Sadržaj

Predgovor

Tema ovog master rada su trougaone norme i fazi skupovi. Reč je o savremenoj matematičkoj oblasti baziranoj na trougaonim normama i fazi aritmetici, čiji je cilj rešavanje različitih problema koji se javljaju kod upravljanja projektima. U ovom radu su prikazane i dve tehnike, fazi PERT i CPM, čija je namena unapredenje planiranja i kontrole projekata. Termin fazi (eng. fuzzy), koji predstavlja neodređen, neprecizan pojam, u matematičku literaturu uvodi Lotfi A. Zadeh 1965. godine da bi koristio podatke koji poseduju određenu neizvesnost. Danas se smatra da svaki čovek razmišlja isključivo na „fazi" način, a teorija fazi skupova nudi mogućnost da se tokom raznih vrsta komunikacija izbegnu problemi izazvani ovim faktorom.

Fleksibilnost koju poseduju fazi skupovi da se svakom iskazu može dodeliti vrednost koja oscilira između atributa "potpuno tačno" ili "potpuno netačno", pruža prirodan način suočavanja sa realnim izazovima. Ovo predstavlja ključnu razliku između fazi skupova i klasičnih skupova, gde je granica pripadnosti precizno definisana (element ili pripada ili ne pripada nekom skupu).

Ovaj rad se sastoji iz tri poglavlja. Uloga prvog i drugog poglavlja je da se objasne osnovni pojmovi vezani za trougaone norme i fazi aritmetiku. U poslednjem, trećem delu, ilustrovane su CPM i PERT tehnike za upravljanje projektima. Slike su rađene po ugledu na [1, 9, 10, 12].

U prvom poglavlju je dat detaljan pregled onovnih definicija i osobina trougaonih normi i konormi, ilustrovanih pomoću primera i grafika. Predstavljene su osobine za četiri osnovne t-norme i t-konorme kao i za Arhimedove t-norme i nilpotentni minimum T^{nM}*. Jedan deo ovog poglavlja je posvećen i algebarskom aspektu t-normi, pre svega idempotentnim i nilpotentnim elementima i deliteljima nule, kao i polugrupama. Literatura korišćena u prvom poglavlju je iz [5, 8, 9, 12, 13].*

U drugom poglavlju se uvodi pojam fazi skupa i objašnjena je razlika u odnosu na klasične skupove. Da bi se lakše shvatio pojam fazi, uvedeni su primeri i grafici. Posebno se skreće pažnja na fazi brojeve kao što su: delimično kvadratni fazi broj, trougaoni fazi broj koji se koristiti za procenu vremena trajanja projekta za CPM i PERT metode, trapezoidni fazi broj i LR-fazi interval. Veoma bitan deo ovog rada predstavljaju aritmetičke operacije na fazi brojevima, i to dve metode fazi aritmetike. Prvi metod se zasniva na aritmetici intervala tj. posmatraju se α-preseci, a drugi metod koristi princip proširenja putem kojeg se operacije nad realnim brojevima proširuju i na fazi brojeve. Dalje, kao primena trougaonih normi uvodi se uopšten i originalni Zadehov princip proširenja. Da bi se ukazalo na široku primenljivost fazi skupova, ilustrovan je i postupak rešavanja fazi jednačina. Drugo poglavlje je veoma bitno za razumevanje ovog rada i ovde je korišćena literatura iz [1, 2, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 12, 15, 16].

Poslednje poglavlje je bazirano na primeni fazi aritmetike za upravljanje projektima i to pomoću CPM i PERT metoda. Radi lakšeg pregleda, projekat je podeljen na aktivnosti koje imaju specifičan početak i kraj. Pošto se aktivnosti moraju izvoditi po određenom redosledu, neke pre drugih, neke istovremeno, potrebno je odrediti kritičan put, tj. put gde ne sme doći do kašnjenja. Vreme koje je potrebno da bi se izvršila svaka od njih mora se proceniti, a procena se daje u formi trougaonog fazi broja. U nekim slučajevim se može zahtevati skraćenje roka za izradu projekta. Zato je ovde predstavljen i fazi PERT za skraćivanje trajanja projekta. Dodatne informacije i proširenje ovih metoda mogu se naći u literaturi [1, 14].

***

Ovom prilikom se zahvaljujem svom mentoru, prof. dr Ivani Štajner-Papuga, za stručno i profesionalno usmeravanje pri izradi ovog rada i za svo znanje koje sam stekao radeći sa njom. Takođe se zahvaljujem docentu dr Mirjani Štrboji i prof. dr Arpadu Takačiju na korisnim sugestijama i primedbama.

Želim da se zahvalim dipl.ing. math Davoru Paskaljeviću na korisnim sugestijama i savetima. Veliku zahvalnost dugujem i svom profesoru iz srednje škole Dejanu Sremčeviću na ogromnom strpljenju, razumevanju i podršci. Zahvaljujući njegovom veselom duhu i pristupu matematici i učenicima, odlučio sam da matematika bude moj budući poziv.

Posebno se želim zahvaliti mojim roditeljima, bratu i prijateljima za svu podršku koju su mi pružili tokom mog školovanja.

Novi Sad, septembar 2013. godine *Trusina Franjo*

1. Trougaone norme i konorme

Pojam *trougaone norme* se prvi put pojavljuje u matematičkoj literaturi 1942. godine, kada Karl Menger u svom radu *Statistical metrics,* uvodi ovaj pojam s ciljem konstruisanja metričkih prostora koristeći raspodele verovatnoće. On je koristio vrednosti u intervalu [0, 1], umesto celog skupa realnih brojeva, da bi opisao rastojanje između dva elementa. Karl Menger je predstavio trougaone norme pomoću funkcije $T(\alpha, \beta)$, koja je definisana za $0 \leq \alpha \leq 1$ i $0 \leq \beta \leq 1$ i za nju važi sledeće:

a) $0 \leq T(\alpha, \beta) \leq 1$

b) T je neopadjuće

c) $T(\alpha, \beta) = T(\beta, \alpha)$

d) $T(1, 1) = 1$

e) ako je $\alpha > 0$ onda je $T(\alpha, 1) > 0$

Međutim, zanimanje za metričke prostore verovatnoće i njegove operacije, posebno počinje da se ispoljava tek kada su Berthold Schweizer i Abe Sklar publikovali konačan skup aksioma za t-norme 1958. godine u *Espaces métriques aléatoires*.

Trougaone norme su se prvo koristile u kontekstu probabilističkih metričkih prostora, u smislu proširenja trougaonih nejednačina iz klasičnih metričkih prostora u uopštene slučajeve. Danas se koriste, između ostalog, u teoriji fazi skupova i fazi logike, te ovom prilikom je dat kratak pregled osnovnih pojmova.

Rezultati prezentovani u ovom poglavlju su iz [5, 8, 9, 12, 13].

1.1 Trougaone norme

Definicija 1.1 [12]

Trougaona norma T (*t-norma*) je funkcija $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ takva da za svako $x, y, z \in [0, 1]$ važe sledeći uslovi:

(T1)	$T(x, y) = T(y, x)$		(komutativnost)
(T2)	$T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$		(asocijativnost)
(T3)	$T(x, y) \leq T(x, z)$	kada je $y \leq z$	(monotonost)
(T4)	$T(x, 1) = x$		(granični uslov)

Pošto su t-norme algebarske operacije na intervalu [0, 1], takođe je moguće koristiti oznaku $x * y$ umesto $T(x, y)$. Zapravo, uslovi (T1) - (T4) se mogu drugačije zapisati na sledeći način:

za svako $x, y, z \in [0, 1]$

(T1) $x * y = y * x$

(T2) $x * (y * z) = (x * y) * z$

(T3) $x * y \leq x * z$ kada je $y \leq z$

(T4) $x * 1 = x$

Postoji neprebrojivo mnogo t-normi, ali ovde su navedene četiri osnovne t-norme T_M, T_P, T_L i T_D. Njihove definicije su:

$T_M(x, y) = \min(x, y)$, (minimum)

$T_P(x, y) = xy$, (proizvod)

$T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$, (Lukasiewiez-ova t-norma)

$$T_D(x, y) = \begin{cases} min(x,\ y) & ,\ \text{ako } \max(x, y) = 1 \\ 0 & ,\ inače \end{cases}$$ (drastičan proizvod)

Napomena 1.1

(i) Iz definicije 1.1 se može zaključiti da za svako $x \in [0, 1]$, svaka t-norma T zadovoljava sledeće dodatne granične uslove:

$T(0, x) = T(x, 0) = 0$,

$T(1, x) = x$.

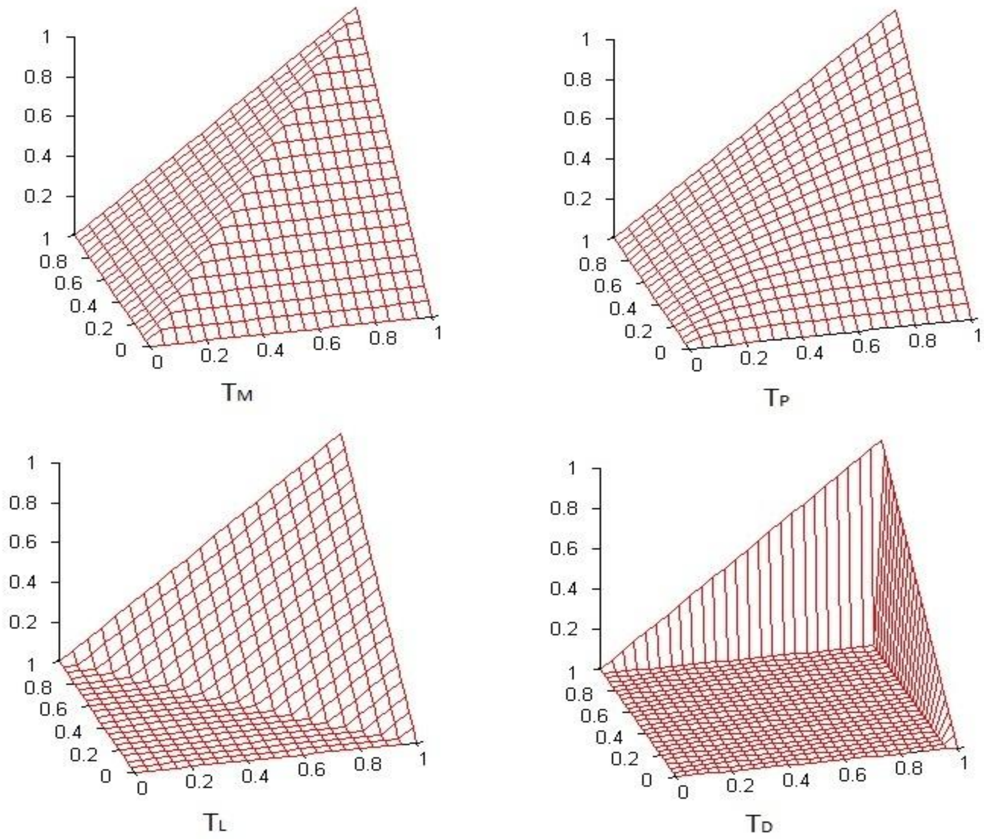
(ii) Koristeći osobine (T3) i (T1) dobija se monotonost i po prvoj i po drugoj komponenti, tj.

$$T(x_1, y_1) \leq T(x_2, y_2), \quad \text{za } x_1 \leq x_2 \text{ i } y_1 \leq y_2.$$

Zaista, ako $x_1 \leq x_2$ i $y_1 \leq y_2$, onda se dobija

$$T(x_1, y_1) \leq T(x_1, y_2) = T(y_2, x_1) \leq T(y_2, x_2) = T(x_2, y_2)$$

Sledi definicija, koja pokazuje kako se mogu uporediti dve t-norme.



Slika 1. [8] ***3D grafik za četiri osnovne t-norme***

Definicija 1.2 [9]

(i) Ako za dve t-norme T1 i T2, važi nejednakost $T1(x, y) \leq T2(x, y)$ za svako $(x, y) \in [0, 1]^2$, onda se kaže da je T1 slabija od T2 ili, ekvivalentno, da je T2 jača od T1. U tom slučaju se piše $T1 \leq T2$.

(ii) Ako je $T1 \leq T2$ i ako za neko $(x_0, y_0) \in [0, 1]^2$ važi $T1(x_0, y_0) < T2(x_0, y_0)$ sledi $T1 < T2$, tj. $T1 < T2$ ako je $T1 \leq T2$ i $T1 \neq T2$.

Generalno, nije uvek jednostavno odrediti da li je neka t-norma slabija ili jača od druge t-norme. Trougaone norme T_M i T_D su najjača i najslabija t-norma, respektivno, što je dato narednom teoremom.

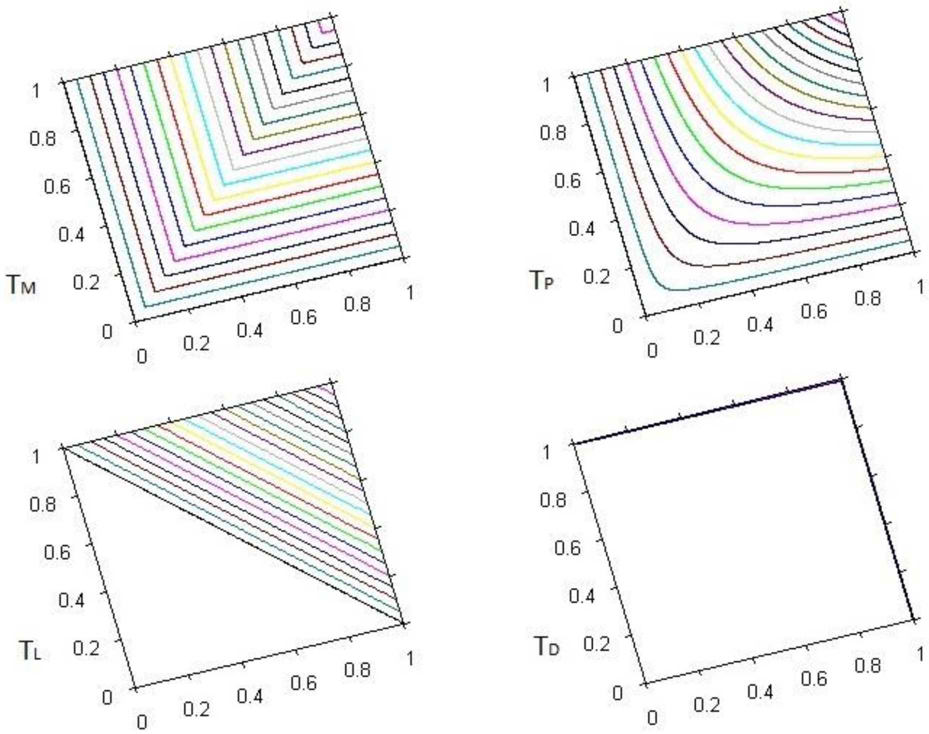
Teorema 1.1 [12]

Za svaku t-normu T važi:

$$\text{za svako } x, y \in [0, 1], \qquad T_D(x, y) \leq T(x, y) \leq T_M(x, y)$$

Dokaz: Neka su dati $x, y \in [0, 1]$ i neka je $T(x, y)$ proizvoljna t-norma. Koristeći činjenicu da je $y \leq 1$ i osobine (T3) i (T4) dobija se $T(x, y) \leq T(x, 1) = x$. Ako se iskoristi da je i $x \leq 1$, kao i osobine (T1), (T3) i (T4), redom, dobija se $T(x, y) = T(y, x) \leq T(y, 1) = y$. Dakle, $T(x, y) \leq x$ i $T(x, y) \leq y$, te odatle sledi $T(x, y) \leq \min(x, y) = T_M$.

Dalje, za x = 1 se dobija T(x, y) = T(1, y) = y = $T_D(x, y)$, a za y = 1 se dobija $T(x, y) = T(x, 1) = x = T_D(x, y)$. Za $x = 0$ ili $y = 0$ važi $T(x, y) = T_D(x, y) = 0$ tj. obe t-norme su jednake. Sledi da je $T(x, y)$ jednako sa $T_D(x, y)$ na rubu. Ako je $x, y \neq 0$ tada je $T(x, y) \geq 0$ i $T_D(x, y) = 0$ pa se ponovo zaključuje da je $T(x, y) \geq T_D(x, y)$. ■



Slika 2. [8] ***Konturni grafik za četiri osnovne t-norme***

Napomena 1.2 Kako je $T_L < T_P$ (vidi se i sa Slike 2.), na osnovu prethodne teoreme dobija se poređenje za četiri osnovne trougaone norme:

$$T_D < T_L < T_P < T_M$$

Osobine, kao što su komutativnost (T1), asocijativnost (T2) i monotonost (T3) su zadovoljene na otvorenom jediničnom kvadratu $(0, 1)^2$ (naravno, zajedno sa graničnim uslovom (T4) i graničnim uslovima iz napomene 1.1 (i)). Da bi ove osobine bile zadovoljene na celom jediničnom kvadratu $[0, 1]^2$, uvodi se sledeća teorema.

Teorema 1.2 [12]

Neka je A skup gde je $(0, 1) \subseteq A \subseteq [0, 1]$, i neka je $* : A^2 \to A$ binarna operacija na A. Ako za svako x, y, z ∈ A važe osobine (T1) - (T3) i

$$x * y \leq \min(x, y), \tag{1.1}$$

tada funkcija $T : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ data sa

$$T(x, y) = \begin{cases} x * y, & \text{ako } (x, y) \in (A\backslash\{1\})^2 \\ min(x, y), & inače \end{cases}$$

je t-norma. T je jedina t-norma čija restrikcija na $(A\backslash\{1\})^2$ se poklapa sa restrikcijom operacije * na $(A\backslash\{1\})^2$.

U nastavku poglavlja se navodi definicija t-podnorme (eng. t-subnorm).

Definicija 1.3 [9]

Funkcija $F : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ koja zadovoljava, za svako x, y, z ∈ [0, 1], osobine (T1) - (T3) i (1.1) se zove t-podnorma.

Očigledno, svaka t-norma je i t-podnorma. Obrnuto, u opštem slučaju, ne važi. Ovo ilustruje primer nula funkcije, tj. funkcije $F : [0, 1]^2 \rightarrow [0,1]$ date sa F(x, y) = 0, za svako x, y ∈ [0, 1].

Iz teoreme 1.2 sledi da se svaka t-podnorma može transformisati u t-normu tako što se redefiniše, ako je to potrebno, u tačkama oblika (x, 1) i (1, x) pri čemu x prolazi kroz ceo jedinični interval.

Posledica 1.1 [9] Ako je F t-podnorma, onda je funkcija $T: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ definisana sa

$$T(x, y) = \begin{cases} F(x, y) & , \text{ako } (x, y) \in (0,1)^2 \\ min(x, y) & , inače \end{cases}$$

trougaona norma.

Slede neke osobine t-normi T_M i T_D, koje su date kao teorema.

Teorema 1.3 [9]

(i) Jedina t-norma T koja zadovoljava T(x, x) = x za svako x ∈ [0, 1] je minimum T_M.

(ii) Jedina t-norma T koja zadovoljava T(x, x) = 0 za svako x ∈ (0, 1) je drastičan proizvod T_D.

Napomena 1.3

(i) Asocijativnost (T2) dozvoljava da se svaka t-norma na jedinstven način proširi u n-arnu operaciju običnom indukcijom, definišući za svako $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$

$$T_{i=1}^{n} x_i = T(T_{i=1}^{n-1} x_i, x_n) = T(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Ako važi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$, tada se koristi zapis

$$x_T^{(n)} = T(x, x, \dots, x)$$

Takođe, prihvaćena je sledeća konvencija:

$$x_T^{(0)} = 1 \qquad \text{i} \qquad x_T^{(1)} = x.$$

(ii) Činjenica da je svaka t-norma slabija od T_M, dozvoljava da se proširi u beskonačnu operaciju, stavljajući za svaki niz $(x_i)_{i\in N}$ elemenata iz [0, 1]

$$T_{i=1}^{\infty} x_i = \lim_{n\to\infty} T_{i=1}^{n} x_i. \tag{1.2}$$

Pošto na osnovu dokaza teoreme 1.1 uvek važi $T(T_{i=1}^{n-1} x_i, x_n) \le T_{i=1}^{n-1} x_i$ i očigledno je da $T_{i=1}^{n} x_i \ge 0$, sledi da je $(T_{i=1}^{n} x_i)_{n\in N}$ monotono nerastući i ograničen niz, što znači da konvergira, odnosno postoji granična vrednost iz (1.2).

(iii) Za $(x_i)_{i\in I}$, $x_i \in [0, 1]$, gde je I proizvoljan skup indeksa, dobija se uopštenje za (1.2) oblika

$$T_{i\in I}\, x_i = \inf\{\, T_{j=1}^{k} x_{ij} \mid (x_{i1}, \ldots, x_{ik}) \text{ je konačna podfamilija od } (x_i)_{i\in I} \,\}.$$

1.2 Trougaone konorme

Trougaone konorme ili t-konorme predstavljaju uopštenje operacije unije. Za njih su karakteristične osobine kao što su: komutativnost, asocijativnost i monotonost. U odnosu na t-norme jedino su granični uslovi nešto drugačiji. Sledi definicija trougaonih konormi i navode se neke njihove osobine.

Definicija 1.4 [12]

Trougaona konorma S (t-konorma) je funkcija $S:[0, 1]^2 \to [0, 1]$, takva da za svako $x, y, z \in [0, 1]$ važe:

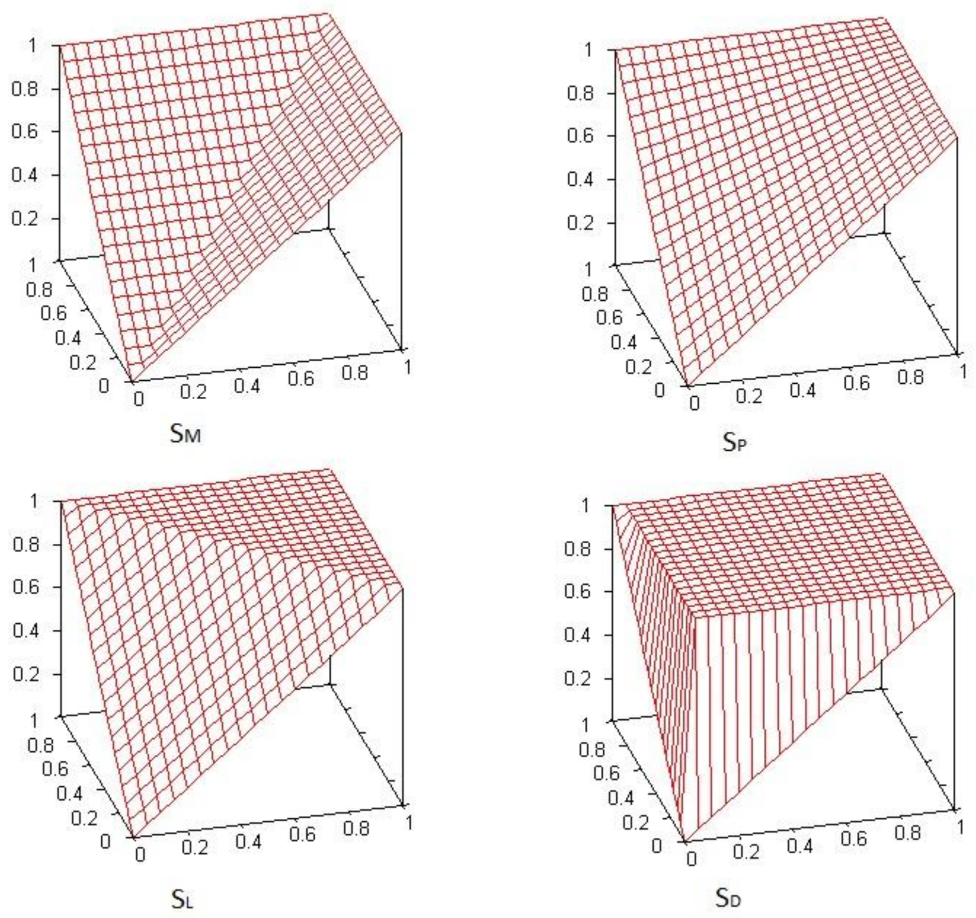
(S1) $S(x, y) = S(y, x)$ (komutativnost)

(S2) $S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$ (asocijativnost)

(S3) $S(x, y) \le S(x, z)$ kada je $y \le z$ (monotonost)

(S4) $S(x, 0) = x$. (granični uslov)

Sa aksiomatske tačke gledišta, t-norme i t-konorme se razlikuju samo u njihovim graničnim uslovima.



Slika 3. [8] ***3D grafik za četiri osnovne t-konorme***

Sledi primer, pomoću kojeg su predstavljene osnovne t-konorme.

Primer 1.3 [9]

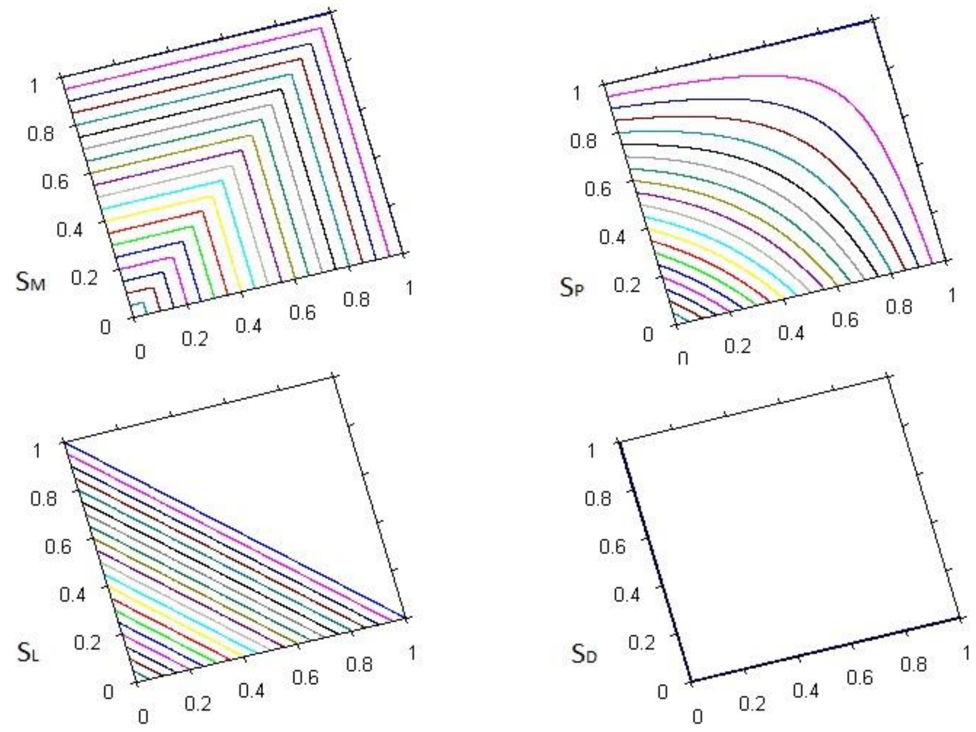
Četiri osnovne t-konorme su:

$S_M(x, y) = \max(x, y)$ (maximum)

$S_P(x, y) = x + y - x * y$ (suma verovatnoće)

$S_L(x, y) = \min(x + y, 1)$ (Lukasiewiez t-konorma)

$$S_D(x, y) = \begin{cases} 1 & , \text{ ako } (x, y) \in [0, 1]^2 \\ max(x,\ y) & , \ inače \end{cases}$$ (drastična suma)



Slika 4. [8] ***Konturni grafik za četiri osnovne t-konorme***

Između trougaonih normi i konormi postoji veza koja je opisana narednom teoremom.

Teorema 1.4 [9]

Funkcija S : $[0, 1]^2 \to [0, 1]$ je t-konorma ako i samo ako postoji t-norma T takva da

$$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y)$$

za svako $(x, y) \in [0, 1]^2$.

Napomena 1.4

(i) Trougaona konorma S definisana u teoremi 1.4 se naziva dualna t-konorma za t-normu T i obrnuto. Očigledno, elementarne t-konorme su dualne odgovarajućim elementarnim t-knormama.

(ii) Direktno iz definicije 1.4 se može zaključiti da za svako $x \in [0, 1]$, svaka t-konorma S zadovoljava sledeće dodatne granične uslove:

$$S(1, x) = S(x, 1) = 1$$

$$S(0, x) = x$$

(iii) S obzirom da dualnost menja poredak, za trougaone konorme važi: ako za proizvljne t-norme T1 i T2 važi $T1 \leq T2$, i ako su S1 i S2 njihovi duali, respektivno, tada je $S1 \geq S2$. Zbog toga, za svaku t-konormu S važi:

$$S_M \leq S \leq S_D,$$

tj. maximum S_M je najslabija, a drastična suma S_D je najjača t-konorma.

(iv) Analogno napomeni 1.3, svaka t-konorma S se može proširiti na sledeći način:

$$S_{i=1}^{n} x_i = S(S_{i=1}^{n-1} x_i, x_n) = T(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$S_{i=1}^{\infty} x_i = \lim_{n\to\infty} S_{i=1}^{n} x_i,$$

$$S_{i\epsilon I}\, x_i = \sup\{ S_{j=1}^{k} x_i \mid (x_{i1}, \dots, x_{ik}) \text{ je konačna podfamilija od } (x_i)_{i \in I} \},$$

gde $x_i \in [0, 1]$, N je skup prirodnih brojeva, a I proizvoljan skup indeksa.

Ako je $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$, $x \in [0, 1]$, koristiti se oznaka $x_S^{(n)}$. Specijalno, $x_S^{(0)} = 0$ i $x_S^{(1)} = x$.

1.3 Neprekidnost

Ova sekcija je posvećena analitičkim osobinama t-normi i t-konormi. Kao što se može videti kod drastičnog proizvoda T_D i njegovog duala S_D, t-norme i t-konorme ne moraju biti neprekidne. Iz više razloga neprekidne t-norme i t-konorme igraju važnu ulogu, što se može videti i kod nilpotentnog minimuma T^{nM}.

Proizvoljna funkcija dve promenljive $F:[0, 1]^2 \to [0, 1]$ je neprekidna ako za sve konvergentne nizove $(x_n)_{n \in N}$, $(y_n)_{n \in N}$ važi:

$$F(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n, y_n)$$

Na intervalu $[0, 1]^2$ koji je kompaktan podskup od R^2, neprekidnost funkcije $F: [0, 1]^2 \to [0, 1]$ je ekvivalentna njenoj uniformnoj neprekidnosti.

Očigledno, osnovne t-norme T_M, T_P i T_L kao i njihove dualne t-konorme S_M, S_P, i S_L su neprekidne, a drastičan presek T_D i drastična suma S_D nisu neprekidne.

Jasno je da je t-norma neprekidna ako i samo je dualna t-konorma neprekidna.

Generalno, realna funkcija sa dve promenljive na domenu $[0, 1]^2$ može biti neprekidna po svakoj promenljivoj, ili po prvoj ili po drugoj (kao funkcije jedne promenljive), a da nije neprekidna na $[0, 1]^2$, kao funkcija dve promenljive.

Teorema 1.5 [9]

Neka je funkcija $F : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ neopadajuća, tada ona je neprekidna ako i samo ako je neprekidna po svakoj komponenti, tj. ako su za svako x_0, $y_0 \in [0, 1]$ funkcije $F(x_0, .)$: $[0, 1] \to [0, 1]$ i $F(. , y_0) : [0, 1] \to [0, 1]$ neprekidne funkcije jedne promenljive.

Sledi definicija za polu-neprekidnost funkcije od dole (od gore).

Definicija 1.5 [9]

Funkcija $F : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ je polu-neprekidna od dole (od gore) ako za svaku tačku (x_0, y_0) iz $[0, 1]^2$ i za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da važi:

$$F(x, y) > F(x_0, y_0) - \varepsilon, \text{ za } (x, y) \in (x_0 - \delta, x_0] \mathbf{x} (y_0 - \delta, y_0]$$

$$F(x, y) < F(x_0, y_0) + \varepsilon, \text{ za } (x, y) \in [x_0, x_0 + \delta) \mathbf{x} [y_0, y_0 + \delta)$$

Napomena 1.5

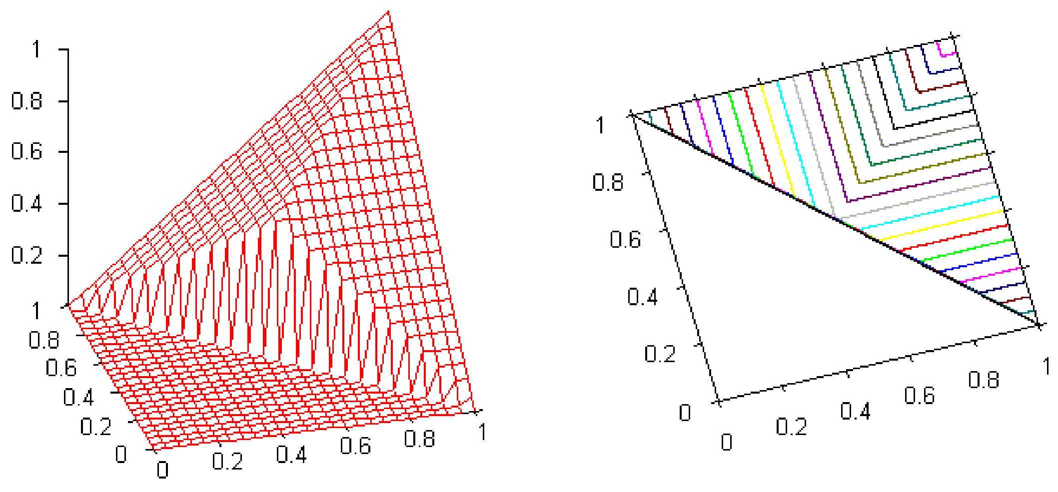
(i) nilpotentni minimum T^{nM} (Slika 5.), definisan sa:

$$T^{nM}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{ako } x + y \leq 1 \\ min(x, y), & inače \end{cases}$$

je t-norma. Pored toga ova funkcija je donje polu-neprekidna, ali nije gornje polu-neprekidna. Drastičan presek T_D je gornje polu-neprekidan ali nije donje polu-neprekidan.

(ii) T-norma T je donje (gornje) polu-neprekidna ako i samo ako je njena dualna t-konorma (data sa $S(x, y)=1-T(1-x, 1 - y)$) gornje (donje) neprekidna, respektivno.

Kao i kod neprekidnosti i donja polu-neprekidnost monotone realne funkcije može biti opisana njenom levom-neprekidnošću u svakoj komponenti.



Slika 5. [8] ***3D grafik (levo) i konturni grafik nilpotentnog minimuma T^{nM}***

Između donje polu-neprekidnosti i leve-neprekidnosti postoji veza, koja je predmet naredne teoreme.

Teorema 1.6 [5]

Neopadajuća funkcija $F:[0, 1]^2 \to [0, 1]$ je donje polu-neprekidna ako i samo ako je levo-neprekidna po svakoj promenljivoj, tj. ako i samo ako za svako $x_0, y_0 \in [0, 1]$ i za svaki niz $(x_n)_{n \in N}, (y_n)_{n \in N} \in [0, 1]^N$ važi:

$$\sup\{ F(x_n, y_0) \mid n \in N \} = F(\sup\{ x_n \mid n \in N \}, y_0)$$

$$\sup\{ F(x_0, y_n) \mid n \in N\} = F(x_0, \sup\{ y_n \mid n \in N \})$$

Definicija 1.6 [5]

T-norma T (t-konorma S) je granično neprekidna ako je neprekidna na granici jediničnog kvadrata $[0, 1]^2$, tj na skupu $[0, 1]^2 / (0, 1)^2$.

1.4 Algebarski aspekt

Sada se skreće pažnja na neke algebarske aspekte t-normi, najviše na one koje su dobro poznate iz opštih teorija o polugrupama i mrežama, pre svega na idempotentne i nilpotentne elemente, te na delitelje nule. Razmatraće se samo elementi iz (0, 1) kao kandidati za nilpotentne elemente i delitelje nule u narednoj definiciji.

Definicija 1.7 [9]

Neka je T t-norma.

(i) Element $a \in [0, 1]$ se naziva idempotentan element za T ako $T(a, a) = a$. Brojevi 0 i 1, koji su idempotentni elementi za svaku t-normu T, se zovu trivijalni idempotentni elementi za T, a svaki idempotentni element iz (0, 1) predstavlja netrivijalan idempotentan element za T.

(ii) Element $a \in (0, 1)$ se zove nilpotentni element za T ako postoji neko $n \in N$ takvo da $a_T^{(n)} = 0$.

(iii) Element $a \in (0, 1)$ se zove delitelj nule za T ako postoji neko $b \in (0, 1)$ takvo da $T(a, b) = 0$.

Primer 1.4 [9]

(i) a) Za minimum T_M važi:
- svako $a \in [0, 1]$ je idempotentan element

- nema ni nilpotnetne elementne ni delitelje nule

b) Za Lukasiewiez-ovu t-normu T_L i drastični presek T_D važi:
- svako $a \in (0, 1)$ je nilpotentan element i delitelj nule
- imaju samo trivijalne idempotentne elemente

c) Proizvod T_P nema ni trivijalne idempotentne elemente ni nilpotentne elemente ni delitelje nule.

(ii) Za nilpotentni minimum T^{nM} broj a je idempotentan element ako i samo ako $a \in \{0\} \cup (0.5, 1]$, a je nilpotentan element ako i samo ako $a \in (0, 0.5]$ i a je delitelj nule ako i samo ako $a \in (0, 1)$.

Tvrđenje 1.1 [9]

(i) Element $a \in [0, 1]$ je idempotentan element t-norme T ako i samo ako za svako $x \in [a, 1]$ važi $T(a, x) = \min(a, x)$.

(ii) Neka je T neprekidna t-norma. Tada $a \in [0, 1]$ je idempotentan element za T ako i samo ako za svako $x \in [0,1]$ važi $T(a, x) = \min(a, x)$.

Napomena 1.6

(i) Ako $a \in [0, 1]$ je idempotentan element t-norme T onda, po indukciji, važi $a_T^{(n)} = a$, za svako $n \in N$. To znači da element za t-normu može biti i idempotentan i nilpotentan.

(ii) Svaki nilpotentan element a t-norme T je takođe i delitelj nule za T ali ne i obrnuto.

(iii) Ako t-norma ima nilpotentan element a onda uvek postoji element $b \in (0, 1)$ takav da $b_T^{(2)} = 0$. Zaista, ako je $n > 1$ najmanji ceo broj, takav da važi $a_T^{(n)} = 0$, onda $b = a_T^{(n-1)}$ zadovoljava $b_T^{(2)} = 0$.

(iv) Ako je $a \in (0, 1)$ nilpotentan element (delitelj nule) t-norme T onda svaki broj $b \in (0, a)$ je isto nilpotentan element (delitelj nule) za T.

(v) Skup svih nipotentnih elemenata, kao i skup delitelja nule t-norme mogu biti prazni skupovi ili intervali oblika (0, c) ili (0, c]. Na primer, za nilpotentni minimum T^{nM} skup nilpotentnih elemenata je interval (0, 0.5], a skup delitelja nule je interval (0, 1).

Skup nilpotentnih elemenata je podskup skupa delitelja nule. Za svaku t-normu egzistencija delitelja nule je posledica egzistencije nilpotentnih elemenata.

Sledi tvrđenje koje daje vezu između delitelja nule i nilpotentnog elementa.

Tvrđenje 1.2 [9]

Za svaku t-normu T su ekvivalentna tvrđenja:

(i) T ima delitelj nule.

(ii) T ima nilpotentne elemente.

Neke t-norme imaju dodatne algebarske osobine. Prva grupa takvih osobina je striktna monotnost i Arhimedova osobina, koje igraju važnu ulogu u mnogim algebarskim konceptima, kao što su polugrupe.

Definicija 1.8 [9]

Za proizvoljnu t-normu T važe sledeće osobine:

(i) t-norma T je striktno monotona ako:

(SM) $T(x, y) < T(x, z)$ kada je $x > 0$ i $y < z$

(ii) t-norma T zadovoljava zakon kancelacije (eng. cancellation law) ako:

(CL) $T(x, y) = T(x, z)$ kada je $x = 0$ ili $y = z$

(iii) t-norma T zadovoljava uslovni zakon kancelacije ako:

(CCL) $T(x, y) = T(x, z) > 0$ kada je $y = z$

(iv) t-norma T je Arhimedova ako:

(AP) za svako $(x, y) \in (0, 1)^2$ postoji $n \in N$ takvo da $x_T^{(n)} < y$

(v) t-norma T ima graničnu osobinu ako:

(LP) za svako $x \in (0, 1)$: $\lim_{n\to\infty} x_T^{(n)} = 0$

Napomena 1.7

(i) Minimum T_M nema ni jednu od ovih osobina, a proizvod zadovoljava sve osobine. Lukasiwiez-ova t-norma i drastičan presek su Arhimedean i zadovoljavaju uslovni zakon kancelacije i graničnu osobinu (LP), ali ne i ostale osobine.

(ii) Ako t-norma T zadovoljava zakon kancelacije (CL) onda sasvim zadovoljava uslovni zakon kancelacije (CCL), ali ne i obrnuto.

(iii) Algebarske osobine predstavljene u definiciji 1.8 ne zavisne od neprekidnosti: neprekidna t-norma T_M pokazuje da neprekidnost ne implicira ni jednu od ovih osobina.

Tvrđenje 1.3 [9]

Neka je T t-norma. Tada imamo:

(i) T je striktno monotona ako i samo ako zadovoljava zakon kancelacije (CL).

(ii) Ako je T striktno monotona onda ima samo trivijalne idempotentne elemente.

(iii) Ako je T striktno monotona onda ima delitelj nule.

Naredna teorema pokazuje zavisnost između Arhimedove t-norme, LP i idempotentnih elemenata.

Teorema 1.7 [9]

Za t-normu T sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) T je Arhimedova.

(ii) T zadovoljava granični uslov (LP).

(iii) T ima samo trivijalne idempotentne elemente i kada važi

$$\lim_{x \searrow x_0} T(x, x) = x_0$$

za neko $x_0 \in (0, 1)$, tada postoji $y_0 \in (x_0, 1)$, takvo da $T(y_0, y_0) = x_0$.

Definicija 1.9 [9]

(i) t-norma T je striktna ako je neprekidna i striktno monotona.

(ii) t-norma se zove nilpotentna ako je neprekidna i svako $a \in (0, 1)$ je nilpotentni element za T.

Primer 1.5 [9]

(i) Zbog tvrđenja 1.3(i), t-norma T je striktna ako i samo ako je neprekidna i zadovoljava (CL).

(ii) Posledica za (i) je da svaka striktna t-norma ispunjava (CCL).

(iii) Takođe, svaka nilpotentna t-norma zadovoljava (CCL). Da bi se potvrdila ova pretpostavka, neka je $T(x, y) = T(x, z)$ i $y < z$. Zbog neprekidnosti T, mora postojati $u \in [0, 1)$ takvo da $y = T(z, u)$. Zbog asocijativnosti (T2) imamo:

$$T(x, z) = T(x, y) = T(x, T(z, u)) = T(T(x, z), u)$$

i indukcijom se dobija $T(x, z) = T(T(x, z), u_T^{(n)})$ za svako $n \in N$. Pošto je T nilpotentna, jedina mogućnost je da $T(x, z)$ tj. T zadovoljva (CCL).

U nastavku sledi pregled nekoliko tvrđenja za neprekidne i Arhimedove t-norme.

Tvrđenje 1.4 [9]

Za proizvoljnu t-normu T imamo:

(i) Ako je T desno-neprekidna i ima samo trivijalne idempotentne elemente onda je Arhimedova.

(ii) Ako je T desno-neprekidna i zadovoljava (CCL) onda je Arhimedova.

(iii) Ako je $\lim_{x \to x_0} T(x, x) < x_0$ za svako $x_0 \in (0, 1)$ onda je T Arhimedova.

(iv) Ako je T striktna onda je Arhimedova.

(v) Ako je svako $x \in (0, 1)$ nilpotentni element za T onda je T Arhimedova.

Tvrđenje 1.5 [5]

Za svaku Arhimedovu t-normu T sledeće je ekvivalentno:

(i) T je levo-neprekidna.

(ii) T je neprekidna.

Teorema 1.8 [9]

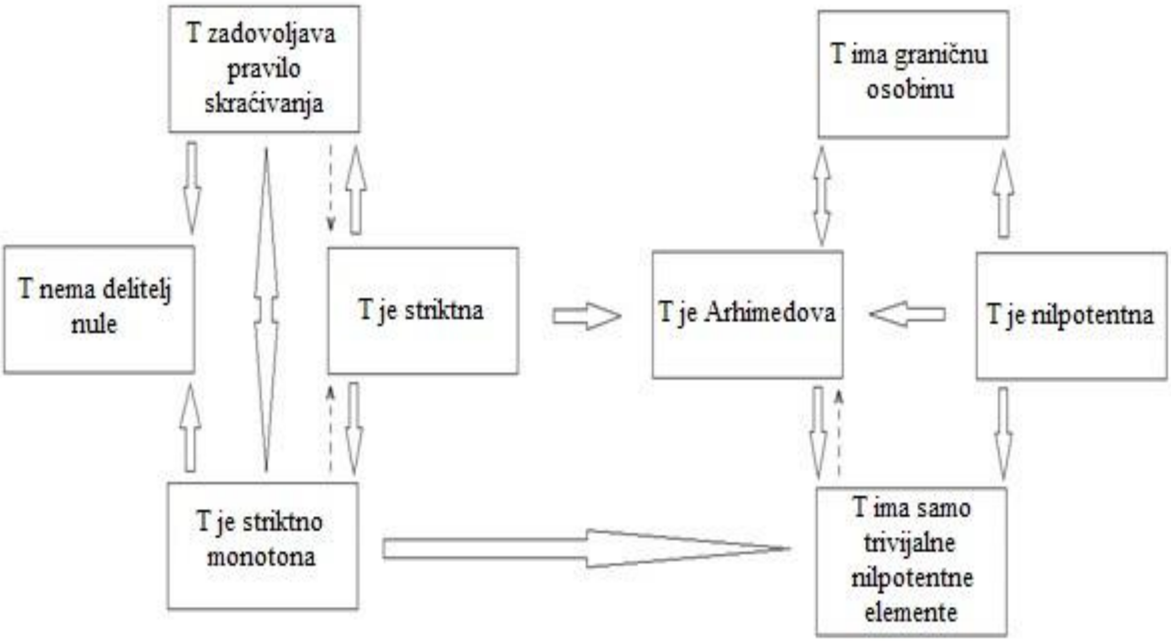
Neka je T neprekidna Arhimedova t-norma. Tada su naredna tvrđenja ekvivalentna:

(i) T je nilpotentna.

(ii) Postoji neki nilpotentni element za T.

(iii) Postoji neki delitelj nule za T.

(iv) T nije striktna.



Slika 6. ***Logičke veze između algebarskih osobina t-normi: obična strelica označava implikaciju, a isprekidana strelica znači da korespondirajuća implikacija važi za neprekidne t-norme.***

Napomena 1.8

Striktno monotone t-konorme isto tako i striktne, Arhimedove i nilpotentne t-konorme mogu biti predstavljene korišćenjem dualnosti. Na primer t-konorma S je striktno monotona ako:

(SM*) $S(x, y) < S(x, z)$ za $x < 1$ i $y < z$

Za Arhimedovu osobinu, je potrebno obrnuti nejednakosti, pa je t-konorma S Arhimedova ako:

(AP*) za svako $(x, y) \in (0, 1)^2$ postoji $n \in N$ tako da $x_S^{(n)} > y$

Naravno, t-konorma zadovoljava bilo koju osobinu ako i samo ako ih dualna t-norma zadovoljava.

Sada je na redu definicija distributivnosti za t-normu i t-konormu.

Definicija 1.10 [9]

Neka je T t-norma i S t-konorma. Tada, T je distributivno nad S ako za svako $x, y, z \in [0, 1]$

$$T(x, S(y, z)) = S(T(x, y), T(x, z))$$

i da je S distributivno nad T ako za $x, y, z \in [0, 1]$:

$$S(x, T(y, z)) = T(S(x, y), S(x, z))$$

Ako je T distributivno nad S i S distributivno nad T, onda se (T, S) zove distributivni par.

Tvrđenje u nastavku povezuje distributivnost t-normi i t-konormi.

Tvrđenje 1.6 [9]

Neka je T t-norma i S t-konorma, tada važi:

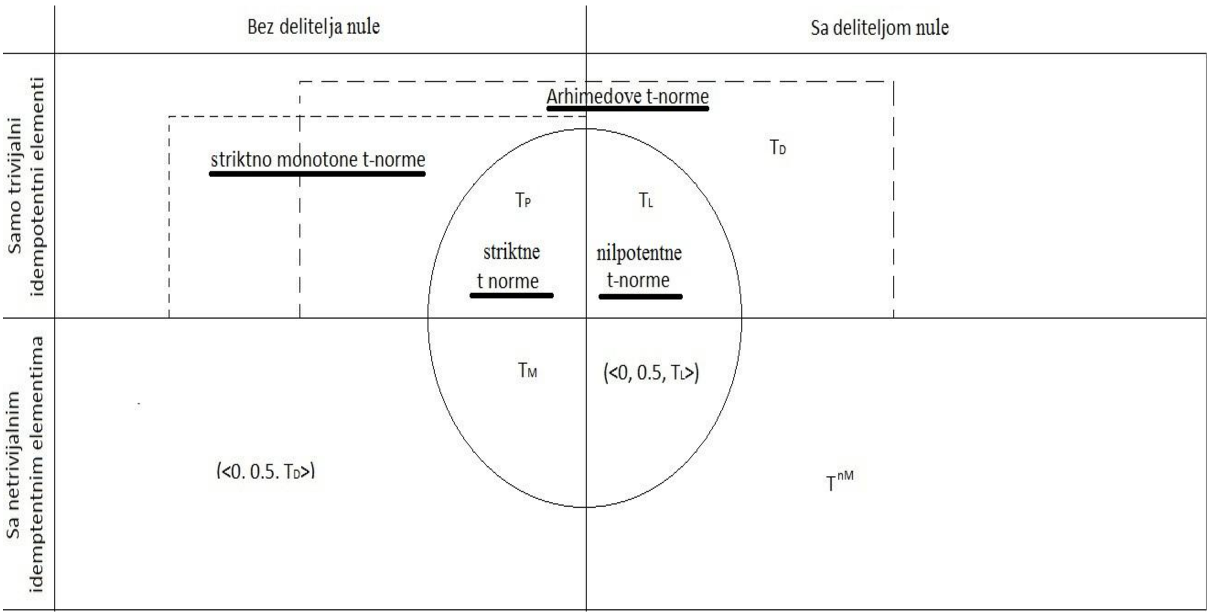
(i) S je distrubtivna nad T ako i samo ako je $T = T_M$.

(ii) T je distributivno nad S ako i samo ako je $S = S_M$.

(iii) (T, S) je distributivni par ako i samo ako je $T = T_M$ i $S = S_M$.

Napomena 1.9

Ako je T t-norma, S dualna t-konorma i T je distributivno nad S (ili S je distribtivno nad T), tada važi $T = T_M$ i $S = S_M$.



Slika 7. Različite klase t-normi (svaka sa tipičnim predstavnikom): unutar centralnog kruga su neprekidne t-norme, a klase striktnih i nilpotentnih t-normi su podvučene.

1.5 Polugrupe i t-norme

Iz osobina (T1) – (T4) i (S1) – (S4) trougaone norme i trougaone konorme sledi da jedinični interval [0, 1] predstavlja specijalnu polugrupu, pa čak i specijalni monoid. Da bi se predstavile ove veze, prvo treba uvesti određene definicije i osobine iz teorije apstraktnih polugrupa.

Definicija 1.11 [9]

(i) Neka je X neprazan skup i * binarna operacija na X, odnosno $*: X^2 \rightarrow X$. (X, *) se naziva polugrupa ako je operacija * asocijativna, odnosno ako za svako x, y, z ∊ X važi

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

(ii) Polugrupa (X, *) se naziva komutativna ako je * komutativna operacija, odnosno ako važi: za svako x, y ∊ X, x * y = y * x.

(iii) Element e ∊ X se naziva neutralni element ili jedinični element polugrupe (X, *) ako za svako x ∊ X važi x * e = e * x = x. Polugrupa koja ima neutralni element se naziva monoid.

(iv) Element a ∊ X se naziva nula element polugrupe (X, *) ako za svaki element x ∊ X važi: $x * a = a * x = a$.

(v) Element x ∊ X se naziva idempotentni element polugrupe (X, *) ako x * x = x

(vi) Ako polugrupa (X, *) ima nula element a, onda $x \in X \setminus \{a\}$ se zove nilpotentni element za (X, *), ako za neko n ∊ N imamo $x^n = a$, gde, po konvenciji, $x^1 = x$ i $x^{n+1} = x * x^n$.

Iz ove definicije nije teško zaključiti da polugrupa može da ima najviše jedan neutralni element i najviše jedan nula element. Neutralni i nula element, ako postoje, su uvek idempotentni elementi polugrupe (X, *), takozvani trivijalni idempotentni elementi.

Definicija 1.12 [9]

(i) Neka $\preceq$ je relacija parcijalnog (odnosno linearnog) poretka nad X. Tada se $(X, *, \preceq)$ zove delimično uređena polugrupa (odnosno linearno uredjena polugrupa), ako je (X, *) polugrupa, i ako važi da iz $y \preceq z$ sledi da je $x * y \preceq x * z$ i $y * x \preceq z * x$.

(ii) Neka je τ topologija nad X. Trojka $(X, *, \tau)$ se zove topološka polugrupa ako je (X, *) polugrupa takva da funkcija $*: X^2 \rightarrow X$ je neprekidna u odnosu na τ.

(iii) Parcijalno ili potpuno uređena polugrupa $(X, *, \preceq)$ koja zadovoljava da je $(X, *, \tau_{\preceq})$ topološka polugrupa se zove parcijalno uređena topološka polugrupa ili potpuno uređena topološka polugrupa, respektivno.

Primer 1.6 [9]

Ako je definisana operacija $*$ na $[0.5, 1]$ sa $x * y = \max(xy, 0.5)$, onda je $([0.5, 1], *, \preceq)$ komutativna, potpuno uređena topološka polugrupa sa nula elementom 0.5 i neutralnim elementom 1.

Dalje, sledi definicija i tvrđenje vezano za izomorfizam kod polugrupa.

Definicija 1.13 [9]

(i) Dve polugrupe $(X, *)$ i $(Y, \circ)$ su izomorfne ako postoji bijekcija $\rho: X \to Y$ tako da za svako $x, y \in X$:

$$\rho(x * y) = \rho(x) \circ \rho(y) \tag{1.3}$$

(ii) Dve parcijalno ili potpuno uređene polugrupe $(X, *, \preceq)$ i $(Y, \circ, \sqsubseteq)$ sa relacijama poretka $\preceq$ i $\sqsubseteq$, respektivno, su izomorfne ako postoji bijekcija $\rho : X \to Y$ koja zadovoljava (1.3) i za svako $x, y \in X$

$$\text{iz } x \preceq y \Longrightarrow \rho(x) \sqsubseteq \rho(y)$$

(iii) Dve topološke polugrupe $(X, *, \tau_1)$ i $(Y, \circ, \tau_2)$ su izomorfne ako postoji homomorfizam $\rho: X \to Y$ (tj. bijekcija tako da su ρ i ρ^{-1} neprekidni) koji zadovoljava (1.3).

Tvrđenje 1.7 [9]

(i) Funkcija $T: [0, 1]^2 \to [0, 1]$ je t-norma ako i samo ako $([0, 1], T, \leq)$ je potpuno uređena komutativna polugrupa sa neutralnim elementom 1 i anihlatorom 0.

(ii) Funkcija $S: [0, 1]^2 \to [0, 1]$ je t-konorma ako i samo ako je $([0, 1], S, \leq)$ potpuno uređena komutativna polugrupa sa neutralnim elementom 0 i anihilatorom 1.

(iii) Ako je T t-norma i S t-konorma i $\rho: [0, 1] \to [0, 1]$ striktno rastuća bijekcija, onda su operacije $T_\rho, S_\rho: [0, 1]^2 \to [0, 1]$ date sa formulama:

$$T_\rho(x, y) = \rho^{-1}(T(\rho(x), \rho(y)))$$

$$S_\rho(x, y) = \rho^{-1}(S(\rho(x), \rho(y)))$$

t-norma i t-konorma izomorfne, i izomorfne su sa T i S, respektivno.

2. Fazi aritmetika

Reč *fazi* (eng. *fuzzy*) označava neodređen, neprecizan pojam. Način na koji ljudi razmišljaju je isključivo *fazi*, jer se doživljaj sveta oko nas neprekidno menja, i ne može uvek biti definisan pomoću tačnih ili netačnih izjava. Karakteristike kao “blizu”, “mlad”, “lep”, "toplo" su jednostavni primeri nepreciznih termina. Neka se uzme u obzir primer "Čovek je mlad". Za neke ljude, čovek sa 25 godina je mlad, dok za druge i neko sa 35 godina je mlad. Dakle, koncept mlad nije precizno definisan. Na primer, ako neko ima 1 godinu on je definitivno mlad, a ako ima 100 godina, onda definitivno nije mlad. Međutim, čovek sa 35 godina ima mogućnost da se posmatra kao mlad i to obično zavisi od osobe do osobe, koja procenjuje nečiju mladost. Kod kompleksnih sistema suviše precizan podatak nije od neke koristi, npr. podatak "Sutra nas očekuje temperatura 26,6489 °C" ne daje mnogo važnije informacije (čak zatrpava nepotrebnim informacijama) od "Sutra nas očekuje toplije vreme". Fazi skupove je uveo u naučnu metodologiju prof. Lotfi A. Zadeh 1965. godine, da bi mogao koristiti podatake i informacije koje poseduju određene neizvesnosti. L. Zadeh je rekao: "Pojam fazi skupa daje polaznu tačku za konstruisanje konceptualnog okvira koji u mnogim aspektima odgovara običnim skupovima , ali je opštiji i , potencijalno, ima mnogo širu primenu, posebno u oblasti klasifikacije i procesiranja informacija. U suštini , takav okvir pruža prirodan način suočavanja sa problemima, čiji su izvor nepreciznosti i odsustvo strogo definisanih kriterijuma nego uticaj slučajnih promenljivih" [15].

Rezultati prezentovani u ovom poglavlju su iz [1, 2, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 12, 15, 16].

2.1 Osnove fazi skupa

U ovom poglavlju dat je pregled osnovnih pojmova iz teorije fazi skupova. Pojam fazi skupa je uveden kao generalizacija klasičnih, običnih skupova, formiranjem tzv. funkcije pripadnosti (karakteristične funkcije). Posle toga se uvode pojmovi kao što su interval podrške, α-preseci, konveksnost i fazi broj. Zatim sledi predstavljanje fazi skupova na osnovu njihovih α-preseka, kao i operacije koje se mogu izvoditi nad fazi skupovima [1, 2, 12, 15].

Kod klasičnih skupova pripadanje nekog elementa skupu je precizno definisano: element ili jeste član nekog skupa ili nije. Zato karakteristična funkcija $\mu_A(x)$ može uzimati samo dve vrednosti, 1 ili 0. Karakteristična funkcija (funkcija pripadnosti) $\mu_A(x)$ predstavlja pravilo pripadnosti, koje karakteriše elemente (članove) skupa $A \subset U$, gde je U univerzalni skup. Drugim rečima:

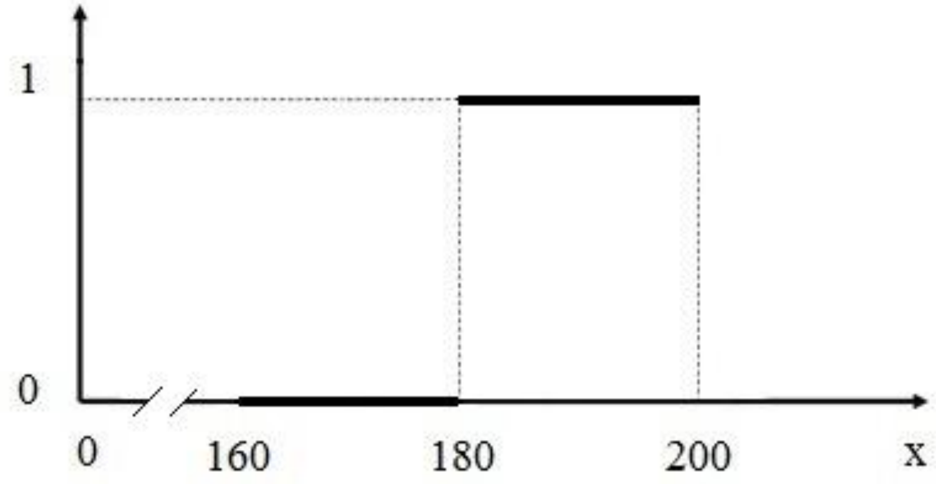
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } x \in A \\ 0 & \text{za } x \notin A \end{cases}$$

Ovde se vidi da su granice običnog skupa A oštro definisane. Međutim, to nije slučaj i kod fazi skupova, zato što neki element može i delimično da pripada skupu, tj. pripadnost se može predstaviti postepeno.

Razlika izmedju fazi i običnih (eng. crisp) skupova se može ilustrovati pomoću primera "Visoki ljudi" [1]. Razmatra se sledeći slučaj. Čovek je visok ako je njegova visina 180 cm ili više, inače čovek nije visok. Karakteristična funkcija skupa A = {Visoki ljudi} je

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } 180 \leq x \\ 0 & \text{za } 160 \leq x < 180 \end{cases}$$

gde je univerzalni skup U = {x | 160 ≤ x ≤ 200 }.



Slika 8. Karakteristična funkcija skupa "Visoki ljudi".

Očigledno, opis skupa "Visoki ljudi" nije zadovoljavajući, pošto ne dozvoljava gradaciju. Reč *visok* nije najjasnija. Na primer, osoba visine 179 cm nije visoka, isto kao i osoba visina 160 cm. Međutim, osoba visine 180 cm je visoka isto kao i osoba visine 200 cm. Takođe, po definicije datoj gore, dobija se drastična razlika između visine 179 cm i 180 cm, što nije realno.

Prethodni problem je moguće rešiti ako se dozvoli da karakteristična funkcija uzima vrednosti iz intervala [0, 1]. U ovom slučaju koncept pripadnosti više nije običan nego postaje *fazi,* u smislu reprezentovanja delimičnog pripadanja.

Neka je A klasičan podskup univerzalnog skupa U. Fazi skup **A** je definisan pomoću skupa ili uređenih parova, binarnom relacijom,

$$\mathbf{A} = \{(x, \mu_{\mathbf{A}}(x)) \mid x \in \mathrm{A}, \mu_{\mathbf{A}}(x) \in [0, 1]\}, \qquad (2.1)$$

gde je $\mu_{\mathbf{A}}(x)$ funkcija pripadnosti. $\mu_{\mathbf{A}}(x)$ predstavlja stepen pripadnosti nekog elementa iz A fazi skupu **A**. (2.1) pokazuje da se svakom elementu x iz **A** dodeljuje realan broj $\mu_{\mathbf{A}}(x)$ iz intervala [0, 1]. Veća vrednost $\mu_{\mathbf{A}}(x)$ predstavlja veći stepen pripadnosti.

Ovde se pretpostavlja da je funkcija pripadnosti $\mu_{\mathbf{A}}(x)$ ili delimično neprekidna ili diskretna. Fazi skup **A** na osnovu (2.1) je formalno jednak funkciji pripadnosti $\mu_{\mathbf{A}}(x)$.

Fazi skupovi su označeni masnim slovima **A**, **B**, **C**, ... a odgovarajuće funkcije pripadnosti sa $\mu_{\mathbf{A}}(x)$, $\mu_{\mathbf{B}}(x)$, $\mu_{\mathbf{C}}(x)$, ...

Elementi sa nula stepenom pripadnosti fazi skupu se obično ne prikazuju.

Klasični skupovi se mogu posmatrati kao specijalni slučaj fazi skupova, čija je karakteristična funkcija jednaka 1.

Fazi skup se zove normalizovan ako najmanje jedan element $x \in \mathbf{A}$ dostiže maksimalnu pripadnost 1, inače se skup zove nenormalizovan. Neka je skup **A** nenormalizovan, tada $\mu_{\mathbf{A}}(x) < 1$. Normalizovati skup skup **A** znači normalizovati njegovu funkciju pripadnosti $\mu_{\mathbf{A}}(x)$, tj. $\overline{\mu_{\mathbf{A}}}(x) = \frac{\mu_{\mathbf{A}}(x)}{max\, \mu_{\mathbf{A}}(x)}$.

A se zove prazan skup, u oznaci $\emptyset$, ako je $\mu_{\mathbf{A}}(x) = 0$ za svako $x \in$ A.

Primer 2.1 [1] Neka je dat fazi skup

$$\mathbf{A} = \{(x_1, 0.1), (x_2, 0.5), (x_3, 0.3), (x_4, 0.8), (x_5, 1), (x_6, 0.2)\}.$$

Ovo je diskretan fazi skup koji se sastoji od 6 uređenih parova. Elementi x_i, i = 1,...,6, ne moraju uvek biti brojevi. Funkcija pripadnosti $\mu_{\mathbf{A}}(x)$ za **A** uzima sledeće vrednosti:

$$\mu_{\mathbf{A}}(x_1) = 0.1, \quad \mu_{\mathbf{A}}(x_2) = 0.5, \quad \mu_{\mathbf{A}}(x_3) = 0.3,$$
$$\mu_{\mathbf{A}}(x_4) = 0.8, \quad \mu_{\mathbf{A}}(x_5) = 1, \quad \mu_{\mathbf{A}}(x_6) = 0.2.$$

Element x_5 je potpuni član fazi skupa **A,** x_1 veoma malo, x_6 i x_3 su malo više članovi skupa **A,** x_4 je skoro potpuni član skupa **A,** dok x_2 je manje ili više član **A.**
Elementi x_i iz **A** se mogu predstaviti na različite načine, ovde su prikazani samo neki od njih:

(a) Neka su x_i, i = 1, ..., 6 prirodni brojevi, takvi da $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, ..., $x_6 = 6$ pripadaju skupu **A** {1, 2, 3, 4, 5, 6}, gde **U** = **N**. Tada fazi skup **A** postaje

$$\mathbf{A} = \{(1, 0.1), (2, 0.5), (3, 0.3), (4, 0.8), (5, 1), (6, 0.2)\}$$

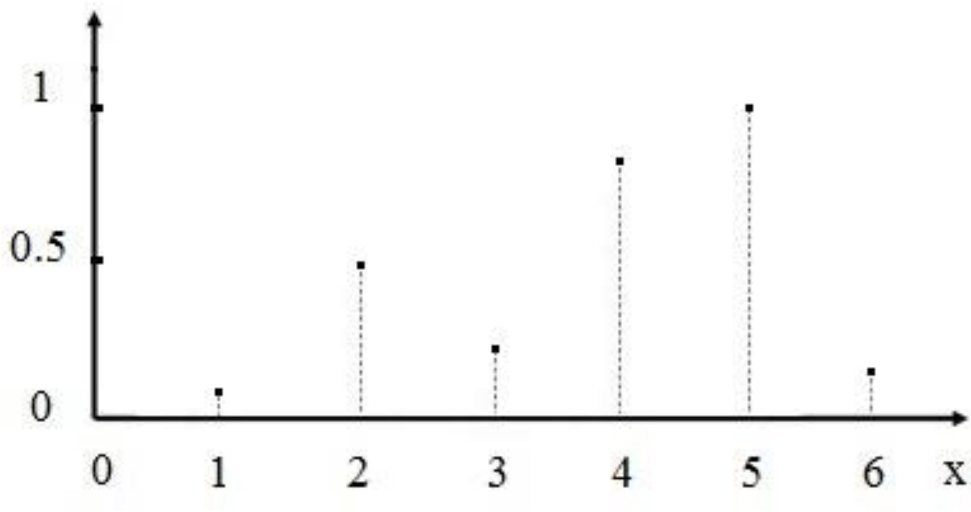
Njegova funkcija pripadnosti, predstavljena na Slici 9., je diskretna.

(b) Neka su x_i, i = 1, ..., 6 Miloševi prijatelji, gde je x_1 = Ivan, x_2 = Milan, x_3 = Dejan, x_4 = Dušan, x_5 = Nebojša i x_6 = Miro. Skup Miloševih prijatelja

A ={Ivan, Milan, Dejan, Dušan, Nebojša, Miro}

je podskup univerzalnog skupa (svi Miloševi prijatelji). **A** predstavlja najbliže Miloševe prijatelje

A = {(Ivan, 0.1), (Milan, 0.5), (Dejan, 0.3), (Dušan, 0.8), (Nebojša, 1), (Miro, 0.2)}



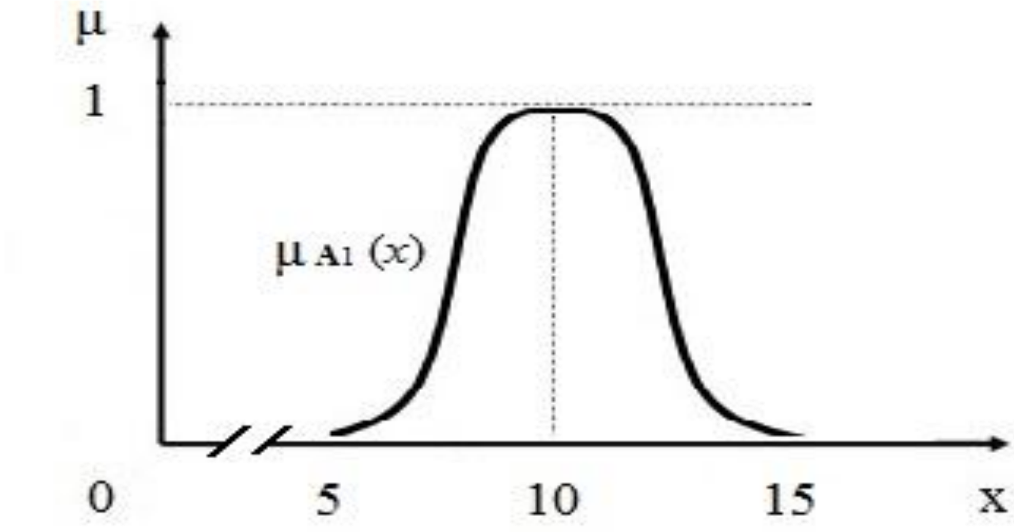
Slika 9. ***Fazi skup* A = {(1, 0.1), (2, 0.5), (3, 0.3), (4, 0.8), (5, 1), (6, 0.2)}.**

Primer 2.2 [1] U ovom primeru su predstavljeni brojevi koji su *blizu* 10.

(a) Prvo se posmatra fazi skup

$$\mathbf{A}_1 = \{(x, \mu_{\mathbf{A}_1}(x)) \mid x \in [5, 15],\ \mu_{\mathbf{A}_1}(x) = \frac{1}{1 + (x - 10)^2}\}$$

gde je , $\mu_{\mathbf{A}_1}(x)$ (Slika 10.) neprekidna funkcija. Fazi skup $\mathbf{A}_1$ predstavlja realne brojeve *blizu* 10.

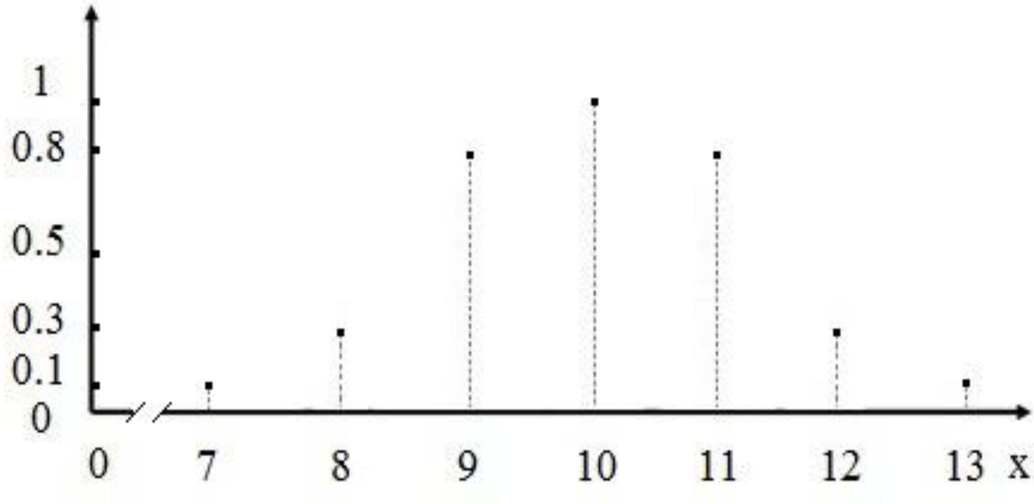


Slika 10. ***Realni brojevi blizu 10.***

(b) Prirodni brojevi *blizu* 10 mogu biti izraženi pomoću konačnog fazi skupa, koji se sastoji od sedam uređenih parova

$$\mathbf{A}_2 = \{(7, 0.1), (8, 0.3), (9, 0.8), (10, 1), (11, 0.8), (12, 0.3), (13, 0.1)\}.$$

Funkcija pripadnosti , $\mu_{\mathbf{A}_2}(x)$ (Slika 11.) je diskretna funkcija.

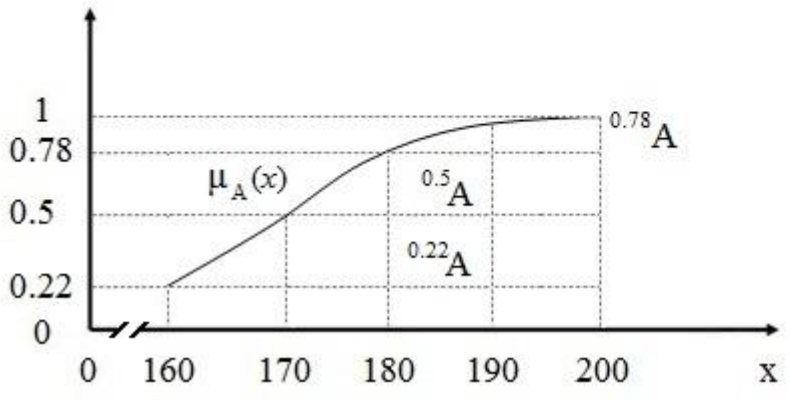


Slika 11. Prirodni brojevi blizu 10.

Iz primera "Visoki ljudi" može se videti da njihov opis pomoću klasičnih skupova nije adekvatan. Mnogo bolji opis je dat pomoću fazi skupa **A** = {(x, $\mu_{\mathbf{A}}(x)$)}, gde je x izraženo u cm i pripada intervalu [160, 200] i $\mu_{\mathbf{A}}(x)$ je definisano kao (Slika 12.)

$$\mu_{\mathrm{A}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(30)^2}\,(x - 140)^2 & \text{za } 160 \le x < 170 \\ -\frac{1}{2(30)^2}(x - 200)^2 + 1 & \text{za } 170 \le x < 200 \end{cases}$$

Funkcija pripadnosti $\mu_{\mathrm{A}}(x)$ je neprekidna, delimično-kvadratna funkcija. Brojevi na horizontalnoj x-osi predstavljaju visinu u cm, a vertikalna μ-osa predstavlja na kom nivou poverenja se može reći da je neki čovek visok. Ako je osoba visine 160 cm, onda je malo visoka, sa 180 cm osoba je skoro visoka a sa visinom od 200 cm osoba je visoka.



Slika 12. Primer "Visoki ljudi" predstavljen pomoću fazi skupa

Dalje se definiše α-presek (eng. α-cut), označen sa ${}^{\alpha}\mathbf{A}$, kao klasičan skup elemenata x koji pripadaju **A,** najmanje do stepena α:

$$ {}^{\alpha}\mathbf{A} = \{x \mid x \in R,\ \mu_A(x) \geq \alpha\},\quad \alpha \in [0, 1] \tag{2.2}$$

Ova definicija daje *prag*, koji pruža nivo poverenja u odluku modeliranu pomoću fazi skupa. Prag se može iskoristiti da bi se izbacili iz razmatranja elementi x iz **A** čiji je stepen pripadnosti $\mu_A(x) < \alpha$.

Na primer, može se uzeti prag, tj. α-presek, ${}^{0.5}\mathbf{A}$ da bi se izbacili iz razmatranja osobe čija je visina ispod 170 cm.

Svaki fazi podskup se može rekonstruisati pomoću svojih α-preseka, preko specijalnih fazi podskupova $\alpha\mathbf{A}_\alpha$. $\alpha\mathbf{A}_\alpha$ je fazi skup, koji svakom elementu čija je funkcija pripadnosti skupu A veća ili jednaka α pridružuje funkciju pripadnosti jednaku α, dok svim ostalim elementima pridružuje funkciju pripadnosti jednaku 0. Naime, važi sledeća teorema o dekompoziciji fazi skupa.

Teorema 2.1 [12]

Za svaki fazi podskup **A** važi

$$\mathbf{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha\mathbf{A}_\alpha\ ,$$

gde je $\bigcup$ unija fazi skupova.

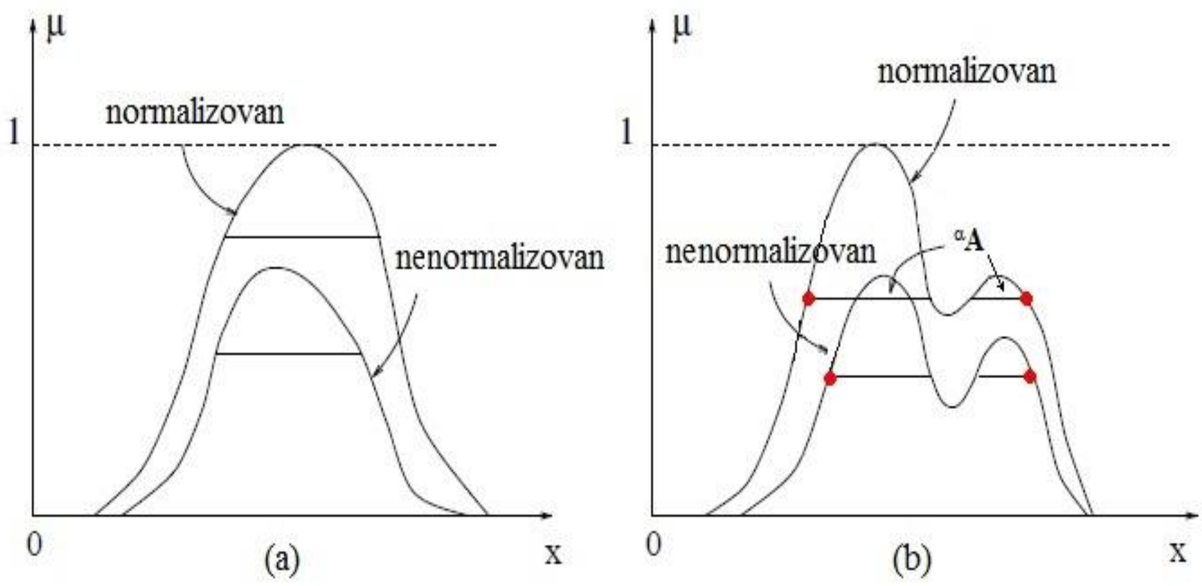
Dokaz: Neka je x proizvoljan fiksan elemenat iz X i neka je $\mu_A(x) = r$. Tada je

$$\mu_{\bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha\mathbf{A}_\alpha}(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \mu_{\alpha\mathbf{A}_\alpha}(x) = \max\big(\sup_{\alpha \in [0,r]} \mu_{\alpha\mathbf{A}_\alpha}(x), \sup_{\alpha \in [r,1]} \mu_{\alpha\mathbf{A}_\alpha}(x)\big)$$

Kako je za $\alpha \in [0, r]$ uvek $\mu_{\mathbf{A}}(x) = r \geq \alpha$, to je $\mu_{\alpha\mathbf{A}_\alpha} = \alpha$, a za $\alpha \in (r, 1]$ uvek je $\mu_{\mathbf{A}}(x) = r < \alpha$, pa je $\mu_{\alpha\mathbf{A}_\alpha} = 0$, te važi

$$\mu_{\bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha\mathbf{A}_\alpha}(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha = r = \mu_{\mathbf{A}}(x) \qquad \blacksquare$$

Fazi skup **A**, na univerzalnom skupu **U = R**, je *konveksan* ako i samo ako je α-presek intervala ${}^{\alpha}\mathbf{A}$ (Slika 13.) konveksan za svako α iz intervala (0, 1]. U tom slučaju, svi α-preseci intervala ${}^{\alpha}\mathbf{A}$ se sastoje od jednog segmenta (Slika 13.(a)). Inače, skup je nekonveksan (Slika 13.(b)).



Slika 13. (a) Konveksni fazi skupovi; (b) Nekonveksni fazi skupovi

2.2 Fazi brojevi

Fazi broj predstavlja proširenje klasičnog broja u smislu da se ne odnosi na jednu vrednost, već na skup vrednosti. Svaka moguća vrednost se nalazi između 0 i 1. U ovom radu će se posmatrati fazi brojevi u skladu sa definicijom iz [12].

Rezultati prezentovani u ovom poglavlju su iz [1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 15].

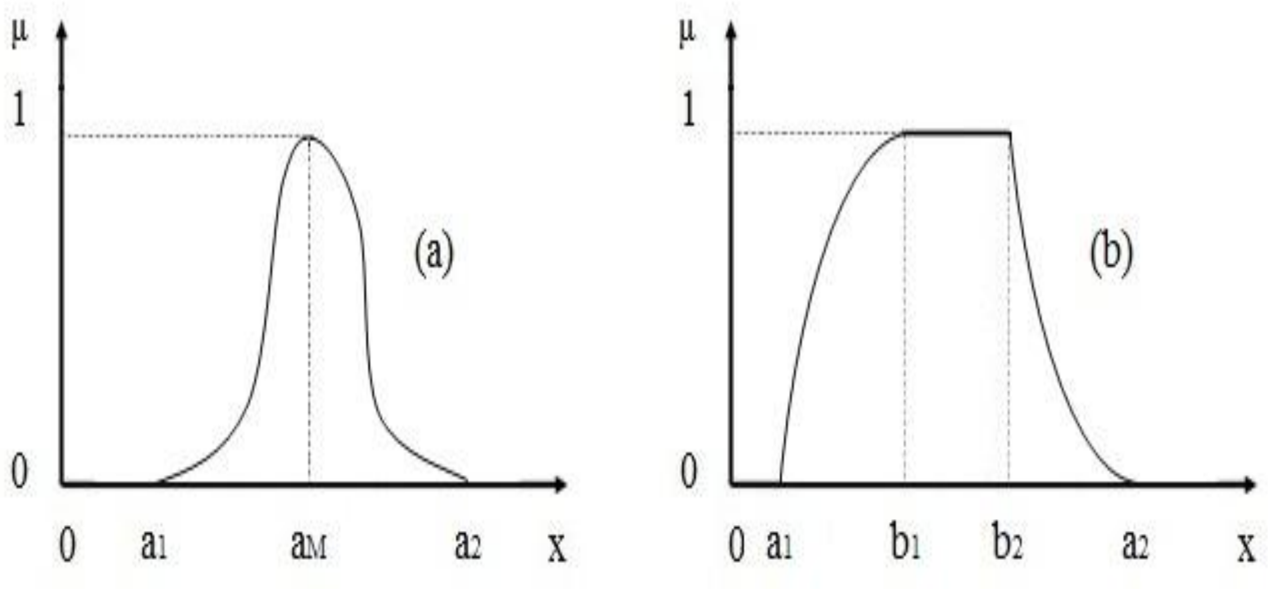
Definicija 2.1 [12]

Fazi skup **A** iz univerzalnog skupa R je fazi broj ako je konveksan i normalizovan tj. $\mu_{\mathbf{A}}(x) = 1$ za neko $x \in$ R i za sve x, y, z ∈ R, takve da je x < y < z, važi $\mu_{\mathbf{A}}(y) \geq \min(\mu_{\mathbf{A}}(x), \mu_{\mathbf{A}}(z))$.

Na Slici 14.(a), (b) su prikazana dva fazi broja. Prvi je sa maksimumom, gde dostiže maksimalnu pripadnost $\mu_A(x) = 1$ samo u jednoj tački (a_M, 1). Drugi je sa ravnim delom (eng. with flat), gde maksimalna pripadnost $\mu_A(x) = 1$ nije karakteristična samo za jednu tačku, nego za ceo interval [b_1, b_2]. U suštini, to je α-presek sa najvećim stepenom pripadnosi 1. Fazi broj sa ravnim delom se najčešće koristi za aplikacije u realnom vremenu. Na primer, normalizovan fazi skup na Slici 13.(a) je fazi broj, dok skupovi na Slici 13.(b) nisu. Fazi skup na Slici 12. je takođe fazi broj.

Fazi skup na Slici 11. je fazi skup u skupu prirodnih brojeva, dok fazi skup na Slici 9. nije. Takođe, mogu se razmatrati i fazi brojevi sa ravnim delom u skupu prirodnih brojeva.

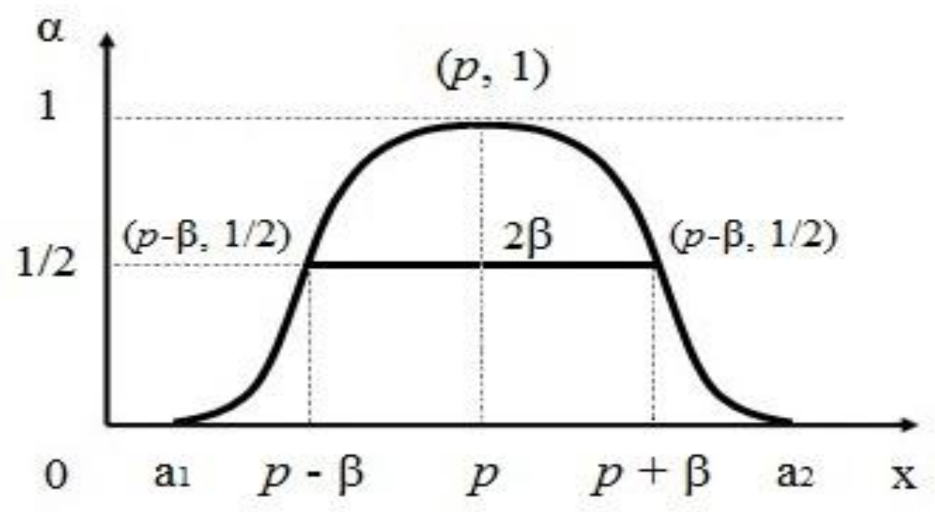
Fazi brojevi se označavaju kosim slovima *A*, *B*, *C*, ..., a njihove funkcije pripadnosti sa $\mu_A(x)$, $\mu_B(x)$, $\mu_C(x)$, ... ili sa $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, ...



Slika 14. Fazi brojevi (a) sa maksimumom (b) sa ravnim delom

2.2.1 Delimično-kvadratni fazi brojevi

Interval $[a_1, a_2]$ (Slika 14.) se zove nosač (eng. supporting interval) za fazi broj. On predstavlja interval, gde je funkcija pripadnosti $\mu_A(x) > 0$. Funkcija pripadnosti $\mu_A(x)$ delimično-kvadratnog fazi broja (Slika 15.) ima oblik zvona, simetrična je u odnosu na $x = p$, ima nosač $[a_1, a_2]$ i za nju su karakteristična dva parametra $p = \frac{1}{2}(a_1+a_2)$ i $\beta \in (0, a_2 - p)$. Vrh (tačka maksimuma) je $(p, 1)$. 2β se zove širina opsega definisana kao segment (α-presek) na nivou $\alpha = \frac{1}{2}$ između tačaka $(p - \beta_1, \frac{1}{2})$ i $(p + \beta_1, \frac{1}{2})$.



Slika 15. Delimično-kvadratni fazi broj

Kriva na Slici 15. je opisana pomoću jednačina:

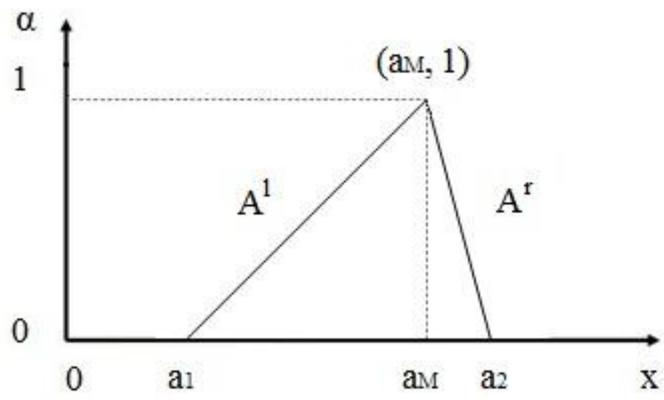
$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(p-\beta-a1)^2}(x - a_1)^2 & \text{za } a_1 \le x \le p - \beta \\ -\frac{1}{2\beta^2}(x - p)^2 + 1 & \text{za } p - \beta \le x \le p + \beta \\ \frac{1}{2(p+\beta-a2)^2}(x - a_2)^2 & \text{za } p + \beta \le x \le a_2 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

2.2.2 Trougaoni fazi brojevi

Trougaoni fazi broj A ili jednostavnije trougaoni broj sa funkcijom pripadnosti $\mu_A(x)$ je definisan na R pomoću

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_M-a_1} & \text{za } a_1 \le x \le a_M \\ \frac{x-a_2}{a_M-a_2} & \text{za } a_M \le x \le a_2 \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \tag{2.3}$$

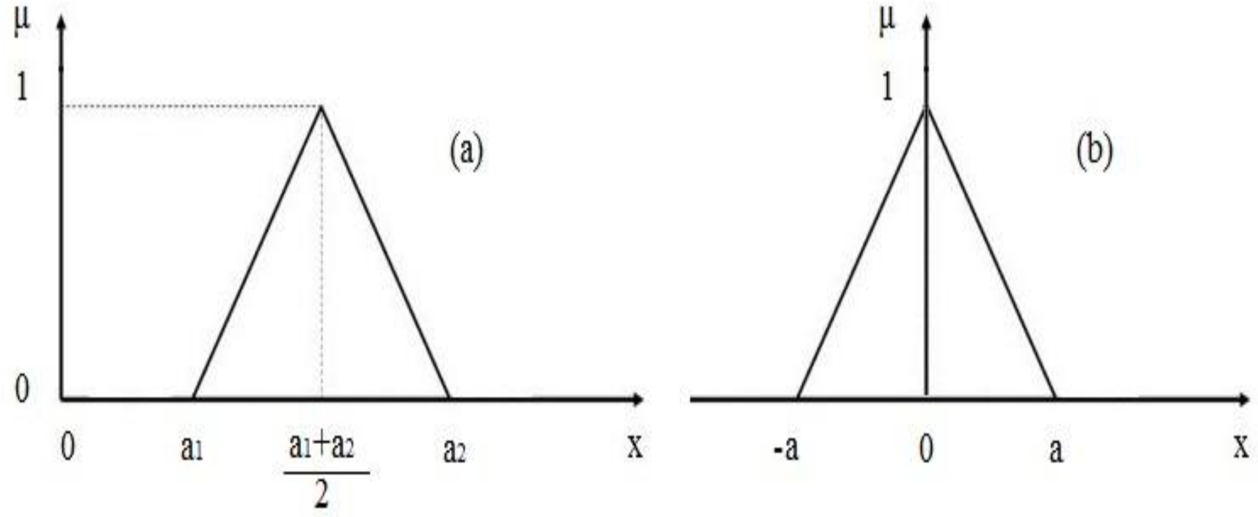
gde je $[a_1, a_2]$ nosač a tačka $(a_M, 1)$ je vrh (Sliku 16.).



Slika 16. Trougaoni fazi brojevi

Često, u aplikacijama, tačka $a_M \in (a_1, a_2)$ se nalazi na sredini nosača, tj. $a_M = \frac{a_1+a_2}{2}$. Tada, ubacujući ovu vrednost u (2.3) dobija se:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 2\,\frac{x-a_1}{a_2-a_1} & \text{za } a_1 \le x \le a_M \\ 2\,\frac{x-a_2}{a_1-a_2} & \text{za } a_M \le x \le a_2 \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \tag{2.4}$$



Slika 17. (a) Centralni trougaoni broj; (b) Centralni trougaoni broj simetričan u odnosu na μ

(2.4) predstavlja *centralni trougaoni broj* (Slika 17.(a)). Slično kao kod delimično-kvadratnog fazi broja veoma je diskutabilno opisati reč *blizu* (blizu a_M). Trougaoni brojevi imaju funkciju pripadnosti koja se sastoji od dva linearna segmenta, A^l (levo) i A^r (desno), koja se spajaju pri vrhu (a_M, 1), što čini grafičku prezentaciju i operacije sa trougaonim brojevima veoma jednostavnim. Takođe, veoma je važno da se mogu konstruisati na osnovu veoma malo informacija.

Trougaoni broj može biti konstruisan na osnovu tri vrednosti a_1, a_M i a_2, a pomoću tih vrednosti se može napisati i njegova funkcija pripadnosti. Zbog toga se trougaoni broj još označava kao:

$$A = (a_1, a_M, a_2).$$

Desni segment (Slika 17.(b)) za $A = (-a, 0, a)$, opisuje *pozitivno malo*, npr. mlade godine, mali profit, mali rizik... Označava se sa $A^r = (0, 0, a)$. Levi segment A^l opisuje *pozitivno veliko*, npr. stare godine, veliki profit, visok rizik... Uopšteno važe sledeće oznake:

$$A^l = (a_1, a_M, a_M) \text{ i } A^r = (a_M, a_M, a_2).$$

2.2.3 *LR*-fazi interval

Specijalnu podklasu fazi intervala predstavljaju *LR*-fazi intervali. U suštini, *LR*-fazi intervali su fazi intervali sa ograničenim nosačem.

Definicija 2.2 [4]

Neka su L i R opadjuća i neprekidna preslikavanja iz [0, 1], takva da $L(0) = R(0) = 1$ i $L(1) = R(1) = 0$, i neka je $(l, r, \beta, \gamma) \in \mathrm{R}^4$, tako da $l \leq r$, $\gamma > 0$ i $\beta > 0$. Fazi broj A definisan sa

$$A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq l - \beta \\ L\left(\frac{l-x}{\beta}\right), & l - \beta \leq x \leq l \\ 1, & l \leq x \leq r \\ R\left(\frac{x-r}{\gamma}\right), & r \leq x \leq r + \beta \\ 0, & r + \gamma \leq x \end{cases}$$

se zove *LR*-fazi interval i označava sa $A = (l, r, \beta, \gamma)_{LR}$.

2.2.4 Trapezoidni fazi brojevi mada

Trapezoidni fazi broj A ili jednostavnije trapezoidni broj (Slika 18.) je definisan nad R kao:

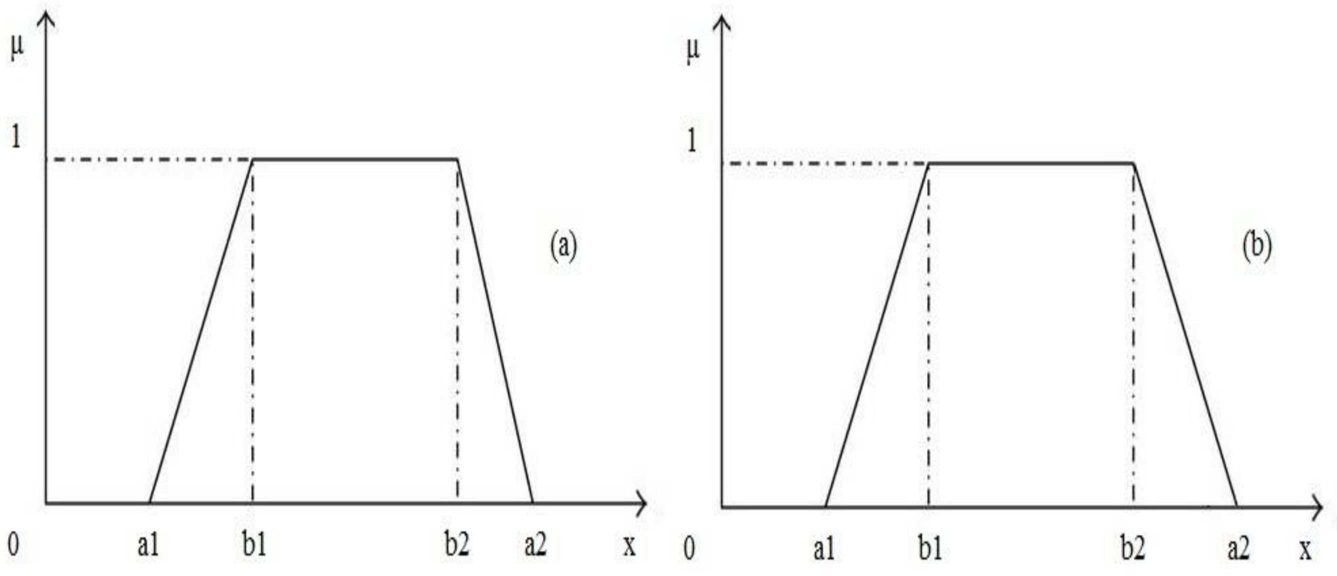
$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x - a_1}{b_1 - a_1} & \text{za } a_1 \leq x \leq b_1 \\ 1 & \text{za } b_1 \leq x \leq b_2 \\ \frac{x - a_2}{b_2 - a_2} & \text{za } b_2 \leq x \leq a_2 \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \tag{2.5}$$

Nosač je $[a_1, a_2]$ a ravni deo na nivou α = 1 ima projekciju $[b_1, b_2]$ na *x*-osi. Sa četiri vrednosti a_1, a_2, b_1 i b_2 može se konstruisati trapezoidni broj (2.5). Može se označiti još kao:

$$A = [a_1, b_1, b_2, a_2]$$

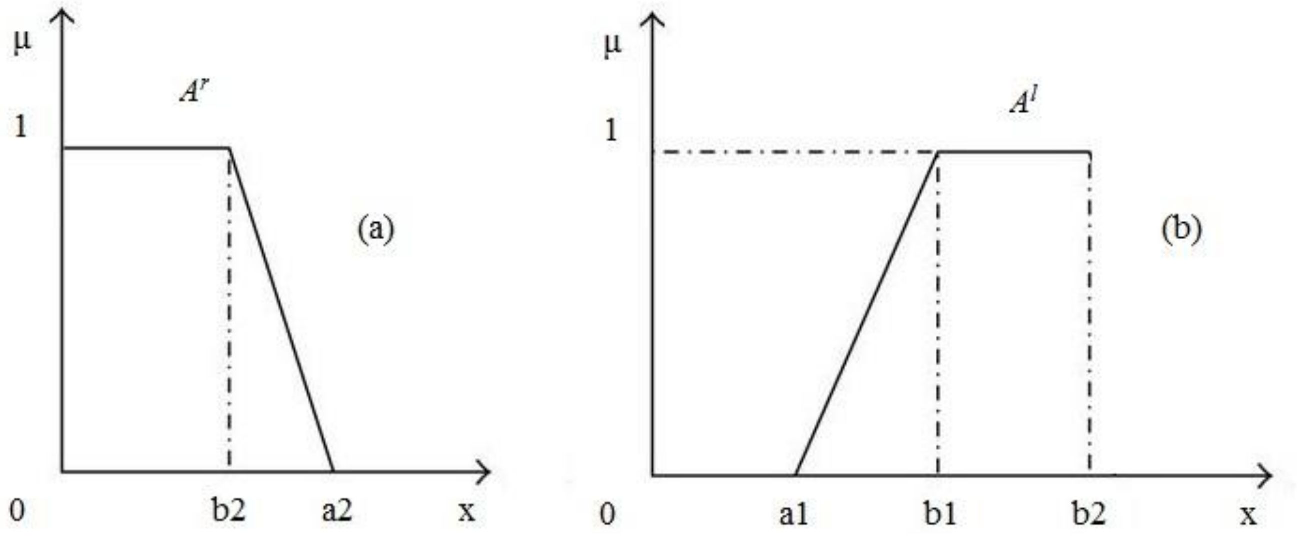
Iako je ovo fazi broj, treba primetiti da predstavlja i fazi interval sa lineranim segmentima.

Ako je $b_1 = b_2 = a_M$, trapezoidni broj postaje trougaoni broj, a ako je $[a_1, b_1] = [b_2, a_2]$ onda se dobija simetrični trapezoidni broj u odnosu na $x = \frac{b_1 + b_2}{2}$ (Slika 18.(b)).



Slika 18. (a) Trapezoidni fazi broj; (b) Simetrični trapezoidni fazi broj

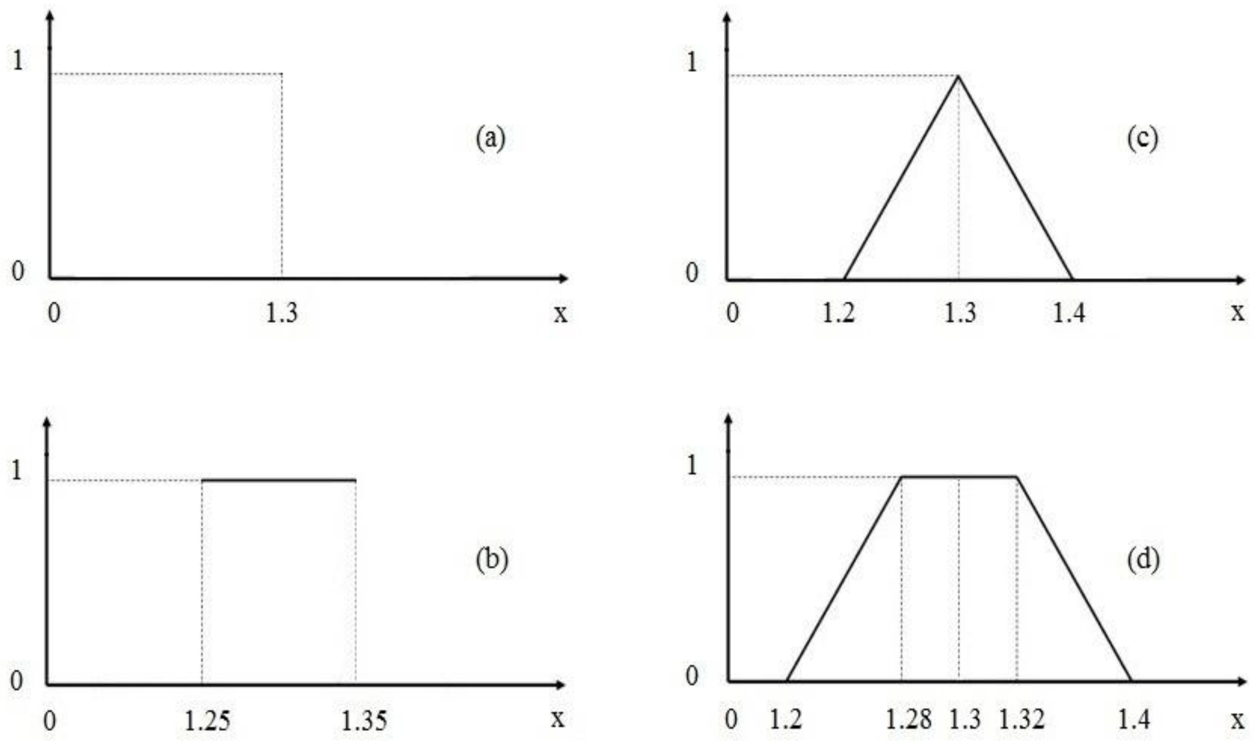
Slično, kao i kod trougaonih brojeva mogu se predstaviti levi i desni trapezoidni brojevi kao delovi trapezoidnog broja. Desni segment označen sa $A^r = (b_1, b_1, b_2, a_2)$ ima nosač $[b_1, a_2]$ a levi segment $A^l = (a_1, b_1, b_2, b_2)$ ima nosač $[a_1, b_2]$.



Slika 19. (a) Desni trapezoidni broj A^r predstavlja „malo” (b) Levi trapezoidni broj A^l predstavlja „veliko”

Posebni slučajevi fazi brojeva obuhvataju obične realne brojeve i interval realnih brojeva, kao što je ilustrovano na Slici 20. : (a) običan realan broj 1.3; (b) običan zatvoreni interval

[1.25, 1.35]; (c) fazi broj koji izražava propoziciju „blisku 1.3”; i (d) fazi broj sa ravnom oblasti (fazi interval).



Slika 20. ***Poređenje realnog broja i običnog intervala sa fazi brojem, odnosno fazi intervalom***

Sledeća teorema pokazuje da funkcije pripadnosti mogu, uopšteno gledajući, biti funkcije definisane po delovima.

Teorema 2.2 [10] Neka je $A \in \mathcal{F}(\mathrm{R})$, gde je $\mathcal{F}(\mathrm{R})$ skup svih fazi podskupova skupa realnih brojeva. Tada A je fazi broj ako i samo ako postoji zatvoreni interval $[a, b] \neq \emptyset$ takav da:

$$A(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \\ l(x) & x \in (-\infty, a) \\ r(x) & x \in (b, \infty) \end{cases} \tag{2.6}$$

gde je l funkcija iz $(-\infty, a)$ u [0, 1], monotono rastuća, neprekidna sa desne strane, takva da $l(x) = 0$ za $x \in (-\infty, \omega_1)$; r je funkcija iz (b, ∞) u [0, 1] monotono opadujuća, neprekidna sa leve strane, takva da $r(x) = 0$ za $x \in (\omega_2, \infty)$.

Dokaz: *Potreban uslov*. Pošto je A fazi broj, ${}^{\alpha}A$ je zatvoreni interval za svako $\alpha \in (0, 1]$. Za $\alpha = 1$, ${}^{1}A$ je ne-prazan zatvoreni interval, jer je A normalizovano. Stoga, postoji par a, $b \in \mathrm{R}$

takav da ${}^{1}A = [a, b]$, gde je $a \leq b$. To jest, $A(x) = 1$ za $x \in [a, b]$ i $A(x) < 1$ za $x \in [a, b]$. Tada je $0 \leq l(x) < 1$, jer je $0 \leq A(x) < 1, \forall x \in (-\infty, a)$.

Neka je $x \leq y < a, \Rightarrow A(y) \geq \min\left[A(x), A(a)\right] = A(x)$ pošto je A konveksno i $A(\alpha) = 1$. Stoga, $l(y) \geq l(x)$; to jest, l je monotono rastuće.

Sada se pretpostavlja da $l(x)$ nije neprekidno sa desne strane. Ovo znači da za neko $x_0 \in (-\infty, a)$ postoji niz brojeva $\{ x_n \}$ takav da je $x_n \geq x_0$, $\forall x$ i da je

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$$

ali $$\lim_{n\to\infty} l(x_n) = \lim_{n\to\infty} A(x_n) = \alpha > l(x_0) = A(x_0)$$

Sada, $x_n \in {}^{a}A$ za neko n jer je ${}^{a}A$ zatvoreni interval i stoga takođe $x_0 \in {}^{a}A$. Dakle, $l(x_0) = A(x_0) \geq \alpha$, što je kontradikcija. To jest, $l(x)$ je neprekidno sa desne strane.

Dokaz da je funkcija r na Slici 21. monotono opadajuća i da je neprekidna sa leve strane je sličan.

Pošto je A fazi broj, ${}^{0+}A$ je ograničeno. Dakle, postoji par $\omega_1, \omega_2 \in \mathrm{R}$ konačnih brojeva gde važi $A(x) = 0$ za $x \in (-\infty, \omega_1) \cup (\omega_2, \infty)$.

Dovoljan uslov. Svaki fazi skup A definisan putem (2.6) je očigledno normalizovan, a njegova podrška ${}^{0+}A$ je ograničena, jer je ${}^{0+}A \subseteq [\omega_1, \omega_2]$. Ostaje da se dokaže da je ${}^{a}A$ zatvoreni interval za svako $\alpha \in (0, 1]$. Neka je

$x_\alpha = \inf\{x \mid l(x) \geq \alpha, x < a\}$,

$y_\alpha = \sup\{x \mid r(x) \geq \alpha, x > b\}$

za svako $\alpha \in (0, 1]$. Treba dokazati da je ${}^{a}A = [x_\alpha, y_\alpha]$ za svako $\alpha \in (0, 1]$.

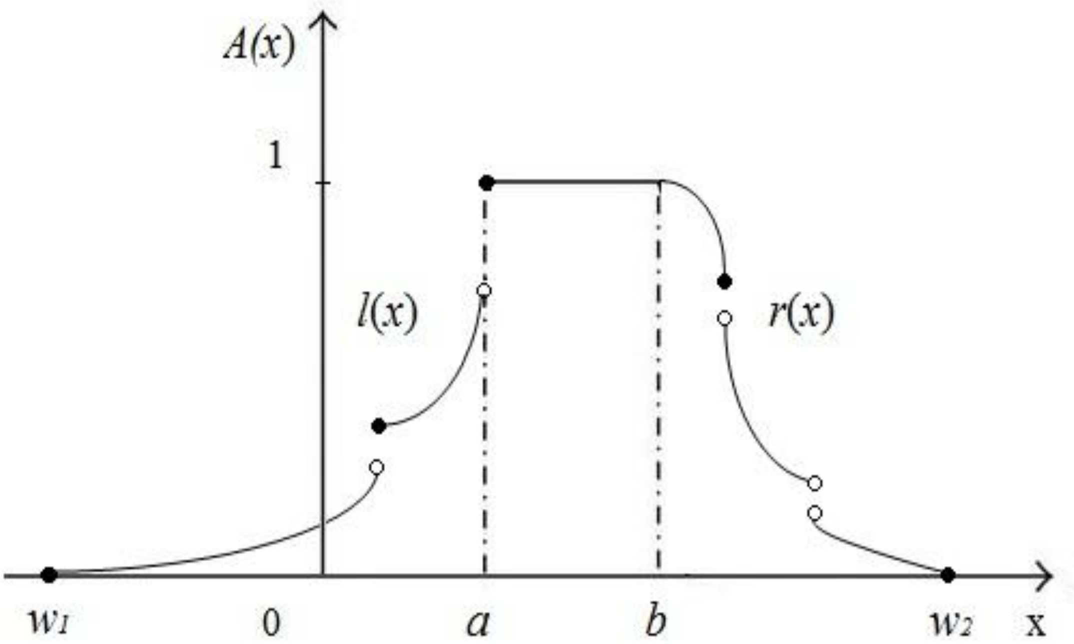
Za svako $x_0 \in {}^{a}A$, ako $x_0 < a$, tada $l(x_0) = A(x_0) \geq \alpha$. To jest, $x_0 \in \{x \mid l(x) \geq \alpha, x < a\}$, i zbog toga, $x_0 \geq \inf\{x \mid l(x) \geq \alpha, x < a\} = x_\alpha$. Ako je $x_0 > b$, onda $r(x_0) = A(x_0) \geq \alpha$; to jest $x_0 \in \{x \mid r(x) \geq \alpha, x > b\}$, i zbog toga, $x_0 \leq \sup\{x \mid r(x) \geq \alpha, x > b\} = y_\alpha$. Očigledno, $x_\alpha \leq a$, i $y_\alpha \geq b$; to jest, $[a, b] \subseteq [x_\alpha, y_\alpha]$. Stoga, $x_0 \in [x_\alpha, y_\alpha]$, i sledi da je ${}^{a}A \subseteq [x_\alpha, y_\alpha]$. Ostaje da se dokaže da je $x_\alpha, y_\alpha \in {}^{\alpha}A$.

Po definiciji x_α, mora postojati niz $\{x_n\}$ u $\{x \mid l(x) \geq \alpha, x < a\}$ takav da $\lim_{n \to \infty} x_n = x_\alpha$, gde je $x_n \geq x_\alpha$ za bilo koje n. Pošto je l neprekidno sa desne strane, dobija se

$$l(x_\alpha) = x(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} l(x_n) \geq \alpha.$$

Dakle, $x_\alpha \in {}^{\alpha}A$. Na sličan način se može dokazati da $y_\alpha \in {}^{\alpha}A$. ■

Posledica teoreme 2.2 je da svaki fazi broj može biti predstavljen u obliku (2.6). U opštem smislu, ova forma dozvoljava da se fazi brojevi definišu po delovima, kao što je ilustrovano na Slici 21.



Slika 21. Uopšteni fazi broj A predstavljen pomoću (2.6)

Primer 2.3 [10]

Definisana su četiri fazi broja sa Slike 20. u odnosu na (2.6):

(a)

$$w_1 = a = b = w_2 = 1.3$$

$$\forall x \in (-\infty, 1.3), l(x) = 0$$
$$\forall x \in (1.3, \infty), r(x) = 0$$

(b)

$$w_1 = a = 1.25, w_2 = b = 1.35$$
$$\forall x \in (-\infty, 1.25), l(x) = 0$$
$$\forall x \in (1.35, \infty), r(x) = 0$$

(c)

$$a = b = 1.3,$$
$$w_1 = 1.2, w_2 = 1.4$$

$$l(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 1.2) \\ 10(x - 1.3) + 1 & x \in [1.2, 1.3) \end{cases}$$

$$r(x) = \begin{cases} 10(1.3 - x) + 1 & x \in (1.3, 1.4] \\ 0 & x \in (1.4, \infty) \end{cases}$$

(d)

$a = 1.28, b = 1.32$
$w_1 = 1.2, w_2 = 1.4$

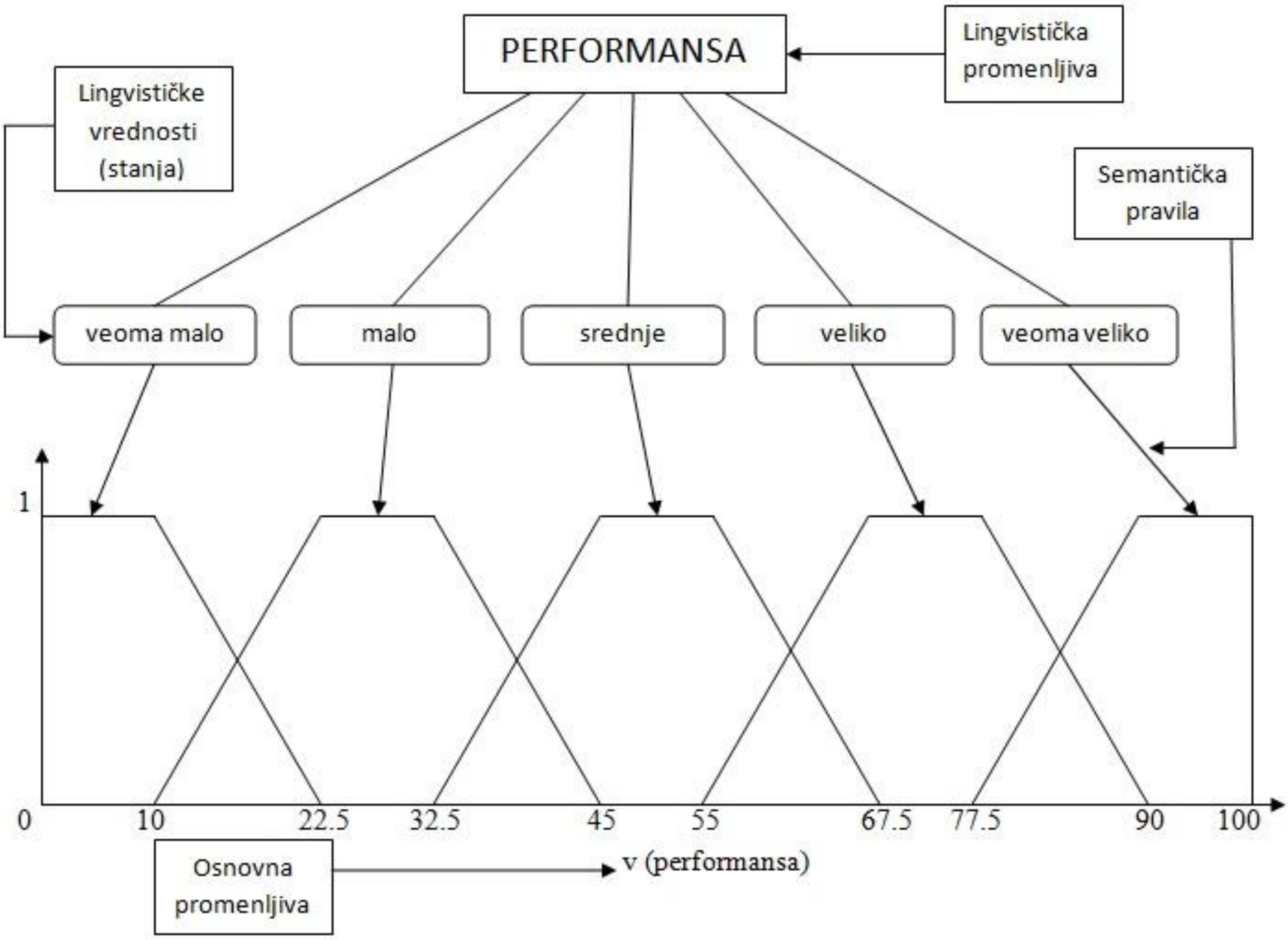
$$l(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 1.2) \\ 12.5(x - 1.28) + 1 & x \in [1.2, 1.28) \end{cases}$$

$$r(x) = \begin{cases} 12.5(1.28 - x) + 1 & x \in (1.32, 1.4] \\ 0 & x \in (1.4, \infty) \end{cases}$$

Na primer, fazi broj kojim se izražava lingvistički koncept *veoma veliko*, kao što je ilustrovano na Slici 22., je izražen pomoću (2.6) kao što sledi: a = 90, b = 100, ω_1 = 77,5 i ω_2 = 100,

$$l(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 77.5) \\ 0.08(x - 90) + 1 & x \in [77.5, \infty) \end{cases}$$

$$r(x) = 0, x \in (100, \infty).$$



Slika 22. Primer lingvističke promenljive

2.3 Lingvističke promenljive

Koncept fazi broja igra fundamentalnu ulogu u formulisanju *kvantitativnih fazi promenljivih*. Ovo su promenljive čija su stanja fazi brojevi. Kada, uz to, fazi brojevi predstavljaju lingvističke vrednosti, kao što su *veoma malo, malo, srednje*, itd, kako se već tumači u određenom kontekstu, konstrukcije koje nastaju se obično nazivaju *lingvističke promenljive* [1, 2, 10].

Svaka lingvistička promenljiva, čije je stanje izraženo lingvističkim terminima se interpretira kao specifičan fazi broj, definisana je putem osnovne promenljive, čije vrednosti su realni brojevi sa specifičnim rasponom. Osnovna promenljiva je promenljiva u klasičnom smislu, predstavljena je kao fizička promenljiva (temperatura, pritisak, brzina, voltaža, vlažnost, itd), a može i kao bilo koja numerička promenljiva (dob, kamatna stopa, performansa, plata, krvna slika, verovatnoća, pouzdanost, itd). Kod lingvističkih promenljivih, ligvistički termini koji predstavljaju približne vrednosti osnovne promenljive, u okviru specifične primene, prikazani su odgovarajućim fazi brojevima.

Svaka lingvistička promenljiva je potpuno okarakterisana petorkom (v, T, X, g, m), gde je *v ime* promenljive, T je skup *lingvističkih termina v* koji se odnose na osnovnu promenljivu, čiji domen je u okviru univerzalnog skupa X, g je *sintaktičko (gramatičko) pravilo* za generisanje lingvističkih termina, a m je *semantičko pravilo* koje dodeljuje značenje svakom t ∈ T lingvističkom terminu njegovo *značenje*, m(t), koje je fazi skup iz X (npr, $m : T \to \mathcal{F}(X)$).

Primer lingvističke promenljive je prikazan na Slici 22. Njeno ime je performansa. Ova promenljiva izražava performansu (koja je u ovom primeru osnovna promenljiva) ciljno orijentisanog entiteta (osobe, mašine, organizacije, metoda, itd) u datom kontekstu u pet osnovnih lingvističkih termina – *veoma malo, malo, srednje, veliko, veoma veliko* – kao i putem drugih lingvističkih termina generisanih sintaktičkim pravilima (nije eksplicitno prikazano Slikom 22.), kao *ne vrlo malo, veliko ili veoma veliko, vrlo vrlo malo,* itd. Svakom od osnovnih lingvističkih termina je dodeljen jedan od fazi brojeva putem semantičkih pravila. Fazi brojevi čije funkcije pripadnosti imaju uobičajen trapezoidni oblik, definisani su intervalom [0, 100], što je domen osnovne promenljive. Svaki od njih predstavlja fazi ograničenje ovog domena.

Da bi se bavili lingvističkim promenljivama, potrebne su ne samo razne teoretske operacije sa skupovima, već takođe i aritmetičke operacije na fazi brojevima.

2.4 Aritmetičke operacije na fazi brojevima

U ovom poglavlju su predstavljene dve metode fazi aritmetike. Jedan metod se zasniva na aritmetici intervala tj. posmatraju se α-preseci a drugi metod koristi princip proširenja, putem kojeg se operacije nad realnim brojevima proširuju i na fazi brojeve. U ovom poglavlju se pretpostavlja da su fazi brojevi predstavljeni neprekidnim funkcijama pripadnosti.

Rezultati prezentovani u ovom poglavlju su iz [3, 4, 10, 11, 15, 16].

2.4.1 Aritmetičke operacije na fazi brojevima – α presek

Fazi aritmetika je zasnovana na dve osobine fazi brojeva: (1) svaki fazi skup, a time i svaki fazi broj, mogu u potpunosti i jedinstveno biti predstavljeni svojim α – presecima; i (2) α -preseci svakog fazi broja su zatvoreni intervali realnih brojeva za svako α ∈ (0, 1]. Ove osobine omogućavaju da se definišu aritmetičke operacije na fazi brojevima kao aritmetičke operacije na njihovim α – presecima (npr. kao aritmetičke operacije na zatvorenim interalima).

Neka $*$ predstavlja bilo koju od četiri aritmetičke operacije na zatvorenim intervalima: sabiranje +, oduzimanje -, množenje •, i deljenje /. Tada je sa

$$[a,b]*[d,e]=\{f*g \mid a\le f\le b, d\le g\le e\}$$

dato proširenje elementarnih aritmetičkih operacija na zatvorene intervale, osim što $[a, b] / [d, e]$ nije definisano kada $0 \in [d, e]$.

Četiri aritmetičke operacije na zatvorenim intervalima su definisane na sledeći način:

$$[a,b]+[d,e]=[a+d,b+e] \tag{2.7}$$

$$[a,b]-[d,e]=[a-e,b-d) \tag{2.8}$$

$$[a,b]\bullet[d,e]=[\min(ad,ae,bd,be),\max(ad,ae,bd,be)] \tag{2.9}$$

i, ako važi $0\notin[d,e]$, sledi

$$[a,b]/[d,e]=[a,b]\bullet[1/e,1/d]=[\min(\frac{a}{d},\frac{a}{e},\frac{b}{d},\frac{b}{e}),\max(\frac{a}{d},\frac{a}{e},\frac{b}{d},\frac{b}{e})] \tag{2.10}$$

Treba primetiti da realan broj r može takođe da se posmatra kao kao specijalni degenerisani (eng. degenerated) interval $[r, r]$. Kada je jedan od intervala iz (2.7) – (2.10) degenerisan, dobijaju se specijalne operacije, a kada su oba degenerisana, dobija se standardna aritmetika realnih brojeva.

Aritmetičke operacije na zatvorenim intervalima imaju izvesna korisna svojstva, a to su: komutativnost, asocijativnost, identitet, poddistributivnost, distributivnost i obuhvatanje monotonosti (eng. inclusion monotonicity).

Neka A i B označavaju fazi brojeve i neka * označava bilo koju od četiri osnovne aritmetičke operacije. Tada, se definiše fazi skup nad R, $A * B$, definišući njegov α presek ${}^{a}(A * B)$ kao:

$$^{a}(A * B) = {}^{a}A * {}^{a}B \tag{2.11}$$

za svako $\alpha \in (0, 1]$ (kad * = /, očigledno je da mora da važi $0 \notin {}^{a}B$ za svako $\alpha \in (0, 1]$. Zbog teoreme 2.1, $A * B$ se može izraziti kao

$$A * B = \cup_{\alpha \in (0,1]} \alpha(A * B)_\alpha \tag{2.12}$$

Pošto je ${}^{a}(A * B)$ zatvoreni interval za svako $\alpha \in (0, 1]$ i A, B su fazi brojevi, $A * B$ je takođe fazi broj.

U narednom primeru se može videti primena (2.11) i (2.12).

Primer 2.4 [10]

Neka su *A i B* trougaoni fazi brojevi, koji su definisani na sledeći način:

$$A(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1, x > 3 \\ (x+1)/2 & -1 < x \le 1 \\ (3-x)/2 & 1 < x \le 3 \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1, x > 5 \\ (x-1)/2 & 1 < x \le 3 \\ (5-x)/2 & 3 < x \le 5 \end{cases}$$

Njihovi α preseci su :

$$^{a}A = [2\alpha - 1, 3 - 2\alpha],$$

$$^{a}B = [2\alpha + 1, 5 - 2\alpha].$$

Koristeći (2.7) – (2.10), dolazi se do:

$$^{a}(A + B) = [4\alpha, 8 - 4\alpha] \qquad \text{za } \alpha \in (0, 1]$$

$$^{a}(A - B) = [4\alpha - 6, 2 - 4\alpha] \qquad \text{za } \alpha \in (0, 1]$$

$$^{a}(A \bullet B) = \begin{cases} [-4\alpha 2 + 12\alpha - 5, 4\alpha 2 - 16\alpha + 15] & \text{za } \alpha \in (0, 0.5] \\ [4\alpha 2 - 1, 4\alpha 2 - 16\alpha + 15] & \text{za } \alpha \in (0.5, 1] \end{cases}$$

$$^{a}(A / B) = \begin{cases} [(2\alpha - 1) / (2\alpha + 1), (3 - 2\alpha) / (2\alpha + 1)] & \text{za } \alpha \in (0, 0.5] \\ [(2\alpha - 1) / (5 - 2\alpha), (3 - 2\alpha) / (2\alpha + 1)] & \text{za } \alpha \in (0.5, 1] \end{cases}$$

Prethodno dobijeni α-preseci odgovaraju sledećim fazi brojevima:

$$(A+B)(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0, x > 8 \\ \dfrac{x}{4} & 0 < x \le 4 \\ \dfrac{8-x}{4} & 4 < x \le 8 \end{cases}$$

$$(A-B)(x)=\begin{cases} 0 & x\le -6, x>2 \\ \dfrac{x+6}{4} & -6<x\le -2 \\ \dfrac{2-x}{4} & -2<x\le 2 \end{cases}$$

$$(A\bullet B)(x)=\begin{cases} 0 & x<-5, x\ge 15 \\ \dfrac{3-(4-x)^{\frac{1}{2}}}{2} & -5\le x<0 \\ \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{2} & 0\le x<3 \\ \dfrac{4-(1+x)^{\frac{1}{2}}}{2} & 3\le x<15 \end{cases}$$

$$(A/B)(x)=\begin{cases} 0 & x<-1,\ x\ge 3 \\ (x+1)/(2-2x) & -1\le x<0 \\ (5x+1)/(2x+2) & 0\le x<1/3 \\ (3-x)/(2x+2) & 1/3\le x<3 \end{cases}$$

Metod rekonstrukcije fazi skupa na osnaovu α-preseka je dat teoremom 2.1.

2.4.2 Aritmetičke operacije na fazi brojevima – princip proširenja

Druga metoda za razvijanje fazi aritmetike je bazirana na principu proširenja. Na osnovu ovog principa, standardne aritmetičke operacije na realnim brojevima su proširene na fazi brojeve.

Formulacija *Zadehovog sup−T* principa proširenja [16] je data na sledeći način:

Neka su $\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_n$ fazi podskupovi klasičnih skupova $X_1, ..., X_n$ redom, i neka je preslikavanje $f : X_1 \times ... \times X_n \rightarrow Y$ takvo da za svaku n-torku $(x_1,\ldots,x_n) \in X_1\times...\times X_n$ važi $f(x_1,\ldots,x_n) = y \in Y$. Za proizvoljnu t-normu T , kao rezultat *uopštenog principa proširenja* se dobija $\mathbf{B} = f(\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_n)$, fazi podskup od Y, čija je funkcija pripadnosti:

$$\mu_{\mathbf{B}}(y) = \begin{cases} \sup_y T\{ \mu_{\mathbf{A}_1}(x_1), \ldots, \mu_{\mathbf{A}_n}(x_n)\}, & \text{ako postoji } y = f(x_1, \ldots, x_n) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

U slučaju da se za t-normu uzme T_M, dobija se orginalni Zadehov princip proširenja. Koristeći uopšten principa proširenja dolazi se do formule za izračunavanje sume fazi brojeva pomoću t-normi.

Neka * označava bilo koju od četiri osnovne aritmetičke operacije i neka su A i B fazi brojevi. Tada se fazi skup na R, $A * B$, definiše pomoću jednačine

$$(A * B)(z) = \sup_{z = x * y} T[A(x), B(y)]$$

za svako $z \in$ R, gde je T proizvolja trougaona norma. Konkretnije, za svako $z \in$ R, definiše se:

$$(A + B)(z) = \sup_{z = x + y} T[A(x), B(y)],$$

$$(A - B)(z) = \sup_{z = x - y} T[A(x), B(y)],$$

$$(A \bullet B)(z) = \sup_{z = x \bullet y} T[A(x), B(y)],$$

$$(A / B)(z) = \sup_{z = x / y} T[A(x), B(y)].$$

Ovako definisano $(A * B)$ *jeste* fazi skup nad R. Naredna teorema daje odgovor kda je to baš fazi broj ako u slučaju originalne defincije:

$$(A * B)(z) = \sup_{z = x * y} \min[A(x), B(y)],$$

za svako $z \in$ R.

Teorema 2.3 [10]

Neka $* \in \{+, -, \bullet, /\}$ i neka su A i B neprekidni fazi brojevi. Tada je fazi skup $A * B$, definisan sa:

$$(A * B)(z) = \sup_{z = x * y} \min[A(x), B(y)]$$

neprekidan fazi broj.

***Dokaz*:** Prvo se dokazuje (2.11) tako što se pokaže da je ${}^{\alpha}(A * B)$ zatvoreni interval za svako $\alpha \in (0, 1]$. Za bilo koje $z \in {}^{a}A * {}^{a}B$, postoji neko $x_0 \in {}^{a}A$, i neko $y_0 \in {}^{a}B$ tako da je $z = x_0 * y_0$. Sledi da je:

$$(A * B)(z) = \sup_{z = x * y} \min [A(x), B(y)] \geq \min [A(x_0), B(y_0)] \geq \alpha.$$

Dakle, $z \in {}^{a}(A * B)$, i stoga,

$${}^{a}A * {}^{a}B \subseteq {}^{a}(A * B)$$

Za svako $z \in {}^{a}(A * B)$, dobija se $(A * B)(z) = \sup_{z = x * y} \min [A(x), B(y)] \geq \alpha.$

Štaviše, za svako n > [1/α] + 1, gde [1/α] označava najveći ceo broj koji je manji ili jednak

1 / α, postoji x_n i y_n tako da $z = x * y$, pa je $\min [A(x_n), B(y_n)] > \alpha - 1/n$.

Stoga, $x_n \in {}^{\alpha - 1/n}A$, $y_n \in {}^{\alpha - 1/n}B$ i mogu se posmatrati dva niza $\{ x_n \}$ i $\{ y_n \}$. Pošto je

$$\alpha - 1/n \leq \alpha - 1/(n + 1),$$

dobija se

$${}^{\alpha - 1/(n+1)}A \subseteq {}^{\alpha - 1/n}A, \quad {}^{\alpha - 1/(n+1)}B \subseteq {}^{\alpha - 1/n}B.$$

Dakle, $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ spadaju u ${}^{\alpha - 1/n}A$, odnosno u ${}^{\alpha - 1/n}B$, respektivno. Pošto su zatvoreni intervali, $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ su ograničeni intervali. Prema tome, postoji konvergentan podniz $\{x_{n, i}\}$, takav da $x_{n, i} \rightarrow x_0$. Kod korespondirajućeg podniza $\{y_{n, i}\}$, takođe postoji konvergentan podniz $\{y_{n, i, j}\}$ takav da $y_{n, i, j} \rightarrow y_0$. Ako se uzme korespondirajući podniz $\{x_{n, i, j}\}$ iz $\{x_{n, i}\}$, tada $x_{n, i, j} \rightarrow x_0$. Dakle, dobijaju se dva niza $\{x_{n, i, j}\}$ i $\{y_{n, i, j}\}$, takva da

$$x_{n, i, j} \rightarrow x_0, \; y_{n, i, j} \rightarrow y_0, \text{ i } x_{n, i, j} * y_{n, i, j} = z.$$

Sada, pošto je * neprekidno,

$$z = \lim_{j \to \infty} x_{n, i, j} * y_{n, i, j} = (\lim_{j \to \infty} x_{n, i, j}) * (\lim_{j \to \infty} y_{n, i, j}) = x_0 * y_0.$$

Takođe, pošto je $A(x_{n, i, j}) > \alpha - 1/n_{i, j}$ i $B(y_{n, i, j}) > \alpha - 1/n_{i, j}$

$$A(x_0) = A(\lim_{j \to \infty} x_{n, i, j}) = \lim_{j \to \infty} A(x_{n, i, j}) \geq \lim_{j \to \infty} (\alpha - 1/n_{i, j}) = \alpha$$

$$B(y_0) = B(\lim_{j \to \infty} y_{n, i, j}) = \lim_{j \to \infty} B(y_{n, i, j}) \geq \lim_{j \to \infty} (\alpha - 1/n_{i, j}) = \alpha$$

Dakle, postoji takav $x_0 \in {}^{\alpha}A$ i $y_0 \in {}^{\alpha}B$ takvi da $z = x_0 + y_0$, $z \in {}^{\alpha}A * {}^{\alpha}B$. Sledi da je

$${}^{\alpha}(A * B) \subseteq {}^{\alpha}A * {}^{\alpha}B$$

i shodno tome,

$$^{\alpha}(A * B) = {}^{\alpha}A * {}^{\alpha}B.$$

Sada se dokazuje da $A * B$ mora biti neprekidno. Po teoremi 2.2, funkcija pripadanja $A * B$ mora biti uopštene forme opisane pomoću (2.6). Neka $A * B$ nije neprekidno za z_0, tj. neka je

$$\lim_{z \to z_0^-} (A * B)(z) < (A * B)(z_0) = \sup_{z_o = x * y} \min[A(x), B(y)]$$

Tada, moraju postojati x_0 i y_0 takvi da je $z_0 = x_0 * y_0$ i

$$\lim_{z \to z_0^-} (A * B)(z) < \min[A(x_0), B(y_0) \tag{2.13}$$

Pošto je operacija $* \in \{+,\ -, *,\ /\ \}$ monotona u odnosu na prvi i drugi argument, uvek se mogu pronaći dva niza $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ takva da $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ dok $n \to \infty$, i $x_n * y_n < z_0$ za bilo koje n.

Neka je $z_n = x_n * y_n$, tada $z_n \to z_0$, kada $n \to \infty$. Stoga,

$$\lim_{z \to z_0^-} (A * B)(z) = \lim_{n\to\infty}(A * B)(z_n) = \lim_{n\to\infty} \sup_{z_n = x * y} \min[A(x), B(y)]$$

$$\geq \lim_{n\to\infty} \min[A(x_n), B(y_n)] = \min[A(\lim_{n\to\infty} x_n), B(\lim_{n\to\infty} y_n)] = \min[A(x_0), B(y_0)].$$

što je u kontradikciji sa (2.13), i zato $A * B$ mora biti neprekidan fazi broj. ■

U ovom delu sekcije sledi pregled rezultata iz [11] za sumu *LR*-fazi intervala bazirano na različitim trougaonim normama.

2.4.3 Suma *LR*-fazi intervala za T_M

Na osnovu formule iz teoreme 2.3 koristeći t-normu T umesto minimuma dobija se sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 2.1 [4]

Neka je dato n fazi intervala A_i, gde i = 1, ..., n. Tada, suma $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$ zadovoljava

$$^{\alpha}A = \sum_{i=1}^{n} {}^{\alpha}A_i$$

za $\alpha \in [0, 1]$.

Posledica 2.1 [4]

Neka je dato n *LR*-fazi intervala $A_i = (l_i, r_i, \beta_i, \gamma_i)_{LR}$, i = 1, ..., n, onda je suma $\bigoplus_{i=1}^{n} A_i$ data sa

$\bigoplus_{i=1}^{n} A_i = (\sum_{i=1}^{n} l_i, \sum_{i=1}^{n} r_i, \sum_{i=1}^{n} \beta_i, \sum_{i=1}^{n} \gamma_i)_{LR}$.

Treba primetiti da se poklapa sa intervalnim pristupom.

2.4.4 Suma *LR*-fazi interval za T_D

Na osnovu Zadehovog principa proširenja koristeći $T = T_D$ važe sledeća dva tvrđenja.

Tvrđenje 2.2 [4]

Neka je dato n fazi intervala A_i, i = 1, ..., n. Neka je ${}^1A_i = [l_i, \ r_i]$, i = 1, ..., n. Za T_D-sumu $A = \bigoplus_{T\, i=1}^{n} A_i$ važi ${}^1A = [l, \ r]$, gde $l = \sum_{i=1}^{n} l_i$, $r = \sum_{i=1}^{n} r_i$ i

$$A(x) = \begin{cases} \max_{i=1}^{n} Ai\,(x - r + ri), & x \geq r \\ \max_{i=1}^{n} Ai\,(x - l + li), & x \leq 1 \end{cases}$$

Tvrđenje 2.3 [4]

Neka je dato n *LR*-fazi intervala $A_i = (l_i, r_i, \beta_i, \gamma_i)_{LR}$, i = 1, ..., n, onda je T_D-suma $\bigoplus_{T\, i=1}^{n} A_i$ data sa

$$\bigoplus_{T\, i=1}^{n} A_i = (\sum_{i=1}^{n} l_i, \sum_{i=1}^{n} r_i, \ \max_{i=1}^{n} \beta_i, \max_{i=1}^{n} \gamma_i)_{LR}.$$

2.4.5 Suma *LR*-fazi interval za T_P

Ovde se posmatraju *LR*-fazi intervali sa identičnim nosačem (interval na kome je $\mu_A(x) > 0$). Na osnovu Zadehovog principa proširenja koristeći $T = T_P$ dobija se sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 2.4 [4]

Neka je data t-norma T_P i n *LR*-fazi intervala $A_i = (l_i, r_i, \beta_i, \gamma_i)_{LR}$, i = 1, ..., n. Ako su log$L$ i log$R$ konkavni, onda je T_P-suma $\bigoplus_{T\, i=1}^{n} A_i$ data sa

$$\bigoplus_{T\, i=1}^{n} A_i\,(x) = \begin{cases} L^n\left(\frac{l-x}{n\beta}\right), & l - n\beta \leq x \leq l \\ 1, & l \leq x \leq r \\ R^n\left(\frac{x-r}{n\gamma}\right), & r \leq x \leq r + n\gamma \\ 0, & \textit{inače} \end{cases}$$

gde $l = \sum_{i=1}^{n} l_i$ i $r = \sum_{i=1}^{n} r_i$, tj.

$$\bigoplus_{\mathrm{T}\, i=1}^{n} A_i = \left(\sum_{i=1}^{n} l_i, \sum_{i=1}^{n} r_i, n\beta, n\gamma\right)_{L^n R^n}$$

2.4.6 Suma *LR*-fazi interval za Arhimedovu t-normu

Tvrđenje 2.5 [4] Neka je data neprekidna Arhimedova t-norma T sa aditivnim generatorom f i n *LR*-fazi intervala $A_i = (l_i, r_i, \beta, \gamma)_{LR}$, i = 1, ..., n. Ako je f dva puta diferencijabilna i striktno konveksna, i ako su L i R dva puta deferencijabilni i konkavni, onda je T-suma $\bigoplus_{\mathrm{T}\, i=1}^{n} A_i$ data sa

$$\bigoplus_{\mathrm{T}\, i=1}^{n} A_i(x) = \begin{cases} f^{(-1)}\left(nf\left(L\left(\frac{l-x}{n\beta}\right)\right)\right), & l - n\beta \le x \le l \\ 1, & l \le x \le r \\ f^{(-1)}\left(nf\left(R\left(\frac{x-r}{n\gamma}\right)\right)\right), & r \le x \le r + n\gamma \\ 0, & \textit{inače} \end{cases}$$

gde $l = \sum_{i=1}^{n} l_i$ i $r = \sum_{i=1}^{n} r_i$.

2.4.7 Suma *LR*-fazi interval za $\mathrm{T_L}$

U slučaju kada pretpostavka o jednakim nosačima više ne važi, tada su rezultati poznati samo za nilpotentne t-norme. Na osnovu Zadehovog principa proširenja koristeći $\mathrm{T} = \mathrm{T_L}$ dobija se sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 2.6 [4]

Neka je data Lukasiewiez t-norma $\mathrm{T_L}$ i n L_iR_i-fazi intervala $A_i = (l_i, r_i, \beta_i, \gamma_i)_{L_iR_i}$, i = 1, ..., n. Ako su L_i i R_i konveksni, i = 1, ..., n, onda je $\mathrm{T_L}$-suma $\bigoplus_{\mathrm{T}\, i=1}^{n} A_i$ data sa

$$\bigoplus_{\mathrm{T}\, i=1}^{n} A_i(x) = \begin{cases} \max_{i=1}^{n} Ai\,(x - l + li), & x < 1 \\ 1, & l \le x \le r \\ \max_{i=1}^{n} Ai\,(x - r + ri), & r < x \end{cases}$$

gde $l = \sum_{i=1}^{n} l_i$ i $r = \sum_{i=1}^{n} r_i$.

Ovde se obrađuje suma *LR*-fazi intervala zasnovanih na t-normi, koje čuva *LR* oblik. Ustanovljena je veza između sabiranja zasnovanog na t-normi koje čuva linearnost fazi intervala, i sabiranja invertibilnih *L* i *R* oblika, koje ne menja *LR* oblik. U radu je prikazana mogućnost kontrole širenja nosača za vreme izračunavanja u kojima učestvuju *LR*-fazi intervali [11].

2.5 Mreža fazi brojeva

Kao što je dobro poznato, skup realnih brojeva R je linearno uređen. Za svaki par realnih brojeva x i y, ili je $x \le y$, ili $y \le x$. Par (R, ≤) je mreža, koja takođe može biti izražena putem dve operacije za mreže,

$$\min(x, y) = \begin{cases} x & x \le y \\ y & y \le x \end{cases} \tag{2.14}$$

$$\max(x, y) = \begin{cases} y & x \le y \\ x & y \le x \end{cases} \tag{2.15}$$

za svaki par $x, y \in$ R. Linearni poredak realnih brojeva se ne proširuje na fazi brojeve, ali u ovom poglavlju se pokazuje da fazi brojevi mogu biti parcijalno uređeni i da ovo parcijalno uređenje formira distributivnu mrežu.

Da bi se uvelo uređenje fazi broja koje ima smisla, prvo se proširuju operacije za mreže min i ma*x* nad realnim brojevima, kao što je određeno putem (2.14) i (2.15), u korespondirajuće operacije MIN i MAX. Za bilo koja dva fazi broja *A i B* i za svako $z \in$ R, definisano je sledeće

$$\mathrm{MIN}(A, B)(z) = \sup_{z = \min(x, y)} \min[A(x), B(y)] \tag{2.16}$$

$$\mathrm{MAX}(A, B)(z) = \sup_{z = \max(x, y)} \min[A(x), B(y)] \tag{2.17}$$

Treba primetiti da se simboli MIN i MAX, koji označavaju uvedene operacije na fazi brojevima, moraju razlikovati od simbola min i max, koji označavaju operacije *minimum* i *maximum* nad realnim brojevima. Pošto su min i ma*x* neprekidne operacije, iz (2.16) i (2.17), i dokaza teoreme 2.3, sledi da su MIN (*A*, *B*) i MAX (*A*, *B*) fazi brojevi.

Za svaki realan broj a_1, a_2, b_1 i b_2 i za fazi brojeve $A = [a_1, a_2]$ i $B = [b_1, b_2]$, operacije min i max su definisane na sledeći način:

za minimum: $[a_1, a_2]\ (\wedge)\ [b_1, b_2] = [a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2]$

za maksimum: $[a_1, a_2]\ (\vee)\ [b_1, b_2] = [a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2]$

Ako se uzmu konkretne vrednosti, $A = [3, 5]$ i $B = [-2, 7]$, dobija se

za minimum: $A\ (\wedge)\ B = [3 \wedge (-2), 5 \wedge 7]$

$= [-2, 5]$

za maksimum: $A\ (\vee)\ B = [3 \vee (-2), 5 \vee 7]$

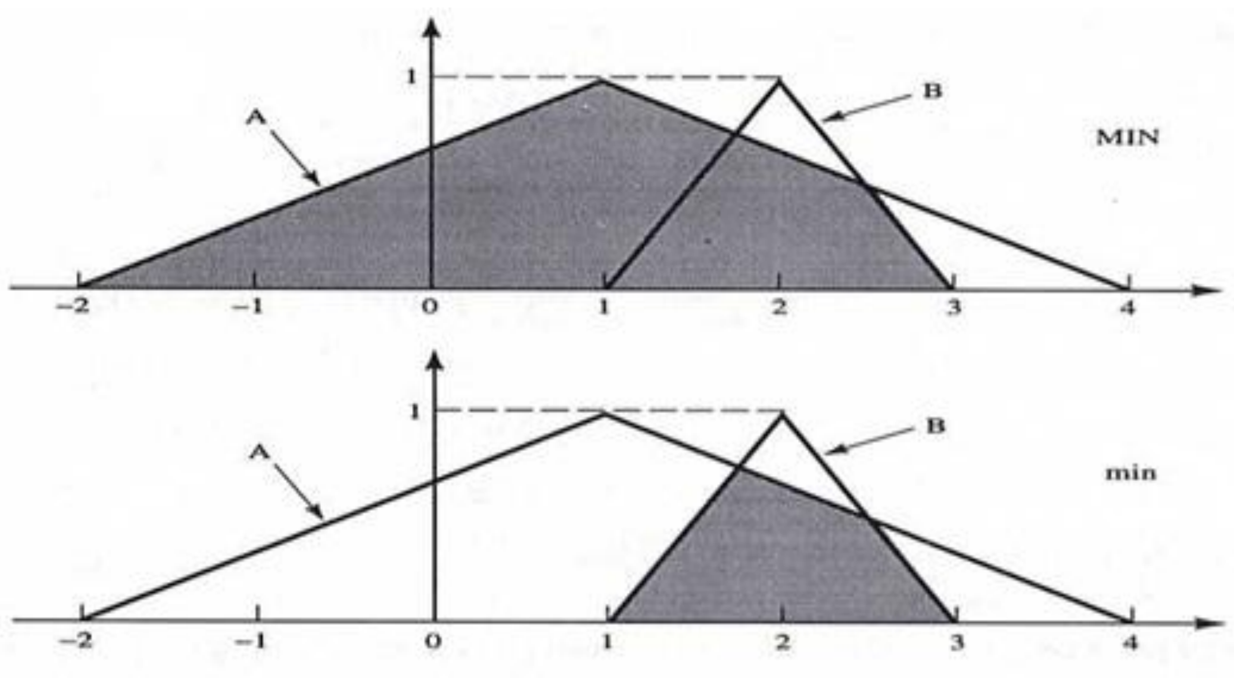
$= [3, 7]$

Primer 2.5 [10]

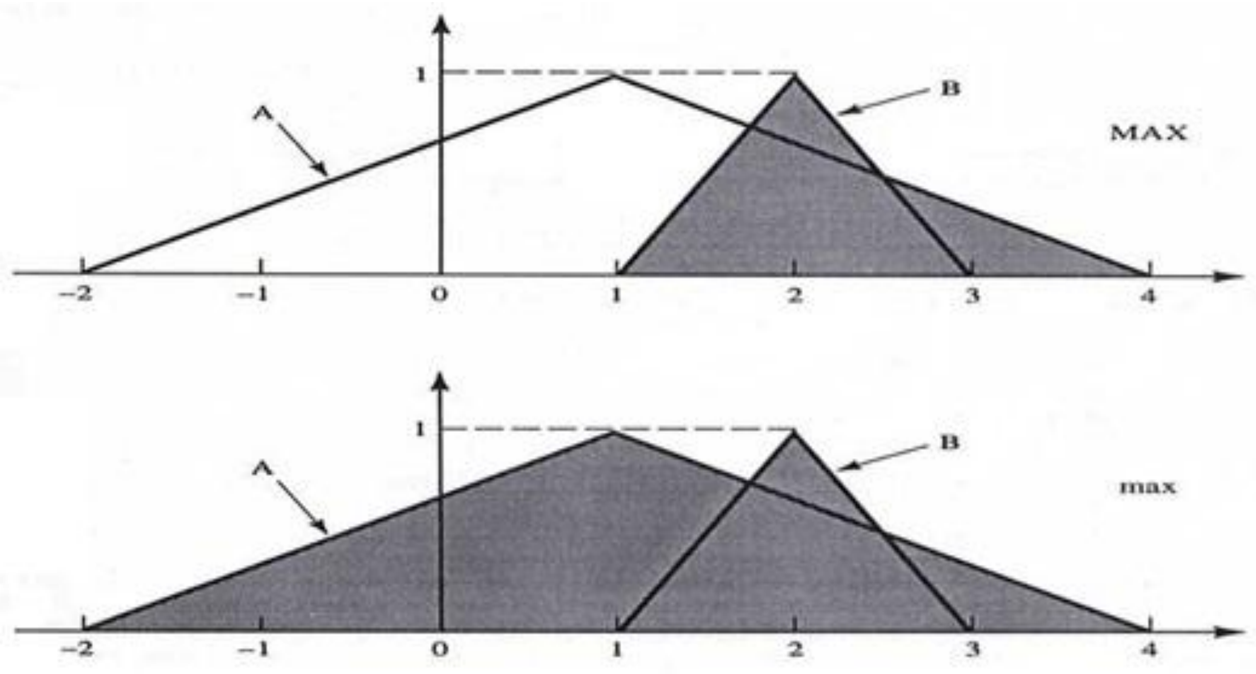
Važno je uočiti da su operacije MIN i MAX potpuno različite od standardnog fazi preseka i unije, min i max. Razlika je prikazana na Slici 23., gde

$$A(x) = \begin{cases} 0 & x < -2, x > 4 \\ (x+2)/3 & -2 \le x \le 1 \\ (4-x)/3 & 1 \le x \le 4 \end{cases} \qquad B(x) = \begin{cases} 0 & x < 1, x > 3 \\ x-1 & 1 \le x \le 2 \\ 3-x & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

$$MIN(A,B)(x) = \begin{cases} 0 & x < -2, x > 3 \\ (x+2)/3 & -2 \le x \le 1 \\ (4-x)/3 & 1 < x \le 2.5 \\ 3-x & 2.5 < x \le 3 \end{cases} \qquad MAX(A,B)(x) = \begin{cases} 0 & x < 1, x > 3 \\ x-1 & 1 \le x \le 2 \\ 3-x & 2 < x \le 2.5 \\ (4-x)/3 & 2.5 < x \le 4 \end{cases}$$



Slika23.* [10] *a) Poređenje operacija MIN, min



Slika 23.* [10] *b) Poređenje operacija MAX, max

Neka *R* označava skup svih fazi brojeva. Tada su operacije MIN i MA*X* funkcije iz *R x R* u *R*. Sledeća teorema, koja prikazuje osnovna svojstva ovih operacija, omogućava da (*R*, MIN, MAX) bude distributivna mreža u kojoj MIN i MAX predstavljaju "sresti"(eng. meet) i "pridružiti" (eng. join).

Teorema 2.4 [10]

Neka su MIN i MAX binarne operacije nad *R*, definisane putem (2.16) i (2.17). Tada, za svako A, B, C ∈ *R*, važi sledeće:

(a) Komutativnost : MIN(A, B) = MIN(B, A)
MAX(A, B) = MAX(B, A)

(b) Asocijativnost : MIN(MIN(A, B), C)=MIN(A, MIN(B, C))

MAX(MAX(A, B), C)=MAX(A, MAX(B, C))

(c) Idempotentnost : MIN(A, A) = A

MAX(A, A) = A

(d) Apsorpcija : MIN(A, MAX(A, B)) = A

MAX(A, MIN(A, B)) = A

(e) Distributivnost: MIN(A, MAX(B, C)) = MAX(MIN(A, B), MIN(A, C)

MAX(A, MIN(B, C)) = MIN(MAX(A, B), MAX(A, C))

Dokaz: Dokazuju se samo svojstva (b), (d), i (e) (dokazi za (a) i (c) su očigledni).

(b) Za svako $z \in$ R,

$$\mathrm{MIN}[A, \mathrm{MIN}(B, C)](z) = \sup_{z=\min(x,y)} \min[A(\mathrm{x}), \mathrm{MIN}(B, C)(y)]$$

$$= \sup_{z=\min(x,y)} \min[A(x), \sup_{y=\min(u,v)} \min[B(u), C(v)]]$$

$$= \sup_{z=\min(x,y)} \sup_{y=\min(u,v)} \min[A(x), B(u), C(v)]$$

$$= \sup_{z=\min(x,u,v)} \min[A(x), B(u), C(v)]$$

$$= \sup_{z=\min(s,v)} \sup_{s=\min(\mathrm{x},\mathrm{u})} \min[A(x), B(u), C(v)]$$

$$= \sup_{z=\min(s,v)} \min[\sup_{s=\min(x,u)} \min(A(x), B(u)), C(v)]$$

$$= \sup_{\mathrm{z}=\min(\mathrm{s},\mathrm{v})} \min[\mathrm{MIN}(A, B)(s), C(v)]$$

$$= \mathrm{MIN}[\mathrm{MIN}(A, B), C](z).$$

Dokaz za MAX za asocijativnost je analogan.

(d) Za svako $z \in$ R

$$\mathrm{MIN}[A, \mathrm{MAX}(B, C)](z) = \sup_{z=\min(x,y)} \min[A(\mathrm{x}), \mathrm{MAX}(A, B)(y)]$$

$$= \sup_{z=\min(x,y)} \min[A(x), \sup_{y=\max(u,v)} \min[A(u), B(v)]]$$

$$= \sup_{z=\min(x,\max(u,v))} \min[A(x), A(u), B(v)]$$

Neka M označava desnu stranu poslednje jednačine. Pošto je B fazi broj, postoji $v_0 \in$ R, takvo da je $B(v_0) = 1$. Zbog $z = \min[z, \max(\mathrm{z}, v_0)]$, dobija se

$$\mathrm{M} \geq \min[A(\mathrm{z}), A(\mathrm{z}), B(v_0)] = A(z).$$

Sa druge strane, pošto je $z = \min[x, \max(u, v)]$, važi

$$\min(x,u) \leq z \leq x \leq \max(x,u).$$

Zbog konveksnosti fazi brojeva

$$A(z) \geq \min[A(\min(x,u)], A[\max(x,u)]]$$

$$= \min[A(x), A(u)]$$

$$\geq \min[A(x), A(u), B(v)].$$

Time, M = $A(z)$ i kao posledica tome, MIN[A, MAX(B, C)] = A. Dokaz drugog svojstva apsorpcije je sličan.

(e) Za svako $z \in$ R, lako je videti da

$$\mathrm{MIN}[A, \mathrm{MAX}(B, C)](z) = \sup_{z = \min[x, \max(u, v)]} \min(A(x), B(u), C(v)) \quad (2.18)$$

$$\mathrm{MAX}[\mathrm{MIN}(A, B), \mathrm{MIN}(A, C)](z) = \sup_{z = \max[\min(m, n), \min(s, t)]} \min(A(m), B(n), A(s), C(t)) \quad (2.19)$$

Da bi se dokazalo da su (2.18) i (2.19) jednaki, prvo se pokazuje da je E ⊆ F, gde

$$E = \{\min[A(x), B(u), C(v)] \mid \min[x, \max(u, v)] = z\}$$

$$F = \{\min[A(m), B(n), A(s), C(t)] \mid \max[\min(m, n), \min(s, t)] = z\}.$$

Za svako $a = \min[A(x), B(u), C(v)]$, takvo da $\min[x, \max(u, v)] = z$, ($a \in E$), postoji $m = s = x$, $n = u$, i $t = v$, takvo da

$$\max[\min(m, n), \min(s, t)] = \max[\min(x, u), \min(x, v))$$

$$= \min[x, \max(u, v)] = z.$$

Dakle, $a = \min[A(x), B(u), C(v)] = \min[A(m), B(n), A(s), C(t)]$. To jest, $a \in F$, i zbog toga, $E \subseteq F$. To znači da je (2.19) veće ili jednako od (2.18). Dalje se pokazje da su ove dve funkcije jednake pošto za svaki broj b iz F postoji broj a iz E takav da je $b \leq a$.

Za svako $b \in F$, postoji m, n, s i t, takvo da

$$\max[\min(m, n), \min(s, t)] = z,$$

$$b = \min[A(m), B(n), A(s), C(t)).$$

Dakle, dobija se

$$z = \min[\max(s, m), \max(s, n), \max(t, m), \max(t, n)].$$

Neka je $x = \min[\max(s, m), \max(s, n), \max(t, m)]$, $u = n$, $v = t$. Tada, važi

$$z = \min[x, \max(u, v)]$$

Sa druge strane, lako se vidi da je

$$\min(s, m) \leq x \leq \max(s, m).$$

Zbog konveksnosti A,

$$A(\mathrm{x}) \geq \min[A(\min(s, m), A(\max(s, m))]$$
$$= \min[A(s), A(m)].$$

Stoga, postoji $a = \min[A(x), B(u), C(v)]$, sa $\min(x, \max(u, v)) = z$ $(a \in F)$, i

$$a = \min[A(x), B(u), C(v)] \geq \min[A(s), A(m), B(n), C(t)) = b.$$

To jest, za svako $b \in F$, postoji $a \in F$, takvo da je $b \leq a$. Ovim se implicira da sup $F \leq$ sup E.

Ova nejednačina, zajedno sa prethodnim rezultatom, pokazuje da se (2.18) poklapa sa (2.19). Sa ovim se okončava dokazivanje prvog zakona distribucije. Dokaz drugog zakona distribucije je analogan. ■

Mreža (R, MIN, MAX) se može izraziti i kao par $(R, \preccurlyeq)$ gde je $\preccurlyeq$ parcijalno uređenje definisano sa:

$A \preccurlyeq B$ ako i samo ako $\mathrm{MIN}(A, B) = A$ ili, alternativno,

$A \preccurlyeq B$ ako i samo ako $\mathrm{MAX}(A, B) = B$, za svako $A, B \in R$.

Može se , takođe, definisati parcijalno uređenje s obzirom na relevante α-preseke:

$A \preccurlyeq B$ ako i samo ako $\min({}^{\alpha}A, {}^{\alpha}B) = {}^{\alpha}A$,

$A \preccurlyeq B$ ako i samo ako $\max({}^{\alpha}A, {}^{\alpha}B) = {}^{\alpha}B$

za svako $A, B \in R$ i $\alpha \in (0, 1]$, gde su ${}^{\alpha}A$ i ${}^{\alpha}B$ zatvoreni intervali (npr. ${}^{\alpha}A = [a_1, a_2]$, ${}^{\alpha}B = [b_1, b_2]$).

Na osnovu ove predpostavke i uvedenih oznaka ${}^{\alpha}A$ *i* ${}^{\alpha}B$ lako se može proveriti:

$$\min({}^{\alpha}A, {}^{\alpha}B) = [\min(a_1, b_1), \min(a_2, b_2)],$$

$$\max({}^{\alpha}A, {}^{\alpha}B) = [\max(a_1, b_1), \max(a_2, b_2)].$$

Ako se definiše parcijalno uređenje zatvorenih intervala na uobičajen način, tj.

$$[a_1, a_2] \leq [b_1, b_2] \text{ ako i samo ako } a_1 \leq b_1 \text{ i } a_2 \leq b_2,$$

tada, za svako $A, B \in R$, važi

$$A \preccurlyeq B \text{ ako i samo ako } {}^{\alpha}A \leq {}^{\alpha}B$$

za svako $\alpha \in (0, 1]$. To znači da, na primer, dva fazi broja A i B na Slici 23., nisu uporediva. Međutim, vrednosti lingvističkih promenljivih u većini primena su definisane fazi brojevima koji su uporedivi. Na primer, vrednosti lingvističke promenljive „performansa”¸ prikazane na Slici 22., formiraju lanac:

vrlo malo ≼ malo ≼ srednje ≼ veliko ≼ vrlo veliko

Iako skup R nije linearno uređen, nasuprot skupu R, postoje neki podskupovi od R koji su linearno uređeni. Takvi podskupovi su najbrojniji u uobičajenim primenama teorije fazi skupova.

2.6 Fazi jednačine

Jedno područje teorije fazi skupova u kojoj fazi skupovi i aritmetičke operacije na fazi skupovima igraju fundamentalnu ulogu su fazi jednačine. To su jednačine kod kojih su koeficijenti i nepoznate fazi brojevi, a formule se konstruišu operacijama fazi aritmetike. Takve jednačine imaju veliku potencijalnu primenljivost. Na žalost, njihova teorija još nije dovoljno razvijena, štaviše, neki radovi objavljeni u ovoj oblasti su veoma kontroverzni. Zbog manjka utvrđene teorije o oblasti fazi jednačina, ovde su samo okarakterisana neka svojstva fazi jednačina. Radi se o dva veoma jednostavna tipa: $A + X = B$, i $A \bullet X = B$, gde su A i B fazi brojevi, a X je nepoznati fazi broj.

Rezultati prezentovani u ovom poglavlju su iz [6]

2.6.1 Jednačina A + *X* = B

Teškoće pri rešavanju ove fazi jednačine uzrokuje činjenica da $X = B - A$ nije rešenje. Da bi se ovo uočilo, posmatraju se dva zatvorena intervala, ${}^{\alpha}A = [a_1, a_2], {}^{\alpha}B = [b_1, b_2]$, koji se mogu posmatrati kao specijalni fazi brojevi. Tada je $B - A = [b_1 - a_2, b_2 - a_1]$, i

$$\begin{aligned} A + (B - A) &= [a_1, a_2] + [b_1 - a_2, b_2 - a_1] \\ &= [a_1 + b_1 - a_2, a_2 + b_2 - a_1] \\ &\neq [b_1, b_2] = B \end{aligned}$$

ako je $a_1 \neq a_2$. Zato $X = B - A$ nije rešenje jednačine.

Neka je $X = [x_1, x_2]$. Tada, $[a1 + x1, a2 + x2] = [b_1, b_2]$ direktno sledi iz jednačine. Ovo daje dve obične jednačine sa realnim brojevima,

$$a_1 + x_1 = b_1,$$

$$a_2 + x_2 = b_2,$$

čija rešenja su $x_1 = b_1 - a_1$ i $x_2 = b_2 - a_2$. Pošto X mora biti interval, obavezno mora biti $x_1 \leq x_2$. Znači, jednačina ima rešenje ako i samo ako $b_1 - a_1 \leq b_2 - a_2$. Ako ova nejednačina važi, rešenje je $X = [b_1 - a_1, b_2 - a_2]$.

Ovaj primer ilustruje kako rešiti jednačinu kada su dati fazi brojevi A i B zatvoreni intervali.

Neka za svako $\alpha \in (0, 1]$, ${}^{\alpha}A = [{}^{\alpha}a_1, {}^{\alpha}a_2]$, $B = [{}^{\alpha}b_1, {}^{\alpha}b_2]$ i $X = [{}^{\alpha}x_1, {}^{\alpha}x_2]$ označavaju u ovoj jednačini α- preseke A, B i X. Tada, jednačina ima rešenje ako i samo ako:

(i) ${}^{\alpha}b_1 - {}^{\alpha}a_1 \leq {}^{\alpha}b_2 - {}^{\alpha}a_2$ za svako $\alpha \in (0, 1]$ i

(ii) $\alpha \leq \beta$ implicira ${}^{\alpha}b_1 - {}^{\alpha}a_1 \leq {}^{\beta}b_1 - {}^{\beta}a_1 \leq {}^{\beta}b_2 - {}^{\beta}a_2 \leq {}^{\alpha}b_2 - {}^{\alpha}a_2$.

Svojstvo (i) pokazuje da intervalska jednačina ${}^{\alpha}A + {}^{\alpha}X = {}^{\alpha}B$ ima rešenje, koje je dato sa

$${}^{\alpha}X = [{}^{\alpha}b_1 - {}^{\alpha}a_1, {}^{\alpha}b_2 - {}^{\alpha}a_2].$$

Svojstvo (ii) pokazuje da su rešenja intervalskih jednačina za α i β ugnježdena, tj, ako je $\alpha \leq \beta$ tada ${}^{\beta}X \subseteq {}^{\alpha}X$. Ako postoji rešenje ${}^{\alpha}X$ za svako $\alpha \in (0, 1]$, i zadovoljen je uslov (ii), tada je rešenje X fazi jednačine dato putem

$$X = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha X_{\alpha}$$

Da bi se ilustrovali procedure rešavanja, dat je sledeći primer.

Primer 2.6 [10]

Neka A i B u ovoj jednačini budu sledeći fazi brojevi:

A = {([0, 1), 0.2), ([1, 2), 0.6), ([2, 3), 0.8), ([3, 4), 0.9), (4, 1), ((4, 5], 0.5), ((5,6], 0.1)}

B = {([0, 1), 0.1), ([1, 2), 0.2), ([2, 3), 0.6), ([3, 4), 0.7), ([4,5), 0.8), ([5,6), 0.9), (6, 1), ((6, 7], 0.5), ((7,8], 0.4), ((8, 9], 0.2), ((9, 10], 0.1)}

Svi relevantni α preseci A, B i X su dati u tabeli 1. Rešenje jednačine je fazi broj

$$X = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha X_{\alpha} = \{([0, 1), 0.1), ([1, 2), 0.7), (2, 1), ((2, 3], 0.4), ((3, 4], 0.2)\}$$

α	$^{\alpha}A$	$^{\alpha}B$	$^{\alpha}X$
1	[4,4]	[6,6]	[2,2]
0.9	[3,4]	[5,6]	[2,2]
0.8	[2,4]	[4,6]	[2,2]
0.7	[2,4]	[3,6]	[1,2]
0.6	[1,4]	[2,6]	[1,2]
0.5	[1,5]	[2,7]	[1,2]
0.4	[1,5]	[2,8]	[1,3]
0.3	[1,5]	[2,8]	[1,3]
0.2	[0,5]	[1,9]	[1,4]
0.1	[0,6]	[0,10]	[0,4]

Tabela 1. α- preseci za primer 2.6

2.6.2 Jednačina A • *X* = B

Neka su, zarad jednostavnosti, *A* i *B* fazi brojevi u R^+. Lako se pokazuje da $X = B\,/\,A$ nije rešenje jednačine. Za svako $\alpha \in (0, 1]$ dobija se intervalska jednačina

$$^{\alpha}A \bullet {}^{\alpha}X = {}^{\alpha}B.$$

Rezultat ove fazi jednačine može da se dobije rešavanjem ovih intervalskih jednašina za svako $\alpha \in (0, 1]$. Neka je $^{\alpha}A = [^{\alpha}a_1, {}^{\alpha}a_2]$, $B = [^{\alpha}b_1, {}^{\alpha}b_2]$ i $X = [^{\alpha}x_1, {}^{\alpha}x_2]$. Tada, rešenje fazi jednačine postoji ako i samo ako:

(i) $^{\alpha}b_1 / {}^{\alpha}a_1 \le {}^{\alpha}b_2 / {}^{\alpha}a_2$ za svako $\alpha \in (0, 1]$ i

(ii) $\alpha \le \beta$ implicira $^{\alpha}b_1 / {}^{\alpha}a_1 \le {}^{\beta}b_1 / {}^{\beta}a_1 \le {}^{\beta}b_2 / {}^{\beta}a_2 \le {}^{\alpha}b_2 / {}^{\alpha}a_2$.

Ako rešenje postoji, ima oblik

$$X = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha X_{\alpha}$$

Primer 2.7 [10]

Neka *A* i *B* u ovoj jednačini budu trougaoni fazi brojevi:

$$A(x) = \begin{cases} 0 & x \le 3, x > 5 \\ (x-3) & 3 < x \le 4 \\ 5-x & 4 < x \le 5 \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} 0 & x \le 12, x > 32 \\ (x-12)/8 & 12 < x \le 20 \\ (32-x)/12 & 20 < x \le 32 \end{cases}$$

Tada, ${}^{\alpha}A$ = [α + 3, 5 - α], ${}^{\alpha}B$ = [8α + 12, 32 - 12α] i dobija se

$$\frac{8\alpha + 12}{\alpha + 3} \le \frac{32\alpha - 12\alpha}{5 - \alpha}$$

a zatim

$${}^{\alpha}X = \left[\frac{8\alpha + 12}{\alpha + 3}, \frac{32\alpha - 12\alpha}{5 - \alpha}\right]$$

za svako α ∈ (0, 1].Takođe se vidi da α ≤ β implicira ${}^{\beta}X \subseteq {}^{\alpha}X$ za svaki par α, β ∈ (0, 1]. Time je rešenje ove fazi jednačine

$$X = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha X_{\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{za } x \le 4,\ x \ge 32/5 \\ \dfrac{12 - 3x}{x - 8} & \text{za } 4 < x \le 5 \\ \dfrac{32 - 5x}{12 - x} & \text{za } 5 \le x \le 32/5 \end{cases}$$

3. Fazi PERT za upravljanje projektima

Upravljanje projektima je komplikovana delatnost koja obuhvata planiranje raznih aktivnosti koje moraju da se izvode u procesu razvoja novih proizvoda tehnologije.Projekti imaju specifičan početak i kraj. Radi lakšeg pregleda, podeljeni su na aktivnosti koje takođe imaju specifičan početak i kraj. Aktivnosti se moraju izvoditi po određenom redosledu, neke pre drugih, neke istovremeno. Vreme koje je potrebno da bi se izvršila svaka od njih mora se *proceniti.*

Rezultati prezentovani u ovom poglavlju su iz [1, 14].

3.1 Klasičan PERT i CPM

Dve važne klasične tehnike su se razvile da bi se pospešilo planiranje i kontrola projekata: „Tehnika evaluacije i revizije projekata“ (PERT), i „Metod kritične putanje“ (CPM). PERT je razvila SAD mornarica za vreme planiranja proizvodnje nuklearne podmornice Polaris. CPM su razvili, otprilike u isto vreme, istraživači Iz Remington Rand-a i

DuPont-a za svrhe održavanja hemijskih postrojenja. Ima brojnih sličnosti između njih, i često se zajedno koriste kao jedinstvena tehnika.

Da bi se ilustrovao PERT i CPM predstavljena je pojednostavljena i modifikovana verzija stvarnog projekta koji su razmatrali Fogerti i Hofman (1983). Šematski je prikazan u Tabeli 2. projekat, nazvan „Dizajn sistema za upravljanje materijalima“, obuhvata dizajn, izradu, montažu i testiranje. Projekat je podeljen u osam aktivnosti označenih sa A, B, C, D, E, F, G, H. Vreme za koje se izvršava svaka od ovih aktivnosti u zadnjem stupcu Tabele 2. je procena rukovodioca zaduženih za njih.

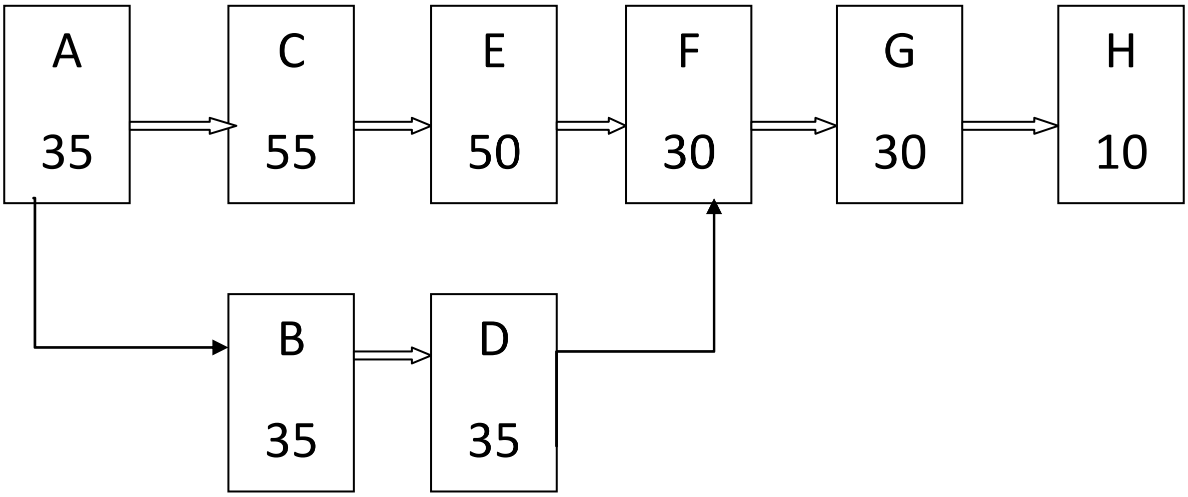
	OPIS AKTIVNOSTI	PRETHODNE AKTIVNOSTI	ISTOVREMENE AKTIVNOSTI	SLEDEĆE AKTIVNOSTI	VREME POTREBNO ZA IZVRŠENJE (u danima)
A	Mehanički dizajn			B, C	35
B	Električni dizajn	A	C	D	35
C	Mehanička izrada	A	B	E	55
D	Elektronska izrada	B	C, E	F	35
E	Mehanički podsklop	C	D	F	50
F	Električna instalacija	D, E		G	30
G	Instaliranje cevi	F		G	30
H	Pokretanje, testiranje, isporuka	F			10

Tabela2. Podaci o projektovanju sistema upravljanja industrijskom opremom, proizvodnji i planskoj izradi

3.1.1 Mrežni model planiranja

PERT i CPM konstruišu mrežni model planiranja putem podataka u tabeli. Model koji odgovara Tabeli 2. je prikazan Slici 24.. Svaka aktivnost je predstavljena kvadratom, pravougaonikom, ili krugom unutar kojih je njena oznaka i vreme izvršenja u danima.

Mrežni model planiranja eksplicitno predstavlja sekvencijalni odnos između aktivnosti.



Slika 24: ***Mrežni model planiranja za sistem upravljanja industrijskom opremom***

3.1.2 Kritična putanja

Kritična putanja je putanja aktivnosti povezanih u sekvenci od početka do kraja projekta koja zahteva najduže vreme za izvršenje. Tako je ukupno vreme izvršenja projekta vreme potrebno da bi se završile sve aktivnosti na kritičnoj putanji.

Mrežni model planiranja pomaže da bi se odredila kritična putanja. Kritična putanja na Slici 24. je prikazana strelicama koje povezuju aktivnosti A, C, E, F, G i H. Ukupno vreme za okončanje projekta je 35 + 55 + 50 + 30 + 30 + 10 = 210 dana. Na Slici 24. se takođe vidi da aktivnosti B i D nisu na kritičkoj putanji. Ne moraju biti okončane po planu, ali zastoj ne sme biti veći od 35 dana. U suprotnom će aktivnost F na kritičkoj putanji biti odgođena.

3.1.3 PERT verovatnoće

Vremenska procena ili predviđanje završetka projekta je inherentno nepouzdano. Da bi se ova nepouzdanost kompenzovala, istraživači proširuju kapacitet PERT-a time što koriste statistike i verovatnoću. PERT od stručnjaka zahteva tri procene za vreme završetka svake aktivnosti: *optimističko vreme* n_1, vreme koje će biti potrebno da se akltivnost okonča ako sve prođe u najboljem mogućem redu; *najverovatnije vreme* n_M, vreme koje će biti potrebno da se aktivnost okonča ako sve pođe po planu; i *pesimističko vreme* n_2, *tj.* vreme koje će biti potrebno da se aktivnost okonča ako se pojave teškoće i problemi. Jedinstveno vreme za okončanje aktivnosti se računa po formuli ponderisanog proseka

$$\mathrm{n_e} = \frac{n_1 + n_M + n}{6} \qquad (3.1)$$

koja se primenjuje za svaku aktivnost. Ukupno vreme Te za okončanje projekta je vreme okončanja projekta po kritičnoj putanji. Vreme izračunato putem (3.1) za mrežni model planiranja na Slici 24. će biti približno onom predstavljenom u kvadratima i uglavnom će predstavljati bolju procenu. Ukupno vreme Te (približno 210 dana) će biti realnije nego 210 dana. PERT dalje nastavlja sa kalkulisanjem standardne devijacije za t_e i drugim analizama verovatnoće. Ovde se predlaže alternativa za PERT verovatnoće koja je manje komplikovana.

Tri vremenske procene n_1, n_M, i n_2 za svaku aktivnost prave se od strane stručnjaka koji koriste svoje znanje, iskustvo i relevantne informacije koje su dostupne; procene su subjektivne, ali ne i arbitrarne. Time je priroda nepouzdanosti vezane za takvu vrstu problema više fazi nego probabilistička. PERT se ne bavi tehnikom za izračunavanje n_1, n_M, i n_2, on samo navodi da ona moraju da se izračunaju i kombinuju putem formule za izračunavanje ponderisanog proseka (3.1).

3.2 Fazi PERT za predviđanje vremena

Da bi se predstavio fazi PERT za predviđanje vremena, prvo treba objasniti pojmove kao što su fazi delfi, trougaona prosečna vrednost i defazifikacija.

Trougaona prosečna vrednost: Neka je dato n trougaonih brojeva $A_i = (a_1^{(i)}, a_M^{(i)}, a_2^{(i)})$, i = 1, ..., n . Koristeći sabiranje trougaonih brojeva i deljenje sa realnim brojem, dobija se trougaona prosečna vrednost A_{ave}

$$A_{ave} = \frac{A_1 + \ldots + A_n}{n}$$

$$= \frac{(a_1^{(1)}, a_M^{(1)}, a_2^{(1)}) + \cdots + (a_1^{(n)}, a_M^{(n)}, a_2^{(n)})}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} a_1^{(i)}, \sum_{i=1}^{n} a_M^{(i)} \sum_{i=1}^{n} a_2^{(i)}}{n}$$

koja je trougaoni broj

$$A_{ave} = (m_1, m_M, m_2) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_1^{(i)}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_M^{(i)}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_2^{(i)}\right) \qquad (3.2)$$

Operacija *defazifikacije* se ne može jedinstveno definisati. Ovde su predstavljene tri mogućnosti za defazifikaciju $A_{ave} = (m_1, m_M, m_2)$ i mogu se primeniti na bilo koji trougaoni fazi broj.

(1) $$x_{\max}^{(1)} = \frac{m_1 + m_M + m_2}{3}$$

(2) $$x_{\max}^{(2)} = \frac{m_1 + 2m_M + m_2}{4}$$

$$(3) \qquad x_{\max}^{(1)} = \frac{m_1 + 4m_M + m_2}{6}$$

Fazi delfi metod su predstavili Kaufman i Gupta 1988. godine. Ovaj metod se sastoji iz sledećih koraka:

1) Stručnjaci E_i, i = 1, ..., n, predviđaju moguće datume realizacije sigurnog događaja u nauci, tehnologiji ili u biznisu. Naime, određuju najraniji datum $a_1^{(i)}$, najverovatniji datum $a_M^{(i)}$ i najkasniji datum $a_2^{(i)}$. Ovi podaci su predstavljenikao trougaoni brojevi

$$A_i = (a_1^{(i)},\ a_M^{(i)},\ a_2^{(i)}),\ i = 1, ..., n$$

2) Traži se devijacija (eng. deviation) između $A_{ave} = (m_1, m_M, m_2)$ i Ai. To je trougaoni broj definisan sa

$$A_{ave} - A_i = (m_1 - a_1^{(i)}, m_M - a_M^{(i)}, m_2 - a_2^{(i)})$$

$$= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_1^{(i)} - a_1^{(i)}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_M^{(i)} - a_M^{(i)}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_2^{(i)} - a_2^{(i)}\right)$$

Ova devijacija se šalje nazad stručnjacima na ponovno ispitivanje.

3) Svaki stručnjak predstavlja novi trougaoni broj

$$B_i = (b_1^{(i)},\ b_M^{(i)},\ b_2^{(i)}),\ i = 1, ..., n$$

i nalazi se A_{ave} . Ovaj proces počevši od 2) se ponavlja sve dok se ne dobiju dve vrednosti A_{ave}, B_{ave}, C_{ave}..., koje su slične.

4) Ako se pojave neke bitne informacije na osnovu novih otkrića, može se uraditi ponovljeno ispitivanje.

Poboljšanje PERT-a se predlaže korišćenjem fazi delfija za procenu n_1, n_M, i n_2 za svaku aktivnost. Stručnjaci sada svako vreme za okončanje aktivnosti ocenjuju trougaonim brojevima tipa (n_1, n_M, n_2). Za svaku aktivnost računa se. Da bi se izračunala precizna vremenska vrednost aktivnosti, mora se koristiti defazifikaciju. Fazi PERT je prikazan kroz analizu sledećeg slučaja.

3.2.1 Predviđanje vremena za vođenje projekta upravljanja industrijskom opremom

Analizira se dizajn sistema za upravljanje industrijskom opremom iz Tabele 2. i sa Slike 24. Neka su zanemarene vremenske procene do kojih se došlo koristeći klasični PERT. Sada svaku vremensku aktivnost procenjuju tri stručnjaka; neki mogu učestvovati u proceni i za više aktivnosti. Glavni rukovodioc projekta može da učestvuje u svim procenama grupe.

Stručnjaci su zamoljeni da procene optimistički, najverovatniji i pesimistički vremenski period za okončanje aktivnosti A, B,...H, izražene kao trougaoni brojevi N_i^A, N_i^B,... N_i^H, i = 1, 2, 3.

Neka važi pretpostavka da eksperti koji rade na proceni vremena okončanja aktivnosti A dolaze do rezultata prikazanih u Tabeli 3.

Ekspert	N_i^A	Optimističko vreme	Najverovatnije vreme	Pesimističko vreme
E_1 E_2 E_3	N_1^A N_2^A N_3^A	33 33 32	35 34 36	38 37 39
Ukupno	$\sum_{i=1}^{3} N_i^A$	98	105	114

Tabela 3. Procena vremena okončanja aktivnosti A

Sumirane procene stručnjaka daju prosečno vreme završetka aktivnosti A u danima, u formi trougaone prosečne vrednosti:

$$N_{ave}^A = \left(\frac{98}{3}, \frac{105}{3}, \frac{114}{3}\right) = (32.67, 35, 38) \approx (33, 35, 38).$$

Da bi se pronašlo tačno vreme okončanja mora se defazifikovati N_{ave}^A. Pošto je N_{ave}^A gotovo sigurno trougaoni broj (sredina intervala [32.67, 38] je 35.335, što je približno 35, koristi se formula po kojoj je t_{max} = 35.

Radi poređenja, primenjuju se na N_{ave}^A tri formule defazifikacije. Dobijaju se

(1) $n^1_{max} = \dfrac{32.67+35+38}{3} = 35{,}22,$

(2) $n^2_{max} = \dfrac{32.67+(2)35+38}{4} = 35{,}17,$

(3) $n^3_{max} = \dfrac{32.67+(4)35+38}{6} = 35{,}11,$

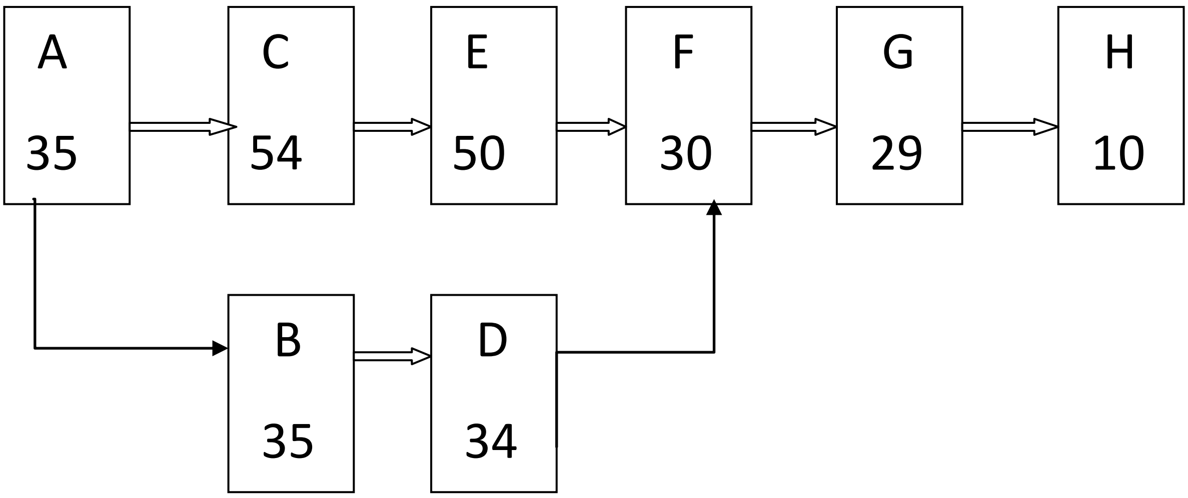
brojevi koji su priližno 35. Sem toga, kada se broje dani u sličnim projektima, nepotrebno je zadržati decimale; zaokružuje se na pune dane. Decimale se obično pojavljuju kada se radi sa formulama za izračunavanje proseka.

Na sličan način, drugih sedam grupa stručnjaka može dati procene i konstruisati tabele slične Tabeli 3. Ovde se pretpostavlja da su zaokružena prosečna vremena N_{ave}^B,..., N_{ave}^H ona koja su predstavljena u Tabeli 4. (u koju je uključeno i N_{ave}^A).

Aktivnost	Prosečno vreme trajanja aktivnosti	Optimističko vreme n_1	Najverovatnije vreme n_M	Pesimističko vreme n_2
A	N_{ave}^{A}	33	35	38
B	N_{ave}^{B}	32	35	38
C	N_{ave}^{C}	51	54	58
D	N_{ave}^{D}	32	34	36
E	N_{ave}^{E}	46	50	53
F	N_{ave}^{F}	27	30	33
G	N_{ave}^{G}	27	29	32
H	N_{ave}^{H}	7	10	12

Tabela 4. Prosečno vreme okončanja aktivnosti

Svaki trougaoni broj, koji predstavlja prosečno trajanje aktivnosti (druga kolona Tabele 4.) mora biti defazifikovan da bi prikazao tačan broj, koji prikazuje vreme okončanja aktivnosti. Ovi trougaoni brojevi su skoro u centralnom obliku, pa se može primeniti formulu za defazifikaciju, koja daje brojeve u četvrtoj koloni označene sa n_M. Defazifikovana vremena mogu se predstaviti na poboljšanom mrežnom modelu planiranja (Slika 25.).



Slika 25. Mrežni model planiranja poboljšan upotrebom fazi PERT-a

Ukupno vreme za okončanje projekta izraženo trougaonim brojem N**,** je vreme za okončanje aktivnosti po kritičnoj putanji. Dodavanjem brojeva u tri kolone Tabele 4. određenih sa n_1, n_M, n_2, isključujući vremena za aktivnosti B i D, se dobija

$$N = N_{ave}^{A} + N_{ave}^{C} + N_{ave}^{E} + N_{ave}^{F} + N_{ave}^{G} + N_{ave}^{H} = (191, 208, 226).$$

Sledi da će trajanje projekta biti između 191 i 226 dana, ali najverovatnije 208 dana. Poslednji broj 208 je rezultat defazifikacije N. Primenom formula za defazifikaciju dobijaju se brojevi $N^1{max} = 208.33$, $N^2{max} = 208.25$, i $N^3{max} = 208.17$; svi su približno 208. Zaključak je: vreme trajanja projekta je procenjeno na 208 dana.

3.2.2 Raspored raspodele sredstava

Trajanje aktivnosti i raspodela sredstava, materijala, i ljudskih resursa su u bliskom međusobnom odnosu. Deo je uobičajene prakse da se pre raspodele sredstava za projekat utvrdi mreža kritične putanje.

Predviđanje vremena okončanja aktivnosti implicitno podrazumeva da su potrebna sredstva dostupna i da se mogu efikasno raspodeliti na aktivnosti tako da se projekat odvija bez ometanja. U realnosti, međutim, mogu da iskrsnu razne poteškoće i da zakomplikuju rad.

Uprava često ima mogućnost da obezbedi dodatna sredstva da bi skratila trajanje rada na projektu. Ovo može povećati troškove. Skraćivanje trajanja projekta može biti poželjno zbog nagrada, kašnjenje može biti penalizovano.

PERT pomaže da se analiziraju takva i druga pitanja povezana sa raspodelom sredstava. Za pitanja, koja zatevaju procene, PERT se može kombinovati sa fazi delfijem na sličan način. Može da se koristi za određivanje potrebnog vremena za pojedinačne aktivnosti i pronalaženje kritične putanje.

3.2.3 Fazi PERT za skraćivanje trajanja projekta

Na osnovu PERT-a uvedene su oznake: n_n – normalno vreme za okončanje aktivnosti po planu, n_c – skraćeno (ubrzano) vreme za okončanje aktivnosti, C_n – normalni troškovi za okončanje oktivnosti, C_c – prinudni troškovi (povećani troškovi) za okončanje aktivnosti u skraćenom vremenu. Ovo se mora proceniti za svaku pojedinačnu aktivnost.

Ovde će se prikazati fazi PERT za skraćivanje trajanja projekta na sistemu za upravljanje industrijskim resursima, koji se razmatrao u podsekciji 3.5.1.

Da bi se skratilo trajanje projekta mora se skratiti vreme kritične putanje, tj, skratiti ukupno vreme Nmax = 208 dana. Skraćivanje vremena trajanja aktivnosti, koje nisu na kritičnoj putanji (B i D, Slika 24.) neće smanjiti Nmax. Međutim, neka sredstva koja su dodeljena aktivnostima B i D, mogu se preraspodeliti na C i D da bi se smanjilo njihovo vreme trajanja (unutrašnja preraspodela). Ovde će se razmatrati skraćenje trajanja aktivnosti na kritičnoj putanji bez unutrašnje preraspodele sredstava.

Normalno vreme n_n za svaku aktivnost je već procenjeno; to je vreme $n_{max} = N_M$ prikazano u Tabeli 4., u četvrtoj koloni. Skraćeno vreme n_c, normalni troškovi C_n, i prinudni troškovi C_c mogu se proceniti za svaku aktivnost, slično kao normalno vreme n_n, primenom fazi delfija. Defazifikovane vrednosti su obleležene sa $n_{c\ max}$, $C_{n\ max}$, i $C_{c\ max}$. Ovde je procena data za normalne troškove C_n aktivnosti A. Na sličan način se mogu porceniti n_c i C_c.

Tri eksperta su zamoljena da procene normalne troškove za okončanje aktivnosti A u formi trugaonog broja $C_n = (C_{n1}, C_{nM}, C_{n2})$, gde je C_{n1} najmanji trošak, C_{nM} je najverovatniji trošak, a C_{n2} predstavlja najveći trošak.

Ekspert	Najniži troškovi C_{n1}	Najverovatniji troškovi C_{nM}	Najviši troškovi C_{n2}
E_1	18 000	20 000	22 000
E_2	19 500	21 000	22 000
E_3	17 000	19 500	21 000
Ukupno	54 500	60 500	65 000

Tabela 5. Procena stručnjaka za okončanje aktivnosti A pri normalnim troškovima Cn

Koristeći formulu (3.2), dobijaju se prosečni normalni troškovi $C_n{}^{A}{}_{ave}$ za okončanje aktivnosti A, u formi trougaone prosečne vrednosti:

$$C_n{}^{A}{}_{ave} = (18\ 166.67,\ 20\ 166.67,\ 21\ 666.67)$$

Izostavljanje decimala u $C_n{}^{A}{}_{ave}$ i zaokruživanje zadnje tri cifre na 000, 500 ili 1000, daje

$$C_n{}^{A}{}_{ave} = (18\ 000,\ 20\ 000,\ 21\ 500).$$

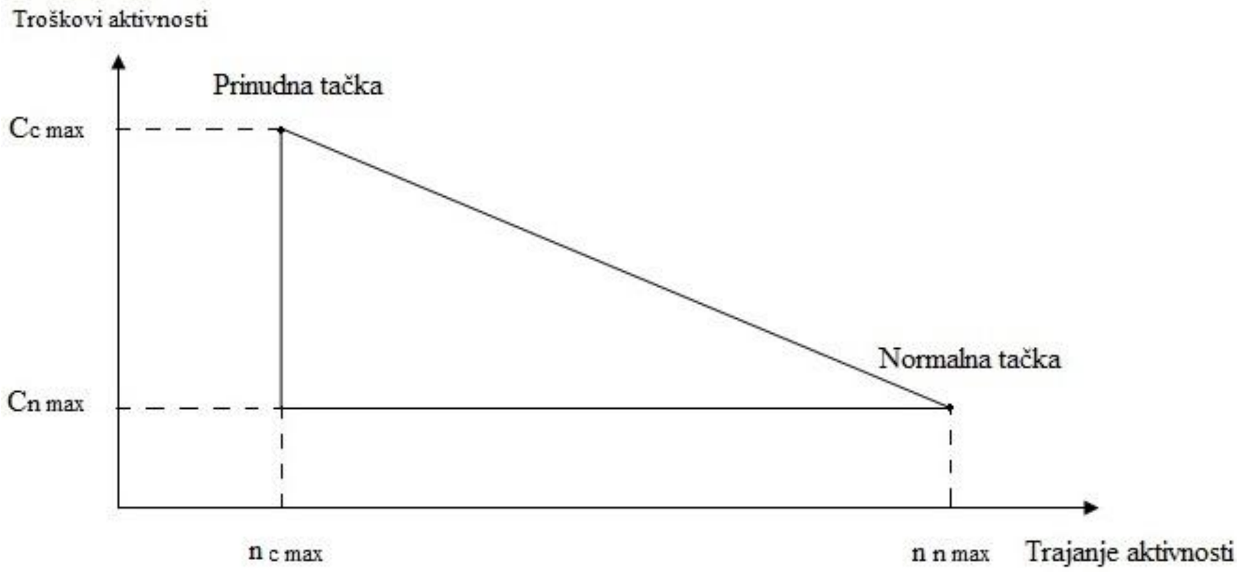
Rezultat defazifikacije $C_n{}^{A}{}_{ave}$ je 20 000.

Dalje, grupe eksperata predviđaju n_c , C_n, i C_c za sve druge aktivnosti na kritičnoj putanji, defazifikuju ih, i zaokružuju dobijene vrednosti. Neka važi pretpostavka da su defazifikovane vrednosti aktivnosti na kritičnoj putanji one predstavljene u Tabeli 6.

Da bi odredio koje aktivnosti mogu da se skrate, PERT koristi pojam priraštaja troškova. Korsteći date simbole, može se predstaviti na sledeći način:

$$k = \text{priraštaj troškova} = \left|\frac{Cn\ \max - Cc\ \max}{nn\ \max - nc\ \max}\right|. \tag{3.3}$$

Slika 26. prikazuje da, kako se normalno vreme $n_{n\ max}$ smanjuje i približava skraćenom vremenu $n_{c\ max}$, normalni troškovi $C_{n\ max}$ se povećavaju i približavaju prinudnim troškovima $C_{c\ max}$.



Slika 26. ***Pravac troškova za skaćeno vreme aktivnosti***

Aktivnost	Normalno vreme $n_{n\ max}$	Skraćeno vreme $n_{c\ max}$	Normalni troškovi $C_{n\ max}$	Prinudni troškovi $C_{c\ max}$	Priraštaj troškova ($dnevno)
A	35	25	20 000	26 000	600
C	54	30	30 500	40 500	417
E	50	32	28 000	35 000	389
F	30	22	18 500	25 500	813
G	29	20	15 000	19 000	444
H	10	8	7 000	8 000	500

Tabela 6. ***Defazifikovana normalna i prinudna vremena i troškovi aktivnosti unutar sistema upravljanja industrijskim resursima***

Koeficijent priraštaja troškova (3.3) za aktivnost A daje

$$k_A = \left| \frac{C_{n\ max} - C_{c\ max}}{t_{n\ max} - t_{c\ max}} \right| = \left| \frac{20000 - 26000}{35 - 25} \right| = \left| \frac{-6000}{10} \right| = 600$$

Koeficijent priraštaja troškova za ostale aktivnosti se slično izračunava. Rezultati su prikazani u poslednjoj koloni Tabele 6.

Dodatna sredstva bi uglavnom trebala da se prvo pridodaju aktivnostima sa najmanjim priraštajem troškova. Aktivnosti iz Tabele 6. su rangirane u Tabeli 7. po priraštaju troškova – od najmanjeg do najvećeg.

Neka važi pretpostavka da uprava želi da smanji trajanje projekta sa 208 na 180 dana, što je smanjenje od 28 dana. Od svih aktivnosti na kritičnoj putanji, aktivnost E je rangirana kao prva (Tabela 7.) jer ima najmanje *k* od $389 na dan. Sa investicijom od $7000 trajanje aktivnosti E može se smanjiti za 18 dana, što znači da se trajanje projekta smanjuje za 18 dana. Mora se još pronaći prostor za smanjenje od 10 dana. Dobar kandidat bi bila aktivnost C koja je rangirana kao druga na Tabeli 7. Smanjenje trajanja od 10 dana bi koštalo 10×417 = $4 170. Međutim, ako postoji razloga protiv skraćivanja trajanja aktivnosti E ili C, ili obe, moraju se razmotriti druge opcije.

Rang	Aktivnost	Smanjeno vreme $n_{n\ max} - n_{c\ max}$	Dodatni troškovi $C_{c\ max} - C_{n\ max}$	Priraštaj troškova ($ dnevno)
1	E	18	7 000	389
2	C	24	10 000	417
3	G	9	4 000	444
4	H	2	1 000	500
5	A	10	6 000	600
6	F	8	6 500	813

Tabela 7. ***Aktivnosti rangirane prema priraštaju troškova***

Zaključak

Tema ovog rada predstavlja aktuelnu oblast matematike baziranu na teoriji fazi skupova, koja je primenljiva u realnim problemima. Kroz rad, pored osnovnih pojmova za torugaone norme i fazi skupove, predstavljeni su različiti postupci pomoću kojih se vrše operacije na fazi skupovima i fazi brojevima.

Prikazane su dve metode fazi aritmetike. Jedan metod se zasniva na aritmetici intervala tj. posmatraju se α-preseci, a drugi metod koristi princip proširenja. Zadehov princip omogućava da se operacije nad realnim brojevima proširuju i na fazi brojeve. U slučaju da se za t-normu uzme T_M dobija se originalni Zadehov princip proširenja.

U ovom radu je ilustrovana primena fazi aritmetike kroz PERT metod. PERT i CPM konstruišu mrežni model planiranja putem podataka u tabeli. Mrežni model planiranja u suštini eksplicitno predstavlja sekvencijalni odnos između aktivnosti. Prikazano je kako se klasični PERT može poboljšati korišćenjem metode fazi delfi za svaku aktivnost. Da bi se dobile preciznije informacije o vremenu završetka aktivnosti koristi se još i defazifikacija.

Svaka lingvistička promenljiva čije je stanje izraženo lingvističkim terminima se interpretira kao specifičan fazi broj. Definisana je putem osnovne promenljive čije vrednosti su realni brojevi sa specifičnim rasponom.

Koncept fazi broja igra fundamentalnu ulogu u formulisanju *kvantitativnih fazi promenljivih*. Ovo su promenljive čija su stanja fazi brojevi. Fazi brojevi, najčešće trougaoni fazi broj i trapezoidni fazi broj, koriste se da bi se predstavile lingvističke vrednosti kao što su *veoma kvalifikovan, kvalifikovan, srednje kvalifikovan*, itd.

Predstavljena materija je dovoljna da bi se savladali osnovni pojmovi za trougaone norme i fazi aritmetiku, te se može iskoristiti za dalja istraživanja.

Literatura

[1] Bojadziev G., Bojadziev M.; Fuzzy logic for business, finance and management, World Scientific 1999.

[2] Bojadziev G., Bojadziev M.; Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, Applications, World Scientific 1995.

[3] De Baets B., Marková - Stupňanová A.; Analytical expressions forthe addition of fuzzy intervals, Fuzzy sets and systems, 1997.

[4] De Baets B., A. Marková-Stupňanová; Fuzzy Sets and Systems, 1997

[5] Fodor J.; Left-continuous t-norms in fuzzy logic: An overview.
Hanss M., Applied Fuzzy Arithmetic, 2004.

[6] Haans M.; Applied fuzzy Arithmetic- an introduction with engineering applications, Springer, 2005.

[7] Hájek P.; Mathematics of Fuzzy Logic, 1998.

[8] http://en.wikipedia.org/

[9] Klement E.P., Mesiar R., Pap E.; Triangular norms, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[10] Lindblad J.; Fuzzy Sets and Fuzzy Techniques, 2007.

[11] Mesiar R.; Fuzzy Sets and Systems, 1997

[12] Pap E.; Fazi mere i njihova primena, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno matematički fakultet Novi Sad, 1999.

[13] Schweizer B., Skalar A.; Associative functions and abstract semigroups, Publ. Math. Debrecen, 1983.

[14] Uthra G., Sattanathan R.; Risk analysis of decision maker's attitude in fuzzy PERT, International journal of algorithms, computing and mathematics, 2009.

[15] Zadeh L. A.; Fuzzy sets. Inform Control, 1965.

[16] Zadeh L. A.; The Concept of Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning, Inform. Sci., 1975.

Biografija

Trusina Franjo je rođen 6. marta 1988. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu „Jan Kolar'' u Selenči završio je 2003. godine kao dobitnik Vukove diplome. U Novom Sadu je završio Elektrotehničku školu ''Mihajlo Pupin'', smer elektrotehničar računara, 2007. godine sa odličnim uspehom. Iste godine upisuje Prirodno-matematički fakulteta u Novom Sadu, odsek za matematiku i informatiku, smer matematika finansija. Zaključno sa junskim ispitnim rokom 2011. godine položio je sve predviđene ispite. Nakon toga, na istom fakultetu upisuje master studije, smer primenjena matematika. Položio je sve ispite predviđene planom i programom 2013. godine i time stekao uslov za odbranu master rada.

Ključna dokumentacija

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: RBR	
Identifikacioni broj: IBR	
Tip dokumentacije: TD	Monografska dokumentacija
Tip zapisa: TZ	Tekstualni štampani materijal
Vrsta rada: VR	Master rad
Autor: AU	Trusina Franjo
Mentor: MN	dr Ivana Štajner-Papuga
Naslov rada: NR	Trougaone norme i primena u fazi skupovima
Jezik publikacije: JP	Srpski (latinica)
Jezik izvoda: JI	s/en
Zemlja publikovanja: ZP	Republika Srbija
Uže geografsko područje: UGP	Vojvodina
Godina: GO	2013.
Izdavač: IZ	Autorski reprint

Mesto i adresa: MA	Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, PMF, Trg Dositeja Obradovića 4
Fizički opis rada: FO	(broj poglavlja / strana / lit. citata / tabela / slika / grafika / priloga) (3, 71, 16, 7, 26, 0, 0)
Naučna oblast: NO	Matematika
Naučna disciplina: ND	Primenjena matematika
Predmetna odrednica, ključne reči: PO	Trougaone norme, fazi aritmetika, fazi PERT
UDK	
Čuva se: ČU	U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku
Važna napomena: VN	
Izvod: IZ	U ovom radu je dat detaljan pregled osnovnih pojmova vezanih za trougaone norme i fazi aritmetiku. U osnovnim crtama je objašnjen pojam Zadehovog principa proširenja kao i njegovo uopštenje bazirano na trougaonim normama. Primena fazi aritmetike je opisana kroz fazi PERT metod, koji se koristi u procesu upravljanja projektima.
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: DP	10.05.2012.
Datum odbrane: DO	Septembar 2013.
Članovi komisije: (naučni stepen/ime i prezime/zvanje/fakultet) KO	Predsednik: dr Arpad Takači, redovni profesor Prirodno - matematičkog fakulteta u Novom Sadu Mentor: dr Ivana Štajner-Papuga, vanredni profesor Prirodno - matematičkog fakulteta u Novom Sadu Član: dr Mirjana Štrboja, docent Prirodno - matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number: ANO	
Identification number: INO	
Document type: DT	Monograph type
Type of record: TR	Textual printed material
Contents code: CC	Master's thesis
Author: AU	Trusina Franjo
Mentor: MN	dr Ivana Štajner-Papuga
Title: TI	Triangular norms and their applications in fuzzy sets
Language of text: LT	Serbian (Latin)
Language of abstract: LA	en/s
Country of publication: CP	Republic of Serbia
Locality of publication: LP	Vojvodina
Publication year: PY	2013.
Publisher: PU	Author's reprint
Publ. place: PP	University of Novi Sad, Faculty of Sciences, Department of Mathematics and Informatics, Trg Dositeja Obradovića 4

Physical description: PD	(3, 71, 16, 7, 26, 0, 0)
Scientific field SF	Mathematics
Scientific discipline SD	Applied mathematics
Subject Key words SKW	Triangular norms, fuzzy arithmetic, fuzzy PERT
UC	
Holding data: HD	In the library of Department of Mathematics and Informatics
Note: N	
Abstract: AB	In this paper is given a detailed review of the basic concepts related to triangular norms and fuzzy arithmetic. Concept of Zadeh's extension principle and its generalization are explained in general terms. It is shown how the operations of union and intersection of fuzzy sets can be defined according to triangular norms. Application of fuzzy arithmetic is described through fuzzy PERT method, which is used in the project management process.
Accepted on Scientific Board on: AS	10.05.2012.
Defended: DE	September 2013.
Thesis Defend board: DB	President: dr Arpad Takači, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad Mentor: Dr Ivana Štajner-Papuga, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad Member: dr Mirjana Štrboje, docent, Faculty of Sciences, University of Novi Sad