UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU INFORMATIKU

Elena-Andrea Marina

Evaluacija VaR mere rizika

- Master rad -

Novi Sad, 2014.

Sadržaj

Predgovor

Kao reakcija na velike finansijske krize tokom dvadesetog veka, koje su rezultirale bankrotom mnogih finansijskih institucija, poslednjih dvadesetak godina u savremenim finansijama razvijeni su brojni koncepti za upravljanje i merenje rizika. Glavna metodologija za upravljanje rizikom je metoda vrednosti pod rizikom, koja se u praksi kombinuje sa drugim tehnikama za minimiziranje rizika u poslovanju, kako bi se postigli optimalni poslovni rezultati. Vrednost pod rizikom (Value at risk - VaR) predstavlja najveći gubitak portfolija koji može da se očekuje u posmatranom periodu, sa datim nivoom poverenja. Ova vrednost je jednostavan, lako razumljiv broj, koji predstavlja rizik kome je institucija izložena na finansijskom tržištu. U okviru postupka upravljanja rizicima definisan je minimalni zahtevani kapital neophodan za zaštitu od rizika. Princip računanja pomenutog kapitala se zasniva upravo na VaR metodologiji.

U radu je detaljno analizirana VaR mera rizika, njene osobine, metode za njeno izračunavanje, kao i metode za procenu tačnosti VaR modela. Za određivanje vrednosti pod rizikom obrađene su tri glavne metode: parametarska, istorijska i metoda Monte Carlo simulacija. Opisani su i analizirani faktori koji utiču na metode za izračunavanje VaR-a - nivo poverenja i vremenski period posmatranja, zatim postupci za izračunavanje VaR mere rizika pomoću datih metoda, kao i prednosti i mane ovih metoda. Primena navedenih metoda je sprovedena na realnim podacima o kretanjima cena akcija velikih svetskih kompanija (Microsoft, Caterpillar, Procter&Gamble, MCDonalds i JPMorgan). Posmatrane su cene akcija navedenih kompanija, u periodu od godinu dana i, na osnovu tih podataka, izračunat je dnevni VaR za različite nivoe poverenja (90%, 95% i 99% nivo poverenja). U radu je izvršen poseban osvrt na metodu za evaluaciju VaR-a, tzv. backtesting metodu. Učinak VaR modela meren je primenom nekoliko različitih vrsta statističkih testova. Kao najčešće razmatrani u teoriji, u radu su predstavljeni i analizirani sledeći testovi za testiranje unazad: Kupiecovi testovi (test proporcije neuspeha i test vremena do pojave prvog neuspeha), Bazelski „semafor“ pristup, Kristofersenov test prognoze intervala, mešoviti Kupiecov test, zajednički Kristofersenov i zajednički mešoviti Kupiecov test. U procesu evaluacije posmatrane su procene za dnevni VaR u periodu od godinu dana, za različite vrste portfolija.

Ovom prilikom želim da izrazim izuzetnu zahvalnost svom mentoru dr Zagorki Lozanov-Crvenković za znanje preneto tokom studija, profesionalno i stručno usmeravanje pri izradi ovog rada, kao i za dragocenu pomoć i sugestije kojim je doprinela da ovaj rad bude završen.

Zahvaljujem se i svojoj porodici na razumevanju i podršci, za vreme studija i uopšte. Ovaj rad posvećujem svojoj baki, koja mi je pomogla da završim fakultet.

U Novom Sadu, 15.04.2014. *Elena-Andrea Marina*

1 Uvod

1.1 Uvodni deo

Često smo u situaciji da donosimo odluku bez uvida u sve posledice i nesigurnosti koje ona može doneti, a pri tom neke od posledica mogu biti nepovoljne. Precizna definicija rizika ne postoji, ali ono što je zajedničko svim definicijama su neizvesnost i gubitak.

Rizik predstavlja svaku neizvesnu situaciju u poslovanju, odnosno verovatnoću gubitka (smanjenje dobitka) nastalu kao rezultat neizvesnih događaja u poslovanju [20].

Na savremenim finansijskim tržištima finansijske institucije izložene su brojnim rizicima. Tržišni rizik, kreditni rizik, valutni rizik, rizik kamatnih stopa, rizik sektora, rizik likvidnosti, svi ti rizici u većem ili manjem obimu postoje u finansijskom poslovanju. Najpoznatija vrsta rizika koja se vezuje za hartije od vrednosti je tržišni rizik, tj. neizvesnost u vezi sa promenom cena hartija od vrednosti.

Upravljanje rizicima je postalo neizostavan deo finansijskog poslovanja. To je proces u kom se identifikuje, meri i kontroliše izloženost riziku. Osnovni ciljevi upravljanja rizikom su optimizacija odnosa rizika i prinosa, da bi se izbegla nesolventnost finansijske institucije i da bi se maksimizirala stopa prinosa na kapital, uz korekciju rizika. Regulisanje rizika, kao krajnji cilj celog procesa proučavanja rizika, zahteva poznavanje faktora koji određuju visinu i prirodu rizika sa kojim se u svom poslovanju sreću finansijske institucije.

U svom poslovanju, finansijske institucije se u današnje vreme suočavaju sa dva velika izazova: upravljanje rizicima i maksimizacija profita. Ovo predstavlja težak zadatak, budući da su rizici brojni i teško se identifikuju, a još teže kontrolišu.

Upravljanje rizikom ima dva glavna cilja:

- da poboljša finansijske performanse institucije, i
- da osigura da jedna institucija ne pretrpi neprihvatljive gubitke.

Finansijske institucije uvećavaju prihode preuzimanjem rizika i upravljanjem njime. Stoga, za profitabilnost institucije od presudnog je značaja upravljanje odnosom rizika i prihoda. Premije rizika, koje se ostvare u svakodnevnom poslovanju, služe za amortizovanje očekivanih gubitaka, dok vlastiti kapital služi za pokrivanje neočekivanih gubitaka.

Finansijski rizik se ispoljava na dva načina, u materijalnom i nematerijalnom obliku. Materijalna komponenta predstavlja gubitak dela ili celog iznosa ulaganja, a nematerijalna predstavlja gubitak poslovnog ugleda.

Finansijski rizici su rizici povezani sa mogućim gubitkom na finansijskom tržištu. Mogu se klasifikovati u pet kategorija:

- tržišni rizik – rizik zbog nestabilnosti tržišnih cena finansijskih instrumenata usled promene kamatnih stopa, deviznih kurseva i cene akcija,

- kreditni rizik – rizik da partner u finansijskoj transakciji neće ispuniti svoju ugovorom preuzetu finansijsku obavezu,

- rizik likvidnosti – rizik da finansijska organizacija ne poseduje dovoljno likvidnih sredstava za izmirenje dospelih obaveza ili rizik da dođe do neočekivanih odliva likvidnih sredstava,

- operativni rizik – rizik koji se javlja usled grešaka ili nepredviđenih događaja u toku izvršavanja poslovnih aktivnosti, čiji uzrok mogu biti ljudski ili tehnički faktori,
- zakonski rizik – rizik usled neodgovarajućih zakona za rešavanje pravnih pitanja koja se odnose na bankarsko poslovanje [11].

Rizik se uopšteno definiše kao neizvesnost budućeg ishoda, nestabilnost zbog neočekivanih rezultata. Rizici mogu biti različiti, a jedna od širih podela je na poslovne i neposlovne rizike. Poslovni rizici su posledica faktora poslovnog okruženja, dok su neposlovni rizici vezani za ekonomsko i političko okruženje, pa finansijske institucije ne mogu da ih kontrolišu. Dakle, u finansijskom poslovanju, rizik bi se mogao definisati kao mogućnost da plasirana sredstva neće zaraditi očekivanu stopu prinosa, odnosno da će nastati gubitak u konkretnom poslu.

Očekivani gubici su kolebanja u vrednosti, koja se mogu predvideti na osnovu raspoloživih informacija, dok su neočekivani gubici moguća odstupanja od očekivanih gubitaka i oni su razlog nastajanja rizika.

Na finansijskom tržištu postoji potreba za rešavanjem problema optimalnog ulaganja u odabrana dobra, pod određenim rizikom. Moguća ulaganja čine portfolio, pa zapravo treba rešiti problem optimizacije portfolija koji uključuje meru rizika ulaganja. Prilikom ulaganja u određeni portfolio nisu poznati podaci o prinosu koji će doneti taj portfolio, tako da pri svakom ulaganju postoji rizik. Rizik se može proceniti koristeći različite mere rizika. Prve ideje za procenjivanje rizika portfolija potiču od Markowitz-a, koji je merio rizik varijansom prinosa. Kasnije su se pojavile i VaR (Value at Risk), CVaR (Conditional Value at Risk) mere rizika.

U ovom radu detaljno će biti analizirana VaR mera rizika.

VaR predstavlja najveći gubitak portfolija, koji može da se očekuje u posmatranom periodu, sa datim nivoom poverenja.

VaR je postao glavna mera rizika u bankarskim regulativama i u unutrašnjem upravljanju rizicima banaka. Iako je VaR, kao mera rizika, superiorniji od volatilnosti, često je osporavan zbog nedostatka osobine subaditivnosti. On se znatno jednostavnije računa od većine mera rizika, i samim tim zauzima značajan položaj u praksi. Tokom 1996. godine, 99% VaR je prihvaćen od strane Bazelskog sporazuma, kao glavna mera rizika za određivanje mogućeg gubitka. Takođe je postao centralno merilo internog rizika za upravljanjem bankarskim sistemima.

Značajnu ulogu u upravljanju rizicima međunarodnog bankarskog i ostalog finansijskog sektora ima Bazelska komisija za nadzor banaka. Bazel je postao opšte prihvaćen standard od značaja za finansijske tokove i investicionu politiku. Ovim sporazumom uvodi se i definiše pojam minimalnog zahtevanog kapitala, koji mora biti ispunjen kako bi se banke zaštitile od rizika.

U ovom radu detaljno će biti definisan VaR kao mera rizika i objašnjene najznačajnije metode za njegovo izračunavanje.

1.2 Lista oznaka i termina

- **Investicija** predstavlja svaki oblik ulaganja sredstava u cilju ostvarivanja profita.
- **Portfolio** je skup finansijskih sredstava kao što su gotovina, akcije, obveznice i druge hartije od vrednosti, koje su u posedu jednog investitora.
- **Prinos** je dobitak ili gubitak dobara u određenom periodu. Prinos sadrži dve komponente: kamata ili dividenda i kapitalna dobit, koja predstavlja razliku u ceni u odnosu na početnu investiciju.

$$R = P_1 - P_0 + d$$

- **Stopa prinosa** se definiše kao odnos zbira realizovanih priliva (kamate, dividendi) i kapitalne dobiti i cene koju je investitor platio za početnu investiciju.
  Data je sledećom formulom:

$$r = \frac{d+K_d}{P_0},$$

  gde je d priliv od dividendi, K_d kapitalna dobit, $K_d = P_1 - P_0$ i P_0 početna cena.
  Ovom merom se ocenjuju različite investicije, od nekretnina do akcija i obveznica. Finansijski instrumenti se obično procenjuju na osnovu ostvarenih stopa u prošlosti, koji se posle porede sa dobrima istog tipa, kako bi se utvrdilo koja investicija je najprivlačnija. Često se koristi izraz prinos kada se govori o stopi prinosa.
- **Diversifikacija** je tehnika upravljanja rizikom, koja kombinuje različite vrste investicija unutar jednog portfolija. Ova tehnika pruža mogućnost smanjenja rizika portfolija sačinjenog od više investicija koje pojedinačno nose veći rizik od samog portfolija, uz veću stopu prinosa. Diversifikacija teži da izjednači nesistematične pojave rizika u jednom portfoliju, tako što će pozitivan učinak nekih investicija neutralisati negativni učinak drugih investicija. Zato diversifikacija ima smisla samo ako finansijski instrumenti u portfoliju nisu u savršenoj korelaciji, tj. nisu svi koeficijenti korelacije pozitivni u odnosu na tržište.
- **Alokacija dobara** se odnosi na strategiju raspodele portfolija svih investicija na različite klase dobara i imovine kao što su akcije, obveznice, hartije od vrednosti sa tržišta novca. Alokacija dobara predstavlja organizovan i efikasan metod diversifikacije.
- **Kratka prodaja** ili nepokrivena prodaja je prodaja bez pokrića hartijama od vrednosti koje su pozajmljene i koje se posle kratkog vremena moraju vratiti uz dogovorenu kamatu.
- **Tržišni rizik** je izloženost promeni tržišne vrednosti portfolija, koja ne može biti predviđena. Pretpostavimo da trgovac poseduje portfolio sastavljen od akcija. Naravno, on zna kolika je današnja vrednost njegovog portfolija, ali je neizvesno kolika će vrednost portfolija biti za nedelju dana [13].

Matematičke oznake:

$\mathbb{R}$	skup realnih brojeva
$\emptyset$	prazan skup
$\mathbb{N}$	skup prirodnih brojeva
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	normalna raspodela sa očekivanjem μ i standardnom devijacijom σ
$f(x)$	funkcija raspodele slučajne promenljive sa normalnom $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelom
$F_X(x)$	funkcija raspodele slučajne promenljive X
$E(X)$	matematičko očekivanje slučajne promenljive X
$P(X \leq x)$	verovatnoća da slučajna promenljiva X uzima vrednost manju od x
ω_i	$i = 1, \dots, n$, i-ti težinski koeficijenti portfolija
A_i	vrednost i-te aktive
R_p	prinos portfolija

1.3 Pregled definicija i teorema

Definicija 1.1. *Podskup $\mathcal{F}$ partitivnog skupa $\mathcal{P}(\Omega)$ je σ - algebra nad Ω ako su zadovoljeni uslovi:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. *ako* $A \in \mathcal{F}$, *tada i* $\bar{A} \in \mathcal{F}$, *gde je* $\bar{A}$ *komplement događaja A u odnosu na skup* Ω
3. *ako je* $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, *onda* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Uređeni par $(\Omega, \mathcal{F})$ *naziva se merljiv prostor.* ●

Definicija 1.2. *Neka je dat merljiv prostor* $(\Omega, \mathcal{F})$. *Funkcija* $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ *za koju važi da je*

1. $P(\Omega) = 1$,
2. $P(A) \geq 0$, *za svaki* $A \in \mathcal{F}$;
3. $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, *za svaki niz* $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1,2,\dots,n,\dots$

takav da je $A_i \cap Aj = \emptyset$ *za svako* $i \neq j$, $i,j = 1,2,\dots,n,\dots$

naziva se verovatnoća na Ω, *a broj* $P(A)$ *je verovatnoća slučajnog događaja A.*

Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *je prostor verovatnoće.* ●

Definicija 1.3. *Slučajna promenljiva X nad prostorom verovatnoće* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *je funkcija* $X : \Omega \to \mathbf{R}$, *za koju važi da je za svako* $x \in \mathbf{R}$

$$\{\omega \in \Omega \mid \boldsymbol{X}(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$ ●

Definicija 1.4. *Funkcija raspodele slučajne promenljive X nad prostorom verovatnoće* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *u oznaci* F_X, *je preslikavanje skupa* $\boldsymbol{R}$ *u skup* $[0,1]$ *definisano sa*

$$F_x(x) = P(X \leq x).$$ ●

Definicija 1.5. *Matematičko očekivanje neprekidne slučajne promenljive definišemo sa:*

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx, \qquad \text{ako je} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty,$$

gde je $f(x)$ *gustina raspodele verovatnoće za koju važi* $F_X'(x) = f(x)$. ●

Definicija 1.6. *Neka je X slučajna promenljiva sa matematičkim očekivanjem* $E(X)$. *Varijansa ili disperzija slučajne promenljive X se definiše kao matematičko očekivanje kvadrata odstupanja slučajne promenljive X od matematičkog očekivanja,*

$$D(X) = E\big(X - E(X)\big)^2$$

Kvadratni koren iz varijanse naziva se standardna devijacija

$$\sigma = \sqrt{D(X)}. \qquad \bullet$$

Definicija 1.7. *Neka je X diskretna slučajna promenljiva i r strogo pozitivan broj. Tada je:*

- *r-ti momenat:* $_r\mu_r = E(X^r)$, *ukoliko* $E(X^r)$ *postoji*
- *r-ti centralni moment:* $m_r = E((X - E(X))^r)$

Matematičko očekivanje slučajne promenljive X je prvi momenat.
Drugi centralni momenat nazivamo varijansom (disperzijom) slučajne promenljive X. •

Definicija 1.8. *Normalna raspodela* $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ *sa očekivanjem* $\mu \in \boldsymbol{R}$ *i standardnim odstupanjem* $\sigma > 0$ *je određena funkcijom gustine*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}, \qquad \text{gde je } x \in \mathbf{R}.$$

Normalna raspodela sa parametrima $\boldsymbol{\mu = 0}$ ***i*** $\boldsymbol{\sigma^2 = 1}$ *zove se standardizovana normalna raspodela i obeležava se sa* $\mathcal{N}(0,1)$. •

Definicija 1.9. *Neka je data slučajna promenljiva X i neka je* $F(x)$ *njena funkcija raspodele. Neka je α realan broj iz intervala* $(0,1)$. *Kvantil reda α (ili α-kvantil) je svaki broj* $x_0 \in \mathbb{R}$ *za koji važe nejednakosti*

$$F(x_0) \le \alpha \ \ i \ \ \lim_{x \to x_0} F(x) = \alpha \qquad \bullet$$

Definicija 1.10. *Gornji α-kvantil za slučajnu promenljivu X je definisan sa*

$$Q^+_{\alpha}(X) = sup\{x \in \boldsymbol{R} \mid P(X \le x) \le \alpha\}, \qquad \alpha \in (0,1).$$

Donji α-kvantil za slučajnu promenljivu X je definisan sa

$$Q_{\alpha}(Y) = inf\{y \in \boldsymbol{R} \mid P(Y \le y) \ge \alpha\}, \alpha \in (0,1). \qquad \bullet$$

Definicija 1.11. *Kovarijansa slučajnih promenljivih* $\boldsymbol{X}$ ***i*** $\boldsymbol{Y}$, *u oznaci* $\boldsymbol{\sigma_{XY}}$, *definiše se kao*

$$\boldsymbol{\sigma_{XY} = cov(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]},$$

Ovo je ekvivalentno sa

$$\boldsymbol{cov(X,Y) = E[XY] - E[X][Y]}$$

Ako je $\boldsymbol{\sigma_{XY} = 0}$, *kažemo da su slučajne promenljive* $\boldsymbol{X}$ ***i*** $\boldsymbol{Y}$ *nekorelisane, za* $\boldsymbol{\sigma_{XY}} > 0$ *su pozitivno korelisane, a za* $\boldsymbol{\sigma_{XY}} < 0$ *su negativno korelisane.* •

Definicija 1.12. *Neka su X i Y slučajne promenljive nad prostorom verovatnoće* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i neka su* σ_X *i* σ_Y *njihova standardna odstupanja. Koeficijent linearne korelacije za X i Y je*

$$\boldsymbol{\rho_{XY} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}}.$$

Za koeficijent korelacije bilo koje dve slučajne promenljive važi $\boldsymbol{|\rho| \le 1}$. •

2 Mere rizika

Raspodela verovatnoća mogućih prinosa predstavlja osnov za procenu rizika. Ona pokazuje na koji način je ukupna verovatnoća raspodeljena na pojedinačne vrednosti mogućeg prinosa. U teoriji se obično pretpostavlja normalna raspodela, tj. koristi se da aproksimira neku drugu raspodelu. Normalna raspodela je u potpunosti određena sa dva parametra: očekivani prinos i standardna devijacija prinosa.

Pretpostavićemo da postoji konačno mnogo vrednosti za moguće prinose, pa ćemo za procenu očekivanog prinosa koristiti očekivanje za diskretnu slučajnu promenljivu. Očekivani prinos se izračunava kao ponderisana aritmetička sredina mogućih prinosa, pri čemu su ponderi upravo verovatnoće nastupanja određenih prinosa.

$$O_p = \sum_{i=1}^{n} p_i v_i$$

gde je p_i vrednost $i-$tog prinosa , a v_i verovatnoća nastanka $i-$tog prinosa.

Varijabilnost (promenljivost) prinosa, tj.odstupanje od očekivanog prinosa meri se standardnom devijacijom prinosa. Ona prikazuje prosečno odstupanje od očekivanog prinosa. Dakle, standardna devijacija prinosa opisuje rizik.

Formula za izračunavanje standardne devijacije prinosa je:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i (p_i - O_p)^2}$$

Odluke je moguće donositi i kroz međuzavisnost očekivanog prinosa i standardne devijacije. U tom smislu postoje dva osnovna pravila odlučivanja.

Prvo pravilo je da se između hartija od vrednosti sa istim očekivanim prinosom bira ona koja ima manju standardnu devijaciju, tj. ima manji rizik, jer veću korisnost ima ona hartija od vrednosti koja ima manji rizik.

Drugo pravilo se odnosi na situaciju kada biramo između hartija od vrednosti sa istom standardnom devijacijom. Tada biramo onu koja ima veći očekivani prinos, tj. sada veću korisnost ima ona hartija od vrednosti koja obećava viši prinos.

2.1 Osobine mera rizika: koherentnost, konveksnost i subaditivnost

Kao što je već rečeno, postoje različite mere rizika, VaR, CvaR, standardna devijacija σ, a poželjne osobine koje bi mera rizika trebala da ima su: koherentnost, subaditivnost, konveksnost, o kojima će biti reči u ovom odeljku.

Definicija 2.1. *Operator R:* $\mathcal{L}^2 \to (-\infty, \infty]$ *je* ***koherentna*** *mera rizika, ako zadovoljava sledeće osobine:*

1) $R(C) = C$, *za svaku konstantu* C,
2) $R((1-\lambda)X + \lambda Y) \leq (1-\lambda)R(X) + \lambda R(Y)$, *za svako* $\lambda \in [0,1]$ *(konveksnost)*
3) $R(X) \leq R(Y)$, *kada je* $X \leq Y$, *(monotonost)*
4) $R(X) \leq 0$, *kada* $\|X^k - X\|_2 \to 0$ *i* $R(X^k) \leq 0$, *(zatvorenost).*

Operator R *se naziva koherentna mera rizika u užem smislu, ako važi dodatno*

5) $R(\lambda X) = \lambda R(X)$, *za* $\lambda > 0$ *(pozitivna homogenost).*

Osobina 1) može biti zamenjena opštijim uslovom koji se dobija kombinacijom osobina 1) i 2)

$$R(X + C) = R(X) + C, \text{ za svaku konstantu } C. \qquad \bullet$$

Kombinacijom osobina 2) i 3) dobijamo jednu veoma važnu osobinu, a to je subaditivnost.

Subaditivnost je jedna od veoma bitnih osobina i problem koji se često javlja u finansijama je njen nedostatak.

Definicija 2.2. Neka su X *i* Y slučajne promenljive koje predstavljaju gubitke dve različite investicije. Mera rizika je je **subaditivna,** ako važi da je rizik od gubitka portfolija koji se sastoji od te dve investicije manji ili jednak zbiru rizika pojedinačnih investicija, tj. važi:

$$R(X + Y) \leq R(X) + R(Y). \qquad \bullet$$

Monotonost je takođe značajna osobina.
Ako skoro sigurno važi $X(\omega) \leq Y(\omega)$ za ω, tada rizik od gubitka $X(\omega)$ neće preći $Y(\omega)$. Takođe, ako primenimo 3) na slučaj $= \sup(X)$, kada je X ograničeno od gore i zatim primenimo 1), onda uvek važi

$$R(X) \leq \sup(X)$$

u slučaju kada je $Y = 0$, važi

$$R(X) \leq 0\,,\ kada\ je\ X \leq 0. \qquad \bullet$$

2.2 Vrednost pod rizikom – VaR

Vrednost pod rizikom (Value at Risk), skraćeno VaR, je mera rizičnosti investicije na finansijskom tržištu. U pitanju je najveći gubitak koji može da se očekuje u datom vremenskom intervalu, sa datim nivoom poverenja. Važno je napomenuti da je VaR samo procena mogućeg gubitka [11]. Jedna od prednosti VaR-a je u tome što je on jednostavan, lako razumljiv broj, koji predstavlja meru rizika kome je institucija izložena na finansijskom tržištu.

Termin Value at Risk (VaR) nije bio zabeležen kao finansijski termin sve do početka 1990-te godine, ali je on, zapravo, nastao mnogo godina ranije. Naime, moglo bi se reći da on vodi poreklo od potrebe za bezbednošću kapitala američkih firmi sa početka XX veka, počevši sa primenom neformalnog kapitalnog testa, koju je njujorška berza (New York Stock Exchange-NYSE) prva sprovela na svojim članovima oko 1922. godine [30]. VaR ima svoje korene u Markowitz-ovoj portfolio teoriji. Naime, metodologija na kojoj se zasniva VaR predstavlja rezultat integrisanja savremene portfolio teorije (koja se fokusira na vrednovanje i senzitivnost finansijskih instrumenata) i statističke analize, koja proučava faktore rizika [29]. Godine 1998. banke su počele da koriste VaR meru rizika za računanje potrebnih regulatornih sredstava.

VaR je uveo Dennis Weatherstone, predsednik američke banke JP Morgan, sa ciljem da mu se pruži mogućnost da svakodnevno kontroliše rizik kome je izložena njegova kompanija. On je svojim analitičarima dao zadatak da mu svaki dan dostavljaju izveštaj, u kome će se nalaziti samo broj, koji označava potencijalni gubitak tog dana. Koliko je koristan VaR model ubrzo su primetile i sve vodeće banke na Wall Street-u i u Evropi.

Direktno ili indirektno, sistematski i na odgovarajući način, VaR mere su nastale pod uticajem portfolio teorije. Nezavisno, Markowitz (1952) i Roy (1952) su objavili VaR mere kao podršku portfolio optimizacije.

U ovom poglavlju navodimo osobine VaR mere rizika, kao što su pozitivna homogenost i monotonost. Videćemo da, u opštem slučaju, ne važe subaditivnost i konveksnost, ali da postoje uslovi pod kojima oni važe.

Učešće pozicija u posmatranom vremenskom periodu u portfoliju je fiksno, što znači da nam VaR daje mogućnost samo da procenimo potencijalni gubitak, ukoliko se struktura portfolija ne bude menjala. VaR se uvek računa s obzirom na neki vremenski period i onda nam sama vrednost govori o potencijalnom gubitku, u datom vremenskom periodu. Budući da je u pitanju ocena koja se računa sa određenim nivoom poverenja, o procenjenom gubitku možemo govoriti samo kao o potencijalnom, a nikako ne možemo reći da je to broj koji nam pokazuje koliki je maksimalno moguć i siguran gubitak. Dakle, VaR ne prikazuje potencijalne gubitke u slučaju nekih vanrednih okolnosti. Na primer, ako je interval poverenja zadat na nivou 95%, izračunati pokazatelj nam govori o tome da ne bi trebalo da izgubimo više od navedenog iznosa u 95% slučajeva, ali nam ne kaže šta bi moglo da se desi u preostalih 5% slučajeva.

VaR modeli za merenje rizika zasnivaju se na nekoliko pretpostavki. Jedna od njih se odnosi na karakteristike stohastičkog procesa, za koji verujemo da se nalazi u osnovi kretanja ključnih vrednosti na finansijskim tržištima (cena/prinos).

Često ovi modeli polaze od pojednostavljenih pretpostavki, koje u praksi nisu zadovoljene (pretpostavka da su prinosi normalno raspoređeni).

Druga pretpostavka se odnosi na fiksna učešća finansijskih instrumenata u portfoliju za koji se računa VaR. Ovo je moguće tvrditi samo u slučaju kratkih vremenskih intervala, dok sa produženjem horizonta, za koji se računa VaR, ova pretpostavka nije zadovoljena.

Označimo dobitak investicije nakon posmatranog perioda sa X. Veličina $-X$ je gubitak investicije, označimo je sa Y. U momentu određivanja veličine investicije nije poznat njen dobitak, pa ga tretiramo kao slučajnu promenljivu. To znači da su dobitak investicije X i gubitak investicije Y slučajne promenljive.

VaR se može posmatrati sa dve tačke gledišta, posmatrajući dobitak ili posmatrajući gubitak investicije. Definisana preko gubitka investicije, VaR mera rizika investicije na nivou poverenja α definisana je α - kvantilom gubitka investicije Y, $\alpha \in (0,1)$.

Definicija 2.3 *VaR mera rizika, definisana preko gubitka investicije je*

$$VaR_{\alpha}(Y) := Q_{\alpha}(Y) = inf\{y \in \boldsymbol{R} \mid P(Y \leq y) \geq \alpha\}, \alpha \in (0,1). \qquad \bullet$$

Znači, VaR je gubitak investicije koji neće biti prevaziđen u α ·100% slučajeva.
Ovde se VaR mera rizika gubitka investicije definiše preko donjeg α-kvantila slučajne promenljive X.

Definicija 2.4 *VaR mera rizika, definisana preko dobitka investicije je*

$$VaR^{+}_{1-\alpha}(X) := Q^{+}_{1-\alpha}(X) = sup\{x \in \boldsymbol{R} \mid P(X < x) \leq 1-\alpha\},\ \alpha \in (0,1). \qquad \bullet$$

Ovo znači da je VaR prinos investicije koji će biti prevaziđen u α · 100% slučajeva.
Ovde se VaR mera rizika dobitka investicije definiše preko gornjeg α-kvantila slučajne promenljive X.

U obe definicije, najčešće vrednosti za α su 0.9, 0.95 i 0.99.

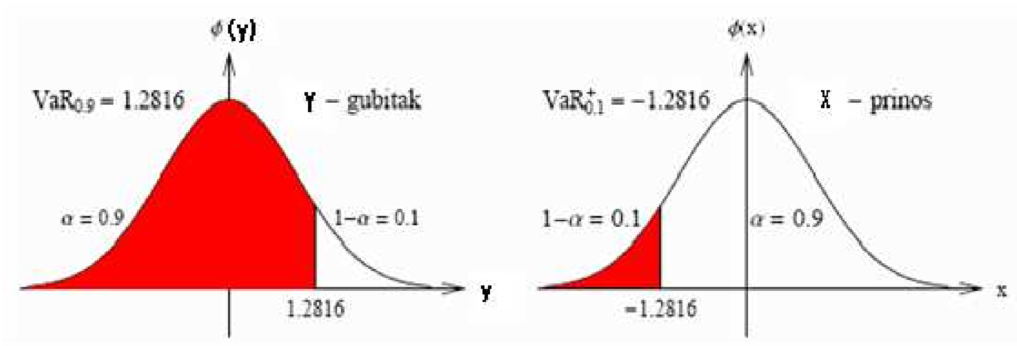
U narednoj teoremi prikazana je veza između gornje dve definicije VaR mere rizika.

Teorema 2.1. [12] *Neka su X i Y redom slučajne promenljive prinosa i gubitka investicije. Važi da je* $VaR_{\alpha}(Y) = -VaR^{+}_{1-\alpha}(X)$.

Dokaz

$$\begin{aligned} VaR_{\alpha}(Y) = Q_{\alpha}(Y) &= inf\{y \epsilon R | P(Y \leq y) \geq \alpha\} = \\ &= inf\{y \epsilon R | P(-Y \geq -y) \geq \alpha\} \\ &= inf\{y \epsilon R | 1 - P(-Y < -y) \geq \alpha\} = \\ &= inf\{y \epsilon R | P(-Y < -y) \leq 1-\alpha\} = \\ &= -sup\{-y \epsilon R | P(-Y < -y) \leq 1-\alpha\} = \\ &= -sup\{x \epsilon R | P(-Y < x) \leq 1-\alpha\} = \\ &= -{Q_{1-\alpha}}^{+}(-Y) = -{VaR_{1-\alpha}}^{+}(X). \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Primer 2.1. VaR mera rizika primenjena na normalnu slučajnu promenljivu $\mathcal{N}(0,1)$ ilustrovana je na slici 2.1. Na levom grafiku korišćena je prva definicija, gde je VaR mera rizika definisana preko gubitka investicije, a na desnom grafiku druga definicija, gde je VaR definisan preko dobitka.



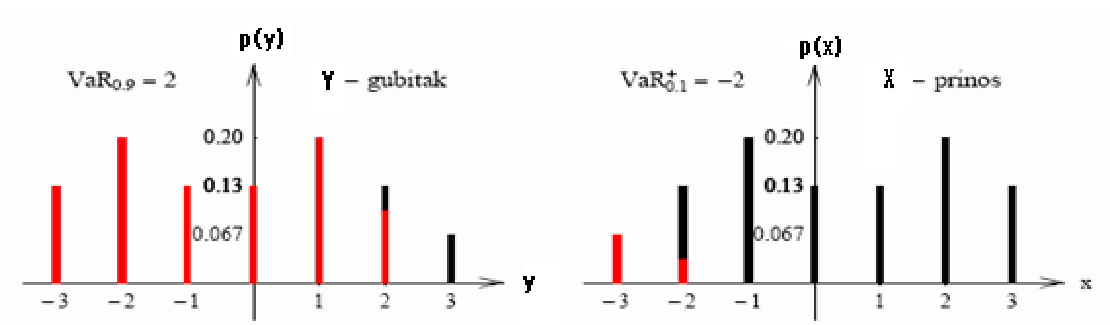
Slika 2.1. VaR definisan preko gubitka i preko dobitka za normalnu slučajnu promenljivu N (0,1) sa funkcijom gustine $f(x)$

Izvor : [12]

VaR mera rizika slučajne promenljive Y, koja ima normalnu raspodelu, sa očekivanjem μ_Y i varijansom σ_Y^2 je

$$\mathrm{VaR}_\alpha(Y) = \mu_Y + \sigma_Y\, Q_\alpha(Z),$$

gde je Z slučajna promenljiva sa normalnom raspodelom $\mathcal{N}(0,1)$.



Slika 2.2. VaR definisan kao gubitak i kao dobitak za diskretnu slučajnu promenljivu

Izvor : [12]

Na slici 2.2. prikazan je VaR primenjen na diskretnu slučajnu promenljivu dobitka sa raspodelom

$$Y\colon\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2/15 & 1/5 & 2/15 & 2/15 & 2/15 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix},$$

odnosno slučajnu promenljivu dobitka sa raspodelom

$$X\colon\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/5 & 2/15 & 1/5 & 2/15 & 2/15 & 1/5 & 2/15 \end{pmatrix}$$

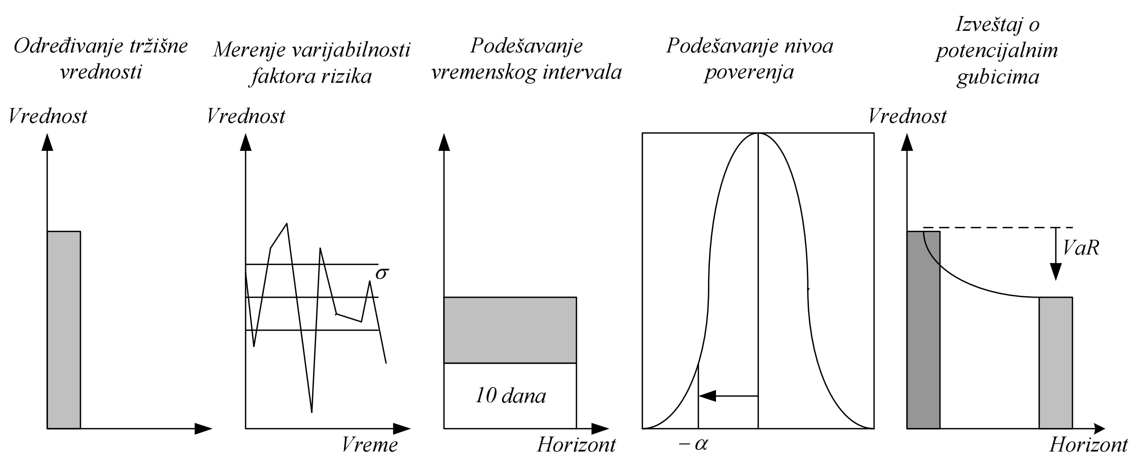
Na obe slike je crvenom bojom označena površina koja odgovara visini nivoa na kojem se određuje VaR.

U slučaju kada se VaR definiše preko gubitka, pozitivne vrednosti predstavljaju gubitak, dok negativne dobitak. Kada se VaR određuje preko dobitka, pozitivne vrednosti predstavljaju dobitak, a negativne gubitak.

Procena VaR-a

Kada govorimo o tržištu i realnim podacima potrebno je:

- odrediti tržišnu vrednost portfolija
- izmeriti varijabilnost faktora rizika
- odrediti vremenski interval
- odrediti nivo poverenja
- na osnovu informacija izračunati najveći gubitak



Grafik1: Koraci u konstrukciji VaR-a

Izvor : [1]

2.3 CVaR (Conditional Value at Risk) – Uslovni VaR

Alternativna mera rizika za VaR je **CVaR (Conditional Value at Risk)** ili uslovni VaR, koji se još naziva i očekivani gubitak. Kod VaR-a se postavlja pitanje: “Koliko situacija može postati loša?”, dok se kod CVaR-a javlja pitanje: ”Ukoliko situacija postane loša, koliko iznosi očekivani gubitak?”.

Po definiciji, $CVaR_\alpha$ je očekivani gubitak koji prelazi VaR_α, tj. srednja vrednost $(1-\alpha)\cdot 100\%$ najvećih gubitaka, dok je VaR_α najveći od $\alpha \cdot 100\%$ najmanjih gubitaka.

Na primer, ako je $\alpha = 0.99$, $CVaR$ je prosečna vrednost 1% najvećih gubitaka. Postoji nekoliko razloga zbog kojih je *CVaR* prihvatljivija mera rizika od *VaR*-a. Prednost *CVaR*-a u odnosu na *VaR* jeste činjenica da *CVaR* poseduje osobinu subaditivnosti. *VaR* nam ne daje nikakve informacije o gubicima koji prelaze *VaR*, a definicija *CVaR*-a nam garantuje da je $CVaR \geq VaR$, i iz tog razloga portfolio koji ima nizak *CVaR*, ima i nizak *VaR*. U opštem slučaju, *CVaR* je konveksna funkcija, i koherentna mera rizika, pa se može optimizirati koristeći tehnike linearnog programiranja.

U nastavku će biti navedene osobine *VaR*-a i *CVaR*-a, kao i njihova poređenja.

Definicija 2.5. *Neka je X slučajna promenljiva i* F_X *njena funkcija raspodele, tj.* $F_X(VaR) = P\{X \leq VaR\}$. *Za fiksiran nivo poverenja α,* VaR_α *se definiše kao α-kvantil, tj.*

$$VaR_\alpha(X) = \phi^{-1}(\alpha),$$

a $CVaR_\alpha$ *se može definisati na sledeći način:*

$$CVaR_\alpha(X) = inf\left\{a + \frac{1}{1-\alpha}E(X-a)^+ : a\epsilon R\right\}, \qquad \text{gde je } z^+ = max\,(z,0). \tag{1}$$

Druga definicija CVaR_α-a je već data, tj. CVaR_α je uslovno očekivanje od X (pod uslovom $X \geq VaR_\alpha$), odnosno $\mathrm{CVaR}_\alpha(X) = E(X|X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X))$. ●

Čak i ako F nije diferencijabilna funkcija, (1) ima infimum i to je VaR_α.

Lema 1 [23]: Neka je F(b) ≥ α i F(b−) ≤ α. Tada važi

$$b + \frac{1}{1-\alpha}E(X-b)^+ \leq a + \frac{1}{1-\alpha}E(X-a)^+, \qquad \text{za svako a.}$$

Dokaz: Neka je $b \leq a$. Tada je

$$E[X|b<X] - E[X|a<X] = E[X|b<X\leq a]$$
$$\leq a[F(a)-F(b)] \leq a[F(a)-\alpha] - b[F(b)-\alpha].$$

Dalje,
$$b[1-\alpha] - b[1-F(b)] + E[X|b<X] \leq a[1-\alpha] - a[1-F(a)] + E[X|a<X]$$
$$b[1-\alpha] + E[X-b|b<X] \leq a[1-\alpha] + E[X-a|a<X]$$

$$b + \frac{1}{1-\alpha}E[X-b|b<X] \leq a + \frac{1}{1-\alpha}E[X-a|a<X].$$

Ako je $a \leq b$ sledi

$$E[X|a < X] - E[X|b \leq X] = E[X|a < X < b]$$
$$\geq a[F(b-) - F(a)] \geq b[F(b-) - \alpha] - a[F(a) - \alpha].$$

Zatim,

$$a[1-\alpha] - a[1 - F(a)] + E[X|a < X] \geq b[1-\alpha] - b[1 - F(b-)] + E[X|b \leq X]$$
$$[1-\alpha] + E[X - b|b < X] \leq a[1-\alpha] + E[X - a|a < X]$$

$$a[1-\alpha] + E[X - a|a < X] \geq b[1-\alpha] + E[X - b|b \leq X] - b[1 - F(b-)]$$

$$b + \frac{1}{1-\alpha} E[X - b|b < X] \leq a + \frac{1}{1-\alpha} E[X - a|a < X].$$

Kako bi se definisale osobine *VaR*-a i *CVaR*-a kao mera rizika, potrebno je definisati relacije preferencije. Pretpostavimo da su $X_1 i\, X_2$ dve slučajne promenljive.

Definicija 2.6. *Stohastička preferencija reda* 1:
Relacija $X_1 \prec_{SD1} X_2$ *važi ako je*

$$E[\Psi(X_1)] \leq E[\Psi(X_2)],$$

za sve integrabilne i monotone funkcije Ψ. ●

Definicija 2.7. *Stohastička preferencija reda* 2:

Relacija $X_1 \prec_{SD2} X_2$ *važi ako je*

$$E[\Psi(X_1)] \leq E[\Psi(X_2)],$$

za integrabilne, konkavne i monotone funkcije Ψ. ●

Definicija 2.8. *Monotona preferencija reda* 1:
Relacija $X_1 \prec_{MD1} X_2$ *važi ako je*

$$E[\Psi(X_1)] \leq E[\Psi(X_2)],$$

za sve integrabilne i konkavne funkcije Ψ. ●

Trivijalne posledice navedenih relacija su sledeće:

- iz relacije $X_1 \prec_{SD1} X_2$ sledi relacija $X_1 \prec_{SD2} X_2$,
- $X_1 \prec_{SD2} X_2$važi ako i samo ako važi $X_1 \prec_{SD1} X_2$ i $X_1 \prec_{MD1} X_2$.

Relacije $X_1 \prec_{SD2} X_2$ i $\int_{\infty}^{y} F_{X_1}(u)du \leq \int_{-\infty}^{y} F_{X_2}(u)du$ su ekvivalentne za svako y.

Lema 2 [23]: VaR_α ima sledeće osobine:

1) $VaR_\alpha(X + c) = VaR_\alpha(X) + c$ (invarijantnost u odnosu na translaciju)
2) $VaR_\alpha(cX) = cVaR_\alpha(X),$ ako je $c > 0$ (pozitivna homogenost)
3) $VaR_\alpha(X) = VaR_{(1-\alpha)}(-X),$
4) VaR_α je monotono u smislu SD1, tj.

$$X_1 \prec_{SD1} X_2 \Longrightarrow VaR_\alpha(X_1) \leq VaR_\alpha(X_2).$$

Lema 3 [23]: $CVaR_\alpha$ zadovoljava sledeće osobine:

1) $CVaR_\alpha(X+c) = CVaR_\alpha(X) + c$ (invarijantnost u odnosu na translaciju)
2) $CVaR_\alpha(cX) = cCVaR_\alpha(X)$, za $c > 0$ (pozitivna homogenost)
3) Ako slučajna promenljiva X ima funkciju gustine, onda je
$$E(X) = (1-\alpha)CVaR_\alpha(X) - \alpha CVaR_{1-\alpha}(-X).$$
4) $CVaR_\alpha$ je konveksna funkcija u sledećem smislu: Za proizvoljne slučajne promenljive X_1 i X_2 i $0 < \lambda < 1$ važi
$$CVaR_\alpha(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \leq \lambda CVaR_\alpha(X_1) + (1-\lambda)CVaR_\alpha(X_2)$$
5) $CVaR_\alpha$ je monotona funkcija u smislu SD2, tj. ako
$$X_1 \prec_{SD2} X_2 \Longrightarrow CVaR_\alpha(X_1) \leq CVaR_\alpha(X_2).$$
6) $CVaR_\alpha$ je monotona funkcija u smislu MD2, tj.ako
$$X_1 \prec_{MD2} X_2 \Longrightarrow CVaR_\alpha(X_1) \leq CVaR_\alpha(X_2).$$

Dokaz: 1) i 2) slede iz definicije $CVaR_\alpha$-a. Dalje dokazujemo da važi 3).
Pošto je
$$\begin{aligned} CVaR_{(1-\alpha)}(-X) &= E\big(-X \big| -X \geq VaR_{(1-\alpha)}(-X)\big) \\ &= E\big(-X \big| -X \geq -VaR_\alpha(X)\big) \\ &= -E\big(X \big| X \leq VaR_\alpha(X)\big) \end{aligned}$$

Dalje je
$$E(X) = \alpha E\big(X \big| X \leq VaR_\alpha(X)\big) + (1-\alpha)E\big(X \big| X \geq VaR_\alpha(X)\big) =$$
$$-\alpha CVaR_{(1-\alpha)}(-X) + (1-\alpha)CVaR_\alpha(X).$$
4) Pretpostavimo da je a_i takvo da je $CVaR_\alpha(X_i) = a_i + \frac{1}{1-\alpha}E(X_i - a_i)^+$.
Pošto je preslikavanje $x \longmapsto (x-a)^+$ konveksno, sledi

$$\begin{aligned} &CVaR_\alpha(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \\ &\leq \lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 + \frac{1}{1-\alpha}E(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 - \lambda a_1 + (1-\lambda)a_2)^+ \\ &\leq \lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 + \frac{\lambda}{1-\alpha}E[X_1 - a_1]^+ + \frac{1-\lambda}{1-\alpha}\ \ E(X_2 - a_2)^+ \\ &\leq \lambda CVaR_\alpha(X_1) + (1-\lambda) \leq CVaR_\alpha(X_2) \end{aligned}$$

U dokazu 5) i 6) se koristi činjenica da je preslikavanje $x \longmapsto (x-a)^+$ monotono i konveksno.
Na osnovu definicija VaR-a i $CVaR$-a jasno se uočava njihov odnos, a to je $CVaR_\alpha \geq VaR_\alpha$. □

2.4 Osobine VaR mere rizika

Podsetimo se, mera rizika je *subaditivna,* ako je zbir rizika dve investicije veći ili jednak riziku portfolija dobijenog spajanjem tih investicija. Kao što je već rečeno, poželjne osobine za meru rizika su koherentnost i subaditivnost. Sledi primer da VaR nije subaditivna mera rizika, tj. da se spajanjem dve investicije u jedan portfolio može dobiti portfolio čiji je VaR veći od zbira VaR mere rizika pojedinačnih investicija.

Za razliku od VaR-a, CvaR jeste subaditivna mera rizika, a može se pokazati i da je koherentna mera rizika.

Primer 2.2. [12] *Posmatrajmo investiciju x_1 koja predstavlja ulaganje u akciju A_1 i investiciju* x_2 *koja predstavlja ulaganje u akciju* A_2*. Neka su raspodele gubitka investicija x_1 i* x_2 *date sa Y_1 i Y_2*

$$Y_1\colon\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.98 & 0.02 \end{pmatrix} \quad Y_2\colon\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.96 & 0.04 \end{pmatrix}$$

respektivno.

95% VaR mera rizika investicije x_1 je

$$VaR_{0.95}(Y_1) = 0,$$

jer posmatramo vrednost koju slučajna promenljiva Y može da primi, a da je zadovoljeno

$$P\{Y \le y\} \ge 0.95$$

Tako je 95% VaR mera rizika investicije x_2 vrednost koju slučajna promenljiva prima sa verovatnoćom većom od 0.95, a to je:

$$VaR_{0.95}(Y_2) = -1$$

Posmatrajmo sada portfolio x koji sadrži 50% akcija A_1 i 50% akcija A_2, odnosno x = (0.5, 0.5).

Raspodela gubitka portfolija x je

$$Y\colon\begin{pmatrix} x^T(0,-1) & x^T(0,1) & x^T(2,-1) & x^T(2,1) \\ 0.9408 & 0.0392 & 0.0192 & 0.0008 \end{pmatrix}$$

Vrednosti portfolija su $x^T(0,-1) = (0.5,0.5)(0,-1) = 0.5 \cdot 0 + 0.5 \cdot (-1) = -0.5$

$$x^T(0,1) = 0.5$$
$$x^T(2,-1) = 0.5$$
$$x^T(2,1) = 1.5$$

$$\text{tj.} \quad \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 & 1.5 \\ 0.9408 & 0.0392 + 0.0192 & 0.0008 \end{pmatrix}.$$

Sledi da je

$$VaR_{0.95}(Y) = (0.5,0.5)^T(2,-1) = 0.5$$

Dobili smo da je

$$VaR_{0.95}(Y_1) + VaR_{0.95}(Y_2) = 0 + (-1) = -1 < 0.5 = VaR_{0.95}(Y),$$

što znači da <u>ne važi</u> subaditivnost za VaR meru rizika. Iz gornjeg rezultata se vidi da, na nivou poverenja od 95%, spajanjem investicija x_1 i x_2 u jedan portfolio, dobija se portfolio koji je rizičniji od investicija pojedinačno. □

Primer 2.3. *Neka investicije x_1 i x_2 predstavljaju ulaganja u akciju firme 1 i firme 2. Neka su Y_1 i Y_2, respektivno, slučajne promenljive koje predstavljaju gubitak investicija x_1 i x_2, a raspodele za Y_1 i Y_2 sledeće:*

$$Y_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.97 & 0.015 & 0.015 \end{pmatrix} \qquad Y_2 : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.96 & 0.02 & 0.02 \end{pmatrix}$$

za investiciju x_1 je $\quad VaR_{0.95}(Y_1) = 0$,

za investiciju x_2 je $\quad VaR_{0.95}(Y_2) = -1$.

Sada posmatrajmo portfolio x sa jednakim udelom akcija firme 1 i firme 2 , $x = (0.5, 0.5)$.

Raspodela gubitka novog portfolija, sastavljenog od investicija x_1 *i* x_2 sa jednakim težinskim koeficijentima je

$$Y: \begin{pmatrix} x^T(0,-1) & x^T(0,0) & x^T(0,1) & x^T(1,-1) & x^T(1,0) & x^T(1,1) & x^T(2,-1) & x^T(2,0) & x^T(2,1) \\ 0.9312 & 0.0194 & 0.0194 & 0.0144 & 0.0003 & 0.0003 & 0.0144 & 0.0003 & 0.0003 \end{pmatrix}$$

Dakle, vrednosti portfolija su :

$$Y: \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1 & 3/2 \\ 0.9312 & 0.0194 & 0.0194 & 0.0144 & 0.0003 & 0.0003 & 0.0144 & 0.0003 & 0.0003 \end{pmatrix}$$

$$\text{tj.} \qquad Y: \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0.9312 & 0.0338^{[1]} & 0.0006 & 0.0341^{[2]} & 0.0003 \end{pmatrix}$$

$$0.9312 + 0.0338 = 0.965 > 0.95$$

(posmatramo y_2, tj. drugu vrednost koju slučajna promenljiva Y može da primi, to je $x^T(1,-1)$, jer je $VaR_{0.95}$ najmanja vrednost y za koju važi da je $P\{Y \le y\} \ge 0.95$)

$$95\%\ \text{VaR je } (0.5\,, 0.5)^T(1\,,-1) = 0.$$

Dobijeni rezultat

$$VaR_{0.95}(Y_1) + VaR_{0.95}(Y_2) = 0 + (-1) = -1 < 0 = VaR_{0.95}(Y)$$

pokazuje da je narušena osobina subaditivnosti. □

---

[1] Vrednost je dobijena sabiranjem verovatnoća 0.0194 i 0.0144 (za vrednost 0 koju slučajna promenljiva Y može da primi)

[2] Analogno gornjem, vrednost je dobijena sabiranjem verovatnoća 0.0194, 0.0003 i 0.0144 (za vrednost 1/2 koju slučajna promenljiva Y može da primi)

Markowitz je u svom modelu za izbor optimalnog ortfolija pokazao da je varijansa portfolija manja od zbira varijansi pojedinačnih aktiva u tom portfoliju. Kako je mera rizika predstavljena varijansom, kada su prinosi normalno raspoređeni, VaR mera rizika zasnovana na standardnoj devijaciji zadovoljavaosobinu subaditivnosti.

Definicija 2.9. *Mera rizika koja je pozitivno homogena i subaditivna je **konveksna**.* ●

Kako u opštem slučaju, za VaR ne važi subaditivnost, VaR nije konveksna mera rizika. Međutim, sledeća teorema pokazuje da, ako slučajne promenljive imaju normalnu raspodelu, VaR mera rizika jeste subaditivna. Kasnije ćemo videti da je i konveksna.

Kao što je rečeno, VaR mera rizika slučajne promenljive Y koja ima normalnu raspodelu sa očekivanjem μ_Y i varijansom σ_Y^2 je

$$\mathrm{VaR}_\alpha(Y) = \mu_Y + \sigma_Y \, Q_\alpha(Z),$$

gde je Z slučajna promenljiva sa normalnom raspodelom N(0,1).

Teorema 2.2. *Neka su Y_1 i Y_2 slučajne promenljive sa normalnom raspodelom $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ i $\mathcal{N}$ (μ_2, σ_2^2) respektivno. Tada je za* $\alpha > 0.5$

$$VaR_\alpha(Y_1 + Y_2) \leq VaR_\alpha(Y_1) + VaR_\alpha(Y_2).$$

Dokaz

$Y_1 + Y_2$ je slučajan vektor sa normalnom raspodelom

$$\mathrm{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + 2\,\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2),$$

gde je ρ koeficijent korelacije $Y_1 i\, Y_2$.

Za koeficijent korelacije važi da je $\rho < 1$, pa je $\sigma_1^2 + 2\,\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 \leq (\sigma_1 + \sigma_2)^2$.

Pošto je $Q_\alpha(Z) > 0$, za svako $\alpha > 0.5$, dobijamo da je

$$VaR_\alpha(Y) = \mu_1 + \mu_2 + \sqrt{\sigma_1^2 + 2\,\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \cdot Q_\alpha(Z) \leq$$

$$\mu_1 + \mu_2 + (\sigma_1 + \sigma_2) \cdot Q_\alpha(Z) = VaR_\alpha(Y_1) + VaR_\alpha(Y_2),$$

što smo i hteli dokazati. ■

3 Određivanje VaR mere rizika

Prvi korak ka merenju VaR-a je biranje dva kvantitativna faktora**: holding period (period držanja)** i **nivo poverenja**.

Najčešće se za holding period bira jedan dan ili mesec dana, mada se institucije mogu opredeliti i za periode kao što su dvonedeljni, kvartal i slično. Period držanja može zavisiti od likvidnosti tržišta na kom institucija posluje. Idealni holding period je vreme potrebno da se obezbedi jedinstvena likvidacija tržišnih pozicija.

Po Bazelskom sporazumu, period koji su modeli procene koristili za određivanje minimuma regulatornog kapitala za tržišni rizik, mora da prikazuje period od dve nedelje, odnosno deset radnih dana.

Izbor holding perioda može zavisiti od više faktora, u kratkom vremenskom intervalu su lakše održive hipoteze o konstantnosti portfolija tokom perioda posmatranja. Takođe, za testiranje modela (tzv. backtesting), poželjniji je kraći period posmatranja. Komercijalne banke imaju izveštaje o dnevnom VaR-u zbog brzih preokreta njihovih portfolija. Portfoliji ulaganja u penzijske fondove sporo prilagođavaju svoju izloženost riziku, te se za njihove potrebe investiranja bira jednomesečni period. Da bi dobijeni podaci sadržali retke i ekstremne događaje (koji uzorkuju najozbiljnije gubitke), želimo da posmatramo dugo istorijsko razdoblje.Sa druge strane, kako se VaR-om predviđa buduća raspodela prinosa, potrebno je koristiti najnovije tržišne podatke [3].

Za izračunavanje VaR-a mogu se izabrati različiti nivoi poverenja. Na primer, Bazelski komitet koristi nivo poverenja od 99%, dok se u J.P.Morganov-om RiskMetriks modelu koristi 95% nivo poverenja. Treba napomenuti da je, kada se vrši poređenje VaR izveštaja dveju institucija, potrebno da nivoi poverenja budu jednaki.

Izbor nivoa poverenja zavisi od cilja zbog kog se meri rizik. Ovaj izbor bi trebao da iskazuje nivo kompanijine averzije prema riziku i troškovima, usled gubitaka izazvanih premašivanjem VaR-a. Veća averzija prema riziku povlači veću količinu kapitala, potrebnog za pokrivanje potencijalnih gubitaka, a to vodi višem nivou poverenja. Sa druge strane, za testiranje modela, poželjno je odrediti relativno nizak nivo poverenja. Dalje, ako VaR koristimo samo da bismo poredili rizike na različitim tržištima, tada je izbor nivoa poverenja irelevantan.

3.1 Metode za određivanje VaR mere rizika

Postoje tri glavne metode za izračunavanje VaR mere rizika, a to su:

1. Parametarski metod
2. Metod istorijske simulacije
3. Metod Monte-Carlo simulacije

3.1.1 Parametarski metod

Ovaj metod je poznat još i pod nazivom metod varijanse i kovarijanse. U ovom metodu se pretpostavlja da tržišne promenljive imaju normalnu raspodelu i koriste se njene karakteristike za određivanje VaR-a. Glavna karakteristika normalne raspodele je da je njena funkcija gustine simetrična i da je u potpunosti određena ako su poznata dva parametra: srednja vrednost μ, i standardna devijacija σ.

Za računanje VaR-a za portfolio, koji se sastoji od samo jedne pozicije (akcije), čiji prinos X ima normalnu raspodelu, koristi se formula:

$$VaR_{t,\alpha} = -x_\alpha \cdot S \cdot \sqrt{t}, \qquad (1)$$

gde je *t* holding period, 1-α nivo poverenja, S je vrednost pozicije za koju se računa VaR (to u opštem slučaju može biti portfolio sastavljen od više sredstava) i konačno, x_α je kvantil reda α, normalne raspodele sa parametrima μ i σ.

Da bi se odredio kvantil x_α koristi se transformacija

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma},$$

gde je $Z : \mathcal{N}(0,1)$ je standardizovana normalna slučajna promenljiva. Iz ovoga sledi da je

$$X = Z \cdot \sigma + \mu\,,$$

pa se kvantil x_α dobija pomoću kvantila z_α, reda α standardizovane normalne slučajne promenljive.

Ako je period posmatranja 1 dan, tj. t=1, tada imamo

$$VaR_{1,\alpha} = -(z_\alpha \cdot \sigma + \mu) \cdot S.$$

Ako pretpostavimo da je $\mu = 0$, tad dobijamo:

$$VaR_{1,\alpha} = -z_\alpha \cdot \sigma \cdot S.$$

Ova pretpostavka je razumljiva, zato što je očekivana promena vrednosti portfolija tokom kratkog holding perioda (u ovom slučaju jednog dana) skoro uvek blizu nule.

Za izračunavanje VaR-a za period duži od jednog dana, modifikujemo formulu za računanje VaR-a. Najpre, srednja vrednost prinosa portfolija μ, za period od N dana, postaje

$$\mu_N = N \cdot \mu\,.$$

Dalje, varijansa stope prinosa portfolija za period od N dana je data sa

$$\sigma^2{}_N = N \cdot \sigma^2,$$

pa sledi da je standardna devijacija stope prinosa

$$\sigma_N = \sqrt{N} \cdot \sigma.$$

Konačno, formula za izračunavanje VaR-a sa holding periodom od N dana glasi:

$$VaR_{N,\alpha} = -\left(z_\alpha \cdot \sigma \cdot \sqrt{N} + \mu \cdot N\right) \cdot S.$$

Stoga, kada je holding period duži od jednog dana, t=N, tada se za μ = 0 dobija formula za VaR

$$\mathrm{VaR}_{\mathrm{N},\alpha} = -z_\alpha \cdot \sqrt{\mathrm{N}} \cdot \sigma \cdot \mathrm{S}.$$

Dakle, ukoliko nas interesuje npr. 10-dnevni VaR, potrebno je da jednodnevni VaR pomnožimo sa $\sqrt{10}$, tj.

$$\sqrt{10} \cdot VaR_{1,\alpha}.$$

Primer 3.1. *Treba izračunati jednodnevni VaR za 50 akcija firme A, koje imaju trenutnu vrednost od 100$ po akciji i čiji prinosi imaju $\mathcal{N}(0,005;0,01)$, uz 95%-ni nivo poverenja.*

Traženi VaR se dobija na sledeći način:

Kako je t=1 sledi

$$VaR_{1,\alpha} = -\left(-1{,}65 \cdot \sqrt{0{,}01} + 0{,}005\right) \cdot 5000 = 800.$$ □

Primer 3.2. *Posmatrajmo finansijsku instituciju koja ima poziciju u vrednosti od 1.000.000£, i neka je trenutni odnos kursa engleske funte i švedske krune GBP/SEK=1/10. Pretpostavimo, prema statističkim podacima, da je standardna devijacija GBP u odnosu na SEK 0.45%. Neka se traži VaR na nivou poverenja od 95%.*

Tada se VaR može izračunati kao:

VaR = 10.000.000 * 1.65 * 0.45% = 74.250 SEK.

Dakle, može se zaključiti, prema podacima iz prošlosti, da portfolio od 1.000.000£ u 95% slučajeva neće izgubiti više od 74.250 SEK. To je osnovni način računanja rizične vrednosti za ulaganja u pojedinačne instrumente. □

3.1.1.1. Vrednost pod rizikom za portfolio sa više sredstava

Računanje VaR-a za portfolio, koji sadrži više od jedne akcije, je složeniji, ali i realniji zadatak od računanja VaR-a za samo jednu poziciju (instrument). Sledi opis metode za računanje rizične vrednosti portfolija, koja je zasnovana na osnovnim postavkama savremene portfolio teorije Harry-jaMarkowitz-a. Ova metoda uključuje elemente diversifikacije portfolija, uvodeći korelacijsku matricu za sve pojedinačne instrumente unutar portfolija. Ove modifikacije čine model kompleksnijim.

Naime, ako se cene dva sredstva menjaju usklađeno jedna sa drugom, kažemo da su u korelaciji. Ukoliko se cene pomere u istom smeru (kada jedna raste i druga raste; kada prva opada i druga opada), tada je korelacioni koeficijent pozitivan, a ukoliko se cene kreću suprotnim smerovima, tada je koeficijent korelacije negativan (Ako je x=aY+b to je primer potpune korelisanosti).

Na primer, ako je portfolio sastavljen od četiri instrumenta, potrebno je imati u vidu 6 koeficijenata korelacije. Broj koeficijenata računa se prema formuli:

$$\frac{N\cdot(N-1)}{2}, \tag{2}$$

gde N predstavlja broj instrumenata uključenih u portfolio.

Procena VaR-a se svodi na jednostavnu upotrebu matrice varijansi-kovarijansi. Matrica se dobija na osnovu stope prinosa posmatranih sredstava u posmatranom periodu i izgleda:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} var(R_1) & covar(R_1,R_2) & \cdots & \cdots & covar(R_1,R_n) \\ covar(R_2,R_1) & var(R_2) & \cdots & \cdots & covar(R_2,R_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ covar(R_n,R_1) & covar(R_n,R_2) & \cdots & \cdots & var(R_n) \end{bmatrix},$$

gde je $var(R_i)$ varijansa stope prinosa sredstva $i = 1,2,\dots n$.

$covar(R_i, R_j)$ je kovarijansa između stope prinosa za sredstva i i j

i važi da je $covar\left(R_i, R_j\right) = covar\left(R_j, R_i\right), i = 1,2,\dots n,\ j = 1,2,\dots m.$

Standardna devijacija portfolija se računa pomoću kovarijansne matrice, po sledećoj formuli:

$$\sigma = \sqrt{\omega\Sigma\omega^T},$$

gde je $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ vektor udela sredstava u portfoliju (nominalni iznosi uloženi u svako sredstvo), a Σ je kovarijansna matrica.

Dakle, standardna devijacija portfolija se računa kao kvadratni koren varijanse portfolija,

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2},$$

gde je $\sigma^2 = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]\begin{bmatrix} var(R_1) & covar(R_1,R_2) & \cdots & \cdots & covar(R_1,R_n) \\ covar(R_2,R_1) & var(R_2) & \cdots & \cdots & covar(R_2,R_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ covar(R_n,R_1) & covar(R_n,R_2) & \cdots & \cdots & var(R_n) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix}. \quad (3)$

U slučaju standardizovane normalne slučajne promenljive, kovarijansa između dva sredstva je jednaka koeficijentu korelacije ρ, jer je drugi momenat (disperzija) jednak 1. Kovarijansa jednog elementa sa samim sobom naziva se varijansa (i ona je u ovom slučaju jednaka 1).

Nakon množenja u formuli (3), dobija se formula u razvijenom obliku za izračunavanje VaR-a za portfolio:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \omega_i{}^2 \sigma_i{}^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \sum_{j=1}^{N} \omega_i \omega_j \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j}}\,, \tag{4}$$

gde je

ω_i – vrednost i-te pozicije (uloženi iznos)

σ_i – promenljivost (standardna devijacija) i-te pozicije

$\rho_{i,j}$ – koeficijent korelacije između i-te i j-te pozicije

Prvi deo formule

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i{}^2 \sigma_i{}^2$$

je zapravo umnožak vrednosti pozicije sa promenom cene ili stope. Tako se dobija dobit portfolija u slučaju da su instrumenti međusobno nezavisni (koeficijent korelacije je 0).

Drugi deo formule

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \sum_{j=1}^{N} \omega_i \omega_j \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j}$$

dodaje ili oduzima efekte diversifikacije. Ako je koeficijent korelacije negativan, ovaj izraz smanjuje dobit i obrnuto [8].

Primer 3.3. *Ako bi se već spomenuti portfolio od 1.000.000£ proširio na ulaganja od 1.000.000 CHF, javila bi se potreba za računanje VaR-a za portfolio sa više od jedne pozicije.*

Na osnovu formule (2), u ovom primeru broj potrebnih koeficijenata korelacije je 1. Kako je trenutni kurs CHF/SEK 1/7, i standardna devijacija švajcarskog franka 0,3%, a neka je koeficijent korelacije između CHF i GBP 0,5, tada se prvo izračuna rizična vrednost (VaR) za CHF na sledeći način:

$$\mathrm{VaR}_{\mathrm{CHF}} = 7.000.000 * 1.65 * 0.003 = 34.650 \text{ SEK}$$

Konačno, formula (3) može se primeniti za izračunavanje rizične vrednosti portfolija sastavljenog od 1.000.000 GBP i 1.000.000 CHF. Rizična vrednost tog portfolija iznosi:

$$VaR = \left[\begin{pmatrix} 74.250 & 34.650 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 74.250 \\ 34.650 \end{pmatrix}\right]^{\frac{1}{2}} = 96.366\ SEK$$

Dakle, podaci iz prošlosti pokazuju da portfolio u 95% slučajeva neće izgubiti više od 96.366 SEK. Očigledno, uvođenjem koeficijenata korelacije, VaR za ceo portfolio je niži od VaR-a koji bi se dobio sabiranjem pojedinačnih rizičnih vrednosti elemenata portfolija. □

Primer 3.4. *Posmatrajmo portfolio sastavljen od akcijâ 5 kompanija: Procter&Gamble, MCDonalds, Microsoft, Caterpillar, JPMorgan. Sredstva su uložena sa jednakim udelima, po 100$ u svaku kompaniju. Izračunaćemo VaR sa 95%-nim nivoom poverenja.*

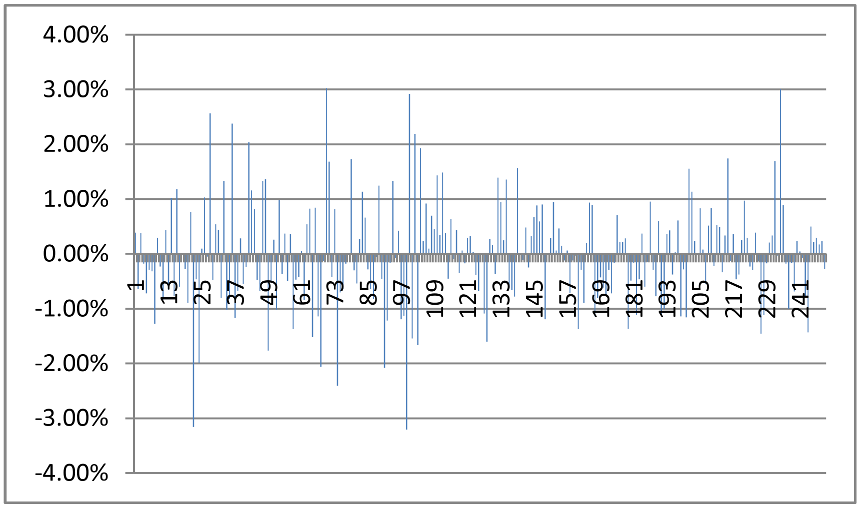
Na osnovu kretanja cena akcija sa sajta www.finance.yahoo.com, u periodu od 24.08.2010.

do 22.08.2011.godine (251 radni dan), izračunate su dnevne stope prinosa (u procentima) za akcije svih 5 kompanija. Da bismo pojednostavili slučaj, nećemo uključivati dobit od dividende na akcije.

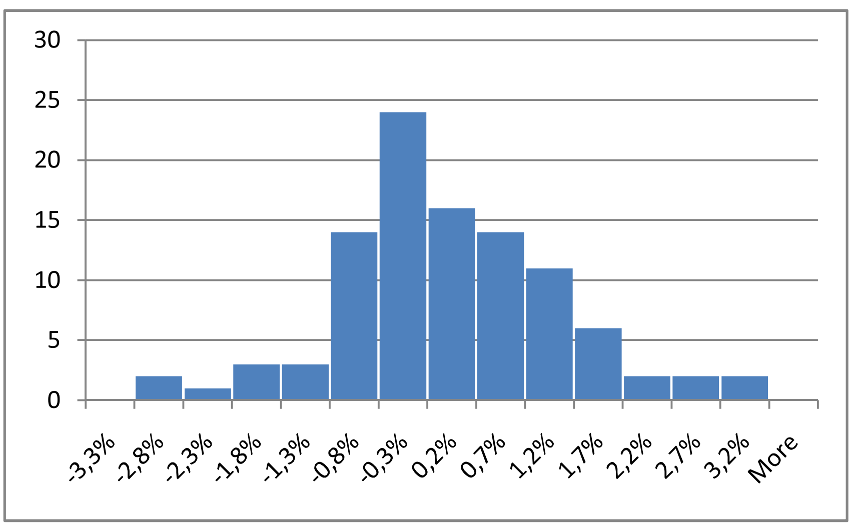
Dnevne stope prinosa smo izračunali po formuli datoj na početku rada:

$$r = \frac{P_1 - P_0}{P_0} \cdot 100,$$

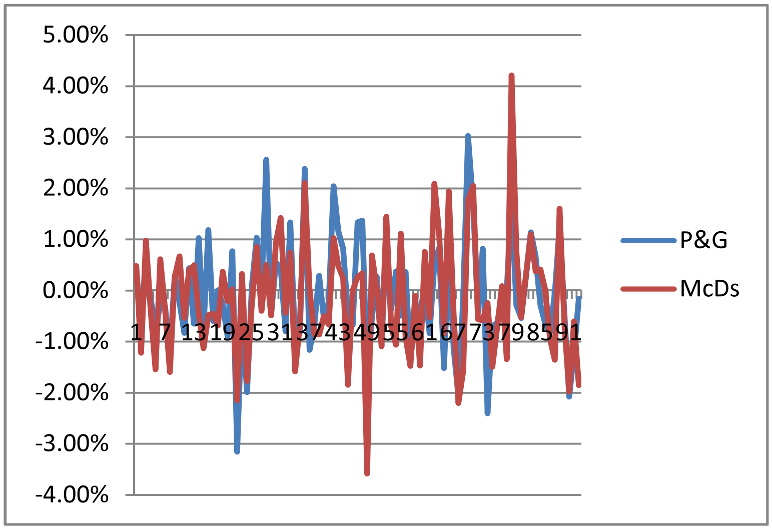
gde je P_0 cena akcije prvog dana, a P_1 vrednost akcije sledećeg dana.



Slika 3.1. Prikaz kretanja dnevnih stopâ prinosa akcija kompanije Procter&Gamble u periodu od 24.08.2010. do 22.08.2011.



Slika 3.2. Raspodela frekvencija dnevnih stopâ prinosa cena akcija kompanije P&G



Slika 3.3. Kretanje stope prinosa akcija kompanija P&G i MCDS u periodu od 100dana

Zatim, korišćenjem ugrađene funkcije STDEV (u programu Excel), a pomoću izračunatih dnevnih stopâ prinosa, dobijene su standardne devijacije stopâ prinosa posmatranih kompanija. Podaci su dati u sledećoj tabeli:

	Procter&Gamble	MCDonalds	Microsoft	Caterpillar	JPMorgan
Volatilnost (σ)	**0.95%**	**1.06%**	**1.49%**	**2.37%**	**2.54%**

Tabela 3.1.

Sada formiramo matricu korelacija, za ove cene akcija. Koristimo ugrađenu funkciju CORREL u Excel-u, da bismo na osnovu prošlih kretanja cena dobili koeficijente korelacija za posmatrane cene akcija. Ovi koeficijenti će biti prikazani u obliku korelacione matrice, o kojoj je gore bilo reči. Ona u našem primeru izgleda ovako:

	Procter& Gamble	McDonalds	Microsoft	Caterpillar	JPMorgan
Procter&Gamble	1.00	0.56	0.59	0.57	0.60
McDonalds	0.56	1.00	0.57	0.55	0.52
Microsoft	0.59	0.57	1.00	0.68	0.67
Caterpillar	0.57	0.55	0.68	1.00	0.73
JPMorgan	0.60	0.52	0.67	0.73	1.00

Tabela 3.2.

Sada se, po ranije opisanom postupku, računa matrica varijansi i kovarijansi.

	Procter& Gamble	McDonalds	Microsoft	Caterpillar	JPMorgan
Procter&Gamble	0.00009	0.00006	0.00008	0.00014	0.00014
McDonalds	0.00006	0.00011	0.00014	0.00014	0.00014
Microsoft	0.00008	0.00009	0.00022	0.00024	0.00025
Caterpillar	0.00013	0.00014	0.00024	0.00056	0.00044
JPMorgan	0.00014	0.00014	0.00025	0.00044	0.00064

Tabela 3.3.

Zatim tražimo standardnu devijaciju portfolija, tako što (matrično) pomnožimo matricu varijansi-kovarijansi i vektor uloženih sredstava u akcije svake kompanije koje sačinjavaju portfolio.

$$\sum w^T = \begin{bmatrix} 0.00009 & 0.00006 & 0.00008 & 0.00014 & 0.00014 \\ 0.00006 & 0.00011 & 0.00014 & 0.00014 & 0.00014 \\ 0.00008 & 0.00009 & 0.00022 & 0.00024 & 0.00025 \\ 0.00013 & 0.00014 & 0.00024 & 0.00056 & 0.00044 \\ 0.00014 & 0.00014 & 0.00025 & 0.00044 & 0.00064 \end{bmatrix} [100\$ \ \ 100\$ \ \ 100\$ \ \ 100\$ \ \ 100\$]$$

$$= \begin{bmatrix} 0.05016 \\ 0.05899 \\ 0.08866 \\ 0.15105 \\ 0.16247 \end{bmatrix}$$

Potom dobijeni vektor množimo sa transponovanim vektorom uloženih sredstava, tj.

$$\sigma^2 = w \sum w^T = \begin{bmatrix} 100\$ \\ 100\$ \\ 100\$ \\ 100\$ \\ 100\$ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.05016 \\ 0.05899 \\ 0.08866 \\ 0.15105 \\ 0.16247 \end{bmatrix} = 51.13\$$$

$$\sigma = \sqrt{51.13\$} = 7.15\$$$

Sada se VaR portfolija sa 95% nivoom poverenja dobija po formuli

$$VaR = 7.15\$ \cdot 1.65 = 11.80\$$$ □

3.1.1.2. Prednosti i mane parametarske metode

Prednost parametarske metode za procenu VaR-a se ogleda u tome što omogućava lako preračunavanje VaR-a za različite nivoe poverenja i različite holding periode.

Jedan od glavnih problema korišćenja normalne raspodele u proceni VaR-a jeste upravo i njena glavna prednost, a to je da su za njeno opisivanje potrebna samo dva parametra. Budući da se kod normalne raspodele posmatraju samo prva dva momenta, μ i σ, često možemo potceniti rizik kojem je izložen portfolio u rubnim delovima raspodele. Kako mnoga finansijska sredstva imaju raspodele prinosa sa “debelim repovima”[3] , VaR procene mogu biti potcenjene. Problem postaje još veći kada se u portfolio uključe finansijski instrumenti kao što su opcije, čiji su prinosi nelinearne funkcije faktora rizika.

Drugi problem normalne raspodele predstavlja činjenica da dobici/gubici portfolija mogu poprimiti bilo koju vrednost od -∞ do +∞, što znači da, pod pretpostavkom o normalnosti raspodele prinosa, teoretski, investitor može izgubiti više nego što je uložio, što u stvarnosti nije moguće [25].

[3] Pojam „debeli rep“ (eng. fat tail) označava da su u stvarnosti ekstremni ishodi više verovatni nego što normalna raspodela navodi.

Treća problematična pretpostavka jeste fiksnost portfolija[4] u toku posmatranog razdoblja. Ova pretpostavka nije realna za institucije sa velikim i aktivnim trgovačkim portfolijima.

3.1.2 Metod istorijskih simulacija

Istorijska simulacija pripada grupi neparametarskih metoda za izračunavanje VaR-a. Ono što je zajedničko svim neparametarskim pristupima je da se koriste empirijske raspodele, dobijene na osnovu posmatranih podataka, za razliku od parametarskog pristupa, gde smo imali pretpostavke o teorijskim raspodelama prinosa. Dakle, kod parametarskih metoda se postavlja pretpostavka o raspodeli prinosa portfolija, dok se kod neparametarskih metoda raspodela utvrđuje *empirijski*.

Osnovna pretpostavka koja se postavlja u ovoj metodi jeste da će bliska budućnost biti vrlo slična nedavnoj prošlosti i da se pomoću podataka iz bliske prošlosti može proceniti rizik u skoroj budućnosti [25].

Postoji više načina na koje se može izračunati VaR, koristeći princip istorijske simulacije. Neki od metoda istorijskih simulacija su, na primer, standardni model istorijske simulacije, model simulacije ponderisan vremenom (BRW model), Hull-White-ov model istorijske simulacije (gde se koriste GARCH i EWMA metode za procenu volatilnosti) itd. Ponderisani modeli razvili su se poslednjih godina uz standardnu metodologiju i u velikoj meri poboljšavaju standardni pristup i otklanjaju većinu nedostataka istorijske simulacije. Navešćemo, razmatrati i ilustrovati standardni metod istorijske simulacije.

Prvi korak istorijske simulacije jeste da se identifikuju instrumenti u portfoliju i da se prikupe podaci o vremenskim serijama za ove instrumente, u nekom određenom prošlom periodu. Neophodno je prikupiti dovoljan broj istorijskih podataka za posmatrane instrumente. Zatim se računaju stope prinosa na portfolio tokom određenog perioda u prošlosti (to može biti dan, nedelja, mesec i sl.), po već navedenoj formuli:

$$r = \frac{P_1 - P_0}{P_0},$$

gde je P_0 – cena na početku perioda posmatranja, a P_1 cena na kraju perioda posmatranja.

U drugom koraku se koriste udeli u portfoliju za koji želimo da predvidimo prinose, kako bi se simulirali hipotetički prinosi (za naredni period), koji bi se ostvarili pod pretpostavkom da je taj portfolio bio održan u periodu posmatranja.

Treći korak je formiranje histograma simuliranih prinosa portfolija.

Četvrti korak je očitavanje VaR-a sa histograma prinosa, kao zadatog kvantila.

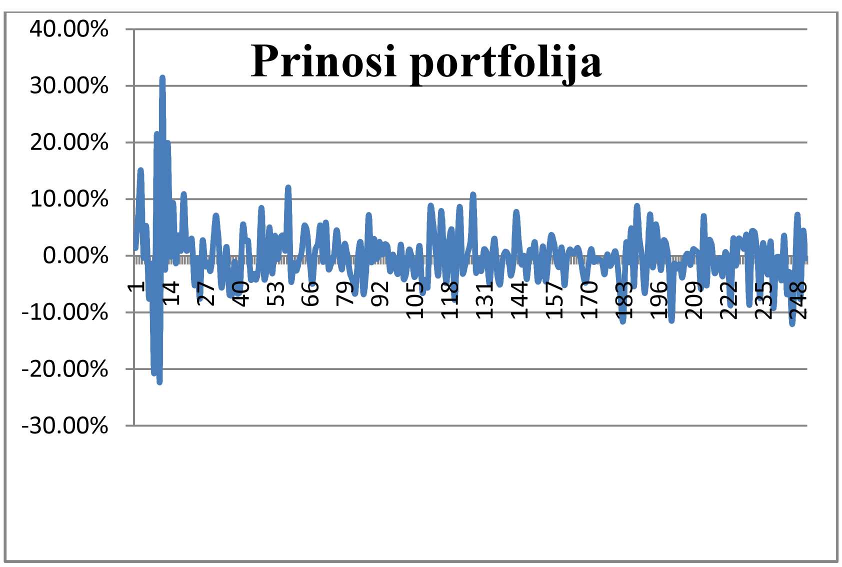
[4] Fiksnost portfolija podrazumeva odsustvo promena u strukturi portfolija u toku posmatranog perioda

Primer 3.5. *Izračunaćemo VaR metodom istorijskih simulacija na primeru portfolija sastavljenog od akcijâ 5 kompanija: Procter&Gamble, MCDonalds, Microsoft, Caterpillar, JPMorgan.*

Na osnovu kretanja cena akcija sa sajta www.finance.yahoo.com u periodu od 24.08.2010. do 22.08.2011. godine (251 radni dan), izračunate su dnevne stope prinosa[5] (u procentima), za akcije svih 5 kompanija. Potom je izračunat dnevni prinos celog portfolija, tako što su sabrani dnevni prinosi svih akcija koji čine portfolio. Dobijeni rezultati su prikazani u tabeli 3.4.

	Cene akcija					prinosi					
datum	P&G	MCD	MSFT	CTRP	JPM	P&G	MCD	MSFT	CTRP	JPM	porftolio
22-08-11	59.7	85	23.5	78.8	32.4	-1.22%	-0.61%	0.30%	0.10%	2.81%	**1.38%**
19-08-11	58.97	85	23.6	78.8	33.3	-0.15%	-1.85%	2.59%	4.20%	2.43%	**7.21%**
18-08-11	58.88	83	24.2	82.2	34.1	1.32%	2.21%	2.36%	5.17%	3.93%	**15.00%**
17-08-11	59.66	85	24.7	86.4	35.5	-0.08%	-0.95%	0.36%	1.96%	-1.47%	**-0.18%**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
30-08-10	55.66	69	22.4	62	34.3	0.72%	0.96%	1.25%	2.21%	2.10%	**7.23%**
27-08-10	56.06	70	22.7	63.4	35	-0.43%	-1.12%	-0.48%	-2.95%	-2.66%	**-7.64%**
26-08-10	55.82	69	22.6	61.5	34.1	0.21%	0.04%	1.19%	1.17%	1.67%	**4.30%**
25-08-10	55.94	69	22.9	62.2	34.6	-0.02%	-0.65%	-0.26%	0.51%	-0.03%	**-0.45%**
24-08-10	55.93	68	22.8	62.5	34.6						

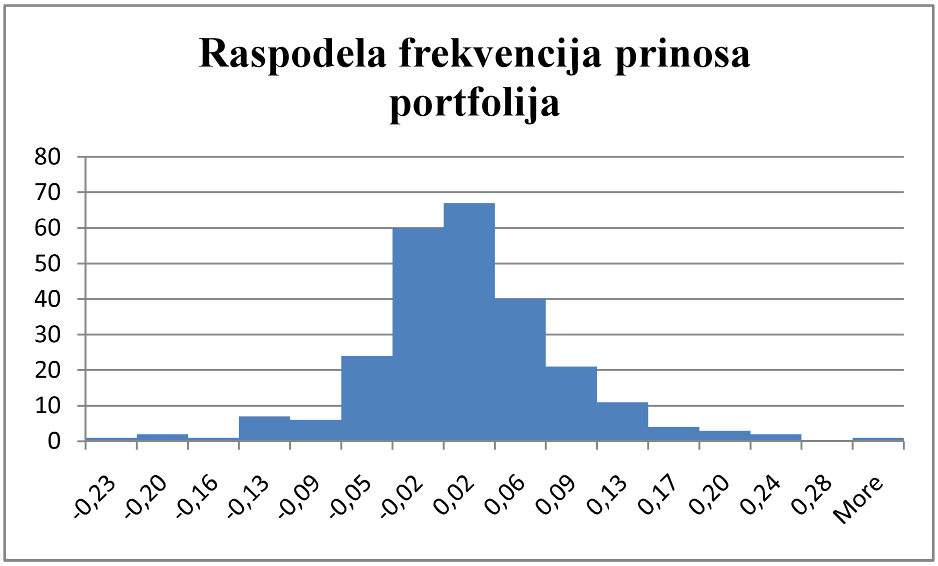
Tabela 3.4.



Slika 3.4. Prinosi portfolija sastavljenog od akcija 5 kompanija, posmatranog u periodu od godinu

[5] Umesto stope prinosa u nastavku ćemo koristiti termin prinos

dana



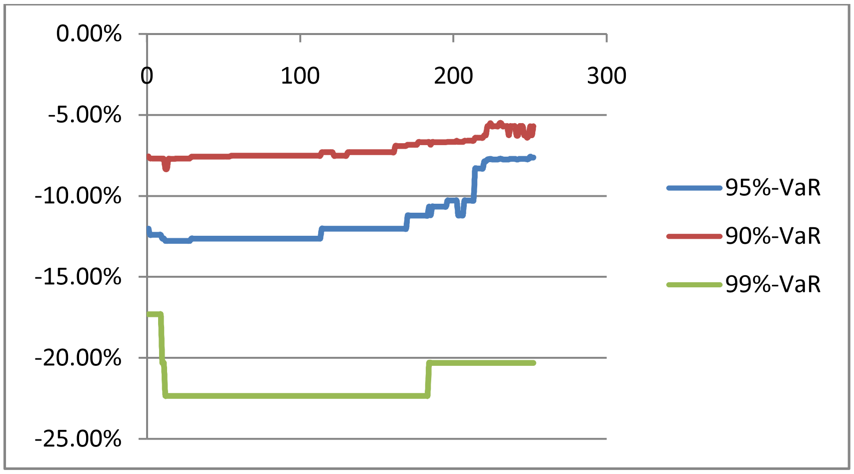
.

Slika 3.5.

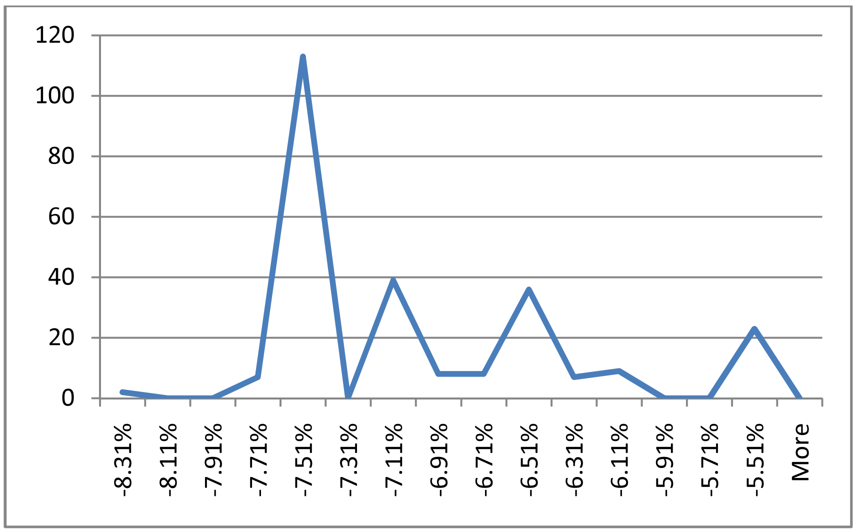
Zatim se, pomoću funkcije SMALL u Excel-u od dobijenih dnevnih prinosa za portfolio za 251 dan, traži 95%-tni VaR. Dobijeni rezultati su dati u tabeli 3.5.

datum	var 90%	var 95%	var 99%
22-08-11	-7.56%	-12.03%	-17.31%
19-08-11	-7.68%	-12.41%	-17.31%
18-08-11	-7.68%	-12.41%	-17.31%
⋮	⋮	⋮	⋮
31-08-10	-6.25%	-7.71%	-20.30%
30-08-10	-6.41%	-7.75%	-20.30%
27-08-10	-6.25%	-7.71%	-20.30%
26-08-10	-5.70%	-7.58%	-20.30%
25-08-10	-6.25%	-7.64%	-20.30%
24-08-10	-5.70%	-7.64%	-20.30%

Tabela 3.5.



Slika 3.6. Prikaz kretanja 90%, 95% i 99% VaR-a u periodu od godinu dana

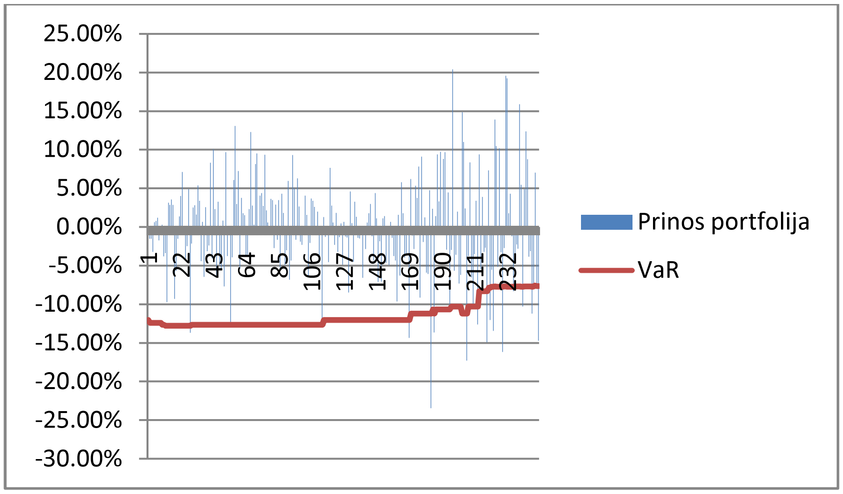


Slika 3.7. Raspodela frekvencija 90% VaR-a

PROVERA

Za period od 23.08.2011. do 21.08.2012. godine (252dana) se ponavlja postupak formiranja dnevnih prinosa na osnovu cena akcija. Potom se, na osnovu istorije dobijenih prinosa, formira prinos celog portfolija. Ponovo se izračunava jednodnevni VaR za dati period i nivoe poverenja od 90%, 95% i 99%. Zatim se upoređuje koliko je izračunati VaR odstupio od stvarnih dnevnih prinosa za portfolio, kako bi se ocenilo koliko je dobro bio procenjen VaR, tj. koliko odstupanja od predviđenog se realizovalo.

Ovaj postupak ocenjivanja se naziva backtesting proces ili testiranje unazad i sprovodi se uz pomoć raznih statističkih testova o kojima će biti reči u poglavlju 5.



Slika 3.8. Grafički prikaz odnosa prinosa portfolija i procenjenog 95% VaR-a, za period od godinu dana

3.1.2.1. Prednosti i mane metode istorijske simulacije

Istorijska simulacija ima neke neosporne prednosti usled njene jednostavnosti. Ona ne pravi nikakve pretpostavke o statističkoj raspodeli, niti zahteva procene volatilnosti i korelacije. Sve što je potrebno je vremenska serija prinosa portfolija. Važno je konstatovati da, iako korelacije između cena akcija nisu eksplicitno iskazane u metodi istorijske simulacije, one ipak postoje u serijama istorijskih prinosa.

Budući da većina hartija od vrednosti ima raspodelu prinosa sa zadebljanim repovima, istorijska simulacija nudi bolje rešenje od parametarske metode, jer uvažava efekat "debelih repova" (*fat tails*), odnosno činjenicu da se ekstremni prinosi (pozitivni/negativni) dešavaju češće nego što se predviđa Gausovom raspodelom [6]. Sem toga, odsustvo pretpostavke o normalnosti raspodele prinosa portfolija znači da se istorijska simulacija može primeniti na svaki portfolio, pod uslovom da su poznati svi faktori rizika koji determinišu vrednost portfolija. Takođe, pošto se metoda istorijske simulacije zasniva na aktuelnim cenama, ona dopušta nelinearnost, kao i raspodele koje su različite od normalne raspodele.

Kod istorijske metode ne postoji jednostavan način za pretvaranje VaR-a, izračunatog za određeni period posmatranja, u VaR za neki drugi period, kao što je to slučaj kod parametarske metode. Čest problem u ovoj metodi jeste da nema dovoljno dostupnih podataka. Ovaj problem nastaje kada instrumenti, koji su bili na tržištu kratak vremenski period, budu uključeni u portfolio. Dakle, u ovoj metodi se pretpostavlja da postoji dovoljna istorija podataka o promeni cena, a postoje aktive koje imaju kratku istoriju ili se ne mogu pratiti u datom periodu. Problem nastaje pri izračunavanju iznosa VaR-a za period duži od jednog dana. Kako bi se prognozirao VaR za razdoblje duže od jednog dana, potrebno je sastaviti istorijski simulirane prinose za razdoblja dužine kao i razdoblje za koje se traži VaR. Naime, kako se povećava razdoblje za koje treba izračunati VaR, broj opservacija se smanjuje i vrlo brzo nestane dovoljno podataka.

Dakle, problem se javlja kada se želi izračunati npr. 10-dnevni VaR. Tada je neophodno napraviti istorijski simulirane dvonedeljne prinose za posmatrani portfolio. Kako smo imali 250 opservacija u toku jedne godine, pri holding periodu od 10 dana, preostaje nam samo 25 opservacija. U takvom slučaju, u praksi se niz cena može „pozajmiti“ od nekog postojećeg sredstva sa sličnim karakteristikama, mada je to svojevrsna aproksimacija zbog nedostatka dovoljne istorije podataka. Treba napomenuti da se problem nedostatka podataka odnosi i na parametarsku metodu, jer je zbog nedovoljnih informacija o kretanjima cena nekog sredstva nemoguće izračunati volatilnost ili koeficijente korelacije sa drugim sredstvima, pa samim tim i VaR.

Kod istorijske metode se javlja problem zato što rezultati istorijske simulacije u potpunosti zavise od podataka zabeleženih u posmatranom razdoblju. Dakle, ozbiljna mana metode istorijskih simulacija jeste što se pretpostavlja da će se istorija ponoviti. Postoji mogućnost da scenario kretanja cena, koji bi izazvao značajan gubitak, nije zabeležen u istoriji cena koje su korišćene u istorijskoj simulaciji za računanje VaR-a.

Ovaj problem se javlja često ukoliko se koristi kratak period posmatranja istorijskih podataka. Jedan od načina prevazilaženja ovog problema je korišćenje treće metode za računanje VaR-a, metode Monte Carlo simulacija, o kojoj će biti više reči kasnije. Ukratko, ona generiše veliki broj scenarija cenovnih promena, te stoga postoji mnogo veća šansa da će scenario događaja, koji može izazvati veliki gubitak, biti uključen u raspodelu promena vrednosti portfolija.

Najvažniji nedostatak metode istorijske simulacije jeste da empirijsku raspodelu frekvencija prinosa portfolija računamo tako što svakoj opservaciji dodeljujemo istu težinu (udeo), koja iznosi 1/(br opservacija). Istorijska simulacija sa n opservacija iz prošlosti sadrži u sebi opservaciju $r_{i,t-j}$, gde $r_{i,t-j}$ predstavlja prinos i-te hartije od vrednosti u trenutku $t-j$, t označava sadašnji trenutak, a j označava starost opservacije ($j = 1$ označava da je opservacija stara jedan dan). Opservacija $r_{i,t-j}$ će uticati na histogram prinosa u trenutku t, zatim u trenutku $t + 1$ i tako sve do trenutka $t + n$, kada se j izjednačava sa n i opservacija $r_{i,t-j}$ ispada iz posmatranog razdoblja. Nakon isteka vremena n ta opservacija će nestati iz izabranog perioda i više neće imati nikakav uticaj na vrednost *VaR*-a. Ne postoji objašnjenje zašto bi određena opservacija tokom celog perioda opažanja imala konstantan ponder, koji nakon određenog perioda pada na nulu. Na ovaj način indirektno pretpostavljamo da su faktori rizika, a samim tim i istorijski simulirani prinosi nezavisni i jednako distribuirani kroz vreme. Ova pretpostavka je u skladu sa teorijom efikasnog tržišta, gde sadašnja cena sadrži sve informacije važne za tu cenu. Ako bi promene cene zavisile samo od novih informacija, tada ne bismo mogli predvideti kretanje cene i to bi značilo da ne postoji vremenska korelisanost.

Upravo ova pretpostavka ograničava aplikativnu vrednost istorijske simulacije na izuzetno varijabilnim i neefikasnim tržištima, budući da brojna empirijska istraživanja pokazuju da volatilnosti na tržištima u nižim stadijumima razvoja nisu konstantne u vremenu, već da se grupišu u periode visoke i niske volatilnosti [8].

Pitanje koje se nameće jeste: zašto se pretpostavlja da pojedina istorijska opservacija ima jednaku vrednost kao i novija?

Dakle, jedan od problema metode istorijske simulacije jeste tzv. *efekat duha,* koji označava pojavu da ekstremne promene, koje su se desile u daljoj prošlosti, neko duže vreme utiču na simulaciju, sa jednakim ponderom kao i ostali podaci, a potom u potpunosti prestaju da utiču (nestaju), kako ispadaju iz perioda posmatranja [6]. Prema tome, ako se u periodu posmatranja dogode veliki gubici, oni mogu preovlađivati i povećavati iznos VaR-a, iako nije verovatno da će se oni ponoviti.

Pri naglim promenama na tržištu, istorijska simulacija beleži slabe rezultate zbog sporog prilagođavanja promenama, kao i zbog dodeljivanja jednakih pondera svim opservacijama, bez obzira na vreme njihovog nastanka.

Model istorijske simulacije ponderisan vremenom (BRW) ispravlja upravo ovaj nedostatak standardnog modela istorijske simulacije, tako što pridaje mnogo veću važnost opservacijama iz bliske prošlosti, na taj način što im dodeljuje veće pondere u odnosu na opservacije iz dalje prošlosti, te zbog toga na mnogo bolji način i mnogo brže reaguje na nagle tržišne promene.

Takođe, istorijska simulacija ne registruje povećanje rizika portfolija kratkih pozicija nakon pada tržišta, jer posmatra samo levu stranu repa raspodele prinosa. U potpunosti zanemaruje šta se događa sa pozitivnim prinosima, jer smatra da oni ne sadrže korisne informacije o negativnim prinosima. Ovakav stav nije u skladu sa činjenicom da, nakon velikih dobitaka, tržište beleži i velike gubitke.

3.1.3 Metod Monte Carlo simulacija

Monte Carlo metod je metod za generisanje slučajnih brojeva. Pomoću slučajnih brojeva se mogu rešavati različiti problemi simulacijom. Ideja *Monte-Carlo* simulacije je da se izvede simulacija pojave koja se posmatra, u cilju dobijanja realizacije pojave koje nije moguće dobiti na drugi način. Nakon svakog ponavljanja postupka, u rezultatu se dobija po jedna realizacija proučavane slučajne pojave. Simulacija se izvodi određeni broj puta, a skup dobijenih realizacija predstavlja statistički skup podataka, koji se određenim statističkim metodama obrađuje i interpretira.

Monte Carlo metoda je našla široku primenu u finansijama, a koristi se i za određivanje VaR-a. Naime, ova metoda za dobijanje VaR-a aproksimira kretanje cena korišćenjem kompjuterskih simulacija za generisanje kretanja cena. Na taj način se dobijaju različiti mogući scenariji za portfolio, za posmatrani dan. Kao što je navedeno u odeljku o istorijskoj simulaciji, metod istorijske simulacije je efikasan način za ocenjivanje VaR-a, ali je potrebna istorija cene aktive u dugom vremenskom periodu. Takođe, smatra se da su istorijski podaci o stvarnim kretanjima cena ograničen skup ishoda. Ovaj poslednji argument je definitivno prevaziđen pomoću Monte Carlo simulacije, jer nam ona omogućava generisanje velikog broja hipotetičkih ishoda.

Osnovna ideja Monte Carlo metode je da biramo statističku raspodelu (za koju se smatra da adekvatno aproksimira moguće promene u tržišnim faktorima), zatim generišemo N hipotetičkih prinosa portfolija. Potom, koristi se generator slučajnih brojeva da generiše hiljade ili desetine hiljada hipotetičkih promena tržišnih faktora. Ovo se, zatim, koristi da se konstruiše hiljade hipotetičkih portfolio prinosa na trenutni portfolio, kao i raspodela mogućih prinosa portfolija. Konačno, VaR je određen ovom raspodelom.

Generisanje slučajnih brojeva sa proizvoljnim raspodelom zasniva se na generisanju niza vrednosti slučajne promenljive, koja ima uniformnu raspodelu na intervalu (0,1). Ovo se bazira na sledećem tvrđenju[24]:

Teorema Neka slučajna promenljiva X ima uniformnu raspodelu U (0,1) i neka je funkcija raspodele F neprekidna i strogo rastuća. Tada slučajna promenljiva $\mathrm{Y} = \mathrm{F}^{-1}(\mathrm{X})$ ima funkciju raspodele F.

Dokaz Kako je F neprekidna i strogo rastuća, postoji inverzna funkcija $\mathrm{F}^{-1}: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. Tada je $F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{\mathrm{F}^{-1}(\mathrm{X}) < y\} = \mathrm{P}\{X < F(y)\} = F(y)$. ■

Da bismo opisali Monte – Carlo metod za simulaciju VaR-a, posmatraćemo jednostavan slučaj sa samo jednom aktivom (jednim elementom) u portfoliju.
Simulacija se sprovodi preko sledećih koraka:

1. Izbor stohastičkog procesa i parametara, za koji smatramo da najbolje opisuje aktivu.
2. Generisanje niza slučajnih promenljivih sa uniformnom raspodelom $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, pomoću kojih Monte Carlo metodom računamo (hipotetičke) cene $S_{t+1}, S_{t+2}, \dots, S_{t+n}$ posmatrane aktive.
3. Izračunavanje vrednosti portfolija $F_{t+n} = F_T$, pomoću generisanog niza cena u posmatranom periodu.
4. Ponavljanje 2. i 3. koraka veliki broj puta. Sa K obeležavamo broj ponavljanja, koji često može biti i veći od 10 000.

Na ovaj način dobijamo raspodelu za vrednosti $F_T^1, F_T^2, \dots, F_T^K$. Zatim se sortiraju podaci i računa se VaR [1].
Detaljnije ćemo objasniti svaki od ovih koraka.

U prvom koraku se vrši izbor stohastičkog modela za ponašanje cena. Najčešće se koristi model geometrijskog Braunovog kretanja, koji pretpostavlja da su nove informacije, koje utiču na cenu aktive, nekorelisane tokom vremena, kao i da se male promene u ceni mogu opisati sledećom formulom

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dz, \tag{3.1.}$$

gde je *dz* normalna slučajna promenljiva sa srednjom vrednošću 0 i varijansom *dt*. Promenljiva *dz* opisuje slučajne udare (uticaje) na cenu i ne zavisi od informacija iz prošlosti. Takođe, proces je geometrijski, jer su svi parametri skalirani sa trenutnom cenom S_t. Parametri μ_t i σ_t nazivaju se drift i volatilnost u trenutku t, koji se tokom vremena mogu menjati. Radi jednostavnosti, pretpostavimo da su ovi parametri konstantni tokom vremena [11].

U praksi, proces sa beskonačno malim priraštajem *dt* se može aproksimirati diskretnim kretanjem sa priraštajem Δt. Definišimo t kao sadašnji trenutak, T kao krajnji trenutak i $\tau = T - t$ kao period posmatranja. Da bismo generisali niz slučajnih promenljivih S_{t+i} tokom intervala τ, prvo ćemo podeliti τ na *n* priraštaja, $\Delta t = \frac{\tau}{n}$. Integracijom $\frac{dS}{S}$ nad konačnim intervalom dobijamo približno

$$\Delta S_t = S_{t-1}(\mu\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}),$$

gde je ε standardna normalna slučajna promenljiva, tj. ε : N(0,1).

Da bismo simulirali kretanje cene S, polazna tačka je S_t, ali je potrebno prvo generisati niz vrednosti $\varepsilon_{i,}$ $i = 1,2, \dots n$, za slučajnu promenljivu sa N(0,1).

Dakle, da bismo generisali skup cena, potrebno je da se generiše skup slučajnih brojeva sa normalnom raspodelom. Postoji veliki broj programa za ove namene, kao što je i ugrađena funkcija RAND (random) u programu Excel.

Na taj način smo dobili niz simuliranih realizacija za slučajnu promenljivu $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, ε : N(0,1). Sada možemo simulirati kretanje cene akcije.

S_{t+1} je dato sa

$$\begin{gathered} S_{t+1} = S_t + S_t(\mu\Delta t + \sigma\varepsilon_1\sqrt{\Delta t}) \\ S_{t+2} = S_{t+1} + S_{t+1}(\mu\Delta t + \sigma\varepsilon_2\sqrt{\Delta t}) \\ S_{t+n} = S_T \end{gathered} \tag{3.2.}$$

Kada jednom simuliramo putanju cene, sledeći korak je da reevaluiramo vrednost portfolija, na osnovu novostvorenih podataka o kretanju cene, a zatim možemo odrediti raspodelu portfolija na kraju posmatranog perioda. Na osnovu toga se potom očitava VaR kao određeni kvantil dobijene raspodele [1].

Slučajni brojevi se svaki put razlikuju kada se pokrene simulacija, pa će se stoga i simulirana vrednost VaR-a razlikovati. Način da se dobije razumna procena VaR-a jeste da se posmatra veliki broj događaja. Često se uzima broj od 10.000 događaja kao referentni broj događaja [25].

Primer 3.6. *Neka je očekivani godišnji prinos akcije 15% i standardna devijacija prinosa 20% godišnje. Podelimo interval od jedne godine na 100 delova, tj. posmatramo na svakih 3.65 dana promene u kretanju cene akcije (*$\Delta t = 0.01\ god$*).*

Na osnovu jednačine (3.1.) imamo

$$\Delta \mathrm{S} = 0.15 \cdot 0.01 \cdot \mathrm{S} + 0.2 \cdot \sqrt{0.01} \cdot \mathrm{S} \cdot \varepsilon$$

$$\Delta \mathrm{S} = 0.0015 \cdot \mathrm{S} + 0.02 \cdot \mathrm{S} \cdot \varepsilon \tag{3.3}$$

Sada kretanje cene akcije simuliramo tako što generišemo slučajne brojeve ε i zamenjujemo ih u jednačinu (3.3.) U tabeli je prikazan jedan konkretan (trivijalan - zbog malog broja ponavljanja) ishod ovog postupka.

cena akcije na početku perioda	*slučajni ishodi za ε*	*promena u ceni akcije tokom perioda*
30	*-0.148*	*-0.044*
29.956	*0.553*	*0.376*
30.332	*0.017*	*0.056*
30.388	*-2.029*	*-1.188*
29.201	*-1.318*	*-0.726*
28.475	*-0.803*	*-0.415*
28.060	*1.052*	*0.633*
28.692	*1.552*	*0.934*
29.626	*2.429*	*1.484*
31.110	*2.517*	*1.613*
32.723	*-2.121*	*-1.339*

Tabela 3.6

Početna cena akcije je 30$. Prvi slučajni generisan ishod za ε je -0.148, pa je po formuli (3.3.) promena cene u prvom periodu data sa

$$\Delta S_{t+1} = 0.015 \cdot 30\$ + 0.02 \cdot 30\$ \cdot (-0.148) = -0.044\$.$$

Sada je na osnovu formule (3.2.) simulirana cena akcije u prvom periodu

$$S_{t+1} = 30\$ + (-0.044\$) = 29.956\$.$$

Kako je drugi simulirani slučajni ishod za ε= 0.553 dobijamo da je

$$\Delta S_{t+2} = 0.376\$,$$

pa je zato simulirana cena akcije u drugom periodu

$$S_{t+2} = 29.956\$ + 0.553\$ = 30.332\$$$

i tako računamo dalje, redom, $\Delta S_{t+10} = 1.613\$$

$$S_{t+10} = 31.110\$ + 1.613\$ = 32.723\$\ .$$ □

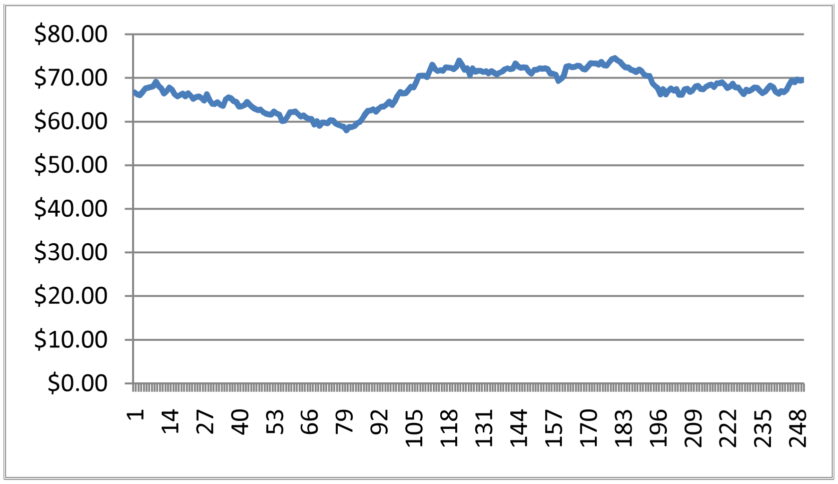
U ovom primeru je ilustrovana simulacija kretanja cene akcije u periodu od 1/10 godine, jer su simulirane cene za 10 perioda od po 3.65 dana.

U tabeli je prikazan samo jedan mogući ishod kretanja cene akcije. Različiti ishodi slučajnih brojeva vode ka razičitim putanjama cene.

Ponavljajući veliki broj puta (10.000) gore opisani postupak za simuliranje kretanja cene akcije, dobija se potpuna raspodela cene akcija na kraju perioda. Formira se histogram, a potom se sa histograma očitava VaR kao odgovarajući kvantil.

Primer 3.7. *Posmatramo kretanja cena akcija na zatvaranju kompanije Procter&Gamble u periodu od 24.08.2010. do 22.08.2011.godine (251 radni dan).*

Na osnovu toga su izračunati dnevni prinosi za taj period i dobijena je standardna devijacija (volatilnost) dnevnih prinosa 0.95%. Uz pomoć funkcije AVERAGE, dobijamo srednju vrednost prinosa, -0.07%. Monte Carlo metodom ćemo dobiti simuliranu vrednost (mogući scenario) kretanja cene u periodu od 23.08.2011. do 21.08.2012.godine.



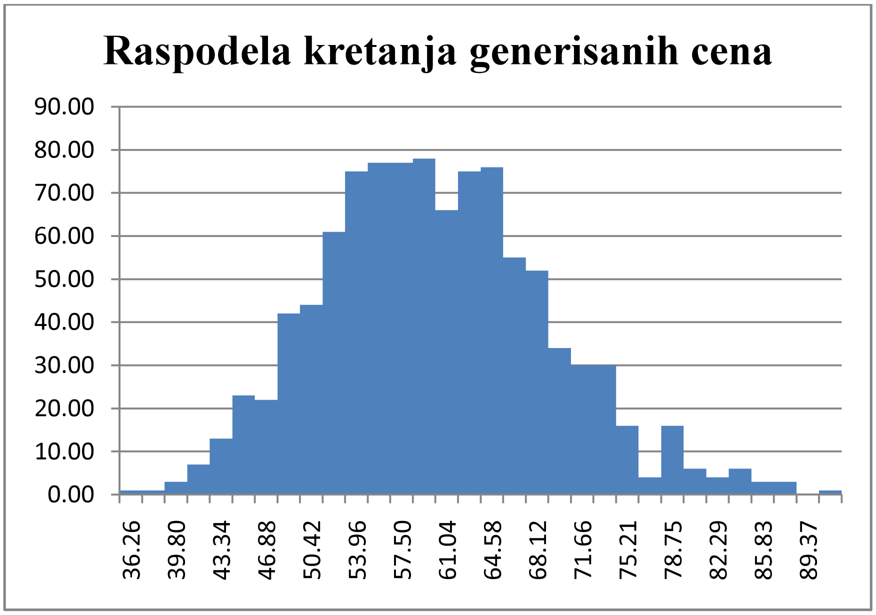
Slika 3.9. Grafički prikaz kretanja cene akcije u toku 251-og dana (jedan mogući scenario)

Korišćenjem funkcije NORMSINV u Excel-u generišemo slučajne brojeve sa standardizovanom normalnom raspodelom. Ovaj podatak se nalazi u koloni N (0,1), u sledećoj tabeli. Potom, po formuli (3.1.) dobijamo podatke iz tabele:

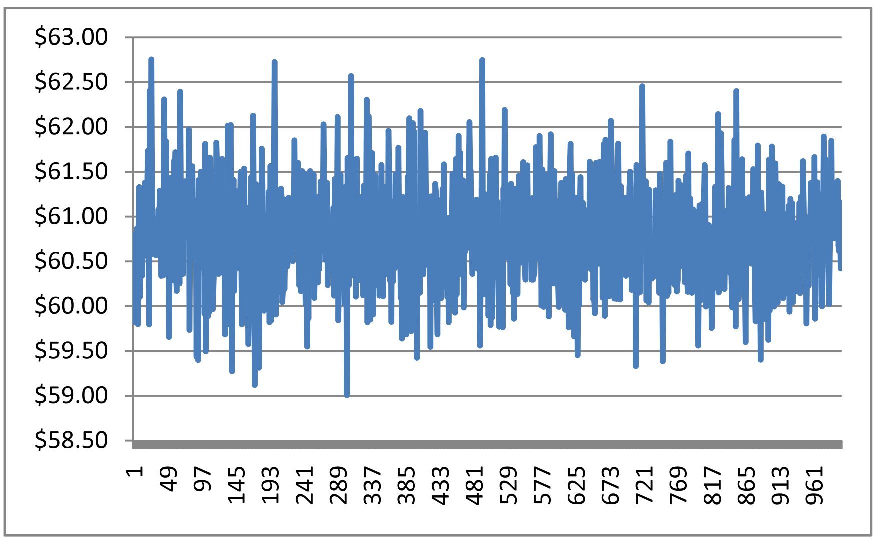
dan	N(0,1)	prinos	cena
1	-0.38	-0.37%	$60.74
2	-2.20	-2.10%	$59.49
3	-0.28	-0.27%	$59.32
4	-1.44	-1.38%	$58.51
5	0.34	0.31%	$58.69
⋮	⋮	⋮	⋮
247	1.08	0.792%	$69.41
248	-0.04	1.011%	$69.38
249	-0.12	-0.046%	$69.29
250	-1.62	-0.124%	$68.23
251	1.02	-1.546%	$68.89

Tabela 3.7.

Sada imamo jedan mogući ishod kretanja cene akcije za period od godinu dana. Postupak ponovimo 10.000 puta i na taj način dobijamo veliki skup podataka, na osnovu koga možemo proceniti raspodelu za cene akcija.



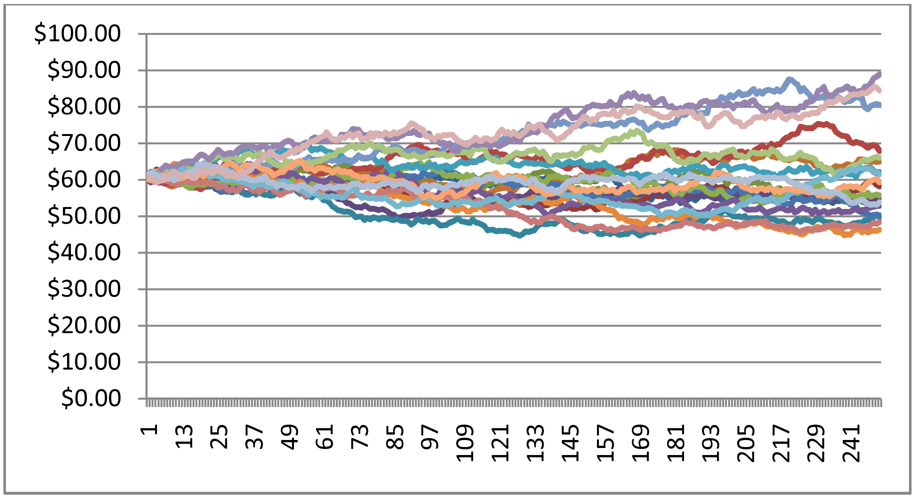
Slika 3.10. Frekvencije raspodelâ cenâ u periodu od godinu dana



Slika 3.11. Prikaz simuliranih 1.000 vrednosti za cenu akcije za prvi dan

Nakon toga, treba naći VaR korišćenjem funkcije SMALL, kao što je to rađeno kod istorijske simulacije.

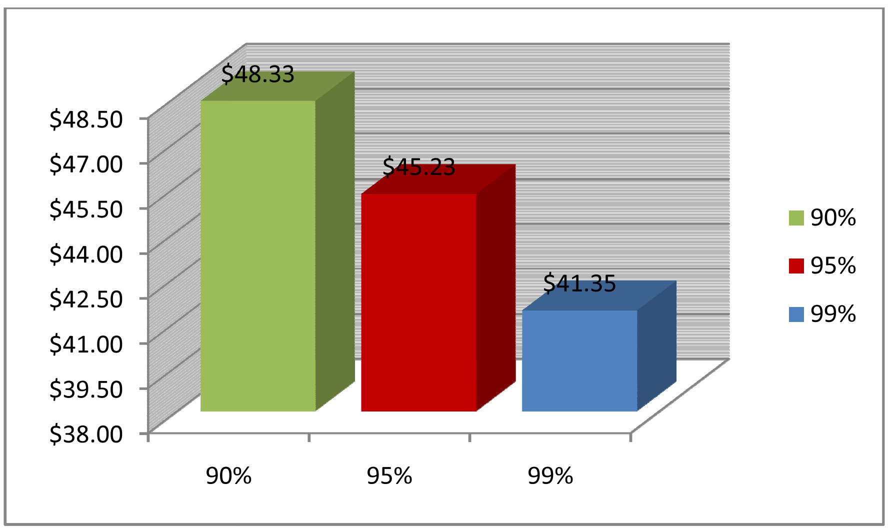
Napomena: svaki put kada se pokrene simulacija, dobijaju se potpuno novi (drugačiji) slučajni brojevi, pa samim tim i drugačije cene.



Slika 3.12. Prikaz 20 mogućih scenarija kretanja cene akcije za period od godinu dana (251 radni dan)

Za posmatrani period i posmatrane podatke, 95%-tni jednodnevni Monte Carlo VaR 251.-og dana, za cene akcija kompanije P&G je :

$45.23



Slika 3.14. VaR za sva tri nivoa poverenja (90%, 95%, 99%) na 251.dan

VaR dobijen Monte Carlo metodom bi trebao da bude jednak VaR-u koji je dobijen parametarskom metodom za linearne portfolije (portfolije bez opcija). Zapravo, upoređivanje VaR-a dobijenog parametarskom metodom sa VaR-om dobijenim korišćenjem Monte Carlo metode je dobra provera tačnosti izračunatog VaR-a. Naime, ukoliko ove dve metode daju različite rezultate za linearni portolio, to znači da postoji greška u primeni jedne ili možda obe metode.

3.1.3.1. Monte Carlo simulacija za portfolio sa više sredstava

U prethodnom odeljku opisan je proces za generisanje veštačkih serija cenovnih promena sa nekom zahtevanom volatilnošću. U ovom odeljku ćemo objasniti kako se sprovodi metoda Monte Carlo simulacije za portfolio sa više sredstava. Za takve portfolije promene cena moraju biti u korelaciji. Korelisane promene cena se generišu pomoću matematičkih tehnika baziranih na sopstvenim vrednostima i sopstvenim vektorima. Taj proces uključuje sledeće korake:

- izračunavanje sopstvenih vektora i sopstvenih vrednosti,
- generisanje korelisanih promena cena za sva sredstva.

Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori opisuju kako se promene cena menjaju usklađeno jedna sa drugom. Izvan oblasti ovog rada je prolazak kroz matematička pravila povezana sa izračunavanjem sopstvenih vrednosti i sopstvenih vektora. Postoje standardni kompjuterski programi za te namene. Jedna od standardnih tehnika koje se koriste je Jakobijev metod.

Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori se mogu izvesti za svaku korelacionu matricu, ali neke korelacione matrice će prikazati negativne sopstvene vrednosti i takve matrice moraju biti „prečišćene“, pre nego što budu upotrebljene za generisanje serija promena cena. Negativne svojstvene vrednosti ukazuju da je korelaciona matrica pogrešna ili neosetljiva, te će kao takva dati pogrešan VaR. Neosetljiva korelaciona matrica je rezultat pogrešnog merenja korelacija.

Generisanje korelisanih slučajnih cenovnih promena

Serije korelisanih slučajnih promena cena se generišu za svako sredstvo u portfoliju, koristeći sledeću formulu: $x_k = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} \cdot x_{norm} \cdot v_{ki} \cdot \sigma_k$,

gde je x_k – korelisana slučajna promena cena za sredstvo *k* sa normalnom raspodelom i volatilnošću sredstva k,

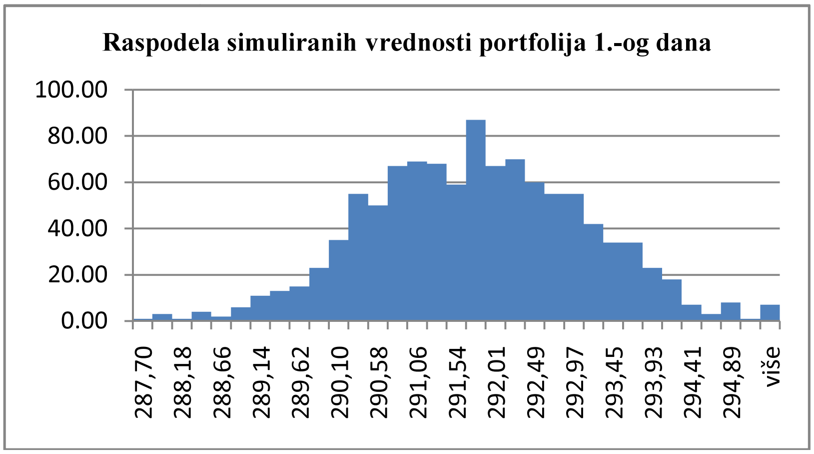
$\sqrt{\lambda_i}$ - kvadratni koren sopstvene vrednosti za *i*-to sredstvo u portfoliju,

x_{norm} - slučajna promena cene iz normalno raspoređene serije,

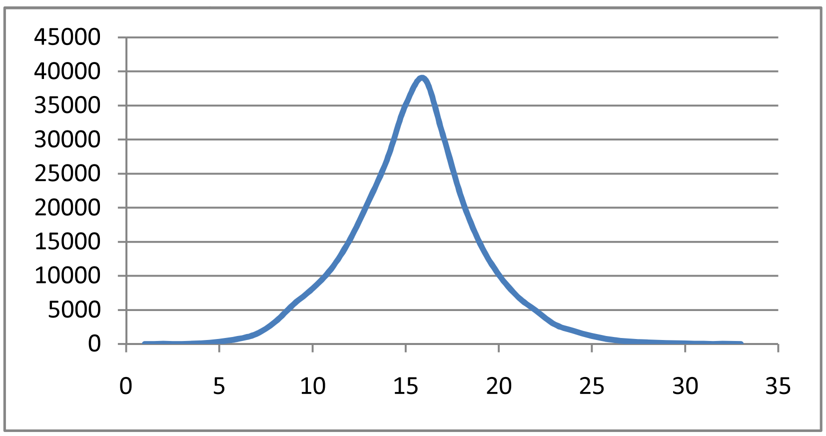
v_{ki} - k-ti element sopstvenog vektora za i-to sredstvo,

σ_k - volatilnost k-tog sredstva.

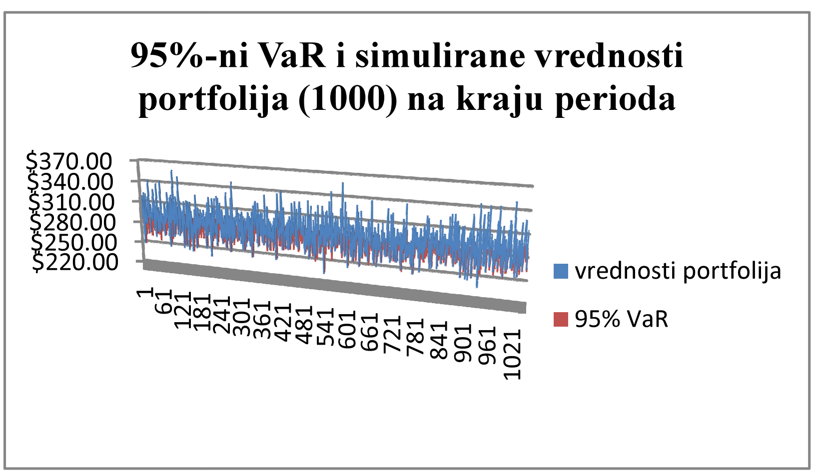
Zatim se generisane korelisane promene cena primenjuju na portfolio, na isti način kao kod istorijske simulacije i određuje se VaR tako što se promene vrednosti portfolija sortiraju i procenat koji odgovara željenom nivou poverenja predstavlja VaR za portfolio [25].



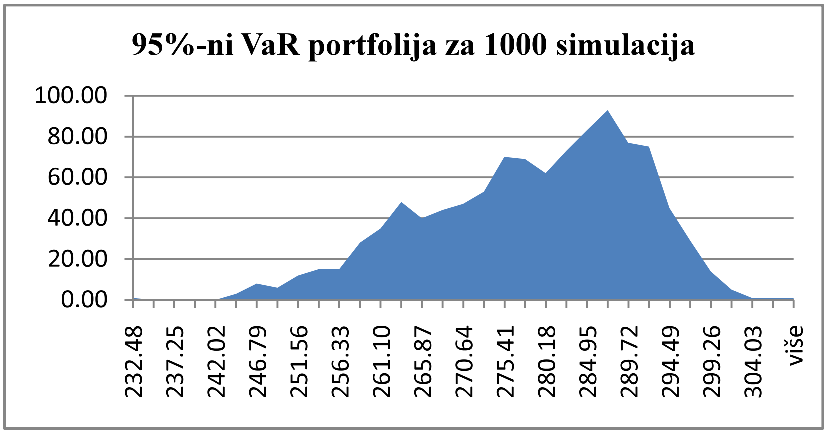
1000 simulacija za 1.dan u posmatranom periodu



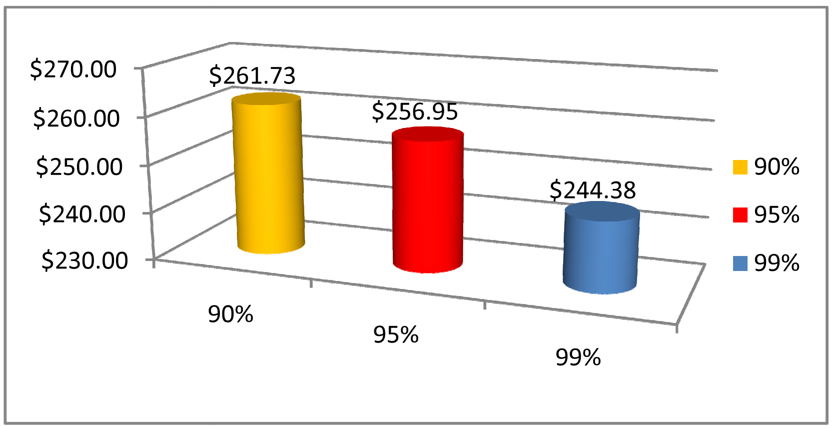
Raspodela 1000 simuliranih vrednosti portfolija za ceo posmatrani period (251 radni dan)



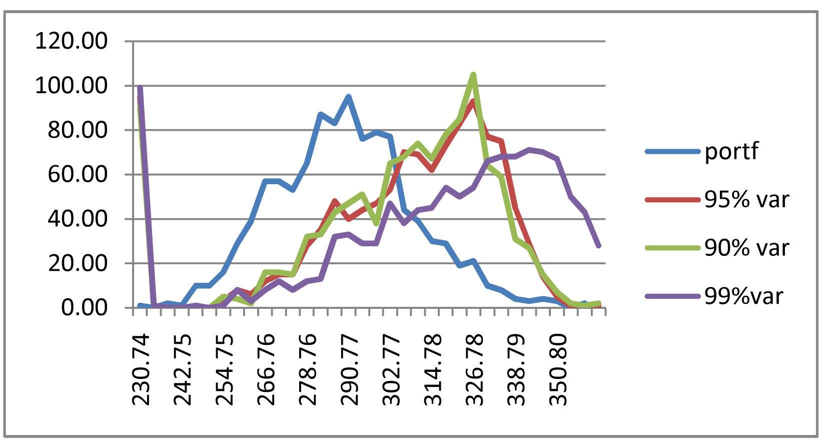
Prikaz vrednosti portfolija i VaR-a na kraju perioda (251.-og dana)



Raspodela frekvencija 95%-og VaR-a portfolija u periodu od godinu dana na nivou 1000 simulacija



VaR portfolija 95%, 90%, 99% poslednjeg dana



Raspodela frekvencija VaR-a na tri nivoa poverenja i rasp.frekv. vrednosti portfolija u periodu od godinu dana

3.1.3.2. Prednosti i mane Monte Carlo metode

Kao što je pomenuto, za portfolio sa više sredstava cenovne promene moraju biti korelisane. Monte Carlo simulacije pokrivaju veoma širok spektar mogućih vrednosti finansijskih promenljivih, pri čemu u potpunosti uzimaju u obzir njihove međusobne korelacije. Korišćenjem Monte Carlo metoda na slučajan način se stvaraju mnogobrojni scenariji za buduća kretanja tržišnih promenljivih [3].

Dalje, prednosti ovog metoda su da koristi nelinearne modele vrednovanih portfolija, kao i da može generisati beskonačan broj scenarija.

Zamerka ovom metodu je korišćenje unapred utvrđene teorijske raspodele verovatnoće koja opisuje faktore rizika portfolija. Obično je raspodela koja se pretpostavlja normalna ili lognormalna.

Dodatni nedostatak koji se može primetiti je da ovaj metod, jednom unesene volatilnosti ili korelacije, smatra stalnima i zbog toga ne reaguje na promene na tržištu, pa ne odražava stvaran nivo rizika.

Najveća mana ove metode je da je vreme potrebno za izračunavanje VaR-a i do 1.000 puta duže od vremena potrebnog za izračunavanje VaR-a pomoću parametarskog metoda, jer se vrednost portfolija mora više hiljada puta preračunavati.

4 VaR prednosti i mane

VaR uzima u obzir kako promene cena finansijskih instrumenata međusobno utiču. Zbog toga možemo smanjiti rizik uz pomoć diversifikacije.

Pri izačunavanju VaR-a osnovni uzroci greške mogu biti:

-pogrešna pretpostavka o raspodeli prinosa,

-istorijski podaci nisu dobar osnov za predviđanje budućih kretanja,

-pogrešna pretpostavka o korelaciji između faktora rizika.

Prvi gore navedeni uzrok podrazumeva da se kretanja tržišnih cena često ponašaju po modelu koji je različit u odnosu na statistička pojednostavljenja, koja se koriste u modeliranju kod VaR pristupa (tu se misli na pretpostavku o postojanju "normalne distribucije").

Zatim, sledeći uzrok se odnosi na to da kretanja u prošlosti ne predstavljaju uvek dobru aproksimaciju za kretanja u budućnosti; primera radi, kolebljivost cena i stepen korelacije mogu se naglo promeniti. Ovim je obuhvaćen i treći osnovni uzrok, o pogrešnoj pretpostavci vezanoj za korelaciju između faktora rizika.

Pored ova osnovna tri uzroka greške pri izračunavanju VaR-a, Bazelski komitet je sistematizovao još neke potencijalne slabosti VaR pristupa:

- Ocene zasnovane na VaR pristupu su tipično bazirane na pozicijama na kraju radnog dana i generalno posmatrano, ne uzimaju u obzir rizik u trgovanju koji nastaje tokom dana;
- Modelom nije moguće obuhvatiti „rizik nastupanja događaja" (event risk), koji je rezultat izuzetnih okolnosti na tržištu;
- Mnogi modeli se oslanjaju na pojednostavljene pretpostavke prilikom vrednovanja pozicija u portfoliju, naročito kod kompleksnih instrumenata kao što su opcije [9].

Iako VaR nije idealno rešenje u svim situacijama, on svakako jeste efikasna mera tržišnog rizika u normalnim tržišnim uslovima. Dakle, VaR je mera rizika u portofliju za uobičajeno poslovanje, za neki zadati nivo poverenja. Stoga, VaR nije efikasan u uslovima ekstremnih promena na tržištu i zato ga treba kombinovati sa stres testiranjem, u cilju dobijanja šireg okvira za posmatranje tržišnog rizika. Napomenućemo da je VaR opšte prihvaćena, standardna mera tržišnog rizika koju regulatorne institucije zahtevaju od banaka da koriste pri izračunavanju zahtevanog kapitala.

4.1 Poređenje metoda za izračunavanje VaR-a

Svaka od tri gore navedene i obrađene metode za izračunavanje VaR mere rizika ima svoje prednosti, kao i nedostatke.

Parametarski metod (ili metod varijanse-kovarijanse) zahteva stroge pretpostavke o raspodeli prinosa aktive, ali je lak za sprovođenje, kad su ispunjene tražene pretpostavke.

Istorijski metod ne zahteva nikakve pretpostavke o raspodeli prinosa, ali implicitno pretpostavlja da su podaci koji se koriste u simulaciji reprezentativan uzorak budućeg rizika.

Monte Carlo simulacija dozvoljava najviše fleksibilnosti u izboru raspodele prinosa i uvodi subjektivne procene i eksterne podatke, ali je najkomplikovanija za sprovođenje.

Ove tri metode se razlikuju u mnogim aspektima, a to su:

- sposobnost obuhvatanja rizika opcija i instrumenata nalik opcijama
- jednostavnost sprovođenja implementacije
- nivo razumljivosti za viši menadžment
- fleksibilnost u analiziranju efekata promena u pretpostavkama
- pouzdanost rezultata [2]

Pri poređenju metoda za izračunavanje VaR-a javljaju se sledeća pitanja:

- Koliko se razlikuje VaR dobijen na ova tri načina?
- Ako se razlikuje, koji metod daje najpouzdaniji rezultat?

Važno je napomenuti da će rezultati koje dobijemo na sva tri načina biti funkcija inputa. Tako, istorijska simulacija i parametarski metod će dati isti VaR, ako su istorijski podaci normalno raspoređeni i ako se iskoriste za matricu varijanse-kovarijanse. Slično, parametarski metod i Monte Carlo simulacija će dati približno jednak rezultat, ako se pretpostavi da su svi inputi normalno raspoređeni, sa stabilnim aritmetičkim sredinama i varijansama. Kako pretpostavke odstupaju, tako će i rezultati odstupati. Konačno, istorijska i Monte Carlo simulacija će biti približne, ako je raspodela koju koristimo u Monte Carlo simulaciji potpuno bazirana na istorijskim podacima.

Što se tiče drugog pitanja, odgovor zavisi i od toga koji se rizik nastoji oceniti. Ako ocenjujemo VaR za portfolio koji ne sadrži opcije, za vrlo kratak period (dan ili jedna nedelja), metod varijanse-kovarijanse daje prilično dobre rezultate, uprkos svojoj hrabroj pretpostavci o normalnosti. Tamo gde ocenjujemo VaR za stabilne izvore rizika i sa dovoljno istorijskih podataka (npr. cene artikala), istorijska simulacija pruža dovoljno dobre procene. Međutim, u većini slučajeva VaR ocenjujemo za nelinearni portfolio i za duži period, kada su istorijski podaci nestabilni, a pretpostavka o normalnosti pod znakom pitanja. U takvoj situaciji, najbolje rezultate daje Monte Carlo simulacija [13].

5 Backtesting proces

VaR modeli su korisni samo ako tačno predviđaju buduće rizike. Da bismo proverili da li su rezultati koji su potekli od VaR izračunavanja konzistentni i pouzdani, model bi uvek morao biti proveren tzv. testiranjem unazad (backtesting), uz pomoć statističkih metoda. Backtesting je postupak gde se stvarni dobici i gubici porede sa projektovanim VaR procenama. Ako VaR procene nisu tačne, model treba preispitati zbog netačnih pretpostavki, pogrešnih parametara ili pogrešnog modeliranja [2].

Predložene su razne metode za testiranje unazad. Osnovni testovi, kao što je Kupiecov POF test, ispituju *učestalost* pojave da gubici premaše procenjeni VaR. Ova tzv. stopa neuspeha treba da se slaže sa izabranim nivoom poverenja. Npr. ako se dnevni VaR procenjuje na nivou poverenja od 99%, u periodu od jedne godine - 250 radnih dana, u proseku očekujemo da u 2.5 slučaja dođe do odstupanja od predviđenog VaR-a u toku posmatranog perioda. Ovi tipovi testova su poznati kao testovi bezuslovne pokrivenosti. Ono što je važno kod ovih testova jeste da oni ne uzimaju u obzir **kada** se izuzetak desio [1].

Drugi, jednako važan aspekt, je da se obezbedi da zapažanja koja premašuju VaR budu *nezavisna*, tj. da budu jednako raspoređena u vremenu. Dobar model je sposoban da izbegne grupisanje odstupanja, tako što brzo reaguje na promene u volatilnosti finansijskih instrumenata i njihovoj korelaciji.

Poznato je da postoje ozbiljni problemi u VaR procenama za turbulentna tržišta. Naime, po definciji, VaR meri očekivane gubitke samo pod *normalnim* uslovima na tržištu. Dobar VaR model bi trebao da daje "tačan" broj premašaja, i to premašaje koji su jednako raspoređeni u vremenu, tj. koji su nezavisni jedni od drugih [2]. Testovi uslovljene pokrivenosti ispituju zavisnost u podacima.

5.1 Bezuslovna pokrivenost (eng. unconditional coverage)

Najčešći test za VaR model prebrojava broj VaR odstupanja kada su portfolio gubici premašili VaR procenu. Najpoznatiji testovi ove vrste su Kupiecovi testovi.

Ako je broj odstupanja manji od praga za određeni nivoa poverenja, to znači da je model precenio rizik. Suprotno, preveliki broj premašaja je signal da je rizik potcenjen. Dakle, zadatak se svodi na analizu da li je broj odstupanja realan ili ne, tj. da li će model biti prihvaćen (kao dobar) ili odbačen.

Označimo broj odstupanja sa x i ukupan broj opservacija sa T, tada definišemo stopu neuspeha kao $\frac{x}{T}$. Ako je korišćen nivo poverenja γ, imamo

$$p_\gamma = 1 - \gamma.$$

Npr. za $\gamma = 99\%$, $p_\gamma = 1\%$.

Sada imamo nultu hipotezu da je učestalost pojave gubitaka jednaka

$$H_0:\ \frac{x}{T} = p_\gamma$$

Broj odstupanja x ima binomnu raspodelu verovatnoća:

$$f(x) = \binom{T}{x} {p_\gamma}^x (1 - p_\gamma)^{T-x}$$

Kako broj posmatranja raste, binomna raspodela može biti aproksimirana normalnom raspodelom:

$$Z = \frac{x\, p_\gamma T}{\sqrt{p_\gamma (1 - p_\gamma) T}} \approx \mathcal{N}(0,1),$$

gde je $p_\gamma T$ očekivani broj odstupanja i $p_\gamma(1 - p_\gamma)T$ je varijansa odstupanja [1].

$$H_1: \frac{x}{T} \neq p_\gamma.$$

5.1.1 Kupiecovi testovi

5.1.1.1. POF test

Najrasprostranjeniji test zasnovan na stopama neuspeha (promašaja) je predložen od strane Kupieca (1995). POF (proportion of failure) test meri da li je broj odstupanja u skladu sa nivoom poverenja. Nulta hipoteza za POF test glasi

$$H_0:\ p_\gamma = \frac{x}{T}$$

Ideja je da otkrijemo da li je posmatrana stopa promašaja (procene) značajno različita od p_γ (stope neuspeha sugerisane na osnovu nivoa poverenja). LR (likelihood ratio) test statistika je data sa

$$LR_{POF} = -2ln\left(\frac{(1 - p_\gamma)^{T-x}\, {p_\gamma}^x}{\left[1 - \left(\frac{x}{T}\right)\right]^{T-x} \left(\frac{x}{T}\right)^x}\right)$$

LR_{POF} ima χ^2 (hi-kvadrat) raspodelu sa jednim stepenom slobode. Ako test statistika premaši kritičnu vrednost (iz tabele za χ^2 raspodelu), nulta hipoteza (da je model dobar) se odbacuje.

POF test uzima u obzir samo frekvenciju pojave odstupanja, a ne i vreme kada se ona pojavljuju. Kao rezultat toga, može doći do neodbacivanja modela koji proizvodi grupisana odstupanja od predviđenog [2].

5.1.1.2. TUFF test

TUFF (time until first failure) test meri vreme koje protekne do pojave prvog odstupanja.

Imamo LR test statistiku:

$$LR_{TUFF} = -2ln\left(\frac{p_\gamma(1-p_\gamma)^{\nu-1}}{\frac{1}{\nu}(1-\frac{1}{\nu})^{\nu-1}}\right),$$

gde je ν broj dana do pojave prvog odstupanja.

I ovde, test statistika ima χ^2-kvadrat raspodelu sa jednim stepenom slobode. Opet, ako test statistika premaši kritičnu vrednost, model se odbacuje [4].

Problem sa TUFF testom je što ima slabu moć da identifikuje loše VaR modele. Npr. ako računamo dnevne VaR procene na nivou poverenja od 99%, u periodu od 250dana (odstupanja sme da bude 2.5 u 250 dana) i opazimo odstupanje već 7-og dana, model neće odmah biti odbačen [14].

5.1.2 Regulatorni okvir

Aktuelni (važeći) regulatorni okvir zahteva da banke računaju VaR za vremenski horizont od 10dana, koristeći nivo poverenja 99% [16]. Regulatorni backtest proces se sprovodi tako što se upoređuje poslednjih 250 dnevnih 99% VaR procena sa odgovarajućim dnevnim ishodima trgovanja. Preciznost modela se evaluira prebrojavanjem broja odstupanja u ovom periodu.

Bazelski komitet klasifikuje ishode backtesting-a u 3 kategorije: zelenu, žutu i crvenu zonu.

Neka je x broj odstupanja u toku 250 radnih dana.

$$S_t = \begin{cases} 3, & x \le 4 \quad \text{zelena zona} \\ 3 + 0.2(x-4), & 5 \le x \le 9 \quad \text{crvena zona} \\ 4, & 10 \le x \quad \text{žuta zona} \end{cases}$$

S_t je skalirajući faktor zahtevanog kapitala pri tržišnom riziku.

Ako je očekivani broj odstupanja 2.5 i zabeleženo je između 0 i 4 odstupanja, model upada u zelenu zonu i određen je kao dobar.

Model upada u žutu zonu ukoliko dođe do pojave od 5 do 9 odstupanja. Ovo ne znači nužno da je model netačan.

Zona	90%	95%	99%
zelena	**0-32**	**0-17**	**0-4**
zuta	**33-43**	**18-26**	**5-9**
crvena	**≥44**	**≥27**	**≥10**

Tabela 5.1.

Razlozi za pogrešan ishod testiranja unazad:

- Osnovni integritet modela: Sistem nije u mogućnosti da uhvati rizik pozicija ili postoji problem u računanju volatilnosti i korelacije.

- Tačnost modela može biti poboljšana: Rizik nekih instrumenata nije meren sa dovoljnom preciznošću.

- Tržište se ponašalo na drugačiji način od onog koji je predviđen modelom (npr. volatilnosti i korelacije su značajno drugačije od predviđenih).

- Trgovanje u toku dana (dešavaju se promene u pozicijama nakon što su izračunate VaR procene).

Crvena zona ukazuje na jasan problem sa VaR modelom i uglavnom vodi ka automatskom odbacivanju modela [15].

Zbog ozbiljnih mana Bazelskog okvira, najbolje je da se ovaj metod koristi samo kao preliminarni test za testiranje tačnosti VaR-a. Stoga, potrebno je koristiti druge, naprednije testove.

5.2 Uslovljena pokrivenost

Grupisanje odstupanja je nešto što korisnici VaR-a žele da su u mogućnosti da otkriju, pošto veliki gubici koji se događaju sukcesivno verovatno vode do katastrofalnih događaja, više nego što to čine individualna odstupanja, koja se pojavljuju sporadično.

5.2.1 Kristofersenov test prognoze intervala

Ovaj test koristi istu test statistiku kao i Kupiecov test, samo što ispituje i da li je neki izuzetak zavisan (nastao pod uticajem) od ishoda prethodnog dana.

Prvo definišemo indikator promenljivu I koja dobija vrednost 1 ako je VaR iznos premašen, a vrednost 0 ako nije premašen:

$$I_t = \begin{cases} 1, & \textit{ako se dogodi odstupanje} \\ 0, & \textit{ako se ne dogodi odstupanje} \end{cases}$$

Zatim, definišemo n_{ij} kao broj dana kada se stanje j desilo, pod pretpostavkom da se stanje i desilo prethodnog dana. Tabela kontingencije 2x2:

	$I_{t-1}=0$	$I_{t-1}=1$	
$I_t=0$	n_{00}	n_{10}	$n_{00}+n_{10}$
$I_t=1$	n_{01}	n_{11}	$n_{01}+n_{11}$
	$n_{00}+n_{01}$	$n_{10}+n_{11}$	N

Tabela 5.2.

Dalje, neka π_i označava verovatnoću opažanja odstupanja u zavisnosti od stanja i prethodnog dana:

$$\pi_0 = \frac{n_{01}}{n_{00}+n_{01}}, \quad \pi_1 = \frac{n_{11}}{n_{10}+n_{11}} \qquad i \qquad \pi = \frac{n_{01}+n_{11}}{n_{00}+n_{01}+n_{10}+n_{11}} \tag{1}$$

Ako je model tačan, odstupanje koje se desilo danas ne bi trebalo da zavisi od odstupanja koje se desilo prethodnog dana. Drugim rečima, pod nultom hipotezom, verovatnoće π_0 i π_1 bi trebalo da budu jednake. Sada imamo test statistiku

$$LR_{ind} = -2\ln\left(\frac{(1-\pi)^{n_{00}+n_{01}+n_{10}+n_{11}}}{(1-\pi_0)^{n_{00}}\pi_0{}^{n_{01}}(1-\ \pi_1)^{n_{10}}\ \pi_1{}^{n_{11}}}\right) \tag{2}$$

Kombinacijom ove statistike i Kupiecovog POF testa dobijamo zajednički test, koji ispituje obe karakteristike dobrog VaR modela:

$$LR_{CC} = LR_{POF} + LR_{ind}$$

LR_{CC} ima χ^2 raspodelu sa dva stepena slobode, jer imamo dve odvojene LR test statistike, sa po jednim stepenom slobode.

Kristofersenov okvir dozvoljava ispitivanje da li je razlog za neprolaženje testa izazvan netačnošću opsega, zbog postojanja klastera (grupisanih) odstupanja ili možda oba.Ova evaluacija se može uraditi tako što se posebno izračunaju obe test statistike LR_{POF} i LR_{ind}. U nekim slučajevima može se desiti da model prođe zajednički test, ali da ipak ne prođe na testu nezavisnosti ili testu pokrivenosti [2].

5.2.2 Mešoviti Kupiecov test

Kristofersenov test prognoze intervala nije u mogućnosti da obuhvati zavisnost u svim oblicima, jer uzima u obzir samo zavisnost između dva sukcesivna zapažanja. Moguće je da, verovatnost narušavanja VaR procene danas, ne zavisi od toga da li se desilo narušavanje juče, ali zavisi da li se narušavanje desilo npr. pre nedelju dana.

Mešoviti Kupiecov test meri vreme između pojave odstupanja, umesto da samo zapaža da li odstupanje danas zavisi od ishoda prethodnog dana. Kupiecov TUFF test, koji meri vreme do pojave prvog odstupanja, se može korististi da se proceni vreme između dva odstupanja. Test statistika ima oblik

$$LR_i = -2ln\left(\frac{p_\gamma(1-p_\gamma)^{v_i-1}}{\frac{1}{v_i}(1-\frac{1}{v_i})^{v_i-1}}\right)$$

gde je v_i vreme između izuzetka u trenutku i i $i-1$. Za prvo odstupanje test statistika je izračunata po TUFF testu. Kada se izračuna LR statistika za svako odstupanje, dobijamo test nezavisnosti, gde je nulta hipoteza da su izuzeci nezavisni jedan od drugog. Sa n odstupanja, test statistika za test nezavisnosti je

$$LR_{ind} = \sum_{i=2}^{n}\left[-2ln\left(\frac{p_\gamma(1-p_\gamma)^{v_i-1}}{\frac{1}{v_i}(1-\frac{1}{v_i})^{v_i-1}}\right)\right] - 2ln\left(\frac{p_\gamma(1-p_\gamma)^{v-1}}{\frac{1}{v}(1-\frac{1}{v})^{v-1}}\right)$$

i ona ima χ^2 raspodelu sa n stepeni slobode. [21]

Kristofersenov test nezavisnosti se može kombinovati sa POF testom i dobija se mešoviti test za nezavisnost i pokrivenost, nazvan mešoviti Kupiecov test:

$$LR_{mix} = LR_{POF} + LR_{ind}$$

Ova statistika ima n +1 stepen slobode i, kao i ostale LR test statistike, upoređuje se sa kritičnom vrednošću za χ^2 raspodelu.

5.3 Numerički rezultati testiranja unazad (empirijski backtesting)

5.3.1 Bezuslovna pokrivenost

5.3.1.1. Bazelski semafor pristup

Posmatraćemo period od 250 radnih dana i 99%-ni nivo poverenja. Testiranje unazad se sprovodi tako što se upoređuju dnevni prinosi portfolija sa procenama dnevnog VaR-a. Za ove parametre se očekuje da VaR procene budu premašene u proseku u 2.5 slučaja.

Kako su u Bazelskom pristupu definisani brojevi opaženih odstupanja, koji određuju kojoj zoni model pripada na nivou poverenja od 99% (tabela 5.3.), sada treba da izračunamo tačke prelaza (iz jedne zone u drugu) i za ostale nivoe poverenja (90%, 95%). Za to izračunavanje možemo koristiti binomnu raspodelu.

Zona	**90%**	**95%**	**99%**
zelena	**0-32**	**0-17**	**0-4**
žuta	**33-43**	**18-26**	**5-9**
crvena	**44 i više**	**27 i više**	**10 i više**

Tabela 5.3.

Ishodi blizu nule na nižim nivoima poverenja ukazuju na problem. Npr. ako opazimo 0 odstupanja na nivou od 90% poverenja u obimu od 250 dana, to nam govori da je model previše konzervativan. Naime, kako su regulatori zainteresovani samo za identifikovanje modela koji potcenjuju rizik, ovi ishodi, iako su jasno pogrešni, prihvatljivi su sa njihove tačke gledišta.

Primer 5.1. Na osnovu izračunatog VaR-a za period od godinu dana, a potom upoređenih dobijenih vrednosti sa vrednostima VaR-a koje su se ostvarile, dobijeni broj odstupanja stvarnog od predviđenog VaR-a (broj premašaja) je predstavljen u sledećoj tabeli:

nivo poverenja	broj opservacija	broj premašaja	ishod testa
90%	250	27	zelena zona
95%	250	15	zelena zona
99%	250	1	zelena zona

Tabela 5.4. Rezultati testiranja unazad pomoću Bazelskog semafor pristupa

Kada smo posmatrali nivo poverenja od 90%, broj premašaja koji smo zabeležili je 27 i stoga model upada u zelenu zonu, po tabeli 5.3. Takođe, za preostala dva nivoa poverenja, broj opažaja je odredio da ishod Bazelskog "semafor" testa bude zelena zona (na osnovu tabele 5.3.).

5.3.1.2. Kupiecovi testovi

Kupiecov POF test se koristi za ispitivanje da li je količina odstupanja prevelika, kao što predlaže Bazelski semafor pristup. Kao što je već rečeno, test statistika je data sa

$$LR_{POF} = -2ln\left(\frac{(1-\ p_{\gamma})^{T-x}\ {p_{\gamma}}^{x}}{\left[1-\left(\frac{x}{T}\right)\right]^{T-x}\left(\frac{x}{T}\right)^{x}}\right)$$

Nulta hipoteza je da je model dobar (da nije potcenio rizik), tj. da broj odstupanja nije veći od dozvoljenog praga određenog nivoom poverenja. Alternativna hipoteza je da je broj odstupanja veći od tog praga.

Primer 5.2. Posmatramo portfolio za koji je zabeleženo 1 odstupanje, na nivou poverenja od 99%, u periodu od 250 radnih dana (podaci iz tabele 5.4.). U tom slučaju, test statistika je

$$LR_{POF} = -2ln\left(\frac{(1-0.01)^{250-1}0.01^{1}}{\left[1-\left(\frac{1}{250}\right)\right]^{250-1}\left(\frac{1}{250}\right)^{1}}\right) \approx 0.28$$

Kada se LR_{POF} uporedi sa kritičnom vrednošću iz tabele za χ^2 raspodelu, sa jednim stepenom slobode (koja iznosi 6.63), vrednost LR_{POF} je ne premašuje i stoga se nulta hipoteza prihvata.

nivo poverenja	test statistika LR_{POF}	Kritična vrednost χ2(1)	ishod testa
99%	**0.28**	**6.63**	**prihvata se**
95%	**5.00**	**3.84**	**odbacuje se**
90%	**6.81**	**2.7**	**odbacuje se**

Tabela 5.5. Rezultati backtestinga pomoću POF testa

Takođe, u tabeli 5.5. možemo videti vrednosti dobijene za LR_{POF} statistiku na nivou poverenja od 90% i 95%, gde su dobijene vrednosti premašile kritične vrednosti iz tabele za χ^2 raspodelu sa jednim stepenom slobode i zato je, u oba slučaja, ishod testa da model treba odbaciti (odbacuje se nulta hipoteza da je model dobar).

Kao što je već rečeno, Kupiecov TUFF test meri vreme do pojave prvog odstupanja i ima test statistiku datu sledećim izrazom:

$$LR_{TUFF} = -2ln\left(\frac{p_{\gamma}\left(1-\ p_{\gamma}\right)^{\nu-1}}{\frac{1}{\nu}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{\nu-1}}\right)$$

Ovde je p_{γ} vrednost data sa $(1-\gamma)$, gde je γ nivo poverenja. Tako, u slučaju $\gamma = 90\%$, $p = 10\%$, tj. 0.1, dok je vrednost ν broj dana do pojave prvog odstupanja.

Primer 5.3. Ponovo posmatramo portfolio iz primera 5.2., ali ovog puta primenjujemo Kupiecov TUFF test. Korišćenjem formule za LR_{TUFF} statistiku, za nivo poverenja od 99%, dobijamo vrednost 2.11, koja ne prelazi kritičnu vrednost iz tabele za χ^2 raspodelu sa jednim stepenom slobode (od 6.63), pa se model prihvata. U preostala dva slučaja (za nivo poverenja od 90% i 95%) imamo da dobijena vrednost premašuje kritičnu vrednost iz tabele i model se odbacuje.

nivo poverenja	**test statistika LR_{TUFF}**	**Kritična vrednost χ2(1)**	**ishod testa**
99%	2.11	6.63	**prihvata se**
95%	5.99	3.84	**odbacuje se**
90%	4.61	2.7	**odbacuje se**

Tabela 5.6. Rezultati TUFF testa

5.3.2 Uslovljena pokrivenost

5.3.2.1. Kristofersenov test nezavisnosti

Da bismo ispitali da li su odstupanja jednako raspoređena u vremenu ili se pojavljuju u klasterima, sprovešćemo Kristofersenov test prognoze intervala. Tabela kontingencije za 90% nivo poverenja i 27 opaženih odstupanja glasi:

	0	1	
0	201	24	225
1	24	3	27
	225	27	252

Tabela 5.7.

Kao što je već rečeno, imamo test statistiku:

$$LR_{ind} = -2\ln\left(\frac{(1-\pi)^{n_{00}+n_{01}+n_{10}+n_{11}}}{(1-\pi_0)^{n_{00}}{\pi_0}^{n_{01}}(1-\ \pi_1)^{n_{10}}\ {\pi_1}^{n_{11}}}\right)$$

$$\pi_0 = \frac{n_{01}}{n_{00}+n_{01}} = \frac{24}{201+24} = 10.67\%$$

$$\pi_1 = \frac{n_{11}}{n_{10}+n_{11}} = \frac{3}{24+3} = 11.11\%$$

$$\pi = \frac{n_{01}+n_{11}}{n_{00}+n_{01}+n_{10}+n_{11}} = \frac{201+3}{201+24+24+3} = 10.71\%$$

$$LR_{ind} = -2\ln\left(\frac{(1-10.71\%)^{201+24+24+3}}{(1-10.67\%)^{201}10.67\%^{24}(1-11.11\%)^{24}11.11\%^{3}}\right) \approx 0.005$$

Dobijeni rezultati predstavljeni su u sledećoj tabeli:

nivo poverenja	broj premašaja	n_{00}	n_{01}	n_{10}	n_{11}	π_0	π_1	π
99%	1	250	1	1	0	0.40%	0	0.40%
95%	15	201	24	24	3	10.67%	11.11%	10.71%
90%	27	223	14	14	1	5.95%	5.95%	5.95%

Tabela 5.8.

Iz tabele za χ^2 raspodelu i 90% nivo poverenja očitavamo kritičnu vrednost od 2.7, koja je veća od dobijene LR_{ind} statistike i stoga se prihvata hipoteza da su pojavljivanja odstupanja međusobno nezavisna.

nivo poverenja	**test statistika LR_{ind}**	**Kritična vrednost $\chi 2(1)$**	**ishod testa**
99%	0.0083	6.63	prihvata se
95%	$9.1038\ 10^{-15}$	3.84	prihvata se
90%	0.005	2.7	prihvata se

Tabela .9.Rezultati Kristofersenovog testa nezavisnosti

Kako test statistika LR_{ind} ne premašuje kritičnu vrednost, na sva tri nivoa poverenja, ovaj test nam definitivno govori da ne postoji zavisnost među pojavljivanjima odstupanjima, tj. kao ishod testa, prihvata se hipoteza da su odstupanja jednako raspoređena u vremenu.

5.3.2.2. Test nezavisnosti za mešoviti Kupiecov test

Kristofersenov test nezavisnosti posmatra samo dve sukcesivne opservacije. Zato je Haas (2001) predložio sledeći test nezavisnosti. Koristimo Kupiecov TUFF test, koji meri vreme do pojave prvog odstupanja, da bismo procenili vreme između dva odstupanja. Test statistika za svaki premašaj je:

$$LR_i = -2ln\left(\frac{p_\gamma(1-p_\gamma)^{\nu_i-1}}{\frac{1}{\nu_i}(1-\frac{1}{\nu_i})^{\nu_i-1}}\right) \qquad (3)$$

Posmatramo portfolio sa 95% nivoom poverenja, gde je zapaženo 15 odstupanja od procenjenog VaR-a. U tabeli su dati podaci o broju dana proteklih između ovih 15 odstupanja.

redni broj premašaja	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
vreme između dv premašaja	1	4	6	5	6	7	3	2	6	7	21	2	14	56	84

Tabela 5.10.

Pomoću formule (3) dobijamo vrednosti LR_i

redni broj premašaja	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
LR_i	2.38	3.32	5.99	5.99	5.99	1.80	5.99	1.80	5.99	0.12	0.003	0.24	0.75	0.13	3.66

Tabela 5.11.

Korišćenjem sledeće formule

$$LR_{ind} = \sum_{i=2}^{n}\left[-2ln\left(\frac{p_{\gamma}(1-\ p_{\gamma})^{\nu_i-1}}{\frac{1}{\nu_i}(1-\frac{1}{\nu_i})^{\nu_i-1}}\right)\right]-2ln\left(\frac{p_{\gamma}(1-\ p_{\gamma})^{\nu-1}}{\frac{1}{\nu}(1-\frac{1}{\nu})^{\nu-1}}\right)\approx 40.5$$

dobijamo statistiku $LR_{ind} \approx 40.5$.

Test statistika ima χ^2 raspodelu sa n stepeni slobode, gde je n broj premašaja, dakle 15. Kritična vrednost iz tabele za χ^2 raspodelu je 25, te se stoga model odbacuje. Drugim rečima, to znači da osobina nezavisnosti ovde nije zadovoljena.

Test nezavisnosti (Mešoviti Kupiecov test)			
nivo poverenja	**test statistika LR_{ind}**	**Kritična vrednost $\chi^2(15)$**	**ishod testa**
99%	0.12	6.63	prihvata se
95%	40.50	25.00	odbacuje se
90%	66.90	36.74	odbacuje se

Tabela 5.12. Rezultati testa nezavisnosti za mešoviti Kupiecov test

5.3.3 Zajednički testovi bezuslovne pokrivenosti i nezavisnosti

5.3.3.1. Kristofersenov test prognoze intervala

Kombinovanjem Kupiecovog POF testa i Kristofersenovog testa nezavisnosti dobijamo zajednički test za uslovnu pokrivenost. Test statistika se dobija sabiranjem test statistikâ za ova dva testa:

$$LR_{CC} = LR_{POF} + LR_{ind}$$

Zato sada test statistika ima χ^2 raspodelu sa dva stepena slobode. Naime, ako posmatramo portfolio sa 99% nivoom poverenja, LR_{POF} je bila 0.28, a LR_{ind} je bila 0.0083. Dakle, sabiranjem ove dve vrednosti dobijamo test statistiku za uslovnu pokrivenost:

$$LRcc = 0.28 + 0.0083 = 0.2883\ ,$$

Ova vrednost ne premašuje kritičnu vrednost od 9.21 i stoga se model ne odbacuje.

nivo poverenja	test statistika LR_{CC}	Kritična vrednost $\chi^2(2)$	ishod testa
99%	0.2883	9.21	prihvata se
95%	5.00	5.99	prihvata se
90%	6.805	4.605	odbacuje se

Tabela 5.13. Rezultati zajedničkog testa

Pošto smo već imali rezultat POF testa, da se model odbacuje za nivo poverenja od 90%, ne čudi nas da i zajednički test na tom nivou daje isti rezultat.

5.3.3.2. Mešoviti Kupiecov test

Test statistika za Kupiecov mešoviti test se dobija sabiranjem test statistikâ za Kupiecov POF test i Kupiecov mešoviti test nezavisnosti:

$$LR_{mix} = LR_{POF} + LR_{ind}$$

Posmatrajmo primer portfolija sa nivoom poverenja 99%, tada imamo sledeće:

$$LR_{mix}= 0.28+0.1235=0.4035$$

Kritična vrednost za χ^2 raspodelu sa n+1 stepenom slobode, gde je n broj premašaja (u našem slučaju 1), jeste 9.21. Kako test statistika ne premašuje kritičnu vrednost iz tabele za χ^2 raspodelu, model se prihvata.

nivo poverenja	test statistika LR_{mix}	Kritična vrednost $\chi^2(2)$	ishod testa
99%	0.40	9.21	prihvata se
95%	45.50	26.30	odbacuje se
90%	73.71	37.92	odbacuje se

Tabela 5.14. Rezultati mešovitog Kupiecovog testa

Nivo po-verenja	Premašaji/ opservacije	Testovi frekvencije			Testovi nezavisnosti		Zajednički testovi	
		semafor pristup	TUFF-test	POF-test	Kristofersen	mix Kupiec	Kristofersen	mix Kupiec
99%	1/252	zelena zona	prihvata se	prihvata se	prihvata se	prihvata se	prihvata se	prihvata se
95%	15/252	zelena zona	odbacuje se	odbacuje se	prihvata se	odbacuje se	prihvata se	odbacuje se
90%	27/252	zelena zona	odbacuje se	odbacuje se	prihvata se	odbacuje se	odbacuje se	odbacuje se

Tabela 5.15. Zbirni rezultati testiranja unazad

6 Zaključak

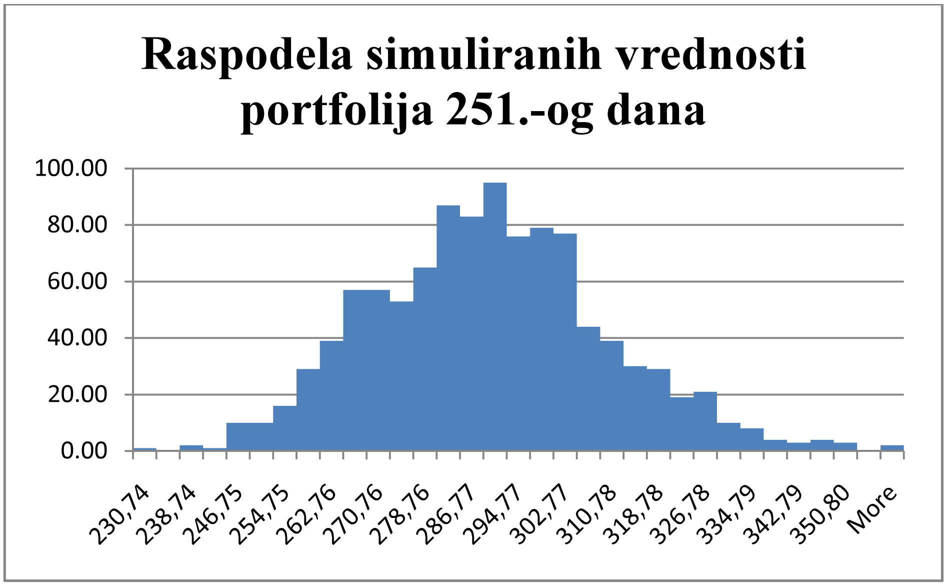
VaR je postao jedna od najpopularnijih metoda za merenje tržišnog rizika. Svaki VaR model koristi istorijske podatke sa tržišta da bi prognozirao budući uspeh portfolija. Dalje, modeli se baziraju na aproksimacijama i pretpostavkama, koje ne moraju nužno biti održive u svakoj situaciji. Kako su metode daleko od savršenih, postoji dobar razlog da dovodimo u pitanje preciznost procenjenog VaR-a.

U teorijskom delu master rada su razmotreni različiti pristupi (metode) za izračunavanje VaR-a i evaluirane su prednosti i mane ovih metoda. Takođe su predstavljeni neki od najčešćih testova za testiranje unazad koji se koriste za evaluaciju VaR modela. U empirijskom delu rada je proučavana korektnost VaR-a dobijenog metodom istorijske simulacije, u periodu od godinu dana i za različite nivoe poverenja. Sprovedena su testiranja koja uključuju Bazelski semafor pristup, Kupiecov POF i TUFF test, Kristofersenov test prognoze intervala i mešoviti Kupiecov test (predložen od strane Haas-a).

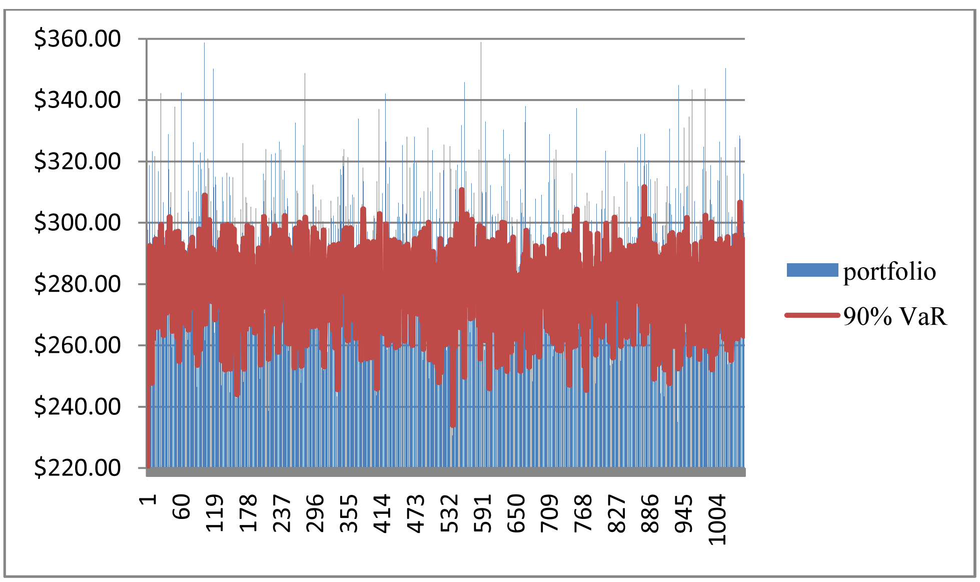
Dobar VaR model treba da zadovoljava dve jednako važne osobine. Prvo, treba da proizvodi tačan broj odstupanja, zasnovan na nivou poverenja. Drugo, odstupanja treba da budu međusobno nezavisna. Najjednostavniji testovi se fokusiraju samo na broj odstupanja, dok naprednije metode uzimaju u obzir zavisnost između odstupanja. Najčešći test stope neuspeha je Kupiecov POF test, koji meri broj odstupanja u određenom vremenskom periodu. Nezavisnost odstupanja može biti razmatrana Kristofersenovim testom prognoze intervala. Međutim, kao što je emprijsko istraživanje pokazalo, bolja alternativa je mešoviti Kupiecov test, zato što je u mogućnosti da zabeleži opštije oblike zavisnosti. Iako se Bazelski semafor pristup odnosi samo na banke, on nam daje određene smernice kao preliminarni test pre nego što se upustimo u dalje statističko testiranje unazad. Od navedenih testova, mešoviti Kupiecov test je najpouzdaniji i daje najviše informacija.

Rezultati empirijskog testiranja unazad su neosporni: većina testova stope neuspeha ukazuje na to da model treba odbaciti, jer potcenjuje rizik. Dalje, od testova nezavisnosti, Kristofersenov test ukazuje na to da u rezultatima primene modela nije registrovana zavisnost između pojave odstupanja. Međutim, mešoviti Kupiecov test daje loše rezultate. On ukazuje na to da postoje opštiji oblici zavisnosti među pojavljivanjima odstupanja, što sugeriše da odstupanja nisu u potpunosti međusobno nezavisna i zbog toga model treba odbaciti. Zbog loših rezultata sa aspekta testova nezavisnosti, kao i testova stope neuspeha, ne iznenađujemo se što su rezultati zajedničkih testova takođe da model treba odbaciti. Nakon razmotrenih dobijenih rezultata možemo izvesti zaključak da nam je ishod testiranja unazad ukazao na potencijalne probleme u modelu.

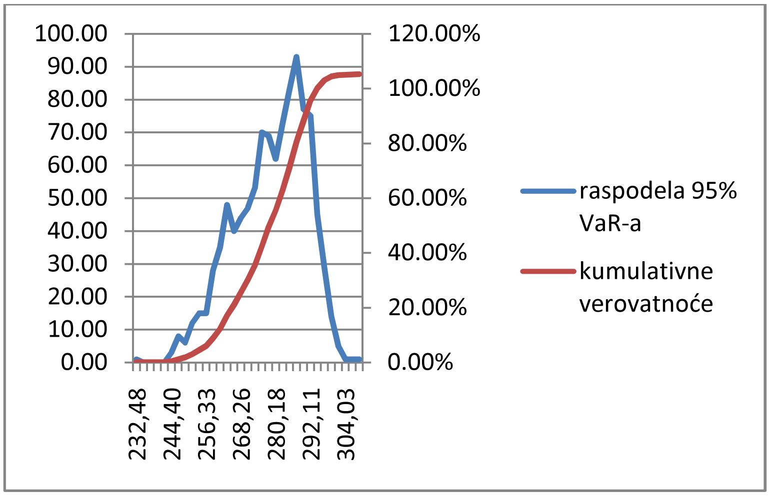
7 Prilog



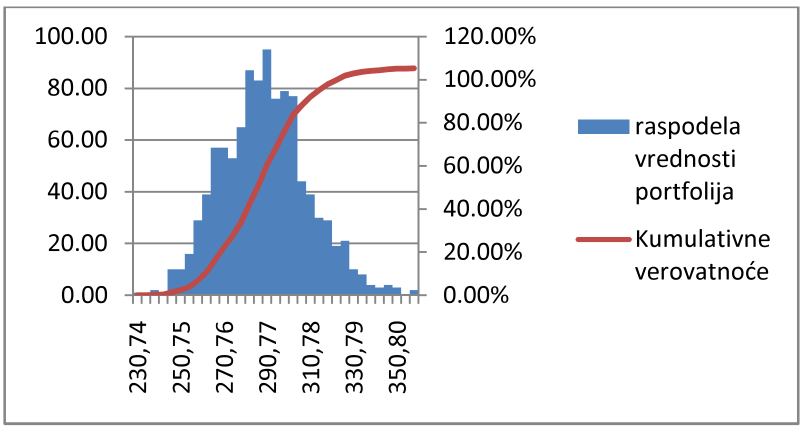
Slika 7.1.



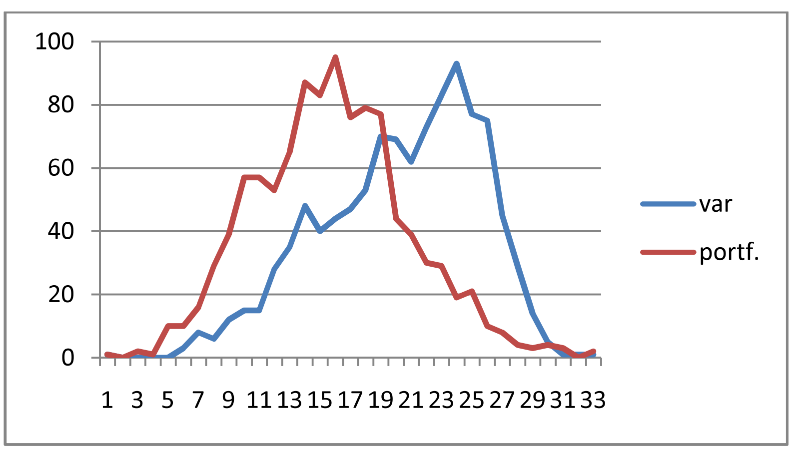
Slika 7.2. 90% VaR i prognozirana vrednost portfolija na kraju perioda – poslednjeg dana (1000simulacija)



Slika 7.3. Raspodela vrednosti 95% VaR-a i odgovarajućih kumulativnih verovatnoća na kraju perioda (poslednjeg posmatranog dana)



Slika 7.4. Raspodela vrednosti portfolija na kraju perioda (251.-og dana) i odgovarajućih kumulativnih verovatnoća



Slika 7.5. Raspodela frekvencija 95% VaR-a i raspodela frekvencija vrednosti porftolija u period od godinu dana

Literatura:

[1] Jorion, Ph., *Value at risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, McGraw Hill, 2001.
[2] Nieppola, O., *Backtesting Value-at-Risk Models,* Helsinki school of economics, 2009.
[3] Žiković, S., *Formiranje optimalnog portfolija hrvatskih dionica i merenje tržiših rizika primenom VaR metode*, magistarski rad, Ljubljana, 2005.
[4] Kupiec, Paul., H., *Techniques for Verifying the Accuracy of the Risk Measurements Model*s, The Journal of Derivatives, 1995.
[5] Christofferssen,P., Pelletier,P., *Backtesting Value-at-Risk: A Duration-Based Approach*, Journal of Empirical Finance, 2004.
[6] Radivojević, N., Lazić, J., Cvijanović, J., *Aplikativnost istorijske simulacije vrednosti pri riziku na tržištu kapitala Srbije*, Industrija,Beograd, 2010.
[7]Rajter-Ćirić, D., *Verovatnoća*, Futura, Novi Sad, 2008.
[8]Šverko, I., *Rizična vrijednost (Value at risk) kao metoda upravljanja rizicima u finansijskim institucijama,* Ekonomski pregled, 2002.
[9]Jazić, V., *Primena VaR metodologije,* Bankarstvo, 2007.
[10]Mitrović, J., *VaR i CVaR kao mere rizika*, Novi Sad, 2009.
[11]Miljanić, G.,*VaR i upravljanje kreditnim rizikom*, Novi Sad, 2009.
[12]Rožnjik, A., *VaR kao mera rizika u optimizaciji portfolija*, maigstarska teza, Novi Sad, 2008.
[13]Ljiljak, N., *VaR modeli*, završni rad, Novi Sad, 2010.
[14] Dowd, K. , *Retrospective Assessment of Value-at-Risk. Risk Management: A Modern Perspective*, San Diego, Elsevier, 2006.
[15] Basel Committee of Banking Supervision , *Supervisory Framework For The Use of "Backtesting" in Conjunction With The Internal Models Approach to Market Risk Capital Requirements,* 1996.
[16]Basel Committee of Banking Supervision, 2006.
[17]www.finance.yahoo.com
[18]Uryashev, S., *VaR vs CVaR in Risk Management and Optimization,* CARISMA Conference, France, 2010.
[19]Rockafellar, R.T., Uryashev, S., *Conditional Value at risk for general loss distributions,* Journal of banking and finance 26, 2002.
[20]Unković, M., Stakić, B., *Spoljnotrgovinsko i devizno poslovanje*, Univerzitet Singidunum, Beograd, 2011.
[21] Haas, M. , *New Methods in Backtesting*, Financial Engineering, Research Center Caesar, Bonn, 2001.
[22]Hendricks, D., *Evaluation of Value at Risk Models Using Historical Data,* FRBNY Economic Policy Review, 1996.
[23]Pflug, *Some remarks on the Value at risk and the Conditional value at risk*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
[24]Lozanov-Crvenković, *Stattistika*, Univerzitet u Novom Sadu, PMF, Novi Sad, 2012.
[25]Cvetinović, M., *Upravljanje rizicima u finansijskom poslovanju*, Univerzitet Singidunum, Beograd, 2008.
[26]Jorion, *Financial risk manager handbook*, John Wiley&Sons, New Jerey, 2007.
[27]Pearson, N., D., Linsmeier, Th.J., *Risk measurement: An Introduction to Value at Risk*, University of Illinois at Urbana-Campaign, 1996.
[28]Hull, J.C., *Options, futures and other derivatives*, Prentice Hall, New Jersey, 2008.
[29]Radivojević, N., Milojković D., Stojković, D., *Testiranje aplikativnosti parametarske i neparametarske vrednosti pri riziku na tržištu kapitala Srbije*, 2009.
[30]Lopez, J. , *Methods for Evaluating Value-at-Risk Estimates*, Economic Policy Rewiev, 1998.

Biografija

Elena-Andrea Marina rođena je 24.12.1987.godine, u Novom Sadu. Završila je osnovnu školu "Prva vojvođanska brigada" 2002. godine, kao nosilac diplome "Vuk Stefanović Karadžić". Istovremeno je pohađala i završila nižu muzičku školu "Isidor Bajić". Gimnaziju "Svetozar Marković" u Novom Sadu je završila 2006. godine, takođe kao nosilac Vukove diplome.

Po završetku gimnazije upisala je studije matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, Departman za matematiku i informatiku - smer Matematika finansija. Diplomirala je 22.09.2010. na osnovnim studijama, sa prosečnom ocenom 8.97 i stekla zvanje Diplomirani matematičar – matematika finansija. U oktobru iste godine upisala je master studije na istom fakultetu, smer Diplomirani matematičar - master, modul Matematika finansija (Primenjena matematika). Poslednji ispit predviđen planom i programom položila je 12.09.2011.godine.

Od marta 2014. volontira na Radio-televiziji Vojvodine u sektoru finansija.

Novi Sad, 15.04.2014. Elena-Andrea Marina

UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: *Monografska dokumentacija*

TD

Tip zapisa: *Tekstualni štampani materijal*

TZ

Vrsta rada: *Master rad*

VR

Autor: *Elena-Andrea Marina*

AU

Mentor: *dr Zagorka Lozanov-Crvenković*

MN

Naslov rada: *Evaluacija VaR mere rizika*

NR

Jezik publikacije: *srpski (latinica)*

JP

Jezik izvoda: *srpski/engleski*

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: *Vojvodina*

UGP

Godina: *2014.*

GO

Izdavač: *Autorski reprint*

IZ

Mesto i adresa: *Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4*

MA

Fizički opis rada: (7/63/30/27/22/1)

FO *(broj poglavlja/strana/literatura/tabela/grafika/dodataka)*

Naučna oblast: *Matematika*

NO

Naučna disciplina: *Primenjena matematika*

ND

Predmetna odrednica/ključne reči: *Vrednost pod rizikom (VaR), evaluacija, portfolio, metode za određivanje VaR-a, backtesting proces*

PO

Čuva se: *Biblioteka Depratmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu.*

ČU

Važna napomena: *Nema*

VN

Izvod:

U radu je detaljno analizirana VaR mera rizika, njene osobine, metode za njeno izračunavanje kao i metode za procenu tačnosti VaR modela. Rezultati dobijeni na osnovu realnih podataka evaluirani su pomoću nekoliko statističkih testova. Analizom dobijenih rezultata izvedeni su zaključci o preciznosti metoda za dobijanje VaR-a.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: *10.05.2012*.

DP

Datum odbrane: *26.05.2014*.

DO

Članovi komisije:

Predsednik: dr Danijela Rajter-Ćirić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Mentor: dr Zagorka Lozanov-Crvenković, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: Dora Seleši, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

KO

UNIVERSITY OF NOVI SAD

FACULTY OF SCIENCE

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: *Monograph type*

DT

Type of record: *Printed text*

TR

Contents code: *Master's thesis*

CC

Author: *Elena-Andrea Marina*

AU

Mentor: *Zagorka Lozanov-Crvenković, Phd*

MN

Title: *Evaluation of VaR measure of risk*

TI

Language of text: serbian *(latin)*

LT

Language of abstract: *ser/eng*

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: *Vojvodina*

LP

Year: *2014.*

PY

Publisher: *Author's reprint*

PU

Publication place: *Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*

PP

Physical decsription: (7/63/30/27/22/1)

PD *(chapters/ pages/ references/ tables/ graphs/ add lists)*

Scientific field: *Mathematics*

SF

Scientific discipline: *Applied mathematics*

SD

Subjet/key words: *Value at rsik (VaR), evaluation, portfolio, methods for VaR determination, backtesting proces*

SKW

Holding data: *The Library of Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad*

HD

Note:

N

Abstract:

In this paper we thoroughly analized VaR measure of risk, its characteristics, methods for determination as well as methods for evaluation of accuracy of VaR models. Results obtained based on real data are evaluated using several statistical tests. The conclusions about accuracy of methods for calculating VaR are drawn by analizing the results which were obtained.

AB

Accepted by the Scientific Board on: *10.05.2012*.

ASB

Defended: *26.05.2014*.

DE

Thesis defend board:

President: Danijela Rajter-Ćirić, Phd, full professor at Faculty of Science in Novi Sad

Mentor: Zagorka Lozanov-Crvenković, Phd, full professor at Faculty of Science in Novi Sad

Member: Dora Seleši, Phd, associate professor at Faculty of Science in Novi Sad

DB