UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Integrali bazirani na monotonim skupovnim funkcijama i njihova primena u medicini

-MASTER RAD-

Mentor:
dr Mirjana Štrboja

Student:
Edina Feher 43m/12

Novi Sad, *2015.*

Sadržaj

Predgovor

Klasična teorija mere se bavi proučavanjem skupovnih funkcija koje praznom skupu dodeljuju nulu i imaju osobinu aditivnosti. Takve skupovne funkcije se nazivaju merama. Lebegov integral je baziran na meri. Uprkos širokoj primeni Lebegovog integrala u različitim oblastima kako matematike tako i u rešavanju praktičnih problema, njihova primena zbog same osobine adtitivnosti je ograničena. Stoga se razvila oblast koja se naziva uopšena teorija mere i koja se takođe u literaturi naziva i teorija fazi mere. U uopštenoj teoriji mere se polazi od skupovne funkcije koja pored osobine da je na praznom skupu nula ima osobinu monotonosti dok u opštem slučaju ne mora da bude aditivna. Ovakve skupovne funkcije predstavljaju uopštenje mere i nazivaju se monotone skupovne funkcije ili fazi mere. Sugenov i Šokeov integral su bazirani na monotonim skupovnim funkcijama i oni predstavljaju uopštenje Lebegovog integrala.

Sugenov i Šokeov integral imaju široku primenu u raznim oblastima kao što su bankarstvo, finansije, obrada slike, dijagnostika u medicini itd. Ovi integrali imaju veoma važnu ulogu u teoriji odlučivanja i to u slučajevima kada je potrebno doneti odluku na osnovu više kriterijuma i njihove međusobne interakcije.

U uvodnom delu rada biće date definicije pojmova koji će biti potrebni za uvođenje integrala baziranih na monotonim skupovnim funkcijama [4].

Drugi deo rada će se baviti osnovnim idejama uopštene teorije mere. Prvo ćemo videti šta je uopštena klasična mera, zatim uvodićemo pojmove vezane za monotone skupovne funkcije, gde biće data definicija monotone mere. Iako se koristi reč mera kod pojma monotone mere ona se razlikuje od mere u klasičnom smislu, ali zbog jednostavnosti i lakšeg čitanja ćemo koristi ovaj termin. Zatim će biti navedene superaditivne i subaditivne mere [12].

U trećem delu rada će biti navedeni specijalni slučajevi uopšteni mere, kao što su klasična mera i λ-mera [12].

Četvrti deo rada će se baviti sa integralima koji su bazirani na monotonim skupovnim funkcijama. Prvo će biti opisan način na koji se definiše Lebegov integral i date njegove osnovne osobine. Zatim biće data definicija i osobine

Sugenovog integrala, takođe biće data i definicija pan-integrala kao i Šokeovog integrala [3,12,13].

U završnom delu rada će biti opisana primena Sugenovog i Šokeovog integrala u medicini. Jedna od primena koja će biti prezentovana opisuje na koji način se ova dva integrala mogu primenti u proceni ukupne efikasnosti leka uzimajući u obzir njegov pozitivan uticaj na skup simptoma koji karakterišu posmatranu dijagnozu [2,9]. Takođe će biti opisana primena Sugenovog i Šokeovog integrala baziranih na λ-meri u endoskopskoj dijagnostici koja se zasniva na analizi snimaka. Naime, u ovim slučajevima se takođe polazi od podataka koje daju lekari na osnovu endoskopskog snimka želuca, a vrednost Sugenovog i Šokeovog integrala ima ulogu u razlikovanju čira na želucu od karcinoma na želucu [7].

Zahvaljujem se mentorki dr Mirjani Štrboji na svim sugestijama i stručnom usmeravanju pri izradi ovog rada. Takođe se zahvaljujem i članovima komisije, dr Arpadu Takačiju i dr Ivani Štajner-Papugi koji su svojim komentarima i sugestijama doprineli upotpunjavanju ovog rada. Veliku zahvalnost dugujem mojoj porodici, koji su tokom mog studiranja bili zu mene.

Feher Edina

1. σ-algebre i merljive funkcije

1.1. σ-algebra

Skupovne funkcije koje predstavljaju uopštenje mere u klasičnom smislu su definisane na određenim familijama skupova. U ovom delu rada ćemo uvesti familije skupova koje se nazivaju topologija, σ-algebra, algebra, σ-prsten i prsten [4]. Takođe, biće data definicija topološkog prostora i prostora sa σ-algebrom koji predstavljaju osnovne pojmove teorije mere.

Neka je $X \neq \emptyset$ i $P(X)$ partitivni skup. Topologija τ na skupu X je familija skupova $\tau \subseteq P(X)$ sa osobinama:

1. $\emptyset, X \in \tau$,
2. $O_1, O_2 \in \tau \Longrightarrow O_1 \cap O_2 \in \tau$,
3. $O_\alpha \in \tau, \alpha \in \Lambda \ \Longrightarrow \bigcup_{\alpha\in\Lambda} O_\alpha \in \tau$.

Skup X sa topologijom τ je topološki prostor, označavamo ga sa (X, τ).

Definicija 1.1.[4] σ-algebra na X je familija skupova $M \subseteq P(X)$ sa osobinama:

1. $X \in M$,
2. $A \in M \Longrightarrow X \setminus A \in M$,
3. $A \in M, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in M$.

Komplement skupa A, $X \setminus A$, označavamo i sa A^c kad god je iz konteksta jasno u odnosu na koji skup se uzima komplement.
Skup X sa σ-algebrom M nazivamo prostor sa σ-algebrom, označavamo ga sa (X, M). Elemente σ-algebre M nazivamo merljivim skupovima.

Lema 1.1 [4] Neka je (X, M) prostor sa σ-algebrom. Tada važi:

(i) $\emptyset \ \in M$.

(ii) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in M$, ako $A_i \in M, i = 1, \dots, n$.

(iii) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in M$, ako $A_i \in M, i = 1, \dots, n$.

(iv) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in M,$ ako $A_i \in M, i = 1, \dots, n$.

(v) $A \setminus B \in M$, ako $A, B \in M$.

Dokaz: Tvrđenje možemo pokazati pomoću definicije 1.1. Tvrđenje (i) sledi iz 1. i 2.

Tvrđenje (ii) sledi iz 3. sa $A_{n+j} = \emptyset, j = 1, \dots, n$.

Da bi smo dokazali (iii) trebaće nam De Morganova jednakost, koji glasi: važi da je $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i{}^c)^c$, i pritom je $A_i{}^c \in M, i \in \mathbb{N}$ (zbog 2). Sada $\bigcup_{i=1}^{n} A_i{}^c \in M$ (zbog 3), te je (zbog 2) $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i{}^c)^c \in M$.

Tvrđenje (iv) sledi iz (iii) stavljajući $A_{n+j} = X,\ j \in \mathbb{N}$.

Tvrđenje (v) sledi iz $A \setminus B = A \cap B^c$.

Definicija 1.2. [4] Familija skupova $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ je *algebra* ako važi:

1. $X \in \mathcal{A}$,
2. ako $A \in \mathcal{A}$, tada $A^c \in \mathcal{A}$,
3. unija konačno mnogo elemenata iz $\mathcal{A}$ je u $\mathcal{A}$.

Definicija 1.3. [4] Familija skupova *Pr* $\subseteq P(X)$ se naziva σ-*prsten* (*prsten*) ako važi:

1. $A, B \in Pr$, sledi $A \setminus B \in Pr$,
2. prebrojive (konačne) unije elementa iz *Pr* su u *Pr*.

Primetimo da $\emptyset$ i X ne moraju nužno pripadati prstenu *Pr*.

Definicija 1.4. [4] Neka za *Po* $\subseteq P(X)$ važi:

1. Konačni preseci elementa iz *Po* su u *Po*,
2. Ako su $A, B \in Po$ i $A \subseteq B$ tada postoje disjuntni skupovi $A_1, \dots, A_r \in Po$ tako da je $B \setminus A = \bigcup_{i=1}^{r} A_i$.

Tada se *Po* naziva *poluprsten.*

Svaka σ-algebra ima konačno mnogo ili neprebrojivo mnogo elementa, što znači da ne postoji σ-algebra sa prebrojivo mnogo elementa.

1.2. Merljive funkcije

Pored neprekidnih funkcija jedan od važnijih pojmova u teoriji mere je merljiva funkcija. Merljive funkcije za razliku od neprekidnih funkcija ne zahtevaju topološku strukturu već strukturu σ-algebri što ćemo videti u sledećoj definiciji [4].

Definicija 1.5. [4] Neka je (X, M) prostor sa σ-algebrom, (Y, τ) topološki prostor. Funkcija $f: (X, M) \to (Y, \tau)$, je *merljiva* ako $f^{-1}(\omega) \in M$ za svako $\omega \in \tau$.

Definicija 1.6. [4] Funkcija $f: (X, M) \to (Y, N)$ ((Y, N) je prostor sa σ-algebrom N), je merljiva ako $f^{-1}(O) \in M$ za svako $O \in N$.

Teorema 1.1. [4] Neka je (X, M) prostor sa σ-algebrom i neka su (Y, ν) i (Z, τ) topološki prostori. Ako je $f: (X, M) \to (Y, \nu)$ merljiva, $g: (Y, \nu) \to (Z, \tau)$ neprekidna, tada je $g \circ f$ merljiva funkcija.

Dokaz: Neka je $O \in \tau$. Važi $(g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(g^{-1}(O))$. Iz neprekidnosti funkcije g sledi $g^{-1}(O) \in \nu$, te iz merljivosti f sledi $f^{-1}(g^{-1}(O)) \in M$.

Važe sledeće relacije:

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right),$$

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right].$$

Ako funkcija f uzima realne vrednosti, onda je f realna funkcija. Ako f može uzeti vrednosti -∞ ili $+\infty$, tada je f proširena realna funkcija. Interesantno je razmatrati i funkcije koje uzimaju vrednosti iz skupa $\mathbb{C}$, odnosno kompleksne funkcije.

Sledeći rezultat olakšava proveru merljivosti konkretne realne ili proširene realne funkcije.

Lema 1.2. [4] Neka je (X, M) prostor sa σ-algebrom i $f: X \to \mathbb{R}$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) f je merljiva.

(ii) Za svako $a \in \mathbb{R}$ je $\{x \in X: f(x) > a\} \in M$.

(iii) Za svako $a \in \mathbb{R}$ je $\{x \in X: f(x) \geq a\} \in M$.

(iv) Za svako $a \in \mathbb{R}$ je $\{x \in X: f(x) < a\} \in M$.

(v) Za svako $a \in \mathbb{R}$ je $\{x \in X: f(x) \leq a\} \in M$.

Dokaz: Skupovi dati u tvrđenjima (ii) i (v) su međusobno kompementarni te su zato i ta dva tvrđenja ekvivalentna. Analogno se može zaključiti i da su tvrđenja (iii) i (iv) ekvivalentna.

Dokažimo sada ekvivalentnost (ii) i (iii). Neka važi (ii). Tada je

$$\{x \in X: f(x) \geq a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{x \in X: f(x) > a - \frac{1}{n}\right\} \in M.$$

Slično, ako pretpostavimo da važi (iii), tada (ii) sledi na osnovu osobina σ-algebre i relacije

$$\{x \in X: f(x) > a\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{x \in X: f(x) \geq a + \frac{1}{n}\right\} \in M.$$

Dakle, uslovi (ii)-(v) su međusobno ekvivalentni.

Dokažimo sada da je (i) ekvivalentno sa (ii). Pretpostavimo da je funkcija f merljiva. Tada je

$$\{x \in X: f(x) > a\} = f^{-1}\big((a, +\infty)\big) \in M,$$

jer je $(a, +\infty)$ otvoren u $\mathbb{R}$. Obrnuto, neka su svi skupovi oblika kao u (ii) merljivi. Tada, na osnovu ekvivalentnisti uslova, merljivi su i skupovi oblika kao u (ii)-(v). Kako se svaki otvoren skup u $\mathbb{R}$ može prikazati kao najviše prebrojiva unija otvorenih intervala $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty)$, a čije vrednosti slike sve pripadaju M, sledi da je f merljiva.

Teorema 1.2. [4] Neka su $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni skupovi, (X, M) prostor sa σ-algebrom i neka su $u: X \to \Omega_1$, $v: X \to \Omega_2$, merljive funkcije. Neka je $\phi: \Omega_1 \times$

$\Omega_2 = \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija. Tada je preslikavanje $F: X \to \mathbb{C}, x \to F(x) = \phi\big(u(x), v(x)\big)$ merljivo.

Dokaz: Neka je $f: X \to \Omega$ data sa $f(x) = \big(u(x), v(x)\big)$. Tada važi $F = \phi \circ f$. Treba da dokažemo da je f merljiva. Na osnovu Teoreme 1.1 sledi da je F merljiva funkcija. Uzećemo da je $\Pi = (\mathrm{a}, \mathrm{b}) \times (\mathrm{c}, \mathrm{d})$ proizvoljan (otvoreni) pravougaonik u Ω. Važi $x \in f^{-1}(\Pi)$ ako i samo ako $\big(u(x), v(x)\big) \in (\mathrm{a}, \mathrm{b}) \times (\mathrm{c}, \mathrm{d})$ što je ekvivalentno sa $x \in u^{-1}((a,b))$ i $x \in v^{-1}((c,d))$. Sledi $f^{-1}(\Pi) = u^{-1}((a,b)) \cap v^{-1}((c,d) \in M$. u i v su merljive pa je $u^{-1}((a,b)) \in M$ i $v^{-1}((c,d)) \in M$.

Svaki otvoren skup u $\mathbb{R}^2$ je prebrojiva unija otvorenih pravougaonika, to važi za svaki otvoren skup u Ω. Dakle za otvoren skup O u Ω važi $O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Pi_n$, te je

$$f^{-1}(O) = f^{-1}(\textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Pi_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(\Pi_n) \in M.$$

1.3.Borelova σ-algebra

Pre nego što uvedemo pojmove Borelove σ-algebre i Borelovog skupa, navešćemo tvrđenje koje je potrebno da bi ovi pojmovi bili dobro definisani.

Teorema 1.3. [4] Neka je $\varepsilon \subseteq P(X)$. Postoji najmanja σ-algebra M za koju važi $M \supseteq \varepsilon$. (To znači da ako je M_1 proizvoljna σ-algebra koja sadrži ε, tada sledi da M_1 sadrži M.)

Ova σ-algebra se naziva σ-algebra generisana familijom skupova ε i označava se sa $M = \sigma[\varepsilon]$.

Dokaz: Neka je $\mathcal{M}$ familija svih σ-algebri koje sadrže ε. Stavimo $M \coloneqq \bigcap_{\widetilde{M}\in\mathcal{M}} \widetilde{M}$. Familija $\mathcal{M}$ nije prazna ($\mathcal{M} \neq 0$) jer je $P(X)$ σ-algebra. Pokažimo da je M σ-algebra.

1) Kako $X \in \widetilde{M}$ za svako $\widetilde{M} \in \mathcal{M}$, sledi $X \in M$.

2) Pokažimo da važi $A \in M \Longrightarrow A^c \in M$. Neka $A \in M$. Kako je $\widetilde{M}$ σ-algebra to je $A^c \in M$ za svako $\widetilde{M} \in \mathcal{M}$, te je $A^c \in \bigcap_{\widetilde{M}\in\mathcal{M}} \widetilde{M} = M$.

3) Ako $A_i \in M, i \in \mathbb{N}$, pokažimo da je tada $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in M$. Za svako $\widetilde{M} \in \mathcal{M}$ važi $A_i \in \widetilde{M},\ i \in \mathbb{N}$, te sledi $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \widetilde{M}$ odakle

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \bigcap_{\widetilde{M}\in\mathcal{M}} \widetilde{M} = M \; .$$

Definicija 1.7. [4] *Borelova* σ-algebra u topološkom prostoru (X,τ) je najmanja σ-algebra koja sadrži τ. Označava se sa $\mathcal{B}_X$, ili $\mathcal{B}_\tau$ ili samo sa $\mathcal{B}$ ako je jasno koji topološki prostor se posmatra. Elemente Borelove σ-algebre nazivamo Borelovim skupovima.

Propozicija 1.1. [4] Borelova σ-algebra $\mathcal{B}_R$ je generisana:

a) Intervalima $(a,b), a < b, a, b \in \mathbb{R}$.
b) Intervalima $[a,b], a < b, a, b \in \mathbb{R}$.
c) Intervalima $(a,b], a < b, a, b \in \mathbb{R}$.
d) Intervalima $[a,b), a < b, a, b \in \mathbb{R}$.
e) Intervalima $(a,\infty),\ a \in \mathbb{R}$.
f) Intervalima $(-\infty,a), a \in \mathbb{R}$.
g) Intervalima $[a,\infty),\ a \in \mathbb{R}$.
h) Intervalima $(-\infty,a], a \in \mathbb{R}$.

Dokaz: Svaki otvoren skup u $\mathbb{R}$ je prebrojiva unija otvorenih intervala, pa je dovoljno pokazati da σ-algebra koju generišu intervali iz navedene familije sadrži otvorene intervale. To se jednostavno proverava. Dokažimo na primer tvrđenje pod b). Označimo sa $\tilde{B}_R$ σ-algebru koju generišu zatvoreni intervali. Kako je $(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right] \in \tilde{B}_R$, za proizvoljne $a < b, a, b \in \mathbb{R}$, sledi da je $\mathcal{B}_R \subseteq \tilde{B}_R$. Iz činjenice da je $[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}\right) \in \tilde{B}_R$, za proizvoljne $a < b,\ a, b \in \mathbb{R}$, sledi da je $\tilde{B}_R \subseteq \mathcal{B}_R$. Dakle, $\tilde{B}_R = \mathcal{B}_R$.

U sledećoj teoremi videćemo koja je veza između neprekidnosti funkcije i merljivosti funkcije na topološkom prostoru.

Teorema 1.4. [4] Ako je funkcija $f\colon (X,\tau) \to (Y,\nu)$ neprekidna, tada je f merljiva u odnosu na $(X,\mathcal{B}_R)$.

Dokaz: Za svako $\omega \in \nu$ važi $f^{-1}(\omega) \in \tau$ te sledi da je $f^{-1}(\omega) \in \mathcal{B}_R$.

U opštem slučaju teorema obrnuto ne važi, tj. iz merljivosti funkcije ne sledi neprekidnost, što sledi iz definicije merljivog skupa.

Sledeća teorema pokazuje kako se vrši tzv. „guranje napred“ σ-algebre sa domena na kodomen funkcije [14].

Teorema 1.5. [4] Neka je (X, M) prostor sa σ-algebrom, (Y, v) topološki prostor i $f: X \to Y$. Ako je $f_* M \coloneqq \{V \subseteq Y; f^{-1}(V) \in M\}$,

tada važi:

a) $f_* M$ je σ-algebra na Y.

b) Funkcija f je merljiva ako i samo ako $f_* M$ sadrži $\mathcal{B}_Y$, gde je $\mathcal{B}_Y$ Borelova σ-algebra koju generiše topologija v.

c) Neka je $Y = \overline{\mathbb{R}}$. Tada je f merljiva ako i samo ako za sve skupove oblika $(a, \infty] = (a, \infty) \cup \{\infty\}$ važi $(a, \infty] \in f_* M$.

Dokaz:

a) Pokažimo da je $f_* M$ σ-algebra na Y. Važi $f^{-1}(Y) = X \in M,$ te je $Y \in f_* M.$ Neka je $A \in f_* M,$ treba pokazati da je $Y \setminus A \in f_* M.$ Kako $f^{-1}(A) \in M,\ i \in \mathbb{N},$ sledi

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A) \text{ te je } f^{-1}(Y \setminus A) \in M \text{ i } Y \setminus A \in f_* M.$$

Neka $A_i \in f_* M,$ treba pokazati da je $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in f_* M.$ Kako $f^{-1}(A_i) \in M, i \in \mathbb{N},$ sledi

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i) \in M, \text{ te zato } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in f_* M.$$

Dakle, $f_* M$ je σ-algebra na Y.

b) Ako $f_* M \supseteq \mathcal{B}_Y$, sledi $f_* M \supseteq v$, te je ma osnovu definicije f merljiva funkcija.

Neka je f merljiva. Tada za svako $\omega \in v$ važi $f^{-1}(\omega) \in M$, te je $\omega \in f_* M$. Sledi $f_* M$ sadži sve otvorene skupove topologije v. Odatle sledi da $f_* M$ sadrži $\mathcal{B}_Y$, jer je $\mathcal{B}_Y$ najmanja σ-algebra koja sadrži v, te i u $f_* M$.

c) Neka je f merljiva funkcija. Iz činjenice da je $(a, \infty]$ otvoren skup u $\widetilde{\mathbb{R}}$ sledi da $f^{-1}((a, \infty]) \in M$ tj. $(a, \infty] \in f_* M$.

Obratno: neka važi da su skupovi oblika$(a, \infty] \in f_* M$ i dokažimo da je f merljiva. Važi

$$\left[-\infty, b\right) = \cup_{n=1}^{\infty} \left[-\infty, b - \frac{1}{n}\right] = \cup_{n=1}^{\infty} \left(b - \frac{1}{n}, -\infty\right]^{c}.$$

Kako su intervali oblika $(a, \infty] \in f_*M$, sledi da $(a, \infty]^c \in f_*M$, jer je f_*M δ-algebra. Sledi $[-\infty, b) \in f_*M$, za sve $b \in \mathbb{R}$.

Za svako $a < b, a, b \in \mathbb{R}$, važi $(a, b) = [-\infty, b) \cap (a, \infty] \in f_*M$ jer je presek dva elementa iz σ-algebre opet u σ-algebri. Kako je svaki O otvoren u $[-\infty, \infty]$ prebrojiva unija (disjunktnih) intervala, sledi da su su u f_*M svi otvoreni skupovi iz proširene prave $[-\infty, \infty]$, tada $f^{-1}(O) \in M$, te sledi da je f merljiva.

2. Osnovne ideje uopštene teorije mere

2.1. Uopštena klasična mera

Osnovna karakteristika klasične mere je uslov prebrojive aditivnosti. Ako ovaj uslov zamenimo sa skupom uslova, koji su zajedno slabiji od prebrojivne aditivnosti, dobijamo klasu skupovnih funkcija koja je mnogo opštija od pojma klasične mere. U zavisnosti koje uslove zadovoljavaju ove skupovne funkcije one čine različite vrste skupovnih funkcija koje predstavljaju uopštenje klasične mere.

U uopštenoj klasičnoj teoriji mere pojam „mere“ je znatno širi od pojma mere u klasičnoj teoriji mere [12]. Uopštena teorija mere proučava raznovrsne monotone skupovne funkcije, tj. mere, uključujući i klasične mere, pa kako bismo razlikovali ove mere u nastavku biće uz pojam mera dodat odgovarajući pridev. Na primer, kad želimo da uputimo na meru iz klasične teorije mere, koristimo termin „klasična mera“ ili „aditivna mera“.

Navešćemo prvo oznake koje ćemo koristiti u nastavku rada, a koje su preuzete iz [12]. Neka je X neprazan skup, M neprazna familija podskupova od X, i $\mu\colon M \to [0,\infty]$ je nenegativna skupovna funkcija sa vrednostima u proširenom skupu realnih brojeva definisana na M. M označava klasu podskupova X, kao što je na primer polugrupa, grupa, algebra, σ-algebra, i tako dalje. Takođe, sa μ u ovom radu će biti obeležena nenegativna skupovna funkcija sa vrednostima u proširenom skupu realnih brojeva koja poseduje još neku osobinu kao što je monotonost, neprekidnost, poluneprekidnost, i slično. Koristićemo da je:

$$\sup_{x\in\emptyset}\{x | x \in [0,\infty]\} = 0,$$

$$\inf_{x\in\emptyset}\{x | x \in [0,1]\} = 1,$$

$$0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0,$$

$$\frac{1}{\infty} = 0,$$

$$\infty - \infty = 0,$$

$$\sum_{i\in\emptyset} a_i = 0,$$

gde je $\{a_i\}$ realan niz.

U uopštenoj teoriji mere skupovna funkcija koja predstavlja najopštiju klasu generalizovanih klasičnih mera je definisana na sledeći način:

Definicija 2.1. [12] Skupovna funkcija $\mu: M \rightarrow [0, \infty]$ je uopštena mera na (X, M), ako je $\mu(\emptyset) = 0$ kada $\emptyset \in M$**.**

Iz navedene definicije vidimo da su uopštene mere na (X, M) nenegativne skupovne funkcije sa vrednostima u proširenom skupu realnih brojeva definisane na M i čija je vrednost na praznom skupu nula.

U ovom radu ćemo posmatrati monotonu familiju skupova, polugrupu, grupu, algebru, σ-algebru, σ- prsten, partitivni skup od X kao familija M na kojoj je definisana μ. Sa (X, F) ćemo označiti merljiv prostor, gde je F σ- prsten (ili σ-algebra). Trojku (X, F, μ) ćemo nazvati *uopšteni merljiv prostor*, gde je μ uopštena mera.

U sledećim primerima su date uopštene mere na određenim prostorima:

Primer 2.1. [12] Neka je dat merljiv prostor (X, F) i funkcija μ data sa $\mu(E) = 1$ za $E \in F, E \neq \emptyset$ i $\mu(A) = 0$ za svaki skup $A \in F$ koji se razlikuje od E je uopštena mera.

Primer 2.2. [12] Neka je $X = \{a, b, c\}$ i $M = P(X)$. Funkcija μ definisana na sledeći način:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 \text{ , kada } je\ A = \emptyset \text{ ili } |A| = 2 \\ 0{,}5 \text{ , kada } je\ |A| = 1 \\ 1 \text{ , kada } je\ A = X \end{cases}$$

je uopštena mera na $\big(X, P(X)\big)$.

2.2. Monotone skupovne funkcije

U ovom delu rada ćemo uvoditi i ipitati širu familiju mere, odnosno uopštene mere koje su monotone. Monotone mere, koje se često u literaturi nazivaju i fazi mere, definišemo na sledeći način:

Definicija 2.2. [12] Skupovna funkcija $\mu: M \rightarrow [0, \infty]$ se naziva *monotona mera* na (X, M), ako zadovoljava sledeće uslove:

(MM1) $\mu(\emptyset) = 0$ ako $\emptyset \in M$

(MM2) $E \in M, F \in M$ i $E \subset F$ sledi da $\mu(E) \le \mu(F)$ (monotonost).

Iako je klasična mera monotona skupovna funkcija, pojam monotone mere u smislu definicije 2.2. se često koristi u literaturi. Dakle, u ovom radu će se pod pojmom monotone mere podrazumevati skupovna funkcija koja zadovoljava uslove (MM1) i (MM2). Klasična mera je specijalan slučaj monotone mere (u smislu definicije 2.2).

Primer 2.3

Neka je $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ i $M = P(X)$. Skupovna funkcija μ definisana na sledeći način:

$$\mu(\emptyset) = 0,$$
$$\mu(\{x_1\}) = \mu(\{x_2\}) = \mu(\{x_3\}) = 1,$$
$$\mu(\{x_1, x_2\}) = 1, \mu(\{x_1, x_3\}) = \mu(\{x_2, x_3\}) = 2,$$
$$\mu(X) = 3$$

je monotona mera na $\big(X, P(X)\big)$.

U nekim primenama potrebno je da monotone mere zadovoljava jedan ili oba sledeća uslova:

(KD) $\{E_n\} \subset M, E_1 \subset E_2 \subset \cdots$, i $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in M$ implicira

$$\lim_n \mu(E_n) = \mu(\textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \text{ (neprekidnost sa donje strane)}$$

(KG) $\{E_n\} \subset M, E_1 \supset E_2 \supset \cdots, \mu(E_1) < \infty$ i $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ implicira

$$\lim_n \mu(E_n) = \mu(\textstyle\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) \text{ (neprekidnost sa gornje strane).}$$

Monotone mere koje zadovoljavaju uslov (KD) se zovu poluneprekidne *sa donje strane*, a koje zadovoljavaju uslov (KG) se zovu poluneprekidne *sa gornje strane*. Monotone mere koje zadovoljavaju oba uslova se zovu *neprekidnim monotonim merama.*

Za monotone mere μ na (X, M)kažemo da su *normirane* ako $X \in M$ i $\mu(X) = 1$.

U nastavku slede dva primera neprekidnih monotonih mera.

Primer 2.4. [12] Neka je $X = \{1,2, \dots, n\}$ i $M = P(X)$. Ako

$$\mu(E) = \left(\frac{|E|}{n}\right)^2,$$

gde je $|E|$ broj elemenata iz skupa X koji pripadaju skupu E, tada je μ normirana monotona mera. Pošto je prostor X konačan, neprekidnost (sa donje i sa gornje strane) je ispunjen.

Primer 2.5.[12] Neka je $X = \{1,2,\ldots\}$ i $M = P(X)$. Ako

$$\mu(E) = |E| \sum_{i \in E} 2^{-i} \; \forall E \in M$$

tada je μ neprekidna montona mera. U stvari, μ zadovoljava uslove (MM1) i (MM2).

U sledećoj lemi se navodi kada je zbir i proizvod dve skupovne funkcije neprekidna ili poluneprekidna skupovna funkcija.

Lema 2.1.[12] Ako su μ_1 i μ_2 neprekidne, nenegativne, skupovne funkcije sa vrednostima u proširenom skupu realnih brojeva na (X, M), i ako su $\mu_1 + \mu_2$ i $\mu_1 \times \mu_2$ definisane na sledeći način:

$$(\mu_1 + \mu_2)(E) = \mu_1(E) + \mu_2(E)$$

$$(\mu_1 \times \mu_2)(E) = \mu_1(E) \times \mu_2(E)$$

za svako $E \in M$, odnosno $\mu_1 + \mu_2$ i $\mu_1 \times \mu_2$ su neprekidne. Ako su μ_1 i μ_2 neprekidne monotone mere (ili poluneprekidne monotone mere), tada su i $\mu_1 + \mu_2$ i $\mu_1 \times \mu_2$ neprekidne–monotone mere (ili poluneprekidne monotone mere).

Primer 2.6.[12] Neka je $f: X \to [0, \infty]$ neprekidna funkcija gde je $X = (-\infty, \infty)$. Ako je

$$\mu(E) = \sup_{i \in E} f(x) \text{ za svaki skup } E \in P(X),$$

tada μ zadovoljava uslove (MM1) , (MM2) i (KD) ali nije neprekidna sa gornje strane, pa je μ poluneprekidna monotona mera sa donje strane na $(X, P(X))$.

2.3. Superaditivne i subaditivne mere

Monotone mere možemo podeliti u četri grupe:

(i) aditivne mere
(ii) superaditivne mere
(iii) subaditivne mere i
(iv) monotone mere, koje ne pripadaju ni jednoj od navedene tri grupe. [12]

Iz aditivnosti i nenegativnosti sledi monotonost, ali u opštem slučaju obrnuto ne važi.

Superaditivne i subaditivne mere su definisane na sledeći način:

Definicija 2.3. [12]Monotona mera μ na (X, M) je superaditivna, ako je

$$\mu(A \cup B) \geq \mu(A) + \mu(B)$$

za svaki skup $A \in M$ i $B \in M$ za koji je $A \cup B \in M$, i $A \cap B = \emptyset$.

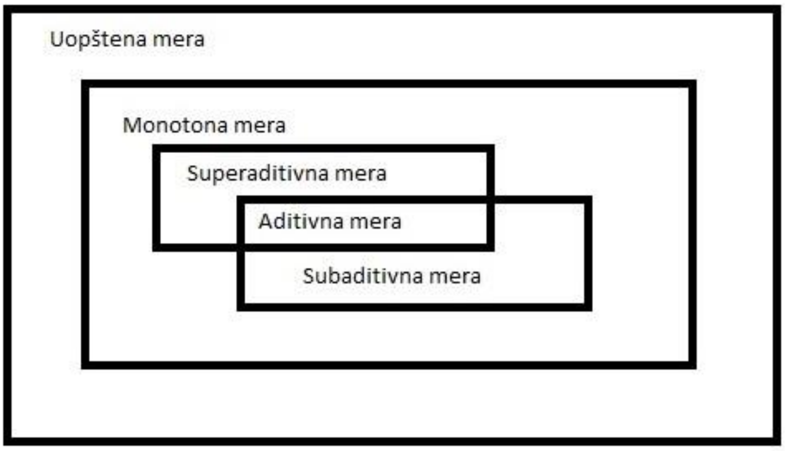
Definicija 2.4. [12]Monotona mera μ na (X, M) je subaditivna, ako

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$$

kada $A \cup B \in M, A \in M,$ i $B \in M$.

Ako se neki problem formuliše pomoću skupova i vrednosti monotone mere nad tim skupovima, superaditivnu meru možemo koristiti da bi smo izrazili sinergiju (sadejstvo) između skupova, dok subaditivnu meru možemo koristiti da bi smo izrazili inkompatibilnost (nesaglasnost) između skupova, što sledi iz činjenice da je sa jedne strane nejednakosti imamo meru unije dva skupa a sa druge strane zbir mera ta dva skupa. Zbog osobine aditivnosti ne možemo formulisati ovakve probleme pomoću klasične mere.

Veza imeđu različitih familija mera o kojima je reč u drugom poglavlju je pokazana na slici 2.1.



Slika 2.1. [12] Veza između različitih familija mera

Vidimo da je aditivna mera najuža familija mere, koju dobijamo u preseku skupa subaditivnih mera i skupa superaditivnih mera. Ove mere su monotone, a najšira familija mere je uopštena mera u smislu definicije 2.1.

3. Specijalni slučajevi uopštene mere

Pored definicije mere u klasičnom smislu i λ-mere u ovom poglavlju biće dat pregled osobina ovih skupovnih funkcija. Veza između ove dve klase monotonih mera je ta što je za $\lambda = 0$, λ-mera u stvari klasična mera.

3.1. Klasična mera

Do sada smo uveli pojam uopštene klasične mere, monotone mere superaditivne i subaditivne mere, a sad ćemo navesti definiciju klasične mere koju ćemo kasnije koristiti.

Neka je (X, M) prostor sa σ-algebrom i $\mu: M \to [0, \infty]$ skupovna funkcija.

Definicija 3.1. [12] μ se zove *mera* na M ako zadovoljava sledeće uslove:

(KM1) $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_n)$ za svaki niz disjunktnih skupova $\{E_n\}$ koji pripadaju M,
(KM2) postoji $E \in M$ tako da je $\mu(E) < \infty$.

Za skupovnu funkciju koja zadovoljava osobinu (KM1) kažemo da je prebrojivo aditivna ili σ-aditivna.

Primer 3.1. [12] Ako je $\mu(E) = 0, \forall E \in M$, tada je μ mera na M.

Definicija 3.2. [12] Neka je μ mera na M. Za skup $E \in M$ se kaže da ima *konačnu meru* ako $\mu(E) < \infty$. $E \in M$ ima σ-*konačnu meru* ako postoji niz $\{E_n\}$ skupa M tako da

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \text{ i } \mu(E_n) < \infty, n = 1,2, \ldots.$$

μ je konačna (ili σ-konačna) na M ako $\mu(E)$ konačno (ili σ-konačno) za svako $E \in M$.

Može se pokazati da je (klasična) mera monotona mera, tj. važi sledeća teorema.

Teorema 3.1. [12]Ako je μ *mera* na M tada važi:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$;
(2) $E \in M, F \in M$ i $E \subset F$ sledi da $\mu(E) \leq \mu(F)$.

Šta više, klasična mera je neprekidna monotona mera, što znači da zadovoljava uslove (KD) i (KG).

Dokaz:

(1) Neka je $\mu(A) < \infty$. Jasno, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ gde $A_1 = A, A_i = \emptyset, i \geq 2$. Kako je μ σ-aditivna, važi

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu(A) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) \dots < \infty.$$

Sledi $\mu(\emptyset) = 0$.

(2) Važi

$$B = A \cup (B \setminus A) \Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

Šta više, klasična mera je neprekidna monotona mera, što znači da zadovoljava uslove (KD) i (KG) [4].

3.2. λ-mera

U ovom delu rada ćemo uvesti generalizaciju klasičnih mera preko tzv. λ-mera [12].

Definicija 3.3. [12] Monotona mera μ zadovoljava λ-pravilo (na M) ako postoji

$$\lambda \in \left(-\frac{1}{\sup\mu}, \infty\right) \cup \{0\},$$

gde je $\sup\mu = \sup_{E \in M} \mu(E)$, tako da

$$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F) + \lambda\, \mu(E)\mu(F),$$

kad

$$E \in M, F \in M, E \cup F \in M \text{ i } E \cap F = \emptyset.$$

μ zadovoljava konačno λ-pravilo (na M) ako postoji gore navedeno λ tako da

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\left\{\prod_{i=1}^{\infty}[1+\lambda\cdot\mu(E_i)] - 1\right\}, \text{ako } \lambda \neq 0 \\ \sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i), \text{ako } \lambda = 0 \end{cases}$$

za bilo koju disjunktnu klasu $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ u skupu M, čija unija pripada skupu M.

μ zadovoljava σ-λ-pravilo (na M) ako postoji gore navedeno λ tako da

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\left\{\prod_{i=1}^{\infty}[1+\lambda\cdot\mu(E_i)] - 1\right\}, \text{ako } \lambda \neq 0 \\ \sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i), \text{ako } \lambda = 0 \end{cases}$$

za bilo koji disjunktan niz $\{E_n\}$ u skupu M, čija unija pripada skupu M.

Kada je $\lambda = 0$, λ-pravilo, konačno λ-pravilo i σ-λ-pravilo odgovara redom osobinama aditivnosti, konačnoj aditivnosti i σ-aditivnosti.

Sledeća teorema nam daje vezu između λ-pravila i konačnog λ-pravila.

Teorema 3.1. [12] Ako je $M = \mathbb{R}$ prsten i μ zadovoljava λ-pravilo, tada μ zadovoljava konačno λ-pravilo.

Dokaz: Tvrđenje je očigledno kada je $\lambda = 0$.

Neka je $\lambda \neq 0$ i neka je $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ disjunktna familija skupova u $\mathbb{R}$. Tvrđenje pokazujemo matematičkom indukcijom:

$$\mu(\cup_{i=1}^{n} E_i) = \tfrac{1}{\lambda}\{\prod_{i=1}^{\infty}[1+\lambda\cdot\mu(E_i)] - 1\}. \tag{3.1}$$

Za $n = 2$ tvrđenje je tačno, što direktno sledi iz definicije. Pretpostavimo da (3.1) važi za $n = k - 1$.

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i \cup E_k\right)$$

$$= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right)[1 + \lambda \cdot \mu(E_i)] + \mu(E_k)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left\{\prod_{i=1}^{k-1}[1 + \lambda \cdot \mu(E_i)] - 1\right\}[1 + \lambda \cdot \mu(E_i)] + \mu(E_k)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left\{\prod_{i=1}^{k}[1 + \lambda \cdot \mu(E_i)] - [1 + \lambda \cdot \mu(E_i)]\right\} + \mu(E_k)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left\{\prod_{i=1}^{k}[1 + \lambda \cdot \mu(E_i)] - [1 + \lambda \cdot \mu(E_i)] + \lambda \cdot \mu(E_k)\right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left\{\prod_{i=1}^{k}[1 + \lambda \cdot \mu(E_i)] - 1\right\}.$$

Time smo pokazali da tvrđenje važi za $n = k$.

Sledi primer u kome je data skupovna funkcija μ definisana na konačnom prstenu i koja zadovoljava λ-pravilo.

Primer 3.2. [12] Neka je $X = \{a, b\}$ i $M = P(X)$. Ako

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & E = \emptyset \\ 0.2, & E = \{a\} \\ 0.4, & E = \{b\} \\ 1, & E = X \end{cases}$$

tada μ zadovoljava λ-pravilo, gde je $\lambda = 5$. Kako je M konačan prsten, μ zadovoljava konačan λ-pravilo i σ-λ-pravilo .

Skupovne funkcije koje zadovoljavaju σ-λ-pravilo čine posebnu klasu monotonih mera.

Definicija 3.4. [12] μ se naziva *λ-mera* na M ako μ zadovoljava σ-λ-pravilo i postoji bar jedan skup $E \in M$ tako da $\mu(E) < \infty$.

λ-mera se označava i sa g_λ. Kada je M σ-algebra i $g_\lambda(\mathrm{X}) = 1$, tada se λ-mera g_λ naziva *Sugenova mera.* Funkcija data u primeru 3.2. je Sugenova mera.

Teorema 3.2. [12] Ako je g_λ λ-mera na familiji M koja sadrži prazan skup $\emptyset$, tada $g_\lambda(\emptyset) = 0$, i g_λ zadovoljava konačan λ-uslov.

Dokaz: Iz definicije 3.4. znamo da postoji $E \in M$ tako da $\mu(E) < \infty$. Kad $\lambda = 0$, g_λ je klasična mera i važi $g_\lambda(\emptyset) = 0$. Inače $\lambda \neq 0$. Neka je $\{E_1, E_2, E_3, ...\}$, gde je $E_2 = E_3 = \cdots = \emptyset$ je disjunktan niz skupova u M čije unije su u E, imamo da je

$$g_\lambda(E) = \frac{1}{\lambda}\left\{\prod_{i=2}^{\infty}[1 + \lambda \cdot g_\lambda(E_i)] \cdot [1 + \lambda \cdot g_\lambda(E)] - 1\right\},$$

gde je $E_i = \emptyset$, $i = 2,3, ...$ Odnosno,

$$1 + \lambda \cdot g_\lambda(E) = [1 + \lambda \cdot g_\lambda(E)] \cdot \left\{\prod_{i=2}^{\infty}[1 + \lambda \cdot g_\lambda(E_i)]\right\}.$$

Kako je $\lambda \in \left(-\frac{1}{\sup g_\lambda}, \infty\right)$ i $g_\lambda(E) < \infty$, znamo da je

$0 < 1 + \lambda \cdot g_\lambda(E) < \infty.$

Imamo da je

$$\prod_{i=2}^{\infty}[1 + \lambda \cdot g_\lambda(E_i)] = 1$$

prema tome

$$1 + \lambda \cdot g_\lambda(\emptyset) = 1.$$

Stoga imamo da je

$$g_\lambda(\emptyset) = 0.$$

Sada ćemo videti kada je λ-mera monotona.

Teorema 3.3. [12] Ako je g_λ λ-mera na poluprstenu P, tada je g_λ monotona.

Dokaz: Neka je $\lambda \neq 0$ i neka je $E \in P, F \in P$ i $E \subset F$. P je poluprsten, pa je $F \setminus E = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, gde je $\{D_i\}$ disjunktna familija skupova S. Imamo da je

$$\frac{1}{\lambda}\left\{\prod_{i=1}^{k}[1 + \lambda \cdot g_\lambda(D_1)] - 1\right\} \geq 0.$$

Ova nejednačina važi i za $\lambda > 0$ i za $\lambda < 0$. Ako koristimo teoremu 3.2., g_λ zadovoljava konačan λ-uslov, pa imamo da je

$$g_\lambda(F) = g_\lambda(E \cup D_1 \cup \ldots \cup D_n)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left\{\prod_{i=2}^{\infty}[1 + \lambda \cdot g_\lambda(D_1)] \cdot [1 + \lambda \cdot g_\lambda(E)] - 1\right\}$$

$$= g_\lambda(E) + \frac{1}{\lambda}\left\{\prod_{i=2}^{\infty}[1 + \lambda \cdot g_\lambda(D_1)] - 1\right\} \cdot [1 + \lambda \cdot g_\lambda(E)] \geq g_\lambda(E).$$

Može se dokazati da je svaka λ-mera neprekidna na poluprstenu. Iz teoreme 3.2. i 3.3. vidimo da kada je λ-mera neprekidna, tada je λ-mera na poluprstenu je monotona mera.

Sledeća teorema nam daje uslove kada je g_λ subaditivna i superaditivna λ-mera.

Teorema 3.4. [12] Neka je g_λ λ-mera na poluprstenu P. Ako je $\lambda < 0$, tada je g_λ subaditivna, ako je $\lambda > 0$, tada je g_λ superaditivna, a ako je $\lambda = 0$, tada je g_λ aditivna.

Dokaz: Iz teoreme 3.2. i 3.3. sledi da μ zadovoljava λ-pravilo i monotona je. Dokaz teoreme sledi iz definicije 3.3.

Teorema 3.5. [12] Neka je g_λ λ-mera na prstenu R. Tada, za svako $E \in R$, i $F \in R$

(1) $\quad g_\lambda(E \setminus F) = \frac{g_\lambda(\mathrm{E}) - g_\lambda(\mathrm{E} \cap \mathrm{F})}{1 + \lambda \cdot g_\lambda(\mathrm{E} \cap \mathrm{F})}$

(2) $\quad g_\lambda(E \cup F) = \frac{g_\lambda(\mathrm{E}) + g_\lambda(\mathrm{F}) - g_\lambda(\mathrm{E} \cap \mathrm{F}) - \lambda \cdot g_\lambda(\mathrm{E}) \cdot g_\lambda(\mathrm{F})}{1 + \lambda \cdot g_\lambda(\mathrm{E} \cap \mathrm{F})}.$

Ako je R algebra, i ako je g_λ normirana, tada važi:

(3) $\quad g_\lambda(\bar{E}) = \frac{1 - g_\lambda(\mathrm{E})}{1 + \lambda \cdot g_\lambda(\mathrm{E})}.$

Dokaz: Iz

$$g_\lambda(\mathrm{E}) = g_\lambda\big((\mathrm{E} \cap \mathrm{F}) \cup (E \setminus F)\big)$$
$$= g_\lambda(\mathrm{E} \cap \mathrm{F}) + g_\lambda(E \setminus F)[1 + \lambda \cdot g_\lambda(\mathrm{E} \cap \mathrm{F})]$$

dobijemo (1). Za (2)

$$g_\lambda(E \cup F) = g_\lambda(E \cup [F \setminus (E \cap F)])$$
$$= g_\lambda(\mathrm{E}) + g_\lambda\big(F \setminus (E \cap F)\big)[1 + \lambda \cdot g_\lambda(\mathrm{E} \cap \mathrm{F})]$$

$$= g_\lambda\,(\mathrm{E}) + \frac{g_\lambda\,(\mathrm{F}) - g_\lambda\,(\mathrm{E}\cap\mathrm{F})}{1+\lambda\cdot g_\lambda\,(\mathrm{E}\cap\mathrm{F})}[1+\lambda\cdot g_\lambda\,(\mathrm{E}\cap\mathrm{F})]$$

$$= \frac{g_\lambda\,(\mathrm{E}) + g_\lambda\,(\mathrm{F}) - g_\lambda\,(\mathrm{E}\cap\mathrm{F}) - \lambda\cdot g_\lambda\,(\mathrm{E})\cdot g_\lambda\,(\mathrm{F})}{1+\lambda\cdot g_\lambda\,(\mathrm{E}\cap\mathrm{F})}.$$

(3) je direktno sledi iz (1) i od toga da je g_λ normiran.

Konstruisanje λ-mere na poluprstenu (prstenu, algebri, σ-prstenu, σ-algebru) je značajan problem. Neka je $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ konačan skup, M se sastoji od skupa X i svih jednoelementnih podskupova skupa X. μ je definisana na M tako da važi $\mu(\{x_i\}) < \mu(X) < \infty$ za $i = 1,2,\dots,n$ i postoje najmanje dve tačke x_{i1}, x_{i2} koje zadovoljavaju $\mu\big(\{x_{ij}\}\big) > 0,\ j = 1,2$, tako da skup funkcija μ uvek bude λ-mera na M za neko λ. Ako je $\mu(X) = \sum_{i=1}^{n} \mu(\{x_i\})$, za $\lambda = 0$, inače važi

$$\mu(X) = \tfrac{1}{\lambda}\left[\prod_{i=1}^{n}\big(1+\lambda\cdot\mu(\{x_i\})\big) - 1\right]. \tag{3.1}$$

U sledećoj teoremi videćemo kako možemo odrediti λ:

Teorema 3.6. [12] Pod gore navedenim uslovima jednačina

$$1+\lambda\cdot\ \mu(X) = \prod_{i=1}^{n}\big(1+\lambda\cdot\mu(\{x_i\})\big)$$

jedinstveno definiše λ:

(1) $\lambda > 0$, kad $\sum_{i=1}^{n}\mu(\{x_i\}) < \mu(X)$,
(2) $\lambda = 0$, kad $\sum_{i=1}^{n}\mu(\{x_i\}) = \mu(X)$,
(3) $-\frac{1}{\mu(X)} < \lambda < 0$, kad $\sum_{i=1}^{n}\mu(\{x_i\}) > \mu(X)$.

Dokaz: Označimo sa $a = \mu(X)$, sa $a_i = \mu(\{x_i\})$, za $i = 1,2,\dots,n$ i $f_k(\lambda) = \prod_{i=1}^{k}(1+a_i\lambda)$, za $k = 2,\dots,n$. Bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je $a_1 > 0$ i $a_2 > 0$. Znamo da je $1 + a_k\lambda > 0$, za $k = 1,2,\dots,n$ i za svako $\lambda \in \left(-\frac{1}{a},\infty\right)$. Ako

$$f_k(\lambda) = (1+a_k\lambda)f_{k-1}(\lambda),$$

imamo da je

$$f_k'(\lambda) = a_k f_{k-1}(\lambda) + (1+a_k\lambda)f_{k-1}'(\lambda),$$

i

$$f_k''(\lambda) = 2a_k f_{k-1}'(\lambda) + (1+a_k\lambda)f_{k-1}''(\lambda).$$

Za svako $k = 2,\dots,n$ i svako $\lambda \in \left(-\frac{1}{a},\infty\right)$ $f_{k-1}'(\lambda) > 0, f_{k-1}''(\lambda) > 0$ kao su i $f_k'(\lambda)$ i $f_k''(\lambda)$. Kako je

$$f_2'(\lambda) = a_1(1 + a_2\lambda) + a_2(1 + a_1\lambda) > 0$$

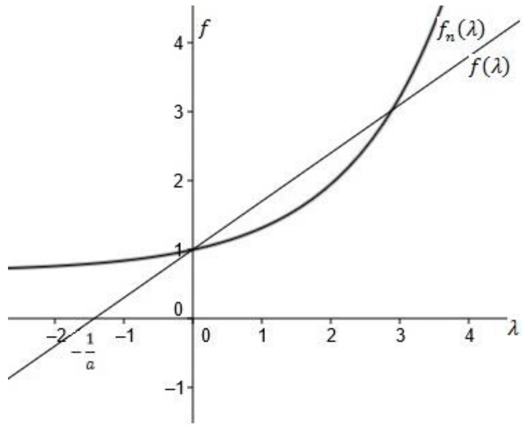
i

$$f_2''(\lambda) = a_1 a_2 > 0,$$

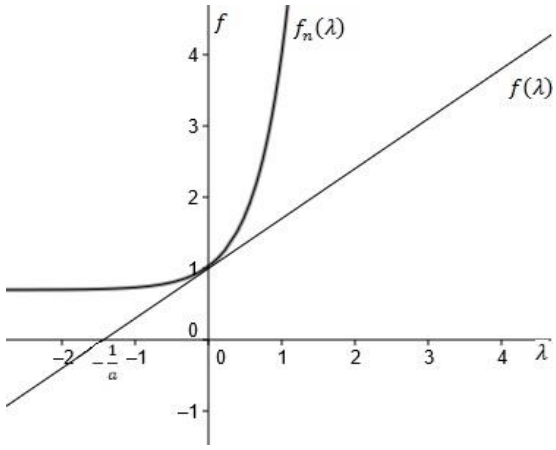
i znamo da je $f_k''(\lambda) > 0$, što znači da je funkcija $f_k(\lambda)$ je konveksna na $\left(-\frac{1}{a}, \infty\right)$. Važi da

$$f_n'(0) = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

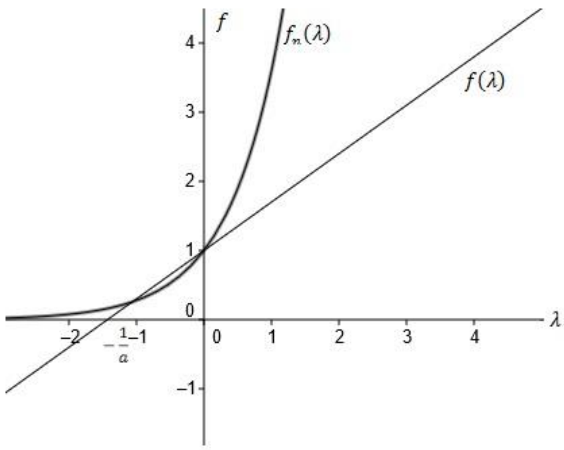
Za $\lim_{\lambda\to\infty} f_n(\lambda) = \infty$, znamo da ako je $\sum_{i=1}^{n} a_i < a$ tada $f_n(\lambda)$ ima jedinstvenu presečnu tačku sa linijom $f(\lambda) = 1 + \lambda a$ (slika 3.1/a), za neko $\lambda > 0$. Ako $\sum_{i=1}^{n} a_i = a$, tada $f(\lambda) = 1 + \lambda a$ je tangenta za $f_n(\lambda)$ u $\lambda = 0$ (slika 3.1/b). Ako je $\sum_{i=1}^{n} a_i > a$, $f_n'(\lambda) > 0$, $f(\lambda) = 1 + \lambda a \leq 0$, dok je $\lambda \leq -\frac{1}{a}$, tada kriva $f_n(\lambda)$ ima jedinstvenu presečnu tačku sa pravom $f(\lambda)$ za neko $\lambda \in \left(-\frac{1}{a}, 0\right)$ (slika 3.1/c). Time smo dokazali teoremu.



slika 3.1/a [12]



slika 3.1/b [12]



slika 3.1/c [12] Jedinstvenost parametra $\boldsymbol{\lambda}$

Ako za neko x_i važi da je $\mu(\{x_i\}) = \mu(X)$, tada jednačina (3.1) ima beskonačno mnogo rešenja. To znači da je μ λ-mera za svako $\lambda \in \left(-\frac{1}{\mu(X)}, \infty\right)$. Jedino, ako $\mu(\{x_j\}) = 0$, za svako j, tada jednačina nema rešenje na $\left(-\frac{1}{\mu(X)}, \infty\right)$.

Kada se odredi λ-mera na M, možemo i odrediti λ-mera na $P(X)$ koristeći konačnu λ-meru.

Primer 3.3. [12] Neka je $X = \{a, b, c\}$, $\mu(X) = 1$, $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0.2$, $\mu(\{c\}) = 0.1$. Prema teoremi 3.6. μ je λ-mera. Koristimo jednačinu (3.1) da definišemo λ,

$$1 = \frac{(1 + 0.2\lambda)(1 + 0.2\lambda)(1 + 0.1\lambda) - 1}{\lambda}$$

kad sredimo jednačinu dobijemo:

$$0.004\lambda^2 + 0.08\lambda - 0.5 = 0.$$

Rešavajući jednačinu dobijemo:

$$\lambda = \frac{-0.08 \pm \sqrt{0.0064 + 0.008}}{0.008}$$

$$\lambda = \frac{-0.08 \pm 0.12}{0.008}$$

$$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -25.$$

$-25 < -1$, pa jedino rešenje koji možemo da prihvatimo je 5.

Sada ćemo konstruisati normiranu λ-meru na Borelovoj σ-algebri $\mathcal{B}_R$ za dato $\lambda \in (-1, \infty)$.

Ako je $h(x)$ funkcija raspodele verovatnoće na $(-\infty, \infty)$, možemo da definišemo funkciju ψ na $\mathcal{B}_R$:

$$\psi([a,b)) = \frac{h(b)-h(a)}{1+\lambda h(a)}.$$

Skupovna funkcija ψ je neprekidna, pa možemo da definišemo

$$\psi(X) = \psi\big((-\infty.\infty)\big) = \lim_{a\to-\infty, b\to\infty} \psi([a,b)).$$

Kako $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$ i $\lim_{x\to\infty} h(x) = 1$ imamo da je

$$\psi(X) = 1.$$

Možemo pokazati da skupovna funkcija ψ zadovoljava λ-pravilo na $\mathcal{B}_R$.

Za svaki $[a,b) \in \mathcal{B}_R, [b,c) \in \mathcal{B}_R, [a,b) \cup [b,c) = [a,c) \in \mathcal{B}_R$ i

$$\begin{aligned}
&\psi([a,b)) + \psi([b,c)) + \lambda\psi([a,b))\psi([b,c)) = \\
&= \psi([a,b)) + \psi([b,c))[1 + \lambda\psi(a,b)] \\
&= \frac{h(b)-h(a)}{1+\lambda h(a)} + \frac{h(c)-h(b)}{1+\lambda h(b)}\left[1 + \lambda\frac{h(b)-h(a)}{1+\lambda h(a)}\right] \\
&= \frac{h(b)-h(a)}{1+\lambda h(a)} + \frac{[h(c)-h(b)][1+\lambda h(b)]}{[1+\lambda h(b)][1+\lambda h(a)]} \\
&= \frac{h(b)-h(a)}{1+\lambda h(a)} \\
&= \psi([a,c)).
\end{aligned}$$

4. Integrali bazirani na monotonim skupovnim funkcijama

4.1. Lebegov integral

Do sada smo naveli definicije i teoreme vazane za monotone skupovne funkcije koje predstavljaju uopštenje klasične mere. Sada ćemo definisati Lebegov integral.

U ovom poglavlju koristićemo sledeće oznake: (X, F, μ) je merljiv prostor, gde je X neprazan skup, F je σ-algebra podskupova skupa X, i $\mu: F \to [0, \infty]$ je klasična mera. X je univerzalan skup koji ne mora da bude konačan. U ovom poglavlju ćemo pretpostaviti da je μ σ-konačna. Ova terminologija kao i rezultati koji slede su preuzeti iz [12].

Pre svega definisaćemo funkciju koja se naziva jednostavna funkcija i na kojoj se bazira definisanje Lebegovog integrala:

Definicija 4.1. [12] Funkcija $s: X \to (-\infty, \infty)$ koji ima oblik $\sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$ se zove *jednostavna funkcija*, gde je svako a_i realna konstanta, $A_i \in F$ i χ_{A_i} je karakteristična fukcija za $A_i, i = 1,2, \dots m$.

Svaka jednostavna funkcija je merljiva dok je karakteristična funkcija merljivog skupa merljiva, jer je linearna kombinacija merljive funkcije je opet merljiva funkcija. Za datu nenegativnu merljivu funkciju $f: X \to [0, \infty)$ postoji neopadajući niz jednostavnih funkcija čija granica je f. Na primer, možemo uzeti

$$s_j = \sum_{i=1}^{j \cdot 2^j} \frac{i-1}{2^j} \chi_{A_{ji}},$$

gde je $A_{ji} = \left\{ x \middle| \frac{i-1}{2^j} \le f(x) \le \frac{i}{2^j} \right\}, i = 1,2, \dots, j \cdot 2^j, j = 1,2, \dots$ Lako je pokazati da je $\{s_j\}$ neopadajući niz i $\lim_{j \to \infty} s_j(x) = f(x)$ za svako $x \in X$.

Ovi nizovi nisu jedinstveni. Pomoću nizova jednostavnih funkcija ćemo definisati Lebegov integral za funkciju f na X u odnosu na μ.

Definicija 4.2. [12] Neka je f nenegativna merljiva funkcija na X. *Lebegov integral* za funkcije f na X u odnosu na μ je dat sa

$$\int f\,d\mu = \lim_{j\to\infty}\int s_j\,d\mu = \lim_{j\to\infty}\sum_{i}^{m_j} a_{ji}\mu(A_{ji})$$

gde je svako $s_j = \sum_i^{m_j} a_{ji}\chi_{A_{ji}}$ jednostavna funkcija i $\{s_j\}$ je neopadajući niz za koji je $\lim_{j\to\infty} s_j = f$.

Za svaka dva jednostavna niza $\{s_j\}$ i $\{t_j\}$ sa osobinom da je $\lim_{j\to\infty} s_j = \lim_{j\to\infty} t_j = f$ važi $\lim\limits_{j\to\infty}\int s_j\,d\mu = \lim\limits_{j\to\infty}\int t_j\,d\mu$, iz čega sledi da je Lebegov integral dobro definisan za svaku nenegativnu merljivu funkciju.

Iz definicije 4.2. sledi da ako je funkcija f data sa $\sum_{i=1}^{m} a_i\chi_{A_i}$, tada $\int f\,d\mu = \sum_{i=1}^{m} a_i\mu(A_i)$.

Za bilo koji merljiv skup A, ako A_{ji} zamenimo sa $A_{ji}\cap A$, u definiciju 4.2. možemo definisati Lebegov integral funkcije f na A u odnosu na μ što se obeležava sa $\int_A f\,d\mu$.

Primer 4.1.[12] Neka je X zatvoren jedinični interval $[0,1]$, F je skup svih Borelovih skupova na $[0,1]$, a μ Lebegova mera. Skup svih racionalnih brojeva iz $[0,1]$ označimo sa Q_0. Q_0 je prebrojiv skup i $\mu\,(Q_0) = 0$. Funkcija f je definisana na $[0,1]$ na sledeći način:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako } x \in Q_0 \\ 1, & \text{inače} \end{cases}.$$

Ovako definisana funkcija f je nenegativna i merljiva funkcija. f nije neprekidna u tačkama skupa $[0,1]$, i nije ni integrabilna na $[0,1]$ u Rimanovom smislu, $\int_0^1 f(x)\,dx$ ne postoji, ali Lebegov integral postoji i izgleda ovako:

$$\int_{[0,1]} f\,d\mu = 0\cdot\mu([0,1]-Q_0) + 1\cdot\mu(Q_0) = 0\cdot 1 + 1\cdot 0 = 0.$$

Lebegov integral se definiše i na sledeći način:

$\int f\,d\mu =$

$\sup\left\{\sum_{i=1}^{m} a_i\mu(A_i)\,\middle|\,\sum_{i=1}^{m} a_i\chi_{A_i} \le f;\, a_i \in [0,\infty), A_i \in F, i = 1,2,\dots,m, m \ge 1\right\}.$

U nastavku će biti opisano na koji način se definiše Lebegov integral merljive funkcije koja ne mora da bude nenegativna. Za svaku merljivu funkciju neka je

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ako } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{ako } f(x) < 0 \end{cases}$$

i

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{ako } f(x) \leq 0 \\ 0, & \text{ako } f(x) > 0 \end{cases}.$$

Funkcije $f^+(x)$ i $f^-(x)$ su nenegativne merljive funkcije. Lebegov integral za funkciju f na X u odnosu na μ se definiše sa:

$$\int f\,d\mu = \int f^+\,d\mu + \int f^-\,d\mu$$

gde su oba integrala sa desne strane jednakosti konačna.

Kada je $\mu(X) < \infty$ i f je ograničena sa leve strane, integral $\int f\,d\mu$ možemo definisati i na sledeći način:

$$\int f\,d\mu = \int (f - m)\,d\mu + m\,\mu(x),$$

gde je m donja granica funkcije f, tj. $f(x) - m \geq 0, \forall x \in X$.

Posmatramo realnu funkciju f koja je merljiva na intervalu $I = [0,1]$ u odnosu na Borelovu σ-algebru. Ako Rimanov integral $\int_a^b f(x)\,dx$ postoji, tada odgovarajući Lebegov integral postoji, i

$$\int_I f\,d\mu = \int_a^b f(x)\,dx,$$

gde je μ Lebegova mera. Može se zaključiti da je Lebegov integral uopštenje Rimanovog integrlala.

Ako je skupovna funkcija $\mu: F \to (-\infty, \infty)$ konačna klasična mera, tada μ možemo napisati u obliku $\mu = \mu^+ + \mu^-$, gde su μ^+ i μ^- konačne klasične mere. Lebegov integral funkcije f na X u odnosu na μ možemo definisati i na sledeći način:

$$\int f\,d\mu = \int f\,d\mu^{+} + \int f\,d\mu^{-}$$

ako su oba integrala sa desne strane jednakosti konačna.

Kada je μ konačan, Lebegov integral ima sledeću definiciju:

$$\int f\,d\mu = \int_{-\infty}^{0} [\mu(F_\alpha) - \mu(X)]\,d\alpha + \int_{0}^{\infty} \mu(F_\alpha)\,d\alpha \tag{4.1}$$

ako su oba sabirka sa desne strane jednakosti konačana, gde je $F_\alpha = \{x | f(x) \geq \alpha\}$ za $\alpha \in (-\infty, \infty)$. Skup F_α je merljiv, jer je i f merljiv, što znači da je $\mu(F_\alpha)$ dobro definisan za $\alpha \in (-\infty, \infty)$. Integrali na desnoj strani su Rimanovi integrali. μ je konačna mera pa je $\mu(F_\alpha)$ ograničeno, iz čega sledi da su Rimanovi integrali dobro definisani. Kada je $f > 0$, jednačina (4.1) ima sledeći oblik:

$$\int f\,d\mu = \int_{0}^{\infty} \mu(F_\alpha)\,d\alpha. \tag{4.2}$$

Ova jednačina se naziva *transformaciona teorema* Lebegovog integrala.

4.1.1. Osobine Lebegovog integrala

Prvo ćemo uvesti definiciju pojma „skoro svuda":

Definicija 4.3. [12] Neka je $A \in F$, i neka je P *tvrđenje u vezi sa tačkama iz* A. Ako postoji $E \in F$ sa $\mu(E) = 0$ tako da je P tačno za $A \setminus E$, tada kažemo da je „P *skoro svuda tačno na* A".

Lebegov integral ima sledeće osobine:

Teorema 4.1. [12] Neka su f i g merljive funkcije na (X, F, μ), A i B merljivi skupovi, i neka je a realna konstanta.

(1) $\int_A 1\,d\mu = \mu(A)$;

(2) $\int_A f\,d\mu = \int_A f \cdot \chi_A\,d\mu$;

(3) ako $f \leq g$ tada $\int_A f\,d\mu \leq \int_A g\,d\mu$;

(4) $\int_A |f|\,d\mu = 0$ ako i samo ako $\mu(\{x | f(x) \neq 0\} \cap A) = 0$, tj. $f = 0$ na A skoro svuda;

(5) ako $A \subset B$ tada $\int_A f\,d\mu \leq \int_B f\,d\mu$;

(6) $\int_A af\, d\mu = a\int_A f\, d\mu$;

(7) $\int_A (f+g)\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_A g\, d\mu$;

(8) ako je $A \cap B = \emptyset$ tada je $\int_A f\, d\mu + \int_A f\, d\mu = \int_{A\cup B} f\, d\mu$.

Osobine (6) i (7) iz teoreme 4.1.zajedno čine linearnost Lebegovog integrala.

4.1.2. Lebegov integral na konačnom skupu

U prethodnom delu rada videli smo najvažnije osobine Lebegovog integrala, a u ovom poglavlju ćemo dati formulu za izračunavanje Lebegovog integrala na konačnom skupu [12].

Neka je X konačan, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, i neka je $F = P(X)$. Koristeći oznaku $w_i = \mu(\{x_i\})$ za $i = 1,2, \dots, n$ imamo da je

$$\int f\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

pa je

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \chi_{\{x_i\}}$$

jednostavna funkcija. To je u stvari ponderisana suma $\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$, gde su $w_i, i = 1,2, \dots, n$ težinski koeficijenti. Ako je $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ i $0 \leq w_i \leq 1$, za $i = 1,2, \dots, n$ tada je desna strana jednačine je ponderisani prosek. Sa druge strane, svaku ponderisanu sumu možemo napisati pomoću Lebegovog integrala [12].

Sledeći primer nam pokazuje kako možemo koristiti Lebegov integral u konkretnom primeru.

Primer 4.2. [12] Tri radnika, x_1, x_2, x_3 su odvojeno angažovani za proizvodnju igračaka od drveta. Njihova efektivnost je redom $5, 6$ i 7 igračaka po danu. Ove nedelje oni rade redom $6, 3$ i 4 dana. Neka je $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ i

$$f(x) = \begin{cases} 6, & \text{ako je } x = x_1 \\ 3, & \text{ako je } x = x_2 \\ 4, & \text{ako je } x = x_3. \end{cases}$$

Dok radnici rade odvojeno koristeći meru μ definisanu sa $\mu(\{x_1\}) = 5, \mu(\{x_2\}) = 6, \mu(\{x_3\}) = 7$ sumu proizvedenih igračaka možemo izračunati na sledeći način:

$$\int f\, d\mu = \sum_{i=1}^{3} \mu(\{x_i\}) \cdot f(x_i) = 5 \cdot 6 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 4 = 76.$$

U fuziji informacija najćešće korišćen metod je ponderisana suma. Primer 4.2. je tipičan primer za fuziju informacija, gde je $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je skup izvora informacije, $f(x_i)$ je numerička koliličina dobijena od izvora, sa $\mu(\{x_i\}), i = 1,2, \dots, n$ se redom označava značajnost izvora. Ovaj model je linearan i može se koristiti samo u slučaju kada radnici rade odvojeno.

4.2. Sugenov integral

4.2.1. Definicija Sugenovog integrala

U odeljku 3.2. smo videli šta je Sugenova mera, a u ovom poglavlju ćemo videti kako se definiše Sugenov integral koji je uveden u [11]. Kasnije ćemo videti na koji način se može primeniti ovaj integral u medicini.

Uzećemo da je (X, F) merljiv prostor, gde je $X \in F$, $\mu: F \to [0, \infty]$ je neprekidna monotona mera i G je familija svih konačnih nenegativnih merljivih funkcija na (X, F). Za svaku funkciju $f \in G$ definišemo $F_\alpha = \{x | f(x) \geq \alpha\}$ i $F_{\alpha+} = \{x | f(x) > \alpha\}$, gde $\alpha \in [0, \infty]$. U ovom poglavlju posmatraćemo funkcije čiji je skup vrednosti $[0, \infty]$ i smatraćemo da je

$$\inf_{x \in \emptyset} f(x) = \infty.$$

Definicija 4.4. [11] Neka su $A \in F$ i $f \in G$. Sugenov integral funkcije f na skupu A u odnosu na μ, koji označimo sa $⨍_A f\, d\mu$, je definisan sa

$$⨍_A f\, d\mu = \sup_{\alpha \in [0,\infty]} [\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)].$$

Ako je $X = A$, tada Sugenov integral možemo da označimo i sa $⨍ f\, d\mu$.

U literaturi ponekad se Sugenov integral zove i *fazi integral*.

Lema 4.1. [11,12]

(1) F_α i $F_{\alpha+}$ su nerastući u odnosu na α, i $F_{\alpha+} \supset F_\beta$ kad $\alpha < \beta$.

(2)$\lim_{\beta\to\alpha-} F_\beta = \lim_{\beta\to\alpha-} F_{\beta+} = F_\alpha \supset F_{\alpha+} = \lim_{\beta\to\alpha-} F_\beta = \lim_{\beta\to\alpha-} F_{\beta+}$.

Dokaz: (1) očigledno.

(2) sledi iz:

$$\bigcap_{\beta<\alpha}\{x|f(x)\geq\beta\} = \bigcap_{\beta<\alpha}\{x|f(x)>\beta\}$$

$$= \{x|f(x)\geq\alpha\} \supset \{x|f(x)>\alpha\}$$
$$= \bigcup_{\beta>\alpha}\{x|f(x)\geq\beta\} = \bigcup_{\beta>\alpha}\{x|f(x)>\beta\}.$$

Sledeća teorema nam pokazuje kako možemo još da napišemo Sugenov integral. U primerima možemo koristiti bilo koji od navedenih izraza.

Teorema 4.2. [12]

$$⨍_A f\,d\mu = \sup_{\alpha\in[0,\infty]}[\alpha\wedge\mu(A\cap F_\alpha)] = \sup_{\alpha\in[0,\infty]}[\alpha\wedge\mu(A\cap F_{\alpha+})]$$
$$= \sup_{\alpha\in[0,\infty)}[\alpha\wedge\mu(A\cap F_\alpha)] = \sup_{E\in F(f)}\left[\left(\inf_{x\in E} f(x)\right)\wedge\mu(A\cap F_\alpha)\right]$$

$$= \sup_{E\in F}\left[\left(\inf_{x\in E} f(x)\right)\wedge\mu(A\cap F_\alpha)\right],$$

gde je $F(f)$ σ-algebra generisana sa f, koja je najmanja σ-algebra takva da je f merljiva funkcija.

Dokaz: (1) $F_\alpha = F_{\alpha+} = \emptyset$ kad $\alpha = \infty$, jednačine

$$⨍_A f\,d\mu = \sup_{\alpha\in[0,\infty)}[\alpha\wedge\mu(A\cap F_\alpha)]$$

i

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty]}[\alpha\wedge\mu(A\cap F_{\alpha+})] = \sup_{\alpha\in[0,\infty)}[\alpha\wedge\mu(A\cap F_\alpha)]$$

su očigledno jednaki.

(2) Pokažimo da

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty)} [\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)] = \sup_{\alpha\in[0,\infty)} [\alpha \wedge \mu(A \cap F_{\alpha+})].$$

Sa jedne strane, koristeći lemu 4.1. i da je μ monotonona, imamo da je

$$\mu(A \cap F_\alpha) \geq \mu(A \cap F_{\alpha+})$$

za svako $\alpha \in [0,\infty)$. Dakle,

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty)} [\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)] \geq \sup_{\alpha\in[0,\infty)} [\alpha \wedge \mu(A \cap F_{\alpha+})].$$

Sa druge strane, za svaki $\varepsilon > 0$ i $\alpha \in (0,\infty)$ uzeći $\alpha' \in ((\alpha-\varepsilon) \vee 0, \alpha)$ imamo da je

$$\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha) \leq (\alpha' + \varepsilon) \wedge (A \cup F_{\alpha'+});$$

dakle imamo da je

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty)} [\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)] = \sup_{\alpha\in[0,\infty)} [\alpha \wedge \mu(A \cap F_{\alpha+})]$$

$$\leq \sup_{\alpha\prime\in(0,\infty)} [(\alpha' + \varepsilon) \wedge (A \cup F_{\alpha'+})]$$

$$\leq \sup_{\alpha\prime\in(0,\infty)} [\alpha' \wedge (A \cup F_{\alpha'+})] + \varepsilon$$

$$\leq \sup_{\alpha\in[0,\infty)} [\alpha \wedge (A \cup F_{\alpha+})] + \varepsilon.$$

ε je jako mala veličina blizu nuli, pa imamo da je

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty)} [\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)] \leq \sup_{\alpha\in[0,\infty)} [\alpha \wedge \mu(A \cap F_{\alpha+})].$$

Dobili smo da važi:

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty)} [\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)] = \sup_{\alpha\in[0,\infty)} [\alpha \wedge \mu(A \cap F_{\alpha+})].$$

(3) Treba još da dokažemo

$$⨍_A f\, d\mu = \sup_{E\in F(f)} \left[\left(\inf_{x\in E} f(x)\right)\ \wedge \mu(A\cap F_\alpha)\right] = \sup_{E\in F} \left[\left(\inf_{x\in E} f(x)\right)\ \wedge \mu(A\cap F_\alpha)\right].$$

Prvo za svako $\alpha \in [0,\infty]$, $\inf_{x\in F(\alpha)} f(x)\ \geq \alpha$ i $F_\alpha \in F(f)$ imamo da je

$$[\alpha \wedge \mu(A\cap F_\alpha)] \leq \sup_{E\in F(f)} \left[\left(\inf_{x\in E} f(x)\right)\ \wedge \mu(A\cap F_\alpha)\right]$$

i imamo da je

$$⨍_A f\, d\mu = \sup_{\alpha\in[0,\infty]} [\alpha \wedge \mu(A\cap F_\alpha)] \leq \sup_{E\in F(f)} \left[\left(\inf_{x\in E} f(x)\right)\ \wedge \mu(A\cap F_\alpha)\right].$$

Ako je f F-merljiva funkcija, imamo da je $F(f) \subset F$ i važi:

$$\sup_{E\in F(f)} \left[\left(\inf_{x\in E} f(x)\right)\ \wedge \mu(A\cap F_\alpha)\right] \leq \sup_{E\in F} \left[\left(\inf_{x\in E} f(x)\right)\ \wedge \mu(A\cap F_\alpha)\right].$$

Za svaki $E \in F$ ako uzmimo da je $\alpha' = \inf_{x\in F(\alpha)} f(x)$, tada je $E \subset F_{\alpha'}$. Odavde sledi da je

$$\mu(A\cap E) \leq\ \mu(A\cap F_{\alpha'})$$

jer je μ monotonona, imamo sledeće:

$$\left(\inf_{x\in E} f(x)\right)\ \wedge \mu(A\cap E) \leq \alpha' \wedge \mu(A\cap F_{\alpha'}) \leq \sup_{\alpha\in[0,\infty]} [\alpha \wedge \mu(A\cap F_\alpha)] = ⨍_A f\, d\mu$$

za svako $E \in F$. Sledi da je

$$\sup_{E\in F} \left[\left(\inf_{x\in E} f(x)\right)\ \wedge \mu(A\cap F_\alpha)\right] \leq ⨍_A f\, d\mu.$$

Time smo dokazali teoremu.

Da bi smo pojednostavili izračunavanje Sugenovog integrala za datu $(X, F, \mu\,), f \in G$ i $A \in F$ možemo da koristimo sledeći skup:

$$\Gamma = \left\{\alpha \middle| \alpha \in [0,\infty], \mu(A\cap F_\alpha) > \mu\left(A\cap F_\beta\right)\ za\ svako\ \beta > \alpha\ \right\}.$$

Vidi se da je

$$⨍_A f\, d\mu = \sup_{E\in\Gamma} [\mu(A\cap F_\alpha)].$$

Sledeći primeri nam pokazuju na koji način se računa Sugenov integral.

Primer 4.3. Neka je $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $F = P(X)$, monotona mera μ definisana kao u primeru 2.3. i funkcija f data sa

$$f(x) = \begin{cases} 5, & \text{ako je } x = x_1 \\ 3, & \text{ako je } x = x_2 \\ 1, & \text{ako je } x = x_3 \end{cases}$$

Sugenov integral funkcije f u odnosu na μ se može izračunati na sledeći način:

$$\fint f\, d\mu = [5\wedge\mu(\{x_1\})] \vee [3\wedge\mu(\{x_1, x_2\})] \vee [1\wedge\mu(X)] = [5\wedge 1] \vee [3\wedge 1] \vee [1\wedge 3]$$
$$= 1 \vee 1 \vee 1 = 1.$$

Primer 4.4. [12] Neka je $X = [0,1]$, F je familija svih Borelovih skupova u X i $\mu = m^2$, gde je m Lebegova mera, $f(x) = \frac{x}{2}$. Imamo da je

$$F_\alpha = \{x | f(x) \geq \alpha\} = [2\alpha, 1].$$

Kako je $\Gamma = \left[0, \frac{1}{2}\right)$ treba da uzimamo u obzir samo $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$. U ovom slučaju imamo da je

$$\fint_A f\, d\mu = \sup_{\alpha\in\left[0,\frac{1}{2}\right)} [\mu(A\wedge F_\alpha)] = \sup_{\alpha\in\left[0,\frac{1}{2}\right)} [\mu(A\wedge(1-2\alpha)^2)].$$

U ovom izrazu $(1-2\alpha)^2$ je neprekidna, opadajuća funkcija za α kada je $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$. Rešenje ćemo dostići u jednoj tački rešenja jednačine

$$\alpha = (1-2\alpha)^2$$

koja je $\alpha = \frac{1}{4}$. Znači,

$$\fint_A f\, d\mu = \frac{1}{4}.$$

4.2.2. Osobine Sugenovog integrala

Sledeća teorema nam daje osnovne osobine Sugenovog integrala.

Teorema 4.3. [12]

(1) Ako je $\mu(A) = 0$, tada $\fint_A f\, d\mu = 0$ za svako $f \in G$;

(2) ako je μ neprekidna sa donje strane i $\fint_A f\, d\mu = 0$ tada $\mu(A \cap F_{\alpha+}) = 0$;

(3) ako je $f_1 \leq f_2$ tada je $\fint_A f_1\, d\mu \leq \fint_A f_2\, d\mu$;

(4) $\fint_A f\, d\mu = \fint f \cdot \chi_A\, d\mu$, gde je χ_A karakteristična funkcija za A;

(5) $\fint_A a\, d\mu = a \wedge \mu(A)$ gde je a konstanta, $a \in [0, \infty)$;

(6) $\fint_A (f + a)d\mu \leq \fint_A f\, d\mu + \fint_A a\, d\mu$ za svako $a \in [0, \infty)$.

Vidimo da su osobine (1)-(4) kod Sugenovog integrala iste kao i kod Lebegovog integrala.

U sledećem kololaru videćemo koje su još osobine Sugenovog integrala.

Kololar 4.1. [12]

(7) Ako $A \supset B$ tada $\fint_A f\, d\mu \geq \fint_B F\, d\mu$;

(8) $\fint_A (f_1 \vee f_2) d\mu \geq \fint_A f_1\, d\mu \vee \fint_A f_2\, d\mu$;

(9) $\fint_A (f_1 \wedge f_2) d\mu \leq \fint_A f_1\, d\mu \wedge \fint_A f_2\, d\mu$;

(10) $\fint_{A \cup B} f d\mu \geq \fint_A f\, d\mu \vee \fint_B f\, d\mu$;

(11) $\fint_{A \cap B} f d\mu \leq \fint_A f\, d\mu \wedge \fint_B f\, d\mu$.

U sledećem primeru pokazaćemo da za razliku od Lebegovog integrala Sugenov integral ne poseduje osobinu:

$$\fint_A af\, d\mu = a \fint_A f\, d\mu.$$

Primer 4.5. [12] Neka je $X = [0,1], F$ je familija svih Borelovog skupova skupa X $(B_R \cap [0,1])$, i neka je μ Lebegova mera. Uzmimo da je $f(x) = x$, za svako $x \in X$ i $a = \frac{1}{2}$.

Tada imamo da je

$$\fint_A af\, d\mu = \fint_A \frac{x}{2}\, d\mu = \frac{1}{3}$$

a sa druge strane

$$a\fint_A f\, d\mu = \frac{1}{2}\fint_A x\, d\mu = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Znači,

$$\fint_A af\, d\mu \neq a\fint_A f\, d\mu.$$

Vidimo da postoje osobine koje važe za Lebegov integral a ne važe za Sugenov inegral. Jedan od tih osobina je linearnost. Za Lebegov integral važi:

$$\int_A af\, d\mu = a\int_A f\, d\mu$$

i

$$\int_A (f+g)\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_A g\, d\mu$$

ali za Sugenov integral ne važi ova osobina.

4.2.3. Teorema transformacije Sugenovog integrala

U ovom delu rada biće pokazano kako se može transformirati Sugenov integral na prostoru (X, F, μ) u drugi Sugenov integral $\fint g\, dm$ na prostoru Lebegove mere $([0,\infty], B_+, m)$, gde je B_+ familija svih Borelovih skupova na $[0,\infty]$ a m je Lebegova mera [12]. Videćemo da je ova formula slična formuli koja je važila kod Lebegovog integrala.

Teorema 4.4. [12] Za svako $A \in F$

$$\fint_A f\, d\mu = \fint_A \mu(A \cap F_\alpha)\, dm$$

gde je $F_\alpha = \{x | f(x) \geq \alpha\}$ i m je Lebegova mera.

Dokaz: Označimo sa $g(\alpha) = \mu(A \cap F_\alpha)$. Iz leme 6.1. znamo da je g nerastuća funkcija u odnosu na α. Za svako $\alpha \in [0,\infty]$ uzmimo da je

$$B_\alpha = \{E | \sup E = \alpha, E \in B_+\},$$

tada je $\{B_\alpha | \alpha \in [0,\infty]\}$ je particija skupa B_+ i $\sup_{E\in B_\alpha} m(E) = \alpha$. Iz teoreme 4.2. imamo da je

$$⨍_A \mu(A \cap F_\alpha)\, dm = ⨍_A g(\alpha)\, dm = \sup_{E \in B_+} \left[\left(\inf_{\beta \in E} g(\beta) \right) \wedge m(E) \right] =$$

$$= \sup_{\alpha \in [0,\infty]} \sup_{E \in B_\alpha} \left[\left(\inf_{\beta \in E} g(\beta) \right) \wedge m(E) \right].$$

Kako je $g(\beta)$ nerastuće, imamo da je

$$g(\alpha -) \geq \inf_{\beta \in E} g(\beta) \geq g(\alpha)$$

za svako $E \in B_\alpha$, gde je $g(\alpha -) = \lim_{\beta \to \alpha-} g(\beta)$. Sa jedne strane imamo da je

$$⨍_A \mu(A \cap F_\alpha)\, dm \geq \sup_{\alpha \in [0,\infty]} \left[g(\alpha) \wedge \sup_{E \in B_\alpha} m(E) \right] = \sup_{\alpha \in [0,\infty]} [g(\alpha) \wedge \alpha]$$
$$= \sup_{\alpha \in [0,\infty]} [\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)] = ⨍_A f\, d\mu.$$

Sa druge strane za dato $\varepsilon > 0$ važi:

$$⨍_A \mu(A \cap F_\alpha)\, dm \leq \sup_{\alpha \in [0,\infty]} \left[g(\alpha -) \wedge \sup_{E \in B_\alpha} m(E) \right] = \sup_{\alpha \in [0,\infty]} [g(\alpha -) \wedge \alpha]$$

$$\leq \sup_{\alpha \in [0,\infty]} [\alpha \wedge g(\alpha -)] \vee \varepsilon \leq \sup_{\alpha \in [0,\infty]} [\alpha \wedge g(\alpha - \varepsilon)] \vee \varepsilon$$

$$\leq \sup_{(\alpha - \varepsilon) \in [0,\infty]} [(\alpha - \varepsilon) \wedge g(\alpha - \varepsilon)] + \varepsilon$$

$$= \sup_{(\alpha - \varepsilon) \in [0,\infty]} [(\alpha - \varepsilon) \wedge \mu(A \cap F_{\alpha - \varepsilon})] + \varepsilon$$

$$= ⨍_A f\, d\mu + \varepsilon.$$

Kako je ε jako mali broj koji je blizu nule, važi tvrđenje, tj.

$$⨍_A f\, d\mu = ⨍_A \mu(A \cap F_\alpha)\, dm.$$

4.3. Pan-integrali

4.3.1. Pan-sabiranje i pan-množenje

Binarne operacije na kojima je baziran Lebegov integral su uobičajene operacije sabiranja i množenja, dok kod Sugenovog integrala klučnu ulogu imaju minimum i maksimum. U [13] je uveden pan-integral čiji su specijalni slučajevi Lebegov i Sugenov integral. Ovaj integral je baziran na paru binarnih operacija koje predstavljaju uopštenje kako sabiranja i množenja, tako i minimuma i maksimuma.

Neka je $\mathbb{R}_+ = [0, \infty), \overline{\mathbb{R}_+} = [0, \infty], B_+ = B \cap \mathbb{R}$ i $a, b, c, d, a_i, b_i, c_i \in \overline{\mathbb{R}_+}$ $(t = 1,2, \dots, t \in T$, gde je T skup indeksa).

Definicija 4.5. [12,13] Neka je $\oplus$ binarna operacija na $\overline{\mathbb{R}_+}$. Uređeni par $(\overline{\mathbb{R}_+}, \oplus)$ se naziva *komutativna izotonična polugrupa* i $\oplus$ se naziva *pan-sabiranje* na $\overline{\mathbb{R}_+}$ ako $\oplus$ zadovoljava sledeće uslove:

(PA1) $a \oplus b = b \oplus a$

(PA2) $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$

(PA3) ako je $a \leq b$, tada važi $a \oplus c \leq b \oplus c$ za svako c

(PA4) $a \oplus 0 = a$

(PA5) $\lim_n a_n$ i $\lim_n b_n$ postoje $\Rightarrow \lim_n (a_n \oplus b_n)$ postoji i
$\lim_n (a_n \oplus b_n) = \lim_n a_n \oplus \lim_n b_n$.

Iz (PA1) i (PA3) sledi:

(PA3') ako su $a \leq b$ i $c \leq d$, tada važi $a \oplus c \leq b \oplus d$.

(PA2) važi pa možemo koristiti oznaku $\oplus_{i=1}^{n} a_i$ za $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n$, a možemo uzeti i oznaku $\oplus_{t \in T} a_t$, gde je T konačan skup indeksa. Ako je T beskonačan skup indeksa, definišemo $\oplus_{t \in T} a_t = \sup_{T' \subset T} \oplus_{t \in T'} a_t$, gde je T' konačan.

Definicija 4.6. [12,13] Neka je $\otimes$ binarna operacija na $\overline{\mathbb{R}_+}$. Uređena trojka $(\overline{\mathbb{R}_+}, \oplus, \otimes)$, gde je $\oplus$ pan-sabiranje na $\overline{\mathbb{R}_+}$, se naziva *komutativni izotonični poluprsten* u odnosu na $\oplus$ i $\otimes$ ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

(PM1) $a \otimes b = b \otimes a$

(PM2) $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$

(PM3) $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$

(PM4) ako je $a \leq b$, tada važi $a \otimes c \leq b \otimes c$ za svako c

(PM5) ako $a \neq 0, b \neq 0 \Leftrightarrow a \otimes b \neq 0$

(PM6) postoji $I \in \overline{\mathbb{R}_+}$, tako da važi $a \oplus I = a$, za svako $a \in \overline{\mathbb{R}_+}$

(PM7) ako $\lim_n a_n$ i $\lim_n b_n$ postoje i konačni su $\Rightarrow \lim_n (a_n \otimes b_n) = \lim_n a_n \otimes \lim_n b_n$.

Operacija $\otimes$ se zove pan-množenje na $\overline{\mathbb{R}_+}$, i I se naziva jedinični element na $(\overline{\mathbb{R}_+}, \oplus, \otimes)$. Iz (PM1) i (PM4) sledi da važi:

(PA4') ako su $a \leq b$ i $c \leq d$, tada važi $a \otimes c \leq b \otimes d$.

Iz (PM5) sledi da je $a \otimes 0 = 0$ i $0 \otimes a = 0$ za svako $a \in \overline{\mathbb{R}_+}$.

U sledećim primerima videćemo konkretne primere za gore navedene definicije.

Primer 4.6. [12] $(\overline{\mathbb{R}_+}, +, \cdot)$ je komutativni izotonični poluprsten, gde je 1 jedinični element.

Primer 4.7. [12] $(\overline{\mathbb{R}_+}, \vee, \wedge)$ je komutativni izotonični poluprsten, gde je ∞ jedinični element.

Primer 4.8. [12] $(\overline{\mathbb{R}_+}, \vee, \cdot)$ je komutativni izotonični poluprsten, gde je 1 jedinični element.

Definicija 4.7. [12,13] Ako je (X, F, μ) prostor neprekidne monotone mere i $(\overline{\mathbb{R}_+}, \oplus, \otimes)$ je komutativni izotonični poluprsten, tada se $(X, F, \mu, \overline{\mathbb{R}_+}, \oplus, \otimes)$ naziva pan-prostor.

4.3.2. Definicija pan-integrala

Prilikom uvođenja pan-integrala važnu ulogu imaju pojmovi pan-karakteristične funkcije i pan-jednostavne merljive funkcije koji predstavljaju uopštenje karakteristične funkcije i jednostavne merljive funkcije na kojima je baziran Lebegov integral. Slede definicije ovih pojmova.

Definicija 4.8. [13] Neka je $(X, F, \mu, \overline{\mathbb{R}_+}, \oplus, \otimes)$ pan-prostor i $E \subset X$. Funkcija na X data sa

$$\chi_E(x) = \begin{cases} I, & \text{ako } x \in E \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

se naziva pan-karakteristična funkcija na E, gde je I jedinični element na $(\overline{\mathbb{R}_+}, \oplus, \otimes)$.

Definicija 4.9. [13] Neka je (X, F) merljiv prostor. Particija $\{E_i\}$ od X je merljiva ako $E_i \in F$ za svako i.

Sledeća definicija nam pokazuje šta je pan-jednostavna merljiva funkcija.

Definicija 4.10. [13] Neka je $(X, F, \mu, \overline{\mathbb{R}_+}, \oplus, \otimes)$ pan-prostor. Funkcija na X data sa

$$s(x) = \oplus_{i=1}^{n} [a_i \otimes \chi_E(x)]$$

se naziva *pan-jednostavna merljiva funkcija*, gde je $a_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 1,2, \dots, n$ i $\{E_i | i = 1,2, \dots, n\}$ merljiva particija skupa X.

Skup svih pan-jednostavnih merljivih funkcija označićemo sa Q, Q$\subset G$. Za svako

$$s(x) = \oplus_{i=1}^{n} [a_i \otimes \chi_E(x)] \in Q$$

neka je $e_s = \{(a_i, E_i) | i = 1,2, \dots, n\}$. Označimo

$$P(e_s | A) = \oplus_{i=1}^{n} [a_i \otimes \mu(A \cap E_i)]$$

gde je $A \in F$. $P(e_s | A)$ jednostavnije označićemo sa $P(s | A)$.

Za date funkcije $f_1, f_2 \in G$, ako je $f_1(x) \leq f_2(x)$ za svako $x \in X$ koristićemo oznaku $f_1 \leq f_2$.

Sledi definicija pan-integrala.

Definicija 4.11. [13] Neka je $f \in G$ i $A \in F$. Pan-integral funkcije f na A u odnosu na μ koji označavamo sa $(p)\int_A f d\mu$ je dat sa

$$(p)\int_A f d\mu = \sup_{0 \le s \le f, s \in Q} P(e_s|A).$$

Ako je $A = X$ umesto $(p)\int_X f d\mu$ ćemo koristiti $(p)\int f d\mu$.

U sledećem primeru se može videti na koji način se računa pan-integral na konačnom skupu.

Primer 4.9. Neka je $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $(X, P(X))$ merljiv prostor dok su monotona mera μ i funkcija $f$definisane kao u primeru 2.3. i 4.3. Uzmimo da je $\oplus = \vee$ i $\otimes = \cdot$. Pomoću pan-operacija $\oplus$ i $\otimes$ funkcija f se može zapisati na sledeći način

$$f(x) = \left(f(x_1) \otimes \chi_{\{x_1\}}(x)\right) \oplus \left(f(x_2) \otimes \chi_{\{x_2\}}(x)\right) \oplus \left(f(x_3) \otimes \chi_{\{x_3\}}(x)\right).$$

Pan-integral funkcije f u odnosu na μ ima sledeći oblik:

$$(p)\int f d\mu = \big(f(x_1) \otimes \mu(\{x_1\})\big) \oplus \big(f(x_2) \otimes \mu(\{x_2\})\big) \oplus \big(f(x_3) \otimes \mu(\{x_3\})\big),$$

tj.

$$(p)\int f d\mu = (5 \cdot 1) \vee (3 \cdot 1) \vee (1 \cdot 1) = 5.$$

Naredna teorema pokazuje na koji način se može izračunati pan-integral.

Teorema 4.5. [13] Neka je $f \in G$ i $A \in F$ i sa $\hat{P}$ označimo skup svih merljivih particija od X. Tada

$$(p)\int_A f d\mu = \sup_{E \in \hat{P}} \left\{ \oplus_{H \in E} \left[\left(\inf_{x \in H} f(x) \right) \otimes \mu(A \cap H) \right] \right\}.$$

Dokaz: Sa jedne strane, za svako $H \in \hat{P}$ i za svaku konačnu particiju $\{H_i | i = 1,2, \dots, n\} \subset E$ uzmimo da je

$$s(x) = \oplus_{i=1}^{n} \left\{ \left[\left(\inf_{x \in H} f(x) \right) \otimes \chi_H(x) \right] \right\}.$$

Tada je $s(x) \in Q$, i $s \leq f$. Imamo da je

$$\oplus_{i=1}^{n}\left[\left(\inf_{x\in H} f(x)\right) \otimes \chi_H(x)\right] \leq (p)\int_A f d\mu$$

pa važi

$$\sup_{E\in\hat{P}}\left\{\oplus_{H\in E}\left[\left(\inf_{x\in H} f(x)\right) \otimes \mu(A \cap H)\right]\right\} \leq (p)\int_A f d\mu.$$

Sa druge strane imamo da je $s(x) = \oplus_{i=1}^{n}[a_i \otimes \chi_E(x)] \in Q$, tada $\{E_i | i = 1,2, \ldots, n\} \in \hat{P}$. Štaviše, ako $s \leq f$, tada $a_i \leq \inf_{x\in E_i} f(x)$. Prema tome, imamo da je

$$\begin{aligned} P(s|A) &\leq \oplus_{i=1}^{n}\left[\left(\inf_{x\in E_i} f(x)\right) \otimes \mu(A \cap E_i)\right] \\ &\leq \sup_{E\in\hat{P}}\left\{\oplus_{H\in E}\left[\left(\inf_{x\in H} f(x)\right) \otimes \mu(A \cap H)\right]\right\}. \end{aligned}$$

Iz predhodne nejednakosti sledi da je

$$(p)\int_A f d\mu \leq \sup_{E\in\hat{P}}\left\{\oplus_{H\in E}\left[\left(\inf_{x\in H} f(x)\right) \otimes \mu(A \cap H)\right]\right\}.$$

Dobili smo da važi tvrđenje, odnosno:

$$\sup_{E\in\hat{P}}\left\{\oplus_{H\in E}\left[\left(\inf_{x\in H} f(x)\right) \otimes \mu(A \cap H)\right]\right\} = (p)\int_A f d\mu.$$

Sledeća teorema je jako važna, jer pokazuje kada su jednaki pan-integral i Sugenov integral.

Teorema 4.6. [13] Ako je $\oplus = \vee$ i $\otimes = \wedge$, tada važi

$$(p)\int_A f d\mu = ⨍_A f d\mu$$

za svako $f \in G$ i $A \in F$, što znači da su pan-integral i Sugenov integral jednaki.

Dokaz: Kako su $\{E, \bar{E}\}$ merljive particije skupa X za svako $E \in F$, nejednakost

$$(p)\int_A f d\mu \geq ⨍_A f d\mu$$

direktno sledi iz teoreme 4.2. i iz teoreme 4.5.

Sa druge strane, za svako dato $\varepsilon > 0$ i svako $E \in \hat{P}$, postoji $H_0 \in E$, tako da

$$\oplus_{H\in E}\left[\left(\inf_{x\in H} f(x)\right)\otimes \mu(A\cap H)\right] = \sup_{H\in E}\left[\left(\inf_{x\in H} f(x)\right)\wedge\mu(A\cap H)\right]$$

$$\leq \left(\inf_{x\in H_0} f(x)\right)\wedge\mu(A\cap H_0) + \ \varepsilon \leq ⨍_A f d\mu + \ \varepsilon.$$

Imamo da je

$$(p)\int_A f d\mu \leq ⨍_A f d\mu + \ \varepsilon.$$

Kako je ε jako mali broj blizu 0, imamo de je

$$(p)\int_A f d\mu \leq ⨍_A f d\mu.$$

Time smo dokazali da važi tvrđenje, odnosno:

$$(p)\int_A f d\mu = ⨍_A f d\mu.$$

Prethodna teorema daje odgovor na pitanje kada su pan-integral i Sugenov integral jednaki, a sledeća teorema će nam pokazati koje osobine treba da zadovoljavaju monotona mera i pan-operacije da bi pan-integral i Lebegov integral bili jednaki.

Teorema 4.7. [12] Neka je μ σ-aditivna. Ako je $\oplus$ uobičajeno sabiranje, a $\otimes$ uobičajeno množenje, tada imamo da je

$$(p)\int_A f d\mu = \int_A f d\mu$$

za svako $f \in G$ i $A \in F$, što znači da su pan-integral i Lebegov integral jednaki.

Dokaz: Kada $\oplus$ je $+$ i $\otimes$ je $\cdot$, tada pan-jednostavna funkcija je u stvari jednostavna nenegativna funkcija. Iz definicije Lebegovog integrala

$$\int_A f d\mu = \lim_n P(s_n|A)$$

za svako $f \in G$ i $A \in F$, gde je $\{s_n\}$ niz nenegativne neopadajuće jednostavne funkcije čija je granica f. Lako je videti da važi

$$(p)\int_A f d\mu \geq \int_A f d\mu.$$

Možemo birati $\{s_n\} \subset Q$, tako da $s_n \leq f, n = 1,2, \ldots$, i

$$\lim_n P(s_n|A) = (p)\int_A f d\mu.$$

Uzećemo $\bar{s}_n = \sup_{i \leq n} s_i$, $\bar{s}_n \in Q$, $n = 1,2, \ldots$, i $\bar{s}_n \nearrow f$. Kako je $P(s|A)$ neopadajući u odnosu na s, imamo da je

$$\int_A f d\mu = \lim_n P(\bar{s}_n|A).$$

Time smo dokazali da tvrđenje važi, odnosno:

$$(p)\int_A f d\mu = \int_A f d\mu.$$

4.3.3. Osobine pan-integrala

Pan-integral ima slične osobine kao što imaju Lebegov integral i Sugenov integral. U sledećim teoremama videćemo koje su te osobine.

Teorema 4.8. [13] Za svako $f \in G$ i $A \in F$

$$(p)\int_A f d\mu = (p)\int f \otimes \chi_A d\mu.$$

Sledeće osobine slede iz definicije 4.11., teoreme 4.2. i teoreme 4.5.

Teorema 4.9. [13] Neka su $f, g \in G$ i $A, B \in F$ i $a \in \mathbb{R}_+$. Tada važi:

(1) ako je $f = 0$ na A s.s., tada $(p)\int_A f d\mu = 0$;

(2) ako $\mu(A) = 0$, tada $(p)\int_A f d\mu = 0$;

(3) ako $f \leq g$, tada $(p)\int_A f d\mu \leq (p)\int_A g d\mu$;

(4) ako $A \subset B$, tada $(p)\int_A f d\mu \leq (p)\int_B f d\mu$;

(5) $(p)\int_A a d\mu \geq a \otimes \mu(A)$.

Sledi primer koji pokazuje da u teoremi 4.9. u osobini (5) ne mora da važi jednakost.

Primer 4.10. [12] Neka je (X, F, μ) monoton merljiv prostor dat na sledeći način:

$$X = \{a, b\}, \qquad F = P(X), \qquad \mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{ako } E = \emptyset \\ 0.5, & \text{ako } E = \{a\} \\ 0.7, & \text{ako } E = \{b\} \\ 1, & \text{ako } E = X \end{cases}.$$

Neka je $\oplus = +$ i $\otimes = \cdot$, tada je

$$(p)\int_A 1 d\mu = 1 \cdot \mu(\{a\}) + 1 \cdot \mu(\{b\}) = 0.5 + 0.7 = 1.2$$

ali

$$1 \cdot \mu(X) = 1.$$

Teorema 4.10. [12] Neka je $f \in G$ i $A \in F$. Ako je $(p)\int_A f d\mu = 0$, tada

$$\mu(A \cap \{x | f(x) > 0\}) = 0.$$

Dokaz: Označimo sa $B_n = A \cap \left\{x \middle| f(x) > \frac{1}{n}\right\}$. Imamo da je

$$B_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A \cap \{x | f(x) > 0\}.$$

Koristeći teoremu 4.9., imamo da je

$$0 = (p)\int_A f d\mu \geq (p)\int_{B_n} f d\mu \geq (p)\int_{B_n} \frac{1}{n} d\mu \geq \frac{1}{n} \otimes \mu(B_n) \geq 0.$$

Iz (PM5) imamo da je

$$\mu(B_n) = 0, n = 1,2, \ldots,$$

pa važi

$$\mu(A \cap \{x | f(x) > 0\}) = \lim_n \mu(B_n) = 0.$$

Time smo dokazali teoremu.

4.3.4. Teorema transformacije

Transformacija Sugenovog integrala je već data u poglavlju 4.2.3. Sad ćemo videti kako možemo transformirati pan-integral.

Teorema 4.11. [12] Neka je $(X, F, \mu, \overline{\mathbb{R}_+}, +, \cdot)$ pan-prostor. Ako je μ superaditivna, tada je

$$(p)\int \mu(A \cap F_\alpha)dm \geq (p)\int_A f d\mu$$

gde je $f \in G$,$A \in F$, m je Lebegova mera na $\overline{\mathbb{R}_+}$ i $F_\alpha = \{x|f(x) \geq \alpha\}$, za svako $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

U sledećoj teoremi videćemo šta se dešava ako je μ subaditivna.

Teorema 4.12. [12] Neka je $(X, F, \mu, \overline{\mathbb{R}_+}, +, \cdot)$ pan-prostor. Ako je μ subaditivna, tada je

$$(p)\int \mu(A \cap F_\alpha)dm \leq (p)\int_A f d\mu$$

gde je $f \in G$,$A \in F$, m je Lebegova mera na $\overline{\mathbb{R}_+}$ i $F_\alpha = \{x|f(x) \geq \alpha\}$, za svako $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Teorema 4.13. [12] Neka je $(X, F, \mu, \overline{\mathbb{R}_+}, +, \cdot)$ pan-prostor. Ako je μ aditivna, tada je

$$(p)\int \mu(A \cap F_\alpha)dm = (p)\int_A f d\mu$$

gde je $f \in G$,$A \in F$, m je Lebegova mera na $\overline{\mathbb{R}_+}$ i $F_\alpha = \{x|f(x) \geq \alpha\}$, za svako $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

U teoremama 4.11, 4.12, i 4.13 $(p)\int \mu(A \cap F_\alpha)dm$ se naziva Šokeov integral funkcije f na A u ondosu na μ koji ćemo označiti sa $(C)\int_A f d\mu$. O Šokeovom integralu ćemo više saznati u poglavlju 4.4. Teoreme 4.11. i 4.12. pokazuju vezu između pan-integrala i Šokeovog integrala u $(X, F, \mu, \overline{\mathbb{R}_+}, +, \cdot)$ prostoru [12].

4.4.Šokeov integral

4.4.1. Definicija Šokeovog integrala

Neka je (X, F, μ) monoton merljiv prostor, što znači da je X neprazan skup, F je σ-algebra podskupova skupa X i $\mu: F \to [-\infty, \infty]$ monotona mera. Neka je $A \in F$ i neka je f nenegativna merljiva funkcija na (X, F). Lebegov integral funkcije f u odnosu na μ nije dobro definisan ako μ nije aditivna [12]. Naime, za dve neopadajuće funkcije $\{s_j\}$ i $\{t_j\}$, sa osobinom $\lim_{j\to\infty} s_j = \lim_{j\to\infty} t_j = f$, gde je $s_j = \sum_{i=1}^{m_s(j)} a_{ji}\chi_{A_{ji}}$ i $t_j = \sum_{i=1}^{m_s(j)} b_{ji}\chi_{B_{ji}}$ za svako j, može da važi sledeće

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{m_s(j)} a_{ji}\mu(A_{ji}) \neq \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{m_s(j)} b_{ji}\mu(B_{ji}).$$

Lebegov integral se može definisati na više načina. U odeljku 4.1. je opisan pristup u kome se prvo definiše ovaj integral nad jednostavnim merljivim funkcijama, a zatim je Lebegov integral definisan nad svim merljivim funkcijama. Kao što je naglašeno u odeljku 4.1 kada je merljiva funkcija f nenegativna na skupu X tada se Lebegov integral funkcije f na skupu X svodi na oblik dat sa (4.2). Lebegov integral se može definisati i jednačinom (4.2) što čini drugi način definisanja ovog integrala. Analogno se definiše Šokeov integral u odnosu na monotonu meru, što se može videti u definiciji koja sledi.

Definicija 4.12. [1] Šokeov integral nenegativne merljive funkcije f u odnosu na monotonu meru μ na merljivom skupu A, označen sa $(C)\int_A f d\mu$, je definisan na sledeći način:

$$(C)\int_A f d\mu = \int_0^\infty \mu(A \cap F_\alpha)\, d\alpha,$$

gde je $F_\alpha = \{x | f(x) \geq \alpha\}$ za $\alpha \in [0, \infty)$. Ako je $A = X$ umesto $(C)\int_X f d\mu$ najčešće pišemo $(C)\int f d\mu$.

Kako je u definiciji 4.12. funkcija f merljiva, znamo da $F_\alpha = \{x|f(x) \geq \alpha\} \in F$ za $\alpha \in [0, \infty)$, prema tome i $A \cap F_\alpha \in F$, što znači da je $\mu(A \cap F_\alpha)$ dobro definisano. Dalje, $\{F_\alpha\}$ i $\{A \cap F_\alpha\}$ su familije nerastućih skupova u odnosu na α. Kako je monotona mera μ neopadjuća skupovna funkcija, vidimo da je $\mu(A \cap F_\alpha)$ neopadajuća funkcija po α, što znači da Rimanov integral ima smisla. Sledi da je Šokeov integral nenegativne merljive funkcije u odnosu na monotonu meru merljivog skupa dobro definisan.

Sledeća teorema nam pokazuje još jedan način izračunavanja Šokeovog integrala na skupu na kome je monotona mera konačna.

Teorema 4.14. [12] Neka je $\mu(A)$ konačna mera. Tada je

$$(C)\int_A f d\mu = \int_0^\infty \mu(A \cap F_{\alpha+})\, d\alpha,$$

gde je $F_{\alpha+} = \{x | f(x) > \alpha\}$ za $\alpha \in [0, \infty)$.

Dokaz: Za svako $\varepsilon > 0$, važi

$$(C)\int_A f d\mu = \int_0^\infty \mu(A \cap F_\alpha)\, d\alpha = \int_0^\infty \mu(A \cap \{x | f(x) \geq \alpha\})\, d\alpha$$

$$\geq \int_0^\infty \mu(A \cap \{x | f(x) > \alpha\})\, d\alpha \geq \int_0^\infty \mu(A \cap \{x | f(x) \geq \alpha + \varepsilon\})\, d\alpha$$

$$= \int_0^\infty \mu(A \cap \{x | f(x) \geq \alpha + \varepsilon\})\, d(\alpha + \varepsilon) = \int_\varepsilon^\infty \mu(A \cap \{x | f(x) \geq \alpha\})\, d\alpha$$

$$\geq \int_0^\infty \mu(A \cap \{x | f(x) \geq \alpha\})\, d\alpha - \varepsilon \cdot \mu(A)$$

$$= (C)\int_A f d\mu - \varepsilon \cdot \mu(A).$$

Kako je $\mu(A) < \infty$, uzeći da je $\varepsilon \to 0$ dobijemo da je

$$(C)\int_A f d\mu = \int_0^\infty \mu(A \cap \{x | f(x) > \alpha\})\, d\alpha = \int_0^\infty \mu(A \cap F_{\alpha+})\, d\alpha.$$

U specijalnom slučaju, kada je monotona mera σ-aditivna, Šokeov integral je jednak sa Lebegovim integralom i definicija Šokeovog integrala poklapa sa definicijom Lebegovog integrala. Može se zaključiti da je Šokeov integral uopštenje Lebegovog integrala.

Primer 4.11. [12] Neka je $X = [0,1]$, $f(x) = x$ za $x \in X$, F je familija Borelovih skupova na $[0,1]$, $\mu(B) = [m(B)]^2$ za $B \in F$, gde je m Lebegova mera. μ je monotona mera na σ-algebri F i f je merljiva nenegativna funkcija na X. Prema definiciji 4.12. imamo da je

$$(C)\int_A f d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x|f(x) \geq \alpha\})\, d\alpha = \int_0^\infty \mu(\{x|x \geq \alpha\})\, d\alpha$$

$$= \int_0^1 \mu([\alpha, 1])\, d\alpha = \int_0^1 [m([\alpha, 1])]^2\, d\alpha = \int_0^1 (1-\alpha)^2\, d\alpha$$

$$= \int_0^1 (1 - 2\alpha + \alpha^2)\, d\alpha = 1 - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

4.4.2. Osobine Šokeovog integrala

Suprotno Lebegovom integralu, Šokeov integral je nelinearan što znači da

$$(C)\int (f+g)\, d\mu \neq (C)\int f\, d\mu + (C)\int g\, d\mu$$

za neke nenegativne merljive funkcije f i g [12], što ćemo videti u sledećom primeru.

Primer 4.12. [12] Neka je $X = \{a, b\}, F = P(X)$ i

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{ako } A = \emptyset \\ 1, & \text{inače} \end{cases}.$$

Vidimo da je svaka funkcija na X merljiva. Uzmimo dve funkcije

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako } x = a \\ 1, & \text{ako } x = b \end{cases}$$

i

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako } x = b \\ 1, & \text{ako } x = a \end{cases},$$

imamo da je

$$(C)\int f\, d\mu = (C)\int_0^\infty \mu(\{x|f(x) \geq \alpha\})\, d\alpha = (C)\int_0^1 \mu(\{b\})\, d\alpha = 1 \cdot 1 = 1$$

i

$$(C)\int g\,d\mu = (C)\int_0^\infty \mu(\{x|f(x) \geq \alpha\})\,d\alpha = (C)\int_0^1 \mu(\{a\})\,d\alpha = 1 \cdot 1 = 1.$$

Kako je $f + g \equiv 1$

$$(C)\int (f+g)\,d\mu = (C)\int 1\,d\mu = (C)\int_0^\infty \mu(\{x|f(x) \geq \alpha\})\,d\alpha = (C)\int_0^1 1\,d\alpha$$
$$= 1.$$

Dobili smo da ne važi jednakost, tj. $(C)\int (f+g)\,d\mu \neq (C)\int f\,d\mu + (C)\int g\,d\mu$.

U sledećoj teoremi će biti navedene osobine koje zadovoljava Šokeov integral i koje takođe zadovoljava i Lebegov integral.

Teorema 4.15. [1] Neka su f i g nenegativne merljive funkcije na (X, F, μ). A i B merljivi skupovi, i a nenegativna relalna konstanta. Tada važi:

(1) $(C)\int_A 1\,d\mu = \mu(A)$;
(2) $(C)\int_A f\,d\mu = (C)\int_A f \cdot \chi_A\,d\mu$;
(3) ako $f \leq g$ tada $(C)\int_A f\,d\mu \leq (C)\int_A g\,d\mu$;
(4) ako $A \subset B$ tada $(C)\int_A f\,d\mu \leq (C)\int_B f\,d\mu$;
(5) $(C)\int_A af\,d\mu = a(C)\int_A f\,d\mu$.

Teorema 4.16. [12] $(C)\int_A f\,d\mu = 0$ ako $\mu(\{x|f(x) > 0\} \cap A) = 0$, tj. $f = 0$ na A skoro svuda, obrnuto, ako je monotona mera μ neprekidna sa donje strane i $(C)\int_A f\,d\mu = 0$, tada $\mu(\{x|f(x) > 0\} \cap A) = 0$.

Osobina, koja je data u sledećoj teoremi se zove translatornost Šokeovog integrala.

Teorema 4.17. [12] Za svaku konstantu c za koju važi $f + c \geq 0$, važi

$$(C)\int_A (f+c)\,d\mu = (C)\int_A f\,d\mu + c \cdot \mu(A).$$

Dokaz:

$$(C)\int_A (f+c)\,d\mu = \int_0^\infty \mu(A \cap \{x|f(x) + c \geq \alpha\})\,d\alpha$$

$$= \int_c^\infty \mu(A \cap \{x | f(x) + c \geq \alpha\})\, d\alpha + \int_0^c \mu(A \cap \{x | f(x) + c \geq \alpha\})\, d\alpha$$

$$= \int_c^\infty \mu(A \cap \{x | f(x) \geq \alpha - c\})\, d(\alpha - c) + \int_0^c \mu(A \cap X)\, d\alpha$$

$$= \int_0^\infty \mu(A \cap \{x | f(x) \geq \alpha\})\, d\alpha + \int_0^c \mu(A)\, d\alpha$$

$$= (C)\int_A f\, d\mu + c \cdot \mu(A).$$

4.4.3. Šokeov integral na konačnom skupu

U svakoj bazi podataka broj atributa je konačan. Neka je $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ konačan skup atributa. Tada je $(X, P(X))$ merljiv prostor. Neka je f nenegativna funkcija koja je definisana na skupu X. Ako uzmemo partitivni skup kao σ-algebru, svaka funkcija sa realnim vrednostima na X će biti merljiva.

Ako je X konačan skup i ako su dati f i μ tada možemo uzeti sledeću jednostavnu formulu za izračunavanje integrala $(C)\int f\, d\mu$.

Neka je $b_1 = \min_{1 \leq i \leq n} f(x_i)$ i $b_2 = \max_{1 \leq i \leq n} f(x_i)$. Vrednosti funkcije f su između b_1 i b_2 pa imamo da je $F_\alpha = X$ kada $\alpha \leq b_1$ i $F_\alpha = \emptyset$ kad $\alpha > b_2$. Koristeći translatornost Šokeovog integrala imamo da je

$$(C)\int f\, d\mu = (C)\int (f - b_1)\, d\mu + b_1 \cdot \mu(X)$$

$$= \int_0^{b_2 - b_1} \mu(\{x | f(x) - b_1 \geq \alpha\})\, d\alpha + b_1 \cdot \mu(X).$$

Ako vrednosti, $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ rasporedimo u neopadajući niz tako da

$$b_1 = f(x_1^*) \leq f(x_2^*) \leq \cdots \leq f(x_n^*) = b_2$$

gde je $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ je permutacija skupa $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, tada je skup $\{x | f(x) - b_1 \geq \alpha\}$ uvek $\{x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*\}$ kada $\alpha \in [f(x_{i-1}^*) - b_1, f(x_i^*) - b_1]$ za $i = 2,3, \dots, n$, tada

$$(C)\int f\ d\mu = \sum_{i=2}^{n}[f(x_i^*) - f(x_{i-1}^*)] \cdot \mu(\{x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*\}) + b_1 \cdot \mu(X)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[f(x_i^*) - f(x_{i-1}^*)] \cdot \mu(\{x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*\}) \qquad (4.3)$$

uz $f(x_0^*) = 0$.

Analogno se može izvesti formula za izračunavanje Šokeovog integrala na konačnom skupu ako se vrednosti $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ rasporede u nerastući niz. Ako je $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ je permutacija skupa $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ tako da važi

$$f(x_1^*) \geq f(x_2^*) \geq \cdots \geq f(x_n^*),$$

Tada je

$$(C)\int f\ d\mu = \sum_{i=1}^{n}[f(x_i^*) - f(x_{i+1}^*)] \cdot \mu(\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_i^*\}), \qquad (4.4)$$

gde je $f(x_{n+1}^*) = 0$.

Primer 4.13. Neka je $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $(X, P(X))$ merljiv prostor. Neka su monotona mera μ i funkcija f definisane kao u primeru 4.3.

Za vrednosti funkcije *f* na skupu X važi

$$f(x_1) > f(x_2) > f(x_3),$$

te je iz (4.4)

$$(C)\int f\ d\mu = [f(x_1) - f(x_2)] \cdot \mu(\{x_1\}) + [f(x_2) - f(x_3)] \cdot \mu(\{x_1, x_2\})$$

$$+[f(x_3) - f(x_4)] \cdot \mu(\{x_1, x_2, x_3\})$$

gde je $f(x_4) = 0$. Dakle, Šokeov integral funkcije *f* u odnosu na monotonu meru μ je

$$(C)\int f\ d\mu = [5 - 3] \cdot 1 + [3 - 1] \cdot 1$$

$$+[1 - 0] \cdot 3 = 7$$

4.4.4. Poređenje Šokeovog i Sugenovog integrala

Sledeća teorema daje odgovor na pitanje kada se Šokeov i Sugenov integral poklapaju.

Teorema 4.18. [3] Ako je μ monototona mera čiji je skup vrednosti $\{0,1\}$, tada za svaku merljivu funkciju $f: X \to [0,1]$ važi

$$(C)\int_X f d\mu = ⨍_X f\, d\mu.$$

Dokaz: Prvo ćemo dokazati jednakost

$$(C)\int_X f d\mu = \sup_{A:\mu(A)=1} \inf_{x\in A} f(x).$$

Označimo sa c desnu stranu jednačine. Dovoljno je dokazati da važi

$$\mu(\{x: f(x) > r\}) = \begin{cases} 1, \text{ako } r < c \\ 0, \text{ako } r > c. \end{cases}$$

Neka je $r < c$. Tada postoji skup $A \in \mathrm{F}$ tako da $\mu(A) = 1$ i $r < \inf_{x\in A} f(x)$. Prema tome $A \subset \{x: f(x) > r\}$, što implicira $\mu(\{x: f(x) > r\}) = 1$.

Neka je $r > c$. Pretpostavimo da je $\mu(\{x: f(x) > r\}) = 1,$ iz čega sledi da je $r > c \geq \inf_{x\in A} f(x) \geq r$ što je nemoguće. Dobili smo da važi naša pretpostavka, tj.

$$\mu(\{x: f(x) > r\}) = 0.$$

Treba još da dokažemo da je $⨍_X f\, d\mu = c$, što sledi iz teoreme 4.2. Dobili smo da je μ skupovna funkcija sa skupom vrednosti $\{0,1\}$, tj.

$$⨍_X f\, d\mu = \sup_{A\in \mathrm{F}} \left\{ \left[\inf_{x\in A} f(x) \wedge \mu(A) \right] \right\} = c.$$

Primer 4.14. Neka je $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $(X, P(X))$ merljiv prostor i funkcija f definisana sa

$$f(x) = \begin{cases} 0.2, & \text{ako je } x = x_1 \\ 0.5, & \text{ako je } x = x_2 \\ 1, & \text{ako je } x = x_3 \end{cases}$$

Neka je monotona mera μ definisana na sledeći način:

$$\mu(\emptyset) = 0,$$
$$\mu(\{x_1\}) = 0,\ \mu(\{x_2\}) = 1, \mu(\{x_3\}) = 0$$
$$\mu(\{x_1, x_2\}) = \mu(\{x_2, x_3\}) = 1, \mu(\{x_1, x_3\}) = 0,$$
$$\mu(X) = 1.$$

Tada je

$$⨍ f\ d\mu = \sup_{\alpha \in [0,\infty]} [\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)]$$
$$= \left(\sup_{\alpha \in [0,0.2]} [\alpha \wedge \mu(F_\alpha)] \right) \vee \left(\sup_{\alpha \in (0.2,0.5]} [\alpha \wedge \mu(F_\alpha)] \right) \vee \left(\sup_{\alpha \in (0.5,1]} [\alpha \wedge \mu(F_\alpha)] \right)$$
$$\vee \left(\sup_{\alpha \in (1,\infty]} [\alpha \wedge \mu(F_\alpha)] \right)$$

Za svako $\alpha \in (1, \infty]$ je $\mu(F_\alpha) = 0$ te je $\sup\limits_{\alpha \in (1,\infty]} [\alpha \wedge \mu(F_\alpha)] = 0$ i važi sledeće:

$$⨍ f\ d\mu = [0.2 \wedge \mu(\{X\})] \vee [0.5 \wedge \mu(\{x_2, x_3\})] \vee [1 \wedge \mu(\{x_3\})]$$

$$= [0.2 \wedge 1] \vee [0.5 \wedge 1] \vee [1 \wedge 0] = 0.2 \vee 0.5 \vee 0 = 0.5$$

Šokeov integral se može izračunati po formuli (4.3) jer imamo da je

$$f(x_1) < f(x_2) < f(x_3).$$

Neka je $f(x_0) = 0$. Šokeov integral ima sledeći oblik:

$$(C)\int f\ \ d\mu = [f(x_1) - f(x_0)] \cdot \mu(\{x_1, x_2, x_3\}) + [f(x_2) - f(x_1)] \cdot \mu(\{x_2, x_3\})$$
$$+ [f(x_3) - f(x_2)] \cdot \mu(\{x_3\})$$
$$= [0.2 - 0] \cdot 1 + [0.5 - 0.2] \cdot 1 + [1 - 0.5] \cdot 0 = 0.5.$$

Dakle, u ovom primeru Šokeov integral i Sugenov integral funkcije f u odnosu na datu monotonu meru μ su jednaki.

Monotona mera μ data u prethodnom primeru je aditivna, pa je u ovom slučaju Šokeov integral u stvari Lebegov integral u odnosu na μ.

5. Primena Šokeovog i Sugenovog integrala

U ovom delu rada će biti opisana primena Sugenovog i Šokeovog integrala u medicini.

Jedna od primena koja će biti prezentovana opisuje na koji način se ova dva integrala mogu primenti u proceni ukupne efikasnosti leka uzimajući u obzir njegov pozitivan uticaj na skup simptoma koji karakterišu posmatranu dijagnozu. Monotona mera na kojoj su bazirani Sugenov i Šokeov integral se dobija pomoću očekivane efikasnosti leka koju procenjuju lekari za svaki pojedinačni simptom. Zaključak koji lek je najefikasniji se izvodi tako što se upoređuju vrednosti ukupne efikasnosti lekova koje su izražene preko Sugenovog i Šokeovog integrala.

Takođe će biti opisana primena Sugenovog i Šokeovog integrala baziranih na λ-meri u endoskopskoj dijagnostici koja se zasniva na analizi snimaka. Naime, u ovim slučajevima se takođe polazi od podataka koje daju lekari na osnovu endoskopskog snimka želuca, a vrednost Sugenovog i Šokeovog integrala ima ulogu u razlikovanju čira na želucu od karcinoma na želucu.

5.1. Analiza subjektivnog evaluacionog modela za dijagnozu uz pomoć kliničkih snimaka

Medicinski snimci, kao što su radiogrami, ultrazvučni snimci, snimci sa magnetne rezonance itd. obezbeđuju važne informacije za razne dijagnoze i medicinsko lečenje. Klinički stručnjaci i lekari koriste ove snimke da procene pojedinačne slučajeve i izvedu sveobuhvatne procene raznih slučajeva. Ove procene obično zavise od subjektivnog stava medicinskih stručnjaka. Mere verovatnoće su, zbog svoje aditivnosti, ponekad restriktivne u predstavljanju ljudske subjektivnosti [8]. Monotone mere ili fazi mere ne zahtevaju ovo svojstvo i mogu se tumačiti kao subjektivne mere osobe koja procenjuje predmet [8]. Ove mere su stoga prikladnije od aditivnih mera za korišćenje kao subjektivne mere u medicinskim dijagnozama. λ mere, koje mogu da izraze i aditivnost i subaditivnost, mogu se šire primenjivati nego mere verovatnoće koje ne mogu tretirati superiornu aditivnost. Stoga ove mere verovatno mogu dati više preciznosti nego što mere verovatnoće daju kada subjektivna mera doktora ima superiornu aditivnost.

Do sada je zabeleženo samo nekoliko praktičnih pokušaja gde se koriste fazi mere u medicinskom sistemu odlučivanja [2]. U jednom primeru, predstavljena je primena na anovulatornu dijagnozu [2]. Subjektivne mere, kao što su λ-fazi mere, je nekoliko puta davao lekar kao ulazne podatke za analizu odluka. Fazi mere su, međutim, najčešće nepoznate i teže je direktno odrediti mere svakog slučaja ako je broj slučajeva veći. U literaturi je zabeleženo nekoliko metoda identifikacije fazi mera [8]. Kada su ulazni i izlazni podaci dostupni, za određivanje fazi mera [8] može se upotrebiti genetički alogoritam [2] koji se često koristi u problemima kombinatorne optimizacije. Analiziraćemo subjektivnu strukturu evaluacije dijagnoze endoskposkih snimaka sa λ merama koje identifikuje genetički algoritam.

5.1.1. Fazi mere i fazi integrali

U daljem tekstu zajedno za Šokeovog i Sugenovog integrala koristićemo izraz fazi integral.

Monotone mere i fazi integrali (integrali bazirani na monotonim merama) su neophodni alati za objektivnu procenu [8]. U praktičnim slučajevima, broj činilaca je ograničen, i stoga razmatramo jedan univerzalni skup stavki evaluacije $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Neka je u ovom odeljku $(X, 2^X)$ merljiv prostor i g normirana monotona mera na $(X, 2^X)$. Pretpostavka da je monotona mera g normirana znači da ćemo tim merama dozvoljavati da izraze stepen važnosti na intervalu $[0,1]$.

Određivanje vrednosti monotone mere na partitivnom skupu 2^X može da bude veoma komplikovano. Postoje bar dva razloga za ovu poteškoću. Prvo, potrebno je odrediti $2^n - 2$ vrednosti koje predstavljaju vrednost monotone mere nad podskupovima skupa X kojih ima ukupno 2^n. Na primer, ako je $n = 5$, onda moraju biti određene $30\,(= 2^5 - 2)$ vrednosti. Dalje, kada je $n = 7$ neophodne su $126\,(= 2^7 - 2)$ vrednosti. Drugo, monotone mere moraju da zadovoljavaju svojstvo monotonosti, tj. osobinu (MM2) iz definicije 2.2. Što je vrednost broja n veća to je određivanje monotone mere komplikovanije.

Da bismo pojednostavili ovaj problem, koristimo λ-meru (Sugenovu meru). Za ovu monotnu meru, manji je broj parametara koji se koriste da definišu fazi meru. Na osnovu definicije 3.3 iz odeljka 3.2 se može zaključiti da je g_λ na partitivnom skupu jedinstveno određena upotrebom $n + 1$ realnih brojeva (npr. fazi gustina i jedan parametar X) sa formulom

$$g_\lambda(A) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\left[\prod_{x_k \in A}\left(\lambda g^k + 1\right) - 1\right], & \text{kad } \lambda \neq 0 \\ \sum_{x_k \in A} g^k & \text{, kad } \lambda = 0 \end{cases}$$

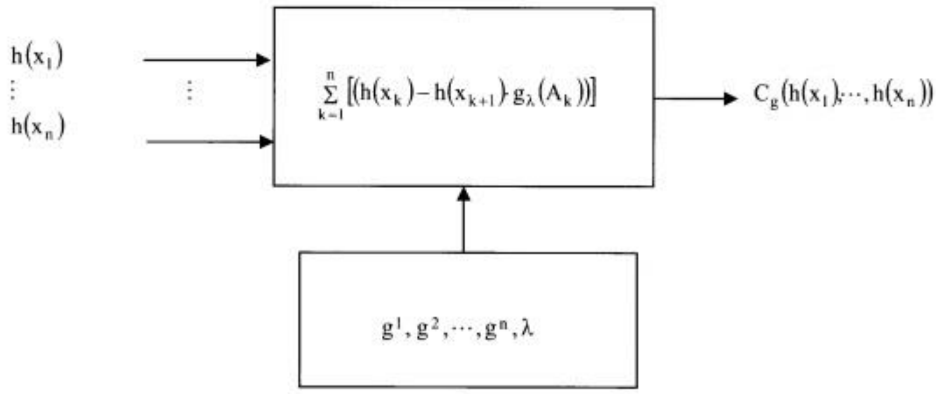
gde je $g^k = g_\lambda(\{x_k\})$ fazi gustina koja predstavlja stepen važnosti x_k.

Kada je potrebno doneti odluku na osnovu poznatih informacija primenjuju se različiti fazi integrali među kojima su Sugenov i Šokeov integral.

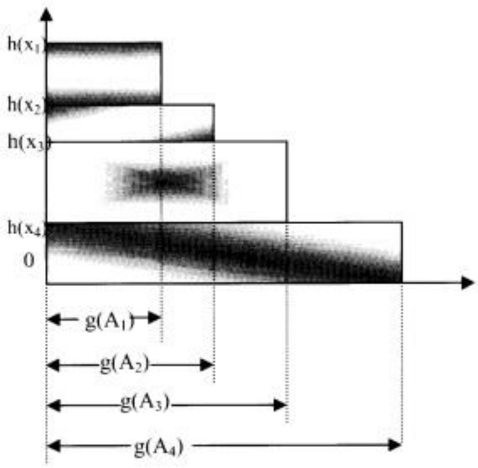
5.1.2. Model Šokeovog integrala

Sada će biti opisan postupak primene Šokeovog integrala iz [8]. Kao što je prikazano na slici 5.1, neka $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je univerzalan skup n činilaca evaluacije $g_\lambda\colon 2^X \to [0,1]$ bude λ mera i $h\colon X \to [0,1]$ bude partitivna funkcija evaluacije. Tada se pokazatelji permutiraju tako da

$$1 \geq h(x_1) \geq \cdots \geq h(x_n) \geq 0, \tag{5.1}$$



Slika 5.1. [8] Model Šokeovog integrala



Slika 5.2. [8] Šokeov integral za $n = 4$

Uzimajući u obzir oznake iz [8] i oblik Šokeovog integrala na konačnom skupu, datom u odeljku 4.4.3., Šokeov integral funkcije h u odnosu na g_λ je

$$C_g\big(h(x_1), \dots, h(x_n)\big) = \sum_{k=1}^{n}[(h(x_k) - h(x_{k+1}))g_\lambda(A_k)],$$

gde $A_k = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $h(x_{n+1}) = 0$. Primer Šokeovog integrala za četiri činioca, tj. za n=4 je prikazan na slici 5.2., zbir osenčenih delova je vrednost integrala. Vrednosti $h(x_k)$ i $g(A_k)$ su vrednost partitivne funkcije evaluacije za k-ti činilac i vrednost fazi mere k-tog činioca.

5.1.2.1. Određivanje fazi mera

Fazi integrali sumiraju dve informacije: funkciju h i fazi meru g. U nekoliko medicinskih aplikacija, vrednosti parcijalne funkcije evaluacije h se dobijaju od medicinskih stučnjaka koji procenjuju svaki činilac datog slučaja.

Sa druge strane, kada se posmatra stepen važnosti, fazi mere g su obično nepoznate i tada se o njima mora odlučiti. Kada je broj činilaca veći, medicinskom stručnjaku je teško da subjektivno donese odluku o vrednosti fazi gustine svakog činioca.

Ako se razmatra problem identifikacije modela fazi integrala koji je baziran na λ-meri, potrebno je odrediti fazi gustine i λ. Fazi gustine i λ su parametri koji opisuju model i njih ćemo u nastavku kraće nazivati parametri. Pošto se ulazni i izlazni podaci mogu dobiti kao što je već pomenuto, pretpostavićemo da su vrednosti, koje su prikazane u tabeli 5.1., date kao ulazno-izlazni podaci. Ulazni podaci $h_i(x_k), k = 1, \dots, n,$ koji predstavljaju vrednosti za i-ti slučaj parcijalne funkcije evaluacije sa obzirom na činilac x_k, se dobijaju od lekara. Izlazni podaci se dobijaju kroz sledeće dve metode. Prvo, izlazni podaci $a_i,\ i = 1, \dots, m$ su konačne medicinske dijagnoze datih slučajeva. Drugo, jednom kad se daju sve vrednosti parcijalnih funkcija evaluacije i λ mere, Šokeov integral može da odredi sveobuhvatnu procenu za svaki relevantan slučaj. Izlazni podaci c_j , koji predstavljaju kategoriju bolesti kojoj slučaj pripada, se dobijaju na sledeći način od vrednosti fazi integrala s_i za i-ti slučaj. Pod pretpostavkom da je broj klasifikovanih kategorija dva, c_1 i c_2, pravila klasifikacije su sledeća:

Ako $s_i \geq \gamma$, onda slučaj pripada c_1, a ako je $s_i < \gamma$, slučaj pripada c_2 pri čemu je

$$\gamma = \frac{\overline{s_1}\sigma_2 + \overline{s_2}\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}, \tag{5.2}$$

gde je $\overline{s_j}$ i σ_j predstavljaju uzoračku sredinu i standardnu devijaciju Šokeovog integrala sa obzirom na kategoriju c_j. Tada možemo koristiti $\overline{s_j}$ i c_j da odredimo parametre rešavanjem problema identifikacije modela. To znači da kada detektujemo model koji zadovoljava sledeće zahteve za što više slučajeva, $\overline{s_j}$ je isto kao c_j.

Slučaj	Vrednosti činilaca evaluacije			Šokeov integral	Medicinska dijagnoza
$i = 1$	$h_1(x_1)$	…	$h_1(x_1)$	s_1	a_1
2	$h_2(x_1)$	…	$h_1(x_1)$	s_2	a_2
…					
m	$h_m(x_1)$	…	$h_1(x_1)$	s_m	a_m

Tabela 5.1. [8] Ulazno izlazni podaci da bi se identifikovali parametri modeli

Ovaj zahtev odgovara preciznosti analize u sistemima medicinske dijagnostike. Možemo primeniti ovaj kriterijum koji mora da se koristi da bi se zadržali parametri koji pružaju najvišu preciznost. Kada se postignu zbirni skupovi parametara koji pružaju najvišu preciznost,drugi kriterijum je neophodan da bi se izabrao optimalan skup. Iz uslova da je $g_\lambda(X) = 1$ i jednačine (5.1), možemo izvesti sledeću jednačinu:

$$1 = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\left[\prod_{x_k \in A}(\lambda \cdot g^k + 1) - 1\right], \text{kad } \lambda \neq 0 \\ \sum_{x_k \in A} g^k \qquad\qquad\qquad\quad, \text{kad } \lambda = 0 \end{cases}. \tag{5.3}$$

Stoga možemo odrediti skup tako da

$$e(g^i,\ldots,g^n,\lambda)=\begin{cases}\left|\frac{1}{\lambda}\left[\prod_{X_k\in A}(\lambda\cdot g^k+1)-1\right]-1\right|, \text{kad } \lambda\neq 0\\ \left|\sum_{X_k\in A} g^k \quad -1 \quad \right| \qquad\qquad , \text{kad } \lambda=0\end{cases} \tag{5.4}$$

je minimiziran. Posledično, optimalni parametri maksimalno uvećavaju preciznost i minimiziraju formulu (5.4). Pošto su dostupni ulazno-izlazni podaci, za određivanje parametara se koristi genetički algoritam. Gustine koje odgovaraju činiocima su kodirane kao hromozom, a objektivne funkcije su tačnost i formula (5.4).

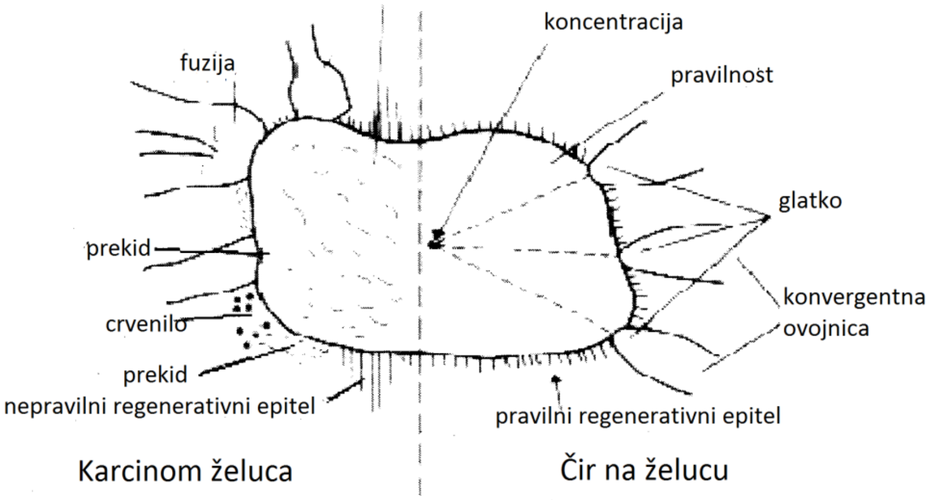
5.1.2.2. Primena Šokeovog integrala u endoskopskoj dijagnostici

U praktičnoj primeni, upotrebom Šokeovog integrala, razlikuju se aktivan stadijum čira na želucu koji se leči kao benigni slučaj i rani stadijum karcinoma na želucu koji se identifikuje kao maligni slučaj [8]. Vrednosti parcijalne funkcije evaluacije su se dobijale na sledeći način: lekar koji je verziran za dijagnozu endoskopskih snimaka je procenio snimke čira na želucu datog slučaja, dodeljujući broj od 0 do 1 svakom činiocu prikazanoj u tabeli 5.2. Posmatrano je četiri dela sluzokože čira na želucu, a to uključuje krastu, sluzokožu, regenerativni epitel i ovojnice. Slika 5.3. ilustruje i benigne i maligne slučajeve, koji imaju različite odlike. Lekar je procenjivao trideset i osam benignih i dvadeset i tri maligna slučaja. Optimalni parametri su određeni sa ovim vrednostima evaluacije. U genetičkom algoritmu, u reprodukciji je korišćen elitizam za brzu konvergenciju, a stopa prelaska, stopa mutacije, broj hromozoma i broj generacije (uslov na kraju) su bili 1, 0.08, 100, and 300, tim redom. Pod pretpostavkom da subjektivne mere ne poseduju ekstremno veliko λ, vrednost λ varira na intervalu od $-0,99$ do 5 u intervalima od $0{,}01$. Procenjeni parametri su prikazani u tabeli 5.3.. λ mere u ovoj aplikaciji zahtevaju uslov iz jednačine (5.4). U praktičnim slučajevima, moramo naći λ mere kod kojih je vrednost desne strane jednačine (5.4) bliža 0. Čak i ako se nađu λ mere koje daju najveću tačnost, ove mere neće biti prihvaće ako uslovi (gore) nisu zadovoljeni. Parametri su ispitani pošto su preciznost i vrednosti dobijene (5.4) bile na dozvoljenom intervalu. Prvo, zato što je λ vrednost bila pozitivna, subjektivne mere koje je dao lekar nisu bile aditivne mere, drugim rečima, među činiocima su se dešavale inherentne sinergetske interakcije [8].

Posmatrani deo	**Činilac**	**Evaluacija (u 0,1 povećanju)**
krasta	površina	0 (glatka) ⇔ 1 (gruba)
	margina	0 (pravilna) ⇔ 1 (nepravilna)
sluzokoža	površina	0 (glatka) ⇔ 1 (gruba)
	margina	0 (pravilna) ⇔ 1 (nepravilna)
	boja (crvenilo)	0 (normalna) ⇔ 1 (crveni se)

regenerativni epitel	struktúra	0 (pravilna) ⇔ 1 (nepravilna)
omotač	oblik	0 (pravilan) ⇔ 1 (nepravilan)
	konvergentnost	0 (konvergentno) ⇔ 1 (nekonvergentno)

Tabela 5.2. [8] Činioci i evaluacije



Slika 5.3. [8] Odlike čira želuca

Sledeće, vrednosti λ mera ta četiri dela, kraste, sluzokože, epitela i ovojnice su bile redom 0.039, 0.243, 0.052, i 0.386. Vrednosti fazi mera za sluzokožu i ovojnice su se značajno razlikovale od ostalih delova. Boja sluzokože i konvergentnost ovojnice, koje su date u tabeli 5.3., posebno su pokazivale vrednosti gustine različitih razmera. Ovaj rezultat ukazuje da su ta dva činioca krucijalna u ovom dijagnostičkom modelu. Dalje, delovi koji imaju najveće stepene vrednosti u ovom modelu odgovaraju delovima za koje je lekar procenio da imaju najveću vrednost. Sa druge strane, gustine krasti i epitela su bile slične malim vrednostima koje je lekar procenio. Konačno, fazi gustine površine sluzokože želuca bile su 0,000, čineći je zanemarljivom. Tačnost koja je dobijena korišćenjem ostalih sedam činilaca bez ovog činioca nije varirala.

Deo	Činilac	Gustina
krasta	površina	0.0095
	margina	0.0286
sluzokoža	površina	0.000
	margina	0.0810
	boja	0.1429
regenerativni epitel	struktúra	0.0524
ovojnica	oblik	0.0905
	konvergentnost	0.2571
λ		1.65
tačnost		0.902
e		0.00046

Tabela 5.3. [8] Modeli parametri svakog činioca

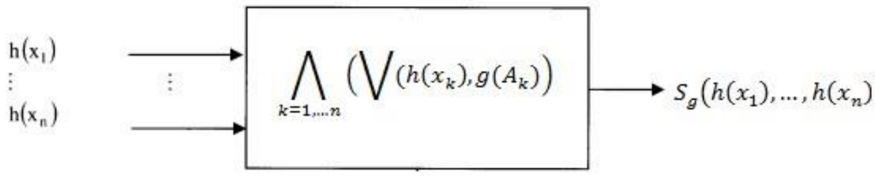
5.1.3. Model Sugenovog integrala

Sada će biti opisan postupak primene Sugenovog integrala iz [9]. Kao što je prikazano na slici 5.4, neka je $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ univerzalan skup n činilaca evaluacije, $g_\lambda: 2^X \to [0,1]$ λ-mera i $h: X \to [0,1]$ partitivna funkcija evaluacije. Ako koristimo oznake iz [9] i pokazatelji se permutiraju tako da

$$1 \geq h(x_1) \geq \cdots \geq h(x_n) \geq 0,$$

tada diskretni Sugenov integral funkcije h u odnosu na g ima sledeći oblik

$$S_g\big(h(x_1), \dots, h(x_n)\big) = \wedge_{k=1,\dots n}(\vee(h(x_k), g(A_k)) \qquad (5.5)$$



Slika 5.4. [9] Model Sugenovog integrala

gde je $A_k = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Identifikacija fazi mera se određuje na isti način kao kod Šokeovog modela.

5.1.3.1. Primena na endoskopsku analizu

U nastavku slede isti podaci koje smo imali i kod Šokeovog integrala, jer su stučnjaci istraživali isti slučaj samo sa drugom metodom.

U praktičnoj primeni, uvođenjem Sugenovog integrala razlikovani su aktivni stadijum čira na želucu tretiran kao benigni slučaj i rani stadijum karcinoma želuca identifikovan kao maligni slučaj [9]. Vrednosti parcijalne funkcije evaluacije su dobijene na sledeći način; lekar koji je verziran za dijagnozu endoskopskih snimaka je procenio je snimke čira na želucu datog slučaja, dodeljujući broj koji se proteže od 0 do 1 svakom činiocu prikazanom u tabeli 5.4. Posmatrana su četiri dela ulceroznog tkiva želuca, to jest, krasta, sluzokoža, regenerativni epitel i ovojnice. Slika 5.3. ilustruje i benigni i maligni slučaj, koji imaju različite osobine. Lekar je procenjivao 38 benignih slučajeva i 23 maligna slučaja; štaviše, optimalni parametri su dobijeni korišćenjem ovih vrednosti evaluacije. U genetskom algoritmu, uveden je elitizam za brzu konvergenciju u reprodukciji; dalje, stopa prelaska, stopa mutacije, broj hromozoma i broj generacije kao krajnji uslov, bili su 1, 0.08,100, i 300, tim redom. Pod pretpostavkom da subjektivne mere nisu posedovale ekstremno visok X, vrednosti X su varirale na intervalu od -0.99 do 5 u intervalima od 0.01.

Procenjeni parametri su u tabeli 5.4. Pošto su vrednosti tačnosti i formula (5.4) bile u dozvoljenom opsegu, parametri su bili ispitani. Prvo, fazi gustina površine sluzokože želuca bila je 0,000, tako da je ovaj činilac bio zanemarljiv. Zapravo, tačnost koja je dobijena korišćenjem ostalih sedam činilaca, bez ovog činioca, nije varirala. Sledeće, vrednosti λ-fazi mera za četiri dela, krastu, sluzokožu, epitel i ovojnice bile su 0.038, 0.201, 0.090, i 0.375, tim redom. Vrednosti sluzokože i ovojnica bile su više nego duplo veće od ostalih delova. Ovaj rezultat pokazuje da su ova dva dela krucijalna u ovom dijagnostičkom modelu. Dalje, delovi koji su pokazali visok stepen važnosti u ovom modelu odgovaraju delovima za koje je lekar procenio da imaju visok stepen važnosti. Konačno, λ-vrednost je bila pozitivna, tako da subjektivne mere koje je dao lekar nisu bile aditivne mere; drugim rečima, inherentne sinergetske interakcije se dešavaju između činilaca.

Deo	Činilac	Gustina
krasta	površina	0.014
	margina	0.019
sluzokoža	površina	0.000
	margina	0.086
	boja	0.100
regenerativni epitel	struktúra	0.090
ovojnica	oblik	0.052
	konvergentnost	0.295
λ		1.80
tačnost		0.902
e		0.00296

Tabela 5.4. [9] modeli parametri svakog činioca

5.2.Šokeovi i Sugenovi integrali kao mere totalne delotvornosti lekova

U ovom delu rada ćemo opisati modele za odabir lekova koji se baziraju na Šokeovom i Sugenovom integralu. Posmatraće se koncept efikasnosti u kome figurišu fazi mere, koji se primenjuje u razmatranju veze između simptoma posmatrane bolesti i lekova koji se uzimaju prilikom lečenja te bolesti [7].

5.2.1. Kratak pregled modela za donošenje odluka kod upotrebe lekova

U ovom delu rada ćemo pod pojmovima prostora stanja podrazumevati $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ i prostor alternativa $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ [7]. Razmatramo model odlučivanja u kojem se n alternative $a_1, \dots, a_n \in A$ ponašaju kao lekovi koji se koriste za lečenje pacijenta koji boluje od neke bolesti. Lekovi treba da utiču na m stanja $x_1, \dots, x_m \in X$, koji predstavljaju m tipičnih simptoma te-određene bolesti.

Ako racionalni donosilac odluke donese odluku $a_i \in A$, i $= 1, 2, \dots,$ n, razmatrajući stanja - rezultate $x_j \in X$, j $= 1, 2, \dots,$ m, tada se problem svodi na razmatranje trojke (X, A, U) gde je X skup stanja-rezultata, A - skup odluka i U - matrica korisnosti [5,6]

$$U = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1m} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nm} \end{bmatrix} \end{array} \tag{5.5}$$

u kojoj je svaki element u_{ij}, i $= 1, 2, \dots, n$, j $= 1, 2, \dots, m$, reprezentativna vrednost koja pripada $[0, 1]$ za fazi korisnost koja sledi iz odluke a_i sa rezultatom x_j.

Teoretski model sa trojkom (X, A, U), može imati svoju praktičnu primenu u procesu biranja optimalnog leka iz uzorka testiranih lekova [5,6].

Sledeći korak je povezivanje svakog stanja-simptoma x_j, j $=$ $1, \dots,$ m, sa pozitivnim brojem koji ukazuje na njegovu moć ili važnost u donošenju odluka u skladu sa pravilom: što je broj veći, očekivaće se veći značaj simptoma x, kada se uzme u obzir njegov štetni uticaj na pacijentovo stanje. Ako označimo $w_1, w_2, \dots, w_m$ kao snage-težine $x_1, \dots, x_m, w_j \in W, j = 1,2, \dots, m$, gde je W položaj težine, onda ćemo modifikovati (5.5) kao težinsku matricu

$$U_W = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} w_1u_{11} & w_2u_{12} & \dots & w_mu_{1m} \\ w_1u_{21} & w_2u_{22} & \dots & w_mu_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ w_1u_{n1} & w_2u_{n2} & \cdots & w_mu_{nm} \end{bmatrix} \end{array} \tag{5.6}$$

U skladu sa unosom podataka određenim u (5.6), zajednička snaga odlučivanja a_i je aproksimirana kvantitetom $\mathrm{U_w}(a)$, definisanim kao OWA operacija [7]

$$U_W(a_i) = \sum_{i=1}^{m} w_j u_{ij} \tag{5.7}$$

Kao konačnu optimalnu odluku a^* biramo a_i koja zadovoljava

$$U_W(a_i) = \sum_{i=1}^{m} w_j u_{ij} \quad U_W(a^*) = \max_{1 \le i \le n} U_W(a_i).$$

to jest, odlučujemo se za lek koji ima najvišu ocenu korisnosti što se tiče simptoma koje se leče. Posebna korisnost u_{ij} se označava kao sposobnost povlačenja simptoma posle upotrebe lekova. Drugim rečima, definišemo korisnost u_{ij} od a_i uzimajući x_j kao efikasnost leka a_i posmatrano u slučaju x_j.

5.2.2. Odlučujuća uloga efikasnosti za finalnu odluku

Cilj je da se pronađe način za određivanje efikasnosti lekova kao matematički izrazi koji treba da se pojavljuju u matrici U_W. Na osnovu ranijih eksperimenata, lekar opisno definiše lekovitu efikasnost lekova u odnosu na razmatrane simptome. On predlaže listu termina koji uvode lingvističku promenljivu nazvanu "efikasnost leka s obzirom na simptom" = *{R_1 = nema je, R_2 = skoro da je nema, R_3 = veoma mala, R_4 = mala, R_5 = prilično mala, R_6 = srednja , R_7 = prilično velika, R_8 = , R_9 = veoma velika, R_{10} = skoro potpuna, R_{11} = potpuna}* [5,6]. Svaki pojam iz liste termina je ime jednog fazi skupa. Pretpostavimo da su svi skupovi definisani u $Z=[0,100]$, pogodnom kao referentni skup za podršku R_1- R_{11}. Neka su fazi skupovi R_1- R_{11} definisani pomoću linearne funkcije [**10**]

$$L(z,\alpha,\beta)=\begin{cases} 0, za\, z\le\alpha \\ \dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha}, za\,\alpha<z\le\beta \\ 1, za\, z>\beta \end{cases} \tag{5.8}$$

i

$$\pi(z,\alpha,\gamma,\beta)=\begin{cases} 0, za\, z\le\alpha \\ L(z,\alpha,\gamma), za\,\alpha<z\le\gamma \\ 1-L(z,\gamma,\beta), za\,\gamma<z\le\beta \\ 0, za\, z>\beta \end{cases} \tag{5.9}$$

gde je z nezavisna promenljiva od $[0,100]$, dok su α,γ,β parametri.

Definišemo

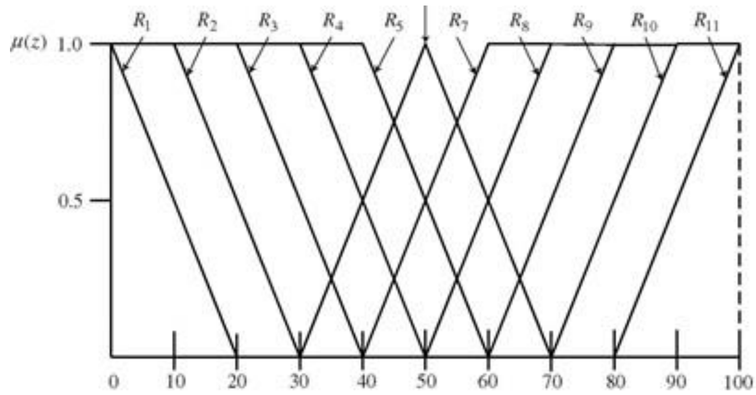
$$u_{R_t}(z)=\begin{cases} 1-L(z,\alpha_t,\beta_t)\, za\, t=1,2,3,4,5 \\ L(z,\alpha_t,\beta_t)\, za\, t=7,8,9,10,11 \end{cases} \tag{5.10}$$

i

$$u_{R_6}(z)=\pi(z,\alpha_6,\gamma,\beta_6) \tag{5.11}$$

u kom su $\alpha_t, \beta_t\ \gamma$ granice za podršku fazi skupova R_1- R_{11}.

Primer 5.1. Slika 5.5. predstavlja grafikone fazi skupova R_1- R_{11} koji mogu biti odobreni kao termini od koji sačinjavaju sadržaj liste efikasnosti.



Slika 5.5. [2] Grafikoni fazi skupova R_1- R_{11}

Za svaku efikasnost, proširenu kao neprekidni fazi skup, voleli bi smo da dodelimo samo jednu vrednost.

Primer 5.2. Da bismo pronašli adekvatan $z \in [0,100]$ koji predstavlja termine efikasnosti R_1- R_{11}, usvojićemo kao z vrednosti α_t za $t = 1,2,3,4,5$, i β_t i γ za $t = 7,8,9,10,11$ u skladu sa (5.10), odnosno *GAMA* zbog (5.11). Jednostavno očitavamo vrednosti α_t, β_t i γ sa slike 5.5, da ne bismo uvodili očigledne računice. Ove z -vrednosti su elementi za podršku novog fazi skupa *"efikasnosti"* čije su funkcije članova izražene preko intervala $[0,100]$ uvođenjem $\mu_{"efikasnost"}(z) = L(z, 0{,}100)$. Za z-predstavnike od R_1- R_{11}, mi konačno računamo vrednosti članova $\mu_{"efikasnost"}(z)$, koji menjaju termine efikasnost-korisnost kao količine u_{ij}. Dobijeni rezultati su sumirani u tabeli 5.5..

Efikasnost	z-vrednosti koje predtsstavljaju efikasnost	$\mu(z) = u_{ij}$
nema je	0	0
skoro da je nema	10	0.1
veoma mala	20	0.2
mala	30	0.3
prilično mala	40	0.4
srednja	50	0.5
prilično velika	60	0.6
velika	70	0.7
veoma velika	80	0.8
skoro potpuna	90	0.9
potpuna	100	1

Tabela 5.5. [2] Predstavnici efikasnosti

Sledeći problem koji se uvodi u diskusiju je postupak dobijanja skale odnosa važnosti za grupu m simptoma [7]. Pretpostavimo da želimo da konstruišemo skalu za m stanja-simptome, ocenjujući ih prema njihovoj važnosti za donošenje odluke. Poredimo simptome po parovima sa obzirom na njihov štetan uticaj na pacijentovo zdravlje. Ako suočimo simptom j sa simptomom l, onda možemo dodeliti vrednosti b_{jl} i b_{lj} paru (x_j, x_l) kako sledi, $\mathrm{j,l} = 1, 2, \ldots, \mathrm{m}$:

(1) $b_{jl} = \frac{1}{b_{lj}}$

(2) Ako je simptom j važniji od simptoma l onda se b_{jl} dodeljuje jedan od brojeva 1, 3, 5, 7 ili 9 zbog razlike u važnosti i to *jednak*, *slab*, *jak*, *pokazan* ili *apsolutan*, tim redom. Ako je simptom l važniji od simptoma j, dodelićemo vrednost b_{lj}.

Pošto smo dobili te procene, konstruiše se $m \times m$ matrica $B = (b_{jl})_{j,l=1}^{m}$. Težinski koeficijenti $w_1, w_2, \ldots, w_m \in W$ su određeni kao komponente karakterističnog vektora koji odgovara karakterističnom korenu matrice B sa najvećom apsolutnom vrednošću. Normiramo težine W_j deleći ih sve sa najvećom težinom $w_{targest}$. Cilj ove jednostavne operacije je da budu svi W_j u intervalu $[0, 1]$ koji sada zamenjuje W.

Označićemo normirane težine sa: $\widehat{w}_j = \frac{w_j}{w_{najveći}}$.

Posle toga prerasporedimo $\widehat{w}_1, \widehat{w}_2, \ldots, \widehat{w}_m$ da bi smo stvorili razmeštaj normalizovnih težina u rastućem $\widehat{w}_1^a, \widehat{w}_2^a, \ldots, \widehat{w}_m^a$ nizu zadovoljavajući uslov $0 < 0 = \widehat{w}_1^a \leq \widehat{w}_2^a \leq \cdots \leq \widehat{w}_m^a = 1$. Simptomi $\mathrm{x_j}$ prate novi razmeštaj pridruženih težina. Da bi se izbeglo previše znakova određivanja, označićemo poređane i normirane težine sa $\omega_j = \widehat{w}_j^a$ i dodelimo ih simptomima $\chi_j \in X$, $\mathrm{j} = 1, 2, \ldots, \mathrm{m}$. Matrica $U_{[0,1]}$ je prilagođena novim pretpostavkama kao $U_{[0,1]}$ pošto je

$$U_{[0,1]} = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \chi_1 & \chi_2 & \cdots & \chi_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} \omega_1 u_{11} & \omega_2 u_{12} & \ldots & \omega_m u_{1m} \\ \omega_1 u_{21} & \omega_2 u_{22} & \ldots & \omega_m u_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \omega_1 u_{n1} & \omega_2 u_{n2} & \cdots & \omega_m u_{nm} \end{bmatrix} \end{array}. \tag{5.12}$$

Formula (5.7) zamenjena sa

$$U_{[0,1]}(a_i) = \sum_{j=1}^{m} \omega_j u_{ij} \tag{5.13}$$

zbog novog reda težina.

Posle teoretskih dostignuća dokazivanja prilagodljivih metoda iznošenja krucijalnih elementa odlučivanja u_{ij} (efikasnost asimilacije a_i sa x_j ili, radije, sa χ_j) i ω_j, pokazaćemo rezultate procesa koji bira optimalni lek.

Primer 5.3. Sledeći klinički podaci tiču se dijagnoze *"koronarna bolest srca"*. Razmatramo najznačajnije simptome x_1 = *"bol u grudima"*,x_2 = *"promene u EKG-u"* i x_3 = *"povišen nivo LDL-holesterola"*. Lekovi koji popravljaju pacijentovo stanje su preporučeni kao a_1 = *nitroglicerin*, a_2 = *beta-adenergični blokator* and a_3 = *statinski LDL-reduktor*.

Lekar je procenio odnos između efikasnosti lekova i povlačenja simptoma. Izražavamo veze u Tabeli 5.6.

a_i/x_i	x_1	x_2	x_3
a_1	potpuno, $u_{11} = 1$	veoma veliko, $u_{12} = 0.8$	skoro nikakvo, $u_{13} = 0.1$
a_2	srednje, $u_{21} = 0.5$	prilično veliko, $u_{22} = 0.6$	malo, $u_{23} = 0.3$
a_3	malo, $u_{31} = 0.3$	malo, $u_{32} = 0.3$	veoma veliko, $u_{33} = 0.8$

Tabela 5.6. [7] Odnos između delovanja lekova i povlačenja simptoma

Dalje, zaključujemo da je fizičko stanje pacijenta subjektivno bolje ako simptom x_1 = *"bol u grudima"* nestane. Sledeći prioritet se dodeljuje x_2 = *"promenama u EKG-u"* i na kraju, koncentrišemo se na rešavanje x_3 = *"povišenog nivoa LDL holesterola"*. Stoga konstruišemo B kao

$$B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{3} & 1 & 3 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Najveći karakteristični koren od B ima pridruženi karakteristični vektor $V = (0.93295, 0.30787, 0.18659)$. V je sastavljeno od koordinata koje se tumače kao težine w_1, w_2, w_3 odgovarajuće za x_1, x_2, x_3. Ako normiramo i preraspodelimo težine dobija se $\omega_1 = 0.2$, ω_2 =0.33 i $\omega_3 = 1$ koje odgovaraju redom $\chi_1 = x_3$, $\chi_2 = x_2$ i $\chi_3 = x_1$.

Na osnovu (5.12) korisnosti $U_{[0,1]}(a_i)$ lekova $a_i, i = 1{,}2{,}3$, su

$$U_{[0,1]}(a_1) = 0.2 \cdot 0.1 + 0.33 \cdot 0.8 + 1 \cdot 1 = 1.284,$$

$$U_{[0,1]}(a_2) = 0.2 \cdot 0.3 + 0.33 \cdot 0.6 + 1 \cdot 0.5 = 0.758,$$

$$U_{[0,1]}(a_3) = 0.2 \cdot 0.8 + 0.33 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.3 = 0.559.$$

Posle stavljanja korisnosti lekova u opadajući niz ustanovljavamo hijerarhiju lekova kao $a_1 \succ a_2 \succ a_3$, pod pretpostavkom da pojam $a_i \succ a_k$ označava *"a_i deluje bolje od a_k"* kada se uzmu u obzir svi uključeni simptomi i, k $= 1, 2, 3$.

5.2.3. Šokeov integral kao totalna efikasnost

Normiranje i preraspodela težina su učinjene sa namerom da se dokaže da formula (5.12) može da se tumači koa pravilo koje odgovara proračunu Šokeovog integrala [10].

Simptomi $\chi_1, \dots \chi_m \in X$ se ponašaju kao objekti u X. Neka je $m\left(\left\{\chi_j | a_i\right\}\right) = u_{ij}$, gde simboli $\chi_j | a_i$ odražavaju vezu između simptoma χ_j i leka a_i, $j = 1, 2, \dots, \mathrm{m}, i = 1, 2, \dots, n.$ Vrednosti $m\left(\left\{\chi_j | a_i\right\}\right) = u_{ij}$ su navedene u poslednjoj koloni Tabele 5.4.

Težinski koeficijenti ω_j su postavljeni kao vrednosti $f(\chi_j)$ funkcije $f: X \to W = [0,1]$. Pomoću prethodne terminologije, totalna korisnost a_i za sve simptome $\chi_1, \dots \chi_m$ se može izraziti preko Šokeovog integrala

$$U_{[0,1]}^{Ch}(a_i) = \int\limits_{X=\{\chi_1,\dots\chi_m\}} f(\chi_j) dm(\chi_j | a_i) \qquad (5.14)$$

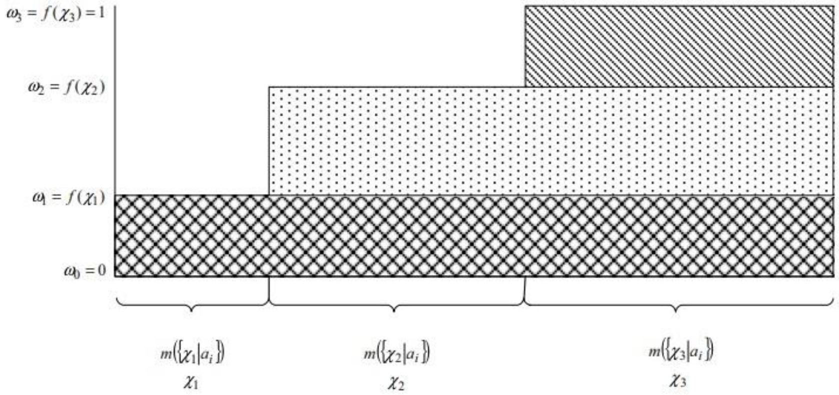
u odnosu na monotonu meru $m\left(\left\{\chi_j | a_i\right\}\right)$.

Ako se uzme u obzir jedankost (4.7), može se zaključiti da Šokeov integral (5.14) ima sledeći oblik:

$$U_{[0,1]}^{Ch}(a_i) = \sum_{k=1}^{m}(\omega_k - \omega_{k-1}) \cdot \mu(\{\chi_k|a_i, \chi_{k+1}|a_i, \dots, \chi_n|a_i\}) \quad (5.15)$$

za $\omega_0 = 0, i = 1, \dots n.$

Podsetimo se da je m mera korisnosti sa vrednostima $\{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$ (skup vrednosti koje označavaju efikasnost) definisana za simptome pošto smo ih lečili lekovima. Ako je korisnost nema je onda će mera biti jednaka nuli. Za totalnu korisnost potpuna uzimamo da je mere jedan. Lekar može odrediti zajedničku korisnost lekova za dva simptoma pošto je manja nego zbir korisnosti za različite simptome, na primer, efikasnost a_2 za " bol u grudima i promene u EKG-u" se zajedno procenjuje kao 0.5 dok se kao odvojene mere efikasnosti izdvajaju 0.6 i 0.5 (Tabela 5.6). Poslednja napomena otkriva neaditivno svojstvo mere efikasnosti. Bez ijednog zvaničnog dokaza koji bi potvrdio efikasnosnost kao fazi meru, mi nameravamo da ga koristimo u Šokeovom integralu sastavljenom za uzorak lekova da bi približno odredio njihova lekovita svojstva.



Slika 2. Šokeov integral u proceni a_1 potpunog lekovitog svojstva

U sledećem primeru računamo sveukupnu efikasnost lekova iz primera 3 da bi se uporedili rezultati dobijeni ovde.

Primer 5.4. Grafički prikaz odgovarajućih vrednosti je dat na slici 5.6. Iz formule (5.15) sledi da je

$$U_{[0,1]}^{Ch}(a_1) = 0.2 \cdot (0.1 + 0.8 + 1) + 0.13 \cdot (0.8 + 1) + 0.67 \cdot 1 = 1.284$$

$$U^{Ch}_{[0,1]}(a_2) = 0.2 \cdot (0.3 + 0.6 + 0.5) + 0.13 \cdot (0.6 + 0.5) + 0.67 \cdot 0.5 = 0.758$$

i

$$U^{Ch}_{[0,1]}(a_3) = 0.2 \cdot (0.8 + 0.3 + 0.3) + 0.13 \cdot (0.3 + 0.3) + 0.67 \cdot 0.3 = 0.559.$$

Rezultati su identični proračunima dobijenim u Primeru 5.3, što potvrđuje odgovarajuću interpretaciju Šokeovog integrala u rangiranju lekova $a_1 \succ a_2 \succ a_3$.

5.2.4. Sugenov integral u hijerarhijskom redu lekova

Da bismo mogli da uvedemo integral poput Sugenovog u proračune koji dovode do izbora optimalnog leka, normalizujemo mere $m\{\chi_l \mid a_i : f(\chi_l) \geq \omega_j\}$, $j,l = 1,2, ..., m$, tako što ih sve podelimo sa najvećom vrednošću. Ova operacija nam obezbeđuje da vrednosti $\hat{m}\{\chi_l \mid a_i : f(\chi_l) \geq \omega_j\}$ budu u intervalu [0, 1].

Ako preuzmemo oznake i terminologiju iz [7], korisnost a_i se može izraziti primenom Sugenovog integrala na sledeći način:

$$U^S_{[0,1]}(a_i) = \int_{X=\{\chi_1,\dots,\chi_m\}} f(\chi_j) dm(\chi_j|a_i) = \wedge_{1\leq j\leq m}\big(\vee\big(\omega_j, \hat{m}\{\chi_l|a_i{:}\, f(\chi_l) \geq \omega_j\}\big)\big) \qquad (5.17)$$

za j, l = 1, 2, ..., m, i = 1, 2, ..., n.

Primer 5.5. Mere $m\{\chi_l \mid a_1 : f(\chi_l) \geq 0.2\} = 1.9, m\{\chi_l \mid a_1 : f(\chi_l) \geq 0.33\} = 1.8$, $m\{\chi_l \mid a_1 : f(\chi_l) \geq 1\} = 1$ se dele sa najvećom vrednošću *m* jednakoj 1.9 da bi se formirale njihove normirane verzije

$\hat{m}\{\chi_l \mid a_1 : f(\chi_l) \geq 0.2\} = 1, \hat{m}\{\chi_l \mid a_1 : f(\chi_l) \geq 0.33\} = 0.947$,

$\hat{m}\{\chi_l \mid a_1 : f(\chi_l) \geq 1\} = 0.526.$

$\hat{m}\{\chi_l \mid a_1 : f(\chi_l) \geq 0.2\} = 1, \hat{m}\{\chi_l \mid a_1 : f(\chi_l) \geq 0.33\} = 0.947$

Pomoću (5.17) se korisnost a_1 računa na sledeći način:

$$U^S_{[0,1]}(a_i) = \bigwedge_{1\leq j\leq 3} \big(\vee(0.2,1), \vee(0.33,0.947), \vee(1,0.526)\big) = 0.526.$$

Za a_2 dobijamo vrednost korisnosti

$$U_{[0,1]}^{S}(a_i) = \bigwedge_{1\leq j\leq 3} \big(\vee(0.2,1), \vee(0.33,0.786), \vee(1,0.357)\big) = 0.357,$$

dok za a_3 imamo da je

$U_{[0,1]}^{S}(a_i) = \wedge_{1\leq j\leq 3}\big(\vee(0.2,1), \vee(0.33,0.428), \vee(1,0.214)\big) = 0.428.$

Primena Sugenovog integrala obezbeđuje istu hijerarhijsku lestvicu lekova $a_1 \succ a_2 \succ a_3$. Treba da napomenemo da se vrednosti korisnosti u poslednjim računanjima mogu uporediti sa "idealnom" korisnošću jednake onoj koja se može dobiti u stanju potpunog odsustva svih simptoma.

Zaključak

U ovom radu opisana je uopštena teorija mere koja razmatra uopštenje mere čije je aditivno svojstvo zamenjeno slabijim svojstvom monotonosti. Prednost uopštene mere je što je njena primena mnogo šira od primene mere koja je predmet izučavanja klasične teorije mere. U radu je data definicija monotone skupovne funkcije koju zbog jednostavnosti nazivamo kraće monotonom merom i koja predstavlja uopštenje mere u klasičnom smislu. Videli smo da je Lebegov inegral baziran na meri u klasičnom smislu, zatim su date definicije Sugenovog, pan-integrala i Šokeovog integrala, koji su bazirani na monotonim skupovnim funkcijama. Šokeov integral predstavlja–uopštenje Lebegovog integrala, dok je pan-integral uopštenje Šokeovog i Sugenovog integrala.

U završnom delu rada su prikazani modeli Šokeovog i Sugenov integrala koji razlikuju aktivni stadijum čira na želucu od ranog stadijuma karcinoma želuca. Modeli su pokazali da su boja sluzokože želuca i konvergetne ovojnice bile važne u ovoj dijagnozi. Rezultat se podudarao sa dijagnozom lekara koji je obezbedio ulazne podatke. Štaviše, mere u ovim modelima nisu aditivne. Ovi rezultati ukazuju da su λ-mere, Šokeov i Sugenov integral primenljivi u endoskopskoj dijagnostici. Opisane metode primenljive su u analizi subjektivnih modela evaluacije za probleme, u kojima se uzimaju u obzir subjektivne vrednosti evaluacije svih ulaznih činilaca.

Kao primarni metod fazi donošenja odluka, usvojili smo Jagerov model u procesu izdvajanja najboljeg leka iz kolekcije predloženih lekovitih sredstava. Osnovo istraživanje je uglavnom bilo ograničeno na procenu uticaja lekova na kliničke simptome koji prate bolest. Takođe smo videli indikacije važnosti simptoma da bi se naglasila suština dodatnih faktora u finalnom odlučivanju. Tumačeći korisnosti lekova kao mere, videli smo kako se mogu primeniti Šokeov i Sugenov integral u postupku donošenja odluka, što predstavlja doprinos teoriji odlučivanja. Primenom Šokeovog integrala smo videli da se dobijaju isti rezultati poput onih dobijenih primenom klasičnog modela. Čak je i prilagođavanje Sugenovog integrala na problem medikacije donelo efekte koji potpuno potvrđuju prethodno određen red lekova.

Literatura

[1] G. Choquet, Theory of capacities. Annales de l'Institut Fourier, 1953–54

[2] L. Davis: Handbook of Genetic Algorithms. Van Nostrand Reinhold, New York, 1991

[3] E. Pap, Null-Additive Set Functions, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1995

[4] S. Pilipović, D. Seleši: Mera i integral - fundamenti teorije verovatnoće, Zavod za udžbenike, Beograd, 2012

[5] E. Rakus-Andersson: A Choice of Optimal Medicines by Fuzzy Decision Making Including Unequal Objectives. Issues in the Representation and Processing of Uncertain and Imprecise Information, EXIT - The publishing House of The Polish Academy of Sciences, 2005

[6] E. Rakus-Andersson: Minimization of Regret versus Unequal Multi-objective Fuzzy Decision Process in a Choice of Optimal Medicines. Proceedings of the XIth International Conference IPMU 2006 - Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems, vol. 2, Edition EDK, Paris-France, 2006

[7] E. Rakus-Andersson, C. Jogreus, The Choquet and Sugeno Integrals as Measures of Total Effectiveness of Medicines, Theoretical Advances and Applications of Fuzzy Logic and Soft Computing Advances in Soft Computing (Ed. O. Castillo et al.), Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007

[8] K. Saito, K. Notomi, H. Hashimoto, M. Saito: An analysis to the subjective evaluation model of a clinical image diagnosis with λ-fuzzy measures, Biomedical Soft Comuting and Human Sciences 2004

[9] K. Saito, K. Notomi, H. Hashimoto, M. Saito: Application of the Sugeno integral with λ-fuzzy measures to endoscopic diagnosis, Biomedical Soft Comuting and Human Sciences, 2003

[10] M. Sugeno: Fuzzy Measures and Fuzzy Integrals - a Survey. In: Gupta, M. M., Saridis, G. N., Gaines, B. R. (eds.): Fuzzy Automata and Decision Processes, New York North-Holland, 1977

[11] M. Sugeno: Theory of Fuzzy Integrals and its Applications. Ph.D. dissertation, Tokyo Institute of Technology, 1974

[12] Z. Wang, G.J. Klir: Generalized measure theory, Springer, 2009

[13] Q. Yang: The pan-integral on the fuzzy measure space. Fuzzy Mathematics, 1985

Biografija

Rođena sam 3.4.1990. u Bečeju. Osnovnu školu „Petefi Šandor“ u Bečeju završila sam 2005. godine skroz odličnim uspehom, kao dobitnik Vukove diplome. 2005. godine upisala sam se u „Gimnaziju sa Domom učenika za talentovane učenike Boljai“ u Senti i završila sam je sa odličnim uspehom u 2009. godini. Od oktobra 2009. godine bila sam redovan student Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, na Departmanu za matematiku i informatiku, smer Matematika finansija. Poslednji ispit položila sam u oktobarskom roku 2012. godine. Master studije Master matematičar – primenjena matematika, modul: matematika finansija upisala sam u oktobru 2012. godine, pored toga položila sam ispite psiholoških, pedagoških i metodičkih disciplina 30 bodova i 6 bodova prakse u ustanovi. Poslednji ispit položila sam u oktobarskom roku 2014. godine time sam stekla uslov za odbranu master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni Stampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Edina Feher

AU

Mentor: dr Mirjana Štrboja

MN

Naslov rada: Integrali bazirani na monotonim skupovnim funkcijama i njihova primena u medicini

MR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: Srpski/Engleski

JI

Zemlja publikovanja: Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2015

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (5 poglavlja, 76 strana, 6 tabela, 10 slika, 13 referenci)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Teorija odlučivanja

ND

Ključne reči: Mera, Sugenov integral, Šokeov integral, Primena u mdicini

PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod:

U radu su predstavljeni osnovni pojmovi monotone mere, Lebegovog, Sugenovog, pan-, i Šokeovog integrala kao i njihove osnovne osobine. Na kraju rada je data primena Sugenovog i Šokeovog integrala u analizi subjektivnog evaluacionog modela za dijagnozu kliničkih snimaka sa λ-merama, kao i u delotvornosti lekova.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 14.10.2014.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

Mentor: dr Mirjana Štrboja, docent na PMF-u u Novom Sadu

Predsednik: dr Arpad Takači, redovni profesor na PMF-u u Novom Sadu

Član: dr Ivana Štajner-Papuga, vanredni profesor na PMF-u u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY
WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification umber:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master thesis

CC

Author: Edina Feher

AU

Mentor: Mirjana Štrboja, PhD

MN

Title: Integrals Based on Monotone Set Functions and Their Application in Medicine

XI

Language of text: Serbian (latinic)

LT

Language of abstract: English/Serbian

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2015

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description: (5 chapters, 76 pages, 76tables, 10 pictures, 13 references)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Decision theory

Key words: measure, Sugeno integral, Choquet integral, application in medicine

UC:

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Computer Sciences, Faculty of Natural Sciences, Trg Dositeja obradovića 4, Novi Sad

HD

Note: This paper presents the basic concepts of monotone measures, Lebesgue, Sugeno, pan- and Choquet integrals and their basic properties. There is the application of these integrals in the analysis to the subjective evaluation model of a clinical image diagnosis with λ-measures and total effectivness of medicines.

Abstract:
AB

Accepted by the Scientific Board on: 14.10.2014
Defended:

Mentor: Mirjana Štrboja, PhD, Assistant professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Novi Sad

President: Arpad Takači, PhD, Full professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Novi Sad

Member: Ivana Štajner-Papuga, PhD, Associate professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Novi Sad