UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Ernest Šanca

Modulske metode za rešavanje problema linearne komplementarnosti

· MASTER RAD ·

Mentor:
Prof. dr Ljiljana Cvetković

Novi Sad, 2015.

“*Your work is going to fill a large part of your life,*
and the only way to be truly satisfied
is to do what you believe is great work.
And the only way to do great work
is to love what you do.
If you haven't found it yet, keep looking.
Don't settle.
As with all matters of the heart,
you'll know when you find it.”

STEVEN JOBS, *Stanford Commencement Address, 2005.*

Zahvalnica

Veliku zahvalnost, u prvom redu, dugujem mentoru ovog master rada, prof. dr Ljiljani Cvetković. Poštovanje za sve ono što je učinila i što i dalje čini je neizmerno. Hvala joj - za savete, sugestije, ukazano poverenje, spremnost na zajednički rad. Najiskrenije zahvaljujem i dr Kostić Vladimiru na izuzetnim i inspirativnim vežbama iz Numele1, a nedugo zatim i Numele2, te spremnosti na timski rad i saradnju. Oboma zahvaljujem na podstreku i možda naočigled "nečujnom" pozivu da zakoračim u svet nauke. Na moje veliko zadovoljstvo, taj suptilan poziv sam nestrpljivo iščekivao, kada se desio - na isti sam sa oduševljenjem odgovorio, odabravši da ga sledim i da mu se u celosti posvetim. Izuzetna je čast i privilegija imati ih za saradnike i drage saputnike u cik vlastitog putešestvija u čaroban svet nauke. Hvala im što su uvek surovo iskreni, nepopravljivo optimistični, vedri i nasmejani, puni razumevanja i ohrabrenja, i nadasve vanserijski i izuzetno kreativni.

Hvala i svim divnim i izvanrednim ljudima koje sam sreo, neposredno ali i posredno baveći se naučnim radom, profesorima od kojih sam mnogo toga korisnog naučio, onima od kojih ću tek da učim, studentima kojima sam imao prilike da prenesem delić svog znanja, i svima onima čija poznanstva nestrpljivo iščekujem.

Zahvaljujem svojim kolegama koji su učinili da studentski dani postanu lepa uspomena, dragim prijateljima - što su me pratili, razumevali i uvek rado slušali.

Hvala svima onima koji su na bilo koji način, a naročito onima koji su neiscrpnim motivacijama, dragocenim sugestijama i podstrecima uticali da ovaj master rad primi finalni oblik i formu u kojoj ga prezentujem.

Na kraju, voleo bih da izrazim neizmernu zahvalnost svojim najbližima, majci Ruži, ocu Ernestu i bratu Viktoru. Oni su bili i ostali bezrezervna podrška i moja sigurna luka svih ovih godina. Hvala im što su me bodrili čak i onda kada izbor nije bio lak, pružali utočište u stihiji i buri, što su me ohrabrivali i podsticali da razmišljam široko, gledam daleko, delujem pravovremeno i koračam staloženo i smireno. Uvek uz mene i za mene, oni su ti koji svaki moj uspeh čine kompletnim.

E.Š.

Sadržaj

Uvod

> *Beautiful mathematics eventually tends to be useful,*
> *and useful mathematics eventually tends to be beautiful.*

Problemi linearne komplementarnosti (eng. *LCP*) svoju podlogu i značaj duguju raznolikim primenama u inženjerstvu i modeliranju. Bilo da je reč o problemima zasnovanim na linearnom ili kvadratnom programiranju, uz napomenu da su ovi poslednji od davnina bili i ostali neiscrpan izvor raznolikih primena modela zasnovanih na konceptu *LCP*, ili kada su u pitanju bimatrični modeli igara, preko rubnih problema dinamike fluida, problema mrežnog ekvilibrijuma, pa sve do nastojanja da se model ravnoteže na tržištu opiše na adekvatan način, u smislu identifikacije ravnotežne cene kao rezultata izjednačavanja agregatne ponude i tražnje, što tržište usmerava i vodi ka tački ekvilibrijuma, svi ovi koncepti fundamentalno su zasnovani na problemima linearne komplementarnosti i njima su uspešno modelovani. Upravo je širok spektar primenljivosti u praksi bio presudan i odlučujući faktor za razvoj novih i usavršavanje postojećih iterativnih metoda za određivanje rešenja pomenutog problema. Za dodatne informacije i detaljan pregled primena *LCP*, čitaoca upućujemo na [8].

Određivanje rešenja za *LCP* je do sada izrodilo čitav spektar raznovrsnih pristupa ovoj problematici. Pa ipak, prekretnica u pristupima desila se onog trenutka kada je problem linearne komplementarnosti ekvivalentno zapisan u formi jednačina sa apsolutnim vrednostima (*AVE*) [22]. Pomenuti rezultat iskoristio je Zhong-Zhi Bai i prilagodio ga radu sa splitinzima matrice sistema cf. [2]. Ovaj pristup problemu Bai je nazvao *modulskim iterativnim metodama za rešavanje problema LCP zasnovanim na razlaganjima (splitinzima) matrice sistema* i ovakav pristup je ponudio brzinu i efikasnost, što ga je učinilo još interesantnijim iz ugla primenljivosti u praksi. Posmatrana klasa modulskih iterativnih metoda zasnovanih na splitinzima matrice ponudila je teorijski okvir za mnoge druge iterativne postupke, kao što su modifikovana modulska, nestacionarna ekstrapolirana modulska metoda, modulski Jakobijev, Gaus-Zajdelov, SOR i AOR iterativni postupci. Teorijske analize kao i numeričke implementacije potvrdile su superiornost modulskih metoda u odnosu na projektivne metode. Takođe, Bai je u svojim radovima razvio i paralelnu generalizaciju modulskih metoda, sinhronih i asinhronih, koje su zasnovane na multisplitinzima matrice sistema, adekvatnim za izračunavanja na višeprocesorskim računarima.

Jedan od ključnih aspekata ovog master rada jeste konvergencija ovakvih modulskih iterativnih metoda u slučajevima kada je matrica sistema H_+ matrica.

Struktura rada je sledeća. Kompoziciono, pred čitaocem se nalaze četiri tematske celine. U prvom poglavlju pažnju posvećujemo motivaciji, koju prati formulacija problema, dok je u sklopu uvodne sekcije učinjen i kratak pregled nekih od primena problema linearne komplementarnosti koje krasi višedecenijsko uporište u praksi. Nakon uvodnog dela, drugo poglavlje predstavlja kompaktnu minijaturu znamenitosti numeričke linearne algebre esencijalnu za uspešan naučni defile potonjim delom materije. Fundamente iterativnih metoda za rešavanje sistema linearnih jednačina postavljamo i prezentujemo u okvirima treće sekcije, praćene četvrtim poglavljem u kojem je fokus interesovanja transliran na specijalnu klasu modulskih iterativnih postupaka za numeričko rešavanje *LCP*. Pre svega, reč je o rezultatu u sferi sinhronih varijanti iterativnih metoda za *LCP*, do kojeg su došli Zhong-Zhi Bai i Li-Li Zhang, u smislu formulacije i konvergencije *MSM* i *MSMAOR* postupaka, [4]. Sa idejom da u potpunosti iskoriste računske kapacitete kojima raspolažu višeprocesorska postrojenja, oni su prilagodili iterativne metode uvođenjem multisplitinga, i na taj način potvrdili da se numeričko rešavanje može sprovesti sa značajnim unapređenjem brzine i efikasnosti. Međutim, postavivši restrikciju na izbor relaksacionih parametara koji opredeljuje konvergenciju *AOR* varijante postupka, motivisali su izradu poboljšane varijante [11] koja je ovaj nedostatak uspešno otklonila. Nedugo nakon modulskih sinhronih multisplitinga, sa ciljem još efikasnijeg i adekvatnijeg odgovora na činjenicu o egzistenciji višeprocesorskih okruženja, Bai i Zhang su došli na ideju da prvobitne algoritme multisplitinga poboljšaju uvođenjem druge faze, predstavljanjem *MSTM* i *MSTMAOR* postupaka, [5]. Kao i ranije, restriktivna pretpostavka vezana za relaksacione parametre produkovala je užu oblast konvergencije, međutim, pokazano je da se ona može izbeći [12], što rezultira proširenjem oblasti parametara za koje postupak konvergira i u kojoj spektralni radijus matrice *MSTMAOR* postupka dostiže manju vrednost. Svaki odeljak četvrte sekcije propraćen je numeričkim primerima koji predstavljaju praktičnu evaluaciju minulih teorijskih opservacija.

1

O problemima linearne komplementarnosti

1.1 Motivacija

Problemi linearne komplementarnosti istorijski datiraju još od 40-ih godina prošlog veka, kada je Du Val [14] u svom radu formulisao problem pronalaženja najmanjeg elementa (u vektorskom smislu) kao rešenja sistema linearnih nejednačina oblika $q + Az \geq 0,\ z \geq 0$. Naziv samog problema bio je predmet izmena u nekoliko navrata, s obzirom da je isti inicijalno bio poznat pod nazivom *kompozitni problem*. Potom su usledile odrednice *fundamentalni problem* i *komplementarni problem pivota*. Savremeni naziv problema predložio je Ričard Kotl (Richard W. Cottle) 1965. Upravo u tom periodu ova tematika privukla je znatno više pažnje, naročito u radovima koje su publikovali Cottle [7], Cottle i Dantzig [9] i Lemke [18].

1.2 Formulacija problema

Posmatrajmo proizvoljni, konačno-dimenzionalni prostor realnih vektora. *Problem linearne komplementarnosti* (eng. *linear complementarity problem*, LCP) sastoji se u identifikaciji vektora sa osobinom da isti zadovoljava određeni sistem nejednačina. Preciznije, pretpostavimo da smo fiksirali proizvoljan vektor $q \in \mathbb{R}^n$, i kvadratnu matricu $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Problem linearne komplementarnosti za zadati par vektor-matrica, u skraćenoj notaciji $LCP(q, A)$, matematički je okarakterisan sledećim sistemom nejednačina

$$z \geq 0, \tag{1.1}$$

$$q + Az \geq 0, \tag{1.2}$$

$$z^T(q + Az) = 0. \tag{1.3}$$

Ako postoji realan vektor $z \in \mathbb{R}^n$, koji zadovoljava gornje nejednakosti, kažemo da je isti rešenje datog problema. Naravno, sasvim je moguća opcija da vektor z sa traženim osobinama ne postoji i tada kažemo da problem nema rešenje.

Vektor z sa osobinom da su nejednakosti (1.1) i (1.2) ispunjene poznat je pod nazivom dopustivi vektor (feasible vector). Ukoliko nejednakosti u (1.1) i (1.2) postanu striktne, a vektor z, koji je dopustiv, ima osobinu da ih ispunjava, kažemo da je z stogo dopustiv. Jasno, sam $LCP(q, A)$ je (strogo) dopustiv pod uslovom da postoji (strogo) dopustiv vektor kao njegovo rešenje. Skup svih dopustivih vektora čini dopustivu oblast problema (feasible region), u notaciji $FEA(q, A)$. Zarad jednostavnosti zapisa, definišimo vektor r kao

$$r := q + Az. \tag{1.4}$$

U svetlu nove oznake, konstatujemo da dopustivi vektor z za $LCP(q, A)$ zadovoljava uslov (1.3) ako i samo ako važi

$$z_i r_i = 0, \qquad \text{za sve} \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.5}$$

Pri tome, promenljive z_i i r_i, komponente vektora z i r respektivno, čine komplementarni par, i komplementarne su jedna drugoj. Šta više, vektor z je komplementaran sa vektorom r, a problem linearne komplementarnosti zapravo se svodi na identifikaciju ovakvog vektora, koji je istovremeno i dopustiv. Takav vektor, ako postoji, nazivamo rešenjem problema LCP. Očigledno, problem je rešiv ako ima rešenje. Rešenje problema ne mora biti jedinstveno, odnosno problem može imati i više od jednog rešenja. Skup rešenja problema $LCP(q, A)$ označavamo sa $SOL(q, A)$. Primetimo da je, pod elementarnom pretpostavkom da važi $q \geq 0$, odgovarajući $LCP(q, A)$ uvek rešiv, pri čemu je trivijalno rešenje upravo nula vektor.

Mnogo češće se zapis problema u literaturi susreće u kombinaciji uslova (1.4) i (1.5), što daje povoda da se problem $LCP(q, A)$ zapiše u ekvivalentnom obliku

$$z \geq 0, \tag{1.6}$$

$$r := q + Az \geq 0, \tag{1.7}$$

$$z^T r = 0. \tag{1.8}$$

koji ćemo koristiti od sad pa na dalje.

1.3 Problemi zasnovani na konceptu LCP

Problem kvadratnog programiranja

Sfere inženjerstva i fizičkih nauka polazna su tačka i plodno tle brojnih primena teorijskih rezultata koji ujedno i nastaju kao odgovor na potrebu da se ishodi izvesnih posmatranja bliže objasne, modeluju i razumeju. Pozamašan broj pojava iz pomenutog naučnog ekosistema sa matematičkog stanovišta zapravo krije probleme kvadratnog programiranja u nešto specifičnijoj formi od opšte, u smislu pojednostavljenog oblika ograničenja u optimizaciji kvadratne funkcije cilja. Bitno je napomenuti da je ovakva klasa problema kvadratnog programiranja zapravo ekvivalent problemu linearne komplementarnosti, što iz ugla praktičnih primena daje na snazi LCP, koji zapravo igra presudnu ulogu sa aspekta numeričkog rešavanja pomenutih problema.

Posmatrajmo opšti oblik problema kvadratnog programiranja (QP) definisanog sa

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = c^T x + \frac{1}{2} x^T Q x \\ \text{s.t.} \quad & Mx \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

pri čemu je matrica $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ simetrična, $c \in \mathbb{R}^n$, $M \in \mathbb{R}^{m,n}$ i $b \in \mathbb{R}^m$. Sasvim je jasno da se problem znatno pojednostavljuje u slučaju kada je Q nula matrica, što zapravo implicira da je reč o problemu linearnog programiranja (LP). Na ovom mestu, sa ciljem prevođenja problema (1.9) u formu LCP, bez dubljih teorijskih argumentacija, konstatujemo da je iz oblasti Numeričke optimizacije poznata sledeća činjenica. Ako je vektor x koji pripada dopustivom skupu problema QP ujedno i lokalni minimizator funkcije cilja f, tada postoji vektor $y \in \mathbb{R}^m$ sa osobinom da uređeni par (x, y) zadovoljava Karuš-Kun-Takerove uslove (KKT)

$$\begin{aligned} u &= c + Qx - M^T y \geq 0, \quad x \geq 0, \quad x^T u = 0, \\ v &= -b + Mx \geq 0, \qquad\qquad y \geq 0, \quad y^T v = 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Dodatna pretpostavka o pozitivnoj semi-definitnosti matrice Q, što je potreban i dovoljan uslov da funkcija definisana na konveksnom skupu i sama bude konveksna (s obzirom da je Q ujedno i matrica hesijana funkcije cilja f), implicira da su KKT uslovi (1.10) zapravo dovoljni uslovi da x ujedno bude i globalni minimizator problema (1.9).

Primetimo da uslovi sadržani u (1.10) otkrivaju poznatu formu $LCP(q, A)$, pri čemu su

$$q = \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} Q & -M^T \\ M & 0 \end{bmatrix}.$$

Pri tome, jasno je da je rešenje datog problema vektor $[x, y]^T$.

Premda je matrica Q po pretpostavci simetrična, to nikako ne implicira simetričnost matrice A, sem u slučajevima kada je M nula matrica. Pod uslovom da je $M = 0$, problem se znatno pojednostavljuje. Reč je, dakle, o specijalnom obliku konveksnog kvadratnog programiranja, pri čemu se ograničenja odnose isključivo na znak vektora x,

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = c^T x + \frac{1}{2} x^T Q x \\ \text{s.t.} \quad & x \geq 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Pretpostavka da je Q pozitivno semi-definitna povlači ekvivalenciju problema (1.11) i $LCP(c, Q)$.

Model tržišne ravnoteže

Ravnoteža na tržištu predstavlja situaciju u kojoj dolazi do izjednačavanja agregatnog nivoa ponude sa jedne, i tražnje sa druge strane, pri čemu kao rezultat ovih interakcija pod idealnim pretpostavkama dolazi do formiranja ravnotežne cene, koja ima osobinu da "očisti" tržište. Da bismo formulisali problem tržišnog ekvilibrijuma, neophodno je zasebno razmotriti aspekte ponude, koju omogućavaju proizvođači, i tražnje koja je okarakterisana potrebama i mogućnostima potrošača (konzumenata).

Proizvođači dobara suočavaju se sa izazovom da odgovore na tražnju konzumenata (1.14), uzimajući u obzir i tehnološka ograničenja proizvodnje (1.13). Naravno, cilj svakog racionalnog proizvođača jeste da proizvodne troškove održi na što nižem nivou, odnosno da minimizira ukupne troškove proizvodnje (1.12)

$$\min \quad c^T x \tag{1.12}$$

$$\text{s.t.} \quad Mx \geq b \tag{1.13}$$

$$Nx \geq r^* \tag{1.14}$$

$$x \geq 0, \tag{1.15}$$

pri čemu je c vektor troškova (cost vector for the supply activities), a x vektor proizvedenih dobara (vector of production activity levels). Uslov (1.15) je sasvim opravdan, budući da je vektor x nenegativan.

Druga strana koju čine potrošači, tražnju opisuje vektorom tražnje za dobrima, r^*, i to na sledeći način

$$r^* = Q(p^*) = Dp^* + d. \tag{1.16}$$

Pri tome, funkcija Q je afina (linearna) po promenljivoj p^*, što je zapravo vektor cena koju su konzumenti spremni da plate u zavisnosti od raspoloživih količina željenih dobara.

Ključnu ulogu u uspostavljanju tržišne ravnoteže igra uslov koji izjednačava (vektor) cenu koju su potrošači spremni da plate za tražena dobra, p^*, i (dualni) vektor marginalnih cena (cenu nove dodatne jedinice proizvoda) koji odgovara ograničenju (1.14) u sklopu ponude, odnosno zahtevamo

$$p^* = \pi^*. \tag{1.17}$$

Nakon što smo formulisali problem, cilj je isti prevesti u oblik LCP. Pri tome, x^* je optimalno rešenje problema opisanog sa (1.12) – (1.15) ako i samo ako postoji vektor v^* sa osobinom da

$$\begin{aligned} y^* &= c - M^T v^* - N^T \pi^* \geq 0, & x^* &\geq 0, & (y^*)^T x^* &= 0, \\ u^* &= -b + M x^* \geq 0, & v^* &\geq 0, & (u^*)^T v^* &= 0, \\ \delta^* &= -r^* + N x^* \geq 0, & \pi^* &\geq 0, & (\delta^*)^T \pi^* &= 0. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Zamenom izraza za vektor tražnje na osnovu (1.16) i primenjujući ravnotežni kriterijum (1.17) u sistemu (1.18) izvodimo oblik $LCP(q, A)$, gde su

$$q = \begin{bmatrix} c \\ -b \\ -d \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & -M^T & -N^T \\ M & 0 & 0 \\ N & 0 & -D \end{bmatrix}.$$

Jasno je da je rešenje datog problema zapravo vektor $[x^*, v^*, \pi^*]^T$.

2 Preliminarna tvrđenja

Čitaoca najpre upoznajemo sa notacijom koja je korišćena pri izradi rada, istovremeno pružajući uvid u definicije i teoreme neophodne za uspešno praćenje tematike.

Realne vektore dimenzije n označavaćemo sa $\mathbb{R}^n$ i pod pojmom vektora uvek ćemo podrazumevati vektor kolonu. Skup svih realnih matrica formata $m \times n$ označavamo sa $\mathbb{R}^{m,n}$. Jasno, pojam vektora i matrice lako se uopštava na slučaj kada su elementi istih kompleksni brojevi, i tada za skupove svih kompleksnih vektora dimenzije n, odnosno kompleksnih matrica formata $m \times n$ koristimo oznake $\mathbb{C}^n$ i $\mathbb{C}^{m,n}$, respektivno. Definicije i teoreme koje važe i za kompleksni slučaj biće formulisane u tom maniru, uz napomenu da je sa stanovišta ovog rada u primeni isključivo realna varijanta.

Posmatrajmo dve proizvoljne matrice istog formata, $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m,n}$. Podrazumevaćemo da su nejednakosti oblika $A\rho B$, $\rho \in \{>, \geq, <, \leq, =\}$ definisane po komponentama, to jest da je $A\rho B$ ako je ispunjeno $a_{ij}\,\rho\, b_{ij}$, za sve $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq n$. Matrica A je nenegativna (pozitivna) ako njeni elementi zadovoljavaju $a_{ij} \geq 0$ ($a_{ij} > 0$), za sve $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq n$. Notacija $|A|$ predstavlja apsolutnu vrednost matrice A i ona je, takođe, definisana po elementima matrice, $|A| = [|a_{ij}|]$, a transponovanu matricu za A obeležavamo sa A^T. Jasno je da se pomenute notacije bez problema odnose i na vektore (kao specijani slučaj matrica) u prostoru $\mathbb{R}^n$.

U nastavku uvodimo pojam vektorske norme definisane pomoću pozitivnog vektora.

Definicija 1 *Neka je $z \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan vektor sa pozitivnim komponentama. Tada je vektorska norma definisana pomoću pozitivnog vektora z data sa*

$$\|x\|_{(z)} = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{|x_i|}{z_i}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Sada se upoznajemo sa pojmom matrične norme indukovane ovom vektorskom normom.

Definicija 2 *Neka je $z \in \mathbb{R}^n$ vektor čije su sve komponente pozitivne. Matrična norma indukovana vektorskom normom definisanom pomoću pozitivnog vektora je*

$$\|A\|_{(z)} = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} \frac{|a_{ij}| z_j}{z_i}, \quad A \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Teoremu koja sledi navodimo bez dokaza, a njen smisao je da ukaže na odnos vektorske norme definisane pomoću pozitivnog vektora i njom indukovane matrične norme.

Teorema 1 *Neka su $z \in \mathbb{R}^n$, $z > 0$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. U opštem slučaju važi*

$$\|A\|_{(z)} \ge \|Az\|_{(z)},$$

no ako je $A \ge 0$, tada je

$$\|A\|_{(z)} = \|Az\|_{(z)}.$$

Skup svih karakterističnih korena kvadratne matrice A predstavlja njen spektar, $\sigma(A)$. Maksimalni karakteristični koren matrice po modulu predstavlja njen spektralni radijus $\rho(A) := \max_i |\lambda_i(A)|$. Izuzetno značajna činjenica koju ćemo frekventno koristiti i podrazumevati jeste odnos proizvoljne konzistentne matrične norme i spektralnog radijusa.

Teorema 2 *Za svaku konzistentnu matričnu normu $\|\cdot\|$ na $\mathbb{C}^{n,n}$ i svaku matricu $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ važi $\rho(A) \le \|A\|$.*

Dakle, sve konzistentne (a samim tim i prirodne) matrične norme locirane su na realnoj osi desno od spektralnog radijusa. Međutim, činjenica vredna pomena jeste da među njima uvek postoji prirodna matrična norma koja je proizvoljno blizu spektralnog radijusa, o čemu govori sledeća teorema, čiji dokaz ne navodimo.

Teorema 3 *Za svaku kvadratnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ i za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodna matrična norma $\|\cdot\|$ sa osobinom da je $\rho(A) \le \|A\| \le \rho(A) + \varepsilon$.*

Lema 1 *Neka su $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ takve da je $|A| \le B$. Tada je $\rho(A) \le \rho(B)$, što implicira da je $\rho(A) \le \rho(|A|)$.*

Dokaz: Razlikujemo dva slučaja, s obzirom da pretpostavke povlače da je $B \ge 0$. Ako je $B > 0$, tada na osnovu Peron-Frobenijusove teoreme (detaljnije u [20]) znamo da postoji vektor $x > 0$, takav da je $Bx = \rho(B)x$. S obzirom da je x pozitivan vektor, uzimajući vektorsku normu njime definisanu, i njom indukovanu matričnu zaključujemo da važi $\|B\|_{(x)} = \|Bx\|_{(x)} = \|\rho(B)x\|_{(x)} = \rho(B)\|x\|_{(x)} = \rho(B)$. Sa druge strane, $|A| \le B \Longrightarrow \|A\|_{(x)} = \||A|\|_{(x)} \le \|B\|_{(x)}$, na osnovu homogenosti, te monotonosti matrične norme (za nenegativne matrice). Konačno, zaključujemo da $\rho(A) \le \|A\|_{(x)} \le \|B\|_{(x)} = \rho(B)$. U slučaju da je $B \ge 0$, definišemo pomerenu matricu $B_\varepsilon = B + \varepsilon ee^T$, za neko $\varepsilon > 0$. Tada je $B_\varepsilon > 0$ ali i $|A| \le B < B_\varepsilon$, pa na osnovu prethodnog rezultata zaključujemo da je $\rho(A) \le \rho(B_\varepsilon)$. Neprekidnost spektralnog radijusa implicira $\rho(A) \leq \rho(B)$, kada $\varepsilon \to 0$. Primetimo, budući da važi $|A| \leq |A|$, sledi da je $\rho(A) \leq \rho(|A|)$. $\triangle$

LEMA 2 *Neka je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ nenegativna matrica. Ako postoje pozitivan vektor $x \in \mathbb{R}^n$ i pozitivan skalar α sa osobinom da je $Ax < \alpha x$, tada je $\rho(A) < \alpha$.*

DOKAZ: Neka je $A \geq 0$. Znajući da postoji $x > 0$ takvo da je $Ax < \alpha x$, zaključujemo da važi $0 \leq \alpha^{-1}Ax < x$. Posmatrajmo vektorsku normu definisanu pomoću datog pozitivnog vektora x, i njom indukovanu matričnu normu. Tada je $1 = \|x\|_{(x)} > \|\alpha^{-1}Ax\|_{(x)} = \alpha^{-1}\|Ax\|_{(x)} = \alpha^{-1}\|A\|_{(x)} \geq \alpha^{-1}\rho(A)$, koristeći monotonost vektorske norme (za nenegativne vektore), kao i jednakost matrične i vektorske norme za nenegativnu matricu. Napokon, $\rho(A) < \alpha$. $\triangle$

Specijalno birajući da je $\alpha = 1$, navodimo sledeću posledicu Leme 1.

POSLEDICA 1 *Neka je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ nenegativna matrica. Ako postoji pozitivan vektor $x \in \mathbb{R}^n$ sa osobinom da je $Ax < x$, tada je $\rho(A) < 1$.*

Konvergencija proizvoljnog niza matrica ka nula matrici može se okarakterisati konvergencijom brojnog niza normi tog proizvoljnog niza matrica ka nuli, o čemu svedoči naredno tvrđenje.

TEOREMA 4 *Neka je $\left\{A^{(k)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz matrica i neka je $\|\cdot\|$ proizvoljna matrična norma. Tada važi:*

$$\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \|A^{(k)}\| = 0.$$

Jedan od esencijalnih rezultata numeričke linearne algebre iz oblasti konvergencije nizova i redova matrica odnosi se na karakterizaciju konvergencije stepenog niza matrica ka nula matrici.

TEOREMA 5 *Za svaku kvadratnu matricu A važi*

$$\lim_{k\to\infty} A^k = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \rho(A) < 1.$$

DOKAZ: ($\Longrightarrow$) Neka stepeni niz matrica teži nula matrici, to jest $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$ i neka je $\|\cdot\|$ proizvoljna konzistentna matrična norma. Tada je, na osnovu Teoreme 4, $\lim\limits_{k\to\infty} \|A^k\| = 0$, odnosno postoji neko k, počev od kojeg je $\|A^k\| < 1$. Sa druge strane, pošto za svaku matricu A važi da je $\rho(A) \leq \|A\|$, sledi da je $(\rho(A))^k = \rho(A^k) \leq \|A^k\|$. Dakle, počev od nekog k, imamo da je $(\rho(A))^k < 1$, iz čega zaključujemo da mora biti $\rho(A) < 1$.
($\Longleftarrow$) Pretpostavimo da je $\rho(A) < 1$. Na osnovu Teoreme 3, postoji prirodna matrična norma za koju je $\|A\| < 1$, pa je $\lim\limits_{k\to\infty} \|A\|^k = 0$. Kako je $0 \leq \|A^k\| \leq \|A\|^k$, to sledi da je $\lim\limits_{k\to\infty} \|A^k\| = 0$, odakle, na osnovu Teoreme 4, zaključujemo da je i $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$. $\triangle$

U nastavku se podsećamo definicija nekih specijalnih klasa matrica. Pre svega, pažnju posvećujemo klasi strogo dijagonalno dominantnih matrica, koje opisuju veliki broj problema u praksi.

DEFINICIJA 3 *Matrica* $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ *naziva se strogo dijagonalno dominantna ili, kratko, SDD matrica, ako za svako* $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ *važi*

$$|a_{ii}| > r_i(A) := \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

Dalje se osvrćemo na definicije vezane za specijane znakovne strukture koje matrica može posedovati.

DEFINICIJA 4 *Za matricu* $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ *kažemo da je* Z *oblika ako su joj svi vandijagonalni elementi nepozitivni. Matrica je* Z^+ *oblika ako su joj dodatno svi dijagonalni elementi pozitivni.*

Za proizvoljnu regularnu matricu $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ kažemo da je *monotona* ako je $A^{-1} \geq 0$. S tim u vezi, uvodimo i pojam M-matrica, na sledeći način.

DEFINICIJA 5 *Matrica* $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ *koja je* Z *oblika zove se* M*-matrica ako je monotona, odnosno ukoliko je regularna i njena inverzna matrica nenegativna, tj.* $A^{-1} \geq 0$.

TEOREMA 6 *Matrica* $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ *koja je* Z *oblika je* M*-matrica ako i samo ako postoji pozitivan vektor* z*, takav da je* Az *pozitivan vektor.*

LEMA 3 *Neka su* $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ *M-matrice,* $D \in \mathbb{R}^{n,n}$ *pozitivna dijagonalna, a* $C \in \mathbb{R}^{n,n}$ *proizvoljna matrica. Tada važe sledeće implikacije:*

1. $A \leq B \Longrightarrow B^{-1} \leq A^{-1}$,

2. $A \leq C \leq D \Longrightarrow C$ *je* M*-matrica.*

DOKAZ:

1. Pretpostavimo da važi odnos $A \leq B$. S obzirom da matrice A i B pripadaju M-klasi, to su njihovi inverzi nenegativni. Množenje date nejednakosti najpre sa leve strane sa $A^{-1} \geq 0$, a potom i sa desne sa $B^{-1} \geq 0$, ne samo da čuva znak, već upravo proizvodi traženi odnos, $B^{-1} \leq A^{-1}$.

2. Neka je odnos triju matrica $A \leq C \leq D$. Dovoljno je pokazati da je C Z oblika, te da je regularna, sa nenegativnim inverzom. Kako je $D > 0$, a njeni vandijagonalni elementi nule, relacija $C \leq D$ obezbeđuje Z oblik. Sa druge strane, budući da je matrica A M-matrica, to znači da postoji $x > 0$ tako da je $Ax > 0$. Množeći nejednakost $A \leq C$ pozitivnim vektorom x, očuvavamo znak nejednakosti, pa zaključujemo da $0 < Ax \leq Cx$, što implicira da je C M-matrica. $\triangle$

Naročito interesantna klasa matrica fundamentalna za ovaj rad, sa uporištem u širokom spektru primena, svakako jeste klasa H-matrica. Naime, poznato je da se pojam H-matrica dobija uopštavanjem pojma M-matrica, i to na sledeći način.

Definicija 6 *Za proizvoljnu matricu* $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$*, njoj pridružena matrica* $\mathcal{M}(A) := [\mu_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ *definisana je sa*

$$\mu_{ij} := \begin{cases} |a_{ii}|, & i = j, \\ -|a_{ij}|, & i \neq j. \end{cases}$$

Primetimo da je prethodna definicija obezbedila Z oblik pridružene matrice, $\mathcal{M}(A)$, proizvoljne kvadratne kompleksne matrice A.

Definicija 7 *Matrica* A *naziva se* H*-matrica ako i samo ako je njoj pridružena matrica* $\mathcal{M}(A)$ M*-matrica, tj. ako je* $\mathcal{M}(A)$ *regularna i* $\mathcal{M}(A)^{-1} \geq 0$*.* H *matrica sa pozitivnim dijagonalnim elementima naziva se* H^+ *matrica.*

Numerička linearna algebra poznaje i kategoriju takozvanih generalizovano dijagonalno dominantnih matrica, koje reprezentuju uopštenje strogo dijagonalno dominantnih matrica. Štaviše, svaka H-matrica ujedno je i GDD, i obratno. Drugim rečima, reč je o terminima koji su sinonimi.

Definicija 8 *Matrica* $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ *naziva se generalizovano dijagonalno dominantna ili, kratko, GDD matrica, ako postoji pozitivan vektor* $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$*, takav da je*

$$|a_{ii}|x_i > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |x_j \quad \text{za svako } i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Proizvoljna realna kvadratna matrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ je simetrična ako važi da je $A = A^T$.

Definicija 9 *Realna matrica* A *naziva se pozitivno definitna ako za svaki realan vektor* $x \neq 0$ *važi da je* $x^T Ax > 0$*.*

Definicija 10 *Realna matrica* A *naziva se pozitivno semi-definitna ako za svaki realan vektor* x *važi da je* $x^T Ax \geq 0$*.*

Realne pozitivno (semi-)definitne matrice moguće je okarakterisati preko odgovarajućeg simetričnog dela. Naime, matrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ je pozitivno (semi-)definitna ako i samo ako je njen simetrični deo $\frac{1}{2}(A^T + A)$ pozitivno (semi-)definitna matrica.

Teorema 7 *Ako je matrica A H-matrica, tada važi:*

a) A *je regularna,*

b) $|A^{-1}| \leq \mathcal{M}(A)^{-1}$,

c) $\rho(|D|^{-1}|B|) < 1$, *pri čemu je* $A = D - B$ *i* $D = diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

Dokaz:

a) Ako pretpostavimo da je A H-matrica, tada postoji pozitivna dijagonalna matrica X koja skalira matricu A na SDD, takva da je AX SDD. Na osnovu regularnosti klase SDD zaključujemo da matrica AX mora biti regularna, što povlači regularnost matrice A.

b) Kako je A H-matrica, to znači da je $\mathcal{M}(A) = [\mu_{ij}]$ M-matrica, to jest $\mathcal{M}(A)$ je regularna i $\mathcal{M}(A)^{-1} \geq 0$. Ako su $A = [a_{ij}]$, $A^{-1} = [b_{ij}]$, tada

$$|AA^{-1}|_{ij} = \left|\sum_k a_{ik}b_{kj}\right|. \tag{2.1}$$

Takođe,

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{M}(A)|A^{-1}|\right)_{ij} &= \sum_k \mu_{ik}|b_{kj}| = |a_{ii}||b_{ij}| - \sum_{k\neq i}|a_{ik}||b_{kj}| \\ &\leq |a_{ii}||b_{ij}| - \left|\sum_{k\neq i} a_{ik}b_{kj}\right| \\ &\leq \left||a_{ii}||b_{ij}| - \left|\sum_{k\neq i} a_{ik}b_{kj}\right|\right| \\ &\leq \left|\sum_k a_{ik}b_{kj}\right|.\end{aligned} \tag{2.2}$$

S obzirom da je $E = AA^{-1}$, odnosno $E = |E| = |AA^{-1}|$, na osnovu (2.1) i (2.2) zaključujemo da je $E \geq \mathcal{M}(A)|A^{-1}|$. Kako je $\mathcal{M}(A)^{-1} \geq 0$, množeći ovu nejednakost sa leve strane sa $\mathcal{M}(A)^{-1}$ zaista dobijamo da je

$$|A^{-1}| \leq \mathcal{M}(A)^{-1}.$$

c) Neka je A H-matrica i $A = D - B$. To implicira da je $\mathcal{M}(A) = |D| - |B|$ M-matrica, odnosno da postoji vektor $z > 0$ sa osobinom da je $\mathcal{M}(A)z > 0$ odnosno $|D|z > |B|z$. Budući da je matrica $|D|$ regularna i pozitivna, množeći prethodnu nejednakost sa leve strane sa $|D|^{-1}$ dobijamo da je $z > |D|^{-1}|B|z$, a kako je matrica $|D|^{-1}|B|$ nenegativna, Posledica 1 implicira da je $\rho(|D|^{-1}|B|) < 1$. $\triangle$

Definicija 11 *Neka je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Ako postoje matrice $M, N \in \mathbb{R}^{n,n}$, pri čemu je M regularna, takve da je*

$$A = M - N, \tag{2.3}$$

*onda (2.3) zovemo **splitingom (razlaganjem)** matrice A.*

Razne kategorizacije splitinga matrice ponuđene su sledećom definicijom koja iste i sistematizuje.

Definicija 12 *Neka je $A = M - N$ spliting matrice A. On je:*

*a) **slabo regularan** ako je $M^{-1} \geq 0$ i $M^{-1}N \geq 0$,*

*b) **regularan** ako je $M^{-1} \geq 0$ i $N \geq 0$,*

*c) **konvergentan** ako je $\rho(M^{-1}N) < 1$,*

*d) M**-spliting** ako je M M-matrica i $N \geq 0$,*

*e) H**-spliting** ako je $\mathcal{M}(M) - |N|$ M-matrica,*

*f) H**-kompatibilan** ako je $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(M) - |N|$.*

Lema 4 *Neka je $A = M - N$ H-spliting. Tada su A i M H-matrice i važi da je $\rho(M^{-1}N) \leq \rho(\mathcal{M}(M)^{-1}|N|) < 1$, odnosno svaki H-spliting je konvergentan.*

Dokaz: Budući da posmatramo H-spliting matrice A, što po definiciji znači da je $\mathcal{M}(M) - |N|$ M-matrica, to znači da postoji $x > 0$ sa osobinom da je $(\mathcal{M}(M) - |N|)x > 0$. Drugim rečima, to implicira da je $\mathcal{M}(M)x > |N|x \geq 0$ (pošto je $|N| \geq 0$), pa je posledično i matrica $\mathcal{M}(M)$ M-matrica, odnosno M je H-matrica.

Ostaje još da pokažemo da je A H-matrica. Dovoljno je proveriti da je $\mathcal{M}(A)$ M-matrica. S obzirom da u opštem slučaju važi ocena operatora Ostrovskog (cf. [21]) koja glasi $\mathcal{M}(A \pm B) \geq \mathcal{M}(A) - |B|$, zaključujemo da je $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(M - N) \geq \mathcal{M}(M) - |N|$, a kako je $\mathcal{M}(M) - |N|$ po pretpostavci M-matrica, to povlači egzistenciju pozitivnog vektora x sa osobinom da je $(\mathcal{M}(M) - |N|)x > 0$. Međutim, tada je $\mathcal{M}(A)x \geq (\mathcal{M}(M) - |N|)x > 0$, što povlači da je $\mathcal{M}(A)$ M-matrica, odnosno A H-matrica.

Za drugi deo tvrđenja, iskoristimo činjenicu da, kako je $\mathcal{M}(M) - |N|$ M-matrica, to postoji pozitivan vektor x, sa osobinom da je $(\mathcal{M}(M) - |N|)x > 0$, odnosno, $\mathcal{M}(M)x > |N|x$. S obzirom da je M H-matrica, odnosno važi da je $\mathcal{M}(M)^{-1} \geq 0$, to je $x > \mathcal{M}(M)^{-1}|N|x$, stoga u svetlu Posledice 1 znamo da je $\rho(\mathcal{M}(M)^{-1}|N|) < 1$. Primetimo da je $|M^{-1}N| \leq |M^{-1}||N|$, pa na osnovu Teoreme 7, budući da je M H-matrica, sledi da je $|M^{-1}N| \leq \mathcal{M}(M)^{-1}|N|$. Primenom Leme 1, dobijamo da je $\rho(M^{-1}N) \leq \rho(\mathcal{M}(M)^{-1}|N|)$, čime je tvrđenje kompletirano. △

Lema 5 *Ako je $A = M - N$ H-kompatibilni spliting i ako je A H-matrica, tada je $A = M - N$ H-spliting pa samim tim i konvergentan.*

Dokaz: Neka je $A = M - N$ H-kompatibilni spliting, odnosno $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(M) - |N|$. Dodatno, ako pretpostavimo da je A H-matrica, to povlači da je $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(M) - |N|$ M-matrica, odnosno da je spliting H, dok na osnovu prethodne leme znamo da je svaki H-spliting ujedno i konvergentan. $\triangle$

3

Iterativni postupci za rešavanje sistema linearnih jednačina

U ovom poglavlju upoznajemo se sa iterativnim postupcima za rešavanje sistema linearnih jednačina, ističemo prednosti istih nad klasičnim, direktnim postupcima u realnim primenama, a posebnu pažnju posvećujemo njihovim relaksacionim varijantama.

Sistemi linearnih jednačina zauzimaju centralno mesto u univerzumu linearne algebre, s obzirom da je jedan od osnovnih problema svih grana primenjene matematike upravo analiza i rešavanje sistema određenog broja jednačina u kojem figuriše izvestan broj nepoznatih. Prvi pisani trag o problematici određivanja rešenja koje istovremeno zadovoljava više jednačina nalazimo na samom početku 8. poglavlja drevnog starokineskog rukopisa *Chiu-chang Suan-shu - Devet poglavlja umetnosti matematike*, iz perioda oko 3. veka pre nove ere. Od tada pa sve do danas, upravo su praktične primene bile te koje su iznedrile sisteme linearnih jendačina, te opredelile i podstakle razvoj postupaka za njihovo rešavanje. Rezultat čiji smo i mi svedoci, jesu brojne osmišljene metode, sa akcentom na kontinuiranom usavršavanju postojećih, ali i snažnom podstreku za razvoj novih. Postupci za rešavanje sistema linearnih jednačina klasifikovani su u dve, konceptualno i suštinski suprotstavljene kategorije – direktne i iterativne.

Neka je data matrica $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ i vektor $b \in \mathbb{R}^m$. Pod sistemom m linearnih jednačina sa n nepoznatih podrazumevamo svaku konjunkciju jednačina oblika

$$S : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. , \tag{3.1}$$

pri čemu su koeficijenti $a_{ij} \in \mathbb{R}$ elementi matrice sistema A, $b_i \in \mathbb{R}$ slobodni koeficijenti, dok su $x_j \in \mathbb{R}$ nepoznate koje je neophodno odrediti, $1 \leq i \leq m$; $1 \leq j \leq n$. Sistem S se u matričnoj reprezentaciji zapisuje na sledeći način

$$Ax = b, \quad \text{odnosno} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

a njegovo rešavanje podrazumeva nalaženje vektora $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ koji zadovoljava matričnu jednakost (3.2), odnosno sistem S definisan sa (3.1). Sa stanovišta implementacije, u praksi se najčešće podrazumevaju sistemi čije su matrice kvadratne i regularne, što implicira jedinstvenost rešenja. Pod ovim elementarnim pretpostavkama, koje garantuju postojanje inverza matrice sistema, sa teorijskog aspekta, rešenje sistema možemo odrediti tako što ćemo pomnožiti jednakost (3.2) matricom A^{-1} sa leve strane,

$$x = A^{-1}b,$$

i time problem (3.1), odnosno (3.2), zameniti računski zahtevnijim, vremenski skupljim – problemom određivanja inverza matrice A.

Fundamentalni rezultat u vezi sa rešavanjem sistema linearnih jednačina sa proizvoljnom, u opštem slučaju pravougaonom matricom sistema, zahvaljujući širokoj popularizaciji, dao je Johann Carl Friedrich Gauss. Najpoznatiji postupak, nazvan njemu u čast *Gausova metoda eliminacije*, sastoji se u transformaciji matrice sistema na gornju trougaonu, a potom se rešenja dobijaju jednostavnom "zamenom unatrag". Mi ćemo, od sad pa na dalje, podrazumevati kvadratne sisteme sa regularnom matricom, što obezbeđuje egzistenciju i jedinstvenost rešenja. I premda direktne metode do rešenja stižu nakon konačno mnogo koraka, dimenzije samog sistema, struktura matrica i memorijsko-računske limitacije često govore u prilog nepraktičnosti pomenutih metoda. Ako pored nepreciznosti u smislu grešaka zaokruživanja, uzmemo u obzir i greške merenja, postavlja se elementarno pitanje: *U kojoj meri je sračunato rešenje zaista tačno?*

Za razliku od direktnih, iterativni postupci odustaju od nalaženja tačnog rešenja. Osnovna ideja iterativnih metoda jeste računanje i formiranje niza približnih rešenja, takozvanih iteracija, koje će, pod izvesnim uslovima, konvergirati ka tačnom rešenju $x_\star$ sistema, za koje znamo da postoji i da je jedinstveno, zbog pretpostavke o regularnosti matrice A. Iterativni niz koji biva generisan na osnovu datog algoritma (iterativnog pravila) je zapravo niz aproksimacija tačnog rešenja, $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$, pri čemu je $x^{(0)}$ proizvoljni startni vektor, koji je najčešće upravo nula vektor. Cilj iterativnih metoda jeste smanjenje greške, odnosno udaljenosti aproksimacije od tačnog rešenja u svakom koraku. Superiornost iterativnih metoda u odnosu na direktne oslikava se i u činjenici što se započeto računanje približnih rešenja u svakom momentu može obustaviti, i startovati sa novim početnim vektorom. To je dozvoljeno zbog činjenice da je konvergencija iterativnog postupka u potpunosti okarakterisana osobinama iterativne matrice, koja je nezavisna od iteracija, zbog čega izbor startnog vektora ne utiče na konvergenciju.

3.1 Opšti iterativni postupak

Upravo zbog uočenih prednosti i široke primene iterativnih metoda, u nastavku posebnu pažnju posvećujemo okosnici ovih metoda – opštem iterativnom postupku. Najznačajniji rezultat koji ćemo istaći jeste karakterizacija njegove konvergencije, pri čemu je ista u potpunosti određena osobinama iterativne matrice.

Neka je $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ regularna matrica i $b \in \mathbb{C}^n$. Posmatrajući sistem linearnih jednačina u matričnom zapisu

$$Ax = b, \tag{3.3}$$

jedan od načina da formiramo iterativni postupak za njegovo rešavanje jeste da matricu A zapišemo u obliku

$$A = M - N, \text{ pri čemu je } M \text{ regularna matrica,}$$

što nazivamo *razlaganjem (splitingom)* matrice A. S obzirom na uočeno razlaganje matrice A, sistem (3.3) se ekvivalentno može predstaviti kao:

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b, \tag{3.4}$$

što je zapravo zapis sistema u formi nepokretne tačke. Ovaj reprezentacija je pogodna, jer njen oblik prirodno generiše odgovarajući iterativni postupak za rešavanje

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b, \quad k \geq 0, \tag{3.5}$$

pri čemu startni vektor $x^{(0)}$ biramo proizvoljno. Metod (3.5) naziva se *opšti iterativni postupak*, a fundamentalni rezultat o njegovoj konvergenciji otkriva naredna teorema.

TEOREMA 8 *Neka je $A = M - N$ i neka je M regularna matrica. Tada iterativni postupak (3.5) za svako $x^{(0)}$ konvergira ka tačnom rešenju $x_\star$ sistema $Ax = b$ ako i samo ako je $\rho(M^{-1}N) < 1$.*

DOKAZ:

Zarad jednostavnosti zapisa, predlažemo sledeću notaciju

$$T := M^{-1}N, \qquad d := M^{-1}b, \qquad f^{(k)} := x^{(k)} - x_\star,$$

što implicira da je opšti iterativni postupak

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + d, \quad k \geq 0.$$

Vektor $f^{(k)}$ predstavlja $k-$ti rezidual. Tada je jasno da važi

$$f^{(0)} = x^{(0)} - x_\star,$$

$$f^{(1)} = x^{(1)} - x_\star = (Tx^{(0)} + d) - (Tx_\star + d) = T(x^{(0)} - x_\star) = Tf^{(0)},$$
$$f^{(2)} = x^{(2)} - x_\star = (Tx^{(1)} + d) - (Tx_\star + d) = T(x^{(1)} - x_\star) = Tf^{(1)} = T^2 f^{(0)},$$
$$\vdots$$
$$f^{(k)} = x^{(k)} - x_\star = T(x^{(k-1)} - x_\star) = Tf^{(k-1)} = T^k f^{(0)}. \tag{3.6}$$

($\Leftarrow$) Neka je $\rho(T) < 1$. Pozivajući se na Teoremu 5, zaključujemo da je $\lim\limits_{k\to\infty} T^k = 0$, pa, kako je $f^{(0)}$ nezavisno od k, (3.6) implicira da je $\lim\limits_{k\to\infty} f^{(k)} = 0$, odnosno sledi da $\lim\limits_{k\to\infty} (x^{(k)} - x_\star) = 0$, dakle $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x_\star$.
($\Rightarrow$) Neka je $\lim\limits_{x\to\infty} x^{(k)} = x_\star$ za svaki startni vektor $x^{(0)}$. Tada je

$$0 = \lim_{k\to\infty} f^{(k)} = \lim_{k\to\infty} T^k f^{(0)} \quad \text{za svako} \;\; f^{(0)}.$$

Neka je i proizvoljan indeks kolone matrice T i neka je $f^{(0)} = e^i$, pri čemu je e^i $i-$ti vektor standardne baze ($i-$ta kolona jedinične matrice). Tada iz $\lim\limits_{k\to\infty} T^k e^i = 0$ zaključujemo da $i-$ta kolona matrice T^k teži nula vektoru. S obzirom da ovo važi za svako i, sledi da matrica T^k teži nula matrici. Međutim, po Teoremi 5, to je potreban i dovoljan uslov da je $\rho(T) < 1$. △

Komentar 1 *Spektralni radijus u potpunosti daje odgovor na pitanje o konvergenciji, dok to nije slučaj sa konzistentnim matričnim normama. Ako je neka konzistentna matrična norma iterativne matrice manja od 1, tada je to dovoljan uslov za konvergenciju (za svaki startni vektor), no ako je ona veća ili jednaka od 1, to ne daje dovoljne informacije za zaključak.*

Posledica 2 *Ako je $A = M - N$ i M regularna matrica, takva da je za neku konzistentnu matričnu normu $\|M^{-1}N\| < 1$, onda iterativni postupak (3.5) za svako $x^{(0)}$ konvergira ka tačnom rešenju $x_\star$ sistema $Ax = b$.*

Od sad pa na dalje, pod *standardnim razlaganjem* matrice A, oblika

$$A = D - L - U,$$

ćemo podrazumevati razlaganje na njen dijagonalni (D), strogo donji trougaoni (L) i strogo gornji trougaoni deo (U). Drugim rečima

$$D := diag(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}),$$

$$(L)_{ij} := \begin{cases} -a_{ij} & \text{za} \quad i > j, \\ 0 & \text{za} \quad i \leq j, \end{cases} \qquad (U)_{ij} := \begin{cases} -a_{ij} & \text{za} \quad i < j, \\ 0 & \text{za} \quad i \geq j. \end{cases}$$

Takođe, podrazumevaćemo da matrica A ima nenula dijagonalne elemente.

Jakobijev iterativni postupak

Ako u ulozi matrice M biramo matricu D, uz osvrt da je matrica D dijagonalna i regularna (jer su svi dijagonalni elementi matrice A različiti od nule), iterativni postupak (3.5) postaje

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b, \quad k \geq 0, \quad x^{(0)} \text{ proizvoljno}, \tag{3.7}$$

i naziva se *Jakobijev iterativni postupak*.

Jakobijev iterativni postupak najpoznatiji je predstavnik klase *postupaka zajedničkog koraka*, pri čemu se za računanje komponenti nove, $(k+1)-$ve iteracije, koriste isključivo već sračunate komponente stare, $k-$te iteracije. Kako je u pitanju specijalnan slučaj opšteg iterativnog postupka, konvergencija postupka (3.7) je posledica Teoreme 8.

Teorema 9 *Jakobijev iterativni postupak (3.7) za svako $x^{(0)}$ konvergira ka tačnom rešenju $x_\star$ sistema $Ax = b$ ako i samo ako je $\rho(D^{-1}(L+U)) < 1$.*

Gaus-Zajdelov iterativni postupak

Ako sada, pak, u ulozi matrice M biramo matricu $D - L$, koja je donja trougaona i regularna (pod pretpostavkom da su svi dijagonalni elementi matrice A nenula), pravilo (3.5) postaje

$$x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-L)^{-1}b, \quad k \geq 0, \quad x^{(0)} \text{ proizvoljno}, \tag{3.8}$$

i poznato je pod nazivom *Gaus-Zajdelov iterativni postupak*. Ovaj postupak pripada klasi takozvanih *postupaka pojedinačnog koraka*, pri čemu implementira ažuriranje svih sračunatih komponenti, tako da pri određivanju komponenti nove iteracije koristi već sračunate komponente te iste iteracije. Primenjujući rezultat Teoreme 8 na slučaj postupka definisanog sa (3.8), dobijamo sledeći potreban i dovoljan uslov za njegovu konvergenciju.

Teorema 10 *Gaus-Zajdelov iterativni postupak (3.8) za svako $x^{(0)}$ konvergira ka tačnom rešenju $x_\star$ sistema $Ax = b$ ako i samo ako je $\rho((D-L)^{-1}U) < 1$.*

Poznato je da je pripadnost matrice sistema klasi SDD odnosno H-matrica uslov koji garantuje globalnu konvergenciju kako Jakobijevog, tako i Gaus-Zajdelovog iterativnog postupka.

3.2 Relaksacioni postupci

Videli smo, u prethodnoj sekciji, da je konvergencija iterativnih postupaka u potpunosti okarakterisana spektralnim radijusom iterativne matrice. Preciznije, postupak je konvergirao za svaki startni vektor ka tačnom rešenju sistema ako i samo ako je spektralni radijus iterativne matrice bio manji od 1. Pri tome, razlaganje matrice sistema i sama iterativna matrica bile su konstantne i nezavisne od iteracije. Ako ipak dozvolimo da one zavise od jednog ili više parametara, pri tome i dalje nezavisne od iteracije, tada se odgovarajući iterativni postupci nazivaju *relaksacioni*, a parametri koji u njima figurišu su *relaksacioni* parametri. U pogledu efikasnosti, zna se da brzina konvergencije iterativnog postupka zavisi od veličine spektralnog radijusa iterativne matrice $\mathcal{B}$, i da je određena vrednošću $-\ln\rho(\mathcal{B})$.

Postupci sa kojima smo se upoznali do sada bili su zasnovani na sledećem principu. Nova, $(k+1)-$va iteracija biva sračunata tako što se stara, $k-$ta iteracija, uveća za iznos korekcije $x^{(k+1)}-x^{(k)}$. Ono što karakteriše relaksacione metode jeste ideja na kojoj počivaju, a koja se sastoji u tome da se sračunata korekcija, pre nego što biva dodata na staru iteraciju, relaksira, odnosno pomnoži nenula relaksacionim parametrom, $\omega \neq 0$.

Najpre ćemo se osvrnuti na dobro poznate jednoparametarske familije postupaka relaksacije, *JOR* i *SOR*, kao generalizacije Jakobijevog i Gaus-Zajdelovog iterativnog postupka, respektivno. Saznaćemo koji su to kriterijumimi izbora relaksacionog parametra koji garantuju konvergenciju ovih metoda, a ovu sekciju privodimo kraju upoznajući se i sa *AOR* postupkom, kao predstavnikom dvoparametarskih postupaka relaksacije.

JOR - postupak Jakobijeve relaksacije

Jakobijeva relaksacija (eng. *Jacobi overrelaxation*), ili skraćeno *JOR* metod, je generalizacija Jakobijevog postupka u sledećem smislu. Nakon sračunate iteracije $x^{(k)}$, naredna, $x^{(k+1)}$, se kod Jakobijevog postupka formira kao

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + (x^{(k+1)} - x^{(k)}), \quad \text{gde je } \; Dx^{(k+1)} = (L+U)x^{(k)} + b,$$

dok *JOR* postupak do nove iteracije dolazi sledećim putem

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(x^{(k+1)} - x^{(k)}),$$

pri čemu je $\omega \neq 0$. Izraz koji otkriva način formiranja *JOR* iterativne matrice je

$$\mathcal{L}_{JOR}(A,\omega) := (1-\omega)E + \omega D^{-1}(L+U),$$

a do istog se može doći ako u opštem iterativnom postupku, (3.5), u ulogama matrica koje čine razlaganje matrice sistema, A, posmatramo, redom,

$$M = \frac{1}{\omega} D, \qquad N = \left(1 - \frac{1}{\omega}\right) D + L + U.$$

Spoznajući da je *JOR* postupak zapravo specijalan slučaj opšteg iterativnog postupka, potreban i dovoljan uslov za njegovu konvergenciju moguće je formulisati tvrđenjem koje predstavlja odgovarajuću adaptaciju Teoreme 8 u svetlu izbora matrica M i N.

Teorema 11 *JOR postupak za svako $x^{(0)}$ konvergira ka tačnom rešenju $x_\star$ sistema $Ax = b$ ako i samo ako je $\rho(\mathcal{L}_{JOR}(A, \omega)) < 1$.*

SOR - postupak sukcesivne relaksacije

SOR postupak (akronim od *successive overrelaxation*) predstavlja generalizaciju Gaus-Zajdelovog postupka, a zasnovan je na sličnom principu po kojem je *JOR* generalizovao Jakobijev postupak. Naime, nakon iteracije $x^{(k)}$, naredna se kod Gaus-Zajdelovog postupka formira kao

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + (x^{(k+1)} - x^{(k)}), \quad \text{gde je} \quad Dx^{(k+1)} = Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + b,$$

a kod *SOR* postupka imamo da je

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(x^{(k+1)} - x^{(k)}),$$

uz ograničenje $\omega \neq 0$. Takođe, ako u (3.5) biramo

$$M = \frac{1}{\omega}(D - \omega L), \qquad N = \left(\frac{1}{\omega} - 1\right)(D - \omega L) + (1 - \omega)L + U,$$

lako izvodimo oblik *SOR* iterativne matrice

$$\mathcal{L}_{SOR}(A, \omega) := (D - \omega L)^{-1}\Big((1 - \omega)D + \omega U\Big).$$

Uz učinjene izbore matrica M i N, kao i kod *JOR* postupka, i na ovom mestu navodimo rezultat o konvergenciji.

Teorema 12 *SOR postupak za svako $x^{(0)}$ konvergira ka tačnom rešenju $x_\star$ sistema $Ax = b$ ako i samo ako je $\rho(\mathcal{L}_{SOR}(A, \omega)) < 1$.*

Podsetimo se i činjenice da izbor $\omega \notin (0, 2)$ povlači da ni *JOR* ni *SOR* postupak ne konvergiraju za svaki startni vektor ka tačnom rešenju sistema. Takođe, dovoljni uslovi za konvergenciju oba postupka jesu da je matrica sistema SDD odnosno H, i da je $\omega \in (0, 1]$.

AOR - postupak ubrzane relaksacije

Koncept ubrzane relaksacije u naučne tokove uveo je Hadjidimos [16]. U svom radu iz 1978, Hadjidimos je ponudio teorijski okvir za postupke ubrzane relaksacije, koji su, suštinski, dvoparametarsko uopštenje *SOR* iterativnog postupka, pri čemu iterativna matrica zavisi od relaksacionog parametra (ω) i još jednog, dodatnog, parametra ubrzanja (σ).

Ako posmatramo sistem oblika $Ax = b$, i pretpostavimo standardno razlaganje matrice sistema, $A = D - L - U$, tada je iterativni postupak koji definiše *AOR* metod dat na sledeći način

$$x^{(k+1)} = \mathcal{L}_{AOR}(A, \sigma, \omega)x^{(k)} + d_{AOR}(b, \sigma, \omega), \quad k \geq 0,$$

gde su

$$\mathcal{L}_{AOR}(A, \sigma, \omega) = (D - \sigma L)^{-1} \left((1 - \omega)D + (\omega - \sigma)L + \omega U\right),$$

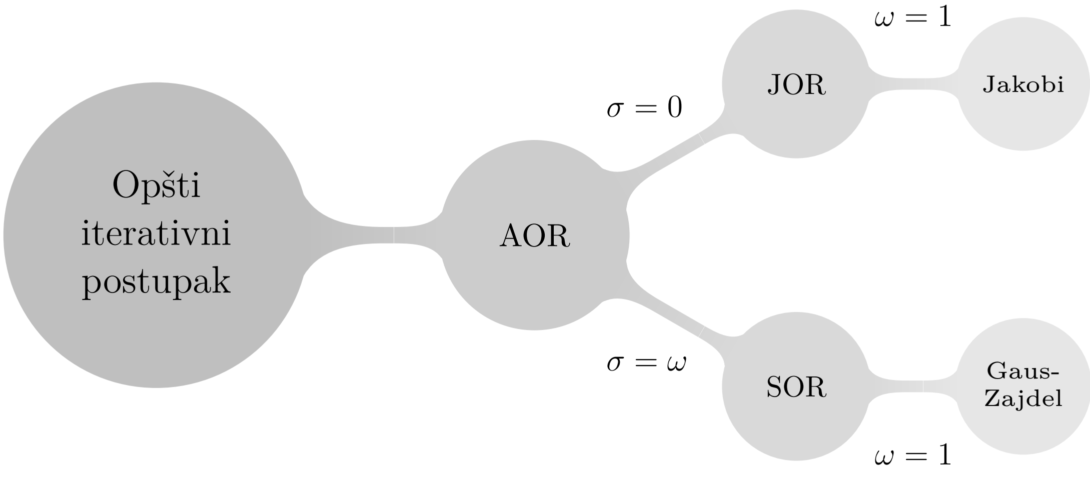
$$d_{AOR}(b, \sigma, \omega) = \omega(D - \sigma L)^{-1}b.$$

Očigledno je da se *AOR* postupak može posmatrati i kao specijalan slučaj opšteg iterativnog postupka (3.5), za izbor matrica

$$M = \frac{1}{\omega}(D - \sigma L), \qquad N = \left(\frac{1}{\omega} - 1\right)(D - \sigma L) + (1 - \sigma)L + U.$$

Jasno, kao i za postupke do sada, i njegova konvergencija se može okarakterisati preko svojstava iterativne matrice.

Teorema 13 *AOR postupak za svako $x^{(0)}$ konvergira ka tačnom rešenju $x_\star$ sistema $Ax = b$ ako i samo ako je $\rho(\mathcal{L}_{AOR}(A, \sigma, \omega)) < 1$.*



Slika 3.1: Odnos iterativnih postupaka

Varijante *AOR* postupka kao i njihov odnos za specifične izbore parametara σ i ω ilustrovane su dijagram šemom 3.1. U nastavku prezentujemo rezultat, cf. [10], koji daje ocenu spektralnog radijusa iterativne matrice *AOR* postupka sa gornje strane.

TEOREMA 14 *Neka je $A = D - L - U$ standardno razlaganje matrice A čiji su svi dijagonalni elementi različiti od nule, i za koju su, za svako $i = 1, 2, \ldots, n$ definisane sledeće veličine*

$$l_i = r_i(D^{-1}L) \qquad i \qquad u_i = r_i(D^{-1}U).$$

Ako je $1 - |\sigma|l_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$, tada važi ocena

$$\rho(\mathcal{L}_{AOR}(A, \sigma, \omega)) \leq \max_i \frac{|1-\omega| + |\omega - \sigma|l_i + |\omega|u_i}{1 - |\sigma|l_i}.$$

DOKAZ: Po definiciji spektralnog radijusa, potrebno je i dovoljno pokazati da je maksimalni karakterističan koren iterativne matrice *AOR* postupka, uzet po modulu, manji ili jednak od definisane veličine. Ekvivalentno, pokazujemo da proizvoljni karakteristični koren date matrice zadovoljava uočeno svojstvo. Dokaz teoreme baziramo na principu svodjenja na kontradikciju.
Pretpostavimo suprotno, da postoji karakteristični koren λ matrice $\mathcal{L}_{AOR}(A, \sigma, \omega)$, takav da je

$$|\lambda| > \max_i \frac{|1-\omega| + |\omega - \sigma|l_i + |\omega|u_i}{1 - |\sigma|l_i},$$

što je ekvivalentno sa

$$|\lambda| > \frac{|1-\omega| + |\omega - \sigma|l_i + |\omega|u_i}{1 - |\sigma|l_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Imajući u vidu pretpostavku o znaku imenioca izraza sa desne strane, nakon kraćih analiza dobijamo da, za $i = 1, 2, \ldots, n$, važi sledeći lanac nejednakosti

$$\begin{aligned} |\lambda - 1 + \omega| &\geq ||\lambda| - |1-\omega|| \\ &\geq |\lambda| - |1-\omega| \\ &> |\omega - \sigma|l_i + |\lambda\sigma|l_i + |\omega|u_i \\ &\geq |\omega - \sigma + \lambda\sigma|l_i + |\omega|u_i \\ &= |\omega + \sigma(\lambda - 1)|l_i + |\omega|u_i. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Definišući pomoćnu matricu

$$C := (\lambda - 1 + \omega)D - (\omega + \sigma(\lambda - 1))L - \omega U,$$

relacije (3.9) impliciraju da matrica $D^{-1}C$, a samim tim i C, pripada klasi *SDD*, što obezbeđuje njenu regularnost. Sa druge strane, s obzirom da je λ karakteristični koren matrice $\mathcal{L}_{AOR}(A, \sigma, \omega)$, sledi da je

$$det(\lambda E - \mathcal{L}_{AOR}(A, \sigma, \omega)) = 0.$$

Imajući u vidu da

$$\begin{aligned}\lambda E - \mathcal{L}_{AOR}(A,\sigma,\omega) &= \lambda(D-\sigma L)^{-1}(D-\sigma L) - (D-\sigma L)^{-1}\left((1-\omega)D + (\omega-\sigma)L + \omega U\right)\\ &= (D-\sigma L)^{-1}\left(\lambda(D-\sigma L) - (1-\omega)D - (\omega-\sigma)L - \omega U\right)\\ &= (D-\sigma L)^{-1}\left((\lambda - 1 + \omega)D - (\omega + \sigma(\lambda-1))L - \omega U\right)\\ &= (D-\sigma L)^{-1}C,\end{aligned}$$

te da je determinanta proizvoda zapravo proizvod determinanti, to je

$$0 = det(\lambda E - \mathcal{L}_{AOR}(A,\sigma,\omega)) = det((D-\omega L)^{-1})det(C),$$

odakle na osnovu regularnosti matrice $(D-\omega L)^{-1}$ zaključujemo da je matrica C singularna, što je kontradikcija. △

Teorema 15 *Neka je $A = D - L - U$ standardno razlaganje matrice sistema koja pripada klasi SDD. Dalje, posmatrajmo iterativnu matricu SOR postupka sa parametrom σ, $\mathcal{L}_{AOR}(A,\sigma,\sigma)$, i veličine date sa*

$$l_i = r_i(D^{-1}L), \qquad u_i = r_i(D^{-1}U),$$

$$p = \frac{2\sigma}{1+\rho(\mathcal{L}_{AOR}(A,\sigma,\sigma))}, \qquad s = \frac{2}{1+\rho\left(|D|^{-1}(|L|+|U|)\right)},$$

$$t = \frac{2}{1+\max_i(l_i+u_i)}.$$

Tada AOR postupak konvergira za svaki startni vektor $x^{(0)}$ ako parametri σ i ω zadovoljavaju

$$0 \le \sigma < s, \qquad 0 < \omega < \max\{p,t\}$$

ili

$$0 < \omega < t, \qquad \max_i \frac{-\omega(1-l_i-u_i) + 2\max\{0,\omega-1\}}{2l_i} < \sigma < 0$$

ili

$$0 < \omega < t, \qquad t \le \sigma < \min_i \frac{2\min\{0,1-\omega\} + \omega(1+l_i-u_i)}{2l_i}.$$

Suština prethodne teoreme je u sledećem. Pod pretpostavkom da je A u klasi SDD, te da su parametri AOR iterativne matrice izabrani na jedan od ponuđenih načina, tada su

$$1 - |\sigma| l_i > 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n,$$

i

$$\max_i \frac{|1-\omega| + |\omega-\sigma| l_i + |\omega| u_i}{1 - |\sigma| l_i} < 1,$$

pa je, na osnovu Teoreme 14, $\rho(\mathcal{L}_{AOR}(A,\sigma,\omega)) < 1$, što je potreban i dovoljan uslov za konvergenciju AOR postupka.

Ostaje još da ustanovimo pod kojim uslovima AOR postupak konvergira ukoliko je matrica sistema H-matrica. Ako A pripada klasi H, to znači da postoji pozitivna dijagonalna matrica X, sa osobinom da je AX SDD. S obzirom da dijagonalna matrica množi sa leve strane tako što skalira vrste, to je i $X^{-1}AX$ takođe SDD. Štaviše, matrice A i $X^{-1}AX$ su slične. Međutim, nije teško uočiti i da su njima odgovarajuće iterativne matrice AOR postupka takođe slične, budući da važi odnos

$$\mathcal{L}_{AOR}(X^{-1}AX, \sigma, \omega) = X^{-1}\mathcal{L}_{AOR}(A, \sigma, \omega)X,$$

što povlači

$$\rho(\mathcal{L}_{AOR}(X^{-1}AX, \sigma, \omega)) = \rho(\mathcal{L}_{AOR}(A, \sigma, \omega)). \tag{3.10}$$

Teorema 16 *Neka matrica sistema A, sa standardnim razlaganjem $A = D - L - U$, pripada klasi H, pri čemu je X njena skalirajuća na SDD. Ako je izbor parametara σ i ω učinjen kao u Teoremi 15, a za $i = 1, 2, \ldots, n$*

$$l_i = r_i(X^{-1}D^{-1}LX) \qquad i \qquad u_i = r_i(X^{-1}D^{-1}UX),$$

tada AOR postupak konvergira za svaki startni vektor $x^{(0)}$.

Dokaz: Primenom rezultata Teoreme 15 na matricu $X^{-1}AX$ zaključujemo da za dozvoljen izbor parametara imamo obezbeđenu konvergenciju, to jest da je ispunjeno $\rho(\mathcal{L}_{AOR}(X^{-1}AX, \sigma, \omega)) < 1$, pa u svetlu relacije (3.10) tvrđenje sledi. △

4

Iterativni postupci za rešavanje problema linearne komplementarnosti

Sekcija pred nama predstavlja glavni deo ovog rada. Reč je o iterativnim metodama za numeričko rešavanje problema linearne komplementarnosti koje su, imajući u vidu širok dijapazon praktičnih primena, izuzetno atraktivna tema. Stoga, bez intencije da umanjimo njihov značaj, poglavlja za nama osmišljena su sa namerom da čitaoca upoznaju sa esencijalnim alatima numeričke linearne algebre, te da nas na što koncizniji i pitkiji način pripreme za uspešno razumevanje teorijskih osnova koje slede.

O praktičnoj važnosti problema linearne komplementarnosti svedoče raznolike primene u realističnim modelima. Sistemi kako tehničkih i prirodnih ali i društvenih nauka, sfere inženjerstva i modeliranja generalno, u kojima međudejstva materije ili, pak, interakcije ekonomskih subjekata na tržištu bivaju opisane matematičkim modelima optimizacionih problema, sasvim prirodno produkuju probleme koji alatima numeričke optimizacije efikasno bivaju transformisani u zapis *LCP*. Formalna postavka predstavlja samo delić slagalice na putu ka uspešnom razumevanju pojava i donošenju odluka. Drugi, nikako manje bitan aspekt predstavlja analiza rešivosti, a potom, pod uslovom da ona daje potvrdan odgovor, i analiza broja rešenja posmatranog problema. Treći, ne manje važan deo je analiza stabilnosti i dobre uslovljenosti, ali se time nećemo baviti u ovom radu. Pre nego što se posvetimo iterativnim metodama za rešavanje problema linearne komplementarnosti, podsetićemo se rezultata do kojeg su došli Bai i Evans, cf. [3], koji govori o tome da je pripadnost matrice sistema klasi H-matrica sa pozitivnim elementima na glavnoj dijagonali (H_+ matrica) dovoljan uslov koji obezbeđuje egzistenciju i jedinstvenost rešenja pomenutog problema.

Teorema 17 *Neka je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ H_+ matrica. Tada postoji rešenje $z_\star$ za $LCP(q, A)$ i ono je jedinstveno.*

Pretpostavka da je matrica sistema A problema $LCP(q, A)$ iz klase H_+ matrica nije previše restriktivna, s obzirom da primene u praksi kao takve često generišu matrice sa pomenutom osobinom.

4.1 Modulske metode zasnovane na splitinzima

Problematika rešivosti, kao i algoritmi za određivanje rešenja *LCP*, prisutni su u svetu numeričke linearne algebre kao česta i inspirativna tema. Pa ipak, prekretnica u načinu na koji se ovom problemu pristupalo desila se onog trenutka kada je ponuđena ekvivalentna forma zapisa *LCP* u obliku *jednačina sa apsolutnim vrednostima* (*absolute value equations - AVE*) [22]. Ono što je ovaj rezultat svrstalo u kategoriju prvoklasnih pristupa jeste činjenica da se problem linearne komplementarnosti zapravo može zapisati u formi jednačine nepokrente tačke u kojoj figuriše i apsolutna vrednost nepoznatog vektora. Pri tome nije teško proveriti da su nenegativni vektori $|x| \pm x$, za proizvoljno $x \in \mathbb{R}^n$, međusobno ortogonalni, a znamo da se problem $LCP(q, A)$ sastoji u pronalasku nenegativnih vektora r i z, koji će ispuniti svojstvo ortogonalnosti, pri čemu su q i A unapred dati. Posledica je eminentna, budući da zapis linearnog sistema u formi fiksne tačke prirodno generiše iterativni postupak za rešavanje. Lepota novog pristupa ogleda se u činjenici da svet numeričke linearne algebre poznaje dovoljan broj iterativnih metoda za rešavanje sistema linearnih jednačina koji su potekli upravo iz zapisa sistema u formi nepokretne tačke, te da se isti vrlo elegantno mogu adaptirati na novi problem, sa ciljem identifikacije rešenja. Iterativne metode ovog tipa razvio je Zhong-Zhi Bai i nazvao ih je *modulskim iterativnim metodama za LCP zasnovanim na splitinzima matrice sistema* (*modulus-based matrix splitting iteration methods for linear complementarity problems*) [2].

Teorema 18 *Posmatrajmo spliting matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ dat sa $A = M - N$. Neka su $\Omega_1, \Omega_2 \geq 0$ i $\Omega, \Gamma > 0$ kvadratne dijagonalne matrice reda n, pri čemu je $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$. Za $LCP(q, A)$ važe sledeći iskazi:*

i) Ako je (r, z) rešenje za $LCP(q, A)$, tada vektor $x = \frac{1}{2}(\Gamma^{-1} z - \Omega^{-1} r)$ zadovoljava implicitnu jednačinu nepokretne tačke (IJNT) datu sa

$$(M\Gamma + \Omega_1)x = (N\Gamma - \Omega_2)x + (\Omega - A\Gamma)|x| - q, \tag{4.1}$$

ii) Ako x zadovoljava (4.1), tada je rešenje za $LCP(q, A)$ dato sa

$$z = \Gamma(|x| + x) \quad i \quad r = \Omega(|x| - x). \tag{4.2}$$

DOKAZ:

i) Kako je vektor z rešenje za $LCP(q, A)$, to je on nenegativan, te se može zapisati u obliku $z = \Gamma(|x| + x)$, jer za $\forall x \in \mathbb{R}^n$ važi $|x| \pm x \geq 0$, s obzirom da je

$$|x| + x = \begin{cases} 2x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad |x| - x = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ -2x, & x < 0. \end{cases}$$

Definišimo još jedan nenegativan vektor, $r = \Omega(|x| - x)$. Primetimo da je za ovako odabrane z i r, x zaista predloženog oblika, to jest $x = \frac{1}{2}(\Gamma^{-1}z - \Omega^{-1}r)$. Lako se možemo uveriti da su ovako definisani vektori z i r međusobno ortogonalni. Zaista, $z^T r = (|x| + x)^T \Gamma^T \Omega(|x| - x) = 0$, za svaki vektor $x \in \mathbb{R}^n$. Jasno, po konstrukciji, $r = Az + q$ ako i samo ako je

$$\Omega(|x| - x) = A\Gamma(|x| + x) + q. \tag{4.3}$$

Imajući na umu pretpostavljeno razlaganje matrice sistema, $A = M - N$, (4.3) možemo zapisati u ekvivalentnom obliku implicitne jednačine nepokretne tačke, odnosno, $(M\Gamma + \Omega_1)x = (N\Gamma - \Omega_2)x + (\Omega - A\Gamma)|x| - q$.

ii) Iz svega rečenog, jasno je da se (4.1) može ekvivalentno zapisati kao (4.3), stoga za nenegativne vektore z i r date sa (4.2) imamo da je $Az + q = r$. Primetimo da

(a) ako je $x_i > 0$ tada su $z_i > 0$ i $r_i = 0$,

(b) ako je $x_i = 0$ tada su $z_i = r_i = 0$,

(c) ako je $x_i < 0$ tada su $z_i = 0$ i $r_i > 0$.

što implicira da je $z^T r = 0$. Stoga je (r, z) rešenje za $LCP(q, A)$. $\triangle$

Teorema 18 govori o ekvivalentnom zapisu za $LCP(q, A)$ koji je naročito pogodan kada je reč o iterativnim postupcima zasnovanim na splitinzima matrice A i predstavlja pomenuti rezultat do kojeg je došao Bai.

Tvrđenje nameće i pitanje izbora nekolicine parametara. Sa stanovišta teorijske analize, a potom i njene propratne numeričke verifikacije, posmatraćemo slučaj: $\Omega_1 = \Omega$, $\Omega_2 = 0$, $\Gamma = \gamma^{-1}E$. Stoga, nakon predloženog pojednostavljenja, algebarskih sređivanja izraza i adekvatnih smena, Teorema 18 ima za posledicu sledeće tvrđenje.

Posledica 3 *Neka je* $A = M - N$ *spliting matrice* $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, Ω *pozitivna dijagonalna matrica i* γ *pozitivna konstanta. Tada, za* $LCP(q, A)$ *važe sledeći iskazi:*

i) Ako je (r, z) *rešenje za* $LCP(q, A)$ *, tada vektor* $x = \frac{1}{2}\gamma(z - \Omega^{-1}r)$ *zadovoljava implicitnu jednačinu nepokretne tačke (IJNT) datu sa*

$$(\Omega + M)x = Nx + (\Omega - A)|x| - \gamma q, \tag{4.4}$$

ii) Ako x *zadovoljava (4.4), tada je rešenje za* $LCP(q, A)$ *dato sa*

$$z = \gamma^{-1}(|x| + x) \quad i \quad r = \gamma^{-1}\Omega(|x| - x). \tag{4.5}$$

Zapis nepokretne tačke iz (4.4) sasvim prirodno generiše iterativni postupak baziran na splitingu matrice A, sa ciljem rešavanja $LCP(q, A)$, koji formulišemo kao što sledi.

Metod 1 ***Modulski iterativni postupak zasnovan na splitingu matrice***

Neka je $A = M - N$ *spliting matrice* $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. *Počevši od proizvoljnog startnog vektora* $z^{(0)} \in \mathbb{R}^n_+$, *idući redom za* $k \geq 0$, *sve dok se ne postigne konvergencija niza* $\{z^{(k)}\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n_+$, *nalazimo* $x^{(k+1)} \in \mathbb{R}^n$ *rešavajući linearni sistem*

$$(\Omega + M)x^{(k+1)} = Nx^{(k)} + (\Omega - A)|x^{(k)}| - \gamma q \tag{4.6}$$

i računamo narednu iteraciju

$$z^{(k+1)} = \frac{1}{\gamma}(|x^{(k+1)}| + x^{(k+1)}),$$

pri čemu je $x^{(0)} = \frac{1}{2}\gamma\Omega^{-1}((\Omega - A)z^{(0)} - q)$, $\Omega > 0$ *proizvoljno izabrana kvadratna dijagonalna matrica reda* n, *a* $\gamma > 0$ *proizvoljno izabrana konstanta.*

Metod 1 koji smo upravo definisali predstavlja generalizaciju ostalih modulskih iterativnih metoda zasnovanih na splitinzima matrice, čija je detaljna specifikacija ponuđena tabelom u nastavku, pri čemu je $A = D - L - U$ standardno razlaganje matrice A.

metod	*opis*	M	N	Ω	γ
M	modulski	A	0	E	1
MM	modifikovan modulski	A	0	αE	1
MJ	modulski Jakobi	D	$L + U$	$\star$	2
MGS	modulski Gaus-Zajdel	$D - L$	U	$\star$	2
MSOR	modulski SOR	$\frac{1}{\alpha}D - L$	$\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)D + U$	$\star$	2
MAOR	modulski AOR	$\frac{1}{\alpha}(D - \beta L)$	$\frac{1}{\alpha}\left[(1 - \alpha)D + (\alpha - \beta)L + \alpha U\right]$	$\star$	2

Tabela 4.1: Varijante modulskih iterativnih postupaka zasnovanih na splitingu matrice; oznaka $\star$ na mestu parametra Ω u tabeli znači da je Ω proizvoljna pozitivna dijagonalna matrica.

Motivisani pričom o iterativnim postupcima za rešavanje sistema linearnih jednačina o kojima je bilo reči u prethodnom poglavlju, zaključujemo da i iterativne metode za rešavanje *LCP* generišu niz koji konvergira ka tačnom rešenju za svaki startni vektor pod određenim pretpostavkama. Najčešće se ti uslovi odnose na karakteristike same matrice A, kao što je spliting, a u slučaju da je postupak relaksacione prirode, dodatni uslov koji mora biti zadovoljen jeste pripadnost relaksacionih parametara oblasti koja obezbeđuje konvergenciju.

Neka je $z_\star \in \mathbb{R}^n_+$ rešenje $LCP(q, A)$. Tada, na osnovu Posledice 3 i (4.4), zaključujemo da $x_\star = \frac{1}{2}\gamma(z_\star - \Omega^{-1}r_\star)$ zadovoljava implicitno zadatu jednačinu nepokretne tačke (*IJNT*)

$$(M + \Omega)x_\star = Nx_\star + (\Omega - A)|x_\star| - \gamma q, \tag{4.7}$$

pri čemu je $A = M - N$ spliting matrice A, $\Omega > 0$ dijagonalna kvadratna matrica a γ pozitivna konstanta. Oduzimajući (4.7) od (4.6) dobijamo

$$(M + \Omega)(x^{(k+1)} - x_\star) = N(x^{(k)} - x_\star) + (\Omega - A)(|x^{(k)}| - |x_\star|),$$

ili ekvivalentno,

$$x^{(k+1)} - x_\star = (M + \Omega)^{-1}N(x^{(k)} - x_\star) + (M + \Omega)^{-1}(\Omega - A)(|x^{(k)}| - |x_\star|). \tag{4.8}$$

Greška aproksimacije u (4.8) je osnov za rezultate o konvergenciji modulskih metoda zasnovanih na splitinzima matrice. Primetimo, da bi niz $\{z^{(k)}\}_{k=0}^\infty$ bio konvergentan, to jest $\lim_{k\to\infty} z^{(k)} = z_\star$, dovoljno je pokazati konvergenciju niza $\{x^{(k)}\}_{k=0}^\infty$ definisanog pomenutom metodom. Naročito interesantan slučaj jeste onaj koji podrazumeva da je matrica sistema A u klasi H_+ matrica, i on će, od sad pa na dalje, biti u žiži interesovanja, kao standardna pretpostavka za sve iterativne metode koje slede.

Teorema 19 *Neka je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ H_+ matrica i $A = M - N$ H-kompatibilni spliting matrice A, odnosno $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(M) - |N|$. Pretpostavimo da je $\Omega > 0$ dijagonalna matrica i $\gamma > 0$ data pozitivna konstanta. Ako Ω zadovoljava uslov $\Omega \geq diag(M)$, tada niz $\{z^{(k)}\}_{k=0}^\infty$, generisan iterativnim pravilom (4.6) konvergira ka jedinstvenom rešenju $z_\star \in \mathbb{R}^n_+$ $LCP(q, A)$ za svaki startni vektor $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.*

Dokaz: Činjenica da je matrica A u klasi H_+ matrica pa i u klasi H matrica, a njen spliting H-kompatibilan, tj. $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(M) - |N|$, na osnovu Lema 4 i 5 implicira da je $A = M - N$ ujedno i H-spliting pa samim tim i konvergentan, te da je matrica M takođe H_+. Važi i $\mathcal{M}(A) \leq \mathcal{M}(M) \leq diag(M)$, budući da je spliting H-kompatibilan. Matrica $M \in \mathbb{R}^{n,n}$, a samim tim i $\Omega + M$ su H_+ matrice, a kako je $\mathcal{M}(\Omega + M) = \Omega + \mathcal{M}(M)$ (jer M i Ω imaju pozitivne dijagonalne elemente), to je $|(\Omega+M)^{-1}| \leq (\Omega+\mathcal{M}(M))^{-1}$. Uzimajući apsolutnu vrednost leve i desne strane greške aproksimacije u (4.8), nakon sređivanja dobijamo da je ocena greške aproksimacije

$$\begin{aligned} |x^{(k+1)} - x_\star| &\leq |(M+\Omega)^{-1}||N||x^{(k)} - x_\star| + |(M+\Omega)^{-1}|(|\Omega - M| + |N|)||x^{(k)}| - |x_\star|| \\ &\leq (\Omega + \mathcal{M}(M))^{-1}(|\Omega - M| + 2|N|)|x^{(k)} - x_\star|. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Uz oznake

$$\widehat{M}_\Omega = \Omega + \mathcal{M}(M), \qquad \widehat{N}_\Omega = |\Omega - M| + 2|N|,$$

$$\widehat{A}_\Omega = (\Omega - \mathcal{M}(M) - |\Omega - M|) + 2\mathcal{M}(A), \qquad \widehat{L}_\Omega = \widehat{M}_\Omega^{-1}\widehat{N}_\Omega,$$

ocena apsolutne vrednosti greške iz (4.9) ekvivalentna je sa

$$|x^{(k+1)} - x_\star| \leq \widehat{L}_\Omega |x^{(k)} - x_\star|.$$

Već smo konstatovali da konvergencija niza $\{x^{(k)}\}_{k=0}^\infty$ ka $x_\star$ garantuje konvergenciju niza $\{z^{(k)}\}_{k=0}^\infty$ ka $z_\star$. Dovoljno je, dakle, pokazati da je $\rho(\widehat{L}_\Omega) < 1$, što će obezbediti da $\{x^{(k)}\}_{k=0}^\infty$ teži ka $x_\star$. Kako je $\Omega \geq diag(M)$, to je $\Omega - \mathcal{M}(M) - |\Omega - M| = 0$, pa je $\widehat{A}_\Omega = 2\mathcal{M}(A)$, odnosno $\widehat{A}_\Omega$ je M-matrica. Nije teško uočiti i da je $\widehat{L}_\Omega$ zapravo iterativna matrica koja odgovara splitingu matrice $\widehat{A}_\Omega = \widehat{M}_\Omega - \widehat{N}_\Omega$. Ovaj spliting je ujedno i H-spliting, jer kako je $\mathcal{M}(\mathcal{M}(\widehat{M}_\Omega)) = \mathcal{M}(\widehat{M}_\Omega)$ i $\widehat{N}_\Omega \geq 0$, važi da je $\mathcal{M}(\widehat{M}_\Omega) - \widehat{N}_\Omega$ M-matrica, a znajući da je svaki H-spliting i konvergentan (cf. Lema 4) to je $\rho(\widehat{M}_\Omega^{-1}\widehat{N}_\Omega) = \rho(\widehat{L}_\Omega) < 1$, čime je tvrđenje pokazano. $\triangle$

4.2 Postupci zasnovani na multisplitinzima

Modulski iterativni postupak zasnovan na splitingu matrice sistema, definisan Metodom 1, predstavlja postupak koji obezbeđuje način pronalaska rešenja za $LCP(q, A)$, dok su uslovi njegove konvergencije ponuđeni Teoremom 19. Pa ipak, imajući u vidu postojanje raspoloživih višeprocesorskih resursa u praksi, koji sa stanovišta implementacije mogu znatno ubrzati i poboljšati sam postupak numeriškog rešavanja, Bai i Zhang su učinili iskorak ka optimizaciji postojećeg metoda u smislu prilagođavanja i upotrebi svih prednosti koje rad u višeprocesorskom ambijentu donosi [4]. S tim u vezi, definisali su *modulski iterativni postupak zasnovan na sinhronom multisplitingu matrice*, koji je u potpunosti u stanju da iskoristi brzinu paralelnog izračunavanja na raspoloživom broju procesora, i tako numeričkim rezultatima potvrde efikasnost novog postupka u realnim primenama.

Definicija 13 *Neka je ℓ dati prirodni broj sa osobinom $\ell \leq n$, a $A = M_p - N_p$, $p = 1, 2, \dots, \ell$ splitinzi matrice sistema i $E_p \in \mathbb{R}^{n,n}$ nenegativne dijagonalne matrice sa osobinom $\sum_{p=1}^{\ell} E_p = E$. Tada se kolekcija uređenih trojki oblika $(M_p, N_p, E_p)(p = 1, 2, \dots, \ell)$ naziva* ***multispliting*** *matrice A. Pri tome se matrice $E_p (p = 1, 2, \dots, \ell)$ nazivaju ponderi.*

Posmatrajući svaki od ℓ multisplitinga matrice A, u svetlu Posledice 3, zaključujemo da je rešenje za $LCP(q, A)$ dato sa

$$z = \gamma^{-1}(|x| + x) \quad \text{i} \quad r = \gamma^{-1}\Omega(|x| - x),$$

pod uslovom da vektor x zadovoljava svaku od ukupno ℓ *IJNT* oblika

$$(\Omega + M_p)x = N_p x + (\Omega - A)|x| - \gamma q \qquad p = 1, 2, \ldots, \ell.$$

Prelazak na ekvivalentan zapis rešenja problema $LCP(q, A)$ u uslovima postojanja multisplitinga prirodno generiše odgovarajući iterativni postupak za njegovo rešavanje. Ovaj postupak nazivamo *MSM - modulski iterativni postupak zasnovan na sinhronom multisplitingu matrice.*

Metod 2 ***MSM* za** $LCP(q, A)$

Neka je $(M_p, N_p, E_p)(p = 1, 2, \ldots, \ell)$ *multispliting matrice* $A \in \mathbb{R}^{n,n}$*. Za dati startni vektor* $z^{(0)} \in \mathbb{R}^n_+$ *i iteracije* $k \geq 0$*, sve dok se ne postigne konvergencija niza* $\{z^{(k)}\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n_+$*, računamo* $z^{(k+1)} \in \mathbb{R}^n_+$ *kao*

$$z^{(k+1)} = \frac{1}{\gamma}(|x^{(k+1)}| + x^{(k+1)}),$$

a $x^{(k+1)} \in \mathbb{R}^n$ *kao matričnu konveksnu kombinaciju*

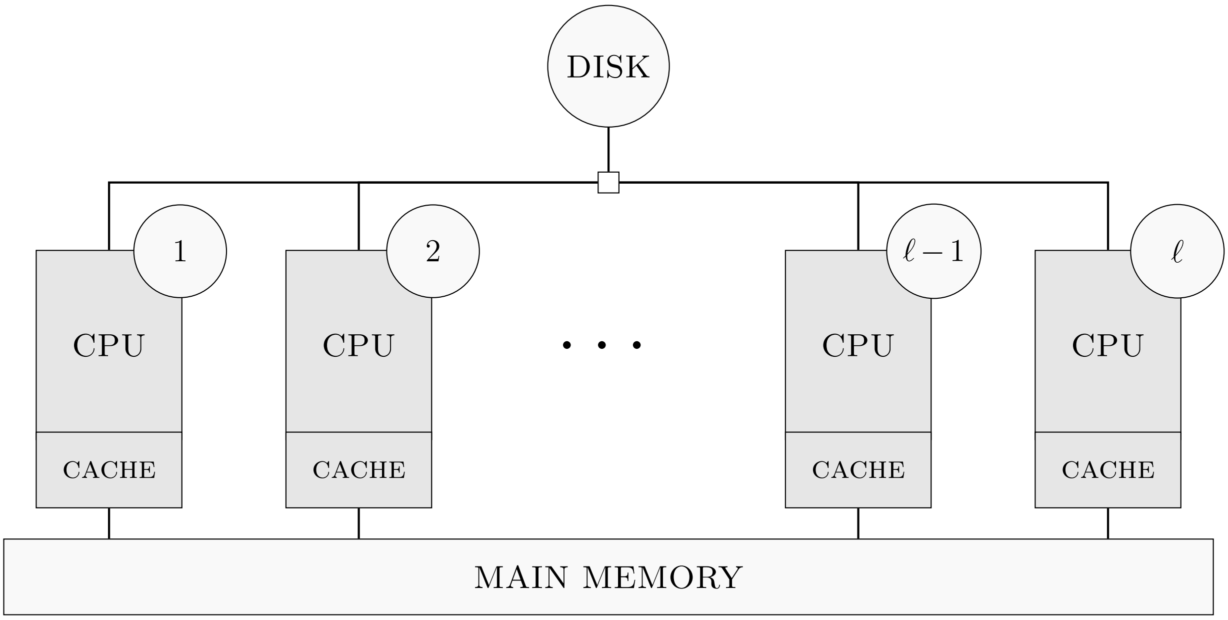
$$x^{(k+1)} = \sum_{p=1}^{\ell} E_p x^{(k,p)},$$

pri čemu vektore $x^{(k,p)}$ $p = 1, 2, \ldots, \ell$ *nalazimo rešavajući sisteme linearnih jednačina*

$$(\Omega + M_p)x^{(k,p)} = N_p x^{(k)} + (\Omega - A)|x^{(k)}| - \gamma q \qquad p = 1, 2, \ldots, \ell, \tag{4.10}$$

gde je $x^{(0)} = \frac{1}{2}\gamma\Omega^{-1}((\Omega - A)z^{(0)} - q)$.

Kako sa teorijskog, tako i sa praktičnog stanovišta, *MSM* iterativni postupak poseduje sve predispozicije za efikasan rad na paralelnim računarima. Posmatrajući Metod 2 i inicijalno sproveden multispliting, prednost paralelnog izračunavanja ogleda se u sledećem. Pod pretpostavkom da na raspolaganju imamo ℓ procesora (Slika 4.1), svakom od njih u startu biva dodeljen odgovarajući multispliting matrice, $A = M_p - N_p$ i ponder E_p, $p = 1, 2, \ldots, \ell$. Dakle, u svakoj iteraciji $k \geq 0$, svaki od procesora p rešava sistem linearnih jednačina (4.10) i određuje vektor $x^{(k,p)}$ - međurezultat koji odgovara aktivnosti $p-$tog procesora u $k-$tom koraku. Konstruišući matričnu konveksnu kombinaciju međurezultata $x^{(k,p)}$, pri čemu su koeficijenti u istoj matrice E_p, $p = 1, 2, \ldots, \ell$, nalazimo $x^{(k+1)}$, a potom i novu iteraciju u nizu aproksimacija rešenja $LCP(q, A)$, vektor $z^{(k+1)}$. Primetimo da se svaki od sistema (4.10) rešava zasebno i nezavisno na odgovarajućem procesoru p, u čemu se ogleda bit primene paralelnog izračunavanja. Napomenimo i to da izborom matrica M_p i E_p, $p = 1, 2, \ldots, \ell$ možemo značajno uticati na raspodelu zadataka u procesu izračunavanja i time pospešiti brzinu istog. Ubrzanje je moguće i na račun izbora pondera E_p, budući da komponente vektora $x^{(k,p)}$ koje odgovaraju nulama na glavnoj dijagonali pondera nije potrebno računati. Jasno je da u varijanti upotrebe samo jednog procesora, $\ell = 1$, *MSM* iterativni postupak postaje modulski iterativni postupak zasnovan na splitingu matrice. Esencijalna prednost *MSM* postupka u odnosu na iterativne metode zasnovane na sinhronim multisplitinzima (cf. [19], [1]), ogleda se u činjenici što se u slučaju prvih u svakoj iteraciji rešava sistem linearnih jednačina oblika (4.10) umesto rešavanja novih potproblema linearne komplementarnosti.



Slika 4.1: Višeprocesorski paralelni računar

I premda je teorijska prednost *MSM* iterativnog postupka očigledna, pojednostavljenje u implementaciji može se postići specijalnim izborom forme splitinga, što će obezbediti da sistemi (4.10), koje je neophodno rešavati u svakoj iteraciji na odgovarajućem procesoru, budu donji trougaoni. Tako dolazimo do pojma trougaonog multisplitinga.

DEFINICIJA 14 *Neka je $D = diag(A)$ i za $p = 1, 2, \ldots, \ell$ definišimo matrice L_p i $U_p = D - L_p - A$, kao strogo donje trougaone i matrice sa nulama na dijagonali, respektivno. Neka su matrice $E_p \in \mathbb{R}^{n,n}$ $p = 1, 2, \ldots, \ell$ nenegativne dijagonalne sa osobinom $\sum_{p=1}^{\ell} E_p = E$. Tada se kolekcija uređenih trojki oblika $(D - L_p, U_p, E_p)(p = 1, 2, \ldots, \ell)$ naziva* ***trougaoni multispliting*** *matrice A.*

Birajući da su, za $p = 1, 2, \ldots, \ell$, u *MSM* postupku

$$M_p = \frac{1}{\alpha}(D - \beta L_p) \quad \text{i} \quad N_p = \frac{1}{\alpha}\left((1-\alpha)D + (\alpha - \beta)L_p + \alpha U_p\right),$$

pri čemu su α i β relaksacioni parametri, dolazimo do *MSMAOR* metode.

Metod 3 ***MSMAOR* za** $LCP(q, A)$

Neka je $(D - L_p, U_p, E_p)(p = 1, 2, \ldots, \ell)$ *trougaoni multispliting matrice* $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. *Za dati startni vektor* $z^{(0)} \in \mathbb{R}^n_+$ *i iteracije* $k \geq 0$, *sve dok se ne postigne konvergencija niza* $\{z^{(k)}\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n_+$, *računamo* $z^{(k+1)} \in \mathbb{R}^n_+$ *kao*

$$z^{(k+1)} = \frac{1}{\gamma}(|x^{(k+1)}| + x^{(k+1)}),$$

a $x^{(k+1)} \in \mathbb{R}^n$ *kao matričnu konveksnu kombinaciju*

$$x^{(k+1)} = \sum_{p=1}^{\ell} E_p x^{(k,p)},$$

pri čemu vektore $x^{(k,p)}$ $p = 1, 2, \ldots, \ell$ *nalazimo rešavajući sisteme linearnih jednačina*

$$(\alpha\Omega + D - \beta L_p)x^{(k,p)} = \Big[(1-\alpha)D + (\alpha-\beta)L_p + \alpha U_p\Big]x^{(k)} + \alpha\Big[(\Omega - A)|x^{(k)}| - \gamma q\Big], \quad (4.11)$$

gde je $x^{(0)} = \frac{1}{2}\gamma\Omega^{-1}((\Omega - A)z^{(0)} - q)$.

Budući da je klasični *AOR* iterativni postupak za rešavanje sistema linearnih jednačina podrazumevao standardno razlaganje matrice sistema, a s obzirom da trougaoni spliting predstavlja natklasu standardnih razlaganja, za iterativni postupak koji čini osnovu u rešavanju ovih sistema kažemo da je varijanta *AOR* postupka. Kao što je *AOR* postupak, kao dvoparametarska iterativna metoda, generalizovao Jakobijev i Gaus-Zajdelov postupak za rešavanje sistema linearnih jednačina, tako i *MSMAOR* uopštava odgovarajuće postupke *MSM* tipa (Tabela 4.2).

metod	*opis*	(α, β)
MSMJ	modulski sinhroni Jakobijev multispliting	$(1, 0)$
MSMGS	modulski sinhroni Gaus-Zajdelov multispliting	$(1, 1)$
MSMSOR	modulski sinhroni SOR multispliting	(α, α)

Tabela 4.2: Varijante *MSMAOR* postupka

Konvergencija za MSM i MSMAOR

Od sad pa na dalje, posmatraćemo probleme linearne komplementarnosti kod kojih je matrica A iz klase H_+ matrica. Obeležimo rešenje, čiju egzistenciju i jedinstvenost garantuje Teorema 17, sa $z_\star$. Posmatrajući iterativne nizove $\{z^{(k)}\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n_+$ i $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ generisane *MSM* i *MSMAOR* iterativnim postupcima, budući da je $z^{(k+1)} = \frac{1}{\gamma}(|x^{(k+1)}| + x^{(k+1)})$ važi

$$\lim_{k\to\infty} z^{(k)} = z_\star \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \frac{1}{2}\gamma(z_\star - \Omega^{-1}r_\star) =: x_\star.$$

Dakle, da bismo pokazali konvergenciju niza $\{z^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ ka rešenju $LCP(q, A)$ dovoljno je da pokažemo da je niz $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ generisan Metodama 2 i 3 konvergentan, i da mu je granica baš vektor $x_\star$.

Neka su $(M_p, N_p, E_p)(p = 1, 2, \dots, \ell)$ i $(D - L_p, U_p, E_p)(p = 1, 2, \dots, \ell)$ multispliting i trougaoni multispliting matrice A, respektivno. Na osnovu Posledice 3 znamo da ako je $z_\star$ rešenje za $LCP(q, A)$, tada vektor $x_\star = \frac{1}{2}\gamma(z_\star - \Omega^{-1}r_\star)$ zadovoljava svaku od ℓ *IJNT* (4.10) odnosno (4.11), odnosno

a) za *MSM* metod važi

$$(\Omega + M_p)x_\star = N_p x_\star + (\Omega - A)|x_\star| - \gamma q, \quad p = 1, 2, \dots, \ell, \tag{4.12}$$

b) za *MSMAOR* metod važi
$(\alpha\Omega + D - \beta L_p)x_\star = \Big[(1-\alpha)D + (\alpha - \beta)L_p + \alpha U_p\Big]x_\star + \alpha\Big[(\Omega - A)|x_\star| - \gamma q\Big]$, $p = 1, 2, \dots, \ell$.

Drugim rečima, vektor $x_\star$ je tačno rešenje sistema (4.10) i (4.11), to jest *ako konvergiraju*, nizovi $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ generisani *MSM* odnosno *MSMAOR* postupkom zaista konvergiraju ka $x_\star$. U nastavku navodimo rezultat o konvergenciji *MSM* i *MSMAOR* iterativnih postupaka za rešavanje $LCP(q, A)$, do kojeg su došli Bai i Zhang, [4]. Za relaksacionu varijantu postupka, *MSMAOR*, obezbeđen je dodatni uslov na relaksacione parametre koji garantuje konvergenciju iterativnog niza.

Teorema 20 ***Konvergencija MSM i MSMAOR postupaka***

Neka je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ H_+ matrica, pri čemu su $D = diag(A)$, $B = D - A$ i neka su $(M_p, N_p, E_p)(p = 1, 2, \dots, \ell)$ i $(D - L_p, U_p, E_p)(p = 1, 2, \dots, \ell)$ redom multispliting i trougaoni multispliting matrice A. Pretpostavimo da je $\gamma > 0$ i da Ω kao pozitivna dijagonalna matrica ispunjava uslov $\Omega \geq D$.

i) Ako su razlaganja $A = M_p - N_p(p = 1, 2, \dots, \ell)$ H-kompatibilna, tada iterativni niz $\{z^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ generisan MSM iterativnim postupkom konvergira ka jedinstvenom rešenju $z_\star$ za $LCP(q, A)$ za svaki startni vektor $z^{(0)} \in \mathbb{R}^n_+$.

ii) Ako trougaoni multispliting $A = D - L_p - U_p(p = 1, 2, \dots, \ell)$ zadovoljava osobinu $\mathcal{M}(A) = D - |L_p| - |U_p|(p = 1, 2, \dots, \ell)$, tada iterativni niz $\{z^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ generisan MSMAOR iterativnim postupkom konvergira ka jedinstvenom rešenju $z_\star$ za $LCP(q, A)$ za svaki startni vektor $z^{(0)} \in \mathbb{R}^n_+$, pod uslovom da relaksacioni parametri α i β budu izabrani na sledeći način

$$0 < \beta \leq \alpha < \frac{1}{\rho(D^{-1}|B|)}. \tag{4.13}$$

DOKAZ: S obzirom na već izloženo, ostaje da pokažemo samo da je niz $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ konvergentan. Oduzimajući (4.12) od (4.10), dobijamo da je

$$x^{(k,p)} - x_\star = (\Omega + M_p)^{-1}\Big[N_p(x^{(k)} - x_\star) + (\Omega - A)(|x^{(k)}| - |x_\star|)\Big], \quad p = 1, 2, \dots, \ell,$$

na osnovu čega možemo odrediti grešku aproksimacije za *MSM* datu sa

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} - x_\star &= \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\Omega + M_p)^{-1}\Big[N_p(x^{(k)} - x_\star) + (\Omega - A)(|x^{(k)}| - |x_\star|)\Big] \\ &= \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\Omega + M_p)^{-1} N_p(x^{(k)} - x_\star) \\ &+ \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\Omega + M_p)^{-1}(\Omega - A)(|x^{(k)}| - |x_\star|). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Slično, u slučaju *MSMAOR* postupka, nalazimo da važi

$$\begin{aligned} x^{(k,p)} - x_\star = (\alpha\Omega + D - \beta L_p)^{-1}\Big[\Big((1-\alpha)D + (\alpha - \beta)L_p + \alpha U_p\Big)(x^{(k)} - x_\star) \\ +\alpha(\Omega - A)(|x^{(k)}| - |x_\star|)\Big], \quad p = 1, 2, \dots, \ell, \end{aligned}$$

pa je greška aproksimacije za isti

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} - x_\star &= \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\alpha\Omega + D - \beta L_p)^{-1}\Big[\Big((1-\alpha)D + (\alpha - \beta)L_p + \alpha U_p\Big)(x^{(k)} - x_\star) \\ &\qquad + \alpha(\Omega - A)(|x^{(k)}| - |x_\star|)\Big] \\ &= \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\alpha\Omega + D - \beta L_p)^{-1}\Big((1-\alpha)D + (\alpha - \beta)L_p + \alpha U_p\Big)(x^{(k)} - x_\star) \\ &+ \alpha \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\alpha\Omega + D - \beta L_p)^{-1}(\Omega - A)(|x^{(k)}| - |x_\star|). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Nakon što smo obavili neophodnu pripremu, prelazimo redom na dokaz delova teoreme.

i) Budući da matrica A pripada klasi H_+ matrica, a da su splitinzi $A = M_p - N_p (p = 1, 2, \dots, \ell)$ H-kompatibilni, Lema 4 implicira da je spliting i H-spliting, a potom, na osnovu Leme 5, sledi da je matrica M_p, a time i $\Omega + M_p$ u klasi H_+ matrica. Stoga, imamo ocenu apsolutne vrednosti inverzne matrice sa gornje strane (cf. Lema 7)

$$|(\Omega + M_p)^{-1}| \leq \mathcal{M}(\Omega + M_p)^{-1} = (\Omega + \mathcal{M}(M_p))^{-1}, \quad p = 1, 2, \dots, \ell. \tag{4.16}$$

Uzimajući apsolutne vrednosti obe strane jednakosti u (4.14), upotrebom (4.16), $||x^{(k)}|-|x_\star|| \leq |x^{(k)}-x_\star|$ (obrnuta nejednakost trougla), te algebarskim sređivanjem izraza dobijamo

$$|x^{(k+1)} - x_\star| \leq \mathcal{L}_{MSM}|x^{(k)} - x_\star|,$$

pri čemu je

$$\mathcal{L}_{MSM} := \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\Omega + \mathcal{M}(M_p))^{-1}\Big(|N_p| + |\Omega - A|\Big).$$

S obzirom da su $A = M_p - N_p (p = 1, 2, \ldots, \ell)$ H-kompatibilni splitinzi, odnosno

$$\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(M_p) - |N_p|, \quad p = 1, 2, \ldots, \ell,$$

važi da je $|N_p| = \mathcal{M}(M_p) - \mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(M_p) - D + |B|$, za $p = 1, 2, \ldots, \ell$. Dakle, izraz koji definiše matricu $\mathcal{L}_{MSM}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{MSM} &= \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\Omega + \mathcal{M}(M_p))^{-1}\Big(|N_p| + |\Omega - A|\Big) \\
&= \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\Omega + \mathcal{M}(M_p))^{-1}\Big(\mathcal{M}(M_p) - \mathcal{M}(A) + |\Omega - D + B|\Big) \\
&= \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\Omega + \mathcal{M}(M_p))^{-1}\Big((\Omega + \mathcal{M}(M_p)) - (\Omega + D) + |\Omega - D| + 2|B|\Big) \\
&= \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\Omega + \mathcal{M}(M_p))^{-1}\Big((\Omega + \mathcal{M}(M_p)) - 2D + 2|B|\Big) \\
&= \qquad \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\Omega + \mathcal{M}(M_p))^{-1}(\Omega + \mathcal{M}(M_p)) \\
&\quad + \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\Omega + \mathcal{M}(M_p))^{-1}(-2D + 2|B|) \\
&= E + 2\sum_{p=1}^{\ell} E_p(\Omega + \mathcal{M}(M_p))^{-1}(|B| - D) \\
&= E - 2\sum_{p=1}^{\ell} E_p(\Omega + \mathcal{M}(M_p))^{-1}D(E - J),
\end{aligned}$$

gde je $J := D^{-1}|B| \geq 0$, s obzirom da je A H_+ matrica, uz notaciju $D = diag(A)$, $B = D - A$ i $|D| = D$. Teorema 7 proizvodi da je $\rho(D^{-1}|B|) < 1$. Definišimo pomerenu matricu dobijenu od J kao $J_\varepsilon := J + \varepsilon ee^T > 0$, za ε dovoljno malo, takvo da je $\rho_\varepsilon := \rho(J_\varepsilon) < 1$ i $e = [1, 1, \ldots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$. Tada,

$$\mathcal{L}_{MSM} < E - 2\sum_{p=1}^{\ell} E_p(\Omega + \mathcal{M}(M_p))^{-1}D(E - J_\varepsilon)$$

i na osnovu Peron-Frobenijusove teoreme, znamo da postoji pozitivan vektor,

$v_\varepsilon > 0$, takav da je $J_\varepsilon v_\varepsilon = \rho_\varepsilon v_\varepsilon$. Takođe, $\mathcal{M}(A) = D - |B| = D(E - D^{-1}|B|) = D(E - J)$. Množenjem sa $v_\varepsilon > 0$, sledi da

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{MSM} v_\varepsilon &< v_\varepsilon - 2\sum_{p=1}^{\ell} E_p(\Omega + \mathcal{M}(M_p))^{-1} D(E - J_\varepsilon) v_\varepsilon \\ &= v_\varepsilon - 2\sum_{p=1}^{\ell} E_p(\Omega + \mathcal{M}(M_p))^{-1} D(v_\varepsilon - \rho_\varepsilon v_\varepsilon) \\ &= v_\varepsilon - 2(1-\rho_\varepsilon)\sum_{p=1}^{\ell} E_p(\Omega + \mathcal{M}(M_p))^{-1} D v_\varepsilon.\end{aligned}$$

Označimo sa $D_p = diag(M_p)$, $p = 1, 2, \ldots, \ell$. Budući da su matrice $D_p (p = 1, 2, \ldots, \ell)$ pozitivne dijagonalne kao i Ω, one su i $M-$matrice, pa kako je $\Omega + D_p \geq \Omega + \mathcal{M}(M_p)$, na osnovu Leme 3 važi odnos

$$(\Omega + \mathcal{M}(M_p))^{-1} \geq (\Omega + D_p)^{-1}, \quad p = 1, 2, \ldots, \ell$$

i

$$\sum_{p=1}^{\ell} E_p(\Omega + D_p)^{-1} > 0$$

pri čemu se pozitivnost odnosi isključivo na dijagonalne elemente, jer je u pitanju dijagonalna matrica, te kako je $\rho_\varepsilon < 1$, zapravo dobijamo da važi sledeće

$$\mathcal{L}_{MSM} v_\varepsilon < v_\varepsilon - 2(1-\rho_\varepsilon)\sum_{p=1}^{\ell} E_p(\Omega + D_p)^{-1} D v_\varepsilon < v_\varepsilon,$$

pa je $\rho(\mathcal{L}_{MSM}) < 1$ (cf. Posledica 1). Stoga, iterativni niz, $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, a samim tim i $\{z^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ generisan *MSM* iterativnim postupkom konvergira ka jedinstvenom tačnom rešenju za $LCP(q, A)$ za svaki startni vektor $z^{(0)} \in \mathbb{R}^n_+$.

ii) Pre svega, $D - \beta L_p = \alpha M_p$, pa je $\alpha\Omega + D - \beta L_p = \alpha(\Omega - M_p)$. Po pretpostavci, spliting H_+ matrice A, $A = M_p - N_p$, je H-kompatibilan, stoga Lema 4 implicira da je on ujedno i H-spliting, pa zaključujemo (cf. Lema 5) da su M_p H-matrice, stoga su i $\alpha(\Omega - M_p)$ takođe u klasi H-matrica. Otuda (cf. Teorema 7) važi ocena

$$|(\alpha\Omega + d - \beta L_p)^{-1}| \leq \mathcal{M}(\alpha\Omega + D - \beta L_p)^{-1} = (\alpha\Omega + D - \beta|L_p|)^{-1}.$$

Dalje, za $p = 1, 2, \ldots, \ell$, imamo i

$$\begin{aligned}|(1-\alpha)D + (\alpha-\beta)L_p + \alpha U_p| &= |1-\alpha|D + |(\alpha-\beta)L_p + \alpha U_p| \\ &\leq |1-\alpha|D + |\alpha-\beta||L_p| + \alpha|U_p|.\end{aligned}$$

Na osnovu (4.15), posmatrajući apsolutne vrednosti, možemo dobiti ocenu greške *MSMAOR* iterativnog postupka. Pri tome, znamo da je $\alpha \geq \beta$, kao i $||x^{(k)}| - |x_\star|| \leq |x^{(k)} - x_\star|$. Rezultat glasi

$$|x^{(k+1)} - x_\star| \leq \mathcal{L}_{MSMAOR}(\alpha,\beta)|x^{(k)} - x_\star|,$$

pri čemu je

$$\mathcal{L}_{MSMAOR}(\alpha,\beta) := \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\alpha\Omega + D - \beta|L_p|)^{-1}\Big[|1-\alpha|D + (\alpha-\beta)|L_p| + \alpha|U_p| + \alpha|\Omega - A|\Big].$$

Imajući u vidu da je $A = D - B$, to je $|\Omega - A| = |\Omega - D + B| = (\Omega - D) + |B|$, uz pretpostavku da je $\Omega \geq D$. Sa druge strane, kako za trougaoni multispliting $A = D - L_p - U_p (p = 1, 2, \ldots, \ell)$ znamo da je H-kompatibilan, odnosno $\mathcal{M}(A) = D - |L_p| - |U_p| (p = 1, 2, \ldots, \ell)$, a na osnovu $A = D - B$ sledi $\mathcal{M}(A) = D - |B|$, zaključujemo da mora da je $|B| = |L_p| + |U_p|$, $p = 1, 2, \ldots, \ell$. Dakle, izraz za matricu *MSMAOR* postupka postaje

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{MSMAOR}(\alpha,\beta) &= \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\alpha\Omega + D - \beta|L_p|)^{-1}\Big[|1-\alpha|D + (\alpha-\beta)|L_p| \\
&\qquad\qquad + \alpha|U_p| + \alpha|\Omega - A|\Big] \\
&= \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\alpha\Omega + D - \beta|L_p|)^{-1}\Big[|1-\alpha|D + \alpha|B| - \beta|L_p| \\
&\qquad\qquad + \alpha\Big((\Omega - D) + |B|\Big)\Big] \\
&= \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\alpha\Omega + D - \beta|L_p|)^{-1}\Big[|1-\alpha|D + \alpha(\Omega - D) \\
&\qquad\qquad - \beta|L_p| + 2\alpha|B|\Big] \\
&= \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\alpha\Omega + D - \beta|L_p|)^{-1}\Big[(\alpha\Omega + D - \beta|L_p|) \\
&\qquad\qquad + \Big(|1-\alpha| - \alpha - 1\Big)D + 2\alpha|B|\Big] \\
&= E - \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\alpha\Omega + D - \beta|L_p|)^{-1}\Big(1 + \alpha - |1-\alpha|\Big)D - 2\alpha|B|\Big) \\
&= E - \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\alpha\Omega + D - \beta|L_p|)^{-1}D\Big(1 + \alpha - |1-\alpha|\Big)E - 2\alpha J\Big) \\
&< E - \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\alpha\Omega + D - \beta|L_p|)^{-1}D\Big(1 + \alpha - |1-\alpha|\Big)E - 2\alpha J_\varepsilon\Big),
\end{aligned}$$

gde je, kao i ranije, $J := D^{-1}|B| \geq 0$, a $J_\varepsilon := J + \varepsilon e e^T > 0$, za ε dovoljno malo, takvo da je $\rho_\varepsilon := \rho(J_\varepsilon) < 1$. Ponovo, na osnovu Peron-Frobenijusove teoreme, znamo da postoji pozitivan vektor, $v_\varepsilon > 0$, sa osobinom $J_\varepsilon v_\varepsilon = \rho_\varepsilon v_\varepsilon$.

To implicira da je

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{MSMAOR}(\alpha,\beta)v_\varepsilon &< v_\varepsilon - \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\alpha\Omega + D - \beta|L_p|)^{-1}D\Big(1+\alpha-|1-\alpha|\Big)E - 2\alpha J_\varepsilon\Big)v_\varepsilon \\
&= v_\varepsilon - \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\alpha\Omega + D - \beta|L_p|)^{-1}D\Big(1+\alpha-|1-\alpha|\Big)v_\varepsilon - 2\alpha J_\varepsilon v_\varepsilon\Big) \\
&= v_\varepsilon - \theta_\varepsilon \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\alpha\Omega + D - \beta|L_p|)^{-1}Dv_\varepsilon,
\end{aligned}$$

gde je $\theta_\varepsilon := 1+\alpha-|1-\alpha|-2\alpha\rho_\varepsilon$. Budući da važi $0 < \alpha < \dfrac{1}{\rho(A^{-1}|B|)}$, to je

$$\theta := 1+\alpha-|1-\alpha|-2\alpha\rho(J) > 0,$$

a s obzirom da je spektralni radijus neprekidna funkcija po elementima matrice, to možemo izabrati ε dovoljno malo, tako da je i $\theta_\varepsilon > 0$ ($\rho_\varepsilon \longrightarrow \rho, \varepsilon \to 0$). Takođe, $\alpha\Omega + D - \beta|L_p| = \alpha(\Omega + M_p)$ su H_+ matrice, za $p = 1,2,\ldots,\ell$, odnosno $\mathcal{M}(\alpha\Omega + D - \beta|L_p|) = \alpha\Omega + D - \beta|L_p|$ su u klasi M-matrica. Uočimo da je

$$\alpha\Omega + D - \beta|L_p| \geq \alpha\Omega + D,$$

a kako je $\alpha\Omega + D$ takođe M-matrica, Lema 3 obezbeđuje

$$0 \leq (\alpha\Omega + D - \beta|L_p|)^{-1} \leq (\alpha\Omega + D)^{-1}.$$

Na osnovu svega rečenog, dolazimo do zaključka da

$$\mathcal{L}_{MSMAOR}(\alpha,\beta)v_\varepsilon < v_\varepsilon - \theta_\varepsilon \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\alpha\Omega + D - \beta|L_p|)^{-1}Dv_\varepsilon < v_\varepsilon.$$

Stoga je $\rho(\mathcal{L}_{MSMAOR}(\alpha,\beta)) < 1$, što implicira da je niz $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, pa samim tim i niz $\{z^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ generisan *MSMAOR* iterativnim postupkom konvergentan, te da isti, za svaki startni vektor $z^{(0)} \in \mathbb{R}^n_+$, konvergira ka jedinstvenom tačnom rešenju za $LCP(q,A)$. $\triangle$

Poboljšanje oblasti konvergencije za MSMAOR

Primetimo da je konvergencija niza aproksimacija rešenja za $LCP(q,A)$, definisanog *MSMAOR* iterativnim postupkom, pokazana Teoremom 20, uz pretpostavku o specifičnom odnosu relaksacionih parametara α i β. Naime, Bai i Zhang [4] su pretpostavili i dokazali konvergenciju u slučaju da je relaksacioni parametar α veći ili jednak sa β, premda je ova pretpostavka restriktivna i može biti izbegnuta, što je poboljšanje predloženo u [11]. Cvetković-Kostić popravka rezultirala je činjenicom da novi uslov produkuje širu oblast konvergencije relaksacionih parametara od prvobitne, te da proširena oblast sadrži one izbore relaksacionih parametara koji ubrzavaju konvergenciju iterativnog niza ka tačnom rešenju za $LCP(q,A)$, a koji nisu bili obuhvaćeni dopustivim izborima u [4].

Pod pretpostavkom da trougaoni splitinzi matrice A koja je H_+, dodatno zadovoljavaju i osobinu $\mathcal{M}(A) = D - |L_p| - |U_p| (p = 1,2,\dots,\ell)$, možemo pisati $L_p = \Xi_p \circ (-A)$, pri čemu je $\circ$ oznaka za Adamarov proizvod matrica i $\Xi_p = [\xi_{ij}^p]$ je matrica sa osobinom

$$0 \le \xi_{ij}^p \le 1 \quad \text{za} \quad 1 \le j < i \le n \quad \text{i} \quad \xi_{ij}^p = 0 \quad \text{inače.}$$

Definišemo i veličinu

$$\xi = \max\{\xi_{ij}^p : p = 1,2,\dots,\ell, \quad j < i\}.$$

Teorema 21 ***Poboljšanje oblasti konvergencije za MSMAOR***

Neka je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ H_+ matrica i neka trougaoni multispliting $A = D - L_p - U_p (p = 1,2,\dots,\ell)$ zadovoljava osobinu $\mathcal{M}(A) = D - |L_p| - |U_p| (p = 1,2,\dots,\ell)$. Pretpostavimo da je $\gamma > 0$ i da Ω kao pozitivna dijagonalna matrica ispunjava uslov $\Omega \ge D$. Tada, iterativni niz $\{z^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ generisan MSMAOR iterativnim postupkom konvergira ka jedinstvenom rešenju $z_\star$ za $LCP(q,A)$ za svaki startni vektor $z^{(0)} \in \mathbb{R}_+^n$, pod uslovom da su relaksacioni parametri α i β izabrani tako da je

$$\max\{\alpha, \xi\beta\}\rho(D^{-1}|B|) < \min\{1,\alpha\}. \tag{4.17}$$

Dokaz: Pretpostavimo da je $z_\star$ rešenje za $LCP(q,A)$. Na osnovu rezultata [4], znamo da ako niz $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ generisan *MSMAOR* iterativnim postupkom konvergira, tada je njegova granica data sa $x_\star = \dfrac{1}{2}\gamma(z_\star - \Omega^{-1} r_\star)$ i pri tome je greška aproksimacije (4.15). Ocena greške je

$$|x^{(k+1)} - x_\star| \le \mathcal{L}_{MSMAOR}(\alpha,\beta)|x^{(k)} - x_\star|.$$

Primetimo da je

$$\begin{aligned} |(1-\alpha)D + (\alpha-\beta)L_p + \alpha U_p| &= |(1-\alpha)D| + |(\alpha-\beta)L_p + \alpha U_p| \\ &= |1-\alpha|D + |\alpha(L_p + U_p) - \beta L_p| \\ &= |1-\alpha|D + |\alpha B - \beta L_p| \end{aligned}$$

kao i $\alpha|\Omega - A| = \alpha|\Omega - D + B| = \alpha(\Omega - D) + \alpha|B| = \alpha\Omega - \alpha D + \alpha|B|$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{MSMAOR}(\alpha,\beta) &= \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\alpha\Omega + D - \beta|L_p|)^{-1}\Big[|1-\alpha|D + |\alpha B - \beta L_p| + \alpha\Omega \\
&\qquad - \alpha D + \alpha|B| \pm \beta|L_p| \pm D\Big] \\
&= \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\alpha\Omega + D - \beta|L_p|)^{-1}\Big[(\alpha\Omega + D - \beta|L_p|) + \Big(|1-\alpha|D \\
&\qquad - \alpha D - D + |\alpha B - \beta L_p| + \alpha|B| + \beta|L_p|\Big)\Big] \\
&= E + \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\alpha\Omega + D - \beta|L_p|)^{-1}\Big[\Big(|1-\alpha| - \alpha - 1\Big)D \\
&\qquad + |\alpha B - \beta L_p| + \alpha|B| + \beta|L_p|\Big] \\
&= E - \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\alpha\Omega + D - \beta|L_p|)^{-1}\Big[\Big(1 + \alpha - |1-\alpha|\Big)D \\
&\qquad - |\alpha B - \beta L_p| - \alpha|B| - \beta|L_p|\Big].
\end{aligned}
$$

Uočimo da važi:

$$
\begin{aligned}
1 + \alpha - |1-\alpha| &= 1 + \alpha - \begin{cases} 1-\alpha & \text{za} \quad \alpha \le 1 \\ \alpha - 1 & \text{za} \quad \alpha > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2\alpha & \text{za} \quad \alpha \le 1 \\ 2 & \text{za} \quad \alpha > 1 \end{cases} \\
&= 2\min\{1,\alpha\},
\end{aligned}
$$

kao i

$$
\Big(|\alpha B - \beta L_p| + \alpha|B| + \beta|L_p|\Big)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad i = j \\ \begin{array}{c} |\alpha(-a_{ij}) - \beta\xi_{ij}^p(-a_{ij})| \\ + \alpha|-a_{ij}| + \beta\xi_{ij}^p| - (a_{ij})| \end{array} & \text{za} \quad i > j \\ 2\alpha|a_{ij}| & \text{za} \quad i < j, \end{cases}
$$

pri čemu je

$$
\begin{aligned}
&|\alpha(-a_{ij}) - \beta\xi_{ij}^p(-a_{ij})| + \alpha| - a_{ij}| + \beta\xi_{ij}^p| - (a_{ij})| = \\
&= \begin{cases} (\alpha - \beta\xi_{ij}^p + \alpha + \beta\xi_{ij}^p)|a_{ij}| & \text{za} \quad \alpha \geq \beta\xi_{ij}^p \\ (-\alpha + \beta\xi_{ij}^p + \alpha + \beta\xi_{ij}^p)|a_{ij}| & \text{za} \quad \alpha < \beta\xi_{ij}^p \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2\alpha|a_{ij}| & \text{za} \quad \alpha \geq \beta\xi_{ij}^p \\ 2\beta\xi_{ij}^p|a_{ij}| & \text{za} \quad \alpha < \beta\xi_{ij}^p \end{cases} \\
&= 2\max\{\alpha, \beta\xi_{ij}^p\}|a_{ij}| \\
&\leq 2\max\{\alpha, \beta\xi\}|a_{ij}|, \quad \forall i, j \in N,
\end{aligned}
$$

pa otuda važi i $\Big(|\alpha B - \beta L_p| + \alpha|B| + \beta|L_p|\Big)_{ij} \leq 2\max\{\alpha, \beta\xi\}|a_{ij}|, \quad \forall i, j \in N.$
Dakle, možemo zaključiti

$$|x^{(k+1)} - x_\star| \leq \widetilde{\mathcal{L}}_{MSMAOR}(\alpha, \beta)|x^{(k)} - x_\star|,$$

gde je

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{L}}_{MSMAOR}(\alpha, \beta) &:= E - 2\sum_{p=1}^{\ell} E_p(\alpha\Omega + D - \beta|L_p|)^{-1}\Big(\min\{1, \alpha\}D - \max\{\alpha, \beta\xi\}|B|\Big) \\
&= E - 2\sum_{p=1}^{\ell} E_p(\alpha\Omega + D - \beta|L_p|)^{-1}D\Big(\min\{1, \alpha\}E - \max\{\alpha, \beta\xi\}D^{-1}|B|\Big) \\
&= E - 2\sum_{p=1}^{\ell} E_p(\alpha\Omega + D - \beta|L_p|)^{-1}D\Big(\min\{1, \alpha\}E - \max\{\alpha, \beta\xi\}J\Big).
\end{aligned}
$$

Stoga je, za dokaz teoreme, dovoljno pokazati da je $\rho(\widetilde{\mathcal{L}}_{MSMAOR}(\alpha, \beta)) < 1$. Budući da je $\rho(D^{-1}|B|) = \rho(J) < 1$, kao i u prethodnom dokazu, možemo izabrati dovoljno malo $\varepsilon > 0$ tako da $\rho_\varepsilon := \rho(J_\varepsilon) < 1$, pri čemu je $J_\varepsilon := J + \varepsilon ee^T$. Tada, na osnovu Peron-Frobenijusove teoreme, postoji pozitivan vektor, $v_\varepsilon > 0$, takav da $J_\varepsilon v_\varepsilon = \rho_\varepsilon v_\varepsilon$. Dakle,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{L}}_{MSMAOR}(\alpha, \beta)v_\varepsilon &< v_\varepsilon - 2\sum_{p=1}^{\ell} E_p(\alpha\Omega + D - \beta|L_p|)^{-1}D\Big(\min\{1, \alpha\}E - \max\{\alpha, \beta\xi\}J_\varepsilon\Big)v_\varepsilon \\
&= v_\varepsilon - 2\sum_{p=1}^{\ell} E_p(\alpha\Omega + D - \beta|L_p|)^{-1}D\Big(\min\{1, \alpha\} - \max\{\alpha, \beta\xi\}\rho_\varepsilon\Big)v_\varepsilon \\
&= v_\varepsilon - 2\theta_\varepsilon\sum_{p=1}^{\ell} E_p(\alpha\Omega + D - \beta|L_p|)^{-1}Dv_\varepsilon,
\end{aligned}
$$

gde je

$$\theta_\varepsilon := \min\{1, \alpha\} - \max\{\alpha, \beta\xi\}\rho_\varepsilon.$$

Kako važi odnos M-matrica

$$\alpha\Omega + D - \beta|L_p| \leq \alpha\Omega + D$$

Lema 3 povlači

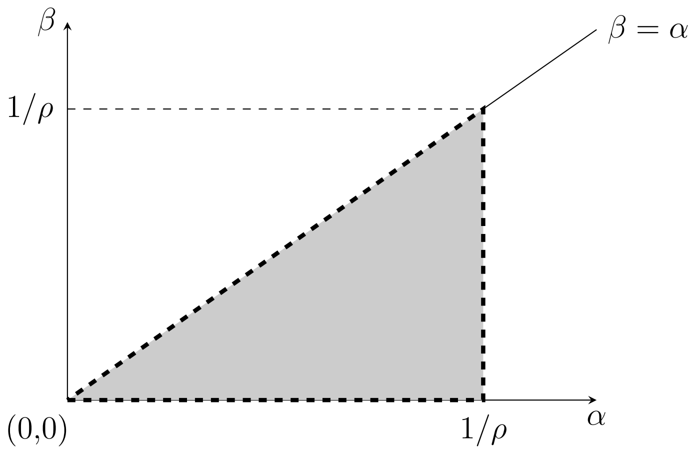
$$(\alpha\Omega + D - \beta|L_p|)^{-1} \geq (\alpha\Omega + D)^{-1} \geq 0,$$

odnosno

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{L}}_{MSMAOR}(\alpha,\beta)v_\varepsilon &< v_\varepsilon - 2\theta_\varepsilon \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\alpha\Omega + D)^{-1}Dv_\varepsilon \\ &= v_\varepsilon - 2\theta_\varepsilon(\alpha\Omega + D)^{-1}Dv_\varepsilon \\ &= (\alpha\Omega + D)^{-1}\Big(\alpha\Omega + D - 2\theta_\varepsilon D\Big)v_\varepsilon \\ &= (\alpha\Omega + D)^{-1}\Big(\alpha\Omega + (1 - 2\theta_\varepsilon)D\Big)v_\varepsilon.\end{aligned}$$

Ponovo, kako je $\rho_\varepsilon \to \rho$, za doboljno malo ε, (4.17) obezbeđuje da je $\theta_\varepsilon > 0$. Tada je $1-2\theta_\varepsilon < 1$, odnosno $\alpha\Omega+(1-2\theta_\varepsilon)D < \alpha\Omega+D$, što povlači $\widetilde{\mathcal{L}}_{MSMAOR}(\alpha,\beta)v_\varepsilon < v_\varepsilon$, odnosno $\rho(\widetilde{\mathcal{L}}_{MSMAOR}(\alpha,\beta)) < 1$, (cf. Posledica 1), čime je tvrđenje dokazano. $\triangle$

Ostaje da se zaista uverimo da nova oblast (4.17) predstavlja proširenje, i kao takva, sadrži staru oblast konvergencije (4.13). Bai i Zhang pretpostavili su da oba relaksaciona parametra α i β pripadaju intervalu $\left(0, \dfrac{1}{\rho(D^{-1}|B|)}\right)$, ali i da je $\alpha \geq \beta$, pa je oblast konvergencije u $(\alpha,\beta)-$ravni ilustrovana slikom 4.2.



Slika 4.2: Oblast konvergencije iz (4.13)

Sa druge strane, posmatrajmo sada novu oblast definisanu sa (4.17). Pokažimo da je ona zaista šira i da u tom smislu sadrži staru. To ćemo postići tako što ćemo istu zapisati u ekvivalentnom obliku, pri čemu koristimo činjenicu da je $\max\{A,B\} < \min\{C,D\}$ ako i samo ako istovremeno važi da $A < C$, $A < D$, $B < C$ i $B < D$. Dakle, da bi bilo ispunjeno

da je
$$\max\{\alpha, \xi\beta\}\rho(D^{-1}|B|) < \min\{1, \alpha\},$$

neophodno je da *istovremeno* važi

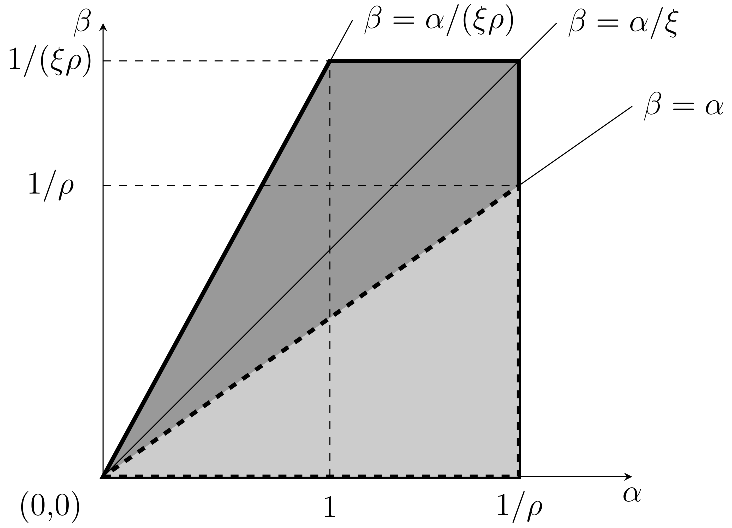
$$0 < \alpha < \frac{1}{\rho(D^{-1}|B|)}, \quad \text{za} \quad \alpha \geq \xi\beta \quad \text{i} \quad \alpha \geq 1,$$

$$0 < \alpha < \frac{\alpha}{\rho(D^{-1}|B|)}, \quad \text{za} \quad \alpha \geq \xi\beta \quad \text{i} \quad \alpha < 1,$$

$$0 < \beta < \frac{1}{\xi\rho(D^{-1}|B|)}, \quad \text{za} \quad \alpha < \xi\beta \quad \text{i} \quad \alpha \geq 1,$$

$$0 < \beta < \frac{\alpha}{\xi\rho(D^{-1}|B|)}, \quad \text{za} \quad \alpha < \xi\beta \quad \text{i} \quad \alpha < 1.$$

Budući da je $\xi \in (0, 1]$, odnos stare (isprekidana linija) i nove oblasti (puna) je sledeći.



Slika 4.3: Odnos oblasti konvergencije iz (4.13) i (4.17)

Numerički primeri

Da je poboljšanje teorijskih rezultata sa stanovišta praktičnih primena u smislu proširenja oblasti konvergencije značajno, ilustrujemo numeričkim primerima koji slede. Rezultate sistematizujemo tabelarno i prikazujemo grafički, crtajući oblasti za izbor relaksacionih parametara α i β i nivo površi spektralnog radijusa matrice $\mathcal{L}_{MSMAOR}(\alpha,\beta)$, nad ravni parametara α i β.

Videli smo da matrice $L_p (p = 1, 2, \dots, \ell)$ iz trougaonih multisplitinga sa dodatnom osobinom $\mathcal{M}(A) = D - |L_p| - |U_p| (p = 1, 2, \dots, \ell)$ možemo predstaviti kao $L_p = \Xi_p \circ (-A)$, pri čemu su $\Xi_p = [\xi^p_{i,j}]$ strogo donje trougaone matrice sa elementima iz intervala $[0, 1]$. Maksimalni element matrice Ξ_p označili smo sa ξ. Premda upotreba multisplitinga omogućava rad u višeprocesorskom ambijentu, problematiku analize oblasti konvergencije posmatraćemo pod pretpostavkom egzistencije samo jednog procesora ($\ell = 1$) i s tim u vezi nećemo pisati donje indekse, p. To implicira da je $E_p = E$, a zarad jednostavnosti birajmo $\Omega = D$. Jedan primer trougaonog (multi)splitinga H_+ matrice A, oblika $A = D - L - U$ koji ispunjava osobinu $\mathcal{M}(A) = D - |L| - |U|$ dajemo u nastavku.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{D} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}}_{L} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0.7 & 0 & 1 \\ 0 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}}_{U}.$$

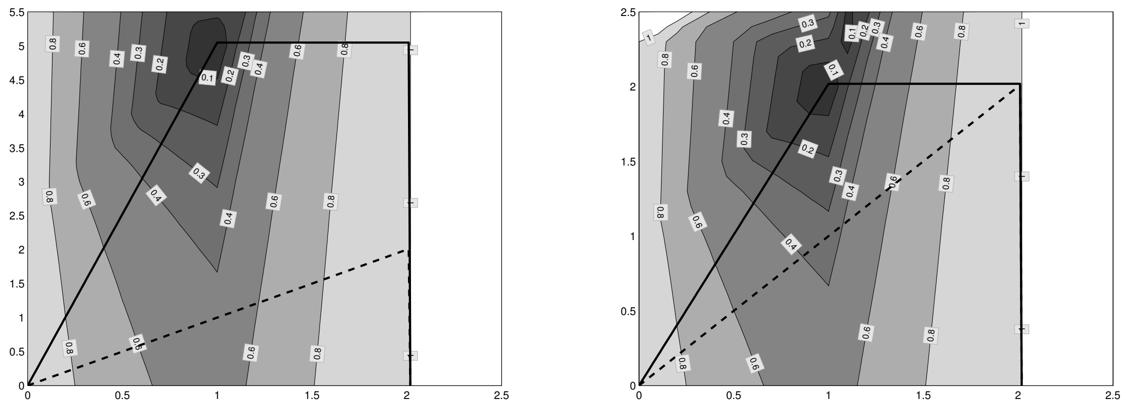
Primetimo, dakle, da je matrica L zapravo deo donjeg trougla iz standardnog razlaganja, dok matrica U obuhvata gornji trougao kao i ostatak donjeg trougla matrice A suprotnog znaka. Neka je standardno razlaganje matrice A dato sa $A = D_A - L_A - U_A$. Još jedno pojednostavljenje zarad lakše analize jeste pretpostavka o jednakosti elemenata matrice Ξ, pa je $L = \xi \cdot L_A$. Na osnovu učinjenih pretpostavki, uvrštavanjem istih u izraz za matricu *MSMAOR* postupka, nakon algebarskih sređivanja, dobijamo

$$\mathcal{L}_{MSMAOR}(\alpha,\beta) = \Big((1+\alpha)D - \beta\xi|L_A|\Big)^{-1}\Big[|1-\alpha|D + (\alpha-\beta)\xi|L_A| \\ +\alpha|D + \xi(L_A - A| + \alpha|D - A|\Big].$$

Rezultati praktičnih implementacija i numeričkih izračunavanja prezentovani su Tabelom 4.3, za svaku od matrica $A1 - A12$ ponaosob i $\xi \in \{0.4, 1\}$. Podaci sugerišu da proširenje oblasti konvergencije karakteriše i praktični značaj, budući da spektralni radijus matrice $\mathcal{L}_{MSMAOR}(\alpha,\beta)$ dostiže vidno manje vrednosti (CK_val) za izbor relaksacionih parametara iz proširene, od onih (BZ_val) koji odgovaraju izborima iz inicijalne oblasti, što slikovito ilustruju i grafici nivo površi spektralnog radijusa. Pri tome, oblasti izbora relaksacionih parametara date su isprekidanom odnosno punom linijom, za (4.13) i (4.17), respektivno.

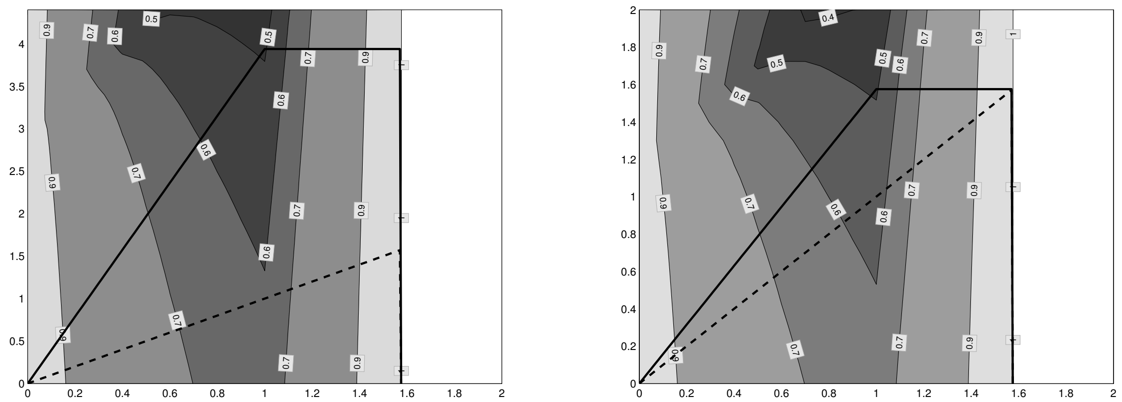
matrica	A1		A2		A3		A4		A5		A6	
ξ	0.4	1	0.4	1	0.4	1	0.4	1	0.4	1	0.4	1
BZ_val	0.4423	0.3369	0.6093	0.5606	0.3620	0.3146	0.4637	0.4125	0.5650	0.5157	0.7189	0.6785
CK_val	$2.72 \cdot 10^{-6}$	$2.72 \cdot 10^{-6}$	0.4937	0.5025	0.1095	0.1083	0.2409	0.2409	0.4324	0.4448	0.6502	0.6521
BZ_alpha	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
BZ_beta	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
CK_alpha	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
CK_beta	5	2	3.9	1.5	5.3	2.1	5	2	4.2	1.6	3.3	1.3
matrica	A7		A8		A9		A10		A11		A12	
ξ	0.4	1	0.4	1	0.4	1	0.4	1	0.4	1	0.4	1
BZ_val	0.7744	0.7393	0.8565	0.8320	0.6069	0.5580	0.6872	0.6091	0.6438	0.5976	0.7628	0.7262
CK_val	0.7213	0.7245	0.8259	0.8269	0.4909	0.4998	0.5364	0.5506	0.5462	0.5561	0.7074	0.7107
BZ_alpha	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
BZ_beta	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
CK_alpha	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
CK_beta	3.1	1.2	2.8	1.1	3.9	1.5	3.4	1.3	3.7	1.4	3.1	1.2

Tabela 4.3: Uporedni pregled minimuma spektralnih radijusa matrice $\mathcal{L}_{MSMAOR}(\alpha, \beta)$ za *MSMAOR* postupak



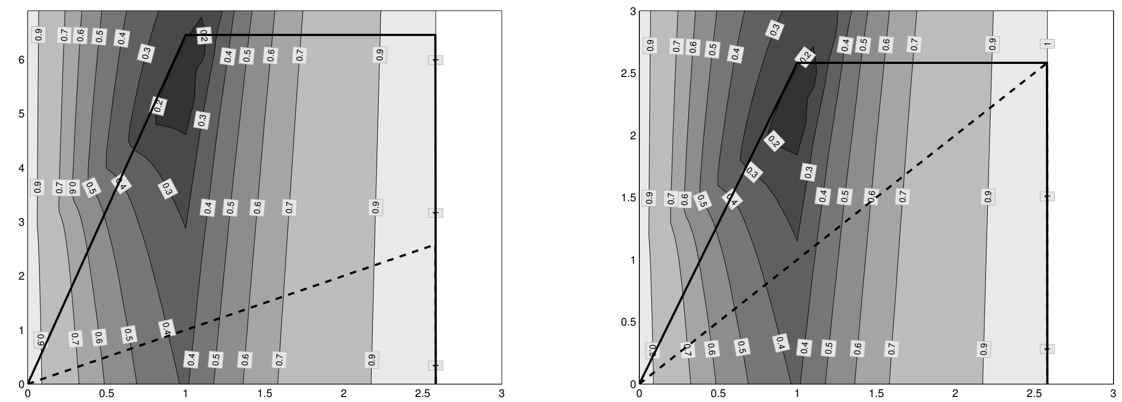
(a) $\xi = 0.4$ (b) $\xi = 1$

Slika 4.4: Nivo površi za $\rho(\mathcal{L}_{MSMAOR}(\alpha, \beta))$ i matricu A1 sa oblastima parametara



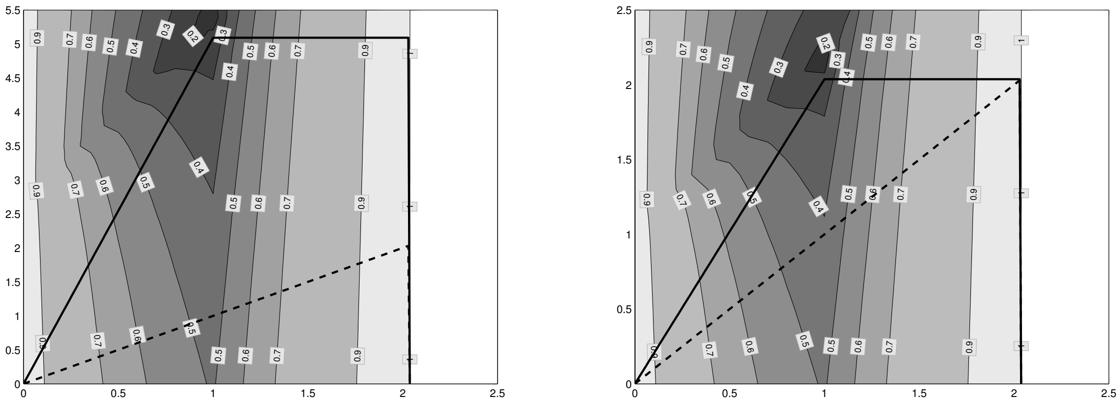
(a) $\xi = 0.4$ (b) $\xi = 1$

Slika 4.5: Nivo površi za $\rho(\mathcal{L}_{MSMAOR}(\alpha, \beta))$ i matricu A2 sa oblastima parametara



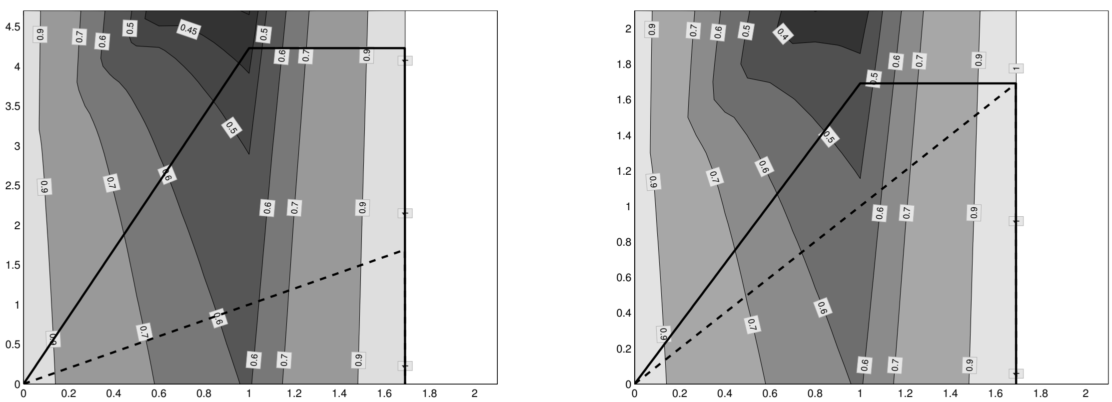
(a) $\xi = 0.4$ (b) $\xi = 1$

Slika 4.6: Nivo površi za $\rho(\mathcal{L}_{MSMAOR}(\alpha, \beta))$ i matricu A3 sa oblastima parametara



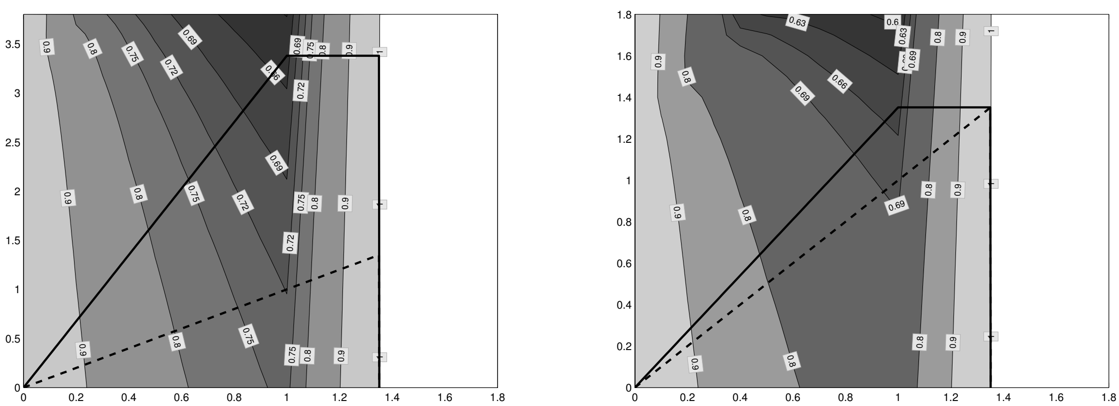
(a) $\xi = 0.4$ (b) $\xi = 1$

Slika 4.7: Nivo površi za $\rho(\mathcal{L}_{MSMAOR}(\alpha, \beta))$ i matricu A4 sa oblastima parametara



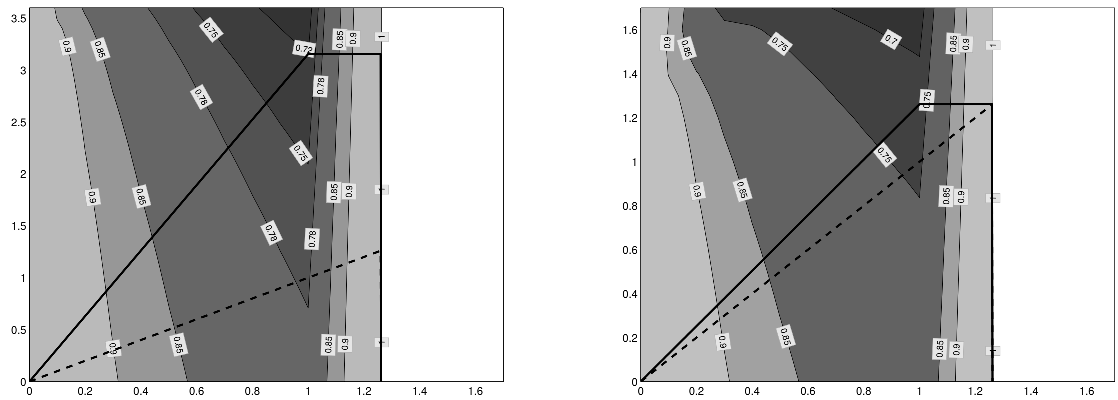
(a) $\xi = 0.4$ (b) $\xi = 1$

Slika 4.8: Nivo površi za $\rho(\mathcal{L}_{MSMAOR}(\alpha, \beta))$ i matricu A5 sa oblastima parametara



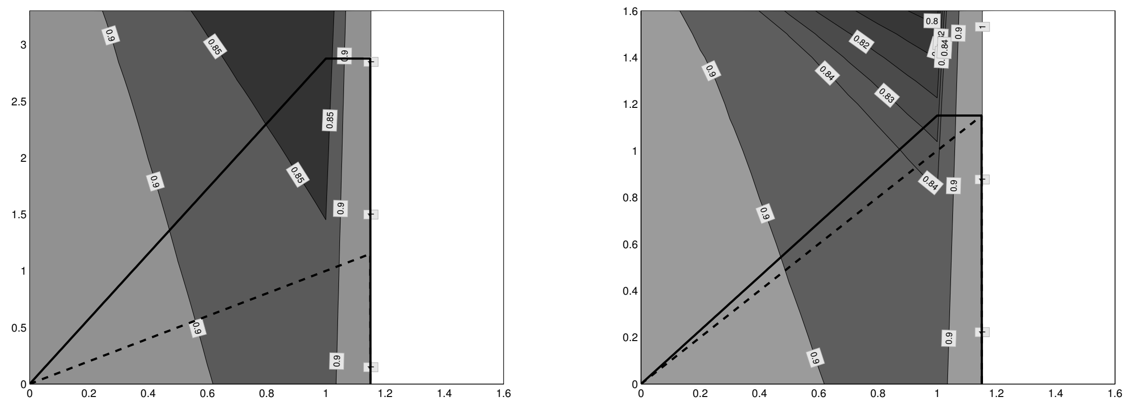
(a) $\xi = 0.4$ (b) $\xi = 1$

Slika 4.9: Nivo površi za $\rho(\mathcal{L}_{MSMAOR}(\alpha, \beta))$ i matricu A6 sa oblastima parametara



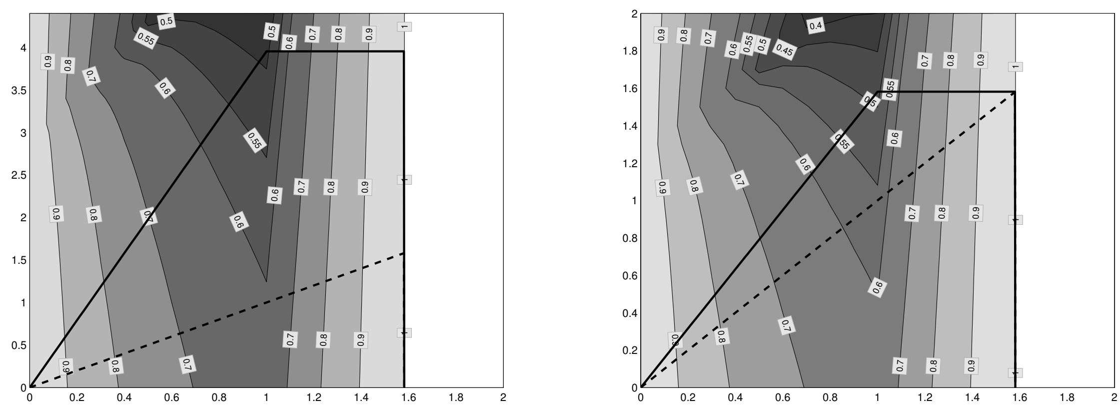
(a) $\xi = 0.4$ (b) $\xi = 1$

Slika 4.10: Nivo površi za $\rho(\mathcal{L}_{MSMAOR}(\alpha, \beta))$ i matricu A7 sa oblastima parametara



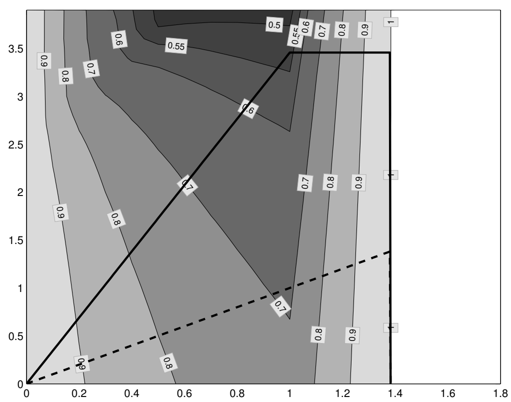
(a) $\xi = 0.4$ (b) $\xi = 1$

Slika 4.11: Nivo površi za $\rho(\mathcal{L}_{MSMAOR}(\alpha, \beta))$ i matricu A8 sa oblastima parametara

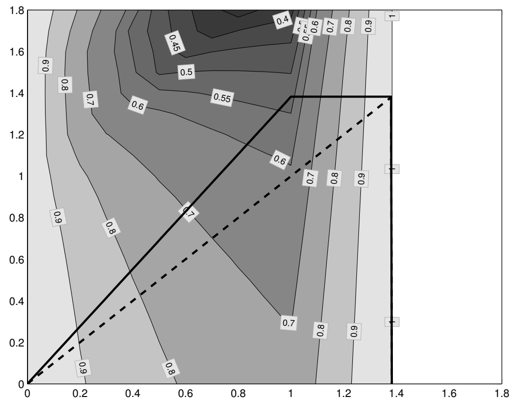


(a) $\xi = 0.4$ (b) $\xi = 1$

Slika 4.12: Nivo površi za $\rho(\mathcal{L}_{MSMAOR}(\alpha, \beta))$ i matricu A9 sa oblastima parametara

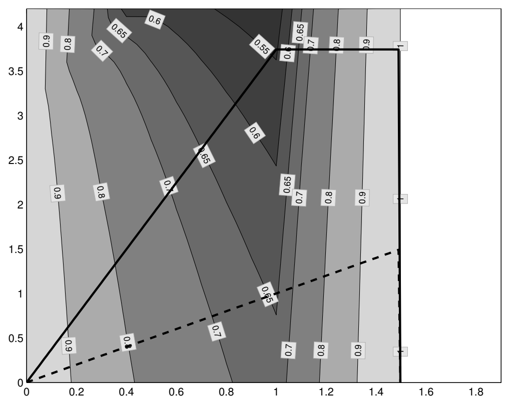


(a) $\xi = 0.4$

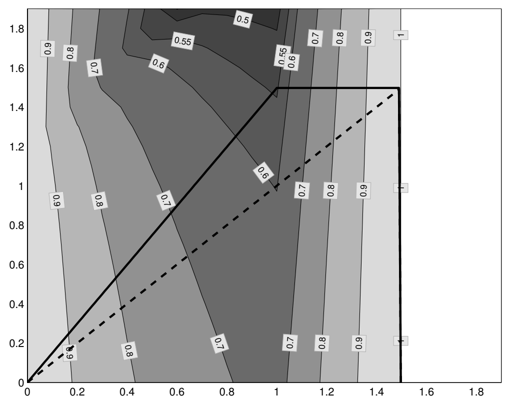


(b) $\xi = 1$

Slika 4.13: Nivo površi za $\rho(\mathcal{L}_{MSMAOR}(\alpha, \beta))$ i matricu A10 sa oblastima parametara

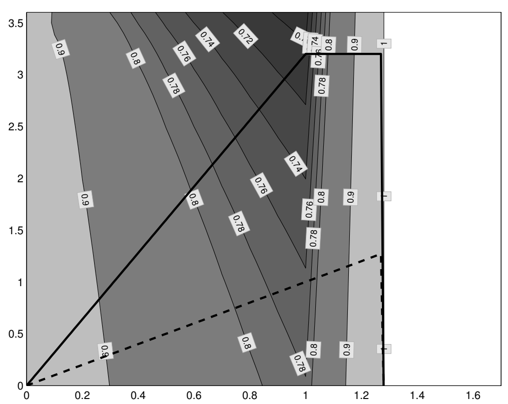


(a) $\xi = 0.4$

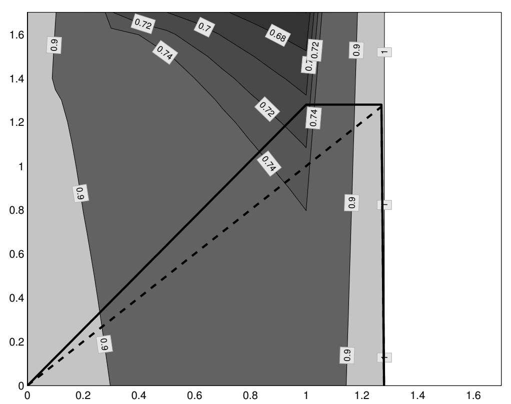


(b) $\xi = 1$

Slika 4.14: Nivo površi za $\rho(\mathcal{L}_{MSMAOR}(\alpha, \beta))$ i matricu A11 sa oblastima parametara



(a) $\xi = 0.4$



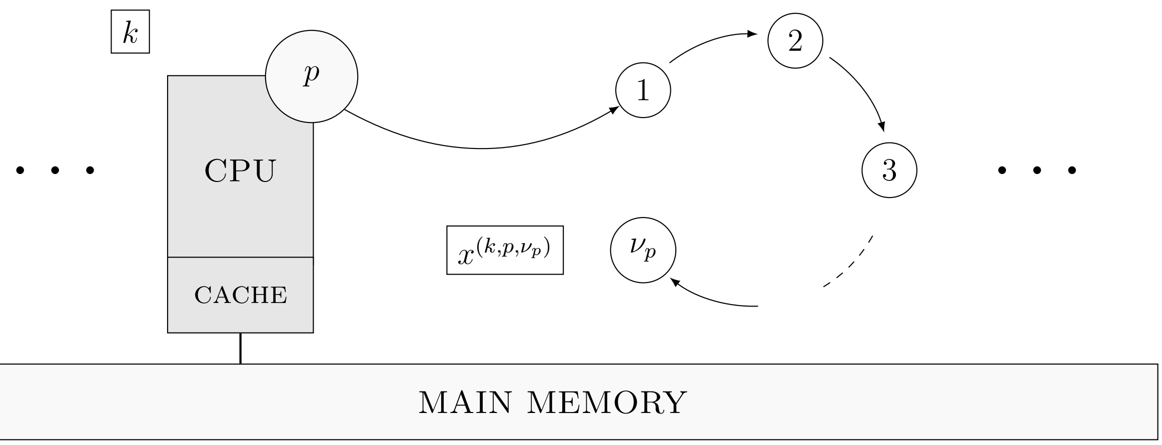
(b) $\xi = 1$

Slika 4.15: Nivo površi za $\rho(\mathcal{L}_{MSMAOR}(\alpha, \beta))$ i matricu A12 sa oblastima parametara

4.3 Postupci zasnovani na dvofaznim multisplitinzima

U prethodnoj sekciji posvećenoj *MSM* iterativnom metodu kao i relaksacionim varijantama istog, generalizovanima kroz *MSMAOR* postupak, istakli smo prednost upotrebe višeprocesorskih jedinica koju su uočili i formulisali Bai i Zhang. Pod pretpostavkom da na raspolaganju imamo ℓ procesorskih jedinica, možemo izvršiti multispliting matrice, $A = M_p - N_p, (p = 1, 2, \ldots, \ell)$, sa namerom da iskoristimo prednosti o kojima smo već govorili. Pa ipak, kada je reč o praktičnim primenama, ovi multisplitinzi su neretko uslovljeni samom prirodom inicijalnog problema, što može dovesti do neravnomerne distribucije zadataka među procesorima, a time i redukcije efekta rada u višeprocesorskom režimu. Između ostalog, budući da rešavanje podsistema linearnih jednačina datih sa (4.10), koji mogu biti velikih dimenzija, u svakoj iteraciji k i na svakom procesoru p može dodatno usporiti ceo proces, Bai i Zhang ponudili su novo rešenje u vidu dodatnog splitinga na nivou podsistema (4.10), a metod su nazvali modulskim sinhronim dvofaznim multisplitingom - *MSTM*. Pokazali su da drugi korak multisplitinga za rešavanje podsistema osim iterativnih postupaka može uključiti i relaksacione varijante, a numeričkim primerima ilustrovali su prednosti upotrebe dvofaznih multisplitinga (cf. [5]).

Definicija 15 *Neka je $(M_p, N_p, E_p)(p = 1, 2, \ldots, \ell)$ multispliting matrice sistema A za $LCP(q, A)$. Posmatrajmo i splitinge matrica M_p oblika $M_p = F_p - G_p$, redom za $p = 1, 2, \ldots, \ell$. Kolekcija uređenih trojki oblika $(M_p : F_p, G_p; N_p; E_p)(p = 1, 2, \ldots, \ell)$ reprezentuje **dvofazni multispliting** matrice A.*



Slika 4.16: Princip dvofaznog multisplitinga

Dvofazni multispliting predstavlja fundamentalni koncept koji pruža mogućnost za definisanje dvofazne sinhrone modulske iterativne metode, *MSTM*, gde je druga faza zasnovana na splitingu matrice M_p, $M_p = F_p - G_p(p = 1, 2, \ldots, \ell)$.

Metod 4 ***MSTM* za** $LCP(q, A)$

Neka je $(M_p : F_p, G_p; N_p; E_p)(p = 1, 2, \ldots, \ell)$ *dvofazni multispliting matrice* $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ *i* $\nu_p(p = 1, 2, \ldots, \ell)$ *prirodni brojevi. Za dati startni vektor* $z^{(0)} \in \mathbb{R}^n_+$ *i iteracije* $k \geq 0$, *sve dok se ne postigne konvergencija niza* $\{z^{(k)}\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n_+$, *računamo* $z^{(k+1)} \in \mathbb{R}^n_+$ *kao*

$$z^{(k+1)} = \frac{1}{\gamma}(|x^{(k+1)}| + x^{(k+1)}),$$

a $x^{(k+1)} \in \mathbb{R}^n$ *kao matričnu konveksnu kombinaciju*

$$x^{(k+1)} = \sum_{p=1}^{\ell} E_p x^{(k,p,\nu_p)},$$

pri čemu vektore $x^{(k,p,\nu_p)}$ $p = 1, 2, \ldots, \ell$ *nalazimo rešavajući sisteme linearnih jednačina*

$$\begin{cases} (\Omega + F_p)x^{(k,p,j+1)} = G_p x^{(k,p,j)} + b^{(k,p)} \\ \qquad p = 1, 2, \ldots, \ell \\ \qquad j = 0, 1, \ldots, \nu_p - 1 \end{cases} \tag{4.18}$$

gde su $b^{(k,p)} = N_p x^{(k)} + (\Omega - A)|x^{(k)}| - \gamma q$, $x^{(k,p,0)} = x^{(k)}$ *i* $x^{(0)} = \frac{1}{2}\gamma\Omega^{-1}((\Omega - A)z^{(0)} - q)$.

Kao što je to bio slučaj kod *MSM* metode, i *MSTM* iterativni postupak svoj potencijal ispoljava radom u režimu paralelnih izračunavanja. Metod 4 sa inicijalno sprovedenim dvofaznim multisplitingom funkcioniše na sledeći način. Imajući na raspolaganju ℓ procesora, svakom od njih u startu pridružimo odgovarajući dvofazni multispliting matrice, $A = F_p - G_p - N_p$, ponder E_p, $p = 1, 2, \ldots, \ell$, i definišemo proizvoljan prirodan broj ν_p koji će predstavljati broj podsistema koje ćemo rešavati na odgovarajućem procesoru p u svakoj iteraciji k. Rešavajući tih ν_p uvezanih sistema oblika (4.18) pronalazimo vektor $x^{(k,p,\nu_p)}$ kao međurezultat koji odgovara aktivnosti $p-$tog procesora u $k-$tom koraku. Zatim, konstruišemo matričnu konveksnu kombinaciju međurezultata $x^{(k,p,\nu_p)}$, pri čemu su koeficijenti u istoj matrice E_p, $p = 1, 2, \ldots, \ell$, i dobijamo vektor $x^{(k+1)}$, a odmah zatim i novu iteraciju u nizu aproksimacija rešenja $LCP(q, A)$, vektor $z^{(k+1)}$. Kao i kod Metode 2, svaki od ukupno ν_p podsistema (4.18) rešava se zasebno i nezavisno na odgovarajućem procesoru p. Matrice M_p, F_p i E_p, $p = 1, 2, \ldots, \ell$ moguće je izabrati na način koji će pospešiti ravnomerniju raspodelu zadataka u procesu izračunavanja, i time posredno uticati na brzinu. Ubrzanje se postiže i zavisno od izbora pondera E_p, budući da komponente vektora $x^{(k,p,\nu_p)}$ koje odgovaraju nulama na glavnoj dijagonali pondera nije potrebno računati. Izborom $\nu_p = 1$ i $G_p = 0$, $p = 1, 2, \ldots, \ell$, *MSTM* iterativni postupak svodimo na *MSM* metod, odnosno ne činimo drugi korak u multisplitingu.

Budući da Metod 4 podrazumeva rešavanje ν_p podsistema linearnih jednačina na odgovarajućem procesoru p u svakoj iteraciji k, pojednostavljenje u implementaciji može se postići specijalnim izborom forme splitinga, što će obezbediti da sistemi (4.18), koje je neophodno rešavati u svakoj iteraciji na odgovarajućem procesoru, budu donji trougaoni.

Tako dolazimo do pojma dvofaznog trougaonog multisplitinga.

DEFINICIJA 16 *Neka je $D = diag(A)$. Za svako $p = 1, 2, \dots, \ell$, definišemo sledeće delove matrice M_p: dijagonalne $D_p^{(M)} = diag(M_p)$, strogo donje trougaone $L_p^{(M)}$ i matrice $U_p^{(M)}$ sa nulama na dijagonali, tako da je ispunjeno $M_p = D_p^{(M)} - L_p^{(M)} - U_p^{(M)}$. Tada kolekciju uređenih trojki oblika $(M_p : D_p^{(M)} - L_p^{(M)}, U_p^{(M)}; N_p; E_p)(p = 1, 2, \dots, \ell)$ nazivamo* ***dvofazni trougaoni multispliting*** *matrice A.*

Specijalno birajući da su redom, za $p = 1, 2, \dots, \ell$,

$$F_p = \frac{1}{\alpha}(D_p^{(M)} - \beta L_p^{(M)}) \quad \text{i} \quad G_p = \frac{1}{\alpha}((1-\alpha)D_p^{(M)} + (\alpha - \beta)L_p^{(M)} + \alpha U_p^{(M)}),$$

MSTM postupak definisan Metodom 4 biva preveden u *MSTMAOR* varijantu, pri čemu su α i β parametri relaksacije. Iterativni postupci generalizovani *MSTMAOR* metodom prikazani su Tabelom 4.4, a kao i ranije, budući da druga faza u splitingu matrice M_p $(p = 1, 2, \dots, \ell)$ podrazumeva širu klasu od pojma standardnog razlaganja (matrica $U_p^{(M)}$ nije strogo gornja trougaona), odgovarajuća uopštenja nazivamo postupcima AOR tipa.

METOD 5 ***MSTMAOR* za $LCP(q, A)$**

Neka je $(M_p : D_p^{(M)} - L_p^{(M)}, U_p^{(M)}; N_p; E_p)(p = 1, 2, \dots, \ell)$ dvofazni trougaoni multispliting matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ i $\nu_p(p = 1, 2, \dots, \ell)$ prirodni brojevi. Za dati startni vektor $z^{(0)} \in \mathbb{R}^n_+$ i iteracije $k \geq 0$, sve dok se ne postigne konvergencija niza $\{z^{(k)}\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n_+$, računamo $z^{(k+1)} \in \mathbb{R}^n_+$ kao

$$z^{(k+1)} = \frac{1}{\gamma}(|x^{(k+1)}| + x^{(k+1)}),$$

a $x^{(k+1)} \in \mathbb{R}^n$ kao matričnu konveksnu kombinaciju

$$x^{(k+1)} = \sum_{p=1}^{\ell} E_p x^{(k,p,\nu_p)},$$

pri čemu vektore $x^{(k,p,\nu_p)}$ $p = 1, 2, \dots, \ell$ nalazimo rešavajući sisteme linearnih jednačina

$$(\alpha\Omega + D_p^{(M)} - \beta L_p^{(M)})x^{(k,p,j+1)} = \Big[(1-\alpha)D_p^{(M)} + (\alpha - \beta)L_p^{(M)} + \alpha U_p^{(M)}\Big]x^{(k,p,j)} + \alpha b^{(k,p)}$$

$$p = 1, 2, \dots, \ell$$

$$j = 0, 1, \dots, \nu_p - 1$$

gde su $b^{(k,p)} = N_p x^{(k)} + (\Omega - A)|x^{(k)}| - \gamma q$, $x^{(k,p,0)} = x^{(k)}$ i $x^{(0)} = \frac{1}{2}\gamma\Omega^{-1}((\Omega - A)z^{(0)} - q)$.

metod	*opis*	(α, β)
MSTMJ	modulski sinhroni dvofazni Jakobijev multispliting	$(1, 0)$
MSTMGS	modulski sinhroni dvofazni Gaus-Zajdelov multispliting	$(1, 1)$
MSTMSOR	modulski sinhroni dvofazni SOR multispliting	(α, α)

Tabela 4.4: Varijante *MSTMAOR* postupka

Konvergencija za MSTM i MSTMAOR

Po ugledu na rezultate o konvergenciji u prethodnoj sekciji vezanoj za postupke *MSM* i *MSMAOR*, i dvofazne varijante istih dale su slične rezultate. Uz uvodne pretpostavke kao kod pomenutih metoda, dodatno ćemo pretpostaviti da su $(M_p : F_p, G_p; N_p; E_p)(p = 1, 2, \dots, \ell)$ i $(M_p : D_p^{(M)} - L_p^{(M)}, U_p^{(M)}; N_p; E_p)(p = 1, 2, \dots, \ell)$ redom dvofazni multispliting i dvofazni trougaoni multispliting matrice A. Tada:

a) za *MSTM* metod važi

$$(\Omega + F_p)x_\star = G_p x_\star + N_p x_\star + (\Omega - A)|x_\star| - \gamma q, \quad p = 1, 2, \dots, \ell,$$

b) za *MSTMAOR* metod važi

$$\begin{aligned}(\alpha\Omega + D_p^{(M)} - \beta L_p^{(M)})x_\star = &\Big[(1-\alpha)D_p^{(M)} + (\alpha - \beta)L_p^{(M)} + \alpha U_p^{(M)}\Big]x_\star \\ &+ \alpha\Big[N_p x_\star + (\Omega - A)|x_\star| - \gamma q\Big], \quad p = 1, 2, \dots, \ell.\end{aligned}$$

U nastavku pažnju posvećujemo rezultatu koji su formulisali Bai i Zhang [5], vezanom za konvergenciju *MSTM* i *MSTMAOR* iterativnih postupaka.

TEOREMA 22 ***Konvergencija MSTM i MSTMAOR postupaka***

Neka je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ H_+ matrica, pri čemu su $D = diag(A)$, $B = D - A$ i neka su $(M_p : F_p, G_p; N_p; E_p)(p = 1, 2, \dots, \ell)$ i $(M_p : D_p^{(M)} - L_p^{(M)}, U_p^{(M)}; N_p; E_p)(p = 1, 2, \dots, \ell)$ redom dvofazni multispliting i dvofazni trougaoni multispliting matrice A. Pretpostavimo da je $\gamma > 0$ i da Ω kao pozitivna dijagonalna matrica ispunjava uslov $\Omega \geq D$.

i) Ako su $A = M_p - N_p$ i $M_p = F_p - G_p$ $(p = 1, 2, \dots, \ell)$ H-kompatibilni splitinzi, tada iterativni niz $\{z^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ generisan MSTM iterativnim postupkom konvergira ka jedinstvenom rešenju $z_\star$ za $LCP(q, A)$ za svaki startni vektor $z^{(0)} \in \mathbb{R}_+^n$ i proizvoljne prirodne brojeve $\nu_p(p = 1, 2, \dots, \ell)$.

ii) Ako su $A = M_p - N_p(p = 1, 2, \dots, \ell)$ H-kompatibilni splitinzi i ako $M_p = D - L_p^{(M)} - U_p^{(M)}(p = 1, 2, \dots, \ell)$ zadovoljavaju osobinu $\mathcal{M}(M_p) = D - |L_p^{(M)}| - |U_p^{(M)}|(p = 1, 2, \dots, \ell)$, pri čemu je $diag(M_p) = D$, tada iterativni niz $\{z^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ generisan MSTMAOR iterativnim postupkom konvergira ka jedinstvenom rešenju

$z_\star$ za $LCP(q,A)$ za svaki startni vektor $z^{(0)} \in \mathbb{R}^n_+$ i proizvoljne prirodne brojeve $\nu_p (p = 1, 2, \ldots, \ell)$, pod uslovom da relaksacione parametre α i β biramo tako da važi

$$0 < \beta \leq \alpha < \frac{1}{\rho(D^{-1}|B|)}. \tag{4.19}$$

DOKAZ: Po načinu na koji je metod *MSTM* definisan, znamo da $x^{(k+1)} = \sum_{p=1}^{\ell} E_p x^{(k,p,\nu_p)}$, $k \geq 0$, $p = 1, 2, \ldots, \ell$. Kao što smo videli, poznato je da se vektori $x^{(k,p,\nu_p)}$ dobijaju tako što svaki od ℓ procesora izračunava ν_p podsistema linearnih jednačina oblika

$$\begin{cases} (\Omega + F_p)x^{(k,p,j+1)} = G_p x^{(k,p,j)} + b^{(k,p)} \\ p = 1, 2, \ldots, \ell \\ j = 0, 1, \ldots, \nu_p - 1 \end{cases}$$

odnosno

$$\begin{aligned} x^{(k,p,j+1)} &= (\Omega + F_p)^{-1} G_p x^{(k,p,j)} + (\Omega + F_p)^{-1} b^{(k,p)} \\ &= \Big((\Omega + F_p)^{-1} G_p\Big)^{\nu_p} x^{(k)} + \sum_{i=0}^{\nu_p - 1} \Big((\Omega + F_p)^{-1} G_p\Big)^i (\Omega + F_p)^{-1} \\ &\qquad \cdot (N_p x^{(k)} + (\Omega - A)|x^{(k)}| - \gamma q) \end{aligned}$$

pa je nova iteracija niza $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} = \sum_{p=1}^{\ell} E_p \Big[\Big((\Omega + F_p)^{-1} G_p\Big)^{\nu_p} x^{(k)} + \sum_{i=0}^{\nu_p - 1} \Big((\Omega + F_p)^{-1} G_p\Big)^i (\Omega + F_p)^{-1} \\ \cdot (N_p x^{(k)} + (\Omega - A)|x^{(k)}| - \gamma q) \Big], \end{aligned} \tag{4.20}$$

dok vektor $x_\star$ zadovoljava sledeću jednakost

$$\begin{aligned} x_\star = \sum_{p=1}^{\ell} E_p \Big[\Big((\Omega + F_p)^{-1} G_p\Big)^{\nu_p} x_\star + \sum_{i=0}^{\nu_p - 1} \Big((\Omega + F_p)^{-1} G_p\Big)^i (\Omega + F_p)^{-1} \\ \cdot (N_p x_\star + (\Omega - A)|x_\star| - \gamma q) \Big]. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Oduzimajući (4.21) od (4.20) dobijamo grešku aproksimacije za *MSTM* metod

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} - x_\star = \sum_{p=1}^{\ell} E_p \Big[\Big((\Omega + F_p)^{-1} G_p\Big)^{\nu_p} (x^{(k)} - x_\star) + \sum_{i=0}^{\nu_p - 1} \Big((\Omega + F_p)^{-1} G_p\Big)^i (\Omega + F_p)^{-1} \\ \cdot (N_p (x^{(k)} - x_\star) + (\Omega - A)(|x^{(k)} - x_\star|)) \Big]. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Analognim postupkom moguće je izvesti izraz koji predstavlja grešku aproksimacije za *MSTMAOR* postupak,

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} - x_\star = \sum_{p=1}^{\ell} E_p \Big[&\Big((\alpha\Omega + D - \beta L_p^{(M)})^{-1} [(1-\alpha)D + (\alpha-\beta)L_p^{(M)} + \alpha U_p^{(M)}] \Big)^{\nu_p} \\ &\cdot (x^{(k)} - x_\star) \\ &+ \sum_{i=0}^{\nu_p - 1} \Big((\alpha\Omega + D - \beta L_p^{(M)})^{-1} [(1-\alpha)D + (\alpha-\beta)L_p^{(M)} + \alpha U_p^{(M)}] \Big)^{i} \\ &\cdot \alpha(\alpha\Omega + D - \beta L_p^{(M)})^{-1} \\ &\cdot (N_p(x^{(k)} - x_\star) + (\Omega - A)(|x^{(k)} - x_\star|)) \Big]. \end{aligned} \tag{4.23}$$

i) S obzirom da su $A = M_p - N_p (p = 1, 2, \ldots, \ell)$ H-kompatibilni splitinzi matrice A koja je H_+ matrica po pretpostavci, to je dati spliting i H-spliting, a time su matrice $M_p (p = 1, 2, \ldots, \ell)$ takođe u klasi H_+ matrica. Analogno, budući da $M_p = F_p - G_p (p = 1, 2, \ldots, \ell)$ predstavljaju H-kompatibilne splitinge matrica M_p za koje smo ustanovili da su H_+ i Ω po pretpostavci pozitivna dijagonalna matrica, zaključujemo da su F_p, a samim tim i matrice $\Omega + F_p (p = 1, 2, \ldots, \ell)$ takođe H_+. Stoga, pozivajući se na Teoremu 7, konstatujemo da

$$|(\Omega + F_p)^{-1}| \leq \mathcal{M}(\Omega + F_p)^{-1} = (\Omega + \mathcal{M}(F_p))^{-1}, \quad p = 1, 2, \ldots, \ell.$$

Posmatrajući apsolutne vrednosti grešaka aproksimacija u (4.22), odnosno ocene grešaka aproksimacije za *MSTM*, dobijamo

$$|x^{(k+1)} - x_\star| \leq \mathcal{L}_{MSTM} |x^{(k)} - x_\star|, \tag{4.24}$$

gde je

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MSTM} = \sum_{p=1}^{\ell} E_p \Big[&\Big((\Omega + \mathcal{M}(F_p))^{-1} |G_p| \Big)^{\nu_p} + \sum_{i=0}^{\nu_p - 1} \Big((\Omega + \mathcal{M}(F_p))^{-1} |G_p| \Big)^{i} \\ &\cdot (\Omega + \mathcal{M}(F_p))^{-1} (|N_p| + |\Omega - A|) \Big]. \end{aligned} \tag{4.25}$$

S obzirom da su $A = M_p - N_p$ i $M_p = F_p - G_p (p = 1, 2, \ldots, \ell)$ H-kompatibilni splitinzi, što znači da

$$\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(M_p) - |N_p| \quad \text{i} \quad \mathcal{M}(M_p) = \mathcal{M}(F_p) - |G_p|, \quad p = 1, 2, \ldots, \ell$$

to implicira da za svako $p = 1, 2, \ldots, \ell$ važi

$$|N_p| = \mathcal{M}(F_p) - |G_p| - \mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(F_p) - |G_p| - D + |B|. \tag{4.26}$$

Označimo sa $D_p^{(F)} = diag(F_p)$, $p = 1, 2, \ldots, \ell$. Tada su $D_p^{(F)} (p = 1, 2, \ldots, \ell)$ pozitivne dijagonalne matrice. Činjenica da je Ω takođe pozitivna dijagonalna povlači da su matrice $\Omega + D_p^{(F)} (p = 1, 2, \ldots, \ell)$ takođe pozitivne dijagonalne i da, s obzirom da su one time ujedno u klasi M-matrica, na osnovu Leme 3, imajući u vidu odnos $\Omega + \mathcal{M}(F_p) \leq \Omega + D_p^{(F)}$, važi

$$(\Omega + D_p^{(F)})^{-1} \leq (\Omega + \mathcal{M}(F_p))^{-1}, \quad p = 1, 2, \ldots, \ell. \tag{4.27}$$

Stoga, (4.25) i (4.26) kao i uslov $\Omega \geq D$ impliciraju

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{MSTM} &= \sum_{p=1}^{\ell} E_p \Big[\Big((\Omega + \mathcal{M}(F_p))^{-1} |G_p| \Big)^{\nu_p} + \sum_{i=0}^{\nu_p - 1} \Big((\Omega + \mathcal{M}(F_p))^{-1} |G_p| \Big)^i \\
&\qquad \cdot (\Omega + \mathcal{M}(F_p))^{-1} \Big((\Omega + \mathcal{M}(F_p)) - |G_p| - 2(D - |B|) \Big) \Big] \\
&= \sum_{p=1}^{\ell} E_p \Big[\Big((\Omega + \mathcal{M}(F_p))^{-1} |G_p| \Big)^{\nu_p} + \sum_{i=0}^{\nu_p - 1} \Big((\Omega + \mathcal{M}(F_p))^{-1} |G_p| \Big)^i \\
&\qquad \cdot \Big(E - (\Omega + \mathcal{M}(F_p))^{-1} (|G_p| + 2(D - |B|)) \Big) \Big] \\
&= E - 2 \sum_{p=1}^{\ell} E_p \sum_{i=0}^{\nu_p - 1} \Big((\Omega + \mathcal{M}(F_p))^{-1} |G_p| \Big)^i (\Omega + \mathcal{M}(F_p))^{-1} (D - |B|) \\
&= E - 2 \sum_{p=1}^{\ell} E_p \sum_{i=0}^{\nu_p - 1} \Big((\Omega + \mathcal{M}(F_p))^{-1} |G_p| \Big)^i (\Omega + \mathcal{M}(F_p))^{-1} D (E - J) \\
&< E - 2 \sum_{p=1}^{\ell} E_p \sum_{i=0}^{\nu_p - 1} \Big((\Omega + \mathcal{M}(F_p))^{-1} |G_p| \Big)^i (\Omega + \mathcal{M}(F_p))^{-1} D (E - J_\varepsilon).
\end{aligned}$$

Za $v_\varepsilon > 0$, čija je egzistencija zagarantovana na osnovu Peron-Frobenijusove teoreme, znamo da važi

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{MSTM} v_\varepsilon &< v_\varepsilon - 2 \sum_{p=1}^{\ell} E_p \sum_{i=0}^{\nu_p - 1} \Big((\Omega + \mathcal{M}(F_p))^{-1} |G_p| \Big)^i (\Omega + \mathcal{M}(F_p))^{-1} D (E - J_\varepsilon) v_\varepsilon \\
&= v_\varepsilon - 2(1 - \rho_\varepsilon) \sum_{p=1}^{\ell} E_p \sum_{i=0}^{\nu_p - 1} \Big((\Omega + \mathcal{M}(F_p))^{-1} |G_p| \Big)^i (\Omega + \mathcal{M}(F_p))^{-1} D v_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem (4.27) u pređašnju nejednakost i s obzirom da je $\rho_\varepsilon < 1$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{MSTM} v_\varepsilon &< v_\varepsilon - 2 \sum_{p=1}^{\ell} E_p \sum_{i=0}^{\nu_p - 1} \Big((\Omega + \mathcal{M}(F_p))^{-1} |G_p| \Big)^i (\Omega + \mathcal{M}(F_p))^{-1} D (E - J_\varepsilon) v_\varepsilon \\
&= v_\varepsilon - 2(1 - \rho_\varepsilon) \sum_{p=1}^{\ell} E_p \sum_{i=0}^{\nu_p - 1} \Big((\Omega + \mathcal{M}(F_p))^{-1} |G_p| \Big)^i (\Omega + \mathcal{M}(F_p))^{-1} D v_\varepsilon \\
&\leq v_\varepsilon - 2(1 - \rho_\varepsilon) \sum_{p=1}^{\ell} E_p (\Omega + \mathcal{M}(F_p))^{-1} D v_\varepsilon < v_\varepsilon,
\end{aligned}$$

što implicira da je $\rho(\mathcal{L}_{MSTM}) < 1$, čime je prvi deo dokaza kompletiran.

ii) Kao i u slučaju ocene greške aproksimacije za *MSTM* postupak, analognim procedurama stižemo do rezultata za *MSTMAOR* koji glasi

$$|x^{(k+1)} - x_\star| \le \mathcal{L}_{MSTMAOR}(\alpha,\beta)|x^{(k)} - x_\star|, \tag{4.28}$$

gde je

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_{MSTMAOR}(\alpha,\beta) = \\ &\sum_{p=1}^{\ell} E_p\Big[\Big((\alpha\Omega + D - \beta|L_p^{(M)}|)^{-1}[|1-\alpha|D + (\alpha-\beta)|L_p^{(M)}| + \alpha|U_p^{(M)}|]\Big)^{\nu_p} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{\nu_p-1}\Big((\alpha\Omega + D - \beta|L_p^{(M)}|)^{-1}[|1-\alpha|D + (\alpha-\beta)|L_p^{(M)}| + \alpha|U_p^{(M)}|]\Big)^{i} \\ &\quad \cdot\alpha(\alpha\Omega + D - \beta|L_p^{(M)}|)^{-1}(|N_p| + |\Omega - A|)\Big]. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Dakle, da bismo pokazali konvergenciju postupka, dovoljno je pokazati da je $\rho(\mathcal{L}_{MSTMAOR}(\alpha,\beta)) < 1$.

Kako je $|\Omega - A| = |\Omega - D + B| = |\Omega - D| + |B| = (\Omega - D) + |B|$ i

$$\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(M_p) - |N_p|, \quad \mathcal{M}(M_p) = D - |L_p^{(M)}| - |U_p^{(M)}|, \quad p = 1,2,\ldots,\ell$$

to za sve $p = 1,2,\ldots,\ell$ važi

$$\alpha(|N_p|+|\Omega-A|) = (\alpha\Omega+D-\beta|L_p^{(M)}|)-[(1+\alpha)D+(\alpha-\beta)|L_p^{(M)}|+\alpha|U_p^{(M)}|-2\alpha|B|]$$

i

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha\Omega + D - \beta|L_p^{(M)}|)^{-1}(|N_p| + |\Omega - A|) &= E - (\alpha\Omega + D - \beta|L_p^{(M)}|)^{-1} \\ &\cdot\Big[(|1-\alpha|D + (\alpha-\beta)|L_p^{(M)}| + \alpha|U_p^{(M)}|) \\ &+((1+\alpha-|1-\alpha|)D - 2\alpha|B|)\Big]. \end{aligned}$$

Tada, iz (4.29) sledi da

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MSTMAOR}(\alpha,\beta) = E - \sum_{p=1}^{\ell} E_p \sum_{i=0}^{\nu_p-1} &\Big((\alpha\Omega + D - \beta|L_p^{(M)}|)^{-1} \\ &\cdot[|1-\alpha|D + (\alpha-\beta)|L_p^{(M)}| + \alpha|U_p^{(M)}|]\Big)^{i} \\ &\cdot(\alpha\Omega + D - \beta|L_p^{(M)}|)^{-1}[(1+\alpha-|1-\alpha|)D - 2\alpha|B|]. \end{aligned}$$

osnosno, moženjem sa $v_\varepsilon > 0$ dobijamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{MSTMAOR}(\alpha,\beta)v_\varepsilon &= v_\varepsilon - \sum_{p=1}^{\ell} E_p \sum_{i=0}^{\nu_p-1} \Big((\alpha\Omega + D - \beta|L_p^{(M)}|)^{-1} \\
&\quad \cdot [|1-\alpha|D + (\alpha-\beta)|L_p^{(M)}| + \alpha|U_p^{(M)}|]\Big)^i \\
&\quad \cdot (\alpha\Omega + D - \beta|L_p^{(M)}|)^{-1}[(1+\alpha-|1-\alpha|)D - 2\alpha|B|]v_\varepsilon \\
&< v_\varepsilon - \sum_{p=1}^{\ell} E_p \sum_{i=0}^{\nu_p-1} \Big((\alpha\Omega + D - \beta|L_p^{(M)}|)^{-1} \\
&\quad \cdot [|1-\alpha|D + (\alpha-\beta)|L_p^{(M)}| + \alpha|U_p^{(M)}|]\Big)^i \\
&\quad \cdot (\alpha\Omega + D - \beta|L_p^{(M)}|)^{-1}D[(1+\alpha-|1-\alpha|)E - 2\alpha J_\varepsilon]v_\varepsilon \\
&= v_\varepsilon - \theta_\varepsilon \sum_{p=1}^{\ell} E_p \sum_{i=0}^{\nu_p-1} \Big((\alpha\Omega + D - \beta|L_p^{(M)}|)^{-1} \\
&\quad \cdot [|1-\alpha|D + (\alpha-\beta)|L_p^{(M)}| + \alpha|U_p^{(M)}|]\Big)^i \\
&\quad \cdot (\alpha\Omega + D - \beta|L_p^{(M)}|)^{-1}Dv_\varepsilon,
\end{aligned}$$

pri čemu je $\theta_\varepsilon = 1+\alpha-|1-\alpha|-2\alpha\rho_\varepsilon$. Uslov $0<\alpha<\dfrac{1}{\rho(D^{-1}|B|)}$ implicira da

$$\theta := 1+\alpha-|1-\alpha|-2\alpha\rho(J) > 0,$$

na osnovu neprekidnosti spektralnog radijusa i izbora da je ε dovoljno malo tako da je $\theta_\varepsilon > 0$. S obzirom da su matrice $\Omega + F_p$ H_+ matrice, jasno je da su i $\alpha(\Omega + F_p) = \alpha\Omega + D - \beta L_p^{(M)}$ takođe u toj klasi. Budući da je odnos njihovih pridruženih matrica koje su u klasi M matrica u odnosu na M-matricu $\alpha\Omega + D$ dat kao

$$\alpha\Omega + D - \beta|L_p^{(M)}| \leq \alpha\Omega + D,$$

to na osnovu Leme 3 znamo odnos njihovih inverznih matrica,

$$(\alpha\Omega + D - \beta|L_p^{(M)}|)^{-1} \geq (\alpha\Omega + D)^{-1}. \tag{4.30}$$

Za kraj konstatujemo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{MSTMAOR}(\alpha,\beta)v_\varepsilon &\leq v_\varepsilon - \theta_\varepsilon \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\alpha\Omega + D - \beta|L_p^{(M)}|)^{-1}Dv_\varepsilon \\
&\leq v_\varepsilon - \theta_\varepsilon \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\alpha\Omega + D)^{-1}Dv_\varepsilon \\
&= v_\varepsilon - \theta_\varepsilon(\alpha\Omega + D)^{-1}Dv_\varepsilon \\
&< v_\varepsilon,
\end{aligned}$$

što povlači da je $\rho(\mathcal{L}_{MSTMAOR}(\alpha,\beta)) < 1$. $\triangle$

Poboljšanje oblasti konvergencije za MSTMAOR

Teorema 22 ustanovila je rezultat o konvergenciji postupaka *MSTM* i *MSTMAOR*. Pa ipak, kao i ranije, relaksaciona varijanta zadržala je uslov o specifičnom odnosu parametara α i β, budući da su Bai i Zhang [5] dokazali konvergenciju pretpostavivši odnos $\alpha \geq \beta$. Međutim, ova pretpostavka je i u ambijentu dvofaznih multisplitinga restriktivna, te može biti izbegnuta, bez narušavanja konvergencije niza aproksimacija. U tom smislu, Cvetković-Kostić-Šanca popravka [12] rezultirala je činjenicom da novi uslov na izbor relaksacionih parametara produkuje širu oblast konvergencije za izbor relaksacionih parametara, koja sadrži i staru, kao i one izbore relaksacionih parametara koji ubrzavaju konvergenciju iterativnog niza ka tačnom rešenju za $LCP(q, A)$, a koji ranije nisu bili obuhvaćeni.

Pre svega, prema formi dvofaznog multisplitinga iz uslova $ii)$ Teoreme 22, primetimo da je matricu $L_p^{(M)}$ moguće predstaviti kao $L_p^{(M)} = \Xi_p \circ (-M_p)$, $p = 1, 2, \ldots, \ell$, pri čemu je $\circ$ oznaka za Adamarov proizvod, a matrica $\Xi_p = [\xi_{ij}^p]$ po elementima definisana kao

$$0 \leq \xi_{ij}^p \leq 1, \quad \text{za } 1 \leq j < i \leq n, \qquad \text{i} \qquad \xi_{ij}^p = 0, \quad \text{inače.}$$

Dalje, za $p = 1, 2, \ldots, \ell$, možemo smatrati da je $M_p = \Theta_p \circ A$, gde je matrica $\Theta_p = [\theta_{ij}^p]$ takva da su joj elementi

$$0 \leq \theta_{ij}^p \leq 1, \quad \text{za} \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

S tim u vezi, uvodimo i sledeće oznake

$$\xi := \max_{1\leq p\leq \ell} \max_{1\leq j<i\leq n} \xi_{ij}^p, \qquad \theta := \max_{1\leq p\leq \ell} \max_{1\leq j<i\leq n} \theta_{ij}^p \tag{4.31}$$

koje se lako određuju na konkretnim podacima.

TEOREMA 23 ***Poboljšanje oblasti konvergencije za MSTMAOR***

Teorema 22 je tačna i ako se uslov za izbor relaksacionih parametara formuliše kao

$$\beta \geq 0 \quad i \quad \Big(\theta \max\{\alpha, \xi\beta\} + (1-\theta)\alpha\Big)\rho(D^{-1}|B|) < \min\{1, \alpha\}, \tag{4.32}$$

što je ekvivalentno sa

$$0 < \alpha < \frac{1}{\rho(D^{-1}|B|)}, \quad 0 \leq \beta < \frac{\min\{1,\alpha\} - (1-\theta)\alpha\rho(D^{-1}|B|)}{\xi\theta\rho(D^{-1}|B|)}. \tag{4.33}$$

DOKAZ: Najpre ćemo se uveriti da Teorema 22 važi i u slučaju da se uslov iz iste oslabi kao što je predloženo relacijama (4.32), a potom ćemo, po završetku dokaza, prokomentarisati da su zapisi (4.32) i (4.33) zaista ekvivalentni.

Zarad jednostavnosti zapisa, predlažemo sledeću pojednostavljenu notaciju:

$$\Phi_p := \Big(\alpha\Omega + D - \beta L_p^{(M)}\Big)^{-1}\Big((1-\alpha)D + (\alpha-\beta)L_p^{(M)} + \alpha U_p^{(M)}\Big) \tag{4.34}$$

i

$$\psi_p(x) := \alpha\Big(\alpha\Omega + D - \beta L_p^{(M)}\Big)^{-1}\Big(N_p x + (\Omega - A)|x| - \gamma q\Big). \tag{4.35}$$

Tada, za svako $k \geq 0$, $p = 1, 2, \ldots, \ell$ i $j = 0, 1, \ldots, \nu_p - 1$ imamo da je $x^{(k,p,j+1)} = \Phi_p x^{(k,p,j+1)} + \psi_p(x^{(k)})$, i stoga, za svako $k \geq 0$ imamo da je

$$x^{(k+1)} = \sum_{p=1}^{\ell} E_p\Big[(\Phi_p)^{\nu_p} x^{(k)} + \Big(\sum_{i=0}^{\nu_p-1}(\Phi_p)^i\Big)\psi_p(x^{(k)})\Big].$$

Sa druge strane, $x_\star = \Phi_p x_\star + \psi_p(x_\star)$, $p = 1, 2, \ldots, \ell$, pa za svako $k \geq 0$ definišemo grešku aproksimacije

$$x^{(k+1)} - x_\star = \sum_{p=1}^{\ell} E_p\Big[(\Phi_p)^{\nu_p}(x^{(k)} - x_\star) + \Big(\sum_{i=0}^{\nu_p-1}(\Phi_p)^i\Big)\Big(\psi_p(x^{(k)}) - \psi_p(x_\star)\Big)\Big].$$

Budući da je matrica $\alpha\Omega + D - \beta L_k^{(M)}$ donja trougaona sa pozitivnim dijagonalnim elementima, ona ujedno pripada i klasi H_+, pa znamo da

$$\Big|\Big(\alpha\Omega + D - \beta L_p^{(M)}\Big)^{-1}\Big| \leq \Big(\alpha\Omega + D - \beta|L_p^{(M)}|\Big)^{-1} \quad (p = 1, \ldots, \ell).$$

Stoga je, s obzirom da važi $A \leq |A|$, $\forall A \in \mathbb{C}^{n,n}$, moguće oceniti (4.34) u matričnom smislu sa

$$\Phi_p \leq \widehat{\Phi}_p := \Big(\alpha\Omega + D - \beta|L_p^{(M)}|\Big)^{-1}\Big|(1-\alpha)D + (\alpha - \beta)L_p^{(M)} + \alpha U_p^{(M)}\Big|.$$

Šta više, s obzirom da za $p = 1, 2, \ldots, \ell$ imamo $M_p = D - L_p^{(M)} - U_p^{(M)}$, to sledi da je

$$\widehat{\Phi}_p = \Big(\alpha\Omega + D - \beta|L_p^{(M)}|\Big)^{-1}\Big(|1-\alpha|D + |\alpha(D - M_p) - \beta L_p^{(M)}|\Big).$$

Na osnovu obrnute nejednakosti trougla za apsolutnu vrednost, $||x^{(k)}| - |x_\star|| \leq |x^{(k)} - x_\star|$, zaključujemo da je

$$\Big|\psi_p(x^{(k)}) - \psi_p(x_\star)\Big| \leq \alpha\Big(\alpha\Omega + D - \beta|L_p^{(M)}|\Big)^{-1}\Big(|N_p| + |\Omega - A|\Big)|x^{(k)} - x_\star|.$$

Ako označimo $\widehat{\Psi}_p := \alpha\Big(\alpha\Omega + D - \beta|L_p^{(M)}|\Big)^{-1}\Big(|N_p| + |\Omega - A|\Big)$, nalazimo da je ocena greške aproksimacije

$$|x^{(k+1)} - x_\star| \leq \mathcal{L}_{\alpha,\beta}|x^{(k)} - x_\star|,$$

gde je

$$\mathcal{L}_{MSTMAOR}(\alpha,\beta) = \mathcal{L}_{\alpha,\beta} := \sum_{p=1}^{\ell} E_p\Big[(\widehat{\Phi}_p)^{\nu_p} + \Big(\sum_{i=0}^{\nu_p-1}(\widehat{\Phi}_p)^i\Big)\widehat{\Psi}_p\Big],$$

ili, ekvivalentno,

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta} := E - \sum_{p=1}^{\ell} E_p \Big(\sum_{i=0}^{\nu_p - 1} (\widehat{\Phi}_p)^i \Big) \Big(E - \widehat{\Phi}_p - \widehat{\Psi}_p \Big). \tag{4.36}$$

Dakle, da bismo dokazali konvergenciju, dovoljno je pokazati $\rho\Big(\mathcal{L}_{\alpha,\beta}\Big) < 1$. Budući da je za $p = 1, 2, \ldots, \ell$, $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(M_p) - |N_p|$, $\mathcal{M}(M_p) = D - |L_p^{(M)}| - |U_p^{(M)}|$ i $|\Omega - A| = (\Omega - D) + |B|$, sledi da je

$$\alpha\Big(|N_p| + |\Omega - A|\Big) = \alpha\Big(|N_p| + \Omega - \mathcal{M}(M_p) + |N_p|\Big) =$$

$$= \Big(\alpha\Omega + D - \beta|L_p^{(M)}|\Big) - \Big((1+\alpha)D - \beta|L_p^{(M)}| - \alpha(D - \mathcal{M}(M_p)) - 2\alpha|N_p|\Big),$$

što povlači da

$$\widehat{\Psi}_p = E - \Big(\alpha\Omega + D - \beta|L_p^{(M)}|\Big)^{-1}\Big((1+\alpha)D - \beta|L_p^{(M)}| - \alpha(D - \mathcal{M}(M_p)) - 2\alpha|N_p|\Big).$$

No, tada je

$$E - \widehat{\Phi}_p - \widehat{\Psi}_p := \Big(\alpha\Omega + D - \beta|L_p^{(M)}|\Big)^{-1} \cdot C_p,$$

uz napomenu da je

$$C_p := \Big((1+\alpha-|1-\alpha|)D - \alpha(D - \mathcal{M}(M_p)) - \beta|L_p^{(M)}| - |\alpha(D - M_p) - \beta L_p^{(M)}| - 2\alpha|N_p|\Big).$$

Uočimo da je $1 + \alpha - |1 - \alpha| = 2\min\{1, \alpha\}$, te da

$$\Big(- \alpha(D - \mathcal{M}(M_p)) - \beta|L_p^{(M)}|\Big)_{ij} = \begin{cases} 0\,, & j = i\,, \\ -\alpha\theta_{ij}^p|a_{ij}|\,, & j > i\,, \\ -\theta_{ij}^p(\alpha + \beta\xi_{ij}^p)|a_{ij}|\,, & j < i\,, \end{cases}$$

i

$$\Big(- |\alpha(D - M_p) - \beta L_p^{(M)}|\Big)_{ij} = \begin{cases} 0\,, & j = i\,, \\ -\alpha\theta_{ij}^p|a_{ij}|\,, & j > i\,, \\ -\theta_{ij}^p|\alpha - \beta\xi_{ij}^p||a_{ij}|\,, & j < i\,, \end{cases}$$

pa je

$$(C_p)_{ij} = \begin{cases} 2\min\{1, \alpha\}a_{ii}\,, & j = i\,, \\ -2\alpha|a_{ij}|\,, & j > i\,, \\ -2\Big(\theta_{ij}^p \max\{\alpha, \xi_{ij}^p\beta\} + (1 - \theta_{ij}^p)\alpha\Big)|a_{ij}|\,, & j < i\,, \end{cases}$$

za $i, j \in N_n$.
Uz konstataciju da je funkcija $\theta_{ij}^p \max\{\alpha, \xi_{ij}^p\beta\} + (1 - \theta_{ij}^p)\alpha$ neopadajuća po θ_{ij}^p, na osnovu (4.31) zaključujemo da

$$-C_p \leq -2\min\{1,\alpha\}D + 2\Big(\theta \max\{\alpha, \xi\beta\} + (1-\theta)\alpha\Big)|B|,$$

i otuda, uz oznaku $\mu := \theta \max\{\alpha, \xi\beta\} + (1-\theta)\alpha$,

$$-(E - \widehat{\Phi}_p - \widehat{\Psi}_p) \leq -2\Big(\alpha\Omega + D - \beta|L_p^{(M)}|\Big)^{-1} D\Big(\min\{1,\alpha\}E - \mu D^{-1}|B|\Big). \quad (4.37)$$

Kako je $\rho(D^{-1}|B|) = \rho(J) < 1$, kao i ranije, možemo izabrati dovoljno malo $\varepsilon > 0$ tako da $\rho_\varepsilon < 1$, pa tada, na osnovu Peron-Frobenijusove teoreme, postoji pozitivan vektor, $v_\varepsilon > 0$, takav da $J_\varepsilon v_\varepsilon = \rho_\varepsilon v_\varepsilon$, te množeći (4.37) sa $v_\varepsilon > 0$, dobijamo

$$-(E - \widehat{\Phi}_p - \widehat{\Psi}_p)v_\varepsilon \leq -2c_\varepsilon\Big(\alpha\Omega + D - \beta|L_p^{(M)}|\Big)^{-1} Dv_\varepsilon,$$

sa $c_\varepsilon := \min\{1,\alpha\} - \mu\rho_\varepsilon$ i na osnovu (4.36) nalazimo

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta}\, v_\varepsilon \leq v_\varepsilon - 2c_\varepsilon \sum_{p=1}^{\ell} E_p\Big(\sum_{i=0}^{\nu_p-1}(\widehat{\Phi}_p)^i\Big)(\alpha\Omega + D - \beta|L_p^{(M)}|)^{-1} Dv_\varepsilon. \quad (4.38)$$

Primetimo, (4.32) garantuje egzistenciju dovoljno malog $\varepsilon > 0$ sa osobinom da $c_\varepsilon > 0$. Znajući da su matrice $\widehat{\Phi}_p$, $p = 1, \ldots, \ell$, nenegativne, nejednakost (4.38) postaje

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta}\, v_\varepsilon \leq v_\varepsilon - 2c_\varepsilon \sum_{p=1}^{\ell} E_p(\alpha\Omega + D - \beta|L_p^{(M)}|)^{-1} Dv_\varepsilon.$$

Na osnovu (4.30) zaključujemo

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta}\, v_\varepsilon \leq v_\varepsilon - 2c_\varepsilon \sum_{k=1}^{\ell} E_k(\alpha\Omega + D)^{-1} Dv_\varepsilon = (\alpha\Omega + D)^{-1}\Big(\alpha\Omega + (1-2c_\varepsilon)D\Big)v_\varepsilon.$$

Ostaje da uočimo da $c_\varepsilon > 0$ znači da je $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}\, v_\varepsilon < v_\varepsilon$, što implicira $\rho\Big(\mathcal{L}_{\alpha,\beta}\Big) < 1$, čime je prvi deo tvrđenja pokazan. $\triangle$

Kao i u slučaju *MSMAOR* postupka, pokazaćemo da nova oblast (4.32) predstavlja proširenje, te da obuhvata i staru oblast konvergencije (4.19). Bai i Zhang su i u slučaju dvofazne varijante pretpostavili da oba relaksaciona parametra α i β pripadaju intervalu $\Big(0, \dfrac{1}{\rho(D^{-1}|B|)}\Big)$, ali i da je $\alpha \geq \beta$, pa je oblast konvergencije u $(\alpha,\beta)-$ravni, kao i ranije (videti sliku 4.2).

Sa druge strane, posmatrajmo novu oblast definisanu sa (4.17). Pokažimo da je ona zaista šira i da u tom smislu sadrži staru. Stoga, da je

$$\Big(\theta \max\{\alpha, \xi\beta\} + (1-\theta)\alpha\Big)\rho(D^{-1}|B|) < \min\{1,\alpha\},$$

potrebno je da *istovremeno* važi

$$0 < \alpha < \frac{1}{\rho(D^{-1}|B|)}, \quad \text{za} \quad \alpha \geq \xi\beta \quad \text{i} \quad \alpha \geq 1,$$

$$0 < \alpha < \frac{\alpha}{\rho(D^{-1}|B|)}, \quad \text{za} \quad \alpha \geq \xi\beta \quad \text{i} \quad \alpha < 1,$$

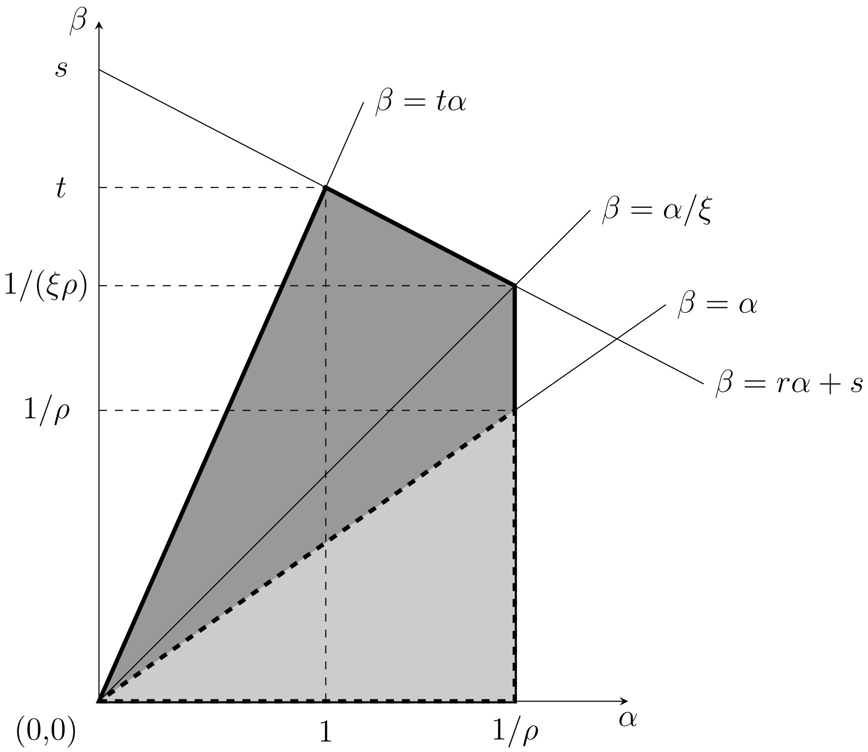
$$0 < \beta < \frac{\min\{1,\alpha\} - (1-\theta)\alpha\rho(D^{-1}|B|)}{\xi\theta\rho(D^{-1}|B|)}, \quad \text{za} \quad \alpha < \xi\beta.$$

Primetimo i da se gornja granica za parametar β može zapisati kao

$$\frac{\min\{1,\alpha\} - (1-\theta)\alpha\rho(D^{-1}|B|)}{\xi\theta\rho(D^{-1}|B|)} = \begin{cases} -\dfrac{1-\theta}{\xi\theta}\alpha + \dfrac{1}{\xi\theta\rho(D^{-1}|B|)} & \text{za} \quad \alpha \geq 1, \\ \dfrac{1-(1-\theta)\rho(D^{-1}|B|)}{\xi\theta\rho(D^{-1}|B|)}\alpha & \text{za} \quad \alpha < 1. \end{cases}$$

Budući da su $\xi, \theta \in (0,1]$, to implicira da su stara (deblja crna isprekidana linija) i nova oblast (puna) u odnosu koji ilustruje slika u nastavku. Pri tome, uvodimo skraćene oznake:

$$\rho := \rho(D^{-1}|B|), \qquad r := -\frac{1-\theta}{\xi\theta}, \qquad s := \frac{1}{\xi\theta\rho}, \qquad t := \frac{1-(1-\theta)\rho}{\xi\theta\rho}.$$



Slika 4.17: Odnos oblasti konvergencije iz (4.19) i (4.32)

Numerički primeri

Po ugledu na numeričke primere za *MSMAOR* postupak koji ilustruju oblasti konvergencioje i njihove procene u osnovnoj i poboljšanoj verijanti, i u slučaju dvofazne verzije odnosno *MSTMAOR* iterativne metode navodimo sličnu ilustraciju.

Pretpostavimo rad u jednoprocesorskom režimu ($\ell = 1$) i dvofazni trougaoni multispliting oblika $(M : D - L^{(M)}, U^{(M)}; N; E)$. Takođe, neka je broj unutrašnjih iteracija na nivou procesora $\nu = 2$, $A = M - N$ H-kompatibilni spliting i neka trougaoni spliting $M = D - L^{(M)} - U^{(M)}$ zadovoljava osobinu $\mathcal{M}(M) = D - |L^{(M)}| - |U^{(M)}|$, pri čemu je $diag(M) = D$. Primetimo da je, s obzirom na dodatnu osobinu trougaonog multisplitinga matrice L, istu moguće predstaviti kao $L = \Xi \circ (-M)$, gde su elementi strogo donje trougaone matrice Ξ zapravo $\xi_{ij} \in [0, 1]$, dok je zbog činjenice o H-kompatibilnom splitingu matrice A dozvoljeno pretpostaviti da je $M = \Theta \circ A$, pri čemu za elemente matrice Θ važi $\theta_{ij} \in [0, 1]$. Neka su ξ i θ redom maksimalni element matrice Ξ odnosno strogog donjeg trougla matrice Θ. Na jednostavnom primeru ilustrujemo gore navedene činjenice.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0.5 & 0 \\ -0.7 & 1 & -0.3 \\ 0 & -0.6 & 2 \end{bmatrix}}_{M} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 0.3 & -1 & 0.7 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}}_{N}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0.7 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.6 & 1 \end{bmatrix},$$

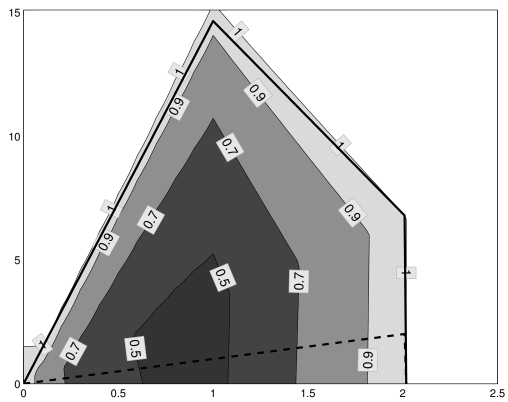
$$M = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{D} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.28 & 0 & 0 \\ 0 & 0.18 & 0 \end{bmatrix}}_{L} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 0.42 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.42 & 0 \end{bmatrix}}_{U}, \quad \Xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nije teško uveriti se da je $\theta = \max\{0.7, 0.6\} = 0.7$ dok je $\xi = \max\{0.4, 0.3\} = 0.4$. Za potrebe primera koji slede, baziranih na matricama $A1 - A12$, podrazumevaćemo da je $M = D - \theta B$, pri čemu je $-B$ matrica koju čine vandijagonalni elementi od A, dok je $M = D - L^{(M)} - U^{(M)}$, gde važi $L^{(M)} = \xi\theta L_A$, gde je $A = D_A - L_A - U_A$ standardno razlaganje matrice A. Matrica za *MSTMAOR* postupak je oblika $\mathcal{L}_{MSTMAOR}(\alpha, \beta) = \widehat{\Psi} + \widehat{\Psi}\widehat{\Phi} + \widehat{\Phi}^2$,

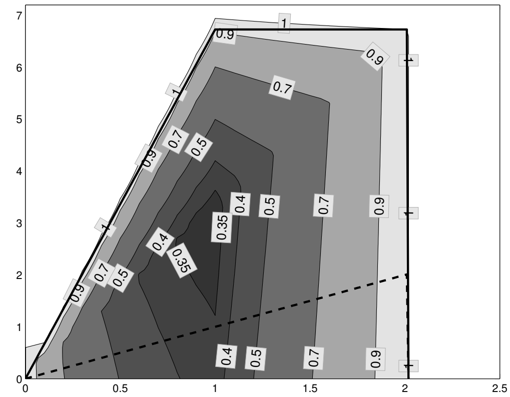
$$\widehat{\Psi} = \alpha(2 - \theta)\Big((1 + \alpha)D - \beta\xi\theta|L_A|\Big)^{-1}|D - A|,$$

$$\widehat{\Phi} = \Big((1 + \alpha)D - \beta\xi\theta|L_A|\Big)^{-1}\Big(|1 - \alpha|D + \theta|\alpha(D - A) - \beta\xi L_A|\Big).$$

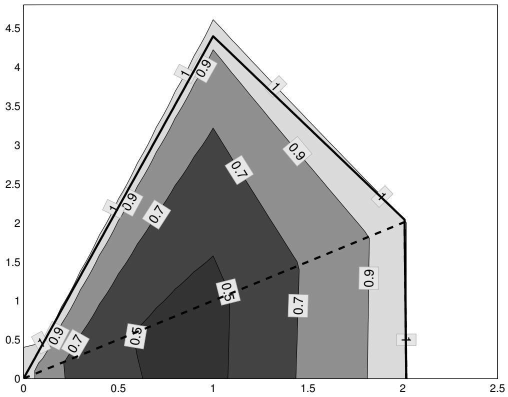
Za svaku matricu ponaosob i kombinaciju parametara $\xi, \theta \in \{0.3, 1\}$ priloženi su odgovarajući grafički prikazi, pri čemu svaka od slika reprezentuje nivo površi spektralnog radijusa matrice za *MSTMAOR* postupak, $\mathcal{L}_{MSTMAOR}(\alpha, \beta)$, a oblasti izbora relaksacionih parametara date su isprekidanom odnosno punom linijom, za (4.19) i (4.32), respektivno. Podrazumevamo da su svi elementi matrice Ξ jednaki sa ξ, odnosno matrice Θ sa θ.



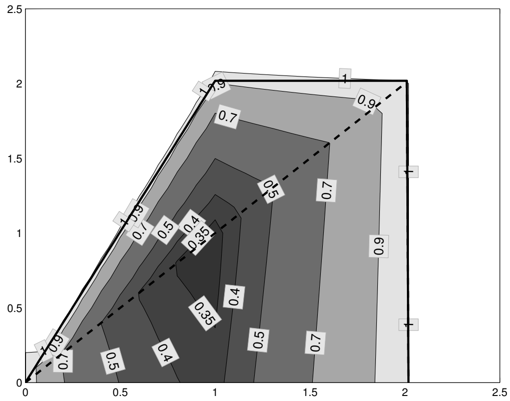
(a) $\xi = 0.3 \qquad \theta = 0.3$



(b) $\xi = 0.3 \qquad \theta = 1$



(c) $\xi = 1 \qquad \theta = 0.3$



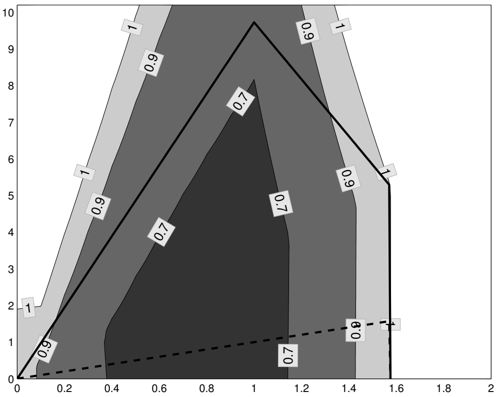
(d) $\xi = 1 \qquad \theta = 1$

Slika 4.18: Nivo površi za $\rho(\mathcal{L}_{MSTMAOR}(\alpha, \beta))$ i matricu A1 sa oblastima parametara

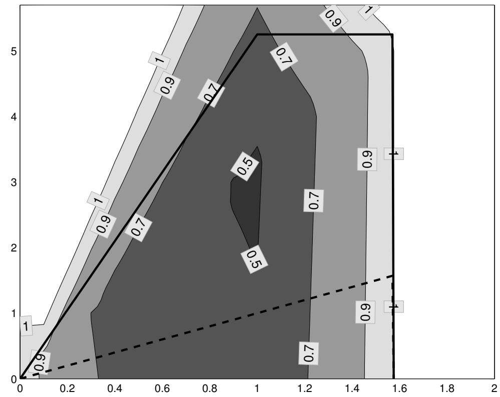
A1	$\xi = 0.3 \quad \theta = 0.3$	$\xi = 0.3 \quad \theta = 1$	$\xi = 1 \quad \theta = 0.3$	$\xi = 1 \quad \theta = 1$
BZ_val	0.4564	0.3534	0.4548	0.3292
CKŠ_val	0.4548	0.3292	0.4548	0.3292
BZ_alpha	1	1	1	1
BZ_beta	1	1	1	1
CKŠ_alpha	1	1	1	1
CKŠ_beta	3.3	3.3	1	1

Tabela 4.5: Uporedni pregled za matricu A1

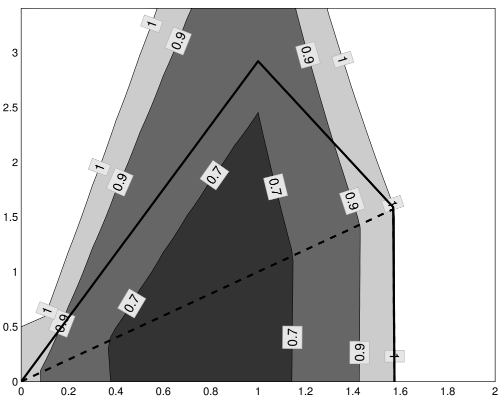
Primetimo da je, na primeru matrice A1, minimalna vrednost spektralnog radijusa za *MSTMAOR* u slučaju šire oblasti (4.32) za izbor $(\xi, \theta) = (0.3, 1)$ manja od minimalne vrednosti koja se dostiže u okviru stare oblasti (4.19). Interesantno je i to što proširena oblast skoro idealno opisuje čitavu oblast izbora parametara za koje postupak konvergira.



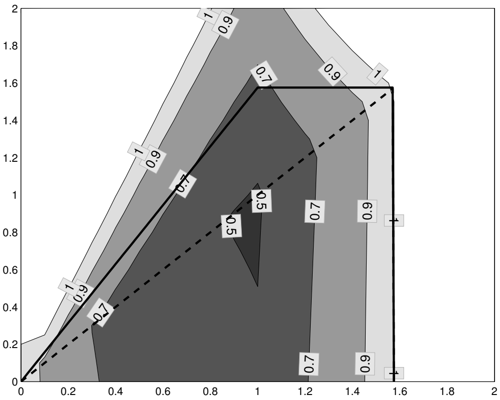
(a) $\xi = 0.3 \qquad \theta = 0.3$



(b) $\xi = 0.3 \qquad \theta = 1$



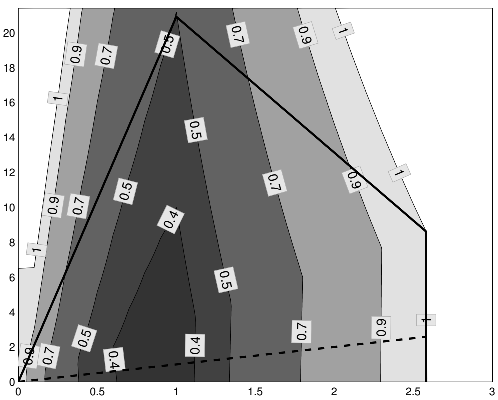
(c) $\xi = 1 \qquad \theta = 0.3$



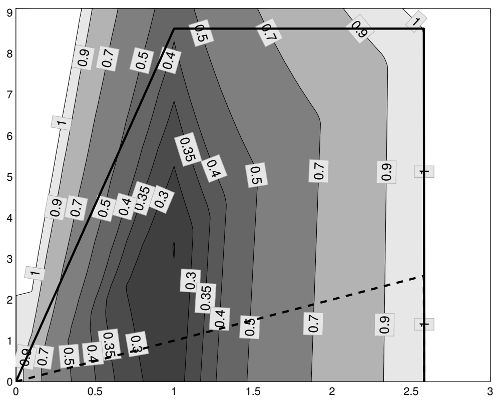
(d) $\xi = 1 \qquad \theta = 1$

Slika 4.19: Nivo površi za $\rho(\mathcal{L}_{MSTMAOR}(\alpha, \beta))$ i matricu A2 sa oblastima parametara

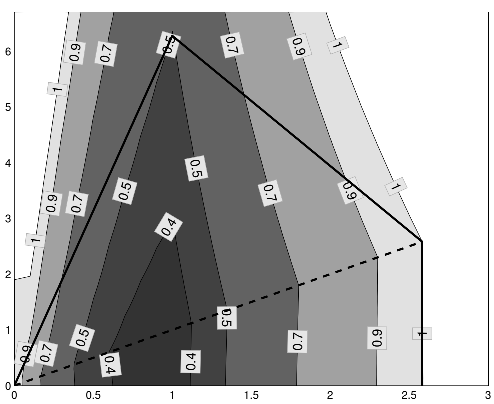
Takođe, uz napomenu da su numerički rezultati za preostale matrice (A2-A12) slični, u nastavku prilažemo samo grafičke ilustracije nivo površi spektralnog radijusa matrice $\mathcal{L}_{MSTMAOR}(\alpha, \beta)$ i odgovarajuće oblasti konvergencije.



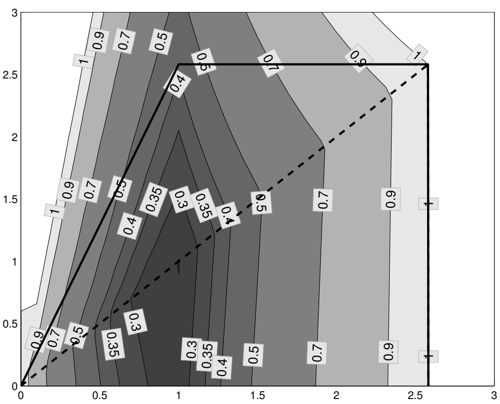
(a) $\xi = 0.3 \qquad \theta = 0.3$



(b) $\xi = 0.3 \qquad \theta = 1$

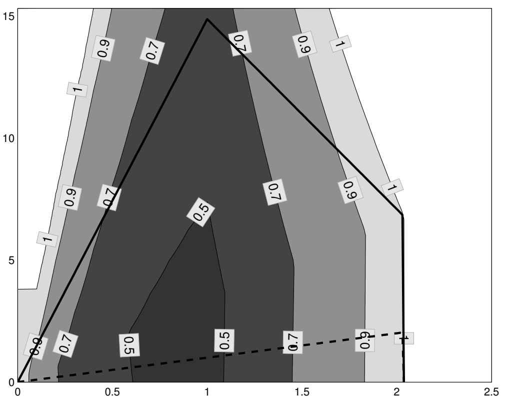


(c) $\xi = 1 \qquad \theta = 0.3$

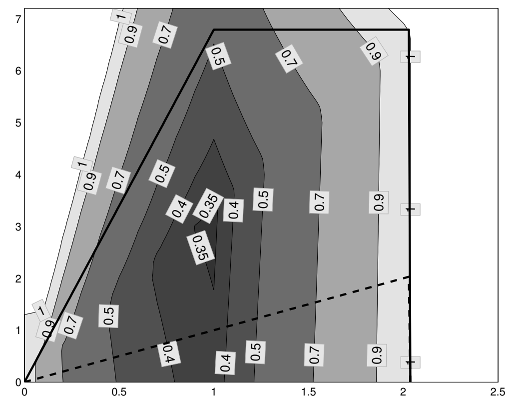


(d) $\xi = 1 \qquad \theta = 1$

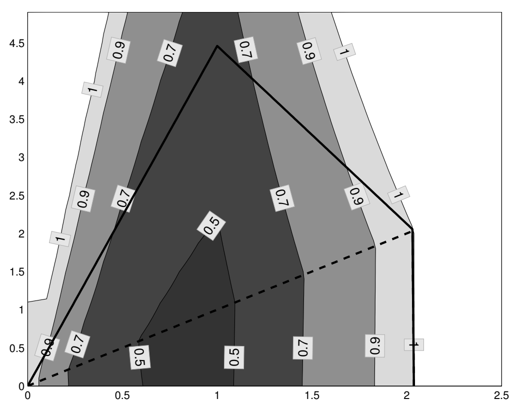
Slika 4.20: Nivo površi za $\rho(\mathcal{L}_{MSTMAOR}(\alpha, \beta))$ i matricu A3 sa oblastima parametara



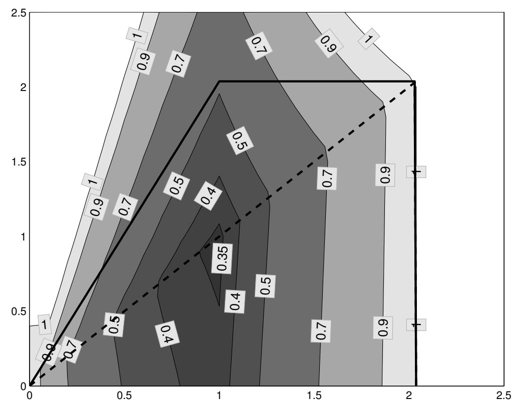
(a) $\xi = 0.3 \qquad \theta = 0.3$



(b) $\xi = 0.3 \qquad \theta = 1$

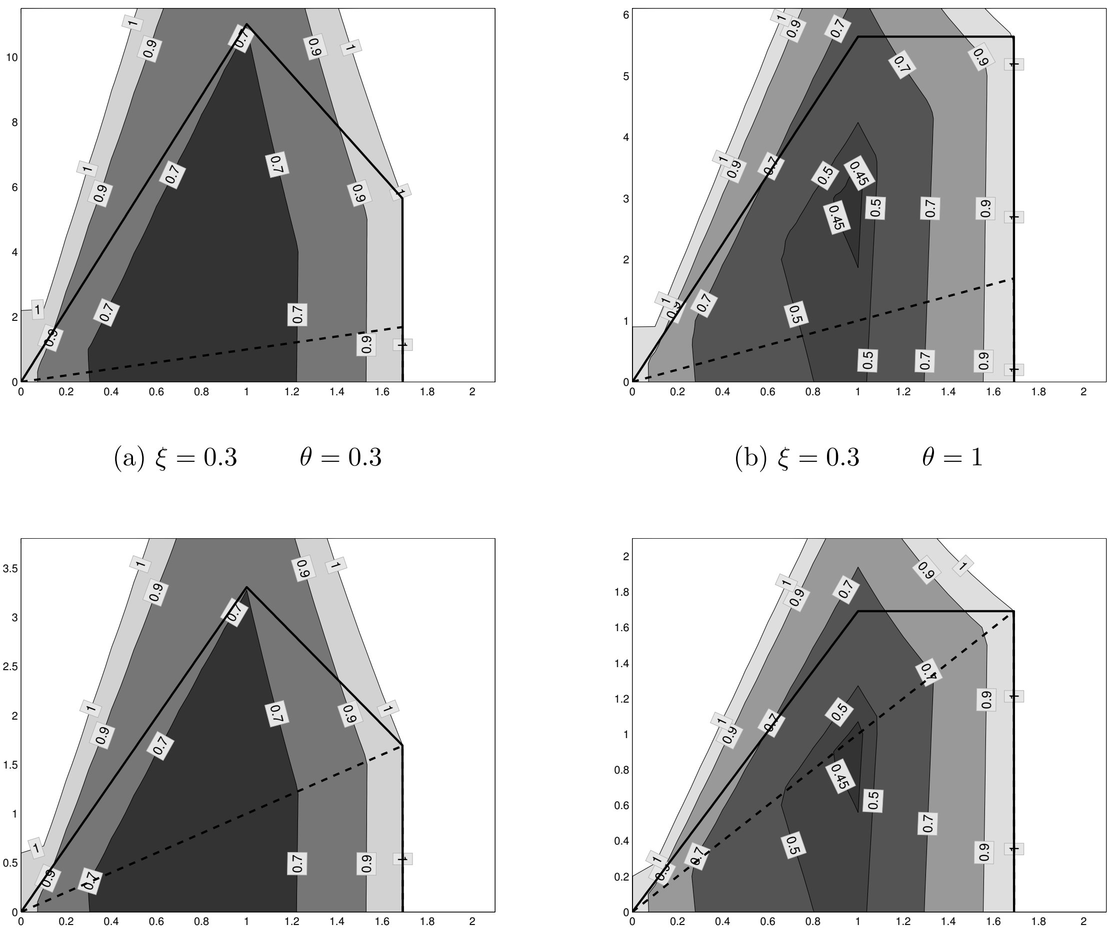


(c) $\xi = 1 \qquad \theta = 0.3$



(d) $\xi = 1 \qquad \theta = 1$

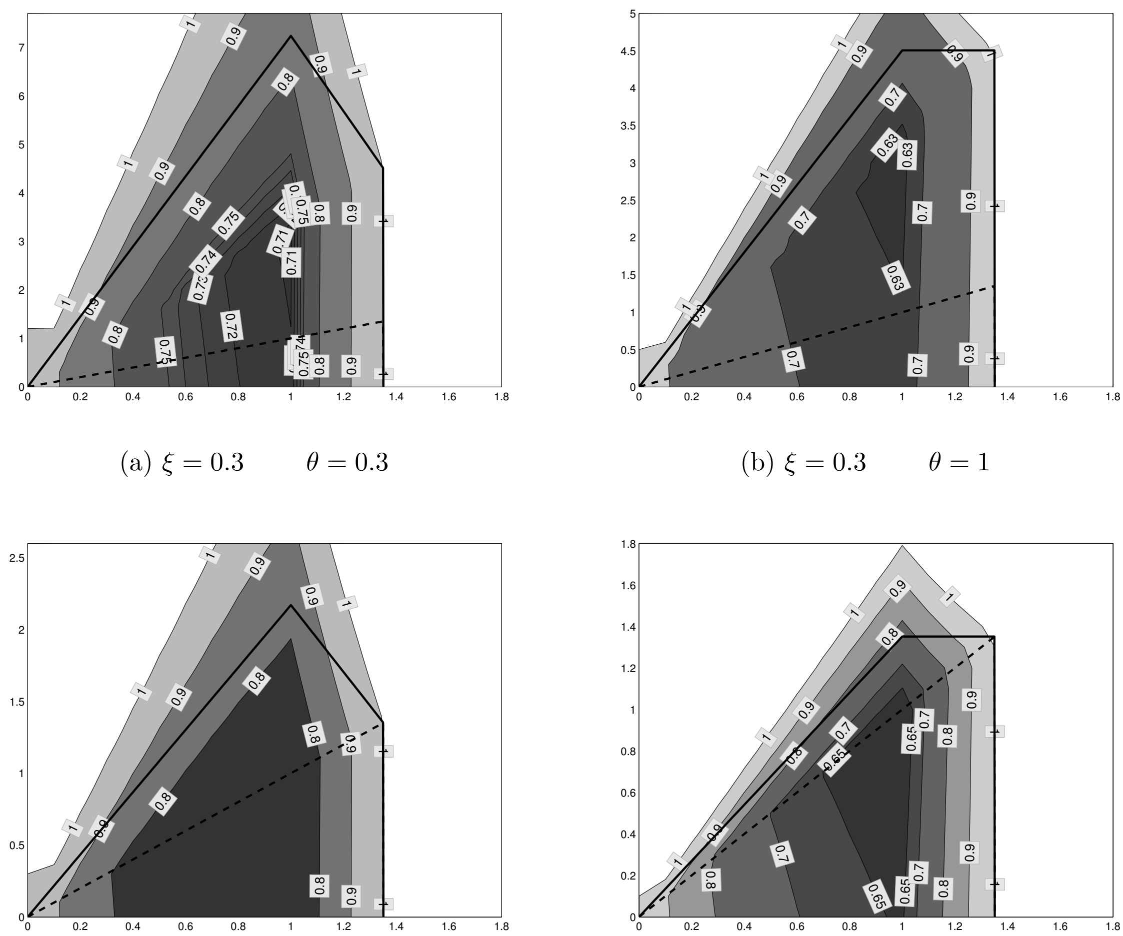
Slika 4.21: Nivo površi za $\rho(\mathcal{L}_{MSTMAOR}(\alpha, \beta))$ i matricu A4 sa oblastima parametara



(a) $\xi = 0.3 \qquad \theta = 0.3$ (b) $\xi = 0.3 \qquad \theta = 1$

(c) $\xi = 1 \qquad \theta = 0.3$ (d) $\xi = 1 \qquad \theta = 1$

Slika 4.22: Nivo površi za $\rho(\mathcal{L}_{MSTMAOR}(\alpha, \beta))$ i matricu A5 sa oblastima parametara



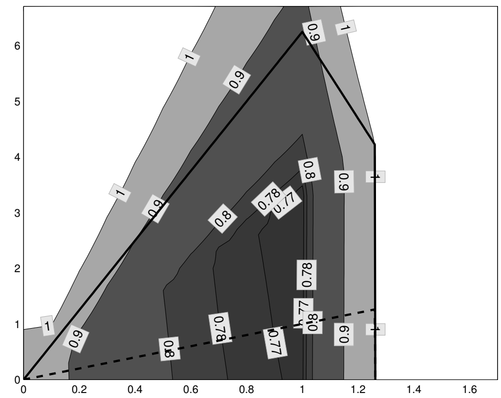
(a) $\xi = 0.3 \qquad \theta = 0.3$

(b) $\xi = 0.3 \qquad \theta = 1$

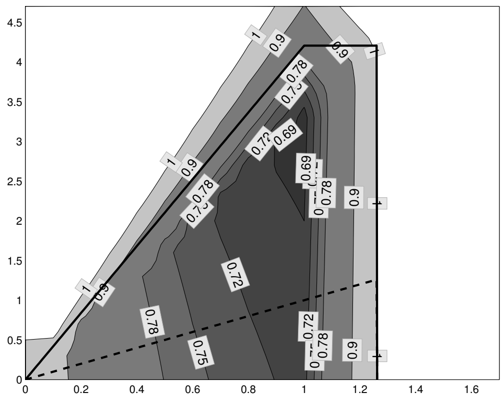
(c) $\xi = 1 \qquad \theta = 0.3$

(d) $\xi = 1 \qquad \theta = 1$

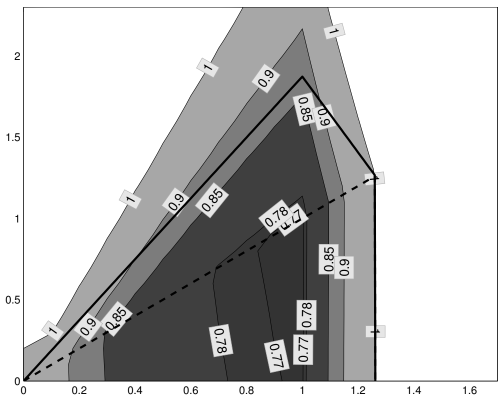
Slika 4.23: Nivo površi za $\rho(\mathcal{L}_{MSTMAOR}(\alpha,\beta))$ i matricu A6 sa oblastima parametara



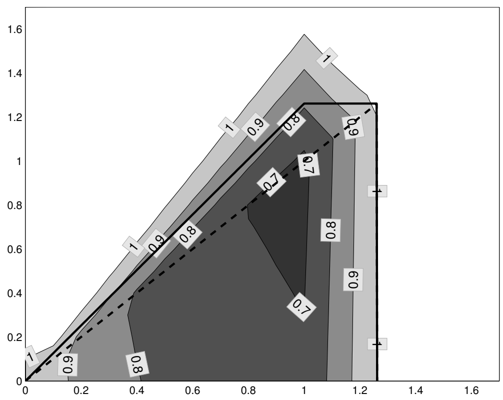
(a) $\xi = 0.3 \qquad \theta = 0.3$



(b) $\xi = 0.3 \qquad \theta = 1$

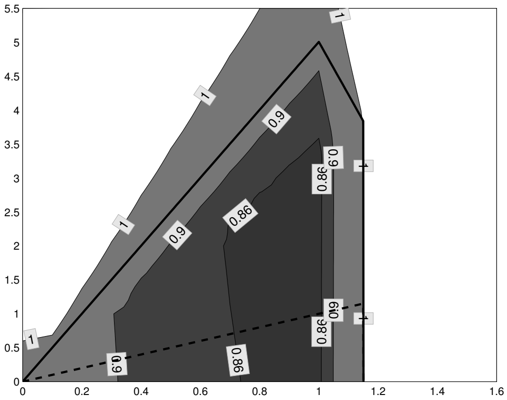


(c) $\xi = 1 \qquad \theta = 0.3$

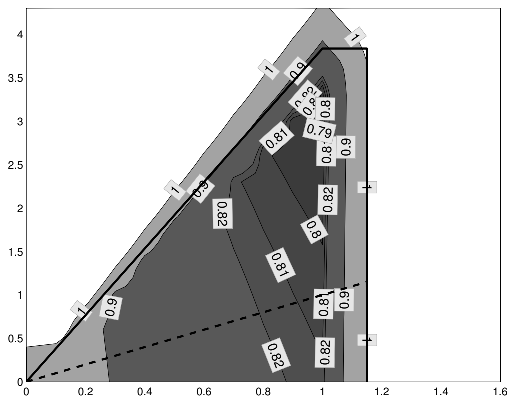


(d) $\xi = 1 \qquad \theta = 1$

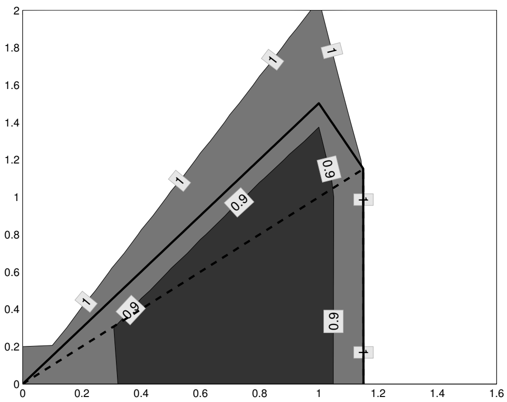
Slika 4.24: Nivo površi za $\rho(\mathcal{L}_{MSTMAOR}(\alpha, \beta))$ i matricu A7 sa oblastima parametara



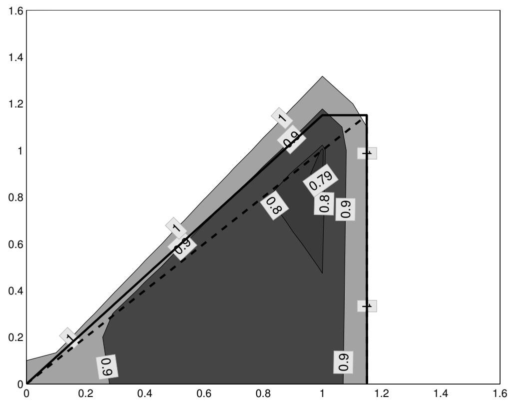
(a) $\xi = 0.3 \qquad \theta = 0.3$



(b) $\xi = 0.3 \qquad \theta = 1$

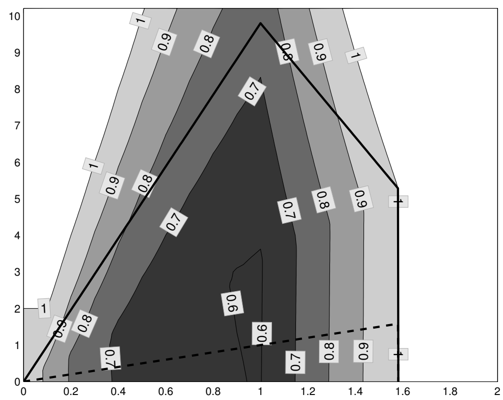


(c) $\xi = 1 \qquad \theta = 0.3$

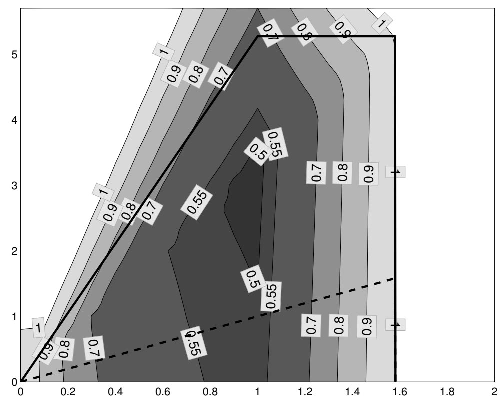


(d) $\xi = 1 \qquad \theta = 1$

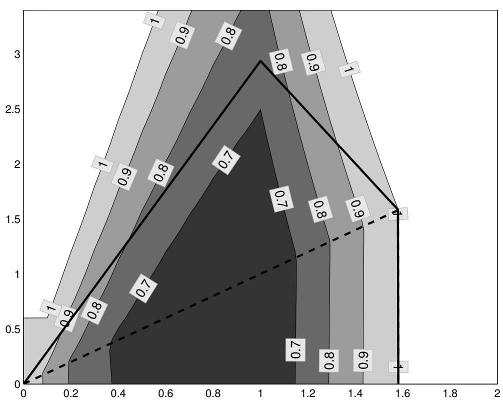
Slika 4.25: Nivo površi za $\rho(\mathcal{L}_{MSTMAOR}(\alpha, \beta))$ i matricu A8 sa oblastima parametara



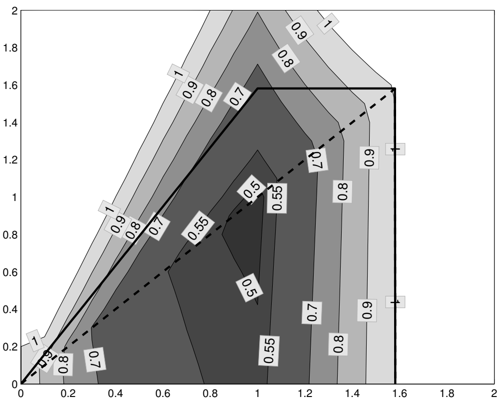
(a) $\xi = 0.3 \qquad \theta = 0.3$



(b) $\xi = 0.3 \qquad \theta = 1$

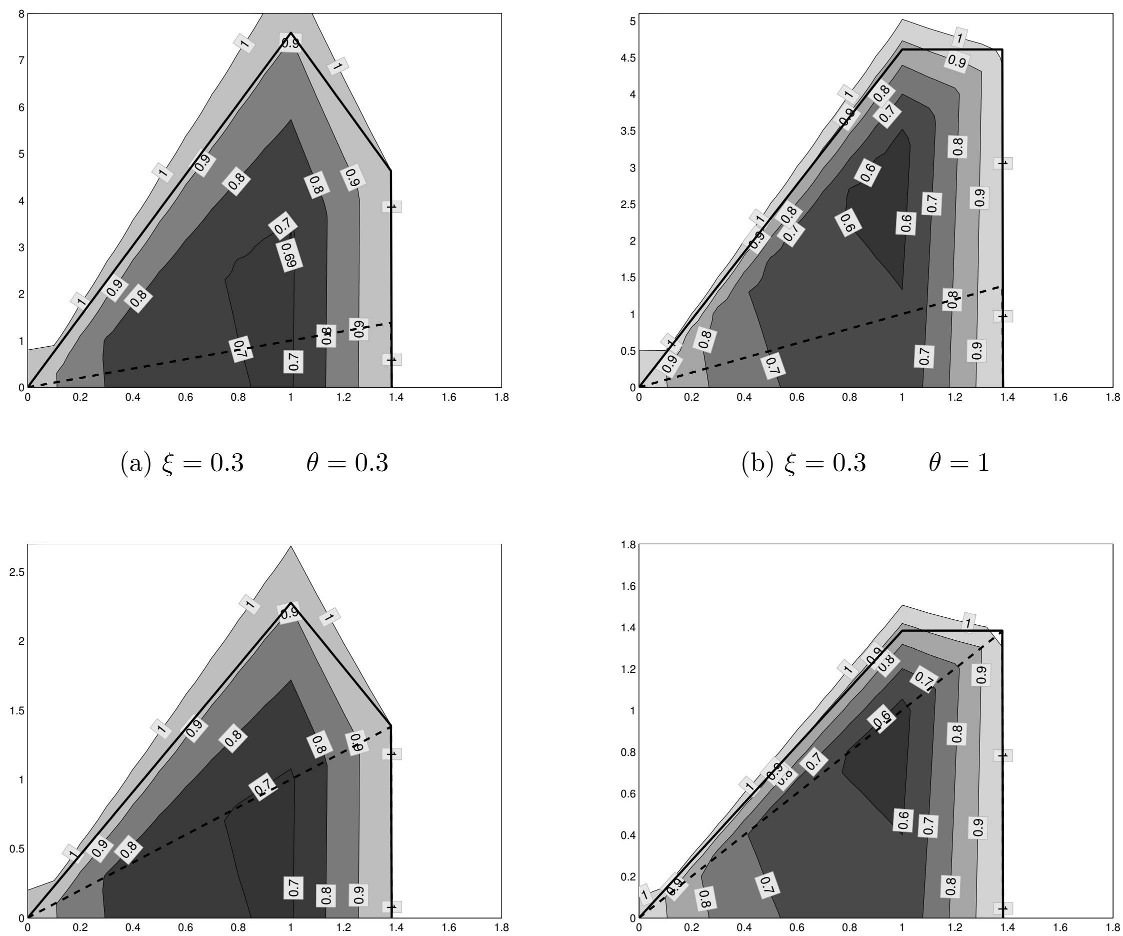


(c) $\xi = 1 \qquad \theta = 0.3$



(d) $\xi = 1 \qquad \theta = 1$

Slika 4.26: Nivo površi za $\rho(\mathcal{L}_{MSTMAOR}(\alpha, \beta))$ i matricu A9 sa oblastima parametara



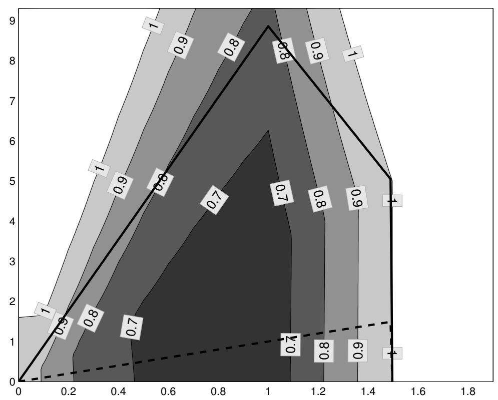
(a) $\xi = 0.3 \qquad \theta = 0.3$

(b) $\xi = 0.3 \qquad \theta = 1$

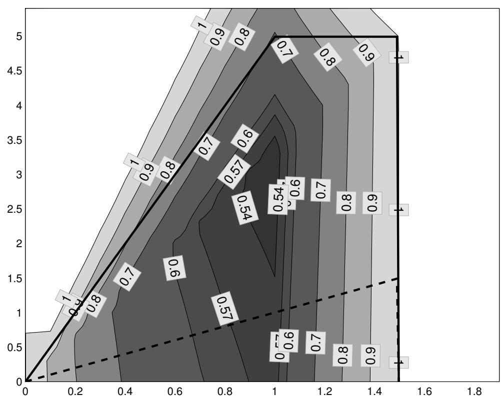
(c) $\xi = 1 \qquad \theta = 0.3$

(d) $\xi = 1 \qquad \theta = 1$

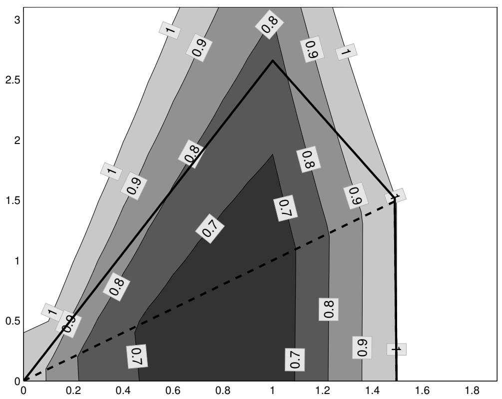
Slika 4.27: Nivo površi za $\rho(\mathcal{L}_{MSTMAOR}(\alpha, \beta))$ i matricu A10 sa oblastima parametara



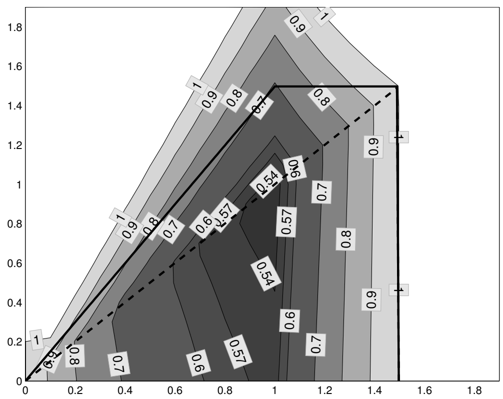
(a) $\xi = 0.3 \qquad \theta = 0.3$



(b) $\xi = 0.3 \qquad \theta = 1$

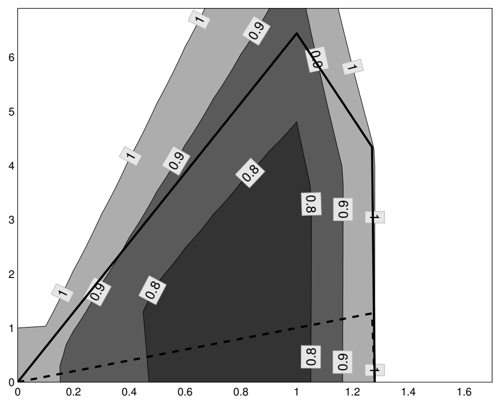


(c) $\xi = 1 \qquad \theta = 0.3$

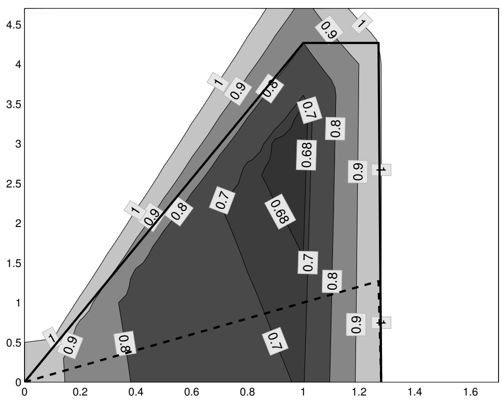


(d) $\xi = 1 \qquad \theta = 1$

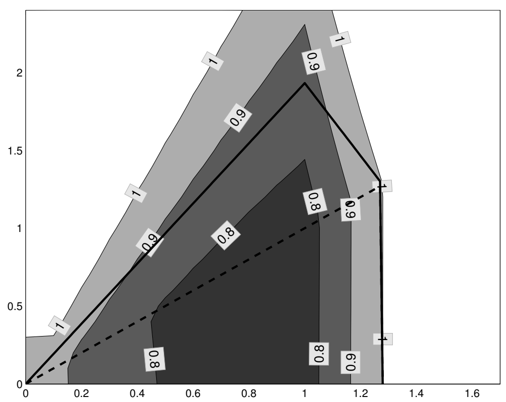
Slika 4.28: Nivo površi za $\rho(\mathcal{L}_{MSTMAOR}(\alpha, \beta))$ i matricu A11 sa oblastima parametara



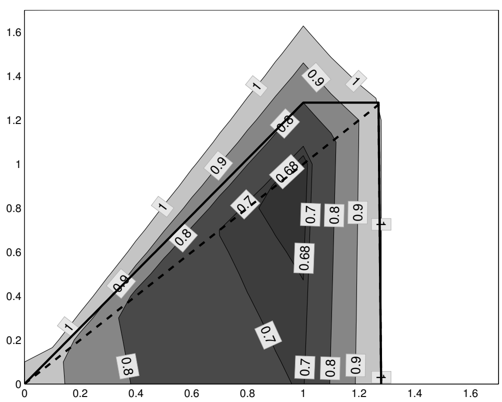
(a) $\xi = 0.3 \qquad \theta = 0.3$



(b) $\xi = 0.3 \qquad \theta = 1$



(c) $\xi = 1 \qquad \theta = 0.3$



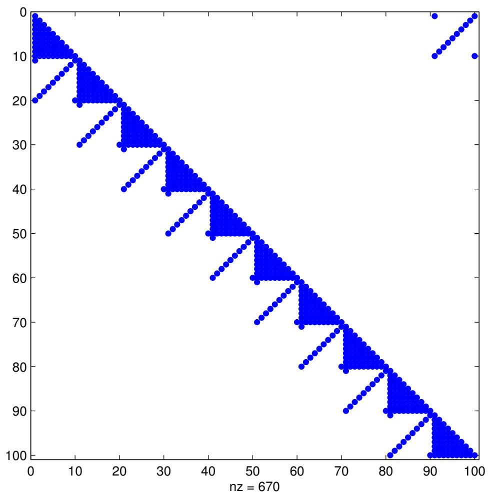
(d) $\xi = 1 \qquad \theta = 1$

Slika 4.29: Nivo površi za $\rho(\mathcal{L}_{MSTMAOR}(\alpha, \beta))$ i matricu A12 sa oblastima parametara

A Katalog matrica

Svrha tehničkog dodatka jeste katalogizacija i sistematizacija matrica korišćenih za potrebe numeričkih primera. Katalog matrica pred nama sačinjava 12 retkih (sparse) matrica, koje se javljaju u velikom broju praktičnih primena. Većina priloženih matrica dostupne su u okviru open-source web projekta pod nazivom *The University of Florida Sparse Matrix Collection*, no neke su, za potrebe verifikacije teorijskih rezultata, modifikovane. U nastavku, za svaku matricu ponaosob, dajemo vizuelni prikaz rasporeda nenula elemenata, kratak pregled osobina i načina konstruisanja, a tamo gde je moguće - i referencu matrice u web katalogu dostupnom na adresi `http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/matrices/`.

Pri konstrukciji određenih matrica korišćene su funkcije pisane u programskom paketu MATLAB, pri čemu je reč o blok dijagonalnim, tridijagonalnim i mešovitim varijantama.

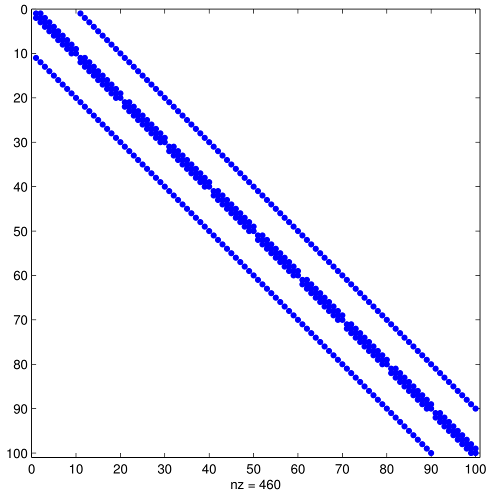


Slika A.1: Struktura nenula u matrici A1

```
function A = lcp1(n)
E = eye(n); E = fliplr(E);
E(1,1) = 1; E(end,end) = 1;
S = tril(ones(n));
A = S; P = E;
for j=1:n-1
    A = blkdiag(A,S);
    P = blkdiag(P,E);
end
M = P(:,1:n);
P(:,1:n) = []; P = [P M];
A = A+P;
A = A+8*eye(n*n);
```

`A1=lcp1(10);`

vrsta/kolona:	100/100
nenula:	670

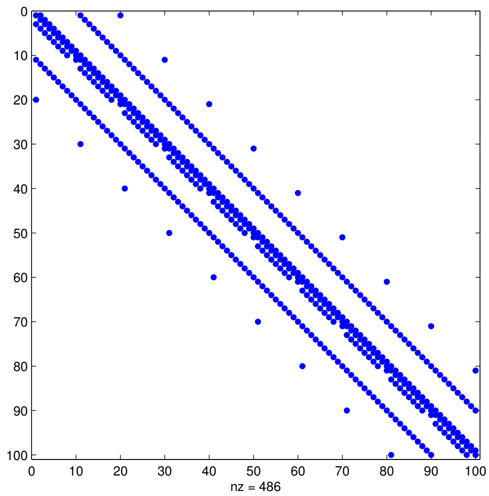


Slika A.2: Struktura nenula u matrici A2

```
function A = lcp2(s,mi,a,b)
S = (4+mi)*eye(s)
 -a*diag(ones(s-1,1),1)
 -b*diag(ones(s-1,1),-1);
A = S;
for j=1:s-1
     A = blkdiag(A,S);
end
A = A
 -a*diag(ones(s^2-s,1),s)
 -b*diag(ones(s^2-s,1),-s);
```

`A2=lcp2(10,4,0.5,3.5);`

vrsta/kolona:	100/100
nenula:	460

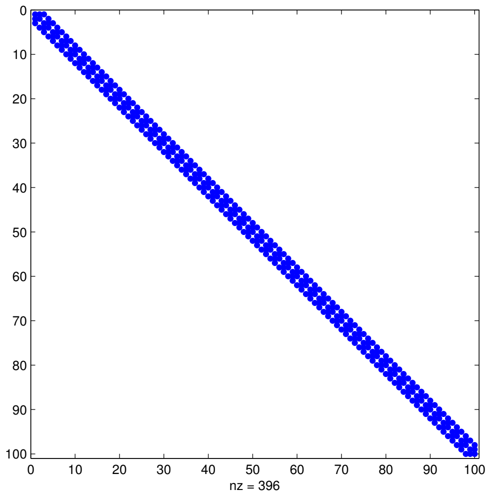


Slika A.3: Struktura nenula u matrici A3

```
function A = lcp3(n)
T = zeros(n)
  -0.5*diag(ones(n-1,1),1)
  +0.5*diag(ones(n-2,1),-2);
E = eye(n); E(1,end) = -1;
E(end,1)=-1; S=10*eye(n)+T;
A = S; P = E; Q = E;
for j=1:(n-1)
     A = blkdiag(A,S);
     P = blkdiag(P,E);
     Q = blkdiag(Q,E);
end
P(:,(n^2-n+1):end)=[];
P=[zeros(n^2,n),P];
Q(:,1:n)=[];
Q = [Q,zeros(n^2,n)];
A = A+P+Q;
```

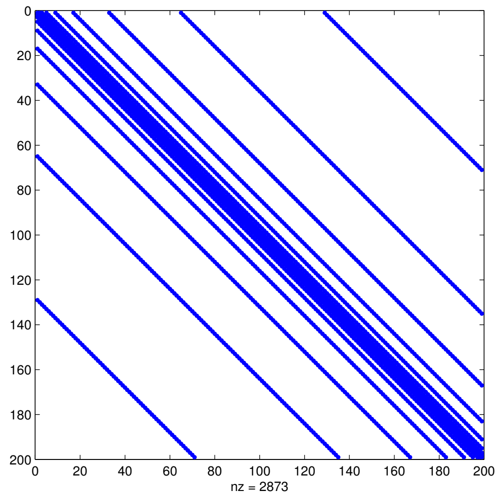
`A3=lcp3(10);`

vrsta/kolona:	100/100
nenula:	486



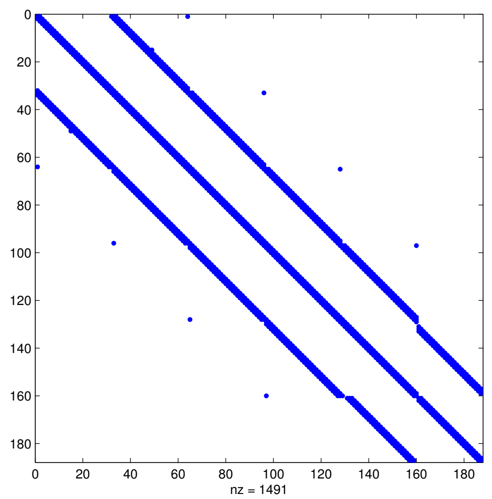
naziv:	A4
odrednica:	tub100
vrsta/kolona:	100/100
nenula:	396
kategorija:	problem dinamike fluida
modifikacije:	$A4 \leftarrow \mathcal{M}(A4)$ $A4 \leftarrow A4+$ $+1000 * eye(100)$

Slika A.4: Struktura nenula u matrici A4



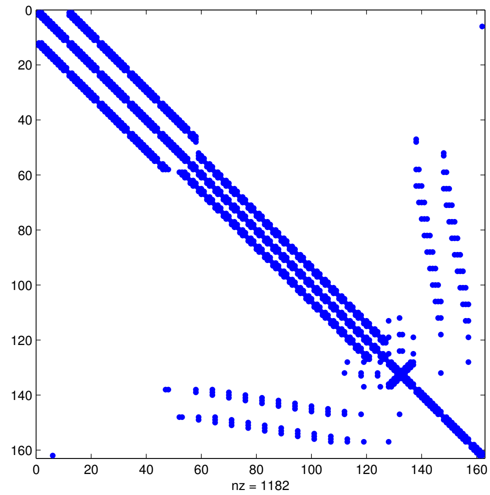
naziv:	A5
odrednica:	Trefethen_200b
vrsta/kolona:	199/199
nenula:	2873
kategorija:	kombinatorni problem
modifikacije:	–

Slika A.5: Struktura nenula u matrici A5



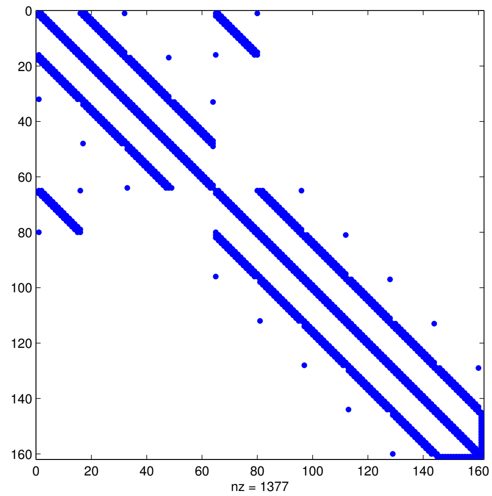
naziv:	A6
odrednica:	can_187
vrsta/kolona:	187/187
nenula:	1491
kategorija:	strukturni problem
modifikacije:	$A6 \leftarrow A6+$ $+9 * eye(187)$

Slika A.6: Struktura nenula u matrici A6



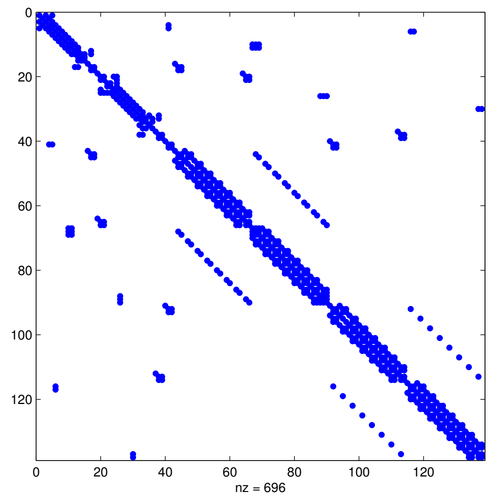
naziv:	A7
odrednica:	dwt_162
vrsta/kolona:	162/162
nenula:	1182
kategorija:	strukturni problem
modifikacije:	$A7 \leftarrow A7+$ $+8 * eye(162)$

Slika A.7: Struktura nenula u matrici A7



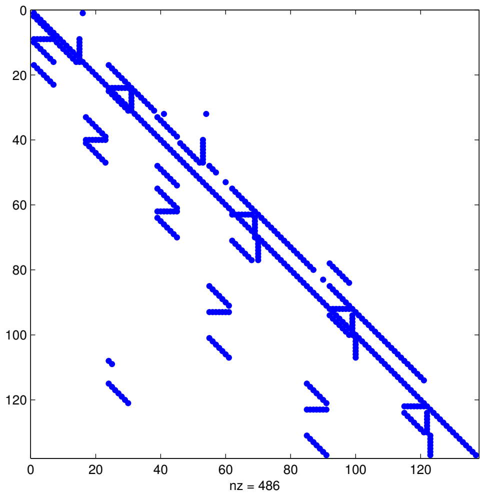
naziv:	A8
odrednica:	can_161
vrsta/kolona:	161/161
nenula:	1377
kategorija:	strukturni problem
modifikacije:	$A8 \leftarrow A8+$ $+8 * eye(161)$

Slika A.8: Struktura nenula u matrici A8



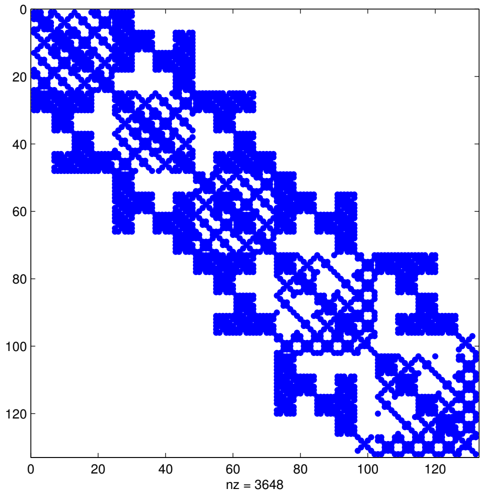
naziv:	A9
odrednica:	bcsstk22
vrsta/kolona:	138/138
nenula:	696
kategorija:	strukturni problem
modifikacije:	$A9 \leftarrow A9+$ $+10^6 * eye(138)$

Slika A.9: Struktura nenula u matrici A9



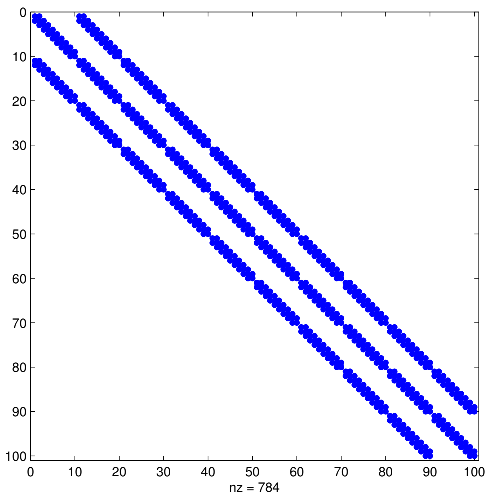
naziv:	A10
odrednica:	impcol_c
vrsta/kolona:	137/137
nenula:	486
kategorija:	problem simulacije hemijskog procesa
modifikacije:	$A10 \leftarrow A10+$ $+15 * eye(137)$

Slika A.10: Struktura nenula u matrici A10



naziv:	A11
odrednica:	bcsstk04
vrsta/kolona:	132/132
nenula:	3648
kategorija:	strukturni problem
modifikacije:	$A11 \leftarrow A11+$ $+10^6 * eye(132)$

Slika A.11: Struktura nenula u matrici A11




```
function A = lcp4(s,mi)
S = (20+mi)*eye(s)
  -4*diag(ones(s-1,1),1)
  -4*diag(ones(s-1,1),-1);
T = (4+mi)*eye(s)
  -1*diag(ones(s-1,1),1)
  -1*diag(ones(s-1,1),-1);
A = blktridiag(S,T,T,s);
```

`A2=lcp4(10,2);`

vrsta/kolona:	100/100
nenula:	784

Slika A.12: Struktura nenula u matrici A12

Popis slika

Popis tabela

Literatura

[1] Bai, Z-Z.: *On the convergence of the multisplitting methods for the linear complementarity problem*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 21 (1999), 67–78.

[2] Bai, Z-Z.: *Modulus-based matrix splitting iteration methods for linear complementarity problems*, Numerical Linear Algebra with Applications, 17 (2010), 917–933.

[3] Bai, Z-Z., Evans, D.J.: *Matrix multisplitting relaxation methods for linear complementarity problems*, International Journal of Computer Mathematics, 63 (1997), 309–326.

[4] Bai, Z.-Z., Zhang, L.-L.: *Modulus-based synchronous multisplitting iteration methods for linear complementarity problems*, Numerical Linear Algebra with Applications, 20 (2013), 425–439.

[5] Bai, Z.-Z., Zhang, L.-L.: *Modulus-based synchronous two-stage multisplitting iteration methods for linear complementarity problems*, Numerical Algorithms, 62 (2013), 59–77.

[6] Berman, A., Plemmons, R.J.: *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences,* Classics in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1994.

[7] Cottle, R.W.: *The principal pivoting method of quadratic programming,* in (Dantzig, G. B., Veinott, A. F. Jr., eds.) Mathematics of Decision Sciences, Part 1, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, (1968), 142–162.

[8] Cottle, R.W., Pang, J.-S., Stone, R.E.: *The Linear Complementarity Problem,* Classics in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1992.

[9] Cottle, R.W., Dantzig, G. B.: *Complementary pivot theory of mathematical programming,* in (Dantzig, G. B., Veinott, A. F. Jr., eds.) Mathematics of Decision Sciences, Part 1, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, (1968), 115–136.

[10] Cvetković, Lj.: *Convergence Theory for Relaxation Methods to Solve Systems of Equations,* MB PAMM Series, Technnical University of Budapest, 1998.

[11] Cvetković, Lj., Kostić, V.: *A note on the convergence of the MSMAOR method for linear complementarity problems,* Numerical Linear Algebra with Applications, 21 (2014), 534–539.

[12] Cvetković, Lj., Kostić, V., Šanca, E.: *A wider convergence area for the MSTMAOR iteration methods for LCP,* Numerical Algorithms, DOI 10.1007/s11075-015-9985-6

[13] Demmel, J.W.: *Applied Numerical Linear Algebra,* Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1997.

[14] Du Val, P.: *The unloading problem for plane curves*, American Journal of Mathematics, 62 (1940), 307–311.

[15] Frommer, A., Szyld, D.B.: *H-Splittings and two-stage iterative methods*, Numerische Mathematik, 63 (1992), 345–356.

[16] Hadjidimos, A.: *Accelerated Overrelaxation Method*, Mathematics of Computation, 32 (1978), 149–157.

[17] Hadjidimos, A., Tzoumas, M.: *Nonstationary extrapolated modulus algorithms for the solution of the linear complementarity problem,* Linear Algebra and its Applications, 431 (2009), 197–210.

[18] Lemke, C.E.: *Bimatrix equilibrium points and mathematical programming,* Management Science, 11 (1965), 681–689.

[19] Machida, N., Fukushima, M., Ibaraki, T.: *A multisplitting method for symmetric linear complementarity problems,* Journal of Computational and Applied Mathematics, 62 (1995), 217–227.

[20] Meyer, C.D.: *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra,* Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 2000.

[21] Neumaier, A.: *New Techniques for the Analysis of Linear Interval Equations,* Linear Algebra and its Applications, 58 (1984), 273–325.

[22] Prokopyev, O.: *On equivalent reformulations for absolute value equations,* Computational Optimization and Applications, 44 (2009), 363–372.

“*You can't connect the dots looking forward,*
you can only connect them looking backwards.
So you have to trust that the dots
will somehow connect in your future.”

STEVEN JOBS, *Stanford Commencement Address, 2005.*

Biografija

Rođen sam 6.5.1991. godine u Novom Sadu. Pohađao sam prirodno-matematički smer Gimnazije "Isidora Sekulić", a potom sam, zbog afiniteta prema matematici, naročito njenoj primeni u praksi, upisao osnovne studije Primenjene matematike, modul - matematika finansija, na Departmanu za matematiku i informatiku Prirodno matematičkog Fakulteta u Novom Sadu, a po završetku osnovnih studija u trajanju od 3 godine sa ukupnom prosečnom ocenom 9.62, svoje akademsko usavršavanje nastavio sam i u sklopu master studija na istom programu. Studije na master programu završio sam zaključno sa aprilskim rokom i prosečnom ocenom 9.71, stekavši pravo na odbranu završnog rada.

Učestvovao sam kao izlagač na nekoliko međunarodnih konferencija posvećenih primeni matematike u skopu bavljenja naučnim radom, među kojima su Godišnja konferencija Udruženja za primenjenu matematiku i mehaniku - GAMM 2013 (18-22. mart), održanoj u Novom Sadu, i konferenciji MatTriad 2013 (16-20. septembar), održanoj u Herceg Novom. Koautor sam nekoliko naučnih radova i saopštenja iz Numeričke linearne algebre. Kao saradnik u nastavi za užu naučnu oblast Numerička matematika, na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, učestvovao sam u realizaciji vežbi iz predmeta Numeričke Metode Linearne Algebre 1 na Departmanu za matematiku i informatiku, kao i Programskih paketa za obradu podataka na Departmanu za biologiju i ekologiju, u letnjem semestru 2014/2015. godine.

Kao stipendista Fondacije "dr Zoran Đinđić" 2014. godine, pod pokroviteljstvom Nemačkog odbora za istočnu Evropu (Ost-Ausschuss der Deutschen Wirtschaft), boravio sam 4 meseca u Nemačkoj na stručnom usavršavanju. Praksu sam obavio u bankarskom sektoru, Commerzbank AG, Frankfurtu na Majni, kao praktikant odeljenja Group Risk Management - Capital Management. Stipendista sam Ministarstva Prosvete Republike Srbije kako na osnovnim, tako i na master studijama, kao i Fonda za mlade talente Republike Srbije "Dositeja" za akademsku 2012/2013. godinu. Svoje slobodno vreme provodim negujući talenat i ljubav prema slikarstvu.

Novi Sad, jun 2015. Ernest Šanca

Ključna dokumentacijska informacija

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Ernest Šanca
AU

Mentor: Prof. dr Ljiljana Cvetković
MN

Naslov rada: Modulske metode za rešavanje problema linearne komplementarnosti
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski/engleski
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2015.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: 4 / 113 / 22 / 5 / 42 / 0 / 1
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Numerička matematika/Numeričke metode linearne algebre
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: Problem linearne komplementarnosti, iterativni postupak, relaksacioni postupak, modulski postupak, konvergencija, spliting matrice, multispliting, H_+ matrice.
PO
UDK

Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta, Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod:
Problemi linearne komplementarnosti (eng. *LCP*) svoju podlogu i značaj duguju raznolikim primenama u inženjerstvu i modeliranju. Određivanje rešenja za $LCP(q, A)$ je do sada izrodilo čitav spektar raznovrsnih pristupa ovoj problematici. Pa ipak, prekretnica u pristupima desila se onog trenutka kada je problem linearne komplementarnosti ekvivalentno zapisan u formi jednačina sa apsolutnim vrednostima (*AVE*). Pomenuti rezultat

iskoristio je Zhong-Zhi Bai i prilagodio ga radu sa splitinzima matrice sistema. Pomenuti pristup problemu Bai je nazvao modulskim iterativnim metodama za rešavanje problema $LCP(q, A)$ zasnovanim na splitinzima matrice sistema i ovakav pristup je ponudio brzinu i efikasnost, što ga je učinilo još interesantnijim iz ugla primenljivosti u praksi. Takođe, Bai je u svojim radovima razvio i paralelnu generalizaciju modulskih metoda, sinhronih i asinhronih, koje su zasnovane na multisplitinzima matrice sistema, adekvatnim za izračunavanja na višeprocesorskim računarima. Jedan od ključnih aspekata ovog master rada jeste konvergencija ovakvih modulskih iterativnih metoda, a pre svega odgovarajućih relaksacionih metoda, u slučajevima kada je matrica sistema H-matrica.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 24.3.2015.
DP

Datum odbrane: jul 2015.
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik: **dr Sanja Rapajić**, vanredni profesor,
Prirodno-matematički fakultet,
Univerzitet u Novom Sadu,

Mentor: **dr Ljiljana Cvetković**, redovni profesor,
Prirodno-matematički fakultet,
Univerzitet u Novom Sadu,

Član: **dr Vladimir Kostić**, docent,
Prirodno-matematički fakultet,
Univerzitet u Novom Sadu.

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
AO

Identification number:
IN

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents code: Master thesis
CC

Author: Ernest Šanca
AU

Mentor: Professor Ljiljana Cvetković, PhD
MN

Title: Modulus-based methods for linear complementarity problems
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: Serbian/English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2015.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description: 4 / 113 / 22 / 5 / 42 / 0 / 1
(number of chapters/pages/references/tables/pictures/graphs/appendices)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Numerical Mathematics/Numerical Linear Algebra
SD

Subject/Key words: Linear complementarity problem, iterative method, relaxation method, modulus-based method, convergence, matrix splitting, multisplitting, H_+ matrices.
SKW
UC

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract:
Linear complementarity problems (LCP) arise from many engineering applications and modelings. So far, the computation of the solutions of $LCP(q, A)$ gave birth to many different approaches to how the solution is obtained. A true milestone in terms of solving LCP's fast and economically was the introduction of a class of modulus-based splitting iteration methods by Zhong-Zhi Bai. He accomplished this by making use of the well-known

equivalent transformation of the $LCP(q, A)$ into a system of fixed-point equations. Lastly, we bring to the spotlight that, in order to suit computational requirements of the modern high-speed multiprocessor environments, Bai in his papers further presented synchronous parallel counterparts for the modulus-based splitting iteration methods by utilizing the multiple splitting of the system matrix. On a final note, one of the focal points of this Master thesis is also the convergence of the modulus-based synchronous multisplitting iteration methods, as well as their relaxed variants, when the system matrix is an H-matrix.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 24$^{\text{th}}$ March 2015.
ASB

Defended: July 2015.
DE

Thesis defend board:
DB

Chair:	**Sanja Rapajić, Ph.D.**, Associate Professor,
	Faculty of Science and Mathematics,
	University of Novi Sad,
Supervisor:	**Ljiljana Cvetković, Ph.D.**, Full Professor,
	Faculty of Science and Mathematics,
	University of Novi Sad,
Member:	**Vladimir Kostić, Ph.D.**, Assistant Professor,
	Faculty of Science and Mathematics,
	University of Novi Sad.