Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Obradović Gabrijela

Spajanje sistema neutronike i termohidraulike u nuklearnim reaktorima

Master rad

Novi Sad, 2018.

Sadržaj

Popis slika

Zahvalnosti

Motivacija za odabir teme došla je kao rezultat naučno-istraživačke saradnje sa Univerzitetom Dekart u Parizu. Pored postojećeg metoda za dobijanje numeričkog rešenja sistema koji opisuju ponašanje nuklearnog reaktora, u ovom radu obrađena su još dva dodatna metoda koja smo razvili. Radeći pet meseci sa prof. dr Bérénice Grec i prof. dr Yohan Penel, naučila sam puno toga novog. Iskusila sam šta je pravi istraživački rad, što je bilo istovremeno interesantno i izazovno. Proširila sam svoje znanje u oblasti fizike, mehanike fluida i francuskog jezika. Zahvaljujem im se na idejama i pomoći koju su mi pružali tokom rada na univerzitetu, kao i na svemu ostalom što je život tamo učinilo lepšim i lakšim.

Boravak u Parizu je definitivno jedan jako lep period mog života. Veliku zahvalnost dugujem prof. dr Marku Nedeljkovu, koji mi je pružio priliku da odem tamo. Takođe, zahvaljujem mu se i za podršku i mnogobrojne korisne i iskrene savete koje mi je davao tokom master studija.

Volela bih da izrazim zahvalnost i ostalim profesorima i asistentima na Departmanu za matematiku i informatiku u Novom Sadu. Skoro svako sa kim sam imala priliku da radim u nekom periodu studija, na ovaj ili onaj način, uticao je na mene. Posebno se zahvaljujem prof. dr Nataši Krejić, neiscrpnom izvoru motivacije i inspiracije i prof. dr Danijeli Rajter-Ćirić, sa kojom sam posetila Finsku i Rusiju, putovanje koje će mi ostati dugo u lepom sećanju - hvala vam za pruženo znanje, saradnju i savete.

Želela bih da se zahvalim i prof. dr Aleksandru Pavloviću na pozivu da budem deo trkačkog štafetnog tima na departmanu, kao i na mnogobrojnim drugim zajedničkim trčanjima tokom proteklih godina: na trkama, treninzima i pri slučajnim susretima na stazi. Hvala svim članovima štafete na zabavnim trkama.

Tokom proteklih pet godina, koliko sam bila student Prorodno-matematičkog fakulteta, upoznala sam puno novih ljudi i stekla par jako dobrih prijatelja. Svi oni učinili su taj period mog života lepšim, zabavnijim i kvalitetnijim.

Najveću zahvalnost želim da iskažem svojoj porodici koja uvek bezuslovno podržava moje izbore i veruje u mene. Hvala na svemu.

Gabrijela Obradović,
Novi Sad 2018.

1 Uvod

Veliki deo svetske energije još uvek se dobija iz ekološki neprihvatljivih izvora, gde dominantnu ulogu igraju fosilna goriva. Kako je njihova osnova ugljenik, sagorevanjem nastaje ugljen-dioksid (CO_2) koji uglavnom završava u atmosferi. Kao gas staklene bašte, koji je odgovoran za čak 62% proizvodnje dodatne toplote, ugljen-dioksid uzrokuje globalno zagrevanje. Ekološki prihvatljivi su svakako obnovljivi izvori (sunce, vetar, voda) ali na globalnoj skali, njihov učinak je skoro zanemarljiv. Imaju potencijal za budućnost ali trenutno su jako ograničenih sposobnosti. Neobnovljivi izvori (ugalj, nafta, prirodni gas, nukleana energija) su glavni izvori energije. Kada je reč o samom procesu proizvodnje, "čista" energija (bez ispuštanja bilo kakvih gasova) u velikim količinama može se trenutno proizvesti samo u nuklearnim elektranama, dok svi ostali izvori imaju negativan uticaj na okolinu.

Što sam više čitala o nuklearnoj energiji, sve sigurnija sam bila u jedno. Ne mogu se izjasniti da sam apsolutno za ili apsolutno protiv. Jednostavno, teško je reći da li su benefiti veći od rizika koji nosi ili ne. Ono što mogu da kažem jeste da većina načina na koje danas generišemo energiju može biti opasna i imati loše strane. Ali, ne možemo pobeći od činjenice da je to nešto što je neophodno za život i da tražnja konstantno raste. Iako sam videla da postoje mnogobrojni razlozi zašto nuklearna energija predstavlja dobar izvor energije, neću reći da su rizici koje nosi zanemarljivi. Pored rizika, postavlja se i pitanje radioaktivnog otpada koji ostane nakon proizvodnje. Kako sam ja matematičar, ono što mogu da uradim, jeste da određenim metodama i proračunima pomognem smanjenju tih rizika na minimum.

Kada govorimo o nuklearnoj energiji, elektranama i reaktorima, prva stvar na koju pomislimo je sigurnost. Nuklearni reaktor mora biti dizajniran tako da osigurava pouzdanost, efikasnost i sigurnost. Mora osigurati sve te kriterijume jer u suprotnom, dizajn nije dobar i može dovesti do karastrofalnih ishoda. U prošlosti, desilo se par nuklearnih karastrofa. Naučnici u celom svetu posvećuju dosta vremena i ulažu puno resursa da bi sprečili da se tako nešto ponovo dogodi. Da bi se obezbedila sigursnost reaktora, njegovo ponašanje mora biti predvidivo u očekivanim ali i u neočekivanim scenarijima. Da bi to bilo moguće, neophodno je da se sjedine svi proračuni koji se odnose na reaktor. Najveći značaj imaju neutronika i termohidraulika. Neutronika je nauka koja proučava kretanje neutrona unutar jezgra reaktora. Termohidraulika opisuje zagrevanje fluida usled reakcije fisije u jezgru. Stabilnost reaktora zavisi od efekata koje termohidraulika ima na neutroniku. Kada se dizajnira reaktor, najvažnije pitanje je sledeće: kako promena u sistemu hidraulike mogu dovesti do iznenadog rasta temperature i kako to utiče na proizvodnju energije. Jedan od važnih koraka koje je potrebno preduzeti da bi se odgovorilo na ovo pitanje, samim tim i da bi se napravio valjan reaktor, upravo je sjedinjavanje sistema neutronike i termohidraulike.

1.1 Kratak pregled rada

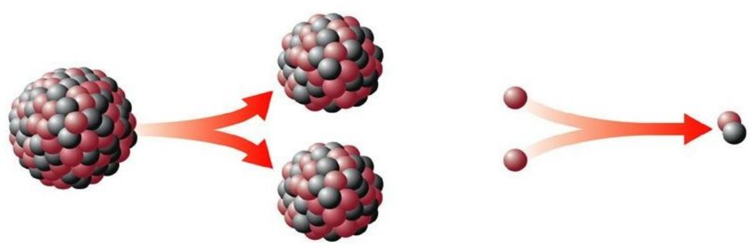
- Pre nego što pristupim matematici koja stoji iza svega ovoga, posvetila bih pažnju samoj nuklearnoj energiji. Kako je dobijamo, koje su alternative, kako utiče na nas i naravno, u kojoj meri garantuje sigurnost.
- Nakon toga, u poglavlju 3, dajem teorijsku osnovu neophodnu za razumevanje neutronike i termohidraulike.
- U poglavlju 4, predstavljam LMNC model (Low Mach Nuclear Core model) koji je uz određene pretpostavke izveden iz Navier-Stokes jednačina, specijalno za modeliranje protoka vode (rashladnog sredstva) u reaktoru, a koristi se za opis sistema termohidraulike.
- Zatim, u poglavlju 5, predstavljam nestacionarni trodimenzionalni model za ova dva sistema. Radi pojednostavljenja, samo spajanje i kompletna analiza rade se za stacionarni jednodimenzionalni model. Predstavljam određene analize, pokazujem dva načina za pristupanje spajanju sistema i vezu između njih. Takođe, pokazujem i koji je postojeći metod za rešavanje.
- Kako postojeći metod ima određene nedostatke, o kojima će kasnije biti više reči, pokušala sam da napravim novi metod koji bi ga mogao zameniti. Novi metor predstavljam u poglavlju 6.
- Radeći na novom metodu, došla sam na ideju da pristupim resavanju na još jedan, treći način, koji predstavljam u poglavlju 7.

2 Nuklearna energija i relevantni pojmovi

Veliki izazov današnjeg vremena je dobijanje ogromne količine energije bez uništavanja klime i živog sveta na zemlji. Nuklearne elektrane predstavljaju veliki izvor energije. Agencija za zaštitu životne sredine navodi da oko 20% električne energije u Sjedinjenim Američkim Državama i oko 30% u Evropskoj uniji potiče zapravo iz nuklearnih izvora.

Nuklearna energija je energija u nukleusu (ili jezgru) atoma. Atomi su sitne čestice od kojih je sačinjena sva materija u univerzumu. Nukleus je taj koji sadrži ogromnu količinu energije koja ga drži sjedinjenim. Nuklearna energija se može koristiti za proizvodnju električne energije, ali pre svega, mora biti ispuštena iz atoma. Postoje dve vrste atomskih reakcija:

1. fisija, gde se atomi raspadaju na više pojedinačnih atoma
2. fuzija, gde se više atoma spaja u jedan atom



Slika 1: Fisija i fuzija

Pri reakciji fisije, atom se deli na dva ili više atoma koji su potpuno različite vrste nego originalni atom. Oslobađa se ogromna količina radioaktivnog zračenja i energije. Produkti fisije, koji predstavljaju sve što ostane nakon reakcije, uvek su lakši od polaznog atoma. Postavlja se sledeće pitanje: gde je sva ta masa "nestala"? Nije nestala, samo je promenila oblik. Konvertovala se u enegiju. Znamo da važi Ajnštajnov zakon $E = mc^2$ koji kaže da sve što ima masu ima i određenu količinu energije koja joj odgovara. Za masu m, odgovarajuću količinu energije dobijamo množeći je kvadratom brzine svetlosti c^2 ($c \approx 1\,080\,000\,000\,\frac{km}{h}$). Kada malu količinu mase konvertujemo u energiju, množeći je sa tako velikim brojem kao što je kvadrat brzine svetlosti, dobijamo ogromnu količinu energije. Zbog toga, oko pola kilograma uranijuma 235 može biti transformisano u onoliko energije koliko dobijamo od skoro četiri miliona litara benzina. Prema podacima Instituta za nuklearnu energiju, paleta veličine ljudskog prsta koja sadrži nuklearno gorivo sadrži jednako energije kao i 481 m^3 prirodnog gasa, 807 kg uglja i 564 l nafte.

Međutim, nuklearne elektrane nemaju dovoljan kapacitet da proizvedu energiju iz nuklearne fisije sigurno i pouzdano. Zbog toga, nuklearni reaktori koriste palete uranijuma kao sredstvo za proizvodnju nuklearne fisije. Reaktor prisiljava atome uranijuma da se razbiju na delove. Kako se to dešava, atomi otpuštaju sitne čestice koje se zovu proizvodi fisije. Oni izazivaju ostale atome uranijuma da se razdvoje stvarajuci lančanu reakciju. Energija oslobođena pri lančanoj reakciji stvara toplotu. Toplota stvorena usled nuklearne fisije zagreva supstancu koja se nalazi u rektoru, što je uglavnom voda. Ona proizvodi paru koja pokreće turbine koje pokreću generatore kao mašine koje stvaraju električnu energiju. Ovo je princip stvaranja električne energije na kom rade nuklearne elektrane.

Radijacija je bilo koja čestica ili talas koji prolazi kroz materiju, recimo ljudsko telo. Kada pričamo o nuklearnoj radijaciji, mislimo na jonizojuće zračenje odnosno onu vrstu radioaktivnog zračenja koje ima dovoljnu energiju da jonizuje atom. Tu spadaju α, β, γ, X (rendgen) zraci, kosmičko zračenje i neutroni. Različiti oblici radijacije imaju različite količine energije i prodorne moći. Stoga, imaju i različita delovanja na žive organizme.

Radioaktivni raspad se dešava kada nestabilni atom otpušta energiju tako što emituje radijaciju.

Uranijum-235 je redak uranijumov izotop koji ima veoma specifičnu strukturu i jedinstvene karakteristike. Sačinjen je od oko 0.72% prirodnog uranijuma. Kada ga pogodi neutron, odmah dolazi do fisije odnosno predstavlja fisilni materijal. Fisilni materijali su oni materijali u kojim se sporim neutronima može izazvati nuklearna fisija, a za njeno pokretanje je dovoljna samo energija vezanja apsorbiranog neutrona, bez dodavanja kinetičke energije neutrona. Jedini prirodni fisilni izotop je baš uranijum-235. Kada se raspada, stvara više neutrona koji potom reaguju sa drugim atomima uranijuma-235, i taj proces se nastavlja i nastavlja, kreirajući sve više i više neutrona. Dolazi do takozvane lančane reakcije.

Šta se dešava unutar reaktora? U nuklearnoj elektrani, imamo uranijum-235 skladišten u keramičke palete, koje nikada ne mogu dovesti do eksplozije do kakve može doći kada je uzrok nuklearna bomba. Smešteni su u male cevi koje su dizajnirane tako da su izrazito jake i otporne na toplotu. Gomila tih cevi koje sadrže uranijum u sebi, smeštene su zajedno i uranijum tada izaziva fisiju, stvara se energija, radijacija, neutroni i produkti fisije. Sve cevi su smeštene u debelu čeličnu kutiju koja se nalazi u drugoj ogromnoj kutiji napravljenoj od betona i čelika. Cevi sa uranijumom dostižu veoma visoke temperature, voda se pušta između njih i prelazi u paru. Para pokreće turbine koje potom stvaraju električnu energiju.

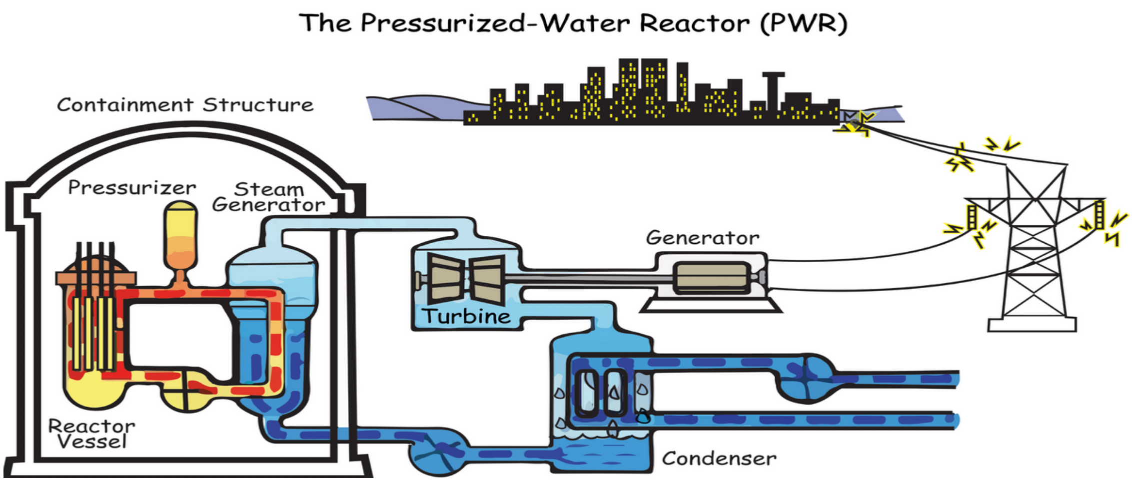
Kako možemo zaustaviti reaktor? Naravno, postoje situacije kada je neophodno zaustaviti reaktor. Iz tog razloga, napravljene su kontrolne šipke. One su smeštene između cevi sa uranijumom i njihova uloga je da apsorbuju sve neutrone. Na taj način, kada više nema neutrona da započnu reakciju, reaktor prirodno prestane sa radom. U najboljem slučaju, situacija se odvija tako. Ali ono što uzrokuje probleme jesu fisioni produkti. Kao što sam već spomenula, to su nestabilni izotopi koji se raspadaju i kako se raspad dešava, oni kreiraju radijaciju i energiju, koja se kasnije konvertuje u toplotu. Naravno, ta količina toplote nije ni blizu količini toplote koju emituje reaktor dok radi. Ako ne uspemo da spustimo tempreraturu, cevi sa uranijumom će eventualno pući i doći će do topljenja. Upravo to je bio uzrok karastrofe koja je zadesila Fukušimu. Kako se desio zemljotres, kontrolne šipke su postavljene na svoje mesto, reakcija je zaustavljena ali ostali su fisioni produkti, koji su naravno stvarali mnogo toplote. Električnu mrežu je oborio zemljotres i rezervni generator je uništio cunami koji je usledio. Dakle, nije postojalo ništa što bi pokrenulo rashladni sistem koji provodi vodu kroz reaktor tako da cevi sa uranijumom ne dostignu previsoku temperaturu koja dovodi do pucanja i topljenja. Istraživanja nakon te nesreće su pokazala da se sa nekim cevima desilo upravo to. U kombinaciji sa toplotom, to je stvorilo okruženje koje je vodu razdvojilo na kiseonik i eksplozivni vodonik, što je bilo uzrok nesreće.

Kako izgleda nuklearni reaktor? Postoje dva najčešća tipa:

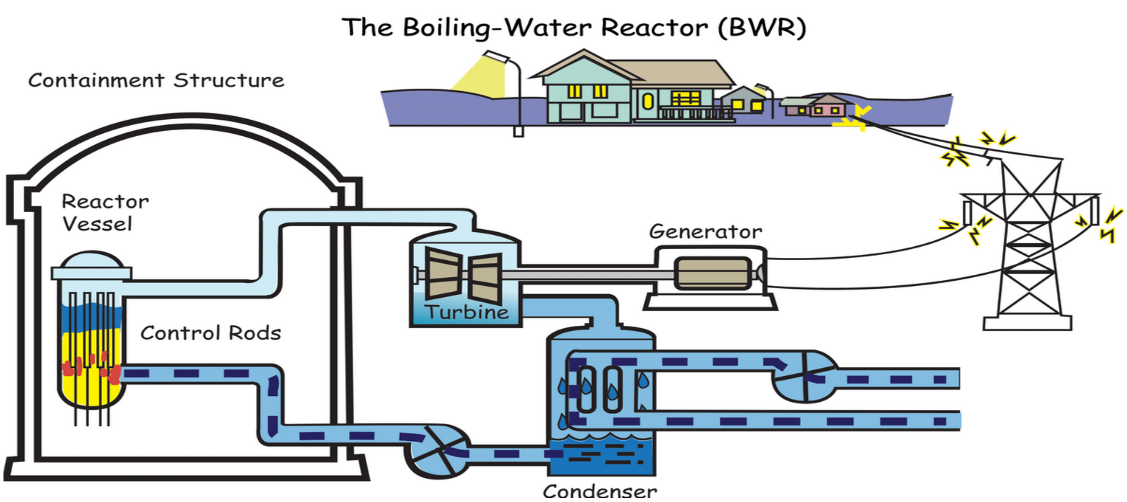
1. PWR (Pressurized Water Reactor) je jedna vrsta reaktora koja se najviše koristi. Postoji oko tri storine ovih reaktora na svetu. Kako mu i ime kaze, radi na principu visokog pritiska da bi održao visoku tempreraturu vode ali ne previše visokom da bi se sprečilo ključanje. Zagrejana voda iz jezgra dolazi do dela gde se proizvodi para. Tu se odigrava razmena toplote sa novom, nezagrejanom vodom i proizvodnja pare. Proizvedena para pokreće turbine koje pokreću generatore koji proizvode enektričnu energiju. Kada se ovaj krug zatvori, iskorišćena para odlazi u kondenzor gde se hladi i kondenzuje ponovo u vodu. Zatim, voda ponovo odlazi u reaktor, pravi se para i proces se ponavlja.

2. Drugi tip reaktora je BWR (Boiling water reactor). Postoji oko osamdeset ovakvih reaktora na svetu. Pritisak je upola manji od pritiska u PWR reaktoru.

Najvažnije kod ovog tipa je to što se ključanje dešava unutar zidova reaktora, gde se takođe stvara i para. U poređenju sa PWR, to je glavna razlika. Kapljice vode mogu biti jako opasne ako dospeju do glavne turbine pa zbog toga vlaga mora biti uklonjena. Nakon proizvodnje pare, proces je isti kao i kod PWR.



Slika 2: PWR



Slika 3: BWR

Kako se dobija obogaćeni uranijum? Da bi se dobio žuti prah uranijuma, od momenta kada izvučemo rudu iz zemlje do dobijanja praha, potrebno je izvršiti neke hemijske reakcije kojima se uranijum prečišćava. Prah se stavlja u burad i zatim prečišćava još više. U tom trenutku, skoro da nije radioaktivan. Ako bismo stajali metar pored bureta punog tog praha, ne bismo bili ozračeni više nego što putnik u avionu bude ozračen usled uticaja kosmičkih zraka. Ali, taj prah uranijuma mora da bude obogaćen pre nego što može biti korišćen za proizvodnju energije. Prah je sačinjen od 99.3 % uranijuma-238 i samo 0.7 % uranijuma-235. Da bi se proizvelo gorivo, potreban je izotop uranijuma-235, i tu nastaje opasaniji i radioaktivniji deo. Prvo ga pretvore u gas, koji je obogaćeniji i čistiji nego prethodna verzija uranijuma. Zatim, ide u centrifugu čije sile odvajaju teži uranijum-238 u spoljni deo, dopuštajući lakšem uranijumu-235 da ostane pri centru. Nakon ponavljanja procesa nekoliko puta, gas u sredini postaje sve koncentrovaniji. Jednom kada se dobije 5% uranijuma-235 i 95% uranijuma-238, spreman je za reaktor. Negde se čak zahteva i 20 % uranijuma-235 ali to ni blizu obogaćenog uranijuma koji je potreban za kreiranje nuklearnog oružja za koje je potrebno nekih 90%. Obogaćeni gas se vraća u čvrsto stanje i smešta u keramićke palete. Stotine tih paleta se stavljavju zajedno u šipke koje se postavljaju unutar samog reaktora.

2.1 Alternativni izvori energije

Energiju dobijamo iz obnovljivih i neobnovljivih izvora energije. U obnovljive izvore spadaju sunce, voda, vetar i biomasa dok u neobnovljive ubrajamo fosilna goriva (ugalj, nafta i gas) i nuklearnu energiju. Glavni izvor energije fosilnih goriva je ugljenik, pa njihovim sagorijevanjem u atmosferu odlazi puno ugljen-dioksida. To predstavlja glavni problem korišćenja fosilnih goriva gledano s ekološkog aspekta. Rast koncentracije CO_2 u poslednjih 150 godina iznosi čak 28%.

Ako govorimo o obnovljivim izvorima, sunce i vetar proizvode električnu energiju oko 10-30% vremena. Dakle, postoji velika zavisnost od vremenskih uslova koji su itekako nepredvidivi. Drugi problem na koji nailazimo je to što, kada rade, dešava se da proizvode više energije nego što je potrebno u tom trenutku. Logično pitanje je da li se nekako ta energija može skladištiti i koristiti kasnije, kada bude bila potrebna. Baterije deluju kao neka vrsta rešenja ali ipak ne tako dobrog rešenja. Naime, ako bismo pokušali da skladištimo baterije koje bismo kasnije koristili, količina energije bi bila jako mala u poređenju sa prostorom koji bi bio potreban za njihovo čuvanje. Još jedan važan podatak je to da nuklerna energija emituje četiri puta manje ugljenika nego solarna energija.

Uzmimo Nemačku kao primer. Većina njene električne energije potiče od fosilnih goriva. 40% dobija od uglja, 12% od gasa, 13% od nuklearnih izvora, 12% od vetra i 6% od sunca. Dobiti svih 100% od vetra i sunca, što je nešto čemu oni teže, deluje nemoguće bez obzira na napore koje ulože. U 2016. godini, imali su 4% više solarnih ploča ali su generisali 3% manje električne energije pomoću tih izvora. Takođe, iste godine, imali su 11% više vetrenjača ali su ostvarili 2% manje električne enegije pomoću njih. Kako je to moguće? Objašnjenje je vrlo jednostavno - nije bilo dovoljno ni sunca niti vetra te godine u Nemačkoj. Naravno, nije svaka godina takva, ali energija je neophodna nezavisno od toga kakve vremenske uslove imamo. Možemo pomisliti da je rešenje da dodaju još više solarnih ploča i vetrenjača pa ako se ponovi godina kao 2016., imaće više energije iz tih izvora. Ako dodaju 50% više solarnih kapaciteta i imaju vremenske uslove kao te godine, proizveli bi oko 9% ukupne električne energije. Kao što znamo, ovo je primer najveće solarne zemlje na svetu.

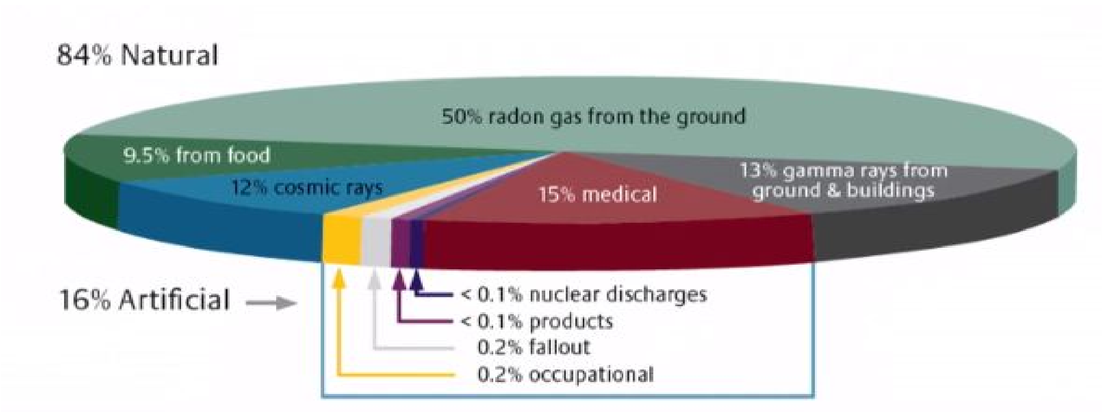
Prema članku koji je objavio naučni časopis *Science* (autor James Hanson, Columbia University), kada bismo kombinovali izvore koje dobijamo od sunca i vetra, dobili bismo mnogo manje čiste električne energije nego iz nuklearnih izvora. Pod čistim se misli na što manje zagađivanje životne sredine. Ako uporedimo Francusku i Nemačku, ovo su činjenice:

- Francuska dobija dva puta više električne energije iz čistih izvora, oko 93% (pretežno iz hidro i nuklearnih izvora) dok Nemačka samo 43% (izvor: BP Energy Outlook)
- Emisija ugljenika u Nemačkoj raste od 2009. godine
- Nemačka ima duplo skuplju električnu energiju (Izvor: Eurostat).

"There ain't no such thing as a free lunch."

2.2 Sigurnost i uticaj na okolinu

Profesor molekularne patologije Gerry Thomas, radila je na veoma interesantnom i značajnom istraživanju ne bi li odgovorila na pitanje koje se stalno postavlja. Odakle dolazi svo to radioaktivno zračenje? Rezultati su bili možda malo iznenađujući. Prema njenom istraživanju, način na koji se globalno doživljava radijacija nije baš ispravan. Navodi da većina jonizujućeg zračenja, koje potencijalno može biti opasno i štetno, zapravo je prirodno. Naravno, to što je prirodno, ne znači da je manje štetno od veštačkog. Ukupna količina radioaktivnog zračenja kojoj smo izloženi, ne samo od Černobila i Fukušime, već i od svih testiranja atomskih bombi tokom šesdesetih i sedamdesetih godina, sve to čini samo 0.3% naše izloženosti. Većina dolazi iz zemlje, atmosfere, zgrada oko nas itd. Godišnje količine variraju u zavisnosti od podnevlja.



Slika 4: Izvori zračenja

Sivert (Sv) je SI izvedena merna jedinica kojom se izražava ekvivalentna doza jonizujućeg zračenja. 1 Sv izaziva promene u krvi, 2-5 Sv izaziva mučninu, gubitak kose, unutrašnje krvarenje i često smrt. Više od 6 Sv u periodu kraćem od dva meseca dovodi do smrti u više od 80 % slučajeva. Milisivert (mSv) se često koristi za merenje ekvivalentne doze u dijagnostičkim medicinskim procedurama. Stopa efektivne doze prirodne radijacije varira značajno od mesta do mesta ali normalna vrednost je oko 3.5 mSv na godišnjem nivou.

2.2 Sigurnost i uticaj na okolinu

U sledećoj tabeli možemo videti neke izvore zračenja kojem smo izloženi u određenim situacijama. Takođe, vidimo i količinu zračenja kojoj su izloženi ljudi koji rade u nuklearnim elektranama. Njihova godišnja izloženost nije velika i daleko je od opasne.

Izvor	Doza
snimanje zuba	0.005 mSv
135g brazilskih oraha	0.005 mSv
snimanje grudnog koša	0.02 mSv
prekookeanski let	0.07 mSv
CT snimak glave	1.4 mSv
CT snimak grudnosg koša	6.6 mSv
CT snimak celog tela	10 mSv
Godišnje ograničenje za radnike izložene radijaciji	20 mSv
Prosečna doza za radnike u nuklearnim elektranama	0.18 mSv
Prosečna godišnja doza radona u UK	1.3 mSv
Količina pri kojoj je uočeno povećano javljanje kancera	100 mSv
LD_{50}, smrtonosna doza (uz izloženost od mesec dana)	5000 mSv

Nuklearne elektrane rade tako što se tačno kontroliše nivo na kojem se nuklearna reakcija dešava. Ta kontrola se postiže kroz nekoliko nivoa sigurnosnih mera. Štaviše, materijali u jezgru reaktora i nivo obogaćenosti uranijuma osiguravaju da je dolazak do eksplozije nemoguć, čak i kada bi sve sigurnosne mere otkazale. S druge strane, nuklearno oružje je napravljeno tako da dolazi do reakcije koja je toliko brza i intenzivna da ne može biti kontrolisana nakon što je započela. Osim Černobila, nije bilo problema toliko velikih razmera, a sam Černobil se ne može ponoviti jer sve moderne nuklearne elektrane imaju daleko unapređeniji sigurnosni sistem.

Veliki problem nisu samo moguće havarije u nuklearnim elektranama već i skladištenje radioaktivnog nuklearnog otpada, koji takođe može biti vrlo otrovan. Još uvek nema načina kojim bi se iskorišćeno nuklearno gorivo zauvek neutralizovalo, ali postoje pozitivni pomaci koji bi mogli smanjiti probleme skladištenja nuklearnog otpada u budućnosti. Ali, situacija nije sjajna ni ako razmatramo solarnu energiju. Istraživanja pokazuju da solarne ploče proizvode 300 puta više otrovnog otpada po jedinici energije nego nuklearne elektrane. Solarne ploče koje se više ne koriste, sadrže olovo, hrom i kadmijum, gomilaju se širom sveta, bez nekog konkretnog plana o njihovom odlaganju ili skladištenju. S druge strane, nuklearni otpad, iako potencijalno opasan, pažljivo se prati i odlaže. Odlaganje nuklearnog otpada se vrši tako da je dostupno za ponovno izvlačenje, osiguravajući izolovanost tako da ne utiče na okolinu.

2.3 Budućnost nuklearne energije

Konzumiramo ogromnu količinu energije i tražnja nastavlja da raste. Njena proizvodnja ima značajne uticaje. Emitovanje velike količine ugljen-dioksida u atmosferu je nešto sa čime smo suočeni i što zahteva rešavanje kako bismo izbegli ozbiljne rizike globalnog zagrevanja. To je svakako jedan od najvećih problema današnjice. U bliskoj budućnosti, moraćemo da pronađemo ekološki prihvatljive izvore energije kojima ćemo moći da zadovoljimo naše energetske potrebe. Trenutno se kao ekološki prihvatljivo rešenje nude obnovljivi izvori energije ali svesni smo da nije realno očekivati da od njih dobijemo svu potrebnu količinu energije.

Naučnici sa Stanford Univerziteta su otkrili novi način za dobijanje uranijuma iz okeana. To otkriće nas dovodi korak bliže nuklearnoj energiji koje može biti dovoljno za narednih 10 000 godina. Kada pročitamo ovako nešto, zapitamo se kako to da se uranijum, koji je radioaktivan, nalazi u okeanu. Čini vrlo mali procenat čestica vode, približno kao zrno soli rastvoreno u litri vode. Skoro je zanemarljiv i definitivno ne utiče na živi svet. Od 1990. godine, Japan pokušava da nađe način za izvlačenje uranijuma iz vode a kasnije su time počele da se bave i Amerika i Kina. Najveći problem sa kojim su se suočili je bio ubedljivo trošak, koji je bio jako veliki. Nova metoda naučnika sa Stanforda bi trebalo da trošak smanji znatno i učini gorivo za nuklearnu energiju mnogo dostupnijim i skoro neograničenim. Ruda uranijuma se najčešće nalazi u Kanadi, Australiji, Kazahstanu i Rusiji. Zastupljenija je čak četrdeset puta više nego srebro. Procenjeno je da se uranijum moze vaditi iz zemlje još oko stotinu godina dok se ne iskoriste svi izvori. Kako je okean toliki koliki je i kako konstantno stvara više i više uranijuma rastvaranjem stena koje otpuštaju uranijum u vodu, zalihe okeana mogu zadovoljiti svetsku tražnju za oko 10 000 godina.

Nove tehnologije se konstantno razvijaju. Dizajniraju se reaktori koji će biti efikasniji od prethodnih, sigurniji, čak i oni koji će izbaciti uranijum i umesto njega koristiti nešto drugo kao gorivo. Takođe, radi se i na dizajnu koji bi funkcionisao na principu nukleane fuzije. Takav reaktor bi otpuštao ogromnu količinu energije i predviđa se da bi bio i sigurniji od onih koji rade na principu fisije. Međutim, tu još uvek postoje tehničke poteškoće i nedostaci. U nekim delovima sveta, nuklearna energija je i sada vrlo pristupna. Ovakva otkrića ukazuju na mogućnost rasta procenta dobijanja energije iz nuklearnih izvora. Kako bismo u budućnosti imali najčistiju moguću životnu sredinu, uz najmanji trošak i skoro neograničene izvore, potrebno je dati značaj mnogobrojnim istraživanjima za unapređivanje sistema na koji to sve funkcioniše i otkrivanje nekih novih metoda. Jedno od važnih pitanja svakako jeste sigurnost, što je indirekto i tema ovog rada.

3 Teorijska pozadina

U ovom poglavlju, dajemo malu teorijsku osnovu za sisteme neutronike i termohidraulike, neophodnu za dalje razumevanje i modeliranje rada nuklearnog reaktora.

3.1 Neutronika

Neutronika je nauka koja proučava put neutrona kroz materiju, njihovu interakciju i reakcije koje izazivaju. Jedna od tih reakcija je baš proizvodnja energije uz pomoć fisije. Često je potrebno znati poziciju neutrona, pravac u kom se kreću i kojom brzinom. Neutronika ima veliku primenu u predviđanju ponašanja nuklearnih reaktora. Kako je broj neutrona koji se proučava veoma veliki, prvi pristup je da ih posmatramo kao neprekidni fluid.

3.1.1 Lančana reakcija i multiplikativni faktor

Kao što sam napomenula, kada govorimo o procesu stvaranja nuklearne energije, mislimo zapravo na nuklearnu fisiju. Fisiona lančana reakcija se dešava usled interakcije između neutrona i fisilnih izotopa, kao što je uranijum 235. U nuklearnom inženjerstvu, fisilni materijal je onaj materijal koji je sposoban da održi lančanu reakciju nuklearne fisije. Ta lančana reakcija zahteva otpuštanje neutrona od strane fisilnih izotopa koji prolaze kroz nuklearnu fisiju i naknadnu apsorpciju nekih neutrona. Kada atom učestvuje u fisionoj reakciji, nekoliko neutrona biva izbačeno iz reakcije. Tačan broj zavisi od nekoliko faktora. Ti slobodni neutroni reaguju sa okruženjem, i ako postoji još fisionog goriva, neki od njih mogu biti apsorbovani i izazvati još fisije. Na taj način, ciklus se ponavalja dok ne dođe do reakcije koja je samoodrživa.

Multiplikacioni faktor (k) predstavlja odnos broja neutrona proizvedenih pri trenutnoj reakciji fisije u odnosu na broj neutrona u prethodnoj. Ako je k manje od 1, to znači da imamo manje neutrona nego ranije. U tom slučaju, reaktor se gasi automatski u narednom periodu. Ako je k veće od 1, imamo povećanje broja neutrona i količina energije eksponencijalno raste. Kao posledica, sve dok k nije baš jednako 1, reaktor ne dostiže stabilno stanje.

3.1.2 Kritičnost

Uslov kritičnosti je osnovni parametar za dizajniranje nuklearnog reaktora. Reaktor je kritičan kada je lančana reakcija samoodrživa (kada nisu potrebne eksterne sile i uticaji za njeno dešavanje) i nezavisna od vremena. Ako sistem nije u ekvilibrijumu, asimptotska raspodela neutrona će rasti ili opadati eksponencijalno tokom vremena. Da bi se dostiglo to stanje, neophodne su određene manipulacije geometrijom reaktora. Nije za očekivati da će model geometrije biti potpuno kritičan i da bi se dozvolila određena fleksibilnost, ovi problemi su često formulisani kao problemi karakterističnih korena. U tom pristupu, jedan parametar je veštački modifikovan sve dok se ne dostgne kritičnost. Kanije u radu, videćemo više o ovome. Pristup preko karakterističnog korena ima veliku primnu u analizi nuklearnih reaktora.
Postoje tri moguća stanja reaktora:

1. $k < 1$, subkritičan, broj neutrona opada tokom vremena,

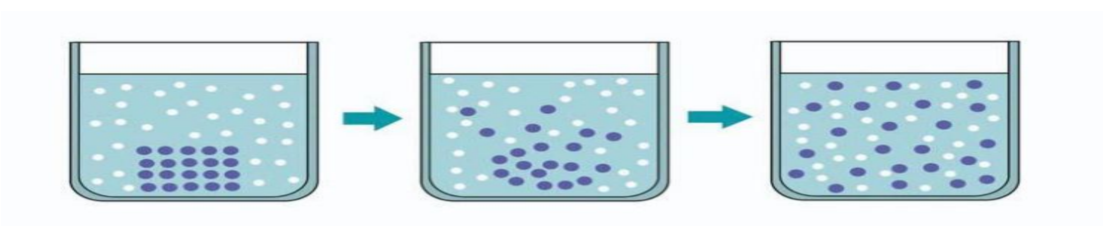
2. $k = 1$, kritičan, broj neutrona se ne menja tokom vremena,

3. $k > 1$, superkritičan, broj neutrona raste tokom vremena.

Pri pokretanju reaktora je $k > 1$, $k = 1$ dok radi i kako se gasi, važi $k < 1$.

3.1.3 Difuziona jednačina

Difuzija podrazumeva razlivanje, širenje i rasprostiranje, odnosno, generalno gledano, difuzija predstavlja spontani prenos materije iz zone više koncentracije u zonu niže koncentracije. Zamislimo da imamo neke čestice u čaši vode. Na početku, te čestice su koncentrisane pri jednoj ivici čaše. Kako se one nasumično kreću u vodi, posle nekod vremena, postaju uniformno raspoređene, i na taj način prelaze iz sredine visoke koncentracije u sredinu niske koncentracije.



Slika 5: Difuzija

Difuziona jednačina je parcijalna diferencijalna jednačina koja se koristi u fizici za opisivanje ponašanja kretanja čestica u nekoj sredini, kao rezultat nasumičnog kretanja svake od njih. Veliku primenu u matematici ima kada je reč o procesu Markova i Braunovom kretanju. Izvodi se trivijalno iz jednačine kontinuiteta:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot j = 0$$

gde je j fluks difuzionog materijala a Φ njegova gustina. Ona tvrdi da je promena u gustini u bilo kom delu sistema posledica protoka materije kroz taj deo sistema. Dakle, nema ni stvaranja ni uništavanja materije.

Difuziona jednačina se dobija u kombinaciji jednačine kontinuiteta sa Fikovim prvim zakonom koji kaže da je fluks difuzionog materijala u bilo kom delu sistema proporcionalan gradijentu lokalne gustine odnosno:

$$j = -D\nabla\Phi$$

gde je D difuzioni koeficijent. Dakle, difuziona jednačina ima sledeći oblik:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nabla \cdot [D\nabla\Phi]$$

Kasnije ćemo videti da sistem neutronike u nuklearnom reaktoru opisujemo, između ostalog, uz pomoć difuzione jednačine.

3.2 Termohidraulika

Termohidraulika proučava hidraulični protok u termalnim fluidima. Fokusira se na pritisak, zapreminu i gustinu ali takođe i na temprereraturu, protok i neke hemijske reakcije. Kada je reč o nuklearnoj sigurnosti, predstavlja jednu od najznačajnijih disciplina gde na fluid utičemo dodavanjem ili smanjivanjem toplote.

3.2.1 Stišljivost fluida

U termodinamici i mehanici fluida, stišljivost predstavlja meru relativne promene zapremine fluida kao posledicu promene pritiska. Kada fluid podleže značajnim promenama u gistini, naziva se stišljivim. Gasovi, uglavnom, imaju takvo ponašanje. Najčešće, tok se smatra nestišljivim ako je Mahov broj, o kome će biti više reči u narednom poglavlju, manji od 0.3.

Voda je stišljiv fluid, iako se veoma često tretira nestišljivim. Razlog je to što promene pritiska ili temperature uglavnom nisu dovoljno velike da bi napravile značajnu promenu u gustini. Ali, treba imati na umu da je to, iako uglavnom dobra aproksimacija, ipak aproksimacija. Primer za to je različita gustina vode na različitim dubinama okeana. Usled znatno većeg pritiska i temperaturne promene, voda na dnu okeana je gušća nego na površini. Za modelirnaje kretanja vode u nuklearnom reaktora ne koristi se aproksimacija vode kao nestišljivog fluida već se koristi stišljiv model. Razlog za to su velike toplotne razmene unutar jezgra i promene u pritisku.

3.2.2 Navier-Stokes jednačine

Jednačine Navier-Stokes opisuju kretanje viskoznih fluida. Sila viskoznosti (unutrašnje trenje u tečnosti) usporava proticanje tečnosti i kretanje tela kroz tečnost. Recimo, ako poredimo med i vodu, med sporije protiče. To znači da je njegova viskoznost veća. Jednačine Navier-Stokes su korisne jer opisuju mnogo fenomena od naučnog značaja. Koriste se za modeliranje vremena, okeanskih struja, protoka vode u cevima, strujanje vazduha oko krila aviona itd. Pomažu dizajniranju aviona i automobila, proučavanju protoka krvi kroz ljudski organizam i mnogih drugih stvari. Zajedno sa dobro postavljenim graničnim uslovima, opisuju kretanje fluida veoma dobro. Koristimo pretpostavku koja da je fluid neprekidan (beskonačno deljiv i nije sastavljen od čestica kao što su atomi ili molekuli).

Rešenje sistema Navier-Stokes jednačina je vektor brzine protoka. Kako je definisan u svakoj tački domena na kom posmatramo, to je vektorsko polje. Kada dobijemo brzinu protoka, ostale značajne veličine, kao što su pritisak, tempreratura i gustina, mogu se dobiti uz pomoć dodatnih jednačina (na primer, jednačine kontinuiteta).

Za modeliranje protoka vode unutar nuklearnog reaktrora, koristimo Navier-Stokes jednačine za stišljive fluide koje predstavljamo u narednom poglavlju.

4 Nuklearni model u režimu *Low Mach*

U ovom poglavlju, pažnju ćemo posvetiti modelu koji je izveden iz sistema Navier-Stokes jednačina za modeliranje kretanja vode u nuklearnom reaktoru.

4.1 Mahov broj

Verovatno ste čuli da je maksimalna brzina nekog aviona *Mah 2*, ili pak ako ste gledali neki naučno-fantastični film, mogli ste primetiti da koriste izraz "putovanje brzinom Mah ...". Ako jeste, skoro sigurno ste stekli utisak da je Mah neka vrsta brzine i ta pretpostavka je ispravna. Kada kažemo da je Mahov broj recimo 2, ta brzina je zapravo dve brzine zvuka u toj sredini i u tim uslovima. Važno je napomenuti da brzina zvuka nije uvek ista. Ako prolazimo kroz vazduh i vodu, ona se razlikuje. Čak iako smo u istom okruženju, ali se temperatura razlikuje, takođe će se razlikovati i brzina zvuka. Sa porastom temperature dolazi i do povećanja brzine zvuka, i obratno.

Formalno, Mahov broj definišemo na sledeći način:

$$M = \frac{u}{c}$$

gde u predstavlja lokalnu brzinu protoka i c brzinu zvuka u toj sredini. Predstavlja odnos brzine kretanja tela i brzine prostiranja zvuka, izazvanog poremećajem usled kretanja tog tela kroz fluid.

Mahov broj je veličina bez dimenzije. Koristan je jer fluidi koji imaju isti Mahov broj ispoljavaju veoma slično, gotovo identično ponašanje, nezavisno od ostalih varijabli.

4.2 LMNC (Low Mach Nuclear Core) model

Jednačine Navier-Stokes za nestišljive fluide nisu dobra aproksimacija kretanja fluida unutar nuklearnog reaktora zbog velike toplotne razmene u jezgru reaktora koja uključuje visoku termičku ekspanziju toka. Koriste se jednačine Navier-Stokes za stišljive fluide. Akustične talase možemo zanemariti u standrardnom režimu reaktora, pa to radimo i ovde, ali u isto vreme zadržavamo i sve osobine stišljivosti usled razmene toplote. LMNC model predstavlja komplement stišljivim Navier-Stokes jednačinama i menja stišljivi model ako i samo ako je tok u nuklearnom reaktoru "niskog Mahovog broja" (Low mach regime, $M << 1$). Hipoteza da smo u tom režimu je fundamentalna da bismo bili u mogućnosti da zanemarimo akustične talase u stišljivom modelu i dobijemo LMNC model.

Za modeliranje kretanja fluida u nuklearnom reaktoru dakle posmatramo stišljive Navier-Stokes jednačine (zakon održanja mase, zakon količine kretanja i zakon održanja energije):

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p - \nabla \cdot \delta(\mathbf{u}) = \rho \mathbf{g} \\ \partial_t(\rho h) + \nabla \cdot (\rho h \mathbf{u}) = \partial_t p + \mathbf{u} \cdot \nabla p + \delta(\mathbf{u}) :: \nabla \mathbf{u} + \phi + \nabla \cdot (\Lambda \nabla T) \end{cases} \tag{1}$$

na ograničenom domenu Ω^d, $d \in \{1, 2, 3\}$ uz granične uslove sumirane na slici 6.

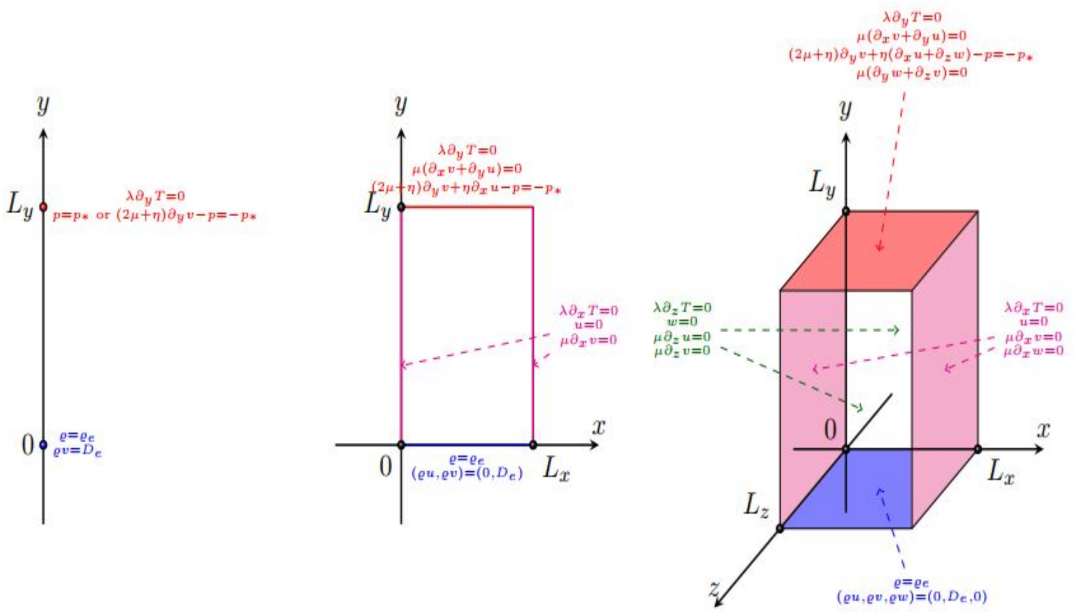
- $\Omega^1 := [0, L_y] \quad with \quad \Gamma_e := 0 \quad \Gamma_s := L_y$
- $\Omega^2 := [O, L_x] \times [0, L_y] \quad with \quad \Gamma_e = [0, L_x] \times \{0\}, \Gamma_{lat} = (\{0\} \times [0, L_y]) \cup (\{L_x\} \times [0.L_y]) \quad and \quad \Gamma_s = [0, L_x] \times \{L_y\}$
- $\Omega^3 := [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z] \quad with \quad \Gamma_e = [0, L_x] \times \{0\} \times [0, L_z], \Gamma_{lat} = (\{0\} \times [0, L_y] \times [0, L_z]) \cup (\{L_x\} \times [0, L_y] \times [0, L_z]) \cup ([0, L_x] \times [0, L_y] \times \{0\}) \cup ([0, L_x] \times [0, L_y] \times \{L_z\}) \quad and \quad \Gamma_s = [0, L_x] \times \{L_y\} \times [0, L_z]$.

Nepoznate u ovom sistemu su:

- termodinamičke veličine: pritisak p, temperatura T (iz njih dobijamo entalpiju h i gustinu ρ)
- brzina **u**
- fizičke veličine: toplotna provodljivost Λ, Košijev tenzor napona $\delta(\mathbf{u}) = \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) + \eta(\nabla \cdot \mathbf{u}) I_d$ gde su μ i η koeficijenti viskoznosti.

Poznato nam je sledeće:

- energija jezgra $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega^d \to \phi(t, \mathbf{x})$
- gravitacija **g**
- gustina na ulazu $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \Gamma_e \to \rho_e(t, \mathbf{x})$ i stopa protoka $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \Gamma_e \to D_e(t, \mathbf{x})$
- pritisak $t \in \mathbb{R}_+ \to p_*(t)$.



(a) Domain Ω^1 (b) Domain Ω^2 (c) Domain Ω^3

Slika 6: Domen Ω^d, $d \in \{1,2,3\}$ sa graničnim uslovima primenjenim na Navier-Stokes jednačine

Asimptotski razvoj, uz pretpostavku da je Mahov broj mali, dovodi do LMNC modela. Detaljno izvođenje nalazi se u [2]:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{p_*'(t)}{\rho(h,p_*)c^2(h,p_*)} + \frac{\beta(h,p_*)}{p_*}[\phi + \nabla \cdot (\Lambda(h,p_*)\nabla h)] \\ \rho(h,p_*)[\partial_t h + \mathbf{u} \cdot \nabla h] = \phi + \nabla \cdot (\Lambda(h,p_*)\nabla h) \\ \rho(h,p_*)[\partial_t \mathbf{u} + ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}] + \nabla P - \nabla \cdot \delta(\mathbf{u}) = \rho(h,p_*)\mathbf{g} \end{cases} \tag{2}$$

Pod pretpostavkom da imamo glatke funkcije, rešenje sistema (2) takođe zadovoljava:

$$\begin{cases} \partial_t \rho(h,p_*) + \nabla \cdot (\rho(h,p_*)\mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\rho(h,p_*)h) + \nabla \cdot (\rho(h,p_*)h\mathbf{u}) = \phi + \nabla \cdot (\Lambda(h,p_*)\nabla h) \\ \partial_t(\rho(h,p_*)\mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho(h,p_*)\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla P - \nabla \cdot \delta(\mathbf{u}) = \rho(h,p_*)\mathbf{g} \end{cases} \tag{3}$$

Nepoznate sada su:

- entalpija h, dinamički pritisak P
- brzina **u**
- iz (h, p_*) dobijamo: gustinu ρ, koeficijent stišljivosti β, modifikovanu termalnu provodljivost λ, koeficijente viskoznosti μ i η
- brzina zvuka c (iako se ne pojavjuje u sistemu, potrebna je da bismo naknadno proverili da li je Mahov broj mali)

dok su veličine koje su nam poznate iste kao i u prethodnom slučaju.

Termodinamičke promenljive u LMNC modelu su definisane na sledeći način:

- $\beta(h, p_*) = -\frac{p_*}{\rho(h,p_*)^2}\frac{\partial\rho}{\partial h}(h, p_*)$
- $c(h, p_*) = [\frac{1}{\rho(h,p_*)\frac{\partial\rho}{\partial h}}(h, p_*) + \frac{\partial\rho}{\partial p}(h, p_*)]^{-\frac{1}{2}}$
- $\Lambda(h, p_*) = \frac{\lambda(h,p_*)}{c_p(h,p_*)}$ gde je c_p toplotni kapacitet dobijen iz $\frac{1}{c_p(h,p_*)} = \frac{\partial T}{\partial h}(h, p_*)$.

Granični uslovi su sledeći:

- Fluid se ubrizgava na dnu jezgra Γ_e sa zadatom gustinom ρ_e i vertikalnim protokom D_e:

  $$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_e, \;\; \rho(h(t, \mathbf{x}), p_*) = \rho_e(t, \mathbf{x})$$
  $$(\rho\mathbf{u})(t, \mathbf{x}) = \mathbf{D}_e(t, \mathbf{x})$$

  gde je $\mathbf{D}_e = D_e$ u 1D, $\mathbf{D}_e = (0, D_e)$ u 2D i $\mathbf{D}_e = (0, D_e, 0)$ u 3D. Ulazna entalpija h_e je implicitno zadata jednačinom:

  $$\rho(h_e, p_*) = \rho_e.$$

  Odgovarajuća brzina na ulazu $\mathbf{u}_e$ se dobija iz odnosa:

  $$\mathbf{u}_e = \frac{\mathbf{D}_e}{\rho_e}.$$

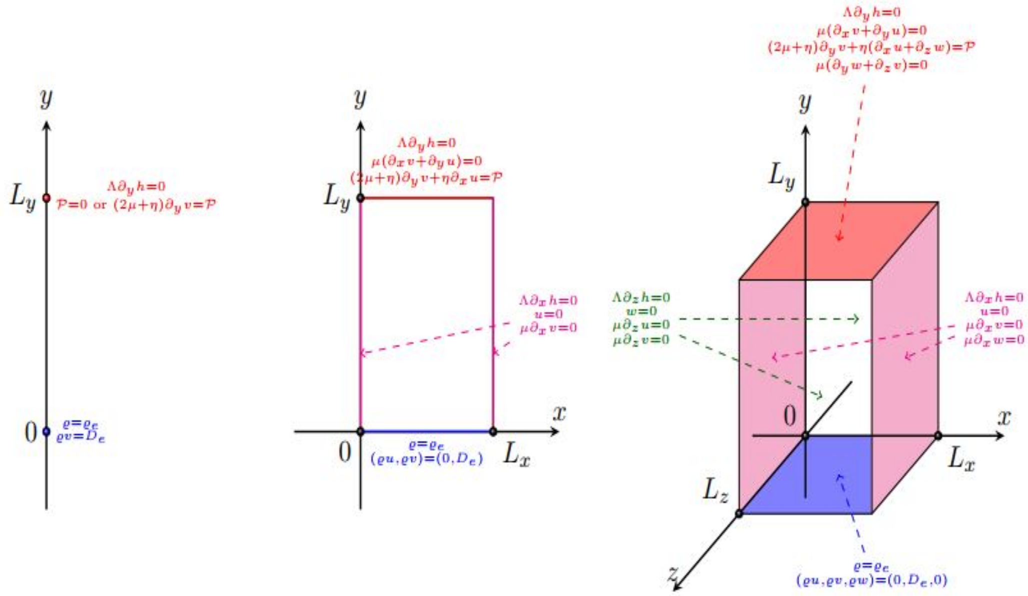
- Na bočnim zidovima zadajemo sledeće uslove:

  $$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_{lat}, \;\; (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(t, \mathbf{x}) = 0$$
  $$\delta(\mathbf{u})\mathbf{n} \cdot \tau(t, \mathbf{x}) = 0$$

  Oni nam govore da protok kroz bočne zidove nije moguć.

- Na vrhu jezgra, razmatramo slobodan izliv:

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_s, \ \ [\delta(\mathbf{u})\mathbf{n} - P\mathbf{n}](t, \mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$



(a) Domain Ω^1 (b) Domain Ω^2 (c) Domain Ω^3

Slika 7: Domen Ω^d, $d \in \{1, 2, 3\}$ sa graničnim uslovima primenjenim na LMNC model (2)

Da bismo analizirali LMNC model (2), neophodno je zatvoriti ga. To se postiže uvođenjem jednačine stanja koja specificira računanje $\Xi = [\rho, c, \beta, \lambda, c_p, \mu, \eta, T]$.

5 Spajanje sistema neutronike i termohidraulike

Sigurnost rada reaktora zahteva poznavanje temperature raznih struktura unutar njega samog i naravno, vode koja igra ulogu rashladnog sredstva. Na osnovu neutronskog fluksa ili nivoa reaktivnosti možemo izračunati neke od njih. Potrebna energija takođe mora biti poznata jer je od ekonomskog značaja. Uz to što želimo da smo bezbedni, da ne zagađujemo okolinu i živi svet oko nas, naravno da želimo da to radimo uz najmanji mogući trošak. Da bismo bili u mogućnosti da odredimo neutronski fluks, kao i tempreraturu, neophodni i nezaobilazni su sistemi neutronike i termohidraulike, koji predstavljaju krucijalnu kariku kada je reč o sigurnosti rada reaktora. Neutronika se koristi za određivanje nivoa reaktivnosti i neutronskog fluksa dok rešavanjem jednačina termohidraulike dobijamo tražene temperature. Ove dve discipline su integrisane. Kako temperatura varira, poprečni presek materijala se menja što dovodi do promene fluksa. Takođe, kako se tok menja, termalna energija koja je otpuštena (uglavnom iz reakcija fisije) se menja sa njom, što izaziva promene u temperaturama. Preciznije, kada posmatramo samo LMNC model, funkcija ϕ ne opisuje najbolje šta se dešava unutar jezgra reaktora. Za slučajne situacije i modeliranje uopšte, precizan opis, umesto neke ne tako dobre aproksimacije, nam je potreban da bismo imali što tačnije rezultate.

Spajanje između jednačina koje opisuju zagrevanje fluida usled fisije u jezgru nuklearnog reaktora i jednačina koje opisuju kretanje neutrona u istom, veoma je važno pri dizajniranju reaktora i obezbeđivanju njegovog sigurnog rada. Pomaže pri predviđanju ponašanja reaktora, što, jasno, može dosta doprineti. Na taj način, mogu se simulirati razni scenariji, videti kako reaktor reaguje u određenim okolnostima, da li postoje neki problemi i ako da, naći način za njihovo rešavanje. Time se mogu izbeći situacije u kojima se odgovorni nađu u nepoznatoj siguaciji u kojoj ne znaju kako da se ponašaju i kako da reaguju. Kada su ovakve stvari u pitanju, uglavnom ne postoji luksuz vremena za razmišljanje u trenutku kada problem nastane.

Sistem jednačina neutronike i sistem jednačina termohidraulike su veoma različiti, imaju drugačiju teorijsku pozadinu i stoga, spajanje i rešavanje je matematički vrlo kompleksno. Da bismo stekli bolje razumevanje ponašanja sistema, prirodni prvi korak bio bi da posmatramo stacionarni model. Da bi se to moglo raditi, neophodno je svesti sistem termohidraulike na transportnu jednačinu sa konstantnim protokom unutrašnje entalpije rashlađivača dok za sistem neutronike koristimo difuzionu jednačinu gde transport neutrona aproksimiramo difuzijom. Generalno, modeli neutronike imaju više energetskih grupa ali ovo pojednostavljenje nam omogućava da ih zanemarimo. Zadržimo sva važna svojstva neutronike ali ujedno i olakšavamo spajanje, samim tim i rešavanje polaznih sistema. Iako je pojednostavljen model, nije trivijalan jer ostaje nelinearan. Ovom spajanju se može pristupiti na dva različita načina, u zavisnosti od toga da li je snaga jezgra poznata ili ne. Takođe, to je način da izbegnemo dobijanje trivijalnog rešenja (nule) sistema neutronike na celom domenu. Kako bismo našli netrivijalno rešenje, transformišemo sistem uvođenjem multiplikativnog koeficijenta k_{eff}. Prvi pristup se svodi na traženje entalpije na izlazu h_s (kada je snaga jezgra nepoznata) dok je u drugom cilj naći muptiplikativni koeficijent k_{eff} (kada je snaga jezgra poznata i iz koje dobijamo h_s). Bez obzira na pojednostavljenje, ovaj model daje mogućnost pokazivanja postojanja netrivijalnog i jedinstvenog rešenja. Pod još nekim dodatnim pretpostavkama, moguće je dobiti i analitičko rešenje.

U ovom poglavlju, prvo predstavljamo pojednostavljeni nestacionarni trodimenzionalni model, iz kog izvodimo stacionarni model u jednoj dimenziji. Potom, razmatramo dva pristupa za rešavaje koje smo iznad naveli, kao i vezu između njih. Na kraju, predstavljamo algoritam za nalaženje parametra k_{eff} (koji odgovara rešavanju drugog pristupa), kao i rezultate koje daje.

5.1 3D nestacionarni model

Neka je sistem termohidraulike

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 & (a) \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla(p[\rho, h]) = \rho \mathbf{g} & (b) \\ \partial_t(\rho E) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} E) = \mathbb{E}\Sigma_f(h)\Phi(t,x) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} & (c) \end{cases} \tag{4}$$

i neka je sistem neutronike:

$$\begin{cases} \frac{1}{V}\partial_t \Phi(t,z) - \nabla \cdot [D(h)\nabla\Phi(t,z)] + [\Sigma_a(h) - \gamma\Sigma_f(h)(1-\beta)]\Phi(t,z) - \lambda c = 0 \\ \partial_t c + \lambda c - \gamma \Sigma_f(h)\beta\Phi(t,z) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Treba napomenuti sledeće: u LMNC modelu, ϕ predstavlja energiju jezgra i u njemu samom, ne bavimo se toliko detaljno neutronikom. Energija jezgra je jedini parametar vezan za neutroniku i na neki način, ona je pojednostavljena i stavljena u drugi plan. Nakon što pridružimo sistem neutrnoike (5), u sistemu termohidraulike umesto ϕ figuriše neutronski fluks Φ, odnosno rešenje sistema (5). Sada imamo sistem koji nam pomaže da bolje i preciznije opišemo neutroniku i koristimo ga umesto prvobitne energije jezgra u LMNC modelu.

U oba sistema, promenljive $t \geq 0$ i $\mathbf{x} \in \Omega$ su promenljive vremena i prostora ($\Omega \subset R^3$ definiše jezgro).

U (4), $\rho(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{u}$(t,$\mathbf{x}$), h(t,$\mathbf{x}$), $p(t, \mathbf{x}) = P(\rho(t, \mathbf{x}), h(t, \mathbf{x}))$ i $E(t, x) = \frac{|\mathbf{u}(t,\mathbf{x})|^2}{2} + h(t, \mathbf{x}) - \frac{p(t,\mathbf{x})}{\rho(t,\mathbf{x})}$ su redom gustina, brzina, unutrašnja entalpija, pritisak - P(t,$\mathbf{x}$) koji je zapravo jednačina stanja i ukupna energija rashlađivača. Vektor $\rho\mathbf{g}$ je eksterna sila koja deluje na rashlađivač (gravitacija). Konstanta $\mathbb{E}$ predstavlja energiju dobijenu fisijom ($\mathbb{E} > 0$ u J), $\Sigma_f(h)$ je fisioni poprečni presek ($\Sigma_f(h) > 0$ u m^{-1}), $\Phi(t, \mathbf{x})$ je neutronski fluks - rešenje sistema (5), odnosno broj neutrona generisanih po jedinici površine i vremena ($\Phi(t, \mathbf{x}) \geq 0$ u $m^{-2}s^{-1}$). U jednačini (4)(c),

$$S_{h,\Phi} := \mathbb{E}\Sigma_f(h)\Phi(t, \mathbf{x}) \tag{6}$$

predstavlja energiju jezgra proizvedenu pri reakciji fisije ($S_{h,\Phi} > 0$ u $W \cdot m^{-3}$).

U (5), $D(h) > 0$ je difuzioni koeficijent, V,v,β i $\frac{1}{\Lambda}$ su striktno pozitivne konstante koje predstavljaju normu brzine emisije neutrona ($V = \frac{2E}{m_n}$, gde je m_n atomska masa neutrona), prosečan broj emitovanih neutrona pri fisiji, odnos zakasnelih fisionih neutrona i karakteristično vreme odložene emisije neutrona. Strogo pozitivna funkcija $\Sigma_a(h)$ predstavlja poprečni presek apsorpcije, nepoznata $c(t, \mathbf{x}) \geq 0$ krakteriše tok zakasnelih neutrona i V_c je odloženi neutronski fluks.

Ukupna snaga jezgra reaktora je data sa:

$$\mathbb{P}(t) = \int_\Omega S_{h,\phi}(t, \mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbb{E}\Sigma_f(h)\Phi(t, \mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

Možemo preformulisati (6) na sledeći način:

$$S_{h,\Phi} = \mathbb{P}(t) \times \frac{\mathbb{E}\Sigma_f(h)\Phi(t, \mathbf{x})}{\int_\Omega \mathbb{E}\Sigma_f(h)\Phi(t, \mathbf{x})\, d\mathbf{x}} \tag{7}$$

Tada, (4)(c) postaje:

$$\partial_t(\rho E) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} E) = \mathbb{P}(t) \times \frac{\mathbb{E}\Sigma_f(h)\Phi(t, \mathbf{x})}{\int_\Omega \mathbb{E}\Sigma_f(h)\Phi(t, \mathbf{x})\, d\mathbf{x}} + \rho\mathbf{g} \cdot \mathbf{u}. \tag{8}$$

Ova formulacija nije interesantna niti korisna kada je $\mathbb{P}(t)$ nepoznato ali, kako to ovde nije slučaj, možemo je iskoristiti umesto jednačine (4)(c).

5.2 Stacionarni model u jednoj dimenziji

Ubacivanjem izraza koji imamo za energiju $E(t,x) = \frac{|\mathbf{u}(t,\mathbf{x})|^2}{2} + h(t,\mathbf{x}) - \frac{p(t,\mathbf{x})}{\rho(t,\mathbf{x})}$ u jednačinu (4)(c), dobijamo njoj ekvivalentan zapis:

$$\rho(\partial_t h + \mathbf{u} \cdot \nabla h) = \partial_t p + \mathbf{u} \cdot \nabla p + \mathbb{E}\Sigma_f(h)\Phi(t,\mathbf{x}) \tag{9}$$

odnosno dobijamo jednačinu u kojoj figuriše entalpija h. Termodinamički pritisak u (4)(b) menjamo pritiskom π koji nam daje jednačina stanja $P(\rho; h)$ i za koji pretpostavljamo da je konstantan. Ta pretpostavka dolazi kao posledica *Low Mach* režima. Kako smo u jednoj dimenziji, $\Omega = [0, L]$, gde $L > 0$ predstavlja visinu jezgra reaktora.

Stacionarni sistem (4)(5) u jednoj dimenziji u režimu *Low Mach* ima sledeću formu:

$$\begin{cases} \frac{d}{dz}(\rho u) = 0 & (a) \\ \frac{d}{dz}(\rho u^2 + \pi) = \rho g & (b) \\ \rho u \frac{d}{dz} h = \mathbb{E}\Sigma_f(h)\Phi(z) & (c) \end{cases} \tag{10}$$

i

$$\begin{cases} -\frac{d}{dz}[D(h)\frac{d}{dz}\Phi(z)] + [\Sigma_a(h) - \gamma\Sigma_f(h)(1- \quad \beta)]\Phi(z) - \lambda c = 0 \\ \lambda c - \gamma\Sigma_f(h)\Phi(z)\beta = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Kako više nemamo vremensku promenljivu, sistem (11) svodi se na jednačinu:

$$-\frac{d}{dz}[D(h)\frac{d}{dz}\Phi(z)] + [\Sigma_a(h) - \gamma\Sigma_f(h)]\Phi(z) = 0. \tag{12}$$

Za sistem termohidraulike u 1D, granični uslovi na ulazu $(z = 0)$ su dati sa:

$$\begin{cases} (\rho u)|_{z=0} = D_e > 0 \\ h|_{z=0} = h_e \end{cases} \tag{13}$$

gde D_e i h_e predstavljaju stopu protoka i entalpiju na ulazu. Obe vrednosti su date.

Sistemu neutronike u 1D odgovaraju naredni granični uslovi:

$$\begin{cases} \Phi|_{z=0} = o \\ \Phi|_{z=L} = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Cilj je naći netrivijalno rešenje:

$$\forall z \in (0, L) : \Phi(z) > 0. \tag{15}$$

Ako malo bolje pogledamo sistem (10) sa uslovima (13), imamo da je $(\rho u)|_{z=0} = D_e > 0$ i $\frac{d}{dz}(\rho u) = 0 \to \rho u = const$. Ove dve jednakosti zajedno daju

$$\rho u = D_e, \qquad \forall z \in [0, L]$$

odnosno zaključujemo da je protok konstantan.
Tada, sistem (10)(11) postaje:

$$\begin{cases} D_e \frac{d}{dz} h(z) = \mathbb{E}\Sigma_f(h)\Phi(z) & (a) \\ -\frac{d}{dz}[D(h)\frac{d}{dz}\Phi(z)] + [\Sigma_a(h) - \gamma\Sigma_f(h)]\Phi(z) = 0 & (b) \end{cases} \tag{16}$$

uz granične uslove:

$$\begin{cases} h|_{z=0} = h_e \\ \Phi|_{z=0} = o \\ \Phi|_{z=L} = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Fokusiramo se na rešavanje (16)(17) i na trenutak zaboravljamo $\rho(z)$, u(z) i $\pi(z)$. Njih dobijamo naknadno kao posledicu nalaženja rešenja $(\Phi(z), h(z))$. Naime, gustina ρ i unutrašnja entalpija h povezane su preko jednačine stanja $\rho = \varrho(h)$, gde je $\varrho(\cdot)$ data funkcija. Činjenica da jednačina stanja $\varrho(h)$ zavisi samo od h dolazi kao posledica *Low Mach* režima. Potom dobijamo brzinu u(z) is uslova

$$\rho(z)u(z) = D_e.$$

Na kraju, dinamički pritisak π dobijamo integracijom jednačine (10)(b) i korišćenjem graničnog uslova $\pi(L) = \pi_*$, gde je π_* pritisak na izlazu jezgra.

U [1] se može naći konstrukcija analitičkog rešenja (16)(17) kada su D(h) i $\Sigma_f(h)$ pozitivne konstante, $\Sigma_a(h)$ funkcija koja zavisi od h. U [3] je obrađen i opštiji slučaj, dopuštajući da D(h) i $\Sigma_f(h)$ budu takođe funkcije od h.

Napomena: Ako $\Sigma_a(h)$ ne bi bila funkcija koja zavisi od h, odnosno ako bi bila konstanta kao i $\Sigma_f(h)$, tada rešenja sistema neutronike i sistema termohidraulike ne *bi međusobno zavisila jedno od drugog. Naime, tada bismo sistem neutronike sveli na jednačinu po* Φ*:*

$$-\frac{d}{dz}[D(h)\frac{d}{dz}\Phi(z)] + (\Sigma_a - \gamma\Sigma_f)\Phi(z) = 0$$

koju bismo rešili i rešenje ubacili u sistem termohidraulike, dobijajući h(z). Iako bi to znatno olakšalo rešavanje, ta pretpostavka nije fizički opravdana i nećemo je koristiti.

5.3 Dva pristupa za rešavanje u 1D

Kako bismo dobili netrivijalno rešenje sistema neutronike ($\Phi > 0$), uvodimo multiplikativni koeficijent k_{eff} na sledeći način:

$$-\frac{d}{dz}[D(h)\frac{d}{dz}\Phi(z)] + [\Sigma_a(h) - \frac{\gamma\Sigma_f(h)}{k_{eff}}]\Phi(z) = 0 \tag{18}$$

tako da je $k_{eff} > 0$ maksimalno k za koje vazi da operator

$$-\frac{d}{dz}[D(h)\frac{d}{dz}] + [\Sigma_a(h) - \frac{\gamma\Sigma_f(h)}{k}]$$

ima element različit od nule u svom jezgru (odnosno, da jednačina (18) ima netrivijalno rešenje).Jednačinu (16)(b) menjamo sa (18). Dakle, sistem postaje:

$$\begin{cases} D_e\frac{d}{dz}h(z) = \mathbb{E}\Sigma_f(h)\Phi(z) & (a) \\ -\frac{d}{dz}[D(h)\frac{d}{dz}\Phi(z)] + [\Sigma_a(h) - \frac{\gamma\Sigma_f(h)}{k_{eff}}]\Phi(z) = 0 & (b) \end{cases} \tag{19}$$

uz početne uslove:

$$\begin{cases} h|_{z=0} = h_e \\ h|_{z=L} = h_s \\ \Phi|_{z=0} = 0 \\ \Phi|_{z=L} = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Pored uzlova (15), potrebno je da važi i:

$$h_s > h_e.$$

Kako je entalpija rastuća funkcija, postavljamo uslov

$$h' > 0$$

čime naravno zadovoljavamo i uslov da je entalpija na izlazu veća od one na ulazu. Kada je data vrednost h(z), proučavanje jednačine (18) je opravdano činjenicom da je rešenje sistema (5) $\Phi(t,z)$ u dugom vremenskom periodu okarakterisano vrednošću k_{eff}. Naime, nalaženje rešenja (18) za $k_{eff} = 1$ svodi se na nalaženje kritičnog, stabilnog rešenja (5). S druge strane, rešavanje (18) kada je $k_{eff} > 1$ $(0 < k_{eff} < 1)$ se svodi na nalaženje superkritičnog (subkritičnog) rešenja, gde rešenje sistema (5) teži ka beskonačnosti (ka nuli) u dužem vremenskom periodu.

Obe jednačine, (16)(b) i (19)(b), smatramo stacionarnim modelom neutronike. Ali, u zavisnosti od toga koju od njih koristimo i rešavamo, spajanje sa termohidraulikom biće različito. Razlog za to je jednostavan - nepoznate i ograničenja se razlikuju.

1. Nepoznata: unutrašnja entalpija na izlazu h_s

   Pristup koji koriste termohidrauličari svodi se na nalaženje unutrašnje entalpije na izlazu (samim tim i temperature na izlazu). U ovom slučaju, nalazimo rešenje sistema (16) sa uslovima (17). Entalpija na izlazu je data sa: $h_s = h(z = L)$. Snaga jezgra je data sa:

$$\mathbb{P} = S \times \int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h)\Phi(z)dz. \tag{21}$$

   Dakle, integraljenjem (16)(a), dobijamo:

$$\mathbb{P} = S \times D_e \times (h_s - h_e). \tag{22}$$

   Koristeći (21), možemo preformulisati (16) na sledeći način:

$$\begin{cases} SD_e\frac{d}{dz}h(z) = \mathbb{P} \times \frac{\mathbb{E}\Sigma_f(h)\Phi(z)}{\int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h)\Phi(z)dz} & (a) \\ -\frac{d}{dz}[D(h)\frac{d}{dz}\Phi(z)] + [\Sigma_a(h) - \gamma\Sigma_f(h)]\Phi(z) = 0 & (b) \end{cases} \tag{23}$$

   gde je $\mathbb{P}$ pozitivna konstanta koja zadovoljava (22). Ova formulacija je interesantna i korisna kada je P dato. U narednoj lemi, možemo videti odnos između rešenja (16)(17) i (20)(23).

   Lema: (a) Neka je (h,Φ) rešenje od (16)(17) i neka je $\mathbb{P} = S \times \int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h)\Phi(z)dz$. Tada je $(h, \mu\Phi)$ rešenje od (20)(23) za svaku konstantu $\mu > 0$.

(b) Neka je (h, Φ) rešenje od (20)(23) i neka je $\mu = \frac{D_e(h_s - h_e)}{\int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h)\Phi(z)dz}$. Tada je $(h, \mu\Phi)$ rešenje od (16)(17).
Dokaz ove leme sledi iz konstrukcije sistema (23).

2. Nepoznata: multiplikativni koeficijent k_{eff}

Ovo je pristup neutronike gde je snaga jezgra $\mathbb{P}$ poznata (i naravno strogo pozitivna). Kao posledica, h_s (pa time i temperatura na izlazu) dobijaja se iz relacije (22). Ovde rešavamo (19)(20). Neutronski fluks je fiskiran kako je

$$\mathbb{P} = S \times \int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h)\Phi(z)dz = S \times D_e \times (h_s - h_e). \tag{24}$$

Kako je $\mathbb{P}(t)$ poznato, moguće je modifikovati (19) i dobiti njemu ekvivalentan model:

$$\begin{cases} SD_e \frac{d}{dz}h(z) = \mathbb{P} \times \frac{\mathbb{E}\Sigma_f(h)\Phi(z)}{\int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h)\Phi(z)dz} & (a) \\ -\frac{d}{dz}[D(h)\frac{d}{dz}\Phi(z)] + [\Sigma_a(h) - \frac{\gamma\Sigma_f(h)}{k_{eff}}]\Phi(z) = 0 & (b) \end{cases} \tag{25}$$

Lema: (a) Neka je (h, Φ) jedno rešenje sistema (19)(20). Tada je $\forall \mu > 0$ $(\mu = const)$ $(h, \mu\Phi)$ rešenje od (20)(25) .

(b) Neka je (h, Φ) bilo koje rešenje sistema (20)(25) i $\mu = \frac{D_e(h_s - h_e)}{\int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h)\Phi(z)dz}$. Tada je $(h, \mu\Phi)$ rešenje od (19)(20).
Dokaz ove leme sledi iz konstrukcije sistema (25).

Formulacije (16)(17) i (20)(25) uglavnom imaju veću primenu u termohidraulici i neutronici, redom.

5.4 Veza između dva pristupa

Numeričke metode za rešavanje sistema termohidraulike (16)(17) i sistema neutronike (20)(25) su a priori različite. Takođe, (16)(17) ima jedinstveno rešenje dok ih (20)(25) ima beskonačno mnogo, kada bar jedno postoji. Naredna lema (ref. [1]) nam daje vezu između ova dva sistema.

Lema: (a) Neka je (h, Φ) rešenje sistema (16)(17) i neka je $\mathbb{P} = S \times \int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h)\Phi(z)dz$. Tada je $(h, \mu\Phi)$ rešenje sistema (20)(25) za $k = 1$ i za sve konstante $\mu > 0$.

(b) Neka je (h, Φ) jedno od rešenja sistema (25)(20) i neka je $\mu = \frac{D_e(h_s - h_e)}{\int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h)\Phi(z)dz}$. Tada je $(h, \mu\Phi)$ rešenje sistema (16)(17), kada je $\Sigma_a(h)$ u (16) zamenjeno sa:

$$\tilde{\Sigma}_a(h) = \Sigma_a(h) + (1 - \frac{1}{k_{eff}})\gamma\Sigma_f(h).$$

5.5 Metod karakterističnih korena

U ovom delu, predstavljamo algoritam za nalaženje vrednosti parametra k_{eff}. Za početak, definišemo sledeće operatore:

$$L(h)\Phi := -\frac{d}{dz}[D(h)\frac{d}{dz}\Phi] + \Sigma_a(h)\Phi,$$

$$R(h)\Psi := \frac{1}{\sqrt{\Sigma_f(h)}}\Psi,$$

$$P(h)\Psi := R(h)L(h)R(h)\Psi.$$

Nalaženje rešenja jednačine

$$-\frac{d}{dz}[D(h)\frac{d}{dz}\Phi(z)] + [\Sigma_a(h) - \frac{\gamma\Sigma_f(h)}{k_{eff}}]\Phi(z) = 0$$

ekvivalentno je nalaženju rešenja Ψ jednačine

$$P(h)\Psi = \frac{\gamma}{k_{eff}}\Psi.$$

Zatim, Φ dobijamo iz odnosa:

$$\Phi = R(h)\Psi.$$

Kada imamo ovako postavljen problem, Ψ predstavlja karakteristični vektor operatora P(h) dok je odgovarajući karakteristični koren $\frac{\gamma}{k_{eff}}$.

Neka je n indeks trenutne iteracije i neka u svakoj iteraciji imamo

$$P_n := P(h_n)$$
$$L_n := L(h_n).$$

Vrednosti ovih operatora su poznate u n-toj iteraciji jer imamo vrednost h_n. Svaka iteracija n sačinjena je od naredna četiri koraka:

1. Imamo h_n, tražimo $(k_n, \tilde{\Psi}_n)$, gde je $\frac{\gamma}{k_n}$ najmanji karakteristični koren operatora P_n i $\tilde{\Psi}_n$ odgovarajući karakteristični vektor. Kako teorija o ovim operatorima kaže (Sturm-Liouville operatori), karakteristični vektor $\tilde{\Psi}_n$ je striktno pozitivan ili striktno negativan. Ovde se bira stiktno pozitivna vrednost da bi bio zadovoljen uslov:
$$\forall z \in (0, L): \qquad \Phi(z) > 0.$$
Takođe, prema istoj teoriji, karakteristični vektori koji odgovaraju drugim karakterističnim korenima nisu konstantnog znaka na [0,L], što opravdava potragu za najmanjim karakterističnim korenom.

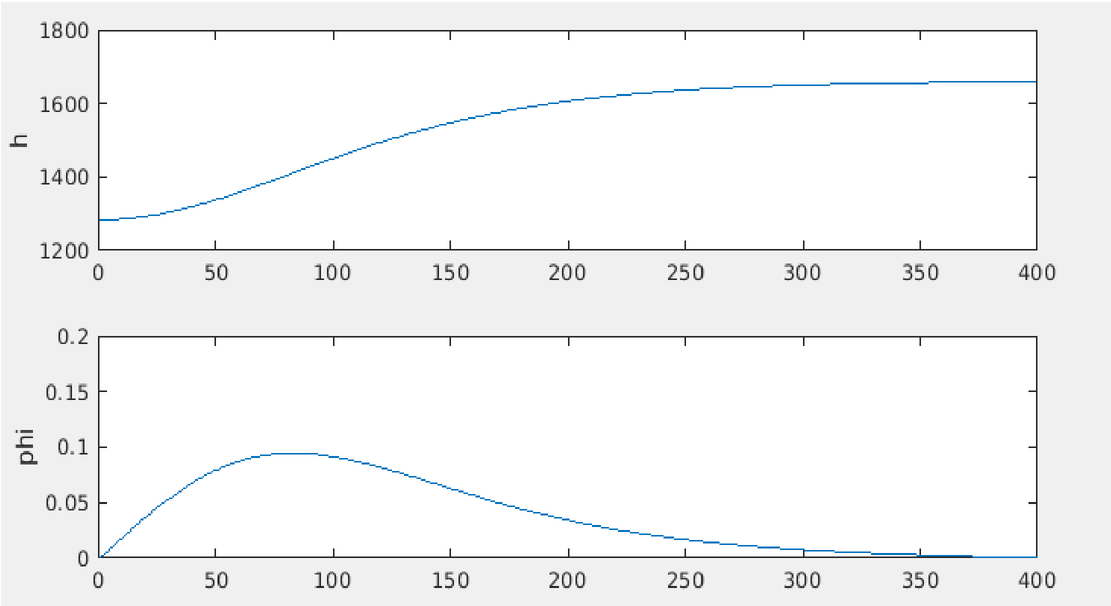
2. Računamo
$$\tilde{\Phi}_n = R(h_n)\tilde{\Psi}_n$$
koje zadovoljava
$$L_n\tilde{\Phi}_n = L_n R(h_n)\tilde{\Psi}_n = R(h_n)^{-1}P_n\tilde{\Psi}_n = \frac{\gamma}{k_n}(R(h_n))^{-2}\tilde{\Phi}_n = \frac{\gamma\Sigma_f(h_n)}{k_n}\tilde{\Phi}_n.$$

3. Φ_n dobijamo normalizacijom
$$\Phi_n = \frac{\tilde{\Phi}_n}{\int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h_n(x))\tilde{\Phi}_n(x)dx}.$$
Dakle, ova funkcija je jedinstveno pozitivno rešenje problema $L_n\Phi_n = \frac{\gamma\Sigma_f}{k_n}\Phi_n$ tako da važi
$$\int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h_n(x))\Phi_n(x)dx = 1.$$

4. Modifikujemo entalpiju na sledeći način:
$$\begin{cases} SD_e\frac{d}{dx}h_{n+1} = \mathbb{P}\mathbb{E}\Sigma_f(h_n(x))\Phi_n \\ h_{n+1}(0) = h_e. \end{cases}$$

5.5.1 Rezultati

Kod za ovaj algoritam napisan je u programskom jeziku Matlab i ovo su rezultati koji daje:



Slika 8: Rešenje (h, Φ) dobijeno metodom karakterističnih korena za $h_s = 1685$

Za različite vrednosti izlazne entalpije h_s, dobijamo i različite vrednosti parametra k_{eff}. U narednoj tabeli prikazani su rezultati dobijeni pomoću ovog algoritma.

h_s	k_{eff}
1470.85 $kJ \cdot kg^{-1}$	1.11048
1538.8 $kJ \cdot kg^{-1}$	1.11025
1658 $kJ \cdot kg^{-1}$	1.10986

U [1] se mogu naći vrednosti koje su korišćene u ovom kodu (npr. vrednosti pojedinih parametara) i koje mi nadalje usvajamo.

6 Newton-Shooting metod

U ovom poglavlju, opisaćemo metod koji je osmišljen sa ciljem da nađe dopustivo rešenje sistema neutronike i sistema termohidraulike, u nadi da će se neki nedostaci koje je imao metod karakterističnih korena poboljšati. Ovaj metod je baziran na Njutnovom postupku i metodu (po)gađanja (eng. *Shooting method*). Metod karakterističnih korena, opisan u prethodnom poglavlju, konvergira samo u nekim specijalnim slučajevima (kada je $\Sigma_a(h)$ linearno). Kako je to iterativni postupak, želimo da obezbedimo konvergenciju, što nije slučaj sa opštim Σ_a, čak ni numerički. Ideja je da taj postupak zamenimo drugim, koji bi radio isto, uz poboljšanje u vidu ne postojanja zavisnosti konvergencije od linearnosti.

6.1 Njutnov metod

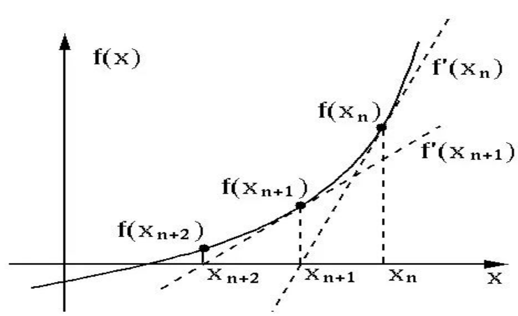
Numeričkim simulacijama, utvrđeno je da iterativni postupak karakterističnih korena konvergira samo u nekim posebnim slučajevima (kada je $\Sigma_a(h)$ linearna funkcija). Ideja da koristimo Njutnov postupak je došla iz činjenice da on radi sa nelinearnim funkcijama. U numeričkoj analizi, Njutnov metod sukcesivno nalazi bolje aproksimacije korena (ili nula) funkcije. Polazimo od funkcije f, njenog prvog izvoda f' i proizvoljne početne vrednosti njenog korena x_0. Dobijamo bolju aproksimaciju korena x_1 na sledeći način:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Postupak se nastavlja

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

sve dok ne dobijemo dovoljno dobru aproksimaciju rešenja.



Slika 9: Njutnov metod

Naravno, Njutnov postupak garantuje konvergenciju samo ako su zadovoljeni uslovi teoreme o njegovoj kvadratnoj konvergenciji:

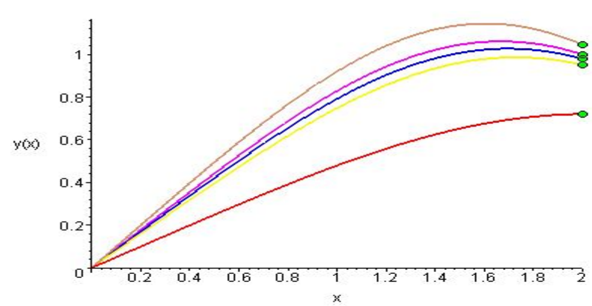
1. prvi izvod funkcije različit od nule,
2. drugi izvod funkcije neprekidan,
3. početna vrednost dovoljno blizu rešenja.

6.2 Shooting metod

Shooting metod se koristi u numeričkoj analizi za rešavanje graničnih problema (BVP) tako što se svode na početne probleme (IVP). Biraju se različiti pravci dok ne pogodimo, kako ime metoda i kaže, baš onaj koji daje željenu graničnu vrednost. Razmotrimo sledeći primer BVP:

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, \frac{dy}{dx}) \\ y(a) = y_a \\ y(b) = y_b. \end{cases}$$

Prvi korak je zamena uslova na granici $y(b) = y_b$ sa $y'(a) = y_a$. Izbacili smo uslov koji nam je dat i umesto njega koristimo nešto čiju vrednost ne znamo. Rešavanje takvog sistema standardnim metodama zahteva postojanje graničnih uslova y(a) i y'(a). Dakle, napravićemo neki proizvoljan izbor za $y'(a) = y_a$, što predstavlja drugi korak. Sa prvim izborom za $y'(a)$ dobijamo neko rešenje, recimo y_1. Treći korak je još jedan odabir vrednosti za $y'(a)$, takođe potpuno proizvoljno, za koji dobijamo još jedno rešenje, y_2. Na kraju, interpolacijom možemo odrediti onu vrednost y' koja zadovoljava uslov na granici $y(b) = y_b$. Primenom ovih koraka, umesto polaznog BVP dobijamo IVP koji treba rešiti, za šta se uglavnom koristi Euler ili Runge-Kutta metod.



Slika 10: Shooting metod

6.3 Konstrukcija

Posmatrajmo sledeći sistem:

$$\begin{cases} D_e \frac{d}{dz} h(z) = \mathbb{E}\Sigma_f \Phi(z) \\ -\frac{d}{dz}[D(h)\frac{d}{dz}\Phi(z)] + [\Sigma_a(h) - \frac{\gamma\Sigma_f}{k_{eff}}]\Phi(z) = 0 \end{cases} \tag{26}$$

sa početnim uslovima:

$$\begin{cases} h|_{z=0} = h_e \\ h|_{z=L} = h_s \\ \Phi|_{z=0} = 0 \\ \Phi|_{z=L} = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Primetimo da koristimo pretpostavu da je Σ_f konstanta, kao i ranije, što je fizički opravdano i smisleno koristiti. Međutim, $\Sigma_a(h)$ nije. Kasnije ćemo videti kako se $\Sigma_a(h)$ modelira.

Nakon izražavanja $\Phi(z)$ iz prve jednačine i ubacivanja u drugu, dobijamo običnu diferencijalnu jednačinu trećeg reda:

$$h'''(z) = -\frac{D'(h)}{D(h)}h'(z)h''(z) + \frac{1}{D(h)}[\Sigma_a(h) - \frac{\gamma}{k_{eff}}\Sigma_f]h'(z) \tag{28}$$

gde h' označava $\frac{dh}{dz}$. Dodatna pretpostavka koju koristimo jeste da je $D(h) = 1$, što svodi jednačinu na:

$$h'''(z) = [\Sigma_a(h) - \frac{\gamma\Sigma_f}{k_{eff}}]h'(z). \tag{29}$$

Ideja je da razmatramo i rešavamo sistem sa tri promenljive h, h', h":

$$\frac{d}{dz}\left\{ \begin{matrix} \text{h} \\ \text{h'} \\ \text{h"} \end{matrix} \right\}.$$

Za početak, svodimo ovu ODJ trećeg reda na 3×3 sistem ODJ-a. Da bismo to uradili, uvodimo smenu promenljivih:

$$\begin{cases} x_1(z) = h(z) \\ x_2(z) = h'(z) \\ x_3(z) = h''(z). \end{cases}$$

Diferenciranjem dobijamo:

$$\begin{cases} x_1'(z) = h'(z) = x_2(z) \\ x_2'(z) = h''(z) = x_3(z) \\ x_3'(z) = h'''(z) = [\Sigma_a(x_1(z)) - \frac{\gamma}{k_{eff}}\Sigma_f]x_2(z). \end{cases}$$

Sveli smo polaznu ODJ trećeg reda na sledeći sistem ODJ prvog reda:

$$\begin{cases} x_1'(z) = x_2(z) \\ x_2'(z) = x_3(z) \\ x_3'(z) = [\Sigma_a(x_1(z)) - \frac{\gamma}{k_{eff}}\Sigma_f]x_2(z) \end{cases} \tag{30}$$

sa početnim uslovima:

$$\begin{cases} x_1(0) = h_e \\ x_2(0) = 0. \end{cases}$$

Umesto polaznog, fokusiramo se na rešavanje ovog sistema ODJ. Pravo rešenje h(z), koje zadovoljava uslove na granici h_e i h_s, nije konstantno. Kao posledicu, dobijamo $\Phi(z)$ (koje takođe nije konstantno) pa samim tim, i rešenje polaznih sistema neutronike i termohidraulike.

Prvi pokušaj za rešavanje bio je da posmatramo k_{eff} kao dati parametar (za šta se pozivamo na rezultate ostvarene u [1] uz pomoć iterarativnog metoda karakterističnih korena) i da tražimo vrednost za α, tako da dobijemo rešenje sistema (30) i to ne bilo koje, već ono koje je dopustivo. Naglašavamo dopustivost rešenja jer se može dogoditi da dobijemo negativne vrednosti za neutronski fluks i opadajuću funkciju entalpije, na celom domenu ili na nekom njegovom delu, što nije fizički smisleno rešenje i takvo rešenje odbacujemo.

Takođe, posmatramo i obnuti slučaj, kada nametnemo vredsnot za k_{eff} i tražimo α, da bismo proverili da se dobijeni rezultati slažu. Nakon toga, uopštavamo postupak na dva nepoznata parametra α i k_{eff}, što i jeste realna situacija.

6.4 Jedan parametar

Cilj je naći netrivijano rešenje za $\phi(z)$. Imamo zadat granični uslov: $\Phi(0) = 0$. Potrebno je odrediti onu vrednost $\Phi'(0)$ (odnosno nagib funkcije Φ u nuli) koja ispunjava drugi granični uslov: $\Phi(L) = 0$ i uz koju dobijamo netrivijalno rešenje $\Phi \neq 0$. Tu koristimo shooting metod. Dodatna stvar o kojoj moramo voditi računa jeste to da $\Phi(z)$, samim tim i $h'(z)$, mora biti pozitivno na celom domenu da bi imalo fizičkog smisla.

Uvodimo sledeću notaciju:

$$\alpha = \Phi'(0) = c \cdot h''(0)$$

gde je $c = \frac{D_e}{\mathbb{E}\Sigma_f}$.

Rešavanju pristupamo na sledeći način. Biramo početnu vrednost za α i potom numerički rešavamo sistem (30). Za početno zadato α, dobijemo neku vrednostu za $\Phi(L)$. Kako je verovatnoća da smo pogodili baš onu vrednost koja ispunjava uslov na kraju intervala $\Phi(L) = 0$ veoma mala, nastavljamo postupak unutar petlje koristeći Njutnov postupak:

$$\alpha = \alpha - \frac{\beta}{\nabla_\alpha \beta}$$

gde je $\beta = c \cdot h'(L) = \Phi(L)$. Iz petlje izlazimo po ispunjavanju traženog uslova na granici. Njutnov postupak sukcesivno nalazi bolje apriksimacije korena funkcije. Konkretno u ovom primeru, sukcesivno tražimo α tako da je $\beta = 0$ $(\Phi(L) = 0)$.

Za aproksimaciju gradijenta, koristimo metod konačnih razlika:

$$\nabla_\alpha \beta \approx \frac{\beta_{new} - \beta_{old}}{2\epsilon}$$

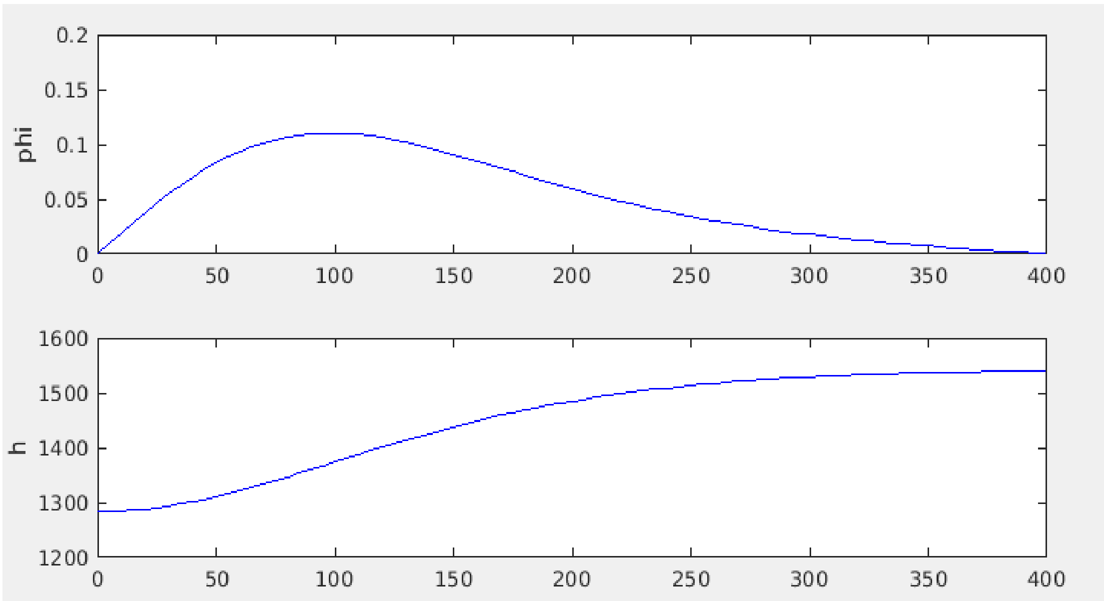
gde β_{old} i β_{new} predstavljaju vrednosti β dobijene pri promeni vrednosti α. Tačnije, β_{old} je vrednost β za $\alpha_{old} = \alpha - \epsilon$ i β_{new} je vrednost β za $\alpha_{new} = \alpha + \epsilon$.

Kao što smo već napomenuli, biramo inicijalnu vrednosti za parametar α i potom primenjujemo Njutnov metod. Ono oko čega moramo biti obazrivi jeste činjenica da proizvoljan izbor parametra nije uvek sasvim proizvoljan. Naime, mora biti razumno blizu rešenja da bi postupak konvergirao.

6.4 Jedan parametar

6.4.1 Rezultati

Naredni grafik prikazuje rezultate ostvarene u slučaju kada imamo jedan parametar α a k_{eff} namećemo kao datu veličinu ($k_{eff} = 1.110250$). Korišćene vrednosti parametara su iste kao u [1].



Slika 11: Rešenje (Φ, h), jedan parametar α za $h_s = 1538.8$

Kao rezultat, za ovako zadato k_{eff}, dobijamo $\alpha = 0.0225$.

Kada nametnemo vrednost za α i tražimo onu vrednost za k_{eff} koja daje rešenje, postupak je identičan. Razlog iz kog je ovo urađeno jeste da bismo potvrdili da dobijamo isti par rešenja (k_{eff}, α). Rezultati dobijeni na oba načina se potpuno poklapaju. Takođe, slažu se i sa rezultama koje daje postupak baziran na karakterističnim korenima opisan u prethodnom poglavlju.

6.5 Dva parametra: α, k_{eff}

Sada posmatramo dva parametra k_{eff} i α. Inicijalno, nisu nam poznate njihove vrednosti. Cilj je da nađemo onaj par (α, k_{eff}) koji daje netrivijalno rešenje $\Phi > 0$.

Metod primenjen sa jednim parametrom sada uopštavamo na dva. Kao i tamo, počinjemo sa odabirom početnih vrednosti za k_{eff} i α i za njih, rešavamo sistem (30). Njutnov postupak sada izgleda ovako:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ k_{eff} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ k_{eff} \end{bmatrix} - J^{-1} \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

gde J predstavlja matricu Jakobijana. Da bismo odredili elemente matrice J, ponovo koristimo konačne razlike. Dakle, za matricu Jakobijana

$$J = \begin{bmatrix} \nabla_\alpha \beta & \nabla_{k_{eff}} \beta \\ \nabla_\alpha \gamma & \nabla_{k_{eff}} \gamma \end{bmatrix}$$

koristimo aproksimacije gradijenata definisane na sledeći način:

$$\nabla_\alpha \beta = \frac{\beta_{new} - \beta_{old}}{2\epsilon}$$

$$\nabla_\alpha \gamma = \frac{\gamma_{new} - \gamma_{old}}{2\epsilon}$$

gde β_{old} i β_{new} označavaju promenu vrednosti β pri promeni α, zadržavajući istu vrednost za k_{eff}. Slično, γ_{old} i γ_{new} predstavljaju promenu vrednosti γ kada menjamo samo parametar α. (Primera radi, recimo da imamo neke vrednosti za α i k_{eff} i za njih dobijamo β i γ. Potom, za $\alpha_{old} = \alpha - \epsilon$ i k_{eff}, dobijamo β_{old} i γ_{old}. Za $\alpha_{new} = \alpha + \epsilon$ i k_{eff} dobijamo β_{new} i γ_{new}.)
Analogno, računajući novu i staru vrednost za β i γ pri promeni k_{eff} i zadržavajući istu vrednost za α, aproksimiramo i gradijente u odnosu na k_{eff}:

$$\nabla_{k_{eff}} \beta = \frac{\tilde{\beta}_{new} - \tilde{\beta}_{old}}{2\epsilon}$$

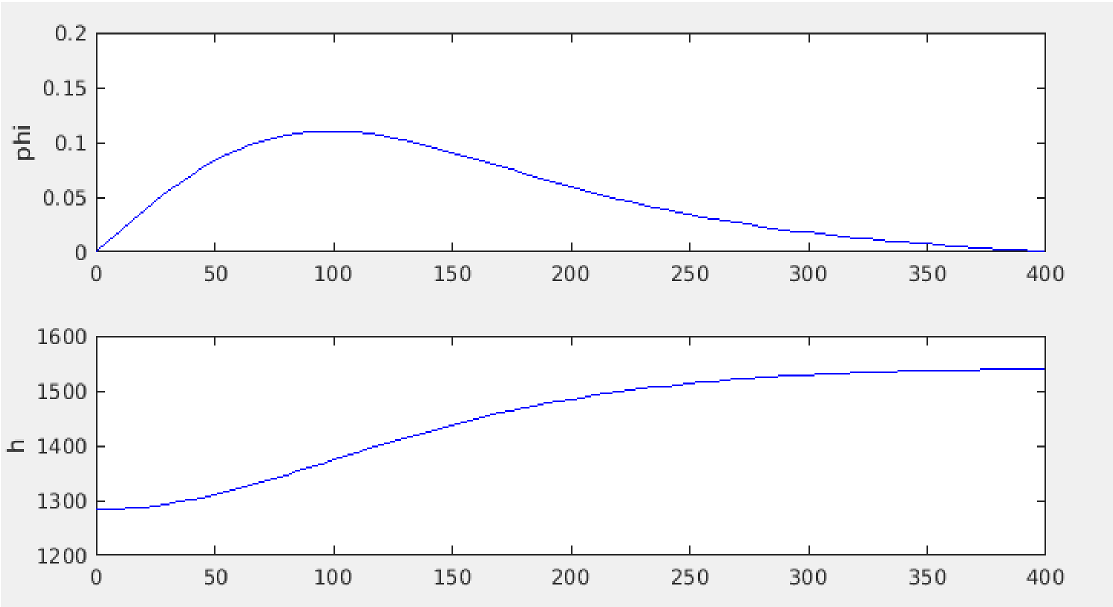
$$\nabla_{k_{eff}} \gamma = \frac{\tilde{\gamma}_{new} - \tilde{\gamma}_{old}}{2\epsilon}$$

gde $\tilde{\beta}_{new}$ i $\tilde{\beta}_{old}$, kao i u prethodnom slučaju, predstavljaju promenu vrednosti β kada promenimo k_{eff} a α fiksiramo. Identično važi i za $\tilde{\gamma}_{new}$ and $\tilde{\gamma}_{old}$.

6.5 Dva parametra: α, k_{eff}

6.5.1 Rezultati

Ponovo dobijamo isto rešenje (h, Φ) koje se slaže sa rezultatima ostvarenim metodom karakterističnih korena, kao i sa algoritmima sa jednim parametrom. Korišćene vrednosti parametara su iste kao u [1].



Slika 12: Rešenje (Φ, h), dva nepoznata parametra α, k_{eff} za $h_s = 1538.8$

Za ovako odabrano h_s, dobijamo sledeće vrednosti parametara:

$$\alpha = 0.0239$$

,

$$k_{eff} = 1.1102.$$

6.6 Zaključak

Ideja novog metoda je bila da zameni postojeći metod baziran na karakterističnim korenima. Kao što je pokazano u ovom poglavlju, novi metod daje zadovoljavajuće rezultate. Rezultati dobijeni primenom oba algoritma se poklapaju. Prednost novog metoda je u tome što ne zavisi od linearnosti pojedinih parametara (na primer $\Sigma_a(h)$) dok stari metod radi isključivo pod tom pretpostavkom. Sa druge strane, za neke vrednosti, novi metod ne radi ispravno. Uzrok tome su male vrednosti elemenata matrice Jakobijana koje, kada tražimo njenu inverznu matricu J^{-1}, prave problem i ona postaje singularna.

Kako je cilj primena novog metoda za bilo koji problem slične formulacije, ne samo ovog konkretnog o kome je reč u radu, postoji jedan nedostatak koji bi treblo otkloniti nekom modifikacijom postupka u budućnosti. Kao što smo napomenuli, počinjemo sa odabirom početnih vrednosti za α i k_{eff} da bismo bili u mogućnosti da primenimo Njutnov postupak. Poznato je da sam postupak ne mora dati rešenje, ili bar ne ono koje je smisleno, kada početna vrednost nije zadata tako da je dovoljno blizu rešenja. Takođe, može se desiti da postupak u tom slučaju ne konvergira. Ovde to nije predstavljalo problem jer je rešenje koje treba da dobijemo poznato pa su početne vrednosti odabrane dobro. Ali, ono što se može primetiti jeste činjenica da je postupak veoma osetljiv čak i na male promene početnih vrednosti parametara. Dešava se da dobijemo rešenje koje nije dopustivo, recimo negativan fluks, ili čak da ne dobijemo rešenje uopšte. Novi metod zamenjuje postojeći za spajanje neutronike i termohidraulike u ovako postavljenim uslovima, ima veliku prednost nezavisnoti od linearnosti problema koju daje Njutnov postupak, ali da bi se uopštio, ovo je nešto čemu treba pridati značaj u daljem radu.

U narednom poglavlju, napravilćemo još jedan pokušaj pristupajući spajanju sistema i rešavanju posmatrajući naš problem kao problem optimizacije. Ideja je bila naći način za rešavanje tako da se ne suočavamo sa odabirom početnih vrednosti parametara, ili bar da one nemaju veliki uticaj. Kako je poznato da multiplikativni koeficijent k_{eff} mora biti oko jedinice (preciznije, k_{eff} biramo tako da bude blizu vrednosti datih u tabelli za algoritam karakterističnih korena u prethodnom poglavlju, približno 1.11), fokus se stavlja na parametar α i nezavisnost algoritma od njegove početne vrednosti. Takođe, na ovaj način možemo izbeći problem računanja inverzne matrice Jakobijana, pa samim tim i problem koji stvaraju singulariteti.

7 Metod optimizacije

Želimo da nađemo rešenje nekog problema tako da zadovoljimo određene uslove. Zašto ga ne bismo postavili kao problem minimizacije sa ograničenjem, tako da predmet minimizacije bude razlika dobijenog rešenja od traženog a ograničenja uslovi koje namećemo?

Motivacija za ovu ideju je bila, pre svega, otklanjanje osetljivosti na početne vrednsoti parametara ali i činjenica da u prethodnom metodu nije posvećena pažnja tome da uslov $h'(z) \geq 0$ treba da bude zadovoljen na celom domenu. Ovaj uslov nam govori da neutronski fluks mora biti pozitivan, do na konstantu ($\Phi(z) = \frac{D_e}{\mathbb{E}\Sigma_f}\frac{d}{dz}h(z)$). U ovom metodu isključuje se mogućnost negativnog Φ.

7.1 Metod penala

Pođimo od sledećeg optimizacionog problema:

$$min \quad f(x)$$

$$s.t. \quad c(x) \leq 0.$$

Metod penala funkcioniše na sledeći način. Funkciji cilja f dodajemo:

$$\frac{1}{\epsilon} max \quad \{0, c(x)\}^2$$

gde je ϵ veoma mali proizvoljan broj.
Problem minimizacije sada ima sledeći oblik:

$$min \quad \{f(x) + \frac{1}{\epsilon} max\{0, c(x)\}^2\}.$$

Dodati član naziva se penal funkcijom a $\frac{1}{\epsilon}$ penal parametrom. Penal funkcija na neki način predstavlja meru u kojoj je prekršeno ograničenje. Ako nema odstupanja, odnosno ako je ograničenje zadovoljeno, penal funkcija biće nula. U suprotnom, penal funkcija imaće pozitivnu vrednost i pomnožena sa penal parametrom, koji ima veliku vrednost (jer ϵ biramo da bude veoma mali broj), daće pozitivan veliki broj. Razlog iz kog ovaj metod ima baš ovakvu konstrukciju jeste to da u slučaju kada ograničenje nije zadovoljeno, penal (uslovno rečeno kazna) bude dodat na funkciju cilja i da, na taj način, bude onemogućeno dostizanje minimuma.
Kada je ograničenje $c(x) \geq 0$, razlika je samo u tome što penal funkcija ima oblik

$$min \ \{0, c(x)\}^2.$$

Ovaj metod ćemo u narednom delu iskoristiti pri rešavanju problema minimizacije formulisanog tako da tražimo rešenje sistema neutronike i termohidraulike.

7.2 Formulacija problema

Cilj je naći rešenje za (29) tako da su zadovoljena sledeća ograničenja:

$$\begin{cases} \Phi(L) = 0 \\ h(L) = h_s \\ h'(z) \geq 0 \end{cases}$$

(i naravno, treba da važi da je $k_{eff} > 0$). Problem minimizacije ima sledeći oblik:

$$min \quad \{(h(L) - h_s)^2 + (\Phi(L) - 0)^2 + \frac{1}{\epsilon_1}||h' \cdot \delta_h||_2 + \frac{1}{\epsilon_2}|k_{eff} \cdot \delta_{k_{eff}}|\}$$

gde su ϵ_1 i ϵ_2 proizvoljno male vrednosti (npr. 10^{-4} - moraju biti odabrani dovoljno mali tako da spečavaju dobijanje nedopustivog rešenja. Njihov red veličine može biti "pogođen" posmatrajući red veličine greške koju pravimo za $h(L) - h_s$ i $\Phi(L) - 0)$. Funkcije δ_h i $\delta_{k_{eff}}$ su definisane kao:

$$\delta_h = \begin{cases} 1, & za\, h'(z) < 0 \\ 0, & ina\check{c}e \end{cases} \quad , \delta_{k_{eff}} = \begin{cases} 1, & za\, k_{eff} < 0 \\ 0, & ina\check{c}e \end{cases} \quad .$$

Funkcija cilja sada je:

$$(h(L) - h_s)^2 + (\Phi(L) - 0)^2$$

jer želimo da zadovoljimo prva dva uslova, dok penal, koji se brine za ispunjavanje trećeg (i $k_{eff} > 0$), ima sledeći oblik:

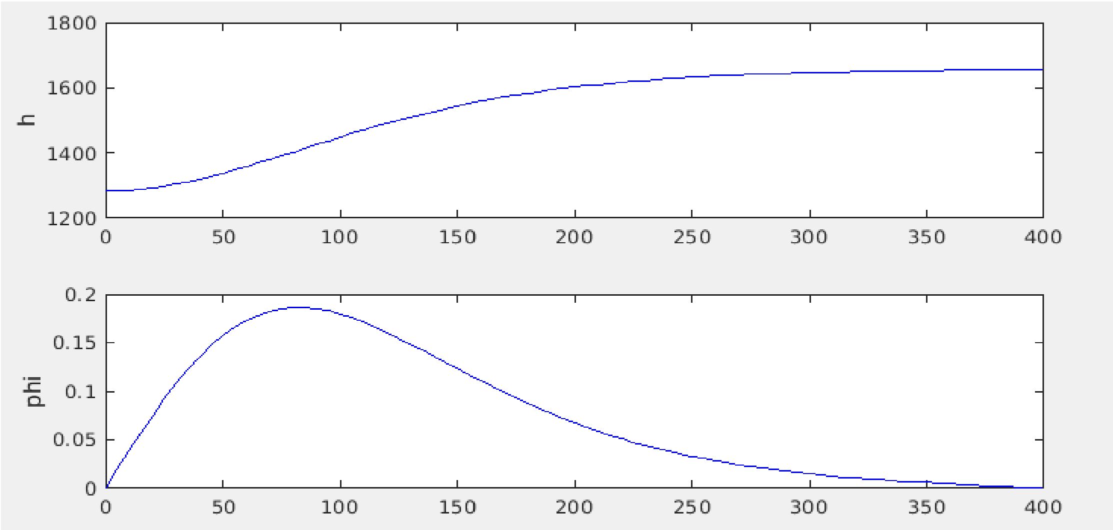
$$\frac{1}{\epsilon_1}||h' \cdot \delta_h||_2 + \frac{1}{\epsilon_2}|k_{eff} \cdot \delta_{k_{eff}}|.$$

Kada god imamo negativnu vrednost za h' (samim tim i za Φ) ili za k_{eff}, dodajemo penal na funkciju cilja i sprečavamo dostizanje minimuma u tom slučaju. Na ovaj način osiguravamo zadovoljenje ograničenja i rešenje koje dobijemo biće dopustivo.

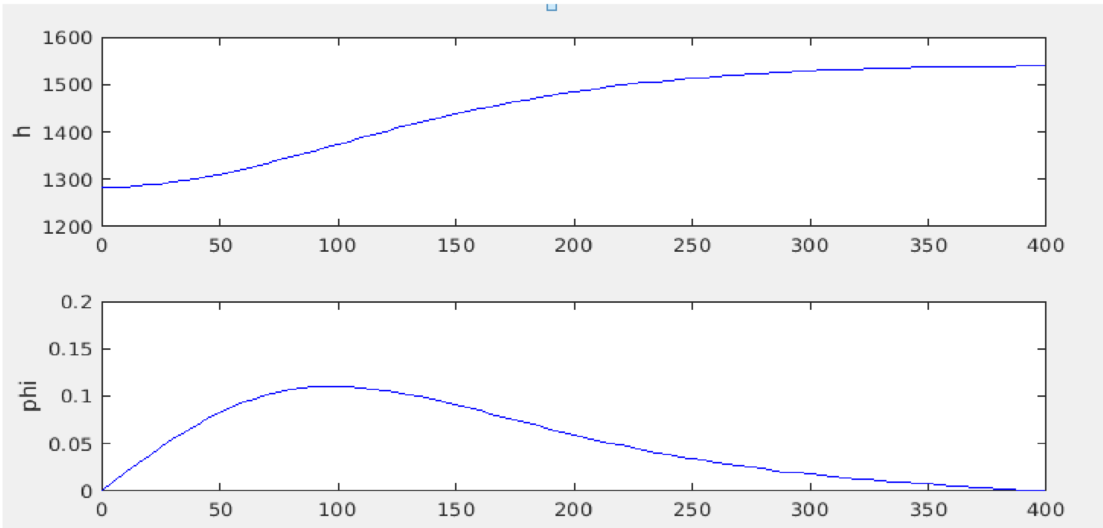
Ubacivanjem ograničenja u samu funkciju cilja, svodimo problem minimizacije sa oraničenjem na problem optimizacije bez ograničenja. Na taj način, omogućavamo korišćenje funkcije *fminsearch* koja nalazi minimum funkcije bez ograničenja, polazeći od neke ocene početnih vrednosti. Razlika između odabira početnih vrednosti u ovom metodu i u Newton-Shooting metodu ogleda se u tome što ovde ne moramo odabrati uslove koji su blizu rešenja. Izbor α je skoro potpuno proizvoljan. Za $k_{eff} > 0$ unapred znamo da treba biti odabrano oko jedinice, zbog same konstrukcije sistema. Možemo odabrati i neke druge vrednosti ali one koje nisu blizu jedinice nemaju fizičkog smisla i rešenje sistema koje dobijemo nije dopustivo.

7.3 Rezultati

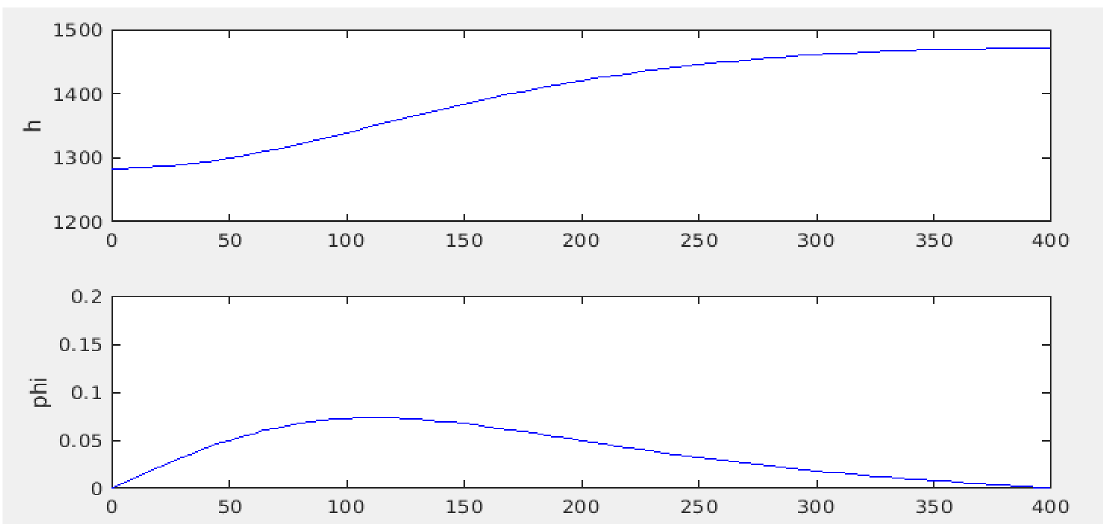
Pristupanjem problemu iz ugla optimizacije, dobijeni su očekivani rezultati koji su ostvareni i prethodim metodama. Za razliku od Newton-Shooting metoda, ovde uspevamo da dobijemo rešenje za svaki odabir h_s (naveden u rezultatima dobijenim metodom karakteristivcnih korena). Korišćene vrednosti parametara su iste kao u [1].



Slika 13: Rešenje optimizacionog problema (h, Φ) za $h_s = 1658$



Slika 14: Rešenje optimizacionog problema (h, Φ) za $h_s = 1538.8$



Slika 15: Rešenje optimizacionog problema (h, Φ) za $h_s = 1470.85$

7.4 Zaključak

Ovim metodom uspeli smo da, za razne vrednosti h_s, odredimo one vrednosti parametara α i k_{eff} koje daju odgovarajuće netrivijalno rešenje sistema, bez ikakve zavisnosti od odabira početnih vrednosti. Za početnu vrednost parametra α biramo 0, dok za početnu vrednost k_{eff} biramo bilo koju vrednosti koja je malo veća od 1. Rezultati ostvareni za sva tri izbora h_s poklapaju se sa rezultatima koje daje metod karakterističnih korena. Kako nekome ko ne zna rešenje unapred nije lako da pogodi dovoljno dobru početnu vrednost, to je značajno poboljšanje i neophodan korak da bi se postupak mogao uopštiti i na rešavanje nekih drugih problema.

Takođe, ovaj metod ne zavisi ni od linearnosti jer funkcija *fminsearch* kojom vršimo minimizaciju rešava probleme nelinearnog programiranja.

8 Otvorena pitanja

8.1 Unapređenje Newton-Shooting metoda

Kao što smo rekli, da bismo mogli da unapredimo NS metod, moramo posvetiti pažnju osetljivosti metoda na odabir početnih vrednosti parametara. Iako optimizacioni metod radi bez problema, bilo bi lepo videti da li je moguće postići isto to sa NS metodom.

8.2 Dve dimenzije

Sledeći korak u ovom istraživanju bio bi prelazak na dve dimenzije. Za sada, nikakvi proračuni nisu dobijeni u više dimenzija.

- Prvi pokušaj koji je napravljen jeste da zapišemo sisteme u cilindričnim koordinatama. Nakon uvođenja smene

$$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \\ z = z \end{cases}$$

sistem (4) postaje:

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial_r}(r(\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{u}})_r) + \frac{\partial}{\partial_z}(\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{u}})_z = 0 \\ \tilde{\rho}\begin{bmatrix} 2\tilde{u}_1 cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}_1 + \tilde{u}_1 sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}_2 + \tilde{u_2} sin\theta\frac{\partial}{\partial_r}\tilde{u}_1 + \tilde{u}_3\frac{\partial}{\partial z}\tilde{u}_1 + \tilde{u}_1\frac{\partial}{\partial z}\tilde{u}_3 \\ \tilde{u}_2 cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}_1 + \tilde{u}_1 cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}_2 + 2\tilde{u}_2 sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}_2 + \tilde{u}_2\frac{\partial}{\partial z}\tilde{u}_3 + \tilde{u}_3\frac{\partial}{\partial_z}\tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_3 cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}_1 + \tilde{u}_1 cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}_3 + \tilde{u}_3 sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}_2 + \tilde{u}_2\frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}_3 + 2\tilde{u}_3\frac{\partial}{\partial_z}\tilde{u}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}\tilde{p} = \tilde{\rho}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{r}{2}\tilde{\rho}(\tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2)\tilde{u}_1 + r\tilde{\rho}\tilde{h}\tilde{u}_1 - r\tilde{p}\tilde{u}_1) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\tilde{\rho}}{2}(\tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2)\tilde{u}_3 + \tilde{\rho}\tilde{h}\tilde{u}_3 - \tilde{p}\tilde{u}_3) \\ = \mathbb{E}\Sigma_f(\tilde{h})\tilde{\Phi} + \tilde{\rho}g\tilde{u} \end{cases} \tag{31}$$

a sistem (5) se svodi na jednačinu

$$\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial z^2} + [\Sigma_a(\tilde{h}) + \gamma\Sigma_f(\tilde{h})]\tilde{\Phi} = 0. \tag{32}$$

U ovoj notaciji imamo:

$$\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u_1}, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$$

$$\tilde{u}_i = \tilde{u}_i(r, \theta, z) = u(rcos\theta, rsin\theta, z), i = 1, 2, 3$$

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(r, \theta, z) = \rho(rcos\theta, rsin\theta, z)$$
$$\tilde{h} = \tilde{h}(r, \theta, z) = h(rcos\theta, rsin\theta, z)$$
$$\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}(r, \theta, z) = \Phi(rcos\theta, rsin\theta, z)$$

Napomena: kao i ranije, korišćena je pretpostavka da je $D(h) = 1$.

Nakon uvođenja pretpostavke o malom Mahovom broju, kao i da je $\Lambda = 0, \mu = 0, \eta = 0$, sistem (4) se svodi na:

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial_r}(r(\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{u}})_r) + \frac{\partial}{\partial_z}(\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{u}})_z = 0 \\ \tilde{\rho}\begin{bmatrix} 2\tilde{u}_1 cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}_1 + \tilde{u}_1 sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}_2 + \tilde{u_2} sin\theta\frac{\partial}{\partial_r}\tilde{u}_1 + \tilde{u}_3\frac{\partial}{\partial z}\tilde{u}_1 + \tilde{u}_1\frac{\partial}{\partial z}\tilde{u}_3 \\ \tilde{u}_2 cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}_1 + \tilde{u}_1 cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}_2 + 2\tilde{u}_2 sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}_2 + \tilde{u}_2\frac{\partial}{\partial z}\tilde{u}_3 + \tilde{u}_3\frac{\partial}{\partial_z}\tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_3 cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}_1 + \tilde{u}_1 cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}_3 + \tilde{u}_3 sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}_2 + \tilde{u}_2\frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}_3 + 2\tilde{u}_3\frac{\partial}{\partial_z}\tilde{u}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}\tilde{p} = \tilde{\rho}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \\ \frac{1}{r}\tilde{\rho}\tilde{h}\tilde{u_1} + \frac{\partial}{\partial r}(\tilde{\rho}\tilde{h}\tilde{u_1}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tilde{\rho}\tilde{h}\tilde{u_3}) = \tilde{\Phi} \end{cases} \tag{33}$$

Sveli smo problem na (32)(33) što je i dalje veoma komplikovano za dalju analizu. Kao što se može videti, ovaj sistem nije jednostavan za rešavanje.

- Drugi pokušaj bio je da krenemo od pojednostavljenog slučaja. Posmatramo domen $\Omega = [0, 1] \times [0, L]$ i $u = [0, u_z]$. Pojednostavljenje se odnosi na brzinu odnosno na pretpostavku da je jedna njena komponenta nula. Sistem termohidraulike postaje

$$\begin{cases} \frac{d}{dz}(\rho u_z) = 0 \\ \frac{d}{dz}(\rho h u_z) = \Phi \\ \frac{d}{dz}\begin{bmatrix} 0 \\ 2u_z\frac{d}{dz}u_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial r} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho g \end{bmatrix} \end{cases} \tag{34}$$

a sistem neutronike se svodi na

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi + [\Sigma_a(h) - \gamma\Sigma_f]\Phi = 0. \tag{35}$$

Kako važi da je $\frac{d}{dz}(\rho u_z) = 0$, možemo zaključiti da ρu_z ne zavisi od z. Dakle, $\rho u_z = f(r)$. Iz (31) vidimo da je $P = P(z)$ i $\Phi(r, z) = \rho u_z \frac{d}{dz} h(r, z)$. Nakon kombinovanja svega dobijenog, dobijamo jednačinu trećeg reda po h

$$f''(r)\frac{d^2}{dr^2}\frac{d}{dz}h_z + f(r)\frac{d^3}{dz^3}h_z + \rho u_z h_z(\Sigma_a(h) - \gamma\Sigma_f) = 0$$

koja nije jednostavna za rešavanje.

- Moguće je simulirati numeričko rešenje u dve dimenzije u programskom jeziku *FreeFem++* ali za sada, to je urađeno samo za zaseban sistem neutronike. To je nešto što zahteva dalje istraživanje i što bi moglo dati numeričko rešenje.

9 Zaključak

Videli smo tri načina za spajanje i rešavanje sistema neutronike i termohidraulike.

Metod karakterističnih korena radi prilično dobro, sve dok koristimo linearnu aproskimaciju za $\Sigma_a(h)$. Ta aproksimacija je za neke analize validna, ali ukoliko hoćemo preciznije i tačnije proračune, trebalo bi koristiti nelinearnu formu.

Ideja na kojoj je zasnovan Newton-Shooting metod je bila upravo to. Međutim, kako smo rešili taj problem, javio se drugi. Ako bismo uspeli da ga unapredimo tako da iskorenimo zavisnost od početnih vrednosti parametara, mogao bi u potpunosti da zameni metod karakterističnih korena, čak i za nelinearno $\Sigma_a(h)$. Za neke vrednosti, metod daje zadovoljavajuće rezultate i radi bez ikakvih problema.

Pristupanjem problemu kao problemu optimizacije, dobijamo zadovoljavajuće rezultate, nemamo zavisnost niti od početnih vrednosti parametara niti od linearnosti.

Prilozi

```
function dxdt = lin(t,x,keff)
        delta=2.0305*10^(-6);
        c=0.45+delta*(x(1)-1283)-0.5/keff;

        dxdt = zeros(3,1);
        dxdt(1) = x(2);
        dxdt(2) = x(3);
        dxdt(3)=c*x(2);
end
```

Slika 16: Funkcija za prebacivanje ODJ trećeg reda u 3x3 sistem ODJ prvog reda

```
function alpha=testgrad(keff)
    span=0:5:400;
    he=1283;
    De=747*5e-4;
    sigmaF=0.5/3.75;                    %gamaSigmaf=0.5
    E=37.112;

    alpha=0.0225;                       %alpha=phi'(0)=(De/(E*sigmaF))*h'(0)
    a=[alpha];
    x0=[he 0 alpha];
    [t,x]=ode45(@(t,x) lin(t,x,keff),span,x0);

    betaold=(De/(E*sigmaF))*x(length(t),2);    %beta=phi(L)=(De/(E*sigmaF))*h'(L)
    eps=1e-8;
    alpha=alpha-2*eps;

    x0=[he 0 alpha];
    [t,x]=ode45(@(t,x) lin(t,x,keff),span,x0);
    beta=(De/(E*sigmaF))*x(length(t),2);
    betanew=beta;
    n=2;
    while ((abs(betanew)>1e-3))
        a=[a; alpha];
        x0=[1283 0 alpha];
        [t,x]=ode45(@(t,x) lin(t,x,keff),span,x0);
        betanew=(De/(E*sigmaF))*x(length(t),2);
        gradbeta_alpha=(betanew-betaold)/(4*eps);
        alpha=alpha-beta/gradbeta_alpha;
        betaold=beta;
        beta=betanew;
        n=n+1;
    end
    disp(n);

    phi=(De/(E*sigmaF))*x(:,2);
    figure
    ax2 = subplot(2,1,1);
    plot(t,phi,'b-');
    title('new phi');
    ax2 = subplot(2,1,2);
    plot(t,x(:,1),'b-');
    title('new h');
end
```

Slika 17: Matlab kod za nalaženje α kada imamo k_{eff}

```
function keff=testgrad2(alpha)
    span=0:5:400;
    he=1283;
    De=747*5e-4;
    sigmaF=0.5/3.75;
    E=37.112;
    keff=1.11025;
    k=[keff];
    x0=[he 0 alpha];
    [t,x]=ode45(@(t,x) lin(t,x,keff),span,x0);

    betaold=(De/(E*sigmaF))*x(length(t),2);    %beta=phi(L)=(De/(E*sigmaF))*h'(L)
    eps=1e-8;
    keff=keff-eps;
    k=[k;keff];

    x0=[he 0 alpha];
    [t,x]=ode45(@(t,x) lin(t,x,keff),span,x0);
    n=2;
    beta=(De/(E*sigmaF))*x(length(t),2);
    betanew=beta;
    while ((abs(betanew)>1e-4))
        x0=[1283 0 alpha];
        [t,x]=ode45(@(t,x) lin(t,x,keff),span,x0);
        betanew=(De/(E*sigmaF))*x(length(t),2);
        gradbeta_keff=(betanew-betaold)/(2*eps);
        keff=keff-beta/gradbeta_keff;
        k=[k; keff];
        betaold=beta;
        beta=betanew;
        n=n+1;
    end
    disp(n);
    phi=(De/(E*sigmaF))*x(:,2);
    figure
    ax2 = subplot(2,1,1);
    plot(t,phi,'b-');
%     title('new phi');
    ax2 = subplot(2,1,2);
    plot(t,x(:,1),'b-');
%     title('new h');
    disp(keff)
end
```

Slika 18: Matlab kod za nalaženje k_{eff} kada imamo α

```
function newcode()
% ooo = [];%odeset('abstol',1e-9,'reltol',1e-6);
    span=0:5:400;
    he=1283;
    hs=1538.8;
    De=747*5e-4;
    sigmaF=0.5/4;        %gama*Sigma_f=0.5
    E=37.112;
    keff=1.11025;
    alpha=0.0225;
    k=[keff];
    a=[alpha];
    vec=[alpha;keff];
    vecold=[0;0];
    eps=1e-8;
    while (norm(vec-vecold,Inf)>1e-5)  %(abs(gamanew)>1e-5) || (abs(betanew)>1e-5))

        vecold=vec;
        x0=[he 0 alpha];
        [t,x]=ode45(@(t,x) lin(t,x,keff),span,x0);
        beta=(De/(E*sigmaF))*x(length(t),2);
        gama=x(length(t),1)-hs;

        alphaold=alpha-eps;
        x0=[he 0 alphaold];
        [t,x]=ode45(@(t,x) lin(t,x,keff),span,x0);
        betaold=(De/(E*sigmaF))*x(length(t),2);
        gamaold=x(length(t),1)-hs;

        alphanew=alpha+eps;
        x0=[he 0 alphanew];
        [t,x]=ode45(@(t,x) lin(t,x,keff),span,x0);
        betanew=(De/(E*sigmaF))*x(length(t),2);
        gamanew=x(length(t),1)-hs;

        gradbeta_alpha=(betanew-betaold)/(2*eps);
        gradgama_alpha=(gamanew-gamaold)/(2*eps);
        J(1,1)=gradbeta_alpha; J(1,2)=gradgama_alpha;
        %**********************************************************
```

```
        x0=[he 0 alpha];
        keffold=keff-eps;
        [t,x]=ode45(@(t,x) lin(t,x,keffold),span,x0);
        betaoldk=(De/(E*sigmaF))*x(length(t),2);
        gamaoldk=x(length(t),1)-hs;

        x0=[he 0 alpha];
        keffnew=keff+eps;
        [t,x]=ode45(@(t,x) lin(t,x,keffnew),span,x0);
        betanewk=(De/(E*sigmaF))*x(length(t),2);
        gamanewk=x(length(t),1)-hs;
        gradbeta_keff=(betanewk-betaoldk)/(2*eps);
        gradgama_keff=(gamanewk-gamaoldk)/(2*eps);
        J(2,1)=gradbeta_keff; J(2,2)=gradgama_keff;

        JJ=J';
        vec=vecold-JJ\[beta;gama];
        alpha=vec(1,1);
        keff=vec(2,1);
        a=[a;alpha];
        k=[k;keff];
    end
    phi=(De/(E*sigmaF))*x(:,2);
    figure
    ax2 = subplot(2,1,1);
    plot(t,phi,'b-');
    ax2 = subplot(2,1,2);
    plot(t,x(:,1),'b-');
end
```

Slika 19: Matlab kod za određivanje rešenja (Φ, h) sa dva parametra: α i k_{eff}

```
function vec=opt_final()
global a_ k_ L
    aa = 0;                     %initial value for alpha
    kk =1.11;                   %initial value for keff
    L=400;                      %domain
    vec=optim_s([aa;kk]);       %vector of solutions
end
function vec=optim_s(vec0)
global L span he hs De sigmaF E eps1 eps2 coeff a_ k_
    span=0:5:400;
    he=1283;
    hs=1470;
    De=747*5e-4;
    sigmaF=0.5/4;               %gama*Sigma_f=0.5
    E=37.112;
    eps1=1e-4; eps2=1e-4;
    coeff=1e4;
    a_ = 0.02;
    k_ = 1.11;
    vec0_ = vec0./[a_; k_];     %scal
    vec_ = fminsearch(@cout,vec0_);
    vec = vec_.*[a_; k_];
    alpha=vec(1);
    keff=vec(2);
    x0=[he 0 alpha];
    [t,x]=ode45(@(t,x) lin(t,x,keff),span,x0);
    phi=(De/(E*sigmaF))*x(:,2);
    figure
    ax2 = subplot(2,1,1);
    plot(t,x(:,1),'b-');
    ax2 = subplot(2,1,2);
    plot(t,phi,'b-');
end
```

```
function F=cout(vec_)
global L A span he hs eps1 eps2 coeff a_ k_
    alpha=vec_(1)*a_;
    keff=vec_(2)*k_;
    x0=[he 0 alpha];
    [t,x]=ode45(@(t,x) lin(t,x,keff),span,x0);
    F = (x(end,1)-hs)^2 + coeff*(x(end,2)-0)^2 +(1./eps1)*norm((x(x(:,2)<0,2)))+(1./eps2)*abs(keff*(keff<0));
end
```

Slika 20: Matlab kod za rešavanje optimizacionog problema

Bibliografija

[1] *Une solution explicite monodimensionnelle d'un* $modèl$ $simplifié$ *de couplage stationnaire thermohydraulique-neutronique;* $Stéphane$ *Dellacherie, Olivier Lafitte; 2016.*

[2] *On a low mach nuclear core model;* $Stéphane$ *Dellacherie; March 2012.*

[3] *A simple monodimensional model coupling an enthalpy transport equation and a neutron diffusion equation;* $Stéphane$ *Dellacherie, Erell Jamelot, Olivier Lafitte; 2016.*

[4] $Différents$ $modèles$ *analytiques ou* $simplifiés$ *pour le couplage thermohydraulique-neutronique; O. Lafitte, J.Erell; 2015.*

[5] *Theory of ordinary differential equations, International series in pure and applied mathematics; E.Coddington, N.Levinson*

[6] *Study of Low Mach nuclear core model for single-phase flow; M. Bernard, S. Dellacherie, G. Faccanoni, B. Grec, O. Lafitte, T.-T. Nguyen, Y. Penel; 2012.*

[7] *Review of analytical and numerical results upon LMNC model; Y. Penel; 2018.*

[8] *An Introduction to Fluid Dynamics; G. K. Batchelor*

[9] *Introduction to Numerical analysis; J. Stoer, R. Burilsch*

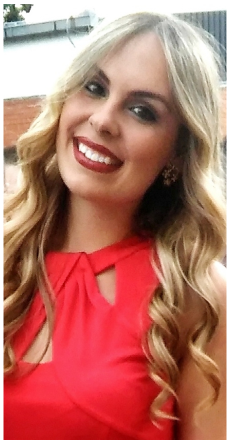
[10] *A half-wave rectified alternating current electrochemical method for uranium extraction from seawater; Chong Liu, Po-Chun Hsum Jin Xie, Jie Zhao, Tong Wu, Haotian Wang, Wei Liu, Jinsong Zhang,Steven Chu, Yi Cui; 2017.*

[11] *Communicating health risks from nuclear accidents; Gerry Thomas; 2014.*

[12] *Wikipedia, the free encyclopedia*

[13] *Eurostat, http://ec.europa.eu/eurostat*

Kratka biografija



Rođena 31.10.1994. godine u Valjevu, gde završava Osnovnu školu "Milovan Glišić". Kako je od početka školovanja zainteresovana za matematiku, upisuje specijalizovano-matematički smer u Valjevskoj gimnaziji i završava 2013. godine. Nakon toga, upisuje studije primenjene matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer matematika finansija. Osnovne studije završava 2016. godine i odmah potom upisuje master studije u istoj oblasti. Leto između osnovnih i master studija provodi na tromesečnoj praksi u NIS-u u Novom Sadu. Kao master student, u julu 2017. učestvuje na ECMI nedelji modeliranja u Finskoj. Učestvuje i na raznim drugim seminarima tokom studija. Letnji semestar druge godine master studija provodi na Univerzitetu Dekart u Parizu na naučno-istraživačkoj praksi. Tokom osnovnih i master studija, bila je dobitnik raznih stipendija. Ispite predviđene planom i programom završava zaključno sa januarskim rokom akademske 2017/2018. godine, čime stiče uslov za odbranu master rada.
Imala je nekoliko ponuda za nastavak školovanja na doktorskim studijama matematike i odlučila se za "Chalmers University of Technology" u Švedskoj, gde odlazi u septembru 2018. godine.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Gabrijela Obradović
AU
Mentor: dr Marko Nedeljkov
MN
Naslov rada: Spajanje sistema neutronike i termohidraulike u nuklearnim reaktorima
NR
Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski/engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2018
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: (9/59/13/2/20/0/1)
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO
Naučna oblast: Matematika

NO
Naučna disciplina: Primenjena matematika
ND
Predmetna odrednica/Ključne reči: Termohidraulika, neutronika, diferencijalne jednačine, numerička analiza
PO
UDK
Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: Ponašanje nuklearnog reaktora opisuje se uz pomoć dva integrisana sistema: sistem neutronike i sistem termohidraulike. Neutronika opisuje kretanje neutrona u jezgru reaktora dok termohidraulika opisuje kretanje vode u istom. Rešenje jednog sistema zavisi od rešenja drugog, i obratno. U ovom radu obrađeno je sledeće: postojeći metod za dobijanje rešenja i dva nova načina. Kako je postojeći metod imao određene nedostatke, ideja je bila da se problemu spajanja ovih sistema pristupi na drugi način, uz pomoć kojeg bismo eliminisali problem na koji smo nailazili.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 15.05.2018.
DP
Datum odbrane: 23. avgust 2018.
DO
Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Nataša Krklec-Jerinkić, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Marko Nedeljkov, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Milana Čolić, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORD DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Content Code: Master's thesis
CC
Author: Gabrijela Obradović
AU
Mentor: Marko Nedeljkov, Ph.D.
MN
Title: Neutronics-thermohydraulics coupling in nuclear reactors
TI
Language of text: English
LT
Language of abstract: English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2018
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publication place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty od Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: (9/59/13/2/20/0/1)
(number of sections/pages/references/tables/pictures/graphs/appendices)
PD
Scientific field: Mathematics

SF
Scientific Discipline: Applied mathematics
SD
Subject/Key words: Differential Equations, Thermohydraulics, Neutronics
SKW
UC
Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
ȞD
Note:
N
Abstract:
Behaviour of the nuclear reactor can be described with two integrated systems: system of neutronics and system of thermohydraulics. Neutronics describe the motion of the neutrons in the reactor's core while thermohydraulics is used to model the water flow in it. The solution of one system depends on the solution of another one's, and vice versa. In this thesis, we are focusing on the following: the existing method for obtaining a solution and two new methods. Since the existing one had some failures, the idea was to develp new one(s) which would replace it and with which we would eliminate the problem we were facing before.
AB
Accepted by the Scientific Board on: 15.05.2018.
ASB
Defended: 23rd August 2018.
DE
Thesis defend board:
DB

President:	Nataša Krklec-Jerinkić Ph.D., docent, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member:	Marko Nedeljkov Ph.D., full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member:	Milana Čolić Ph.D., docent, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad