 = \phi_{11}\rho_1 + \phi_{22}$

a glasi:

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

Za $k = 3$, parcijalni autokorelacioni koeficijent sa kašnjenjem tri sledi iz sledeće tri jednačine:

$\rho_1 = \phi_{11} + \phi_{22}\rho_1 + \phi_{33}\rho_2$

$\rho_2 = \phi_{11}\rho_1 + \phi_{22} + \phi_{33}\rho_1$

$\rho_3 = \phi_{11}\rho_2 + \phi_{22}\rho_1 + \phi_{33}$

a glasi:

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

Analogno se dobijaju parcijalni autokorelacioni koeficijenti sa kašnjenjima 4,5,...

AR(p) model: $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$

Za parcijalnu autokorelacionu funkciju važi:

$$\phi_{kk} \neq 0, za\ k = 1,2, \dots, p$$

$$\phi_{pp} = \phi_p, za\ k = p$$

$$\phi_{kk} = 0, za\ k > p.$$

2.2.2. Modeli pokretnih proseka, MA

Naziv ovog modela na engleskom jeziku je *moving average,* tako da koristimo skraćenicu MA, odnosno MA(q) za model pokretnih proseka reda q. Ovaj naziv dovodi se u vezu sa postupkom izravnanja vremenske serije koji često podrazumeva izračunavanje pokretnih proseka. Proces pokretnih proseka je koristan u modeliranju pojava kod kojih događaji uzrokuju trenutne efekte, a koji traju kratak vremenski period.

Model pokretnih proseka reda q, AR(q) model, definiše se na sledeći način:

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

gde je sa ε_t označen proces beli šum sa varijansom σ^2. Parametri modela su: $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$.

U ovom modelu, nivo vremenske serije u trenutku *t* opisuje se u funkciji od članova procesa belog šuma u trenucima $t, t-1, \dots, t-q$. Dakle, nivo vremenske serije u trenutku $t-1$ zavisi od članova belog šuma u trenucima $t-1, \dots, t-q-1$, nivo vremenske serije u trenutku $t-2$ zavisi od članova belog šuma u trenucima $t-2, \dots, t-q-2$ i slično.

U odnosu na operator kašnjenja *L*, ovaj model se može napisati u sledećem obliku:

$$X_t = \Theta(L)\, \varepsilon_t,$$

gde je $\Theta(L) = 1 - \theta_1 L - \cdots - \theta_q L^q$.

Model pokretnih proseka prvog reda, MA(1)

Model pokretnih proseka prvog reda, MA(1) model, definiše se na sledeći način:

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Primetimo da je $E(X_t) = 0$.

Sada navodimo neke od osobina ovog procesa:

1. Autokovarijaciona funkcija

Ova funkcija je:

$$\gamma_k = E(X_t X_{t-k}) = E(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-k} - \theta_1 \varepsilon_{t-k-1})$$

Dobijamo da važi:

$$\gamma_k = \begin{cases} (1+\theta_1^2)\sigma^2, & k = 0 \\ -\theta_1 \sigma^2 & , k = 1 \\ 0 & , k > 1 \end{cases}$$

2. Autokorelaciona funkcija

Na osnovu autokovarijacione funkcije zaključujemo da je autokorelaciona funkcija data sa:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ -\dfrac{\theta_1}{1+\theta_1^2}, & k = 1 \\ 0 & , k > 1 \end{cases}$$

Osobine autokorelacione funkcije MA(1) modela su:

- Ne postoji jednoznačna određenost autokorelacione funkcije
- Autokorelacioni koeficijent sa kašnjenjem jedan uzima vrednost iz intervala $(-0.5,0.5)$.

3. Parcijalna autokorelaciona funkcija

Za proizvoljno *k*, opšti oblik parcijalne autokorelacione funkcije je:

$$\phi_{kk} = -\frac{\theta_1^k(1-\theta_1^2)}{(1-\theta_1^{2(k+1)})}, k = 1,2,3, \ldots$$

I ovi autokorelacioni koeficijenti, kao i obični, zadovoljavaju uslov $\phi_{kk} \in (-0.5,0.5)$.

Osobine parcijalne autokorelacione funkcije MA(1) modela su:

- U modelu sa pozitivnom vrednošću parametra θ_1, parcijalna autokorelaciona funkcija poseduje negativne vrednosti
- U modelu sa negativnom vrednošću parametra θ_1, parcijalna autokorelaciona funkcija naizmenično menja znak počev od pozitivne vrednosti.

4. Uslov invertibilnosti

Primetimo da važi sledeće:

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \Rightarrow \varepsilon_t = X_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{t-1} = X_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2} \\ \varepsilon_{t-2} = X_{t-2} + \theta_1 \varepsilon_{t-3} \\ \text{itd.} \end{cases}$$

Koristeći ovaj rezultat, MA(1) model postaje:

$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$

$= \varepsilon_t - \theta_1 (X_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2})$

$= -\theta_1 X_{t-1} - \theta_1^2 (X_{t-2} + \theta_1 \varepsilon_{t-3}) + \varepsilon_t$

=...

$= -\theta_1 X_{t-1} - \theta_1^2 X_{t-2} - \theta_1^3 X_{t-3} - \cdots + \varepsilon_t$

Uvodeći smenu: $\pi_j = -\theta_1^j, j = 1,2, \ldots$dolazimo do autoregresionog modela beskonačnog reda:

$$X_t = \pi_1 X_{t-1} + \pi_2 X_{t-2} + \pi_3 X_{t-3} + \cdots + \varepsilon_t$$

Parametri $\pi_j = -\theta_1^j, j = 1,2, \ldots$ nazivaju se $\boldsymbol{\pi}$ **−ponderi.**

Postavlja se pitanje uslova pod kojim se datim autoregresionim modelom opisuje stacionarna vremenska serija. Imajući u vidu način na koji su definisani π-ponderi, zaključujemo da parametar θ_1 treba da je po modulu strogo manji od 1. Time je definisan uslov invertibilnosti, pod kojim se podrazumeva ekvivalentnost MA modela i odgovarajućeg stacionarnog autoregresionog modela beskonačnog reda.

Model pokretnih proseka drugog reda, MA(2)

Model pokretnih proseka drugog reda, MA(2) model, definiše se na sledeći način:

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}, \; E(X_t) = 0$$

Osobine:

1. Autokovarijaciona funkcija

Ova funkcija je:

$$\gamma_k = E(X_t X_{t-k}) = E(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-k} - \theta_1 \varepsilon_{t-k-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-k-2})$$

i svodi se na:

$$\gamma_k = \begin{cases} (1+\theta_1^2+\theta_2^2)\sigma^2, k=0 \\ -\theta_1(1-\theta_2)\sigma^2 \quad ,k=1 \\ -\theta_2\sigma^2 \qquad\qquad ,k=2 \\ 0 \qquad\qquad\qquad ,k>2 \end{cases}$$

2. Autokorelaciona funkcija

Na osnovu autokovarijacione funkcije dobijamo:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} 1 & ,k=0 \\ -\dfrac{\theta_1(1-\theta_2)}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)} & ,k=1 \\ -\dfrac{\theta_2}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)} & ,k=2 \\ 0 & ,k>2 \end{cases}$$

3. Uslov invertibilnosti

MA(2) model se može zapisati na sledeći način:

$$X_t = (1-\theta_1 L-\theta_2 L^2)\varepsilon_t = \Theta(L)\varepsilon_t$$

Uslov invertibilnosti podrazumeva da se vremenska serija definisana MA(2) modelom može predstaviti i preko beskonačne AR reprezentacije:

$$X_t = \pi_1 X_{t-1} + \pi_2 X_{t-2} + \pi_3 X_{t-3} + \cdots + \varepsilon_t$$

$$\Pi(L)X_t = (1-\pi_1 L-\pi_2 L^2-\pi_3 L^3-\cdots)X_t = \varepsilon_t$$

Sada ćemo definisati parametre polinoma $\Pi(L)$ na osnovu polaznih parametara MA(2) modela, θ_1 i θ_2. Upoređujući relacije:

$X_t = (1-\theta_1 L-\theta_2 L^2)\varepsilon_t = \Theta(L)\varepsilon_t$ i

$\Pi(L)X_t = (1-\pi_1 L-\pi_2 L^2-\pi_3 L^3-\cdots)X_t = \varepsilon_t$

Zaključujemo da je $\Theta(L)\Pi(L) = 1$, odnosno,

$(1-\theta_1 L-\theta_2 L^2)(1-\pi_1 L-\pi_2 L^2-\pi_3 L^3-\cdots) = 1$.

Odavde sledi:

$$\pi_1 = -\theta_1$$

$$\pi_2 = \pi_1\theta_1 - \theta_2$$

$$\pi_3 = \theta_1\pi_2 + \theta_2\pi_1$$

$$\vdots$$

U opštem slučaju važi:

$$\pi_j = \theta_1\pi_{j-1} + \theta_2\pi_{j-2}, j = 3,4, \dots$$

Da bi se ovako definisanom AR reprezentacijom opisala stacionarna vremenska serija neophodno je da parametri polaznog MA(2) modela ispune određene uslove. Ti uslovi izvode se iz zahteva da su rešenja karakteristične jednačine koja odgovara diferencnoj jednačini, $\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} = 0$, po modulu strogo manja od 1. Slično, kao kod AR(2) modela, uslov invertibilnosti se svodi na sledeći skup ograničenja:

$$\theta_2 - \theta_1 < 1$$

$$\theta_1 + \theta_2 < 1$$

$$-1 < \theta_2 < 1.$$

4. Parcijalna autokorelaciona funkcija

Imajući u vidu uslov invertibilnosti, zaključujemo da parcijalna autokorelaciona funkcija uzima niz vrednosti različitih od nule. Ukoliko su rešenja odgovarajuće karakteristične funkcije realna, tada ova funkcija opada po eksponencijalnoj putanji, a ako su rešenja kompleksna, tada funkcija sledi sinusoidni oblik.

Model pokretnih proseka reda q, MA(q)

Za model

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

Autokorelaciona funkcija se definiše na sledeći način:

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ \dfrac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \cdots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2} & , k = 1,2, \dots , q \\ 0 & , k > q \end{cases}$$

2.2.3. Autoregresioni modeli pokretnih proseka, ARMA

ARMA(p,q) model je kombinacija AR(p) i MA(q) modela. Dakle, u ARMA(p,q) modelu, *p* označava red autoregresione komponente, a *q* red komponente pokretnih proseka.

Opšta forma *autoregresionog modela pokretnih proseka*, ARMA(p,q) modela, je:

$$\left(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2-\cdots-\phi_p L^p\right) X_t=\left(1-\theta_1 L-\theta_2 L^2-\cdots-\theta_q L^q\right) \varepsilon_t$$

odnosno:

$$\Phi(L) X_t=\Theta(L) \varepsilon_t$$

ARMA(p,q) model obuhvata i sledeće posebne slučajeve:

AR(p)=ARMA(p,0) i

MA(q)=ARMA(0,q).

ARMA klasa modela se izvodi iz linearnog procesa prema:

$$X_t=\varepsilon_t+\psi_1 \varepsilon_{t-1}+\psi_2 \varepsilon_{t-2}+\cdots$$

$$X_t=\left(1+\psi_1 L+\psi_2 L^2+\cdots\right) \varepsilon_t=\Psi(L) \varepsilon_t$$

Polinom beskonačnog reda $\Psi(L)$ uvek se može predstaviti kao količnik dva polinoma konačnog reda:

$$\Psi(L)=\frac{\Theta(L)}{\Phi(L)}$$

odnosno,

$$\Psi(L)=\left(1+\psi_1 L+\psi_2 L^2+\cdots\right)=\frac{\left(1-\theta_1 L-\theta_2 L^2-\cdots-\theta_q L^q\right)}{\left(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2-\cdots-\phi_p L^p\right)}=\frac{\Theta(L)}{\Phi(L)}$$

Na osnovu ove relacije, polazni linearni proces se svodi na:

$$X_t=\phi_1 X_{t-1}+\phi_2 X_{t-2}+\cdots+\phi_p X_{t-p}+\varepsilon_t-\theta_1 \varepsilon_{t-1}-\theta_2 \varepsilon_{t-2}-\cdots-\theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Kako je srednja vrednost ove vremenske serije 0, odnosno $E(X_t)=0$, njena autokovarijaciona funkcija ima sledeći oblik:

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} + \cdots + \phi_p\gamma_{k-p} + E(\varepsilon_t X_{t-k}) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}X_{t-k}) - \theta_2 E(\varepsilon_{t-2}X_{t-k}) - \cdots - \theta_q E(\varepsilon_{t-q}X_{t-k})$$

Budući da je data vremenska serija linearan proces, zaključujemo da važi:

$E(X_{t-k}\varepsilon_{t-q}) = 0$, za $k > q$ i

$E(X_{t-k}\varepsilon_{t-q}) = Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$, za , za $k = q$.

Dakle, za $k > q$ autokovarijaciona funkcija je:

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} + \cdots + \phi_p\gamma_{k-p}$$

a autokorelaciona funkcija je:

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + \cdots + \phi_p\rho_{k-p}\,, k > q.$$

Osobine autokorelacione funkcije:

- Prvih q autokorelacionih koeficijenata vremenske serije generisane ARMA(p,q) modelom zavisi od parametara AR i MA komponente.
- Za kašnjenja koja su veća od reda MA komponente, $q+1, q+2$, itd.,ova funkcija ponaša se kao kod AR modela.

Vrednosti parcijalnih autokorelacionih koeficijenata opadaju za veći broj kašnjenja kod MA modela, a da kod AR modela uzimaju nenulte vrednosti samo za kašnjenja koja manja ili jednaka redu procesa p. Na osnovu toga izvodimo osobine parcijalne autokorelacione funkcije:

- Kod kašnjenja $1,2,\dots,p$ parcijalni autokorelacioni koeficijenti zavise od svih parametara modela, odnosno od AR i MA komponente.
- Za kašnjenja veća od reda AR komponente, $p+1, p+2$, itd., parcijalni autokorelacioni koeficijenti slede svojstva parcijalne autokorelacione funkcije MA klase modela.

Autoregresioni modeli pokretnih proseka, ARMA(1,1)

Ovaj model definiše se na sledeći način:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}$$

Uslov stacionarnosti kod ARMA modela je određen njegovom AR komponentom. To znači da se u ARMA(1,1) modelu uslov stacionarnosti svodi na uslov stacionarnosti AR(1) modela:

$|\ \phi_1\ |< 1$. Kako uslov invertibilnosti ARMA modela proizilazi iz odgovarajućeg ograničenja parametra MA komponenti, taj uslov je u ARMA(1,1) modelu: $|\ \theta_1\ |< 1$.

Osobine:

1. Veza sa linearnim procesom

ARMA(1,1) model se može predstaviti kao:

$$\Phi(L)X_t = (1-\phi_1 L)X_t = (1-\theta_1 L)\varepsilon_t = \Theta(L)\varepsilon_t \Rightarrow X_t = \frac{\Theta(L)}{\Phi(L)}\varepsilon_t$$

Proizvoljni linearni proces je:

$$X_t = (1+\psi_1 L + \psi_2 L^2 + \psi_3 L^3 + \cdots)\varepsilon_t = \Psi(L)\varepsilon_t.$$

Da bi se uspostavila veza između prethodne dve specifikacije potrebno je da važi:

$$(1+\psi_1 L + \psi_2 L^2 + \psi_3 L^3 + \cdots)(1-\phi_1 L) = (1-\theta_1 L) \Leftrightarrow \Psi(L)\Phi(L) = \Theta(L)$$

Izjednačavajući koeficijente uz iste stepene *L* na levoj i desnoj strani dobijamo:

Prvi stepen:

L: $\psi_1 L - \phi_1 L = -\theta_1 L \Rightarrow \psi_1 = \phi_1 - \theta_1$

Drugi stepen:

L^2: $\psi_2 L^2 - \phi_1\psi_1 L^2 = 0 \Rightarrow \psi_2 = \phi_1\psi_1 = \phi_1(\phi_1-\theta_1)$

Treći stepen:

L^3: $\psi_3 L^3 - \phi_1\psi_2 L^3 = 0 \Rightarrow \psi_3 = \phi_1\psi_2 = \phi_1^2(\phi_1-\theta_1)$

Itd.

Parametri linearnog procesa mogu se odrediti na osnovu parametara ARMA(1,1) modela na sledeći način:

$$\psi_j = \phi_1^{j-1}(\phi_1-\theta_1), j = 1,2,\ldots$$

2. Varijansa vremenske serije

$\gamma_0 = Var(X_t) = Var(\phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1})$

$= \phi_1^2 Var(X_{t-1}) + Var(\varepsilon_t) + \theta_1^2 Var(\varepsilon_{t-1}) + 2\phi_1 Cov(X_{t-1},\varepsilon_t) - 2\theta_1 Cov(\varepsilon_t,\varepsilon_{t-1}) - 2\phi_1\theta_1 Cov\big(X_{t-1,}\varepsilon_{t-1}\big) = \phi_1^2\gamma_0 + \sigma^2 + \theta_1^2\sigma^2 + 0 - 0 - 2\phi_1\theta_1\sigma^2$

Odavde sledi:

$$\gamma_0 = \frac{(1-2\phi_1\theta_1+\theta_1^2)}{(1-\phi_1^2)}\sigma^2.$$

Varijansa vremenske serije koja se opisuje ARMA(1,1) modelom je funkcija samo od parametara modela.

3. Autokovarijaciona funkcija

Opšti oblik autokovarijacione funkcije je:

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + E(\varepsilon_t X_{t-k}) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}X_{t-k})$$

Za $k = 1$ imamo:

$$\gamma_1 = \phi_1\gamma_0 + E(\varepsilon_t X_{t-1}) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}X_{t-1}) = \phi_1\gamma_0 - \theta_1\sigma^2 = \phi_1\left[\frac{(1-2\phi_1\theta_1+\theta_1^2)}{(1-\phi_1^2)}\sigma^2\right] - \theta_1\sigma^2$$

$$=\frac{(\phi_1-\phi_1^2\theta_1+\phi_1\theta_1^2-\theta_1)}{(1-\phi_1^2)}\sigma^2 = \frac{(\phi_1-\theta_1)(1-\phi_1\theta_1)}{(1-\phi_1^2)}\sigma^2$$

Za $k > 1$ važi:

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1}$$

Kada sumiramo sve dobijamo:

$$\gamma_k = \begin{cases} \dfrac{(1-2\phi_1\theta_1+\theta_1^2)}{(1-\phi_1^2)}\sigma^2 & ,k=0 \\ \dfrac{(\phi_1-\theta_1)(1-\phi_1\theta_1)}{(1-\phi_1^2)}\sigma^2 & ,k=1 \\ \phi_1\gamma_{k-1} & ,k>1 \end{cases}$$

4. Obična i parcijalna autokorelaciona funkcija

Iz autokovarijacione funkcije dolazimo do:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} 1 & ,k=0 \\ \dfrac{(\phi_1-\theta_1)(1-\phi_1\theta_1)}{1-2\phi_1\theta_1+\theta_1^2} & ,k=1 \\ \phi_1\gamma_{k-1} & ,k>1 \end{cases}$$

Primećujemo da ova funkcija zavisi od parametara AR i MA komponente sa kašnjenjem 1. Za kašnjenja 2,3,...funkcija se određuje na isti način kao i kod AR(1) modela.

Kako je prvi autokorelacioni koeficijent, ϕ_{11}, uvek jednak prvom običnom autokorelacionom koeficijentu, zaključujemo da na vrednost ϕ_{11} utiču parametri obe komponente modela. Za kašnjenja veća od 1, što je i red AR dela modela, ova funkcija pratiće putanju parcijalne autokorelacione funkcije MA modela.

Predviđanje na osnovu ARMA(p,q) modela

U analizi vremenskih serija nas često zanima kakav će biti tok te vremenske serije u budućnosti. Kriterijum koji se najčešće koristi za predviđanje kretanja vremenske serije se naziva *prognoziranje sa minimalnom srednje kvadratnom greškom*.

Neka su:

- X_{t+h} - buduća vrednost vremenske serije za vremenski interval h
- $\hat{X}_{t+h}$ - prognozirana vrednost vremenske serije za vremenski interval h

Tada je greška prognoziranja:

$$e_t(h) = X_{t+h} - \hat{X}_{t+h},$$

a srednje kvadratna greška prognoziranja:

$$E(X_{t+h} - \hat{X}_{t+h})^2.$$

Ideja je da se na osnovu poznatih vrednosti vremenske serije odredi vrednost $\hat{X}_{t+h}$ za koje srednje kvadratna greška prognoziranja ima minimalnu vrednost.

Polazimo od najopštijeg ARMA modela:

$$\Phi(L)X_t = \Theta(L)\varepsilon_t$$

koji zadovoljava uslove invertibilnosti i stacionarnosti.

Zbog invertibilnosti proces se može predstaviti kao proces pokretnih sredina beskonačnog reda

$$X_t = \Psi(L)\varepsilon_t$$

$$\Psi(L) = \frac{\Theta(L)}{\Phi(L)}$$

$$X_t = \varepsilon_t + \psi_1\varepsilon_{t-1} + \psi_2\varepsilon_{t-2} + \cdots$$

Kada se u prethodnu jednakost zameni $t = n + h$, dobija se buduća vrednost vremenske serije za h perioda unapred:

$$X_{n+h}=\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{n+h-j}$$

U trenutku $t=n$ raspolaže se informacijama $X_n, X_{n-1}, \ldots$ i potrebno je da se formira prognoza buduće vrednosti vremenske serije za h perioda unapred u obliku linearne kombinacije raspoloživih podataka vremenske serije, odnosno:

$$\hat{X}_{n+h}=\psi_h^*\varepsilon_n+\psi_{h+1}^*\varepsilon_{n-1}+\psi_{h+2}^*\varepsilon_{n-2}+\cdots$$

gde se koeficijenti ψ_h^* određuju minimiziranjem srednje kvadratne greške prognoze.

$X_{n+h}-\hat{X}_{n+h}=\left(\sum_{j=0}^{h-1}\psi_j\varepsilon_{n+h-j}-\sum_{j=0}^{\infty}\psi_{h+j}\varepsilon_{n+j}\right)-\sum_{j=0}^{\infty}\psi_{h+j}^*\varepsilon_{n+j}$

$E(X_{n+h}-\hat{X}_{n+h})^2=\sigma^2\sum_{j=0}^{h-1}\psi_j+\sigma^2\sum_{j=0}^{\infty}(\psi_{h+j}-\psi_{h+j}^*)^2$

$E(X_{n+h}-\hat{X}_{n+h})^2\rightarrow min$ kada je $\psi_{h+j}=\psi_{h+j}^*$.

Kada dobijeni rezultat zamenimo u izraz $\hat{X}_{n+h}=\psi_h^*\varepsilon_n+\psi_{h+1}^*\varepsilon_{n-1}+\psi_{h+2}^*\varepsilon_{n-2}+\cdots$ dobijamo:

$$\hat{X}_{n+h}=\psi_h\varepsilon_n+\psi_{h+1}\varepsilon_{n-1}+\psi_{h+2}\varepsilon_{n-2}+\cdots$$

Kako je $E\left(\varepsilon_{n+h-j}|X_n, X_{n-1}, \ldots\right)=\begin{cases}\varepsilon_{n+h-j} & ,j>h\\ 0 & ,j\leq h\end{cases}$

onda je $E(X_{n+h}|X_n, X_{n-1}, \ldots)=\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j E\left(\varepsilon_{n+h-j}\right)=\psi_h\varepsilon_n+\psi_{h+1}\varepsilon_{n-1}+\psi_{h+2}\varepsilon_{n-2}+\cdots$

Dakle, prognoza sa minimalnom srednje kvadratnom greškom je data njenom uslovnom očekivanom vrednošću:

$$\hat{X}_{n+h}=E(X_{n+h}|X_n, X_{n-1}, \ldots)$$

Greška prognoze je:

$$e_n(h)=X_{n+h}-\hat{X}_{n+h}=\sum_{j=0}^{h-1}\psi_j\varepsilon_{n+h-j}$$

pa su

$E(e_n)=0$ i

Var(e_n)= $Var\left(\sum_{j=0}^{h-1}\psi_j\varepsilon_{n+h-j}\right)=\sigma^2\sum_{j=0}^{h-1}\psi_j^2$.

Varijansa greške prognoziranja povećava se sa porastom *h,* tako da za što bolju prognozu biramo što manje *h*.

Izračunavanje prognoze

Ako je ARMA(p,q) model dat sa:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

onda je buduća vrednost ovog modela za *h* perioda unapred:

$$X_{n+h} = \phi_1 X_{n+h-1} + \cdots + \phi_p X_{n+h-p} + \varepsilon_{n+h} - \theta_1 \varepsilon_{n+h-1} - \cdots - \theta_q n + h$$

a njena uslovna očekivana vrednost

$$\begin{aligned}\hat{X}_{n+h} = \phi_1 E(X_{n+h-1}|X_n, X_{n-1}, \ldots) + \cdots + \phi_p E(X_{n+h-p}|X_n, X_{n-1}, \ldots) + E(\varepsilon_{n+h}|X_n, X_{n-1}, \ldots) \\ - \theta_1 E(\varepsilon_{n+h-1}|X_n, X_{n-1}, \ldots) - \cdots - \theta_q E(\varepsilon_{n+h-q}|X_n, X_{n-1}, \ldots)\end{aligned}$$

gde je

$$E(X_{n+h-j}|X_n, X_{n-1}, \ldots) = \begin{cases} X_{n+h-j}, j \geq h \\ \hat{X}_{n+h-j}, j < h \end{cases}.$$

3. Uslovni heteroskedastični modeli vremenskih serija

<u>Heteroskedastičnost</u>

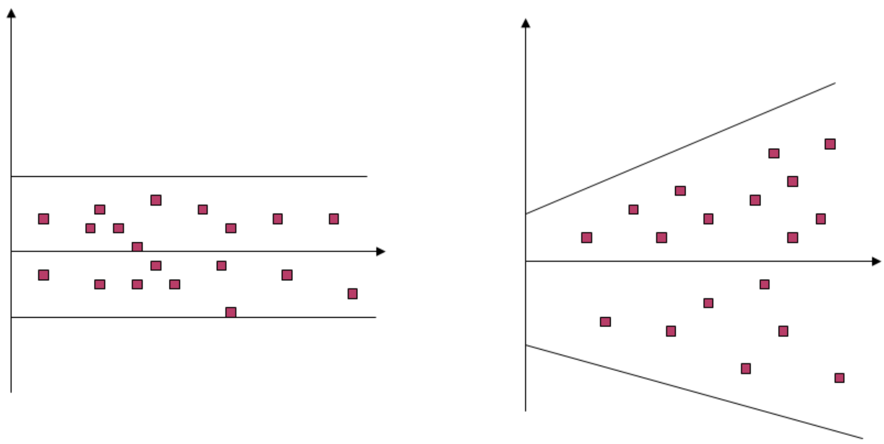
U delu o linearnoj regresija, peta pretpostavka, koja se odnosila na greške (reziduale) regresije, je glasila [5]:

$$var(\varepsilon_i) = \sigma^2, i = 1,2, \dots, n$$

i ovu osobinu nazivamo **homoskedastičnost**. Ona kaže da je varijansa grešaka nepromenljiva.

Kada je ova pretpostavka narušena, nastaje **heteroskedastičnost**, koja se definiše na sledeći način:

$$var(\varepsilon_i) = \sigma_i^2, i = 1,2, \dots, n.$$



Slika. 3.0.1. Prikaz reziduala kod homoskedastičnosti i heteroskedastičnosti [5]

Volatilnost opisuje dinamiku promene vrednosti u određenom vremenskom periodu. Jedna od karakteristika vremenskih serija finansijskog tržišta je promenljiva volatilnost, a to je upravo osobina heteroskedastičnosti. U praksi je primećeno da se volatilnost vremenske serije često grupiše u vremenu, odnosno da nakon malih vrednosti volatilnosti tržišta često slede male, a nakon velikih vrednosti volatilnosti često slede velike promene.

Volatilnost

Uslovna funkcija raspodele slučajne promenljive X u odnosu na događaj $\{Y = y\}$, gde su X i Y neprekidne slučajne promenljive, data je sa ([3], [4]):

$$F_{X|Y}(x|y) = P\{X \leq x \mid Y = y\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f_{X,Y}(u,y)}{f_Y(y)} du.$$

U gornjem izrazu $f_{X,Y}(x,y)$ je zajednička funkcija gustine slučajnih promenljivih X i Y, a $f_Y(y)$ je marginalna funkcija gustine slučajne promenljive Y, koja je data sa:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx$$

Postoji veza između zajedničke, marginalne i uslovne funkcije gustine i ona glasi:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y}(x|y) \times f_Y(y)$$

Za slučajne promenljive X i Y kažemo da su nezavisne ako i samo ako je:

$$f_{X|Y}(x) = f_X(x)$$

Za nezavisne slučajne promenljive je $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$.

Polazeći od definicije uslovne verovatnoće lako se može doći do navedene formule za uslovnu funkciju raspodele:

$$P\{X \leq x \mid Y = y\} = \frac{P\{X \leq x \,, y \leq Y \leq y + \Delta y\}}{P\{y \leq Y \leq y + \Delta y\}} = \frac{\int_{-\infty}^{x} \int_{y}^{y+\Delta y} f_{X,Y}(u,v) du dv}{\int_{y}^{y+\Delta y} f_Y(v) dv}$$
$$= \frac{(\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(u,y) du) \Delta y}{f_Y(y) \Delta y} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f_{X,Y}(u,y)}{f_Y(y)} du$$

Uslovna gustina verovatnoće slučajne promenljive X u odnosu na događaj $\{Y = y\}$ data je sa:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

I za uslovne raspodele mogu se definisati numeričke karakteristike kao što su očekivanje i varijansa.

Uslovno matematičko očekivanje slučajne promenljive X u odnosu na događaj $\{Y = y\}$ definiše se na sledeći način:

$$E(X|Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)dx$$

Odgovarajuća *uslovna varijansa* data je sa:

$$Var(X|Y) = E(\left(X - E(X|Y)\right)^2 |\, Y)$$

Primetimo da su i uslovno očekivanje i uslovna varijansa funkcije argumenta *y*.

Za uslovno očekivanje važi sledeće svojstvo:

$$E(X) = E(E(X|Y))$$

Pokazaćemo da važi navedeno svojstvo.

$$\begin{aligned} E\left(E(X|Y)\right) &= E\left(\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)dx\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)dx\right) f_Y(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y}(x|y) f_Y(y)\, dydx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy\right)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = E(X) \end{aligned}$$

Za uslovnu varijansu slično važi:

$$Var(X) = E\left(Var(X|Y)\right) + Var(E(X|Y))$$

Kao što za slučajnu promenljivu *X* definišemo varijansu na sledeći način:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

tako možemo definisati i varijansu za uslovnu slučajnu promenljivu $X|Y$:

$$Var(X|Y) = E(X^2|Y) - E(X|Y)^2$$

Računajući očekivanje gornjeg izraza dobijamo sledeće:

$$E\left(Var(X|Y)\right) = E\left(E(X^2|Y)\right) - E([E(X|Y)]^2)$$

Ako primenimo formulu $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$ na $E(X|Y)$ dobijamo

$$Var\left(E(X|Y)\right) = E([E(X|Y)]^2) - [E\left(E(X|Y)\right)]^2$$

Sabiranjem $E\big(Var(X|Y)\big) = E\big(E(X^2|Y)\big) - E([E(X|Y)]^2)$ i $Var\big(E(X|Y)\big) = E([E(X|Y)]^2) - [E\big(E(X|Y)\big)]^2$, dobijamo traženi izraz:

$$E\big(Var(X|Y)\big) + Var\big(E(X|Y)\big) = E(X^2) - E(X)^2 = Var(X)$$

U daljem radu, umesto slučajne promenljive Y koristićemo istorijske podatke sa kojima raspolažemo do nekog vremenskog trenutka *t*. Ti podaci nam predstvaljaju **skup informacija dostupnih do vremenskog trenutka t**, i obeležavamo ga sa $\boldsymbol{\mathcal{F}_t}$. Ovo $\mathcal{F}_t$ predstavlja jednu $\sigma -$algebru generisanu podacima iz prošlosti. Preko skupa $\mathcal{F}_t$ ćemo predstaviti model volatilnosti.

Model volatilnosti

U ekonomskom smislu, volatilnost finansijskog instrumenta govori o tome koliko se menja cena tog instrumenta u nekom proteklom periodu. Volatilnost najčešće računamo kao standardnu devijaciju promene cene. Jedan od pokazatelja rizika jeste volatilnost, i rizik je veći što je veća volatilnost određenog finansijskog instrumenta. Za ocenjivanje volatilnosti najbolje je koristiti informacije o prošlim vrednostima stope prinosa. Opšta struktura modela volatilnosti prikazana je na sledeći način [8]:

$$r_t = \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t$$
$$\mu_t = E(r_{t+1} \mid \mathcal{F}_t)$$
$$\sigma_t^2 = Var(r_{t+1} \mid \mathcal{F}_t)$$
$$\varepsilon_t \quad i.i.d.$$
$$E(\varepsilon_t) = 0$$
$$Var(\varepsilon_t) = 1$$

gde je r_t-prinos u trenutku *t,* ε_t- greška koja se pravi prilikom linearne regresije (oznaka i.i.d. je skraćenica od "independently and identically distributed" što znači da slučajne promenljive ε_t imaju sve istu raspodelu i nezavisne su).

Cilj analize volatilnosti je objašnjenje uzroka njenog nastanka. Naime, volatilnost nastaje kao posledica nekih prošlih događaja, pa se zato i objašnjava preko uslovnih slučajnih promenljivih:

$$\sigma_t^2 = Var(r_{t+1} \mid \mathcal{F}_t)$$

Volatilnost nastaje kao reakcija na neku vest, ili novost, koja nastaje iznenada i neočekivano. Međutim, vreme te vesti ne mora biti neočekivano i iznenađujuće, što ipak ostavlja prostora da se neke komponente volatilnosti predvide. Ono što je takođe vrlo zanimljivo posmatrati jeste kako vesti na jednom tržištu utiču na kretanja na nekom drugom tržištu, tj. moguće je posmatrati kako volatilnost jednog uslovljava volatilnost drugog tržišta. Engle je ovu pojavu nazvao “heat wave” efekat. Slična pitanja se nameću kada gledamo samo jedno tržište, tj. da li volatilnost jednog finansijskog derivata utče na neki drugi? Može se pokazati postojanje određenog stepena zavisnosti, ali ono što generalno važi jeste da volatilnost celog tržišta utiče na volatilnost svake pojedinačne akcije.

Na osnovu izgrađenog modela, volatilnost se može izmeriti, kao i predvideti. Predviđanje volatilnosti je od izuzetnog značaja za određivanje cena akcija kao i menadžment rizika (procena Var-a). U literaturi su predloženi brojni modeli volatilnosti za opisivanje karakteristika prinosa akcije.Te karakteristike su navedene u nastavku [7]:

1. Volatilnost se tokom vremena razvija kontinualno;
2. Periodi velikih promena u cenama se smenjuju sa periodima u kojima se cene jedva malo promene. Ova osobina se naziva grupisanje volatilnosti (volatility clustering);
3. Volatilnost aktive nikad ne teži beskonačnosti;
4. Postoje asimetrična kretanja volatilnosti, odnosno, velike (male) promene cena su najčešće praćene velikim (malim) promenama cena;
5. Obično se posmatra spljoštenost koja ima raspodelu sa debelim repom.

Sada ćemo se baviti modelima koji služe za predviđanje volatilnosti vremenskih serija, a to su ARCH i GARCH modeli

3.1. Model autoregresione uslovne heteroskedastičnosti-ARCH model

Profesor Robert F. Engle je 1982. godine predložio da se heteroskedastičnost uslovne varijanse predstavi kao linearna funkcija kvadrata ranijih grešaka. [8] Ova formulacija je nazvana ”autoregressive conditional heteroskedasticity (ARCH)” model, odnosno model autoregresione uslovne heteroskedastičnosti. ARCH(q) model se definiše na sledeći način:

$$r_t = \mu_t + a_t$$

$$\mu_t = \mu$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i a_{t-i}^2$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1) \text{ i.i.d.}$$

Gde je r_t – prinos u trenutku t , a $\varepsilon_t -$ greška koja se pravi tokom linearne regresije.

Da bi model bio dobro definisan i uslovna varijansa σ_t^2 bila pozitivna, potrebno je uvesti sledeće restrikcije:

$$\alpha_0 > 0$$

$$\alpha_i \geq 0, i = 1,2, \dots, q.$$

Sada ćemo nešto više reći o $\{a_t, t = 1,2, \dots\}$ koji možemo pomatrati i kao diskretan stohastički proces sa uslovnim matematičkim očekivanjem i varijansom.

ARCH(1) model

Model autoregresione uslovne heteroskedastičnosti prvog reda se definiše na sledeći način:

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2$$

uz restrikcije:

$$\alpha_0 \geq 0$$

$$\alpha_1 \geq 0$$

Osobine ARCH(1) modela

- Bezuslovno očekivanje za a_t

$$E(a_t) = E[E(a_t \mid \mathcal{F}_{t-1})] = E\big(\sigma_t E(\varepsilon_t)\big) = 0$$

- Bezuslovna varijansa za a_t

$$var(a_t) = E(a_t^2) = E[E(a_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1})] = E(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(a_{t-1}^2)$$

Kako je a_t stacionaran proces i važi $E(a_t) = 0$, sledi $var(a_t) = var(a_{t-1}) = E(a_t^2)$, pa na osnovu toga dolazimo do izraza za bezuslovnu varijansu.

$$var(a_t) = \alpha_0 + \alpha_1 var(a_t)$$

$$\Rightarrow var(a_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

Kako je varijansa procesa uvek pozitivna, to nam daje novi uslov za parameter α_1:

$$0 \leq \alpha_1 < 1.$$

- Treći i četvrti momenat za a_t

$$E(a_t^4 \mid \mathcal{F}_{t-1}) = 3E[E(a_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1})]^2 = 3(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2)^2$$

$$E(a_t^4) = E[E(a_t^4 \mid \mathcal{F}_{t-1})] = 3E(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2)^2 = 3E[\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 a_{t-1}^2 + \alpha_1^2 a_{t-1}^4]$$

Ako je vremenska serija a_t stacionarna, sa četvrtim redom $m_4 = E(a_t^4)$ tada je:

$$m_4 = 3[\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 var(a_t) + \alpha_1^2 m_4] = 3\alpha_0^2\left(1 + 2\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\right) + 3\alpha_1^2 m_4$$

$$m_4 = \frac{3\alpha_0(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)}.$$

Dakle, novo ograničenje za parameter α_1 je $1 - 3\alpha_1 > 0$, jer je četvrti momenat pozitivan. Odnosno, važi ograničenje:

$$0 \le \alpha_1 < \frac{1}{3}.$$

Koeficijent spljoštenosti za a_t je:

$$\frac{E(a_t^4)}{(var(a_t))^2} = 3\frac{\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)} \times \frac{(1-\alpha_1)^2}{\alpha_0^2} = 3\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2} > 3$$

Na osnovu ovoga vidimo da je koeficijent spljoštenosti pozitivan i da su repovi raspodele teži od repova normalne raspodele.

Navedene osobine za ARCH(1) model mogu se uopštiti za veći broj parametara, ali se time formule znatno komplikuju pa se time ne ćemo baviti u ovom radu.

U nastavku ćemo definisati regularnost i simetričnost ARCH procesa.

Neka je $\xi_t \in \mathbb{R}^q$ vektor iz prostora uzoraka Ξ čiji su elementi $\xi_t' = (\xi_{t-1}, \dots, \xi_{t-q})$. Za svako ξ_t, neka je ξ_t^* takav vektor koji ima sve iste komponente kao ξ_t, osim *m*-te komponente koja je dobijena tako što je *m*-ta component vektora ξ_t pomnožena sa -1, gde je $m = 1, \dots, q$.

Definicija 3.1.1.[9] ARCH(q) proces je **simetričan** ako važi:

a) $\sigma^2(\xi_t) = \sigma^2(\xi_t^*)$, za svako $m = 1, \dots, q$ i $\xi_t \in \Xi$
b) $\frac{\partial\sigma^2(\xi_t)}{\partial a_i} = \frac{\partial\sigma^2(\xi_t^*)}{\partial a_i}$, za svako $m = 1, \dots, q$, $i = 1, \dots, q$ i $\xi_t \in \Xi$
c) $\frac{\partial\sigma^2(\xi_t)}{\partial \xi_{t-m}} = -\frac{\partial\sigma^2(\xi_t^*)}{\partial \xi_{t-m}}$, za svako $m = 1, \dots, q$ i $\xi_t \in \Xi$

Definicija 3.1.2. [9] ARCH(q) proces je **regularan** ako važi:

a) $\min\left(\sigma^2(\xi_t)\right) \geq \delta$, za neko $\delta > 0$ i $\xi_t \in \Xi$
b) $E(|\frac{\partial\sigma^2(\xi_t)}{\partial a_i}|\,|\frac{\partial\sigma^2(\xi_t)}{\partial\xi_{t-m}}|\,|\mathcal{F}_{t-m-1})$ postoji za svako $m = 1, \dots, q$, $i = 1, \dots, q$ i $\xi_t \in \Xi$

Prvi uslov za regularnost je veoma važan, i on zahteva da je varijansa pozitivna. Taj uslov se lako proverava. Drugi uslov se ponekad teže proverava, ali bi trebao da važi ako je proces stacionaran sa ograničenim izvodima.

Sledeća teorema daje potreban uslov za regularnost procesa.

Teorema 3.1.1.[9] ARCH(q) proces zadovoljava uslove regularnosti (definisane u *Definiciji 3.1.2*) ako je $\alpha_0 > 0$ i $\alpha_1, \dots, \alpha_q \geq 0$.

Dokaz: Pod pretpostavkom da je $\sigma^2(\xi_t) \geq \alpha_0 > 0$ dobijamo uslov pod a).

Neka je dalje

$$\phi_{i,m,t} = E\left(|\frac{\partial\sigma^2(\xi_t)}{\partial a_i}|\,|\frac{\partial\sigma^2(\xi_t)}{\partial\xi_{t-m}}|\,|\mathcal{F}_{t-m-1}\right) = 2\alpha_m E(|\xi_{t-i}|^2|\xi_{t-m}|\,|\mathcal{F}_{t-m-1})$$

Sada posmatramo tri slučaja: $i > m, i < m$ i $i = m$.

Ako je $i > m$, tada $\xi_{t-i} \in \mathcal{F}_{t-m-1}$ i uslovno očekivanje od $|\xi_{t-m}|$ je konačno jer je uslovna gustina normalna.

Ako je $i = m$, onda očekivanje postaje $E(|\xi_{t-m}|^3|\mathcal{F}_{t-m-1})$. Ponovo, pošto je uslovna gustina $\{\xi_t, t = 1,2, \dots\}$ normalna, svi moment postoje, uključujući i dato očekivanje.

Ako je $i < m$, razlažemo očekivanje na dva dela, u odnosu na vremenski period $t - i - 1$:

$$\phi_{i,m,t} = 2\alpha_m E\left(|\xi_{t-m}|\,\mathrm{E}\left(\xi_{t-i}{}^2|\mathcal{F}_{t-i-1}\right)|\mathcal{F}_{t-m-1}\right) =$$

$$= 2\alpha_m E\left(|\xi_{t-m}|\left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^{q}\alpha_j\xi_{t-i-j}^2\right)|\mathcal{F}_{t-m-1}\right) =$$

$$= 2\alpha_m\alpha_0 E(\xi_{t-m}|\mathcal{F}_{t-m-1}) + \sum_{j=1}^{q}\alpha_j\phi_{i+j,m,t}$$

U poslednjem redu gornje jednakosti početni indeks za ϕ je veći od polaznog ($i + 1 > i$) te stoga početni obuhvata prošli period , što ukazuje na postojanje željenog očekivanja. Ako preostanu sabirci gde je $+j < m$, rekurzija može da se ponovi. Kako su svi lag – operatori $(\alpha_j, j = 1, \dots, q)$ konačni (na osnovu pretpostavke), možemo $\phi_{i,m,t}$ zapisati kao zbir apsolutnog momenta trećeg reda od ξ_{t-m} u odnosu na $\mathcal{F}_{t-m-1}$ i apsolutnog momenta prvog reda. Kako opet imamo normalnu gustinu, oba momenta postoje, na osnovu čega sledi uslov regularnosti prikazan u b).

Slabosti ARCH modela

1. Kako volatilnost zavisi od kvadrata prethodnih šokova koji su na nju uticali, izgleda da pozitivni i negativni šokovi imaju isti efekat na volatilnost. Međutim, u praksi je potvrđeno da finansijske aktive drugačije reaguju na pozitivne i negativne šokove. [8]

2. ARCH model je suviše restriktivan. Na primer, ARCH(1) model nalaže da se parametar α_1^2 mora naći u intervalu $[\,0\,,\frac{1}{3}\,]$, ako vremenska serija ima konačan četvrti momenat. Osim toga, u slučaju kada model sadrži veći broj parametara, ova ograničenja postaju komplikovana.

3. Ovaj model objašnjava ponašanje varijanse tokom vremena, ali ne daje i objašnjenje zašto je to ponašanje nastalo.

4. ARCH model ponekad predvidi veću volatilnost nego što treba, zato što sporo reaguje na velike izolovane šokove u vremenskim serijama koje opisuju prinose aktiva. [8]

Predviđanje pomoću ARCH modela

Neka su [8]:

- $r_{T+h} -$ stvarni nivo vremenske serije *h* perioda unapred
- $\hat{r}_T(h) -$ predviđena vrednost vremenske serije *h* perioda unapred
- $\sigma_{T+h}^2 -$ stvarna buduća vrednost volatilnosti *h* perioda unapred
- $\hat{\sigma}_T^2(h) -$ predviđena buduća vrednost volatilnosti *h* perioda unapred

Predviđena buduća vrednost volatilnosti:

- Za jedan period unapred

$$\hat{\sigma}_T^2(1) = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\sigma}_T^2 + \cdots + \alpha_q a_{T+1-q}$$

- Za dva perioda unapred

$$\hat{\sigma}_T^2(2) = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\sigma}_T^2(1) + \cdots + \alpha_q a_{T+2-m}$$

- Za *l* koraka unapred

$$\hat{\sigma}_T^2(l) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \, \hat{\sigma}_T^2(l-i)$$

3.2. Model uopštene autoregresione uslovne heteroskedastičnosti-GARCH model

Prilikom empirijske primene ARCH(q) modela, postoji potreba za velikim brojem parametara. Da bi poboljšao ove nedostatke, Bollerslev je 1986. osmislio generalizovani ARCH, ili GARCH(p,q) proces dat sa [10]:

$$r_t = \mu_t + a_t$$

$$\mu_t = \mu$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1) \text{ i.i.d.}$$

uz restrikcije:

$$\alpha_0 > 0$$

$$\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, p$$

$$\beta_j \geq 0, j = 1, \dots, q$$

Osnovna ideja ovog modela je da uslovna varijansa za a_t, σ_t^2 ima autoregresionu strukturu i da bude pozitivno korelisana sa prethodnim vrednostima. GARCH ima mnogo fleksibilniju parametarsku strukturu od ARCH modela. Dok kod ARCH modela zahtevamo veliki broj parametara, odnosno dosta veliko *q,* kod GARCH modela nam je često dovoljno da je $p = 1, q = 1$, odnosno pomoću GARCH(1,1) modela smo u stanju da opišemo veliki broj finansijskih vremenskih serija na tačan način. Kao što se može videti iz modela, uslovnu volatilnost opisujemo preko grešaka koje smo napravili u prošlosti (kao i kod ARCH-a), ali i preko prošlih varijansi, što u stvari predstavlja generalizaciju.

GARCH(1,1)

Ovaj model definišemo na sledeći način [8]:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

On se može napisati i u drugačijem obliku, koji je nekad lakši za primenu:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 [1 + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} (\alpha_1 \varepsilon_{t-i}^2 + \beta_1)]$$

Sada ćemo to i pokazati.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2.$$

Kako je

$$a_{t-1}^2 = \varepsilon_{t-1}^2 \sigma_{t-1}^2$$

važi

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sigma_{t-1}^2(\alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1).$$

Takođe je i

$$\sigma_{t-1}^2 = \alpha_0 + \sigma_{t-2}^2(\alpha_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1).$$

pa kada ovu jednakost ubacimo u prethodnu, pa nastavimo tako dalje i za $\sigma_{t-2}^2, \sigma_{t-3}^2$, ... dobijamo:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + [\alpha_0 + \sigma_{t-2}^2(\alpha_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1)](\alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1) =$$

$$= \alpha_0 + \alpha_0(\alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1) + \sigma_{t-2}^2(\alpha_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1)(\alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1) =$$

$$= \alpha_0 + \alpha_0(\alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1) + \alpha_0(\alpha_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1)(\alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1) \\ + \sigma_{t-3}^2(\alpha_1 \varepsilon_{t-3}^2 + \beta_1)(\alpha_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1)(\alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1) = \cdots =$$

$$= \alpha_0[1 + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k}(\alpha_1 \varepsilon_{t-i}^2 + \beta_1)]$$

<u>Osobine GARCH(1,1) modela</u>

- Veliki slučajni šokovi a_{t-1}^2, ili veliki uslovni varijabilitet σ_{t-1}^2 dovode do povećanja volatilnosti σ_{t-1}^2
- Repovi GARCH modela su teži od repova normalne raspodele. Koeficijent spljoštenosti je:

$$\frac{E(a_t^4)}{[E(a_t^2)]^2} = \frac{3(1-(\alpha_1+\beta_1)^2)}{1-(\alpha_1+\beta_1)^2 - 2\alpha_1^2}$$

i on je > 3 ako je $1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1^2 > 0$.

Predviđanje pomoću GARCH modela

Formule za predviđanje pomoću GARCH modela dobijaju se na sličan način kao formule za predviđanje pomoću ARMA modela. Posmatramo GARCH(1,1) model i predviđamo h koraka u napred. [8]

- Stvarna vrednost vremenske serije jedan korak unapred data je sa:

$$\sigma_{T+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_T^2 + \beta_1 \sigma_T^2 =$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1(\sigma_T^2 \varepsilon_T^2) + \beta_1 \sigma_T^2 + \alpha_1 \sigma_T^2 - \alpha_1 \sigma_T^2 =$$

$$= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_T^2 + \alpha_1(\varepsilon_T^2 - 1)\sigma_T^2$$

gde su a_T^2 i σ_T^2 poznati u trenutku *T*.

- Predviđena vrednost jedan korak unapred je:

$$\hat{\sigma}_T^2(1) = E(\sigma_{T+1}^2 \,|\, \mathcal{F}_T) = \alpha_0 + \alpha_1 a_T^2 + \beta_1 \sigma_T^2$$

gde je $\mathcal{F}_T$ skup dostupnih informacija do trenutka *t*.

- Stvarna buduća vrednost vremenske serije dva koraka unapred data je sa:

$$\sigma_{T+2}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{T+1}^2 + \beta_1 \sigma_{T+1}^2 =$$

$$= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_{T+1}^2 + \alpha_1(\varepsilon_{T+1}^2 - 1)\sigma_{T+1}^2$$

Uzevši u obzir da je $E(\varepsilon_{T+1}^2 - 1 \,|\, \mathcal{F}_T) = 0$, sledi

- Predviđena vrednost dva koraka unapred:

$$\hat{\sigma}_T^2(2) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\hat{\sigma}_T^2(1)$$

- Predviđena vrednost *h* koraka unapred je:

$$\hat{\sigma}_T^2(h) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\hat{\sigma}_T^2(h-1)$$

gde je $h > 1$. Na osnovu ove formule dobijamo da je formula za predviđanje *h* koraka unapred:

$$\hat{\sigma}_T^2(h) = \frac{\alpha_0(1-(\alpha_1+\beta_1)^{h-1})}{1-\alpha_1-\beta_1} + (\alpha_1+\beta_1)^{h-1}\sigma_T^2(1)$$

pa možemo zaključiti da važi:

$$\hat{\sigma}_T^2(h) \to \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\beta_1}$$

kad $h \to \infty$, uz uslov $\alpha_1 + \beta_1 < 1$. To znači da prognoza buduće volatilnosti više koraka unapred konvergira ka bezuslovnoj varijansi šokova a_t, za dovoljno dug vremenski period, pod uslovom da $var(a_t)$ postoji.

3.3. Modifikacije GARCH modela

<u>IGARCH</u>

Bollerslev je 1986. predstavio integrisani GARCH, odnosno IGARCH model. Ključna karakteristika IGARCH modela je da je uticaj kvadrata prethodnih šokova $\eta_{t-i} = a_{t-i}^2 - \sigma_{t-i}^2$, kad $i > 0$ na a_t^2 stalan. IGARCH(1,1) model se može zapisati na sledeći način ([7] , [8]):

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + (1-\beta_1) a_{t-1}^2$$

gde je $\{\varepsilon_t\}$ definisan kao ranije, i važi $1 > \beta_1 > 0$.

Bezuslovna varijansa za IGARCH(p,q) model ne postoji. Takođe, ako se u GARCH model ubace parametri iz jednačine varijanse, to dovodi do pomeranja procene na IGARCH model. Ovo su 1990. dokazali Lamoureux i Lastrapes. Ovaj rezultat ukazuje na značaj postojanja testa za testiranje stabilnosti parametara u funkciji uslovne varijanse.

<u>GARCH-M</u>

U finansijama, prinos hartija od vrednosti zavisi od volatilnosti. Za modeliranje ove pojave može se koristiti GARCH-M (GARCH *in mean*) model. GARCH-M(1,1) model se definiše na sledeći način ([7] , [8]):

$$r_t = \mu + c\sigma_t^2 + a_t,\ a_t = \sigma_t \varepsilon_t \tag{1}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

gde su μ i c konstante. Novi parametar c meri premiju rizika. Pozitivna vrednost parametra c govori o tome da veći rizik dovodi do većeg rasta nivoa prinosa. Uslov (1) može se zapisati i na sledeće načine:

$r_t = \mu + c\sigma_t + a_t$ ili $r_t = \mu + c\, ln(\sigma_t^2) + a_t$

TGARCH

TGARCH model je model sa pragom (*threshold*). Ovaj model se još naziva i GRJ-GARCH model, zato što su ga uveli Glosten, Jagannathan i Runkle 1993. godine. Ovaj model dozvoljava asimetričnost, odnosno uticaj pozitivnih i negativnih šokova na volatilnost. TGARCH(p,q) model se definiše na sledeći način ([7] , [8]):

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}(\alpha_i + \gamma_i N_{t-i})a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j\sigma_{t-j}^2 \ ,$$

gde je N_{t-i} indikator za negativne a_{t-i}, tj.

$$N_{t-i} = \begin{cases} 1, a_{t-i} < 0 \\ 0, a_{t-i} \geq 0 \end{cases}$$

a α_i, β_i i γ_i nenegativni parametri. Model koristi nulu kao prag da razdvoji uticaje prošlih šokova.

CHARMA

CHARMA predstavlja uslovni heteroskedastični ARMA model (*conditional heteroscedastic* ARMA). CHARMA model je nastao kao modifikacija ARMA modela, radi opisivanja razvoja uslovne varijanse σ_t^2. Ovo je jedini model od navedenih koji nije nastao od ARCH i GARCH modela, ali ga navodimo zbog velike primene. Takođe, postoji velika sličnost sa ARCH modelom. CHARMA model se definiše na sledeći način ([8]):

$$r_t = \mu_t + a_t$$

$$a_t = \delta_{1t}a_{t-1} + \delta_{2t}a_{t-2} + \cdots + \delta_{pt}a_{t-p} + \eta_t$$

gde je

1. $\{\eta_t\}$ Gausov beli šum sa očekivanjem nula i varijansom σ_η^2,
2. $\{\delta_t\} = \{(\delta_{1t}, \ldots, \delta_{pt})'\}$ je niz slučajnih vektora sa očekivanjem nula i određenom nenegativnom kovarijansnom matricom Ω,
3. $\{\delta_t\}$ i $\{\eta_t\}$ su nezavisni.

Za $m > 0$ model se definiše na sledeći način:

$$a_t = a'_{t-1}\delta_t + \eta_t$$

gde je $a_t = (a_{t-1}, \dots, a_{t-p})'$ vektor čiji su elementi kašnjenja za a_t poznati do trenutka $t-1$.

Uslovna varijansa za a_t u CHARMA modelu je data sa:

$$\sigma_t^2 = \sigma_\eta^2 + a'_{t-1}cov(\delta_t)a_{t-1} = \sigma_\eta^2 + (a_{t-1}, \dots, a_{t-p})\Omega(a_{t-1}, \dots, a_{t-p})'$$

Označimo sa ω_{ij} (i,j) −ti element matrice Ω. Primetimo da važi da je $\omega_{ij} = \omega_{ji}$ jer je matrica Ω simetrična. Za $p = 1$, uslovna varijansa je data sa:

$$\sigma_t^2 = \sigma_\eta^2 + \omega_{11}a_{t-1}^2$$

Što je isto kao i kod ARCH(1) modela.

Za $p = 2$, uslovna varijansa je data sa:

$$\sigma_t^2 = \sigma_\eta^2 + \omega_{11}a_{t-1}^2 + 2\omega_{12}a_{t-1}a_{t-2} + \omega_{22}a_{t-2}^2$$

što se znatno razlikuje u odnosu na uslovnu varijansu kod ARCH(2) modela. Isto važi i za $p > 2$.

ARCH i CHARMA modeli imaju istu formula za uslovnu varijansu kada je matrica Ω dijagonalna. Kako je matrica Ω nenegativna kovarijansna matrica, a σ_η^2 je varijansa, pa samim tim i pozitivna, otuda važi da je $\sigma_t^2 \geq \sigma_\eta^2 > 0$, za sve *t*. Dakle, kod CHARMA modela, uslovna varijansa je uvek pozitivna.

EGARCH

Najranija varijanta GARCH modela koji dozvoljava asimetričnost je eksponencijalni GARCH model (EGARCH) koji je uveo Nelson 1991. godine. On je uveo novu funkciju datu sa ([7] , [8]):

$$g(\varepsilon_t) = \theta\varepsilon_t + \gamma[\,|\varepsilon_t| - \mathrm{E}(|\varepsilon_t|)\,],$$

gde su θ i γ realne konstante. Za ε_t i $|\varepsilon_t| - \mathrm{E}(|\varepsilon_t|)$ važi da su i.i.d. sa očekivanjem nula i neprekidnom raspodelom. Odatle sledi da je $E[g(\varepsilon_t)] = 0$. Asimetrija od $g(\varepsilon_t)$ se može lako uočiti ako se $g(\varepsilon_t)$ zapiše na sledeći način:

$$g(\varepsilon_t) = \begin{cases} (\theta+\gamma)\varepsilon_t - \gamma\mathrm{E}(|\varepsilon_t|), \varepsilon_t \geq 0 \\ (\theta-\gamma)\varepsilon_t - \gamma\mathrm{E}(|\varepsilon_t|),\ \varepsilon_t < 0 \end{cases}$$

Napomena: Za standardnu Gausovu slučajnu promenljivu ε_t važi $\mathrm{E}(|\varepsilon_t|) = \sqrt{2/\pi}$.

EGARCH(p,q) model se definiše na sledeći način:

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \frac{1 + \beta_1 L + \cdots + \beta_{q-1} L^{q-1}}{1 - \alpha_1 L - \cdots - \alpha_p L^p} g(\varepsilon_{t-1})$$

gde je

1. α_0 konstanta,
2. L −operator kašnjenja (lag operator), za koji važi: $Lg(\varepsilon_t) = g(\varepsilon_{t-1})$,
3. Polinomi $1 + \beta_1 L + \cdots + \beta_{q-1} L^{q-1}$ i $1 - \alpha_1 L - \cdots - \alpha_p L^p$ nemaju zajedničkih faktora i sve apsolutne vrednosti nula polinoma su veće od 1.

Sada ćemo predstaviti EGARCH(1,1) model:

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$(1 - \alpha L)\, ln(\sigma_t^2) = \begin{cases} \alpha_* + (\gamma + \delta)\varepsilon_{t-1} & , \varepsilon_{t-1} \geq 0 \\ \alpha_* + (\gamma - \delta)(-\varepsilon_{t-1}), & \varepsilon_{t-1} < 0 \end{cases}$$

gde je $\alpha_* = (1 - \alpha)\alpha_0 - \sqrt{2/\pi}\,\gamma$.

Kod EGARCH(1,1) modela, uslovna varijansa se razvija nelinearno u odnosu na a_{t-1}:

$$\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^{2\alpha} exp\,(\alpha_*) = \begin{cases} exp\left[(\theta + \gamma)\frac{a_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}}\right], a_{t-1} \geq 0 \\ exp\left[(\theta - \gamma)\frac{a_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}}\right], a_{t-1} < 0 \end{cases}$$

Koeficijenti $(\theta + \gamma)$ i $(\theta - \gamma)$ ukazuju na različito reagovanje modela na pozitivne i negativne šokove.

SV model

Model stohastičke volatilnosti (stohastic volatility model), SV, je model koji koristi stohastičku jednačinu da bi opisao uslovnu volatilnost. Uveo ga je Taylor, 1989. godine. Slično kao EGARCH model, SV model koristi $ln\,(\sigma_t^2)$ umesto σ_t^2, kako bi osigurao pozitivnost varijanse. SV model je dat sa ([7] , [8]):

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\left(1 - \alpha_1 B - \cdots - \alpha_p B^p\right) ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + v_t$$

gde su

1. ε_t su i.i.d. sa $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelom,
2. v_t su i.i.d. sa $\mathcal{N}(0, \sigma_\eta^2)$ raspodelom,
3. $\{\varepsilon_t\}$ i $\{\eta_t\}$ su nezavisne,
4. α_0 je konstanta,
5. Sve nule polinoma $1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i B^i$ su po modulu veće od 1.

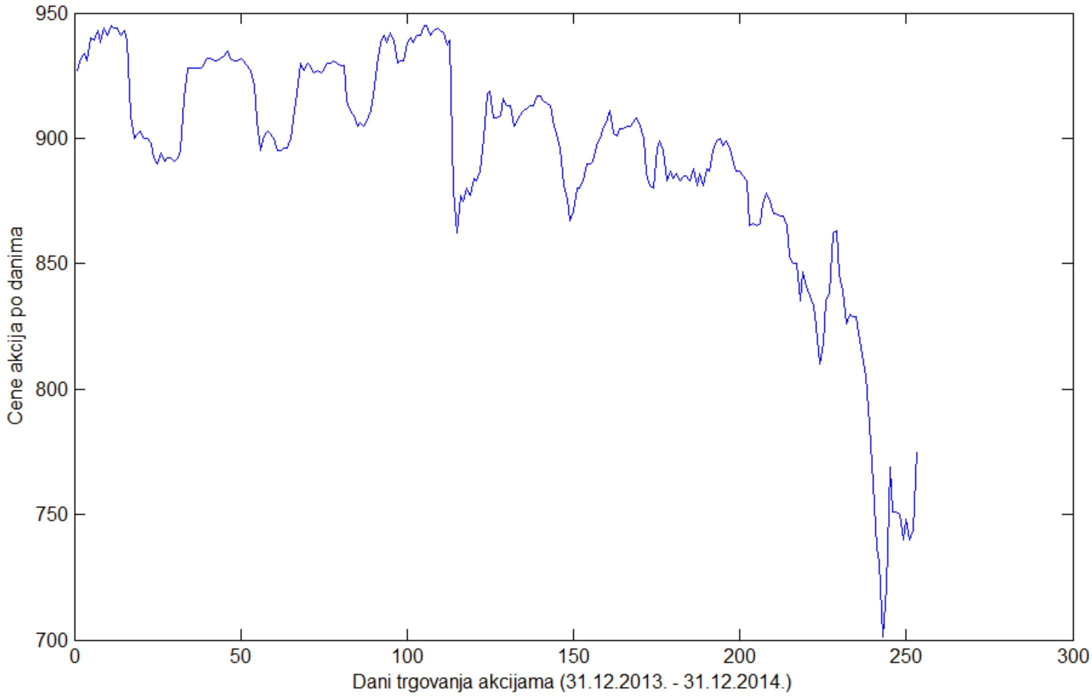
4. Modeliranje GARCH(1,1) modela u Matlab-u

Jedan od programskih paketa koji je veoma pogodan za simulaciju GARCH modela jeste Matlab, zbog niza ugrađenih funkcija koje poseduje i koje su razvijene u cilju analize vremenskih serija. Paketi alata koje ćemo koristiti su sledeći: *Financial Toolbox*, *Financial Time Series Toolbox* i *GARCH Toolbox*. ([14])

<u>Analiza akcija NIS-a</u>

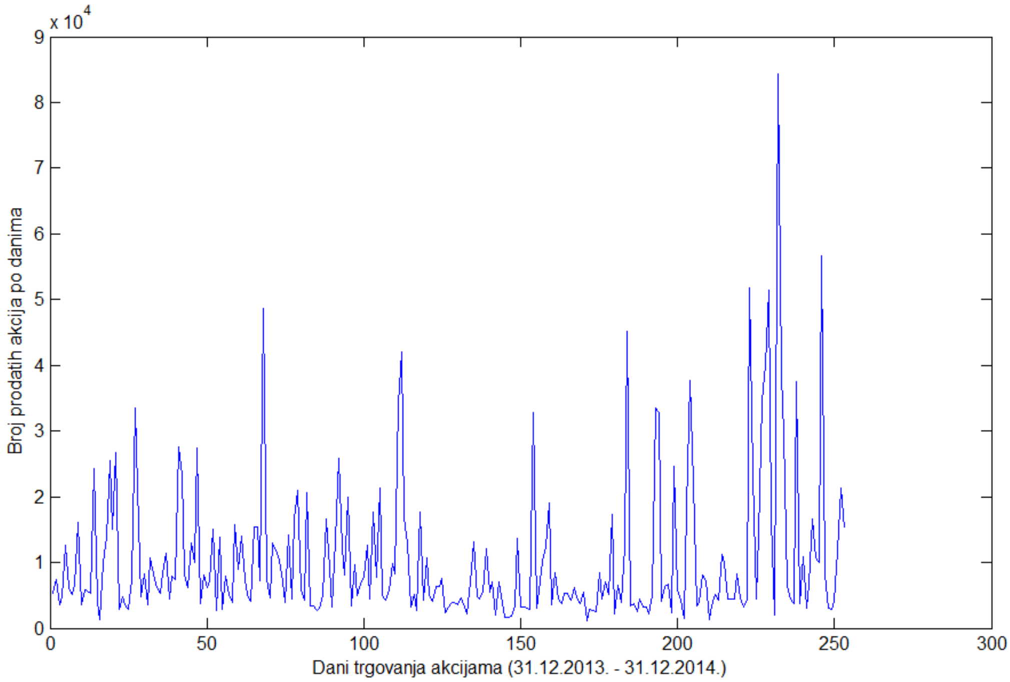
Modeliranje GARCH(1,1) modela ćemo sprovesti na osnovu realnih podataka o kretanju cena akcija preduzeća „NIS - Naftna Industrija Srbije“ ([13]). Posmatraćemo perod od 31.12.2013. do 31.1.2.2014. Taj period obuhvata 253 dana trgovanja (vikendi su izuzeti).

Za početak ćemo predstaviti grafički kretanje cena akcija u ovom periodu.



Grafik 4.0.1. Cene akcija preduzeća „NIS“

Na sledećem grafiku prikazaćemo obim trgovanja ovim hartijama.

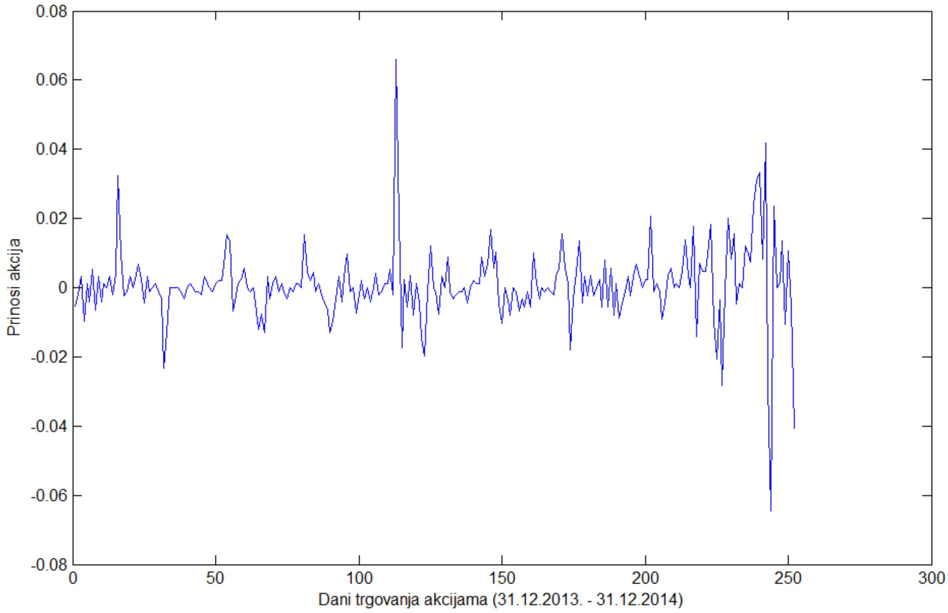


Grafik 4.0.2. Broj kupljenih akcija

GARCH model koristi prinose umesto cena, i na taj način se niz podataka transformiše u stacionarnu vremensku seriju. Zbog toga ćemo sada od vremenske serije koja prikazuje cene akcija napraviti vremensku seriju prinosa akcija. U Matlab-u se to može uraditi pomoću ugrađene funkcije *price2ret.* Ova funkcija pravi logaritme prinosa akcija na sledeći način:

$$r_t = ln(P_t) - ln(P_{t-1}) = ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

Razlog zašto se koriste logaritamski prinosi, a ne relativni, jeste njihova osobina aditivnosti.



Grafik 4.0.3. Prinosi akcija

Na osnovu grafika vidimo da je vremenska serija prinosa akcija stacionarna oko nule. Sada ćemo izračunati još neke osobine ove vremenske serije, a to su:

- Očekivanje (dobija se na osnovu ugrađene funkcije *mean*). Rezultat koji smo dobili je:

-7.1068e-004

- Standardna devijacija (dobija se na osnovu ugrađene funkcije *std*). Rezultat koji smo dobili je:

0.0107

- Asimetrija (dobija se na osnovu ugrađene funkcije *skewness*). Rezultat koji smo dobili je:

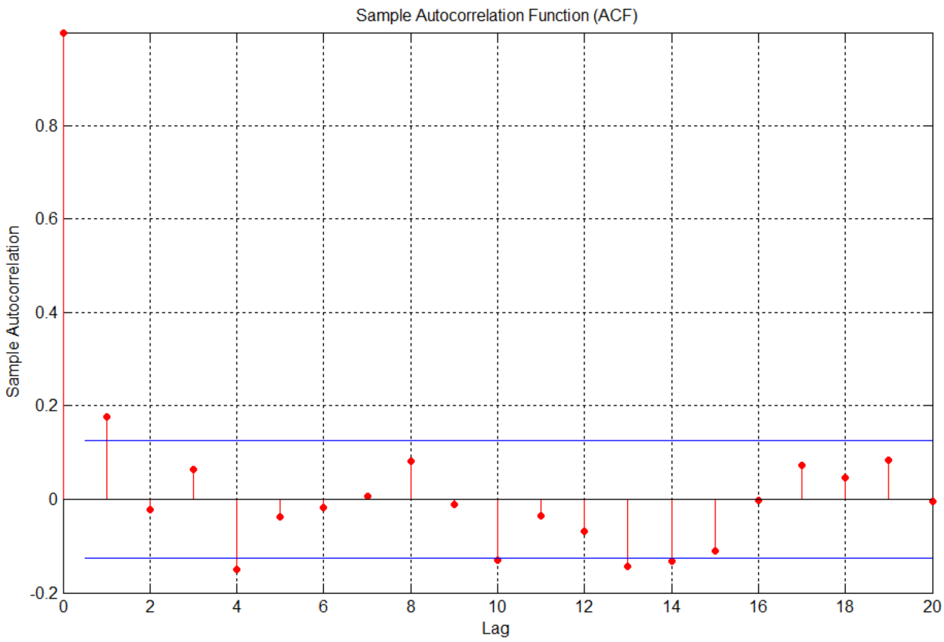
-0.2063

- Spljoštenost (dobija se na osnovu ugrađene funkcije *kurtosis*). Rezultat koji smo dobili je:

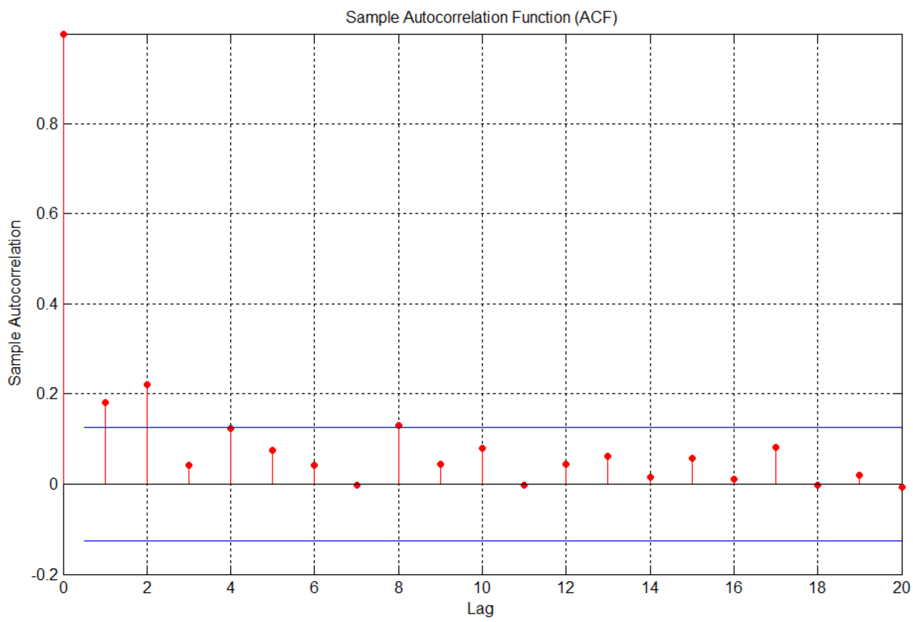
15.0075

Koeficijent asimetrije je < 0, pa zaključujemo da je raspodela prinosa asimetrična ulevo. Takođe, kako je koeficijent spljoštenosti > 3, zaključujemo da su repovi raspodele ove serije „deblji“ od repova normalne raspodele, odnosno raspodela je izdužena u odnosu na normalnu raspodelu(leptokurtična).

Sada proveravamo da li postoji autokorelacija među prinosima. To radimo pomoću *autocorr* funkcije u Matlabu. U nastavku su dati grafik autokorelacione funkcije serije prinosa akcija i grafik autokorelacione funkcije kvadrata serije prinosa akcija prinosa.



Grafik 4.0.4. Autokorelaciona funkcija prinosa akcija



Grafik 4.0.5. Autokorelaciona funkcija kvadrata prinosa akcija

Sa prvog grafika vidimo da su koeficijenti autokorelacije za prinose akcija približno jednaki nuli, tj. da je korelacija između prinosa izuzetno mala, ili uopšte ne postoji. Međutim, na drugoj slici je situacija drugačija, odnosno, kada posmatramo kvadrate prinosa može se uočiti korelacija, odnosno postojanje heteroskedastičnosti.

Ovo se može proveriti i na drugačiji način, korišćenjem Ljung-Boksovog testa. Kod njega nulta hipoteza glasi da nema autokorelacije, a alternativna hipoteza je da autokorelacija postoji. Koristi se sledeća test statistika:

$$Q = N(N+2)\sum_{k=1}^{20}\frac{r_k^2}{(N-k)}$$

koja ima raspodelu:

$$Q \sim \chi^2_{1-\alpha,20}$$

a hipoteze su:

$$H_0: Q = 0,\ \ H_1: Q > 0$$

Za ovaj test postoji ugrađena funkcija u Matlab-u pod nazivom *lbqtest,* i nju primenjujemo na kvadrate prinosa. Dobijamo vrednost jedan (1), što znači da se nulta hipoteza odbacuje, odnosno zaključujemo da postoji heteroskedastičnost.

Kao što se vidi u *Tabeli 4.0.1.* najniži logaritamski prinos pojavio se 114-og dana trgovanja i iznosio je -0.066, što se može objasniti padom cene a takođe i padom obima trgovanja.

Dan	Datum	Cena	Obim	Prinos
113	17.6.2014	939	16873	0.0021
114	18.6.2014	879	12959	-0.0660
115	19.6.2014	862	3235	-0.0195

Tabela 4.0.1. Najniži logaritamski prinos

Ipak, ono što nas više zanima jeste najviši logaritamski prinos, koji se pojavio 245-og dana trgovanja i iznosio je 0.0645.

Dan	Datum	Cena	Obim	Prinos
244	18.12.2014	721	10746	0.0281
245	19.12.2014	769	9930	0.0645
246	22.12.2014	751	56603	-0.0237

Tabela 4.0.2. Najviši logaritamski prinos

Kvadrirane vrednosti niza $\{a_t, t = 1,2, \dots\}$ date sa:

$$a_t^2 = \sigma_t^2 \varepsilon_t^2 = (y_t - \mu_t)^2$$

u literature se nazivaju **inovacija**, i mogu se tumačiti kao standarne devijacije prinosa.

U Matlab-u vrednosti inovacija dobijamo kao kvadrate logaritamskih prinosa, uz pretpostavku da je srednji logaritamski prinos jednak nuli. Naravno, postoje dve mogućnosti gde će inovacija biti najveća. To su najviši i najniži prinos. Kako se kvadriranjem gubi negativan znak, najveća je inovacija kod onog prinosa koji je veći po apsolutnoj vrednosti. U ovom slučaju, to je najniži prinos.

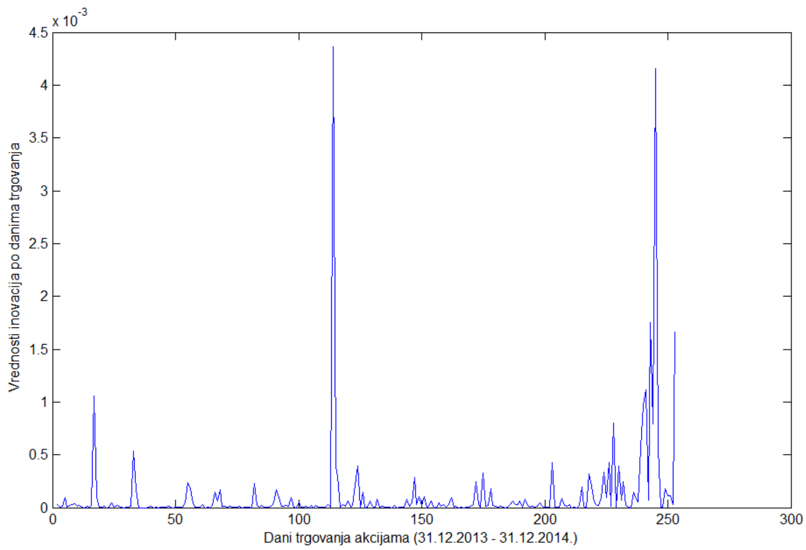
Dan	Datum	Cena	Obim	Prinos	Inovacija
113	17.6.2014	939	16873	0.0021	0.0000
114	18.6.2014	879	12959	-0.0660	0.0044
115	19.6.2014	862	3235	-0.0195	0.0004

Tabela 4.0.3. Vrednost inovacije za najniži prinos

Dan	Datum	Cena	Obim	Prinos	Inovacija
244	18.12.2014	721	10746	0.0281	0.0008
245	19.12.2014	769	9930	0.0645	0.0042
246	22.12.2014	751	56603	-0.0237	0.0006

Tabela 4.0.4. Vrednost inovacije za najviši prinos

Dakle, vrednost inovacije je najviša za 114-ti dan trgovanja i iznosi 0.044. Na grafiku 4.0.6. su prikazane vrednosti svih inovacija.



Grafik 4.0.6. Vrednosti inovacija

Dalje ćemo izračunati parameter GARCH(1,1) modela pomoću nekoliko ugrađenih funkcija, ali kako ove funkcije zahtevaju da prinosi dolaze iz normalne raspodele, prvo ćemo to proveriti. Proveru vršimo pomoću Jarque-Bera testa normalnosti, čija je test statstika:

$$JB = \frac{T}{6}(S^2 + \frac{(K-3)^2}{4})$$

koja ima raspodelu:

$$JB \sim \chi^2_{1-\alpha,2}$$

a hipoteze su:

$$H_0: JB = 0, H_1: JB > 0$$

U Matlabu se ovo proverava pomoú ugrađene funkcije *jbtest,* gde su ulazni parametri prinosi, a postoje dve izlazne vrednosti, npr:

[h,p]=jbtest(prinosi)

Ukoliko je $h = 1$ i $p < 0.05$ nulta hipoteza se odbacuje, a u suprotnom se prihvata.

U našem slučaju dobijamo: $h = 1$ i $p = 1.0000e - 003 < 0.05$, pa zaključujemo da prinosi dolaze iz normalne raspodele. Sada možemo da ocenimo parametre GARCH(1,1) modela. Koristimo komande: *garchset*, *garchfit* i *garchdisp*. Funkcija verodostojnosti je već ugrađena.

Na osnovu datih komandi dobijamo ocenjene vrednosti parametara:

Parametar	**Procenjena vrednost**	**Standardna greška**	**t-vrednost**
μ	-0.00063101	0.00084529	-0.7465
α_0	3.9577e-005	9.1038e-006	4.3473
α_1	0.34733	0.1475	2.3547
β_1	0.34443	0.14134	2.4369

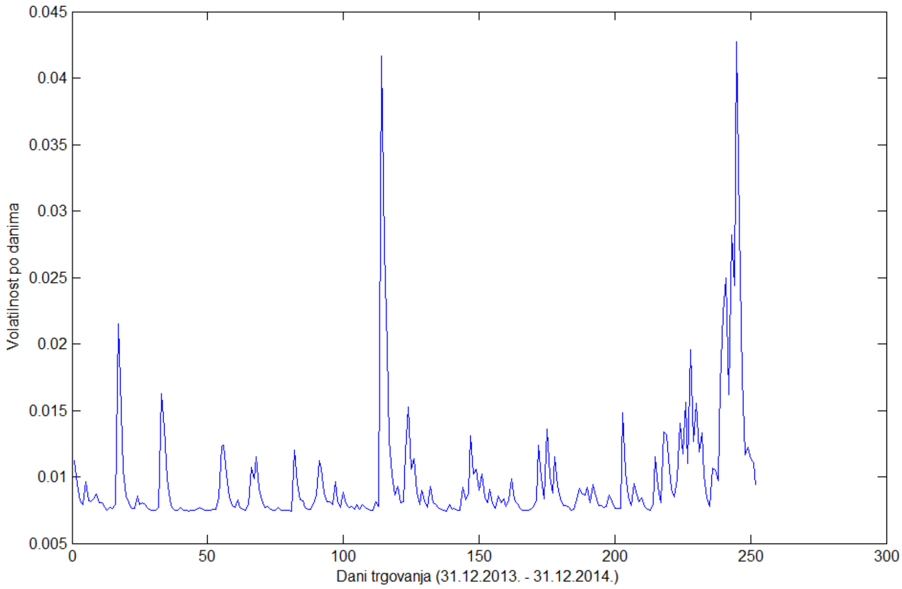
Tabela 4.0.5. Ocena parametara

U poslednjoj koloni smo dobili t – statistiku. T – statistika nam pretstavlja merilo za prikazivanje odstupanja procenjene vrednosti parametra od stvarne vrednosti.

Sada još preostaje da izračunamo volatilnost. Pošetna volatilnost dobija se na osnovu formule:

$$\sqrt{\frac{Kappa}{1 - Alpha - Beta}}$$

i iznosi 0.0113. Za računanje ostalih volatilnosti neophodno je napisati program, a pseudokod se može pronaći u Prilogu broj 2. Na grafiku 4.0.7. prikazane su sve dobijene volatilnosti.



Grafik 4.0.7. Volatilnost po danima

Najviša volatilnost pojavila se dan nakon „šoka“, odnosno velike vrednosti inovacije. To je dan nakon što je prinos bio najviši i volatilnost je iznosila je 0.0427. Ovo je bilo i prirodno jer volatilnost za određeni dan računamo na osnovu informacija iz prošlosti.

Dan	Datum	Cena	Obim	Prinos	Inovacija	Volatilnost
245	19.12.2014	769	9930	0.0645	0.0042	0.0244
246	22.12.2014	751	56603	-0.0237	0.0006	0.0427

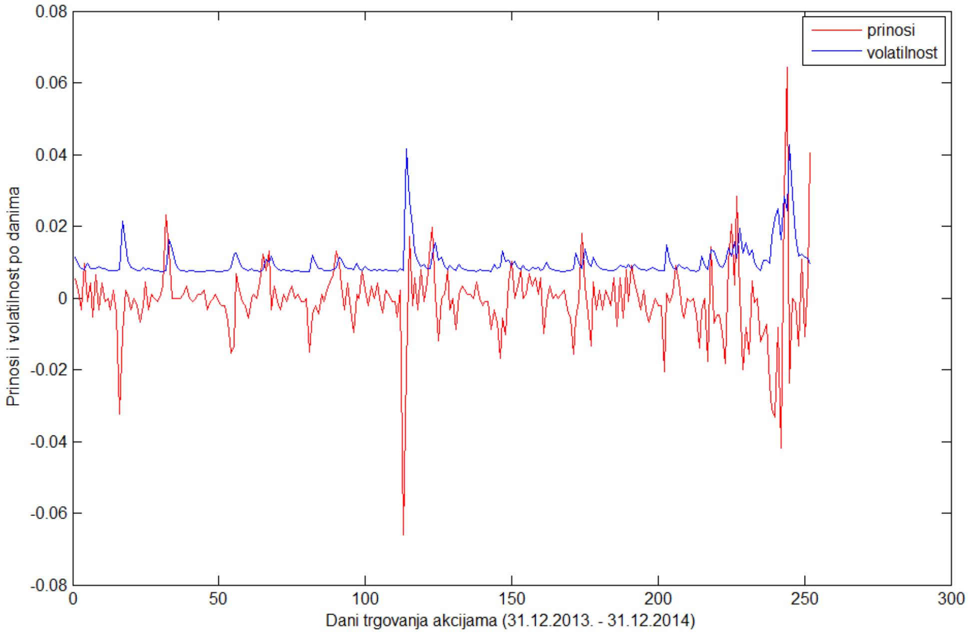
Tabela 4.0.5. Volatilnost nakon najvišeg prinosa

Veliku vrednost za volatilnost takođe dobijamo i dan nakon što je prinos bio najniži, odnosno posle velikog „šoka“.

Dan	Datum	Cena	Obim	Prinos	Inovacija	Volatilnost
114	18.6.2014	879	12959	-0.0660	0.0044	0.0078
115	19.6.2014	862	3235	-0.0195	0.0004	0.0416

Tabela 4.0.6. Volatilnost nakon najnižeg prinosa

Sada ćemo uporediti kretanje prinosa i volatilnosti.



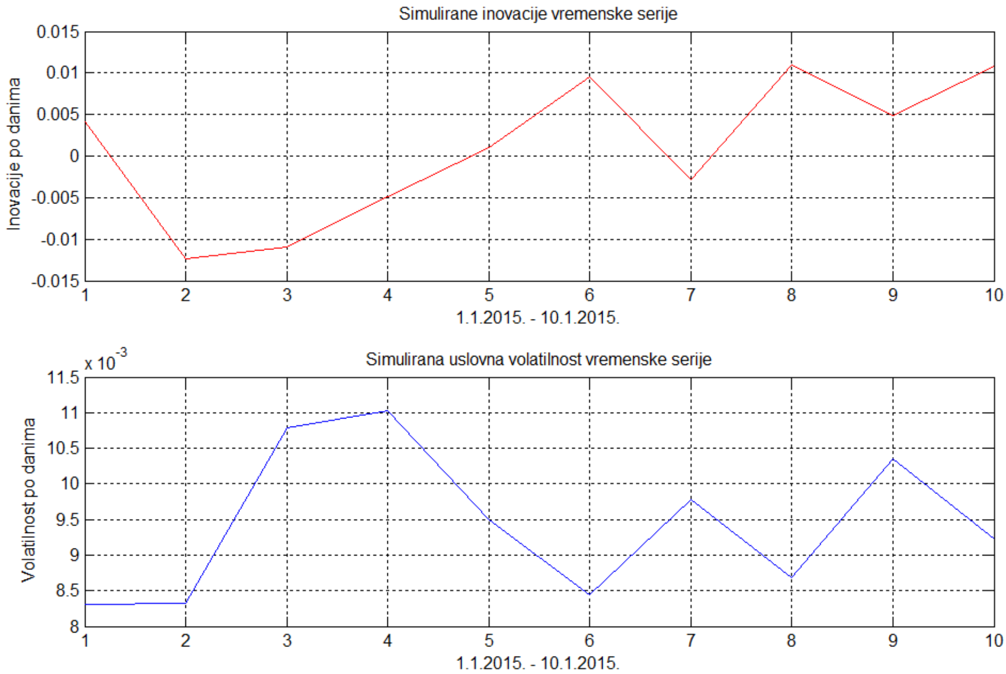
Grafik 4.0.8. Prinosi i volatilnost

Vidimo da se krive dobro slažu, odnosno da je kretanje ova dva parametra usklađeno. Osim toga, vidimo i da veliki skokovi prinosa dovode do velikog skoka volatilnosti.

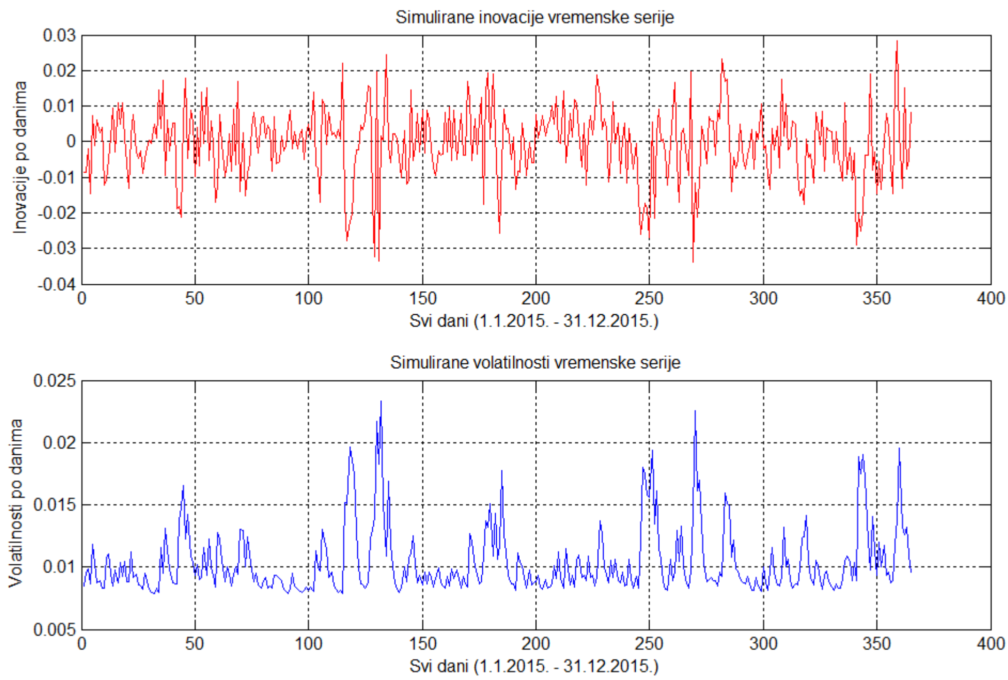
Sada imamo sve potrebne podatke da kreiramo GARCH(1,1) model:

$$r_t = -0.00063101 + a_t$$
$$\sigma_t^2 = 3.9577\mathrm{e} - 005 + 0.34733 a_{t-1}^2 + 0.34443 \sigma_{t-1}^2$$

Ovaj model koristićemo za predviđanje budućih vrednosti inovacija i volatilnosti. To je izuzetno važno znati prilikom donošenja poslovnih odluka. U Matlab-u koristimo funkciju *ugarchsim.* Dobijeni rezultati prikazani su u Prilogu broj 3. Predvideli smo 365 inovacija i volatilnost, odnosno podatke za celu 2015-tu godinu. Na grafiku 4.0.9. prikazane su buduće vrednosti inovacija i volatilnosti za narednih 10 dana, a na grafiku 4.0.10. za svih 365 dana.



Grafik 4.0.9. Buduće vrednosti inovacija i volatilnosti za 10 dana



Grafik 4.0.10. Buduće vrednosti inovacija i volatilnosti za 365 dana

Zaključak

Kako se u svetu sve više trguje različitim hartijama od vrednosti, neophodno je bilo utvrditi meru rizika trgovanja, koja opisuje kretanja finansijskog tržišta. Mnogi konvencionalni metodi za merenje rizika se zasnivaju na merenju varijanse (volatilnosti) hartija od vrednosti. U teoriji finansijskih tržišta, glavna pretpostavka je da profit prati model stacionarne vremenske serije sa stohastičkom strukturom volatilnosti. Prisustvo stohastičke volatilnosti podrazumeva da profiti nisu nužno nezavisni tokom vremena.

1982. godine, Engle je predložio proces volatilnosti sa promenljivom uslovnom varijansom, odnosno AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity (ARCH) proces. Empirijski podaci su pokazali da red ARCH modela mora unapred biti zadat kako bi se ispratila dinamika volatilnosti. Takođe, visok red ovog modela zahteva mnogo proračuna, jer svi koeficijenti moraju biti utvrđeni. Četiri godine kasnije, 1986, Bolerslev je predložio generalizovani ARCH (GARCH) model kao prirodno rešenje za ARCH modele visokog reda. Ovaj model značajno smanjuje broj parametara koji se moraju odrediti, i na taj način smanjuje i broj izračunavanja.

U ovom radu je prikazan samo mali deo teorije ARCH i GARCH modela, vrlo moćnih aparata u savremenoj ekonometrijskoj analizi. Ono što pokazuje njihovu atraktivnost i efikasnost jeste postojanje raznih modifikacija ovih modela. To samo pokazuje koliko se ovi modeli izučavaju i poboljšavaju, a sa svakom novom korekcijom oni daju sve bolje rezultate i prevazilaze određene nedostatke.

Prilog 1

U prilogu broj 1 prikazani su korišćeni podaci o kretanju cena akcija i obima trgovanja, kao i vrednosti koje su izračunate u radu, a to su vrednosti prinosa, inovacija i volatilnosti. Podaci o cenama i obimu trgovanja su javni i nalaze se na web sajtu Beogradske berze ([13]).

Dan	Datum	Cena	Obim	Prinos	Inovacija	Volatilnost
1	31.12.2013	927	5351	/	/	/
2	3.1.2014	932	7397	0.0054	0.0000	0.0113
3	6.1.2014	934	3588	0.0021	0.0000	0.0094
4	8.1.2014	931	4826	-0.0032	0.0000	0.0082
5	9.1.2014	940	12665	0.0096	0.0001	0.0079
6	10.1.2014	939	6121	-0.0011	0.0000	0.0097
7	13.1.2014	943	5071	0.0043	0.0000	0.0082
8	14.1.2014	938	6542	-0.0053	0.0000	0.0081
9	15.1.2014	944	16123	0.0064	0.0000	0.0083
10	16.1.2014	941	3646	-0.0032	0.0000	0.0087
11	17.1.2014	945	5801	0.0042	0.0000	0.0081
12	20.1.2014	944	5627	-0.0011	0.0000	0.0081
13	21.1.2014	944	5265	0	0	0.0077
14	22.1.2014	941	24212	-0.0032	0.0000	0.0075
15	23.1.2014	943	4111	0.0021	0.0000	0.0077
16	24.1.2014	939	1362	-0.0043	0.0000	0.0076
17	27.1.2014	909	9954	-0.0325	0.0011	0.0079
18	28.1.2014	900	13809	-0.0100	0.0001	0.0215
19	29.1.2014	902	25490	0.0022	0.0000	0.0150
20	30.1.2014	903	15038	0.0011	0.0000	0.0105
21	31.1.2014	900	26690	-0.0033	0.0000	0.0086
22	3.2.2014	900	2841	0	0	0.0081
23	4.2.2014	898	4865	-0.0022	0.0000	0.0076
24	5.2.2014	892	3529	-0.0067	0.0000	0.0076
25	6.2.2014	890	2841	-0.0022	0.0000	0.0086
26	7.2.2014	894	7388	0.0045	0.0000	0.0079
27	10.2.2014	891	33556	-0.0034	0.0000	0.0081
28	11.2.2014	892	21354	0.0011	0.0000	0.0079
29	12.2.2014	892	4723	0	0	0.0076
30	13.2.2014	891	8326	-0.0011	0.0000	0.0075
31	14.2.2014	892	3575	0.0011	0.0000	0.0075
32	18.2.2014	895	10767	0.0034	0.0000	0.0075
33	19.2.2014	916	8192	0.0232	0.0005	0.0077
34	20.2.2014	928	6260	0.0130	0.0002	0.0162
35	21.2.2014	928	5350	0	0	0.0137

36	24.2.2014	928	8411	0	0	0.0099
37	25.2.2014	928	11468	0	0	0.0083
38	26.2.2014	928	4454	0	0	0.0077
39	27.2.2014	929	7978	0.0011	0.0000	0.0075
40	28.2.2014	932	7366	0.0032	0.0000	0.0075
41	3.3.2014	932	27649	0	0	0.0077
42	4.3.2014	931	23371	-0.0011	0.0000	0.0075
43	5.3.2014	931	8224	0	0	0.0075
44	6.3.2014	932	6248	0.0011	0.0000	0.0074
45	7.3.2014	933	12979	0.0011	0.0000	0.0075
46	10.3.2014	935	9975	0.0021	0.0000	0.0075
47	11.3.2014	932	27385	-0.0032	0.0000	0.0076
48	12.3.2014	931	3711	-0.0011	0.0000	0.0077
49	13.3.2014	931	8113	0	0	0.0075
50	14.3.2014	932	6257	0.0011	0.0000	0.0075
51	17.3.2014	931	7193	-0.0011	0.0000	0.0075
52	18.3.2014	929	14999	-0.0022	0.0000	0.0075
53	19.3.2014	927	2721	-0.0022	0.0000	0.0076
54	20.3.2014	921	13898	-0.0065	0.0000	0.0076
55	21.3.2014	907	2915	-0.0153	0.0002	0.0085
56	24.3.2014	895	7973	-0.0133	0.0002	0.0123
57	25.3.2014	901	5210	0.0067	0.0000	0.0124
58	26.3.2014	903	3946	0.0022	0.0000	0.0102
59	27.3.2014	902	15702	-0.0011	0.0000	0.0085
60	28.3.2014	900	8895	-0.0022	0.0000	0.0078
61	31.3.2014	895	14012	-0.0056	0.0000	0.0077
62	1.4.2014	895	7330	0	0	0.0083
63	2.4.2014	896	5067	0.0011	0.0000	0.0077
64	3.4.2014	896	4037	0	0	0.0075
65	4.4.2014	900	15413	0.0045	0.0000	0.0075
66	7.4.2014	911	15365	0.0121	0.0001	0.0079
67	8.4.2014	918	7138	0.0077	0.0001	0.0107
68	9.4.2014	930	48709	0.0130	0.0002	0.0098
69	10.4.2014	927	7325	-0.0032	0.0000	0.0115
70	11.4.2014	930	4691	0.0032	0.0000	0.0092
71	14.4.2014	929	12935	-0.0011	0.0000	0.0083
72	15.4.2014	926	11983	-0.0032	0.0000	0.0077
73	16.4.2014	927	10390	0.0011	0.0000	0.0078
74	17.4.2014	926	7036	-0.0011	0.0000	0.0076
75	22.4.2014	927	3994	0.0011	0.0000	0.0075
76	23.4.2014	930	14134	0.0032	0.0000	0.0075
77	24.4.2014	930	4526	0	0	0.0077
78	25.4.2014	931	16577	0.0011	0.0000	0.0075
79	28.4.2014	930	20890	-0.0011	0.0000	0.0075
80	29.4.2014	929	5808	-0.0011	0.0000	0.0075

81	30.4.2014	929	4249	0	0	0.0075
82	5.5.2014	915	20573	-0.0152	0.0002	0.0074
83	6.5.2014	911	3406	-0.0044	0.0000	0.0120
84	7.5.2014	909	3339	-0.0022	0.0000	0.0095
85	8.5.2014	905	2707	-0.0044	0.0000	0.0083
86	9.5.2014	906	3020	0.0011	0.0000	0.0082
87	12.5.2014	905	4876	-0.0011	0.0000	0.0077
88	13.5.2014	907	16638	0.0022	0.0000	0.0075
89	14.5.2014	911	9097	0.0044	0.0000	0.0076
90	15.5.2014	917	3139	0.0066	0.0000	0.0080
91	16.5.2014	929	13390	0.0130	0.0002	0.0086
92	19.5.2014	938	25890	0.0096	0.0001	0.0112
93	20.5.2014	941	12184	0.0032	0.0000	0.0107
94	21.5.2014	938	8044	-0.0032	0.0000	0.0088
95	22.5.2014	942	19985	0.0043	0.0000	0.0081
96	23.5.2014	939	3413	-0.0032	0.0000	0.0081
97	26.5.2014	930	9747	-0.0096	0.0001	0.0079
98	27.5.2014	931	4940	0.0011	0.0000	0.0096
99	28.5.2014	931	6638	0	0	0.0082
100	29.5.2014	938	7991	0.0075	0.0001	0.0077
101	30.5.2014	940	12575	0.0021	0.0000	0.0088
102	2.6.2014	938	4385	-0.0021	0.0000	0.0080
103	3.6.2014	941	17633	0.0032	0.0000	0.0077
104	4.6.2014	941	7785	0	0	0.0078
105	5.6.2014	945	21366	0.0042	0.0000	0.0075
106	6.6.2014	945	4898	0	0	0.0079
107	9.6.2014	941	4227	-0.0042	0.0000	0.0076
108	10.6.2014	943	5841	0.0021	0.0000	0.0079
109	11.6.2014	944	9814	0.0011	0.0000	0.0077
110	12.6.2014	943	8351	-0.0011	0.0000	0.0075
111	13.6.2014	942	34151	-0.0011	0.0000	0.0075
112	16.6.2014	937	41966	-0.0053	0.0000	0.0075
113	17.6.2014	939	16873	0.0021	0.0000	0.0081
114	18.6.2014	879	12959	-0.0660	0.0044	0.0078
115	19.6.2014	862	3235	-0.0195	0.0004	0.0416
116	20.6.2014	877	5090	0.0173	0.0003	0.0272
117	23.6.2014	875	2697	-0.0023	0.0000	0.0197
118	24.6.2014	880	17662	0.0057	0.0000	0.0128
119	25.6.2014	877	4243	-0.0034	0.0000	0.0101
120	26.6.2014	884	10722	0.0080	0.0001	0.0086
121	27.6.2014	883	4973	-0.0011	0.0000	0.0093
122	30.6.2014	887	4078	0.0045	0.0000	0.0081
123	1.7.2014	900	6416	0.0145	0.0002	0.0081
124	2.7.2014	918	6402	0.0198	0.0004	0.0118
125	3.7.2014	919	7494	0.0011	0.0000	0.0153

126	4.7.2014	908	2315	-0.0120	0.0001	0.0106
127	7.7.2014	908	3296	0	0	0.0114
128	8.7.2014	909	3972	0.0011	0.0000	0.0089
129	9.7.2014	916	3855	0.0077	0.0001	0.0079
130	10.7.2014	913	3503	-0.0033	0.0000	0.0090
131	11.7.2014	913	4551	0	0	0.0082
132	14.7.2014	905	3208	-0.0088	0.0001	0.0077
133	15.7.2014	906	2111	0.0011	0.0000	0.0093
134	16.7.2014	909	6983	0.0033	0.0000	0.0081
135	17.7.2014	911	13175	0.0022	0.0000	0.0079
136	18.7.2014	912	4840	0.0011	0.0000	0.0077
137	21.7.2014	913	4370	0.0011	0.0000	0.0075
138	22.7.2014	913	5542	0	0	0.0075
139	23.7.2014	917	12050	0.0044	0.0000	0.0074
140	24.7.2014	917	5522	0	0	0.0079
141	25.7.2014	915	7018	-0.0022	0.0000	0.0076
142	28.7.2014	914	2035	-0.0011	0.0000	0.0076
143	29.7.2014	913	7029	-0.0011	0.0000	0.0075
144	30.7.2014	905	4003	-0.0088	0.0001	0.0075
145	31.7.2014	902	1679	-0.0033	0.0000	0.0092
146	1.8.2014	896	1580	-0.0067	0.0000	0.0083
147	4.8.2014	881	1748	-0.0169	0.0003	0.0088
148	5.8.2014	876	3416	-0.0057	0.0000	0.0131
149	6.8.2014	867	13673	-0.0103	0.0001	0.0102
150	7.8.2014	871	3246	0.0046	0.0000	0.0106
151	8.8.2014	880	3161	0.0103	0.0001	0.0090
152	11.8.2014	880	3025	0	0	0.0102
153	12.8.2014	883	2922	0.0034	0.0000	0.0084
154	13.8.2014	890	32766	0.0079	0.0001	0.0080
155	14.8.2014	890	2990	0	0	0.0091
156	15.8.2014	891	5716	0.0011	0.0000	0.0080
157	18.8.2014	897	10107	0.0067	0.0000	0.0076
158	19.8.2014	900	12456	0.0033	0.0000	0.0086
159	20.8.2014	905	19094	0.0055	0.0000	0.0081
160	21.8.2014	906	3500	0.0011	0.0000	0.0084
161	22.8.2014	911	8401	0.0055	0.0000	0.0078
162	25.8.2014	902	4435	-0.0099	0.0001	0.0083
163	26.8.2014	901	3805	-0.0011	0.0000	0.0099
164	27.8.2014	904	5376	0.0033	0.0000	0.0083
165	28.8.2014	904	5361	0	0	0.0080
166	29.8.2014	905	4299	0.0011	0.0000	0.0076
167	1.9.2014	905	6248	0	0	0.0075
168	2.9.2014	906	4871	0.0011	0.0000	0.0074
169	3.9.2014	908	3829	0.0022	0.0000	0.0075
170	4.9.2014	905	5482	-0.0033	0.0000	0.0076

171	5.9.2014	900	1177	-0.0055	0.0000	0.0077
172	8.9.2014	886	2816	-0.0157	0.0002	0.0083
173	9.9.2014	881	2725	-0.0057	0.0000	0.0124
174	10.9.2014	880	2589	-0.0011	0.0000	0.0099
175	11.9.2014	896	8410	0.0180	0.0003	0.0083
176	12.9.2014	899	4359	0.0033	0.0000	0.0136
177	15.9.2014	895	7076	-0.0045	0.0000	0.0100
178	16.9.2014	883	5218	-0.0135	0.0002	0.0088
179	17.9.2014	887	17238	0.0045	0.0000	0.0115
180	18.9.2014	884	2212	-0.0034	0.0000	0.0094
181	19.9.2014	886	6584	0.0023	0.0000	0.0084
182	22.9.2014	883	3969	-0.0034	0.0000	0.0079
183	23.9.2014	885	12342	0.0023	0.0000	0.0078
184	24.9.2014	885	45225	0	0	0.0077
185	25.9.2014	883	3423	-0.0023	0.0000	0.0075
186	26.9.2014	888	3693	0.0056	0.0000	0.0076
187	29.9.2014	881	2444	-0.0079	0.0001	0.0083
188	30.9.2014	886	4368	0.0057	0.0000	0.0091
189	1.10.2014	881	3220	-0.0057	0.0000	0.0087
190	2.10.2014	888	3243	0.0079	0.0001	0.0086
191	3.10.2014	887	2181	-0.0011	0.0000	0.0092
192	6.10.2014	895	4966	0.0090	0.0001	0.0081
193	7.10.2014	899	33533	0.0045	0.0000	0.0094
194	8.10.2014	900	32823	0.0011	0.0000	0.0086
195	9.10.2014	897	4068	-0.0033	0.0000	0.0078
196	10.10.2014	899	6272	0.0022	0.0000	0.0078
197	13.10.2014	896	6616	-0.0033	0.0000	0.0077
198	14.10.2014	890	2327	-0.0067	0.0000	0.0078
199	15.10.2014	887	24588	-0.0034	0.0000	0.0086
200	16.10.2014	887	5797	0	0	0.0081
201	17.10.2014	885	4247	-0.0023	0.0000	0.0076
202	20.10.2014	883	1476	-0.0023	0.0000	0.0076
203	21.10.2014	865	18308	-0.0206	0.0004	0.0076
204	22.10.2014	866	37713	0.0012	0.0000	0.0148
205	23.10.2014	865	22242	-0.0012	0.0000	0.0104
206	24.10.2014	866	3462	0.0012	0.0000	0.0085
207	27.10.2014	874	3983	0.0092	0.0001	0.0078
208	28.10.2014	878	8166	0.0046	0.0000	0.0095
209	29.10.2014	875	7227	-0.0034	0.0000	0.0086
210	30.10.2014	870	1276	-0.0057	0.0000	0.0081
211	31.10.2014	870	3436	0	0	0.0084
212	3.11.2014	869	5114	-0.0012	0.0000	0.0078
213	4.11.2014	869	4227	0	0	0.0076
214	5.11.2014	865	11277	-0.0046	0.0000	0.0075
215	6.11.2014	853	9973	-0.0140	0.0002	0.0080

216	7.11.2014	850	4400	-0.0035	0.0000	0.0115
217	10.11.2014	850	4391	0	0	0.0092
218	12.11.2014	835	4396	-0.0178	0.0003	0.0080
219	13.11.2014	847	8241	0.0143	0.0002	0.0134
220	14.11.2014	841	4565	-0.0071	0.0001	0.0132
221	17.11.2014	837	3159	-0.0048	0.0000	0.0106
222	18.11.2014	833	4194	-0.0048	0.0000	0.0091
223	19.11.2014	825	51807	-0.0097	0.0001	0.0085
224	20.11.2014	810	23392	-0.0183	0.0003	0.0098
225	21.11.2014	818	4473	0.0098	0.0001	0.0141
226	24.11.2014	835	14256	0.0206	0.0004	0.0117
227	25.11.2014	838	34568	0.0036	0.0000	0.0156
228	26.11.2014	862	40133	0.0282	0.0008	0.0110
229	27.11.2014	863	51355	0.0012	0.0000	0.0196
230	28.11.2014	846	16630	-0.0199	0.0004	0.0127
231	1.12.2014	839	1932	-0.0083	0.0001	0.0155
232	2.12.2014	826	84265	-0.0156	0.0002	0.0119
233	3.12.2014	830	38394	0.0048	0.0000	0.0133
234	4.12.2014	829	29663	-0.0012	0.0000	0.0101
235	5.12.2014	829	6491	0	0	0.0084
236	8.12.2014	819	4511	-0.0121	0.0001	0.0078
237	9.12.2014	811	3710	-0.0098	0.0001	0.0106
238	10.12.2014	805	37459	-0.0074	0.0001	0.0105
239	11.12.2014	786	3827	-0.0239	0.0006	0.0097
240	12.12.2014	762	10900	-0.0310	0.0010	0.0169
241	15.12.2014	737	3081	-0.0334	0.0011	0.0223
242	16.12.2014	731	6746	-0.0082	0.0001	0.0250
243	17.12.2014	701	16681	-0.0419	0.0018	0.0162
244	18.12.2014	721	10746	0.0281	0.0008	0.0282
245	19.12.2014	769	9930	0.0645	0.0042	0.0244
246	22.12.2014	751	56603	-0.0237	0.0006	0.0427
247	23.12.2014	751	8268	0	0	0.0289
248	24.12.2014	750	3042	-0.0013	0.0000	0.0175
249	25.12.2014	740	2896	-0.0134	0.0002	0.0116
250	26.12.2014	748	4145	0.0108	0.0001	0.0123
251	29.12.2014	740	11692	-0.0108	0.0001	0.0114
252	30.12.2014	744	21267	0.0054	0.0000	0.0111
253	31.12.2014	775	15203	0.0408	0.0017	0.0094

Prilog 2

U prilogu broj 2 prikazan je pseudokod koji je implementiran u Matlab-u i pomoću njega su izračunate vrednosti volatilnosti za sve dane trgovanja.

sigma(1)=sqrt((Kappa/(1-Alpha-Beta))) (procena početne volatilnosti)
for i=2:(dani-1),
*sigma(i)=sqrt(Kappa + Beta*sigma(i-1)*sigma(i-1) + Alpha*prinosi(i-1)*prinosi(i-1));*
end

Prilog 3

U prilogu broj 3 prikazane su dobijene buduće vrednosti inovacija i volatilnosti.

Dan	Buduća inovacija	Buduća volatilnost
		1.0e-003 *
1	0.0223	0.9752
2	-0.0048	0.5499
3	-0.0019	0.2385
4	0.0166	0.1237
5	0.0188	0.1771
6	0.0211	0.2222
7	0.0110	0.2704
8	-0.0160	0.1755
9	0.0099	0.1887
10	0.0192	0.1385
11	0.0072	0.2145
12	0.0119	0.1317
13	0.0084	0.1339
14	-0.0032	0.1105
15	0.0027	0.0814
16	-0.0066	0.0703
17	0.0079	0.0790
18	-0.0108	0.0885
19	-0.0112	0.1104
20	-0.0089	0.1214
21	-0.0308	0.1091
22	0.0289	0.4033
23	0.0070	0.4671
24	-0.0112	0.2188
25	0.0173	0.1585
26	-0.0240	0.1972

27	-0.0018	0.3070
28	-0.0029	0.1473
29	0.0031	0.0937
30	0.0027	0.0754
31	-0.0071	0.0683
32	-0.0003	0.0809
33	-0.0014	0.0677
34	0.0050	0.0637
35	0.0092	0.0704
36	0.0107	0.0930
37	-0.0091	0.1113
38	0.0008	0.1068
39	-0.0106	0.0769
40	-0.0114	0.1053
41	-0.0001	0.1211
42	0.0138	0.0817
43	-0.0089	0.1340
44	0.0040	0.1135
45	-0.0021	0.0844
46	0.0094	0.0704
47	-0.0106	0.0943
48	0.0003	0.1108
49	0.0049	0.0781
50	0.0095	0.0749
51	0.0152	0.0969
52	0.0011	0.1528
53	-0.0144	0.0930
54	-0.0089	0.1432
55	-0.0115	0.1165
56	0.0263	0.1252
57	-0.0110	0.3214
58	0.0104	0.1932
59	-0.0023	0.1439
60	0.0085	0.0914
61	-0.0075	0.0962
62	-0.0135	0.0924
63	-0.0165	0.1342
64	0.0065	0.1797
65	-0.0019	0.1167
66	-0.0018	0.0814
67	0.0118	0.0689
68	0.0031	0.1113
69	0.0018	0.0815
70	0.0132	0.0690
71	-0.0089	0.1234

72	0.0073	0.1100
73	0.0082	0.0962
74	-0.0024	0.0961
75	0.0019	0.0749
76	-0.0095	0.0668
77	-0.0111	0.0940
78	0.0011	0.1149
79	0.0065	0.0799
80	0.0234	0.0817
81	-0.0107	0.2561
82	0.0024	0.1677
83	-0.0008	0.0999
84	-0.0167	0.0745
85	-0.0056	0.1613
86	-0.0185	0.1063
87	0.0117	0.1945
88	-0.0110	0.1544
89	0.0012	0.1352
90	-0.0051	0.0870
91	0.0027	0.0787
92	-0.0050	0.0694
93	0.0042	0.0723
94	0.0062	0.0707
95	0.0151	0.0774
96	-0.0023	0.1446
97	-0.0205	0.0917
98	-0.0123	0.2158
99	0.0175	0.1669
100	-0.0153	0.2031
101	0.0133	0.1905
102	0.0016	0.1663
103	0.0142	0.0982
104	-0.0235	0.1435
105	-0.0033	0.2795
106	-0.0143	0.1404
107	0.0367	0.1589
108	0.0195	0.5576
109	0.0263	0.3641
110	-0.0213	0.4045
111	-0.0086	0.3361
112	-0.0037	0.1817
113	0.0114	0.1073
114	-0.0031	0.1215
115	0.0065	0.0850
116	-0.0187	0.0835

117	-0.0049	0.1897
118	-0.0088	0.1136
119	-0.0162	0.1056
120	0.0066	0.1667
121	0.0030	0.1123
122	0.0003	0.0817
123	-0.0110	0.0680
124	0.0115	0.1048
125	0.0039	0.1219
126	-0.0028	0.0871
127	0.0002	0.0725
128	-0.0021	0.0648
129	-0.0140	0.0636
130	-0.0032	0.1288
131	-0.0078	0.0879
132	-0.0093	0.0910
133	-0.0116	0.1013
134	-0.0059	0.1214
135	-0.0194	0.0936
136	0.0137	0.2015
137	0.0069	0.1741
138	-0.0002	0.1162
139	-0.0003	0.0800
140	-0.0066	0.0674
141	0.0090	0.0778
142	-0.0013	0.0944
143	-0.0061	0.0729
144	0.0119	0.0777
145	-0.0024	0.1155
146	-0.0053	0.0817
147	-0.0026	0.0777
148	-0.0070	0.0689
149	-0.0101	0.0806
150	0.0256	0.1024
151	0.0287	0.3001
152	0.0064	0.4271
153	-0.0179	0.2018
154	-0.0128	0.2195
155	-0.0023	0.1725
156	0.0080	0.1013
157	-0.0131	0.0966
158	-0.0268	0.1322
159	-0.0264	0.3326
160	0.0066	0.3957
161	0.0054	0.1922

162	0.0049	0.1165
163	-0.0012	0.0882
164	0.0015	0.0707
165	-0.0038	0.0650
166	0.0071	0.0672
167	-0.0122	0.0801
168	0.0050	0.1186
169	-0.0080	0.0892
170	-0.0032	0.0927
171	0.0048	0.0754
172	0.0089	0.0737
173	-0.0108	0.0926
174	0.0133	0.1116
175	0.0078	0.1394
176	-0.0007	0.1089
177	-0.0017	0.0776
178	-0.0018	0.0675
179	-0.0024	0.0641
180	0.0002	0.0639
181	0.0004	0.0618
182	0.0065	0.0611
183	0.0132	0.0752
184	0.0052	0.1260
185	-0.0020	0.0928
186	0.0053	0.0732
187	0.0016	0.0749
188	-0.0084	0.0664
189	0.0088	0.0869
190	0.0030	0.0967
191	0.0012	0.0763
192	0.0042	0.0666
193	0.0022	0.0688
194	-0.0076	0.0651
195	-0.0015	0.0821
196	-0.0012	0.0688
197	-0.0043	0.0640
198	0.0139	0.0680
199	-0.0100	0.1295
200	-0.0053	0.1188
201	-0.0068	0.0904
202	-0.0109	0.0868
203	-0.0020	0.1109
204	-0.0024	0.0795
205	0.0127	0.0693
206	-0.0027	0.1195

207	-0.0097	0.0836
208	0.0161	0.1012
209	0.0158	0.1644
210	-0.0031	0.1830
211	-0.0155	0.1065
212	-0.0056	0.1597
213	-0.0016	0.1059
214	0.0024	0.0773
215	-0.0022	0.0684
216	0.0036	0.0650
217	0.0032	0.0665
218	-0.0102	0.0662
219	-0.0094	0.0982
220	-0.0076	0.1041
221	-0.0050	0.0954
222	-0.0029	0.0812
223	0.0001	0.0707
224	-0.0243	0.0641
225	-0.0074	0.2645
226	0.0152	0.1505
227	-0.0140	0.1718
228	0.0121	0.1666
229	0.0043	0.1475
230	-0.0003	0.0970
231	0.0016	0.0733
232	-0.0127	0.0659
233	-0.0009	0.1180
234	0.0144	0.0809
235	0.0012	0.1393
236	0.0004	0.0884
237	-0.0062	0.0703
238	-0.0003	0.0771
239	0.0019	0.0664
240	0.0034	0.0639
241	-0.0030	0.0658
242	-0.0019	0.0656
243	0.0161	0.0636
244	-0.0278	0.1514
245	0.0422	0.3581
246	0.0094	0.7770
247	0.0184	0.3400
248	-0.0276	0.2748
249	-0.0118	0.3971
250	-0.0042	0.2251
251	0.0047	0.1238

252	-0.0159	0.0902
253	0.0059	0.1575
254	-0.0125	0.1064
255	0.0008	0.1304
256	0.0060	0.0851
257	0.0030	0.0816
258	0.0091	0.0709
259	0.0097	0.0928
260	-0.0066	0.1042
261	0.0025	0.0910
262	-0.0081	0.0732
263	-0.0124	0.0875
264	0.0102	0.1226
265	0.0000	0.1183
266	-0.0005	0.0807
267	0.0075	0.0677
268	0.0054	0.0824
269	0.0031	0.0782
270	0.0105	0.0701
271	0.0094	0.1016
272	0.0025	0.1051
273	-0.0061	0.0782
274	-0.0058	0.0796
275	0.0106	0.0788
276	-0.0166	0.1056
277	-0.0003	0.1707
278	-0.0194	0.0989
279	0.0146	0.2033
280	0.0117	0.1831
281	0.0000	0.1500
282	-0.0007	0.0917
283	-0.0210	0.0716
284	0.0086	0.2168
285	-0.0260	0.1401
286	-0.0415	0.3202
287	0.0022	0.7441
288	-0.0164	0.2997
289	0.0063	0.2365
290	0.0079	0.1355
291	0.0089	0.1080
292	-0.0071	0.1045
293	0.0043	0.0931
294	0.0009	0.0784
295	0.0068	0.0671
296	0.0048	0.0786

297	0.0078	0.0747
298	-0.0012	0.0863
299	-0.0012	0.0701
300	0.0081	0.0644
301	-0.0195	0.0845
302	-0.0071	0.2002
303	-0.0143	0.1267
304	-0.0047	0.1540
305	0.0065	0.1008
306	0.0078	0.0892
307	-0.0097	0.0915
308	-0.0048	0.1038
309	0.0013	0.0836
310	-0.0024	0.0691
311	0.0024	0.0656
312	0.0032	0.0644
313	-0.0075	0.0655
314	-0.0016	0.0818
315	-0.0177	0.0689
316	0.0150	0.1714
317	-0.0084	0.1765
318	-0.0135	0.1249
319	-0.0031	0.1453
320	-0.0138	0.0933
321	-0.0002	0.1376
322	-0.0052	0.0874
323	0.0194	0.0794
324	0.0160	0.1968
325	-0.0349	0.1958
326	0.0101	0.5281
327	-0.0225	0.2584
328	-0.0044	0.3033
329	0.0020	0.1517
330	0.0072	0.0937
331	-0.0026	0.0902
332	0.0135	0.0732
333	-0.0054	0.1277
334	0.0032	0.0941
335	0.0058	0.0757
336	0.0007	0.0774
337	0.0072	0.0667
338	0.0029	0.0805
339	-0.0066	0.0705
340	-0.0160	0.0790
341	0.0232	0.1557

342	-0.0101	0.2788
343	0.0014	0.1715
344	0.0056	0.0998
345	0.0010	0.0851
346	-0.0075	0.0695
347	-0.0043	0.0833
348	-0.0011	0.0748
349	0.0120	0.0660
350	-0.0091	0.1122
351	0.0081	0.1072
352	0.0031	0.0995
353	-0.0021	0.0774
354	-0.0087	0.0679
355	-0.0027	0.0893
356	-0.0007	0.0731
357	-0.0119	0.0651
358	0.0020	0.1107
359	-0.0073	0.0794
360	-0.0009	0.0857
361	0.0028	0.0696
362	-0.0074	0.0665
363	-0.0026	0.0814
364	0.0029	0.0702
365	-0.0150	0.0669

Spisak korišćene literature

1. Z. Mladenović, A. Nojković (2012), „Primenjena analiza vremenskih serija”, Prvo izdanje, Centar za izdavačku delatnost Ekonomskog fakulteta u Beogradu
2. Z. J. Kovačić (1995), „Analiza vremenskih serija“ , Univerzitet u Beogradu, Ekonomski fakultet
3. Danijela Rajter-Ćirić (2009), „Verovatnoća”, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu
4. Danijela Rajter-Ćirić (2013), *Beleške sa kursa Stohastička analiza*, Novi Sad
5. Zagorka Lozanov-Crvenković (2013), *Beleške sa kursa Statističko modeliranje*, Novi Sad
6. Z. Lozanov-Crvenković (2011), „Statistika“, Novi Sad
7. M.Chen (2013), „Time Series Analysis: Conditional Volatility Models“, Department of Finance, National Chung Hsing University
8. R. S. Tsay (2010) ,“Analysis of Financial Time series“, 3rd Edition, John Wiley & Sons,inc.
9. Engle, R. (1982), “Autorregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of United Kingdom Inflation”, Econometrica, 50, 987-1008.
10. Bollerslev, T. (1986), “Generalized Autorregressive Conditional Heteroskedasticity”, Journal of Econometrics, 31, 307-327.
11. John Y. Campbell, Andrew W. Lo, A. Craig MacKinlay, „The Econometrics of Financial Markets“, Princeton University Press, Princeton, New Yersey
12. Borjana B. Mirjanić, Nenad B. Branković, „Modeliranje volatilnosti tržišnih indeksa akcija Beogradske berze: Belex 15 i Belexline“, Časopis za ekonomiju i tržišne komunikacije, 336-356
13. Beogradska berza: http://www.belex.rs/
14. GARCH Toolbox User’s Guide, COPYRIGHT 1999 - 2000 by The MathWorks, Inc.

Biografija

Gala Tomić je rođena 06.07.1991. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu „Đorđe Natošević“ završila je u Novom Sadu 2006. godine i nosilac je „Vukove diplome“. Gimnaziju „Svetozar Marković“, opšti smer, završila je u Novom Sadu 2010. godine, takođe kao nosilac „Vukove diplome“. Nakon toga, upisala je Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, smer primenjena matematika, modul matematika finansija. Osnovne studije završila je 2013. godine sa prosekom 8,56. Iste godine upisala je master studije, takođe na ovom fakultetu. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija u junskom ispitnom roku 2015. godine.

UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Gala Tomić

AU

Mentor: prof. dr Zagorka Lozanov-Crvenković

MN

Naslov rada: Heteroskedastičnost cena finansijskih instrumenata

MR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s / e

JI

Zemlja publikovanja: Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2015.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (4,96,14,8,10,10,3)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Statističko modeliranje

ND

Ključne reči: statistika, vremenske serije, volatilnost, heteroskedastičnost, stohastički procesi

PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod:

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 25.05.2015.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Ljiljana Gajić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, predsednik

Član: dr Zagorka Lozanov-Crvenković, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

Član: dr Ivana Štajner Papuga, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, član

UNIVERSITY OF NOVI SAD

FACULTY OF SCIENCE KEY

WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification umber:

INO

Document type: Monograph documentation

DT

Type of record: Textual printed material

TR

Contents Code: Master's thesis

CC

Author: Gala Tomić

AU

Mentor: Zagorka Lozanov-Crvenković, Ph.D.

MN

Title: Heteroskedasticity of prices of financial instruments

XI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: en / s

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2015.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description: (4,96,14,8,10,10,3)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Statistical Modelling

Key words: statistics, time series, volatility, heteroskedasticity, stochastic processes

UC:

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

HD Note:

Abstract:

AB

Accepted by the Scientific Board on: 25.05.2015.

Defended:

Thesis defend board:

DB

President: Ljiljana Gajić, Ph.D.,full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, president

Member: Zagorka Lozanov-Crvenković, Ph.D., full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, supervisor

Member: Ivana Štajner Papuga, Ph.D., associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, member