UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU

Dušan Kovačević

MATEMATIČKI MODELI MARKOVLJEVIH LANACA:PRIMENE NA DRUŠTVENE IGRE I DRUGE PRIMENE

-MASTER RAD-

Mentor
Dušan Jakovetić

Novi Sad, april 2018.

Predgovor

„Čovek je kao razlomak u kome je on brojilac, a njegovo mišljenje o sebi imenilac. Što je veći imenilac, to je manji razlomak. ”

Lav Nikolajevič Tolstoj(1828-1910)

Igre. Od malena se susrećemo sa njima. Igraju se primarno iz uživanja i zabave, a neke mogu imati edukativnu ulogu. Današnja deca, koja odrastaju uz kompjutere i društvene mreže, retko se mogu viđati van stanova ili kuća, u dvorištima ili na igralištima gde se igraju kao njihovi vršnjaci pre deset, dvadeset godina. Društvene igre. Igre sa kartama. Igre. One su pojednostavljene verzije realnih životnih situacija. Kao takve, one su predmet brojnih studija primenjene matematike, tako što se razvijaju modeli koji sadrže manje restriktivnih pretpostavki. Ovaj master rad bavi se modeliranjem pojedinih društvenih igara.

Istorijski gledano, igre kao što je šah se koriste za razvijanje sposobnosti strateškog razmišljanja i formiranje logičkih pravaca. Ali, šah je ratna igra gde na početku igre, oba igrača imaju potpune informacije o rivalu i borbeni ishodi su deterministički.
Boris Tan je kroz svoj rad postavio dva interesantna pitanja koja se nameću kao ključna pre nego što bi se otpočeo neki rat.
Ako napadnemo neku teritoriju sa svojom armijom, koja je verovatnoća da ćemo osvojiti tu teritoriju?
Ako se angažujemo u nekom ratu, koliko vojske očekujemo da će se izgubiti u zavisnosti od broja vojske koju ima vaš protivnik na svojoj teritoriji? [2, strana 349]
Svedoci smo da na odgovore na ta pitanja, kroz istoriju i sadašnjost, niko ne obraća pažnju. Nažalost.

Cilj ovog rada, koji je podeljen u nekoliko delova, je da pokaže kako matematika može da utiče na društvene igre, na pravljenje modela koji mogu da pomognu u strategijama, koje će lakše dovesti do pobeda u tim igrama. U prvom delu, pored Uvoda u kojem je opisan razvoj društvenih igara kroz istoriju, biće dat kratak pregled osnovnih pojmova koji su potrebni radi razumevanja rada u celini. Drugi deo je posvećen društvenim igrama koje su predmet našeg rada. Reč je o Monopolu i Riziku. Dat je njihov razvoj kroz istoriju, pravila koja će uticati na primenu pojma koja se odrađuje u završnom delu rada. U toj primeni je dat uticaj Markovskih lanaca na pomenute društvene igre kao i na neke realne situacije. Konkretno reč je o tri modela. Model invetara, gde se uz pomoć lanaca može utvrditi efikasnost modela, to jest da li su zalihe zadovoljile potražnju po periodu i da li treba menjati politiku poslovanja. Erenfestov model je klasičan primer difuzije molekula kroz membranu gde se uz pomoć lanaca može prikazati kako se menja količina molekula posle određenog perioda. Model Page Rank je algoritam koji kao deo svog pretraživača koristi Markovljeve lanace, koji mu pomažu za rangiranje veb stranica koje su posmatrane kao članci.

Sadržaj

Slike

Tabele

1 Uvod

Društvene igre. Igre na tabli. Igrane su u većini kultura i društava tokom istorije. Njihovi koreni protežu hiljadama godina unazad. U narednim redovima biće dat kratak razvoj društvenih igara.
Prva poznata igra je Senet. Njeno poreklo vodi u godini 3300 p.n.e. Bila je popularna među faraonima u Drevnom Egiptu. Pronađena je u grobnicama Prve dinastije [1]. Što se tiče pravila, tu i dalje traje debata. Senet je mreža sa trideset kvadrata rasporedjenih u tri reda po deset. Postoje dve grupe pešaka (najmanje pet od svake). Brojni istoričari su pravili rekonstrukcije ove igre, čija su se pravila zasnivala na delovima tekstova starih hiljadama godina. Malo je verovatno da današnja pravila održavaju stvarni tok drevnog egipatskog igranja.
Arheolozi nisu sigurni, ali tvrde da je Kraljevska igra UR (The Royal Game of UR) nastala u Iranu oko 3000-e godina p.n.e. To je igra za dva igrača. Cilj je da se premeste svi pešaci sa jednog kraja table na drugi, pre drugog igrača. Detaljnije o pravilima na veb stranici[2].
Prve kockice su izmišljene, prema nekim verovanjima, u 1400. p.n.e. u Grčkoj. U to vreme nisu sve kockice bile u obliku kocke što je omogućavalo ljudima da varaju, što je dovodilo do ne fer igre. Uglavnom su izrađivane od Slonovače, bile su dosta vredne. Izgled tih kockica je na slici 1.1.

Slika 1.1: Kockice iz trećeg veka p.n.e. [20]

Kockice iz Rimske ere izgledaju dosta slično kao šestostrane kockice na koje smo navikli danas. To su bile kockice sa presečenim uglovima, kao što se vidi na slici 1.2.

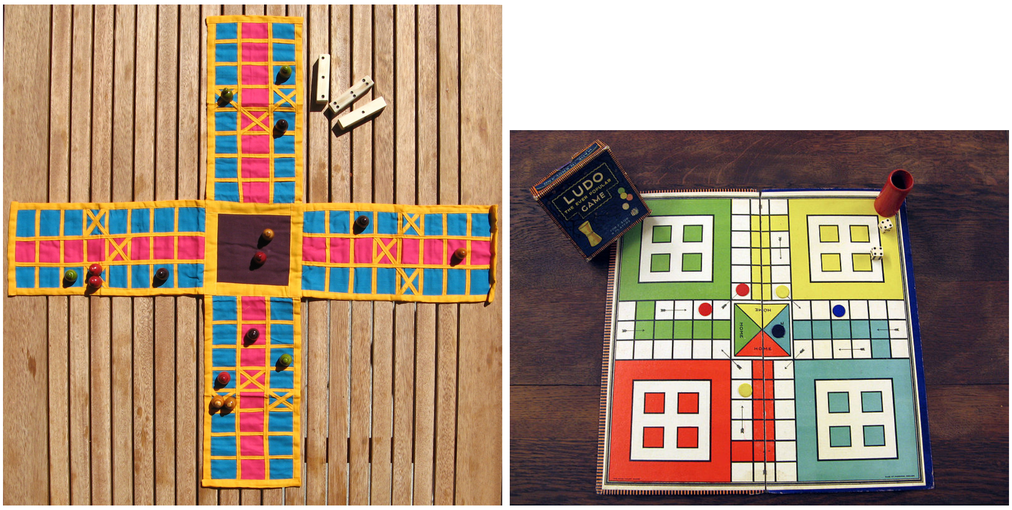
Slika 1.2: Kockice iz Rimske ere [20]

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/FirstDynastyofEgypt
[2] http://www.gamecabinet.com/history/Ur.html

Drevna igra Šah se prvi put igrala u istočnoj Indiji gde je njegova preteča u šestom veku bila poznata pod nazivom Čaturanga (Chaturanga), data na slici 1.3, koja se igrala na tabli 8x8 sa četiri divizije, koje su činili pešadija, konjica, slonovi i kočije.

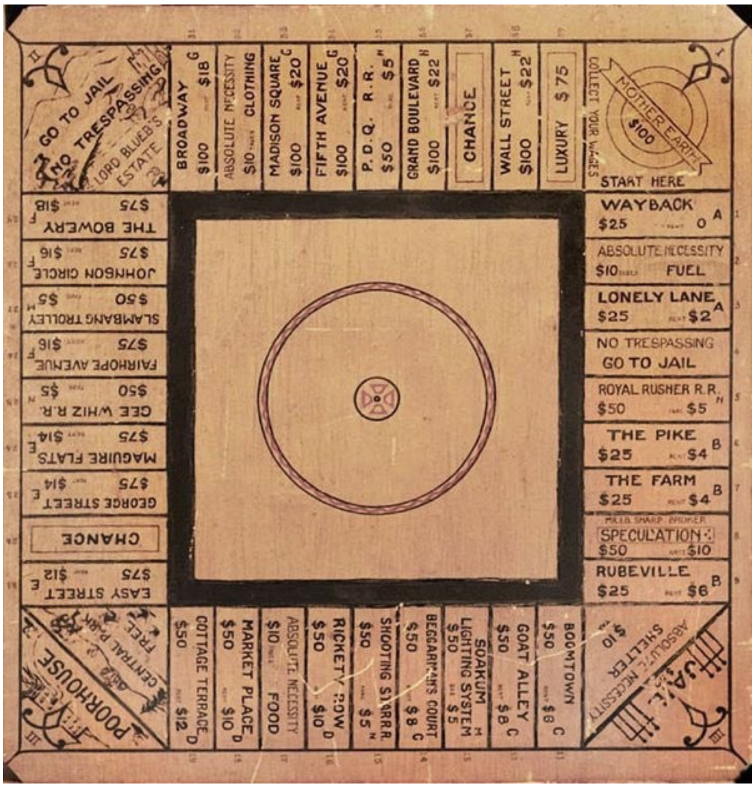
Slika 1.3: Izgled igre Čaturanga iz šestog veka [20]

Igra je stigla u Zapadnu Evropu i Rusiju najkasnije u devetom veku. Oko 1200-te godine, pravila su počela da se modifikuju, a tek oko 1475. godine nekoliko velikih promena je dovelo do toga da je igra u suštini kako je i danas poznata. Šah se smatra kao prekretnica za kasniji nastanak ratnih i strategijskih igara.
Pačizi (Pachisi) je poznata kao nacionalna igra Indije iz perioda oko 1896-te godine. Strateška igra, koja je se godinama igrala na tom prostoru, da bih kasnije redizajnirana i preko Velike Britanije stigla u Evropu, pod imenom Ludo. Kao što se vidi na slici 1.4, ove igre su preteča današnje igre "Ne ljuti se čoveče".



Slika 1.4: Levo je tabla za Pachisi,desno tabla za Ludo [19]

1903.godina, Delavar, Sjedinjene Američke države. Elizabet Megi kreirala je prvu verziju svoje igre The Landlord's Game koja je u prvi mah bila dizajnirana kao protest protiv nepoštenih zakona o porezu i monopolu u to vreme u Americi. Elizabet Megi je svoj patent prodala za 500 $. Ova igra je bila preteča za današnji monopol o kojem će biti reč u nekom od narednih poglavlja, što pokazuje slika 1.5.



Slika 1.5: Originalna tabla za The Landlord's Game [19]

Period od 1880-te do 1920 u Americi je nazvan kao zlatno doba igara na tabli. Popularnost igara je povećana, kroz masovnu proizvodnju, što ih je učinilo jeftinijim i svima dostupnim. Iako ne postoje detaljne statistike, dvadeseti vek je zabeležen kao period u kojem je došlo do pada popularnosti. Krajem devedesetih prošlog veka došlo je do značajnog rasta u dometu i tržištu društvenih igara. Ovo se mahom prepisuje pojavi Interneta, koja je dovela do toga da ljudi dosta lakše nalaze svoje saigrače. 2010. godina je godina novog zlatnog doba za društvene igre.

Kroz ovo poglavlje dat je opšti prikaz razvoja igara kroz istoriju. U narednim poglavljima, priča će biti zasnovana na matematičkom cilju ovoga rada. To je analiza društvenih igara i modela iz realnih situacija uz pomoć lanaca Markova. Koncept Markovljevih lanaca je da verovatnoća da se sistem, u određenom stanju, nađe u nekom budućem trenutku zavisi od sadašnjeg trenutka a ne od prošlosti i kreira se matrica verovatnoća.

2 Matematičke osnove

Kroz ovo poglavlje, u cilju boljeg razumevanja rada, date su osnovne definicije, teoreme i pojmovi koji su korišćeni prilikom pisanja rada.

2.1 Uslovno očekivanje

Definicija 2.1 *(σ-algebra) Neka je $\mathcal{F} \subseteq P(\Omega)$. Ako su zadovoljeni uslovi:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$ *(Zatvorenost u odnosu na komplementiranje)*
3. $\{A_\imath\}_{\imath \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\propto} \in \mathcal{F}$

Tada je $\mathcal{F}$-σ polje (σ-algebra) nad Ω.

Skup svih mogućih ishoda nekog događaja se označava sa Ω, dok sam događaj označavamo sa A i znamo da je A $\subseteq \Omega$.
Osobine σ -algebre:

1) $\emptyset \in \mathcal{F}$
2) $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$
3) $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{\imath=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$
4) $\{A_\imath\}_{\imath \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{\imath=1}^{\propto} A_\imath \in \mathcal{F}$

Najmanja σ-algebra koja sadrži sve otvorene podskupove od $\mathbb{R}^n$ zove se Borelova σ-algebra i označava se $\mathcal{B}$ ($\mathbb{R}^n$)= B^n.

Definicija 2.2 *(Verovatnoća) Neka je $\mathcal{F}$, σ-algebra podskupova od Ω. Funkcija P:$\mathcal{F} \rightarrow$[0, 1] za koju važi:*

a) *P(Ω)=1(Normiranost)*
b) $\{A_\imath\}_{\imath \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, $A_\imath \cap A_\jmath = \emptyset$, $\imath \neq \jmath$ *(σ-aditivnost)*

tada P($\sum_{\imath=1}^{\propto} A_\imath$)=$\sum_{\imath=1}^{\propto}$ P($A_\imath$) se zove verovatnoća na $\mathcal{F}$.

Trojka (Ω, $\mathcal{F}$, P), gde je Ω skup elementarnih događaja, $\mathcal{F}$-σ-algebra na Ω i P verovatnoća na $\mathcal{F}$ se zove prostor verovatnoća.

Definicija 2.3 *(Slučajna promenljiva) Neka je (Ω, $\mathcal{F}$, P) prostor verovatnoća.*
Preslikavanje X:$\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ se zove n-dimenzionalna slučajna promenljiva ako za svako B $\in$ B^n važi X^{-1} (B) $\in \mathcal{F}$. Ekvivalentno, X je $\mathcal{F}$-merljivo.

2.2 Stohastički procesi

Definicija 2.4 *Stohastički(slučajni) proces* $\{ X_t,\ t \in \tilde{T} \}=\{ X(t),\ t \in \tilde{T} \}$ *je familija slučajnih promenljivih definisana na istom prostoru verovatnoća* (Ω, $\mathcal{F}$, P)*. Skup* $\tilde{T}$ *zove se parametarksi skup.*

Parametarski skup je najčešće skup koji predstavlja neki vremenski interval.
Ako je parametraski skup konačan dobijamo konačno mnogo slučajnih promenljivih.
Ako je parametarski skup prebrojiv, onda govorimo o nizu slučajnih promenljivih ili o lancu.
Ako je parametarski skup neprebrojiv, tada govorimo o pravom stohastičkom procesu.

Primer 2.1 *Primeri slučajnih procesa :*

a) *Potresi zemljišnog tla, pritisak i temperatura u atmosferi.*

b) *Kad god se radi o nekom sistemu upravljanja ili sistemu masovnog usluživanja klijenta u vremenu, radi se o stohastičkom procesu.*

2.2.1 Konačno-dimenzionalne raspodele slučajnih promenljivih

Neka je $\{ X(t),\ t \in [t_o, T] \}$ jedan stohastički proces. Za fiksirano $t \in [t_o, T]$, $X(t)$ je jedna slučajna promenljiva koja se zove *Zasek* (sečenje) procesa u vremenskom trenutku t.

Definicija 2.5 *Konačno dimenzionalne raspodele stohastičkog proces* $\{ X(t),\ t \in [t_o, T] \}$ *su date sa :*
$F_1(t; x)=F_t(x)=P\{ X(t) < x \}$
$F_2(t_1, t_2; x_1, x_2)=F_{t_1,t_2}\,(x_1, x_2)= P\{ X(t_1) < x_1,\ X(t_2) < x_2 \}$
$\vdots$
$F_n(t_1, \ldots, t_n; x_1, \ldots, x_n)=F_{t_1,..,t_n}\,(x_1, .., x_n)= P\{ X(t_1) < x_1, ..., X(t_n) < x_n \}$
$\vdots$
gde su $t_1, \ldots, t_n \in [t_o, T]$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{R}$.

Konačno dimenzionalne raspodele zadovoljavaju sledeća dva uslova:

* Simetrija:Ako je $\{ i_1, ..., i_n \}$ permutacija brojeva 1, .., n tada važi $F_{t_{i_1},...,t_{i_n}}\,(x_{i_1}, ..., x_{i_n})= F_{t_1,...,t_n}\,(x_1, ..., x_n)$. Simetrija ne zavisi od redosleda konačno dimenzonalnih raspodela.

* Saglasnost:Za m<n i proizvoljno $t_{m+1}, ..t_n \in [t_o, T]$ važi:
  $F_{t_1,...,t_m,t_{m+1},...,t_n}\,(x_1, \ldots, x_m, \propto, \ldots, \propto)= F_{t_1,...,t_m}\,(x_1, \ldots, x_m)$

Teorema 2.1 *(Kolmogorova fundamentalna teorema)Za svaku familiju, funkcija raspodela koje zadovoljavaju uslove simetrije i saglasnosti, postoji prostor verovatnoća i stohastički proces definisan na njemu čije su to (funkcije raspodele) konačno dimenzionalne raspodele.*

2.2.2 Svojstva stohastičkih procesa

Definicija 2.6 *Srednja vrednost stohastičkog procesa X_t je $m_x(t) = m(t) = E(X_t)$.*

Definicija 2.7 *Autokovarijansna funkcija(korelaciona funkcija) stohastičkog procesa X_t je $K_x(t,s) = K(t,s) = E[(X_t - m_x(t))(X_s - m_x(s))] = E(X_t X_s) - E(X_t)E(X_s)$.*

Definicija 2.8 *Disperzija stohastičkog procesa X_t je $D_x(t) = D(t) = K_x(t,t)$.*

Definicija 2.9 *Koeficijent korelacije stohastičkog procesa X_t je $\rho_x(t,s) = \rho(t,s) = \dfrac{K_x(t,s)}{\sqrt{D_x(t)D_x(s)}}$.*

Definicija 2.10 *Stohastički proces X_t je:*

1) Proces sa nezavisnim vrednostima ako su slučajne promenljive $X(t_1), X(t_2), .., X(t_n)$ za svako $n \in \mathcal{N}$ i sve $t_1, .., t_n \in [t_o, T]$ nezavisne: $F_{X_{t_1},...,X_{t_n}}(x_1, .., x_n) = F_{X_{t_1}}(x_1)...F_{X_{t_n}}(x_n)$.

2) Proces sa nekoreliranim vrednostima ako su za sve $t \neq s$, $t, s \in [t_o, T]$ slučajne promenljive X_t X_s su nekorelirane, tj važi $K_x(t,s) = 0$.

3) Proces sa nezavisnim priraštajima ako su slučajne promenljive(priraštaji): $X_{t_o}, X_{t_1} - X_{t_o}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, ..$ nezavisni za svaki izbor $t_o, t_1, \ldots \in [t_o, T]$ tako da $t_o \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \leq \ldots$.

Definicija 2.11 *Stohastički proces X_t je strogo stacionaran ili stacionaran u užem smislu ako su njegove konačnodimenzionalne raspodele invarijantne u odnosu na translaciju vremena, odnosno ako za svako $n \in \mathcal{N}$ i sve $t_1, .., t_n \in [t_o, T]$ važi:$F_{t_1+h, t_2+h, .., t_n+h}(x_1, .., x_n) = F_{t_1, .., t_n}(x_1, .., x_n)$.*

Svojstva koja ispunjavaju strogo stacionarni procesi su:

1. Ima konstantnu srednju vrednost: $m_x(t) = E(X_t) = E(X_t + h) = m_x(t+h)$.
2. Ako ima konačne momente drugog reda ($E(X_t^2) < \propto$, za svako $t \in [t_o, T]$) tada je njegova autokovarijansna funkcija, funkcija razlike argumenata: $K_x(t,s) = E[(X_t - m_x(t)(X_s - m_x(s))] = E[(X_t - m)(X_s - m)] = E[(X_{t-s} - m)(X_o - m)] = C(t-s)$.

Definicija 2.12 *Stohastički proces je slabo stacioniran (stacioniran u širem smislu) ako je:*

a) X_t sa konačnim momentom drugog reda

b) $m_x(t) = const$

c) $K_x(t,s) = C(t-s)$

Definicija 2.13 *(P-neprekidnost) Stohastički proces X_t je stohastički neprekidan (P-neprekidan) u tački $t^* \in [t_o, T]$ ako $X_t \xrightarrow{p} X_{t^*}$, odnosno ako svako $\epsilon > 0$ $P\{|X_t - X_{t^*}| \geq \epsilon\}$, $t \to t^*$.*

Definicija 2.14 *Stohastički proces X_t je stohastički neprekidan na intervalu $[a,b] \subseteq [t_o, T]$ ako je stohastički neprekidan u svakoj tački intervala $[a,b]$.*

Definicija 2.15 *Stohastički proces X_t je stohastički ograničen na skupu $\mathcal{B} \subseteq [t_o, T]$ ako važi da je*

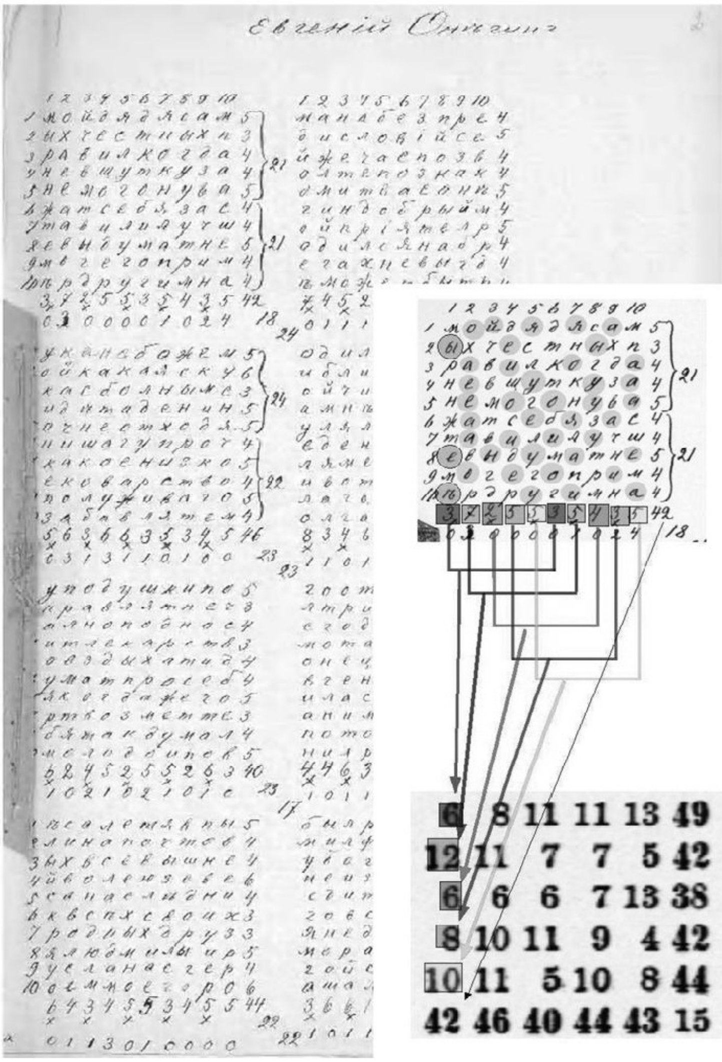
$$\sup_{t \in \mathcal{B}} P\{|X_t| > c\} \to 0, c \to \propto$$

Definicija 2.16 *Dva stohastička procesa X_t i $\bar{X}_t$ definisani na istom prostoru verovatnoća su (stohastički) ekvivalentni ako za svako $t \in [t_o, T]$ važi da je $X_t = \bar{X}_t$ sa verovatnoćom 1.*

2.3 Lanci Markova

2.3.1 Istorijski kontekst

Lance Markova i njihovu ideju predstavio je Andrej Andrejevič Markov[3]. Njegova otkrića u vezi sa lancima Markova su iznedrila pragmatičnu stranu stohastičkih procesa. On je ručno konstruisao lanac Markova od reči iz Evgenija Onjegina, dela Aleksandra Puškina, slika 2.1, kako bi proučio distribuciju samoglasnika u delu i pokazao centralnu graničnu teoremu za te lance. Leva strana slike 2.1 je prikaz prvih 800 od 20000 slova koja je Markov uzeo iz dela Evgenije Onjegin. Izostavio je razmake i interpunkcijske znakove dok je pisao. Desna strana je prikaz prve matrice od ukupno 40, formata 10x10. Poslednji red od matrice, formata 6x6, se koristi da bi se pokazao broj samoglasnika u nizu od 500 slova. Svaka kolona matrice pokazuje kako su sume obračunatih samoglasnika sastavljene od zbira manjeg broja samoglasnika. Markov je tvrdio da broj samoglasnika, koji su prebrojani na ovakav način, je stohastički nezavisan. U matematici, u čast Markovu, svojstvo da naredna vrednost koju će proces uzeti ne zavisi od načina na koji je u trenutno stanje dospelo.



Slika 2.1: Onjegin i Markov [14]

[3] Andrey Andreyevich Markov (1856-1922), ruski matematičar

Jedan od ključnih za dalji razvoj lanaca bio je i Andrej Nikolajevič Kolmogorov[4], ruski matematičar koji je se bavio slučajem sa beskonačnim brojem stanja. Nezavisno, ali u isto vreme, britanski matematičar Sidni Čepman[5] postavlja jednačinu koja se danas naziva jednačina Kolmogorov-Čapmana i predstavlja jednu od osnova u istraživanju stohastičkih procesa danas.

Markovski lanci spadaju u jednostavnu i interesantnu klasu stohastičkih procesa. Opisuju slučajne pojave ili sisteme koji se menjaju tokom vremena, a njihova jednostavna struktura nam pruža priliku da saznamo dosta toga o njihovom ponašanju u budućnosti. Možemo reći da predviđanje budućnosti sistema zavisi od sadašnjeg stanja, a ne od puta do kojeg je sistem došao u to stanje.

Poznati su kao jedan od matematičkih modela za opisivanje pojava u realnom životu. Njima se mogu modelirati pojave u biologiji, hemiji, fizici, statistici, sportu, psihologiji.

2.3.2 Pojam Lanca Markova

Definicija 2.17 *Niz slučajnih promenljivih na istom prostoru verovatnoća* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i sa istim skupom stanja* $S=\{x_1, x_2, \dots\}$ *zove se* **Lanac Markova**, *ako za proizvoljne* $r \in \mathcal{N}$ *i* $n > k_1 > k_2 > \cdots > k_r$ *važi :*

$$P\{X_n = x_n | X_{k_1} = x_{k_1}, \dots, X_{k_r} = x_{k_r}\} = P\{X_n = x_n | X_{k_1} = x_{k_1}\}$$

Ovo svojstvo se zove Markovsko svojstvo i ono kaže da je verovatnoća da se sistem nađe u stanju x_n u nekom budućem trenutku n zavisi samo od sadašnjeg trenutka k_1 a ne od prošlosti $(k_2, \dots, k_r)$.

Definicija 2.18 *Verovatnoća prelaza za jedan korak iz stanja* $\imath$ *u stanje* $\jmath$ *ako je sistem u trenutku n bio u stanju* $\imath$, *definiše se:*

$$p_{\imath,\jmath}^{n,n+1} = P\{X_{n+1} = x_\jmath | X_n = x_\imath\}$$

Ako $p_{\imath,\jmath}^{n,n+1}$ ne zavisi od vremenskog trenutka n kažemo da je lanac homogen i verovatnoća prelaza u jednom koraku se označava sa $p_{\imath,\jmath}$ i računa se $p_{\imath,\jmath} = P\{X_{n+1} = x_\jmath | X_n = x_\imath\}$.
Za verovatnoću prelaza iz $\imath$-tog stanja u $\jmath$-to stanje u n-koraka (za homogeni lanac) je $p_{\imath,\jmath}(n) = P\{X_{n+m} = x_\jmath | X_m = x_\imath\}$ za neko m.
Sada možemo da uvedemo i pojam matrice verovatnoće prelaza homogenog lanca Markova za n koraka:

$$P_n = \begin{bmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & \dots & p_{1n}(n) & \dots \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) & \dots & p_{2n}(n) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{n1}(n) & p_{n2}(n) & \dots & p_{nn}(n) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, n \in \mathcal{N}$$

Dimenzije matrice verovatnoće prelaska zavisi od broja svih mogućih stanja u kojem sistem može da se nađe. Kada je $n = 1$, matricu prelaza obeležavamo sa P i zove se matrica prelaska za jedan korak:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

[4]Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987)
[5]Sydney Chapman (1888-1970)

Matrica P ima svojstva:

- $p_{ij} \geq 0$, za svako $i, j \in N$
- $\sum_j p_{ij} = 1$, za svako $i \in S$

i naziva se Matrica prelaza.
U prethodnom delu smo definisali verovatnoće prelaza iz jednog stanja u drugo posle jednog i više koraka kao i matrice verovatnoća prelaska posle jednog i više koraka. Sada ćemo pokazati njihovu vezu i na koji način se može da definiše lanac Markova.

Teorema 2.2 *(Jednačina Čepman-Kolmogorova) U homogenom lancu Markova važi*

$$p_{ij}(n+m) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(n)p_{kj}(m), n, m \geq 0, i, j \in S$$

Važe i jednakosti $P_{m+n} = P_m P_n$ i $P_n = P^n$, gde je P^n oznaka za n-ti stepen matrice P.

Dokaz 2.1 *Za proizvoljne događaje A, B, C važi sledeće:*

$$P(AB|C) = \frac{P(ABC)}{P(C)} = \frac{P(A|BC)P(BC)}{P(C)} = P(A|BC)P(B|C)$$

Za dokaz teoreme koristićemo formulu potpune verovatnoće i Markovsko svojstvo.
$p_{ij}(m+n) = P\{X_{m+n} = x_j | X_0 = x_i\} =$
$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X_{m+n} = x_j, X_m = x_k | X_0 = x_i\} =$
$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X_{m+n} = x_j | X_m = x_k, X_0 = x_i\} P\{X_m = x_k | X_0 = x_i\} =$
$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X_{m+n} = x_j | X_m = x_k\} P\{X_m = x_k | X_0 = x_i\} =$
$= \sum_{k=0}^{\infty} p_{kj}(n) p_{ik}(m) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(m) p_{kj}(n)$
Jednakosti $P_{m+n} = P_m P_n$ i $P_n = P^n$ su posledice dokazanih jednakosti. □

Primer 2.2 *(Kamen, Papir, Makaze) Dva deteta igraju igru kamen, papir i makaze. Majka je primetila da je ponašanje jednog deteta se može modelirati lancima Markova. Kada odigra kamen u jednom potezu, ono je igralo uvek papir u narednom potezu. Ako je odigralo papir, uvek igra makaze u narednom potezu. Ipak, kada odigra makaze, u pola slučajeva je igralo papir a u pola kamen u narednom potezu. Naći matricu prelaza i izračunati verovatnoću da će u četvrtom potezu odigrati makaze, ako je odigralo u prethodnom makaze.*
k-odigralo kamen, p-odigralo papir, m-odigralo makaze
Opšti slučaj matrice prelaza:

$$P = \begin{bmatrix} p_{kk} & p_{kp} & p_{km} \\ p_{pk} & p_{pp} & p_{pm} \\ p_{mk} & p_{mp} & p_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Treba da se izračuna vrednost $p_{mm}(4)$ koja se traži u primeru odnosno da bi došli do te vrednosti treba da izračunamo matricu verovatnoća prelaza P^4 iz koje ćemo pročitati koliko iznosi.

$$P_4 = \begin{bmatrix} p_{kk}(4) & p_{kp}(4) & p_{km}(4) \\ p_{pk}(4) & p_{pp}(4) & p_{pm}(4) \\ p_{mk}(4) & p_{mp}(4) & p_{mm}(4) \end{bmatrix} = P^4 = P^2P^2$$

$$P_2 = P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$P_4 = P^4 = P^2P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Verovatnoća da će u četvrtom potezu odigrati makaze ako je prethodno igrao makaze iznosi $p_{mm}(4) = 0.25$.□

Definicija 2.19 *Ako postoji $n_0 \in \mathcal{N}$, tako da $P_{n_0} = P^{n_0}$ čiji su svi elementi pozitivni kažemo da je odgovarajući lanac Markova ergodičan.*

Za ergodične lance uvek postoje finalne verovatnoće a obrnuto ne mora da važi.

2.3.3 Finalne verovatnoće

Definicija 2.20 *Finalne (granične) verovatnoće su definisane sa*

$$p_j^* = \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n), \forall i \in N, j = 1, \ldots, \infty$$

Ove verovatnoće predstavljaju udeo dugog vremenskog perioda koji sistem provede u stanju j.
Za ergodične lance, finalne verovatnoće računamo rešavanjem sistema:

$$p^* = p^*P; \sum_{j=1}^{\infty} p_j^* = 1$$

Definicija 2.21 *Neka je* $\{X(n), n \in \mathcal{N}_0\}$ *Markovljev lanac. Stanje* $x_\imath$ *je povratno ako* $P\{X_n = x_\imath,$ *za neko* $n \geq 1 | X_0 = x_\imath\} = 1$ *tj. ako je verovatnoća da se sistem vrati u stanje* $x_\imath$ *pri uslovu da je u početnom trenutku u tom stanju, jednaka 1. U suprotnom, ako je* $P\{X_n = x_\imath,$ *za neko* $n \geq 1 | X_0 = x_\imath\} < 1$, *stanje* $x_\imath$ *je prolazno.*

Definicija 2.22 *Unutar lanca Markova, kažemo da je stanje* $x_\jmath$ *moguće dostići iz stanja* $x_\imath$ *ako* $\exists n \in \mathcal{N}$ *takvo da je* $p_{\imath\jmath}(n) > 0$.

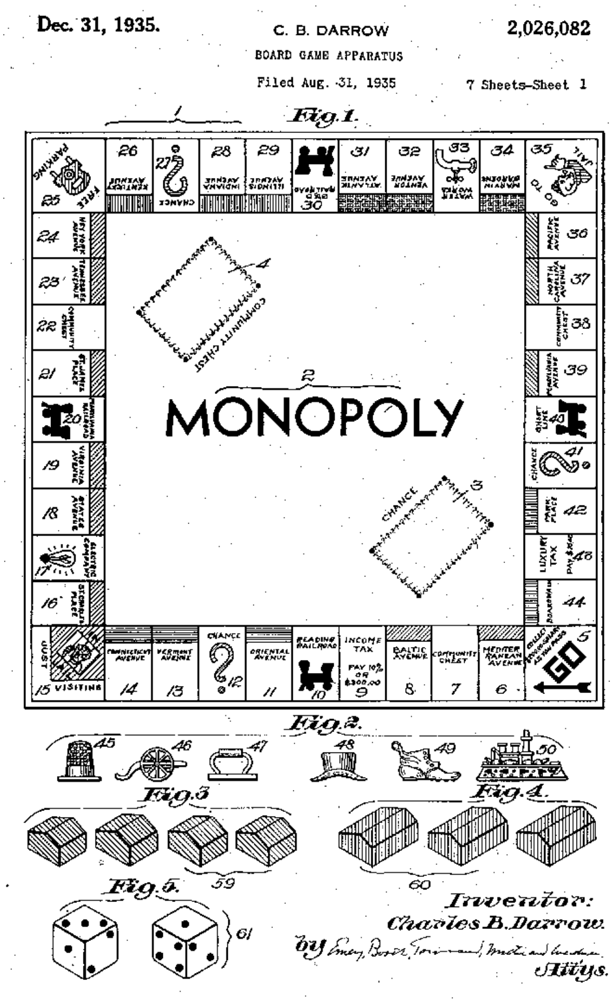
Definicija 2.23 *Stanje* $x_\jmath$ *je apsorbujuće ako je* $p_{\jmath\jmath} = 1$. *Jednom kad proces uđe u to stanje, ostaje u njemu.*

3 Igre

U ovom poglavlju su predstavljene igre, koje su predmet ovog rada. Dat je istorijski osvrt na početke razvoja ovih društvenih igara, njihova pravila koja će imati uticaj za dalju analizu koja je izvršena u narednom poglavlju.

3.1 Monopol

Monopol je veoma popularna igra danas u svetu. Igra je poteznog karaktera i igra se uz bacanje kockice. Dobila je naziv po ekonomskom terminu "Monopol"što označava dominaciju jednog učesnika u privredi nad drugim.
Prema podacima koje pruza kompanija "Hasbro"[6] koja je saradnik kompanije "Braća Parker"[7] koja objavljuje zvaničnu verziju igrice, otkada je Čarls Derou[8] patentirao ovu igru 1935. godine i patent je na slici 3.1, igru je igralo oko 750 miliona ljudi širom sveta što je čini najigranijom igrom na svetu.



Slika 3.1: Patent Čarlsa Deroua [16]

[6]O kompaniji https://en.wikipedia.org/wiki/Hasbro
[7]O kompaniji https://en.wikipedia.org/wiki/ParkerBrothers
[8]Charles Darrow (1889-1967)

3.1.1 Pravila

Igra se sastoji od:

1. Tabla za igru
2. Kartice koje predstavljaju kupljena polja
3. Novčanice u različitim apoenima(5, 10, 20, 50, 100, 500 itd.)
4. Figure za igru
5. Dve kockice
6. Kućice i hoteli
7. Kartice Chance (Šansa) i Community Chest (Iznenađenje)

Igrači se usmeravaju prema redosledu, pri čemu se početni igrač određuje slučajno pre igre. Tipičan potez odigravanja je bacanje kockice i pomeranje figure u smeru kazaljke na satu. Ako igrač dobije iste brojeve na kockicama, on produžava svoj potez bacanjem kockica. Igrač koji tri puta izbaci duple brojeve tokom svog poteza, uhvaćen je u prebrzom igranju i automatski se šalje u Jail (Zatvor). Igrač koji prolazi ili staje na Go space (Start), automatski dobija novac u vrednosti od 200 apoena od banke. Igrači koji stanu na polje Tax income (Porez na dohodak) ili Luxury tax (Porez na luksuz) plaćaju navedeni iznos banci. U starijim verzijama igre, davane su dve opcije za porez na dohodak:

* Plaćanje u iznosu od 200 apoena
* Plaćanje 10 % ukupne neto vrednosti (uključujući i vrednosti svih kartica i objekata u vlasništvu)

Kartice, kupljena polja, se mogu razvijati samo ukoliko igrač ih poseduje sve u istoj boji i moraju se razvijati jednako. Kuća mora biti izgrađena na svakom polju pre nego što se krene u izgradnju druge kućice.
Ukoliko igrač stane na polje Šansa/Iznenađenje, izvlači gornju karticu sa odgovarajuće gomile i prati instrukcije. Ovo može uključivati prikupljanje ili plaćanje novca banci ili nekom drugom igraču ili prelazak na neko drugo polje na tabli. Zatim tu karticu vrati na dno gomile.
Postoje i dve vrste kartica koje uključuju i zatvor. To su Go to Jail (Idi u zatvor) i Get out of Jail Free (Izađi iz zatvora besplatno).
Igrač se šalje u zatvor zbog obavljanja :

- Stajanje direktno na polje Go to Jail (Idi u zatvor)
- Bacanje tri uzastopna dupla broja na kockicama
- Izvlačenje kartice Go to Jail (Idi u zatvor) iz špila Šanse/Iznenađenje

Kad je igrač poslat u zatvor, odlazi direktno, bez ikakvog prelaska polja Start i time završavaju svoj potez. Ako prilikom bacanja kockica dobiju da stanu na polje Jail, ti igrači su samo posetioci i mogu u narednom bacanju da idu napred i nemaju nikakvu kaznu.

Ako se igrač nalazi u zatvoru, da bi izašao iz njega može da uradi sledeće:

- Plati u iznosu 50 apoena i nastavi normalno bacanje
- Može da iskoristi karticu Izađi besplatno iz zatvora, ukoliko je ima
- Pokuša da baci duplo na kockima. Ako dobije izlazi, ako ne ostaje u zatvoru do narednog poteza. U slučaju da tri puta ne uspe da dobije duplo na kockima, primoran je da uradi nešto od navednog gore iznad, posle čega se kreće normalno u igru.

Igrači koji se nalaze u zatvoru ne mogu da obavljaju kupovinu imovine direktno od banke, jer se ne kreću, ali mogu da izvršavaju druge stvari kao što je učešće na aukcijama za zemljište, davanje hipoteke za sopstvena zemljišta, kupovina/prodaja kućica i hotela.
Ako igrač stane na neprodatu imovinu, bilo da je u pitanju ulica, železnica ili uslužna delatnost, on može da je kupi za nabavnu cenu. Ako odbije da je kupi, banka imovinu stavlja na aukciju i prodaje je igraču koji najviše ponudi, uključujući i igrača koji je odbio da je kupi u prvom trenutku. Ako je imovina već u nečijim rukama i nije pod hipotekom, dužan je da plati vlasniku određenu rentu u zavisnosti da li je deo grupe od tri iste u boji ili pojedinačna. Kada poseduje imovinu koje su iz iste grupe boja i nisu pod hipotekom, on može da ih razvija tokom svog poteza ili između poteza drugih igrača. Razvoj predstavlja kupovina kućica ili hotela od banke i stavljanje na imovinske prostore vodeći se time da ih razvija ravnomerno. Drugim rečima, ne može graditi drugu kućicu na bilo kojoj imovini ako nema na svakoj po jednu već izgrađenu. Kad igrač poseduje sve tri iz iste grupe boja, on može naplaćivati duplu rentu za sve neizgrađene objekte unutar nje. Iako se kuće ne mogu graditi na železničkim stanicama ili komunalnim uslugama, navedena rentaža se plaća ukoliko ima više od jednog bilo kojeg tipa (železnica ili komunalne usluge). Ako postoji veća potražnja za kućama ,nego što ih ima u banci onda se vrši stambena aukcija kako bi se utvrdilo kome će pripasti kućica.
Imovina se može staviti pod hipoteku. Igrač dobija novac od banke za svaku hipoteku u iznosu od pola kupovne cene, koja mora biti otplaćena sa 10 % kamate da bi joj se uklonila hipoteka. Kućice i hoteli se mogu vratiti u banku za polovinu njihove nabavne cene. Igrači ne mogu da prikupljaju rentu na imovinu pod hipotekom i ne smeju dati drugima imovine na kojoj postoje već sagrađeni objekti. Međutim, dozvoljeno je da se trguje hipotekama. Igrač koji primi zemljište pod hipotekom mora odmah da je ukloni za cenu hipoteke i 10 % ili platiti banci samo 10 % i zadržati pod hipotekom. Ako odabere ovo drugo on mora da plati još jednom 10 % ako imovini kasnije bude uklonjena hipoteka. Igrač koji ne može da isplati ono sto duguje, proglašava se za bankrota i eleminisan je iz igre. Ukoliko igrač koji je bankrot duguje banci, on mora da da svu svoju imovinu u banku, koja dalje daje na aukciju svu njegovu imovinu, ako je ima, osim zgrada. Ukoliko je dug prema drugom igraču, sva preostala imovina se daje tome kome se duguje, ali novi vlasnik imovine i dalje mora da plati banci za svaku nekretninu ukoliko želi da skloni hipoteku. Pobednik je onaj koji je ostao na kraju, pošto su svi preostali bankrotirali. Ako igrač izgubi sav novac, on i dalje ima sredstva koja se mogu pretvoriti u gotovinu kao što je prodaja kućica/hotela, hipotekarna imanja ili trgovina sa drugim igračima. Da bi izbegao bankrot, igrač mora biti u stanju da prikupi dovoljno novca da bi isplatio dug. Igrač ne može da proglasi bankrot ako postoji način da plati ono što duguje, čak iako sve svoje građevine pretvori u gubitak, svu imovinu dati na hipoteku. Takođe, može da odbije velikodušnu trgovačku ponudu drugih igrača sa ciljem da ga zadrže u igri.

Slika 3.2: Tabla za igru "Monopol"[16]

3.2 Riziko

Riziko je strategijska igra diplomatije, konflikta i osvajanja. Standardna verzija se igra na tabli sa političkom mapom sveta, podeljenom na 42 teritorije koje su grupisane na 6 kontinenata. Cilj igre je osvajanje teritorija drugih igrača korišćenjem svoje vojske i bacanjem kockica koje će pomoći u osvajanju teritorije. Tokom igre mogu da se sklapaju savezi između igrača čime je svima cilj da eleminišu druge. Igra može da bude duga, od nekoliko sati do nekoliko dana. Evropska verzija je drugačija. U njoj postoji tajna misija koju igrač mora da izvrši čime dovodi do kraja igre. Riziko je izumio 1957. godine, Francuski filmski režiser Alber Lamoris[9].

3.2.1 Pravila

Igra se sastoji od:

1. Tabla sa mapom sveta podeljenom na 42 teritorije
2. 10 kartica sa zadacima i 42 kartice sa ispisanim nazivima država gde svaka ima nacrtan jedan simbol (tenk, avion ili pešadinac)
3. Tenkovi u 6 boja, u zavisnosti koliko igrača igra (od dva do šest po partiji)
4. 6 kockica, 3 za napad i 3 za odbranu

Cilj igre je osvojiti ceo svet ili ispuniti zadatak koji je dodeljen na početku igre. Zadatak može biti da se uništi drugi igrač ili da se osvoji određeno područje.
Prema zvaničnim pravilima, postoji sedam faza tokom jednog poteza. Redom te faze izgledaju:

1. Određivanje broja vojske koje igrač dobija na početku poteza (ako zameni kartice za armije ili zbog kontinenta koji poseduje)
2. Postavljanje armije na teritorije koje poseduje
3. Napad na drugu teritoriju
4. Prestanak napada zbog nedostatka vojske ili ličnog izbora
5. Pomeranje bilo kog broja armije sa jedne na susednu teritoriju pri čemu mora ostati najmanje jedna vojska na svakoj okupiranoj teritoriji
6. Ukoliko je tokom izvršavanja napada, porazio rivala, izvlači karticu sa gomile.
   Jedan potez=jedna kartica.
7. Na kraju, napadačke kockice se predaju narednom igraču i time se završava potez.

Napad se može izvršiti na susednu teritoriju ili na teritoriju preko mora koja je povezana isprekidanom linijom sa onom sa koje se vrši napad. Igrač koji vrši napad mora imati na svojoj teritoriji najmanje dve armije da bi u slučaju pobede morao da ostavi bar jednu na teritoriji sa koje napada. Napadač može da se povuče iz napada bilo kada, ali ako ostanu u borbi do kraja postoje samo dva ishoda. Prvi je da će odbrambena vojska biti uništena a napadač će imati novu teritoriju u posedu. Drugi ishod je da će ostati samo sa jednom armijom i time biti onesposobljen za dalju borbu, što dovodi do neuspeha u osvajanju teritorije.
Da bi se utvrdilo da li je borba dobijena ili izgubljena od strane onog koji napada, oba igrača

[9]Albert Lamorisse (1922-1970)

	1959	1963	1975	1980	1993	2008
Game Pieces	Cube = 1 Army Oblong = 10 Armies	⅄ = 1 Army ★ = 10 Armies		Roman Numerals (I, III, V, and X)	Infantry = 1 Army; Cavalry = 5 Armies Artilerry = 10 Armies	> = 1 Army >>> = 3 Armies
Map	6 Continents / 42 Territories					
Cards	42 terriritory cards (with footsoldier, horseman, or cannor) + 2 Joker Cards (with all three figures)					42 Territory cards
Setup	Divide the cards; place one army per territory on the cards	Players choose	Added "Allied Army" for 2 person play	Introduced game variations	"Secret Mission" *RISK*	
Additional Armies	1 Army / 3 occupied territories; continent bonus; increasing card bonus					City and capital bonuses; different card bonuses
Free Move	Move armies from 1 territory to an adjacent territory					Move armies to a "connected" territory

Slika 3.3: Različita pravila igre Riziko kroz istoriju [6]

Potez	Broj armija	Broj bačenih kockica	Brojevi na kockicama	Izgubljene armije
	Napad–Odbrana	Napad–Odbrana	Napad–Odbrana	Napad–Odbrana
1	4 – 3	3 – 2	5, 4, 3 – 6, 3	1 – 1
2	3 – 2	3 – 2	6, 5, 3 – 6, 5	2 – 0
3	1 – 2	1 – 2	5 – 4, 3	0 – 1
4	1 – 1	1 – 1	4 – 5	1 – 0
5	0 – 1			

Tabela 3.1: Mogući ishodi da se dese tokom jednog napada

bacaju kockice. Broj kockica zavisi od broja armije koje ima igrač. Igrač koji se brani, u slučaju da ima jednu armiju, baca samo jednu kockicu. Ali ako ima dve ili više, on može da baca dve ili tri kockice. Napadač baca jednu, dve ili tri kockice u zavisnosti koliko ima armije. Napadač mora da ima najmanje jednu više armiju na teritoriji nego što baca broj kockica. Na primer, ako ima tri armije, on može da baci najviše dve kockice. Ako oba igrača bacaju po tri kockice, najjača vrednost se upoređuje sa najjačom protivničkom, srednja sa srednjom i najslabija sa najslabijom. U slučaju da igrač koji se brani baca jednu kockicu, njegova vrednost se upoređuje sa najjačom napadačkom vrednošću. Na tabeli 3.1 imamo primer jednog mogućeg ishoda prilikom jednog napada. Na slici 3.3 imamo prikaz promena u pravilima kroz nekoliko godina što je uticalo na razvoj igre.

4 Primena Markovljevih lanaca na analizu igara

Kao što je napomenuto u prethodnom poglavlju, u narednim redovima biće prikazano kako Markovski lanci utiču kroz društvene igre koje su navedene kao predmet analize. Prvo će biti prikazana analiza igre Monopol, sa ciljem da pokaže sa kojim verovatnoćama se staje na određena polja, koja će imati podpoglavlja u kojima će biti date razne strategije (Kratki boravak u zatvoru, Duži ostanak u zatvoru i Fiksiranje modela na primeru dve prethodne strategije). Kroz analizu igre Riziko, gde je cilj da se predvidi verovatnoća da se dobija/gubi armija u toku napada, kroz primer situacije kada napadač ima tri armije a igrač koji se brani ima dve armije.

4.1 Analiza-Monopol

Da bi krenuli u dalju analizu, treba da se podsetimo dva pravila koja će uticati na našu konstrukciju matrice verovatnoće. Prvo, što moramo znati, ako se dobiju dva ista broja na kockicama prilikom bacanja, imamo pravo na dodatno bacanje. Ako i u dodatnom bacanju, se dobiju ponovo dva ista broja na kockicama, dobijamo jos jedno dodatno bacanje. Ukoliko u trećem bacanju opet budu dva ista broja, umesto da se krećemo dalje normalno, odlazi se u zatvor. Drugo pravilo je izlazak iz zatvora. Ako se na startu svog poteza nalazimo u zatvoru, možemo dati karticu "Get out of Jail Free (Besplatan izlazak iz zatvora)"ili platiti iznos u vrednosti od 50 apoena, baciti kockice i izaći iz zatvora. U slučaju da se ne izabere nijedna od dve ponuđene opcije, postoji i treća opcija. Ona je da se bacaju kockice. Ako se dobiju dve iste, izlazak iz zatvora je besplatan i kretanje po tabli je normalno na onaj broj dobijen prilikom zbira na kockicama. Ako se ne dobije dupli broj na kockicama u trećem pokušaju, mora da se plati 50 apoena za izlazak i kretanje ide dalje normalno po broju dobijenom prilikom poslednjeg bacanja. Treba napomenuti da izbor izbora izlaska iz zatvora ranije ili ostati u njemu što je duže moguće (dobra strategija ako se ima u planu da rivali stanu na polja onoga koje u zatvoru i donesu dodatne prihode koji se mogu iskoristiti za izgradnju kućica/hotela ili učestvovanje u aukciji prilikom kupovine zemljišta) daju nam dve različite strategije, Kratak boravak u zatvoru i Duži ostanak u zatvoru.

4.1.1 Kratak boravak u zatvoru

U primerima koji slede, kao i u konačnoj matrici verovatnoća, redosled kolona (redova) se zasniva na tabli Monopol (Slika 3.2), prva kolona i red odgovaraju polju Go(Start) i u nastavku je procedura popunjavanja matrice za svako polje je u smeru kazaljke na satu. Takođe, polje Go to Jail (Idi u zatvor) neće biti u našoj matrici, ali biće polja In Jail (U zatvoru) i Just visiting (U prolazu).

Tabela 4.1: Verovatnoće zbira dve kockice

Zbir na kockicama	Verovatnoća
2	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{2}{36}$
4	$\frac{3}{36}$
5	$\frac{4}{36}$
6	$\frac{5}{36}$
7	$\frac{6}{36}$
8	$\frac{5}{36}$
9	$\frac{4}{36}$
10	$\frac{3}{36}$
11	$\frac{2}{36}$
12	$\frac{1}{36}$

Tabela 4.2: Verovatnoće zbira dve kockice sa mogućim dodatnim bacanjem

Zbir na kockicama	Verovatnoća
2	$\frac{35}{1296}$
3	$\frac{2}{36}$
4	$\frac{107}{1296}$
5	$\frac{4}{36}$
6	$\frac{179}{1296}$
7	$\frac{6}{36}$
8	$\frac{179}{1296}$
9	$\frac{4}{36}$
10	$\frac{107}{1296}$
11	$\frac{2}{36}$
12	$\frac{35}{1296}$
Zatvor	$\frac{1}{216}$

Situacija 4.1 *(Start, Prvi krug) Bacanjem dve kockice, dobijamo jedanaest mogućigh suma čije se vrednosti kreću od dva do dvanaest, sa verovatnoćama datim u Tabeli 4.1. Verovatnoća da sa polja Start dođemo do polja Chance biće $\frac{6}{36}$, a da stanemo na polje "Vermont Avenue"je $\frac{5}{36}$ i tako dalje. Bitno je napomenuti da nema puno mogućnosti da stanemo na mnoga polja na tabli zbog toga što imamo jedno bacanje, što nam čini prvu verziju našeg modela prilično jednostavnom i netačnom. Prvi red, koji je ovde prikazan kao lista brojeva, predstavlja verovatnoću da se započne poljem Start i da se završi u polju Start i tako dalje sa poljem In Jail koje je navedeno posle polja Just visiting i Go to Jail koje je izostavljeno od stajanja na tom polju jer automatski šalje u zatvor. Dobili smo:*
$(0, 0, \frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{5}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, 0, \frac{2}{36}, \frac{1}{36}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
kao brojeve u prvom redu.

Prva promena koju pravimo u Situaciji 4.1 dolazi iz činjenice da ako imamo tri bacanja sa istim brojevima na kockicama u nizu, odlazimo u zatvor. Ako zbirna vrednost na kockicama bude pet gde su moguće vrednosti (1 4, 2 3, 3 2, 4 1), ne dobijamo dodatno bacanje. Samim tim i verovatnoća ostaje ista i iznosi $\frac{4}{36}$. Ukoliko zbir sume bude četiri, moguće su vrednosti na kockicama (1 3, 2 2, 3 1). Ako dobijemo na kockicama (2 2) i prethodna dva bacanja su bila sa duplim brojevima,

Tabela 4.3: Odredišta kartica Iznenađenje

Odredište	Verovatnoća
Zatvor	$\frac{1}{16}$
Start	$\frac{1}{16}$
Zadržavanje na polju	$\frac{14}{16}$

Tabela 4.4: Odredišta kartica Šansa

Odredište	Verovatnoća
Zatvor	$\frac{1}{16}$
Start	$\frac{1}{16}$
Reading Railroad	$\frac{1}{16}$
St. Charles Place	$\frac{1}{16}$
Illinois Avenue	$\frac{1}{16}$
Boardwalk	$\frac{1}{16}$
Next Railroad	$\frac{2}{16}$
Next Utility	$\frac{1}{16}$
Back 3 Spaces	$\frac{1}{16}$
Zadržavanje na polju	$\frac{6}{16}$

ne idemo četiri koraka napred na tabli, nego automatski smo poslati u zatvor. Ovo se dešava sa verovatnoćom $(\frac{1}{6})^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{1296}$ gde $\frac{1}{6}$ predstavlja verovatnoću da se na obe kockice dobilo isto, gde dvojka kao eksponent zahteva da se ovo dešava dva puta u nizu pre ovog bacanja i $\frac{1}{36}$ je verovatnoća da bude na kockicama (2 2). Verovatnoća da dobijemo dva para u trenutnom bacanju i da oni nisu dupli u oba prethodna bacanja je $(1 - (\frac{1}{6})^2) \cdot \frac{1}{36} = \frac{35}{1296}$ i ovo čini da verovatnoća sume bude četiri i da se dozvoli pomeranje za četiri koraka na tabli iznosi $\frac{2}{36} + \frac{35}{1296} = \frac{107}{1296}$ jer postoji verovatnoća $\frac{2}{36}$ za to se da ne dobije dvostvruka vrednost na kockicama čija suma iznosi četiri i to su mogućnosti (1 3, 3 1). Za sume na kockicama dva, šest, osam, deset i dvanaest, metod izračunavanja je sličan, čiji rezultat je dat u tabeli 4.2 gde se nalazi i polje Zatvor jer postoji verovatnoća da se tamo završi prilikom dobijanja tri vezane duple kockice.
Moramo napomenuti da ove verovatnoće ne važe za prvo (ili drugo) bacanje svaki put, ali kako je naš cilj da odredimo dugoročno stabilno stanje, mi ćemo koristiti ove verovatnoće u našem modelu.

Situacija 4.2 *(Start, Drugi krug) Opet ćemo razmatrati šta se događa kad počnemo sa polja Start. Sa verovatnoćama iz tabele 4.2, možemo uzeti diskusiju iz situacije 4.1 i dobiti prvi red matrice verovatnoća (koji odgovara početku sa polja Start):* $(0, 0, \frac{35}{1296}, \frac{2}{36}, \frac{107}{1296}, \frac{4}{36}, \frac{179}{1296}, \frac{6}{36}, \frac{179}{1296}, \frac{4}{36}, \frac{107}{1296}, \frac{1}{216}, \frac{2}{36}, \frac{35}{1296}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Poslednja promena sa kojom ćemo da se pozabavimo je dodatno pomeranje izazvano stajanjem na poljima Šansa ili Iznenađenje, prilikom izvlačenja kartica koje mogu prouzrokovati dalje pomeranje na tabli. Polje Iznenađenje sadrži šesnaest kartica, od kojih četrnaest ne uzrokuju pomeranje nego predstavljaju dobitak ili gubitak sredstava u apoenima koji je naznačen na kartici. Jedna kartica šalje u zatvor direktno a druga preostala šalje na polje Start. Sa druge strane, kartice koje se izvuku na polju Šansa kada se stane na njega, predstavljaju veću mogućnost da nas pošalju na drugu lokaciju na tabli. Važno je napomenuti da za polja Next Railroad i Next Utility uvek se upućuje na prostor koji se nalazi na tabli u smeru kazaljke na satu. Zapazimo da polje Šansa koje se nalazi na istočnoj strani table može da nam pruži zanimljive situacije. Od ovog polja, Reading Railroad, koji se nalazi na jednoj od kartica, je najbliža stanica. Moguće je da se ovde izvuče kartica na kojoj piše Back 3 Spaces (Vratiti se tri koraka unazad) i to će nas staviti na polje Iznenađenje gde imate nultu verovatnoću da ponovo završite negde drugde.

Situacija 4.3 *(Start, Treći krug) Kako bismo utvrdili koje promene moramo učiniti, važno je prvo videti koja polja su nam dostupna kad krenemo od početnog polja. Ako dobijemo u zbiru dva na kockicama, sa polja Start pomeramo se na polje Iznenađenje koje se nalazi južno na tabli i ako dobijemo u zbiru sedam na kockicama, pomeramo se na polje Šansa, južno na tabli, odakle možemo biti poslati na različite lokacije u zavisnosti šta nam piše na kartici.*
Situacija sa poljem Iznenađenje je lakša za sagledavanje. Šansa da ostajemo na tom polju je $\frac{14}{16}$ *i verovatnoća da ćemo dobiti dva u zbiru na kockicama iznosi* $\frac{35}{1296}$ *samim tim verovatnoća ostanka na polju Iznenađenje iznosi* $\frac{35}{1296} \cdot \frac{14}{16} = \frac{245}{10368}$*, pri čemu je ovo dobijanje dvojke na kockicama, u zbiru, nije treće u nizu čime bi automatski bili poslati u zatvor. Dve karte koje nas ne ostavljaju na tom polju su karta Idi na start i karta Idi u zatvor, tako da postoji mogućnost da odemo na Start kada smo počeli na polju Start je da bacimo dvojku, u zbiru, na kockicama i izvučemo karticu na kojoj piše Idi na start i njena verovatnoća da se desi iznosi* $\frac{35}{1296} \cdot \frac{1}{16} = \frac{35}{20736}$*. Kako postoji samo jedna kartica iz Iznenađenja koja nas može poslati u zatvor,onda je gorespomenut postupak određivanja verovatnoće za Idi na start isti i on iznosi* $\frac{35}{1296} \cdot \frac{1}{16} = \frac{35}{20736}$*.*
Kartice na polju Šansa nam pružaju priliku da završimo na polju Start, u Zatvoru, kao i na mnoštvo drugih lokacija. Najlakše je gledati svaku lokaciju i odrediti verovatnoću da se završi na njoj, počevši od polja Start. Na primer, počinjemo od polja Start i završavamo u njemu, možemo dobiti dva u zbiru i izvući karticu Iznenađenja koja će nas tamo poslati ili dobiti sedam u zbiru, stati na polje Šansa i izvući karticu koja nas šalje na polje Start. Verovatnoća da se ovo dogodi $\frac{35}{1296} \cdot \frac{1}{16} + \frac{6}{36} \cdot \frac{1}{16} = \frac{251}{20736}$*. Za slučaj da počnemo u polju Start i završimo u Zatvoru, verovatnoća je* $\frac{35}{1296} \cdot \frac{1}{16} + \frac{6}{36} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{216} = \frac{347}{20736}$*. Da bi došli do Reading Railroad sa polja Start, možemo da dobijemo u zbiru pet i stanemo ili dobijemo sedam u zbiru i izvučemo karticu Iznenađenja koja nas šalje tamo i verovatnoća da se ovo dogodi* $\frac{4}{36} + \frac{6}{36} \cdot \frac{1}{16} = \frac{35}{288}$*. Što se tiče završetka u polju Income Tax,od polja Start dobijemo četiri u zbiru na kockicama ili dobijemo sedam i izvučemo karticu na kojoj piše Back 3 Spaces (Vrati se tri koraka unazad) i verovatnoća da se ovo desi je* $\frac{107}{1296} + \frac{6}{36} \cdot \frac{1}{16} = \frac{241}{2592}$*. Za potez od Starta do Illionis Avenue, verovatnoća iznosi* $\frac{6}{36} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{96}$ *jer jedina opcija je da stanemo na polje Šansa i izvučemo karticu koja će nas poslati na Illionis Avenue. Sa druge strane, do polja Connecticut Avenue od Starta je moguće samo doći ukoliko se na kockicama dobije zbir koji iznosi devet i njenu verovatnoću znamo i ona iznosi* $\frac{4}{36}$*.*
Prvi red naše matrice verovatnoća, kad krenemo od polja Start je $(\frac{251}{20736}, 0, \frac{245}{10368}, \frac{1}{18}, \frac{241}{2592}, \frac{35}{288}, \frac{179}{1296}, \frac{1}{16}, \frac{179}{1296}, \frac{1}{9}, \frac{107}{1296}, \frac{347}{20736}, \frac{19}{288}, \frac{97}{2592}, 0, 0, \frac{1}{48}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{96}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{96})$.

Postoje još dve situacije koje vredi pokriti pričom.

Situacija 4.4 *(Water Works-Vodovod) Pitamo se kako od polja Water Works dospeti na polje Go to Jail (Idi u zatvor). Postoje mnoga scenarija i to su:*

* *Dobijanjem u zbiru dva, prilikom bacanja kockice*
* *Dobijanjem u zbiru pet, prilikom bacanja kockice i stajanjem na polje Iznenađenje i izvlačenjem kartice na kojoj piše Idi u Zatvor*
* *Dobijanjem u zbiru osam, prilikom bacanja kockice i stajanjem na polje Šansa i izvlačenjem kartice na kojoj piše Idi u Zatvor*
* *Dobijanjem u zbiru osam, prilikom bacanja kockice i stajanjem na polje Šansa i izvlačenjem kartice gde piše Vrati se 3 koraka unazad i stajanjem na polje Iznenađenje gde ćemo izvući karticu na kojoj piše Idi u Zatvor*

* *Dobijanjem tri duple u nizu i automatski pravac u Zatvor*

Verovatnoća da se ovo desi je $\frac{35}{1296} + \frac{4}{36} \cdot \frac{1}{16} + \frac{179}{1296} \cdot \frac{1}{16} + \frac{179}{1296} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{216} = \frac{5281}{110592}$.
Verovatnoća da se stigne od polja Water Works do polja Reading Railroad iznosi $\frac{179}{1296} \cdot \frac{1}{16} + \frac{179}{1296} \cdot \frac{1}{16} = \frac{179}{6912}$, *što znači da smo dobili, u zbiru, na kockima osam i sa polja Šansa izvući karticu na kojoj piše Reading Railroad ili karticu na kojoj piše Next Railroad. Verovatnoća da se stigne od polja Water Works do polja Community Chest (Iznenađenje) iznosi* $\frac{4}{36} \cdot \frac{14}{16} + \frac{179}{1296} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{14}{16} = \frac{17381}{16588}$, *što nas dovodi do toga da smo dobili pet u zbiru i izvukli karticu koja nas je zadržala na polju Iznenađenje ili smo dobili osam u zbiru, izvukli karticu Vrati se tri koraka unazad i izvukli karticu koja nas je zadržala na polju Iznenađenje. Konačni red u našoj matrici verovatnoće za Water Works glasi* $(\frac{4769}{110592}, 0, 0, 0, 0, \frac{179}{6912}, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{5281}{110592}, \frac{179}{20736}, \frac{179}{20736}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{179}{20736}, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{18}, \frac{107}{1296}, \frac{17381}{165888}, \frac{179}{1296}, \frac{1}{6}, \frac{179}{3456}, \frac{1}{9}, \frac{107}{1296}, \frac{1331}{20736})$.

Kao što smo naveli ranije, naš model će zavisiti od izbora strategije Kratak boravak ili Duži ostanak. Za prvu, kad se završi u zatvoru, cilj je da u sledećem potezu platiti iznos koji vredi 50 apoena ili iskoristi karticu Get out of Jail free (Slobodan izlazak iz zatvora) ukoliko je posedujemo, baciti kockicu i pomeriti se za onoliko koliko je naznačeno na kockicama. Što se tiče strategije Duži ostanak, cilj je ostati što duže u zatvoru, bacajući kockice i ne dobijajući iste brojeve u dva poteza i tek u trećem krugu bacati kockice i odlaziti iz zatvor, uz plaćanje iznosa od 50 apoena ako se ne dobiju dva ista broja na kockicama. Ova strategija ima smisla u toku igre kad postoji želja da se izbegavaju stajanja na teritorijama rivala koji imaju veliki broj kućica ili hotel, kao i u situaciji da dok traje boravak u zatvoru postoji mogućnost da se zaradi jer protivnici mogu da stanu na naša polja. Sad ćemo istražiti strategiju Kratak boravak.

Situacija 4.5 *(Zatvor, Kratak boravak) Matrični red koji odgovara strategiji Kratak boravak, vidi se na matrici verovatnoća, vrlo je sličan redu za Just Visiting. Zapravo, dva reda su identična, osim što se verovatnoće za zbir na kockicama, dva, četiri, šest, osam, deset ili dvanaest, uzimaju iz tabele 4.1 umesto tabele 4.2 jer kad počinjemo u polju In Jail, ne postoji šansa da uzastopne duple rezultiraju našom trećom duplom u nizu. To znači, na primer, verovatnoća da iz zatvora završimo na polju Electric Company (Elektrodistribucija)* $\frac{1}{36}$, *da stignemo na polje States Avenue je* $\frac{2}{36}$ *i tako dalje da se stigne do severne Šanse je* $\frac{1}{36}$.
Verovatnoća da od polja U zatvoru dođemo na polje Start je $\frac{6}{36} \cdot \frac{1}{36} + \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} = \frac{7}{576}$, *gde ćemo da dobijemo u zbiru četiri ili dvanaest i stati na polje Iznenađenje ili Šansa i izvući karticu koja nas odvodi do polja Start. Verovatnoća da završimo na polju New York Avenue je* $\frac{4}{36} + \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{16} = \frac{65}{576}$ *i do nje se dolazi ili dobijanjem devet u zbiru ili dobijanjem dvanaest što nas odvodi do polja Šansa gde ćemo izvući karticu Vrati se tri koraka unazad (Back 3 spaces). Kao poslednji primer u okviru Kratak boravak strategije, navešćemo kako stići na polje Boardwalk od polja In Jail. Da bi to ostvarili treba da dobijemo dvanaest u zbiru i da stanemo na polje Šansa gde ćemo izvući karticu na kojoj piše Idite na polje Boardwalk (Go to Boardwalk) i to će se dogoditi sa verovatnoćom* $\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{576}$. *Sve ovo zajedno daje matrični red* $(\frac{7}{576}, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{576}, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{7}{576}, \frac{1}{576}, \frac{1}{36}, \frac{1}{18}, \frac{1}{12}, \frac{1}{9}, \frac{5}{36}, \frac{7}{48}, \frac{5}{36}, \frac{65}{576}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{96}, 0, \frac{1}{576}, \frac{1}{288}, 0, 0, \frac{1}{576}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{576})$.

Kombinujući situacije 4.3, 4.4 i 4.5 zajedno sa preostalih tridesetsedam polja na tabli, dobijamo matricu verovatnoća koja je data na tridesetoj strani. Podsetimo da redosled kolona i redova počinje od polja Start, u smeru kazaljke na satu oko table za Monopol (Slika 3.2), isključujući polje Go to Jail i uključuje polje Jail odmah nakon kolone koja odgovara polju Jast Visitng. Pre nego što vidimo vektore stacionarnog stanja povezanog sa strategijom Kratak boravak u igri Monopol, postoje neki zanimljivi obrasci prisutni u matrici. Gledajući kolone, vidimo da se na polja Start i Jail može doći u bilo kojem trenutku, bez obzira gde se nalazimo. Ove činjenice su povezane sa efektom karti Šansa i za Start i Zatvor su kartice Iznenađenja. Karta do najbliže uslužne stanice iz grupe Šansa,

daje veliki broj nula u kolonama, za polja Waterworks i Electric Company.
Na tabeli 3.5, videćemo finalne verovatnoće za polja u igri Monopol, strategija Kratak boravak. Možemo primetiti da pored polja Jail, polje Illinois Avenue ima najveću finalnu verovatnoću. To nam govori da kako igra odmiče, igrači najčešće provode vreme na tom polju, ne računajući polje Jail. Što nas dovodi do činjenice da izgradnja kućica i hotela na tom polju je najkorisnija, u slučaju da se poseduju i preostale dve kartice, Kentucky i Indiana Avenue, koje će omogučiti izgradnju.

$$
P = \begin{bmatrix}
\frac{251}{20736} & 0 & \frac{245}{10368} & \frac{1}{18} & \frac{241}{2592} & \frac{35}{288} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{16} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{107}{1296} & \frac{347}{20736} & \frac{19}{288} & \frac{97}{2592} \\
\frac{179}{20736} & 0 & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{1331}{20736} & \frac{1891}{20736} & \frac{1}{9} & \frac{179}{3456} & \frac{1}{6} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{275}{20736} & \frac{1891}{20736} & \frac{1331}{20736} \\
\frac{1}{144} & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{324} & \frac{1}{16} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{24} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{6} & \frac{179}{1296} & \frac{5}{432} & \frac{17}{144} & \frac{29}{324} \\
\frac{107}{20736} & 0 & 0 & 0 & \frac{107}{20736} & \frac{667}{20736} & \frac{1}{18} & \frac{107}{3456} & \frac{1}{9} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{6} & \frac{203}{20736} & \frac{2971}{20736} & \frac{2411}{20736} \\
\frac{1}{288} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{288} & \frac{1}{288} & \frac{35}{1296} & \frac{1}{48} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{179}{1296} & \frac{7}{864} & \frac{49}{288} & \frac{367}{2592} \\
\frac{35}{10368} & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{20736} & \frac{35}{20736} & 0 & \frac{35}{3456} & \frac{1}{18} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{83}{10368} & \frac{2899}{20736} & \frac{3491}{20736} \\
\frac{1}{288} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{107}{1296} & \frac{7}{864} & \frac{1}{9} & \frac{179}{1296} \\
\frac{107}{20376} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{203}{20736} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{9} \\
\frac{1}{144} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{5}{432} & \frac{1}{18} & \frac{107}{1296} \\
\frac{179}{20376} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{275}{20736} & \frac{35}{1296} & \frac{1}{18} \\
\frac{251}{20376} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{20736} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{347}{20736} & \frac{35}{20736} & \frac{35}{1296} \\
\frac{7}{576} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{576} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{576} & \frac{1}{576} & \frac{1}{36} \\
\frac{251}{20376} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{288} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{347}{20736} & \frac{1}{288} & 0 \\
\frac{251}{20376} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{107}{20736} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{347}{20736} & \frac{107}{20736} & 0 \\
\frac{251}{20376} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{144} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{347}{20736} & \frac{1}{144} & 0 \\
\frac{251}{20376} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{179}{20736} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{347}{20736} & \frac{179}{20736} & 0 \\
\frac{251}{20376} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{96} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{347}{20736} & \frac{1}{96} & 0 \\
\frac{179}{20376} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{179}{20736} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{275}{20736} & \frac{179}{20736} & 0 \\
\frac{1}{144} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{144} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{432} & \frac{1}{144} & 0 \\
\frac{107}{20376} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{107}{20736} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{763}{20736} & \frac{107}{20736} & 0 \\
\frac{1}{288} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{288} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{55}{864} & \frac{1}{288} & 0 \\
\frac{35}{20376} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{20736} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1843}{20736} & \frac{35}{20736} & 0 \\
\frac{35}{20376} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2435}{20736} & 0 & 0 \\
\frac{1}{288} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{379}{2592} & 0 & 0 \\
\frac{107}{20376} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3659}{20736} & 0 & 0 \\
\frac{2899}{331776} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{6912} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{16753}{110592} & \frac{35}{20736} & \frac{35}{20736} \\
\frac{511}{41472} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{96} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5311}{41472} & \frac{1}{288} & \frac{1}{288} \\
\frac{5275}{331776} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{107}{6912} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11401}{110592} & \frac{107}{20736} & \frac{107}{20736} \\
\frac{83}{5184} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{48} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{395}{5184} & \frac{1}{144} & \frac{1}{144} \\
\frac{4769}{110592} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{179}{6912} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5281}{110592} & \frac{179}{20736} & \frac{179}{20736} \\
\frac{2977}{41472} & \frac{35}{1296} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{865}{41472} & \frac{1}{96} & \frac{1}{96} \\
\frac{641}{5184} & \frac{107}{1296} & \frac{7}{144} & \frac{35}{1296} & 0 & \frac{1}{48} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{89}{5184} & \frac{1}{144} & \frac{1}{144} \\
\frac{49355}{331776} & \frac{1}{9} & \frac{749}{10368} & \frac{1}{18} & \frac{35}{1296} & \frac{107}{6912} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{563}{36864} & \frac{107}{20736} & \frac{107}{20736} \\
\frac{817}{4608} & \frac{179}{1296} & \frac{7}{72} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{97}{2592} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{211}{13824} & \frac{1}{288} & \frac{1}{288} \\
\frac{49283}{331776} & \frac{1}{6} & \frac{1253}{10368} & \frac{1}{9} & \frac{107}{1296} & \frac{419}{6912} & \frac{35}{1296} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{185}{12288} & \frac{35}{20736} & \frac{35}{20736} \\
\frac{2555}{20736} & \frac{179}{1296} & \frac{7}{48} & \frac{179}{1296} & \frac{2339}{20736} & \frac{1747}{20736} & \frac{1}{18} & \frac{35}{3456} & 0 & 0 & 0 & \frac{347}{20736} & \frac{35}{20736} & \frac{35}{20736} \\
\frac{1963}{20736} & \frac{1}{9} & \frac{1253}{10368} & \frac{1}{6} & \frac{367}{2592} & \frac{11}{96} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{48} & \frac{35}{1296} & 0 & 0 & \frac{347}{20736} & \frac{1}{288} & \frac{1}{288} \\
\frac{1403}{20736} & \frac{107}{1296} & \frac{7}{72} & \frac{179}{1296} & \frac{3563}{20736} & \frac{2971}{20736} & \frac{1}{9} & \frac{107}{3456} & \frac{1}{18} & \frac{35}{1296} & 0 & \frac{347}{20736} & \frac{107}{20736} & \frac{107}{20736} \\
\frac{811}{20736} & \frac{1}{18} & \frac{749}{10368} & \frac{1}{9} & \frac{47}{324} & \frac{25}{144} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{24} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{35}{1296} & \frac{347}{20736} & \frac{1}{144} & \frac{1}{144} \\
\frac{251}{20736} & \frac{35}{1296} & \frac{7}{144} & \frac{107}{1296} & \frac{2483}{20736} & \frac{3043}{20736} & \frac{1}{6} & \frac{179}{3456} & \frac{1}{9} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{347}{20736} & \frac{739}{20736} & \frac{179}{20736}
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & \frac{1}{48} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{96} & 0 & 0 \\
\frac{35}{1296} & 0 & \frac{179}{10368} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{179}{20736} & 0 & 0 \\
\frac{1}{18} & \frac{35}{1296} & \frac{1}{72} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{144} & 0 & 0 \\
\frac{107}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{43}{1152} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{107}{20736} & 0 & 0 \\
\frac{1}{9} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{16} & \frac{35}{1296} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{288} & 0 & 0 \\
\frac{179}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{11}{128} & \frac{1}{18} & \frac{245}{10368} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{20736} & 0 & 0 \\
\frac{1}{6} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{107}{1296} & \frac{7}{144} & \frac{35}{1296} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{179}{1296} & \frac{1}{6} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{749}{10368} & \frac{1}{18} & \frac{35}{1296} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{9} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{6} & \frac{179}{1296} & \frac{7}{72} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{35}{1296} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{107}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{6} & \frac{1253}{10368} & \frac{1}{9} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{35}{1296} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{18} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{179}{1296} & \frac{7}{48} & \frac{179}{1296} & \frac{2339}{20736} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{35}{3456} & 0 & \frac{35}{20736} & \frac{35}{10368} & 0 \\
\frac{1}{18} & \frac{1}{12} & \frac{1}{9} & \frac{5}{36} & \frac{7}{48} & \frac{5}{36} & \frac{65}{576} & \frac{1}{12} & \frac{1}{18} & \frac{1}{96} & 0 & \frac{1}{576} & \frac{1}{288} & 0 \\
\frac{35}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{1253}{10368} & \frac{1}{6} & \frac{367}{2592} & \frac{1}{9} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{48} & \frac{35}{1296} & \frac{1}{288} & \frac{1}{144} & 0 \\
0 & \frac{35}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{107}{1296} & \frac{7}{72} & \frac{179}{1296} & \frac{3563}{20736} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{107}{3456} & \frac{1}{18} & \frac{667}{20736} & \frac{107}{10368} & 0 \\
0 & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{749}{10368} & \frac{1}{9} & \frac{47}{324} & \frac{1}{6} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{24} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{16} & \frac{53}{1296} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{7}{144} & \frac{107}{1296} & \frac{2483}{20736} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{6} & \frac{179}{3456} & \frac{1}{9} & \frac{1891}{20736} & \frac{755}{10368} & \frac{35}{1296} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{245}{10368} & \frac{1}{18} & \frac{241}{2592} & \frac{1}{9} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{16} & \frac{179}{1296} & \frac{35}{288} & \frac{67}{648} & \frac{1}{18} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{1331}{20736} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{179}{3456} & \frac{1}{6} & \frac{3043}{20736} & \frac{1331}{10368} & \frac{107}{1296} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{324} & \frac{1}{18} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{24} & \frac{179}{1296} & \frac{25}{144} & \frac{197}{1296} & \frac{1}{9} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{107}{20736} & \frac{35}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{107}{3456} & \frac{1}{9} & \frac{2971}{20736} & \frac{1835}{10368} & \frac{179}{1296} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{288} & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{1}{48} & \frac{107}{1296} & \frac{11}{96} & \frac{47}{324} & \frac{1}{6} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{20736} & 0 & 0 & \frac{35}{3456} & \frac{1}{18} & \frac{1747}{20736} & \frac{1187}{10368} & \frac{179}{1296} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{9} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{107}{1296} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{1}{18} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{20736} & 0 & \frac{35}{1296} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{288} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{107}{20736} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{144} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{179}{20736} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{96} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{144} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{107}{20736} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{288} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{20736} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{35}{10368} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{20736} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{144} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{288} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{107}{10368} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{107}{20736} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{72} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{144} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{179}{10368} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{179}{20736} & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

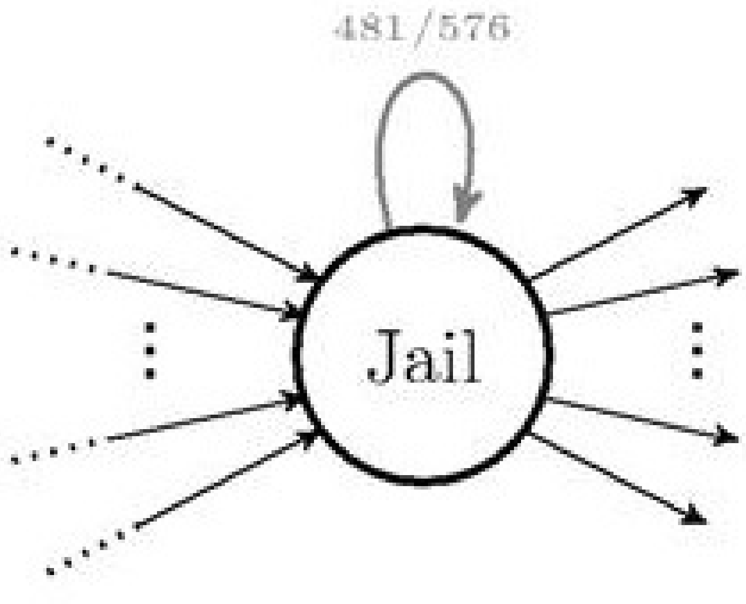
$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{96} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{179}{20736} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{144} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{107}{20736} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{288} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{20736} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{35}{20736} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{20736} \\
0 & \frac{1}{576} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{576} \\
0 & \frac{1}{288} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{288} \\
0 & \frac{107}{20736} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{107}{20736} \\
0 & \frac{1}{144} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{144} \\
0 & \frac{179}{20736} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{179}{20736} \\
\frac{35}{1296} & \frac{1}{96} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{96} \\
\frac{1}{18} & \frac{739}{20736} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{179}{20736} \\
\frac{107}{1296} & \frac{1}{16} & \frac{35}{1296} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{144} \\
\frac{1}{9} & \frac{1819}{20736} & \frac{1}{18} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{107}{20736} \\
\frac{179}{1296} & \frac{11}{96} & \frac{107}{1296} & \frac{35}{1296} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{288} \\
\frac{1}{6} & \frac{2899}{20736} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{35}{1296} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{20736} \\
\frac{179}{1296} & \frac{1}{6} & \frac{179}{1296} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{245}{10368} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{9} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} & \frac{107}{1296} & \frac{7}{144} & \frac{35}{1296} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{107}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{179}{1296} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{749}{10368} & \frac{1}{18} & \frac{35}{1296} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{18} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{1}{6} & \frac{179}{1296} & \frac{16373}{165878} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{35}{3456} & 0 & 0 & \frac{35}{20736} \\
\frac{35}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{107}{1296} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{6} & \frac{2569}{20736} & \frac{1}{9} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{48} & \frac{35}{1296} & 0 & \frac{1}{288} \\
0 & \frac{35}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{179}{1296} & \frac{24941}{165888} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{107}{3456} & \frac{1}{18} & \frac{35}{1296} & \frac{107}{20736} \\
0 & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{329}{2592} & \frac{1}{6} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{24} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{11}{324} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{18} & \frac{107}{1296} & \frac{17381}{165888} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{6} & \frac{179}{3456} & \frac{1}{9} & \frac{107}{1296} & \frac{1331}{20736} \\
0 & 0 & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{1687}{20736} & \frac{1}{9} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{16} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{241}{2592} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{77}{2592} & \frac{1}{18} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{24} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{6} & \frac{47}{324} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{749}{165888} & \frac{35}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{107}{3456} & \frac{1}{9} & \frac{179}{1296} & \frac{3563}{20736} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2304} & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{1}{48} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{367}{2592} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{245}{165888} & 0 & 0 & \frac{35}{3456} & \frac{1}{18} & \frac{107}{1296} & \frac{2339}{20736} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{1747}{20736} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{17}{288} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{667}{20736} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{144} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{179}{20736}
\end{bmatrix}
$$

Polje	Verovatnoća
Go	0.0309071
Mediteran Avenue	0.0212834
Community Chest (South)	0.0187994
Baltic Avenue	0.0215936
Income Tax	0.0232170
Reading Railroad	0.0295896
Oriental Avenue	0.0225527
Chance (South)	0.0086363
Vermont Avenue	0.0231383
Connecticut Avenue	0.0229617
Just Visiting	0.0226176
In Jail	0.0402954
St. Charles Place	0.0269635
Electric Comapny	0.0259792
States Avenue	0.0237101
Virginia Avenue	0.0246382
Pennsylvania Railroad	0.0292213
St.James Place	0.0279591
Community Chest (West)	0.0260042
Tennessee Avenue	0.0294002
New York Avenue	0.0308864
Free Parking	0.0288584
Kentucky Avenue	0.0283661
Chance (North)	0.0104828
Indiana Avenue	0.0273401
Illinois Avenue	0.0318586
B&O Railroad	0.0306493
Atlantic Avenue	0.0270773
Ventnor Avenue	0.0267693
Water Works	0.0280695
Marvin Gardens	0.0258308
Pacific Avenue	0.0267389
North Carolina Avenue	0.0262337
Community Chest (East)	0.0236293
Pennsylvania Avenue	0.0249801
Short Line	0.0242937
Chance (East)	0.0086547
Park Place	0.0218313
Luxury Tax	0.0217571
Boardwalk	0.0262247

Tabela 4.5: Finalne verovatnoće, Kratki boravak

4.1.2 Duži ostanak u zatvoru

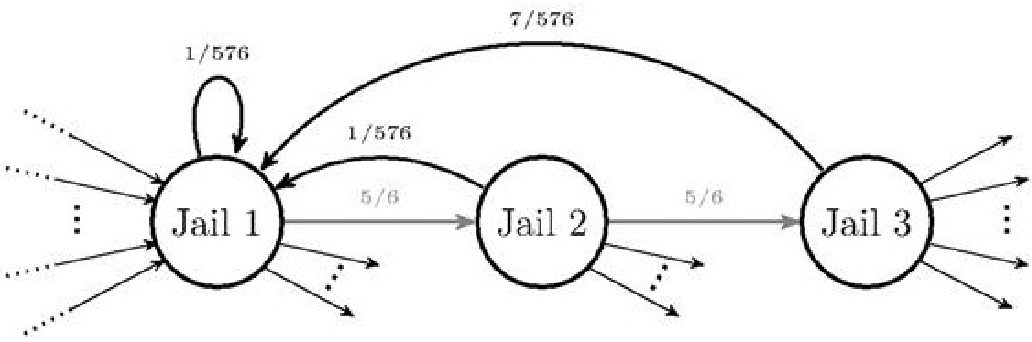
Duži ostanak u zatvoru podrazumeva da se nadamo da će protivnici stati na neke naše razvijene terotirije, sa kućicama i hotelom, što mi izbegavamo odlaganjem izlaska da ne bih stali na teritorije naših protivnika i platili im odgovarajući iznos. Po pravilima igre, kada se nalazimo u zatvoru, ako ne želimo da platimo iznos od 50 apoena ili iskoristimo karticu Get out of Jail free (Izađi iz zatvora slobodno) pre bacanja kockica, bacaju se kockice i cilj je da se izlazak izvrši posle trećeg bacanja što nam govori da u prva dva izbegnemo dobijanje dva ista broja. Ako ni posle trećeg bacanja nemamo iste brojeve na kockicama, platićemo iznos od 50 apoena ili iskoristiti karticu i nastaviti kretanje po tabli za broj koraka dobijenih na poslednjem bacanju. U odnosu na prethodnu strategiju, očekujemo da će promene u matrici verovatnoća biti samo u polju In Jail (U Zatvoru), dok će sve ostalo biti isto. Modifikacija za In Jail izgledala bi slično kao na slici 4.1, gde postoje velike šanse da se ostane u zatvoru. Samo dobijanje duplih na kockicama nas pušta da pobegnemo iz naše ćelije i postoji mala verovatnoća, zbog polja Šansa, da se ponovo nađemo u zatvoru. Verovatnoća $\frac{481}{576}$ koja se pojavljuje na slici 4.1 je zbir verovatnoće $\frac{5}{6}$ da ostanemo u zatvoru ako ne dobijemo duple brojeve i verovatnoće $\frac{1}{576}$ da dobijemo u zbiru dvanaest i na polju Šansa izvučemo kartu koja nas vraća u zatvor.



Slika 4.1: Duži ostanak, prvi pokusaj [11]

Problem sa ovom modifikacijom je što radi samo za prva dva bacanja u zatvoru. Na trećem bacanju, verovatnoća da završimo na nekim poljima kad krenemo od polja u Zatvoru je identična strategiji Kratki boravak u zatvoru jer ga moramo napustiti. Kao što vidimo na slikama 4.1 i 4.2, postoje strelice koje vode nekuda, kao što su polja koja te šalju u zatvor ili mesta na koja je moguće stići od polja u Zatvoru.

Da bi smo precizno vodili koliko smo bacanja izvršili da bi ostali u Zatvoru, uvodimo u naš model, dva lažna prostora Zatvor. Na slici 4.2 vidimo tri prostora, In Jail (1), In Jail (2) i In Jail (3) koji nam služe ne samo da pratimo lokaciju igrača, nego i da vidimo koliko je poteza ostao tamo. Sa verovatnoćom $\frac{5}{6}$ ostajemo u zatvoru, zadržavamo se na istoj fizičkoj lokaciji ali se pomeramo u drugi virtuelni zatvor. Treći virtuelni zatvor ima strelice koje izlaze kao u strategiji Kratki boravak u zatvoru. Verovatnoća $\frac{1}{576}$ je da napustimo zatvor, stanemo na polje Šansa, izvučemo karticu koja nas vraća u zatvor, u ovom slučaju prvi virtuelni zatvor.



Slika 4.2: Duži ostanak, put kroz virtuelan zatvor [11]

Nakon što smo videli modifikovanu matricu koja je data na sledećoj strani, imamo i nove finalne verovatnoće koje su prikazane u tabeli 4.6. Kada uporedimo sa tabelom 4.5 iz strategije Kratak boravak u zatvoru, prvo što vidimo je promena verovatnoća za polje In Jail, jer zbog strategije Duži ostanak u zatvoru, biramo da ostanemo što je duže moguće u zatvoru. Sa druge strane, verovatnoće za ostala polja na tabli su izmenjena ali ne toliko drastično. Kao i u Kratkom boravku u zatvoru, Illinois Avenue je polje na koje igrači najčešće staju.

$$P = \begin{bmatrix}
\frac{251}{20736} & 0 & \frac{245}{10368} & \frac{1}{18} & \frac{241}{2592} & \frac{35}{288} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{16} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{107}{1296} & \frac{347}{20736} & 0 & 0 \\
\frac{179}{20736} & 0 & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{1331}{20736} & \frac{1891}{20736} & \frac{1}{9} & \frac{179}{3456} & \frac{1}{6} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{275}{20736} & 0 & 0 \\
\frac{1}{144} & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{324} & \frac{1}{16} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{24} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{6} & \frac{179}{1296} & \frac{5}{432} & 0 & 0 \\
\frac{107}{20736} & 0 & 0 & 0 & \frac{107}{20736} & \frac{667}{20736} & \frac{1}{18} & \frac{107}{3456} & \frac{1}{9} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{6} & \frac{203}{20736} & 0 & 0 \\
\frac{1}{288} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{288} & \frac{1}{288} & \frac{35}{1296} & \frac{1}{48} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{179}{1296} & \frac{7}{864} & 0 & 0 \\
\frac{35}{10368} & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{20736} & \frac{35}{20736} & 0 & \frac{35}{3456} & \frac{1}{18} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{83}{10368} & 0 & 0 \\
\frac{1}{288} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{107}{1296} & \frac{7}{864} & 0 & 0 \\
\frac{107}{20376} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{203}{20736} & 0 & 0 \\
\frac{1}{144} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{5}{432} & 0 & 0 \\
\frac{179}{20376} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{275}{20736} & 0 & 0 \\
\frac{251}{20376} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{20736} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{347}{20736} & 0 & 0 \\
\frac{1}{576} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{576} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{576} & \frac{5}{6} & 0 \\
\frac{1}{576} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{576} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{576} & 0 & \frac{5}{6} \\
\frac{7}{576} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{576} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{576} & 0 & 0 \\
\frac{251}{20376} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{288} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{347}{20736} & 0 & 0 \\
\frac{251}{20376} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{107}{20736} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{347}{20736} & 0 & 0 \\
\frac{251}{20376} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{144} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{347}{20736} & 0 & 0 \\
\frac{251}{20376} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{179}{20736} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{347}{20736} & 0 & 0 \\
\frac{251}{20376} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{96} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{347}{20736} & 0 & 0 \\
\frac{179}{20376} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{179}{20736} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{275}{20736} & 0 & 0 \\
\frac{1}{144} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{144} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{432} & 0 & 0 \\
\frac{107}{20376} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{107}{20736} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{763}{20736} & 0 & 0 \\
\frac{1}{288} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{288} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{55}{864} & 0 & 0 \\
\frac{35}{20376} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{20736} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1843}{20736} & 0 & 0 \\
\frac{35}{20376} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2435}{20736} & 0 & 0 \\
\frac{1}{288} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{379}{2592} & 0 & 0 \\
\frac{107}{20376} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3659}{20736} & 0 & 0 \\
\frac{2899}{331776} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{6912} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{16753}{110592} & 0 & 0 \\
\frac{511}{41472} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{96} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5311}{41472} & 0 & 0 \\
\frac{5275}{331776} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{107}{6912} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11401}{110592} & 0 & 0 \\
\frac{83}{5184} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{48} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{395}{5184} & 0 & 0 \\
\frac{4769}{110592} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{179}{6912} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5281}{110592} & 0 & 0 \\
\frac{2977}{41472} & \frac{35}{1296} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{865}{41472} & 0 & 0 \\
\frac{641}{5184} & \frac{107}{1296} & \frac{7}{144} & \frac{35}{1296} & 0 & \frac{1}{48} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{89}{5184} & 0 & 0 \\
\frac{49355}{331776} & \frac{1}{9} & \frac{749}{10368} & \frac{1}{18} & \frac{35}{1296} & \frac{107}{6912} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{563}{36864} & 0 & 0 \\
\frac{817}{4608} & \frac{179}{1296} & \frac{7}{72} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{97}{2592} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{211}{13824} & 0 & 0 \\
\frac{49283}{331776} & \frac{1}{6} & \frac{1253}{10368} & \frac{1}{9} & \frac{107}{1296} & \frac{419}{6912} & \frac{35}{1296} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{185}{12288} & 0 & 0 \\
\frac{2555}{20736} & \frac{179}{1296} & \frac{7}{48} & \frac{179}{1296} & \frac{2339}{20736} & \frac{1747}{20736} & \frac{1}{18} & \frac{35}{3456} & 0 & 0 & 0 & \frac{347}{20736} & 0 & 0 \\
\frac{1963}{20736} & \frac{1}{9} & \frac{1253}{10368} & \frac{1}{6} & \frac{367}{2592} & \frac{11}{96} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{48} & \frac{35}{1296} & 0 & 0 & \frac{347}{20736} & 0 & 0 \\
\frac{1403}{20736} & \frac{107}{1296} & \frac{7}{72} & \frac{179}{1296} & \frac{3563}{20736} & \frac{2971}{20736} & \frac{1}{9} & \frac{107}{3456} & \frac{1}{18} & \frac{35}{1296} & 0 & \frac{347}{20736} & 0 & 0 \\
\frac{811}{20736} & \frac{1}{18} & \frac{749}{10368} & \frac{1}{9} & \frac{47}{324} & \frac{25}{144} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{24} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{35}{1296} & \frac{347}{20736} & 0 & 0 \\
\frac{251}{20736} & \frac{35}{1296} & \frac{7}{144} & \frac{107}{1296} & \frac{2483}{20736} & \frac{3043}{20736} & \frac{1}{6} & \frac{179}{3456} & \frac{1}{9} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{347}{20736} & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix}
\frac{19}{288} & \frac{97}{2592} & 0 & 0 & \frac{1}{48} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{96} \\
\frac{1891}{20736} & \frac{1331}{20736} & \frac{35}{1296} & 0 & \frac{179}{10368} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{179}{20736} \\
\frac{17}{144} & \frac{29}{324} & \frac{1}{18} & \frac{35}{1296} & \frac{1}{72} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{144} \\
\frac{2971}{20736} & \frac{2411}{20736} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{43}{1152} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{107}{20736} \\
\frac{49}{288} & \frac{367}{2592} & \frac{1}{9} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{16} & \frac{35}{1296} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{288} \\
\frac{2899}{20736} & \frac{3491}{20736} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{11}{128} & \frac{1}{18} & \frac{245}{10368} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{20736} \\
\frac{1}{9} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{6} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{107}{1296} & \frac{7}{144} & \frac{35}{1296} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{107}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{6} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{749}{10368} & \frac{1}{18} & \frac{35}{1296} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{18} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{6} & \frac{179}{1296} & \frac{7}{72} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{35}{1296} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{35}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{6} & \frac{1253}{10368} & \frac{1}{9} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{35}{1296} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{35}{20736} & \frac{35}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{179}{1296} & \frac{7}{48} & \frac{179}{1296} & \frac{2339}{20736} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{35}{3456} & 0 & \frac{35}{20736} \\
\frac{1}{576} & \frac{1}{36} & 0 & \frac{1}{36} & 0 & \frac{1}{36} & 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{576} & \frac{1}{36} & 0 & \frac{1}{96} & 0 & \frac{1}{576} \\
\frac{1}{576} & \frac{1}{36} & 0 & \frac{1}{36} & 0 & \frac{1}{36} & 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{576} & \frac{1}{36} & 0 & \frac{1}{96} & 0 & \frac{1}{576} \\
\frac{1}{576} & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{12} & \frac{1}{9} & \frac{5}{36} & \frac{7}{48} & \frac{5}{36} & \frac{65}{576} & \frac{1}{12} & \frac{1}{18} & \frac{1}{96} & 0 & \frac{1}{576} \\
\frac{1}{288} & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{1253}{10368} & \frac{1}{6} & \frac{367}{2592} & \frac{1}{9} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{48} & \frac{35}{1296} & \frac{1}{288} \\
\frac{107}{20736} & 0 & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{107}{1296} & \frac{7}{72} & \frac{179}{1296} & \frac{3563}{20736} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{107}{3456} & \frac{1}{18} & \frac{667}{20736} \\
\frac{1}{144} & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{749}{10368} & \frac{1}{9} & \frac{47}{324} & \frac{1}{6} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{24} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{16} \\
\frac{179}{20736} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{7}{144} & \frac{107}{1296} & \frac{2483}{20736} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{6} & \frac{179}{3456} & \frac{1}{9} & \frac{1891}{20736} \\
\frac{1}{96} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{245}{10368} & \frac{1}{18} & \frac{241}{2592} & \frac{1}{9} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{16} & \frac{179}{1296} & \frac{35}{288} \\
\frac{179}{20736} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{1331}{20736} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{179}{3456} & \frac{1}{6} & \frac{3043}{20736} \\
\frac{1}{144} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{324} & \frac{1}{18} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{24} & \frac{179}{1296} & \frac{25}{144} \\
\frac{107}{20736} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{107}{20736} & \frac{35}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{107}{3456} & \frac{1}{9} & \frac{2971}{20736} \\
\frac{1}{288} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{288} & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{1}{48} & \frac{107}{1296} & \frac{11}{96} \\
\frac{35}{20736} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{20736} & 0 & 0 & \frac{35}{3456} & \frac{1}{18} & \frac{1747}{20736} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{1}{18} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{1296} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{35}{20736} & \frac{35}{20736} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{20736} \\
\frac{1}{288} & \frac{1}{288} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{288} \\
\frac{107}{20736} & \frac{107}{20736} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{107}{20736} \\
\frac{1}{144} & \frac{1}{144} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{144} \\
\frac{179}{20736} & \frac{179}{20736} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{179}{20736} \\
\frac{1}{96} & \frac{1}{96} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{96} \\
\frac{1}{144} & \frac{1}{144} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{144} \\
\frac{107}{20736} & \frac{107}{20736} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{107}{20736} \\
\frac{1}{288} & \frac{1}{288} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{288} \\
\frac{35}{20736} & \frac{35}{20736} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{20736} \\
\frac{35}{20736} & \frac{35}{20736} & 0 & 0 & \frac{35}{10368} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{20736} \\
\frac{1}{288} & \frac{1}{288} & 0 & 0 & \frac{1}{144} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{288} \\
\frac{107}{20736} & \frac{107}{20736} & 0 & 0 & \frac{107}{10368} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{107}{20736} \\
\frac{1}{144} & \frac{1}{144} & 0 & 0 & \frac{1}{72} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{144} \\
\frac{179}{20736} & \frac{179}{20736} & 0 & 0 & \frac{179}{10368} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{179}{20736}
\end{bmatrix}
$$

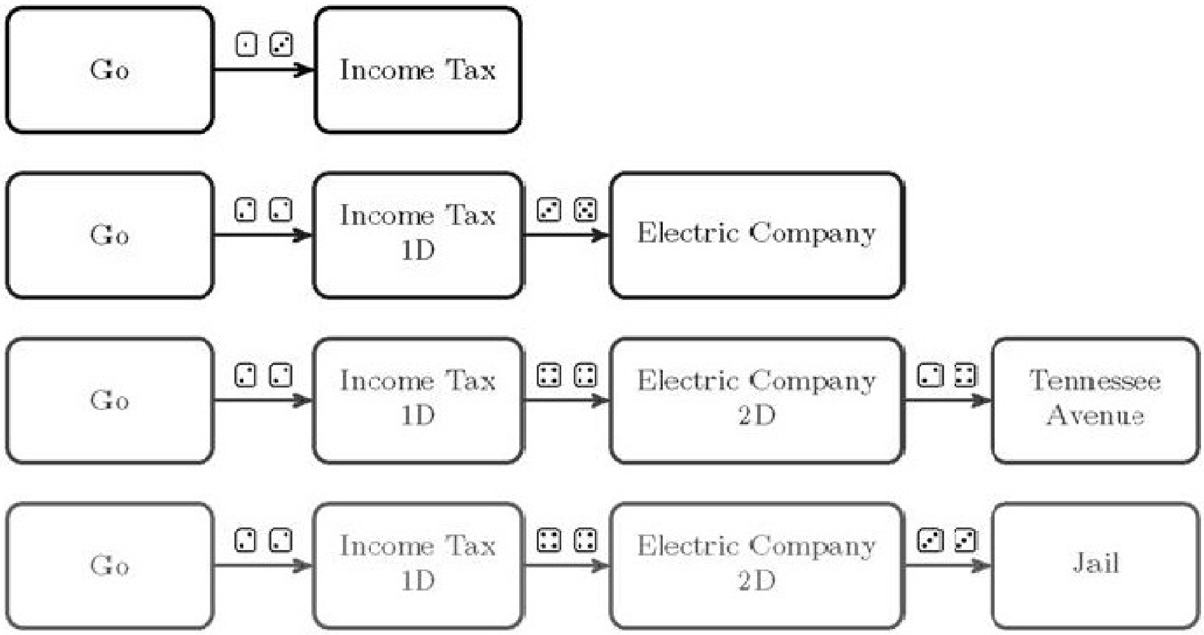
$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{96} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{179}{20736} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{144} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{107}{20736} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{288} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{20736} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{35}{10368} & 0 & 0 & \frac{35}{20736} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{20736} \\
\frac{1}{288} & 0 & 0 & \frac{1}{576} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{576} \\
\frac{1}{288} & 0 & 0 & \frac{1}{576} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{576} \\
\frac{1}{288} & 0 & 0 & \frac{1}{576} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{576} \\
\frac{1}{144} & 0 & 0 & \frac{1}{288} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{288} \\
\frac{107}{10368} & 0 & 0 & \frac{107}{20736} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{107}{20736} \\
\frac{53}{1296} & 0 & 0 & \frac{1}{144} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{144} \\
\frac{755}{10368} & \frac{35}{1296} & 0 & \frac{179}{20736} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{179}{20736} \\
\frac{67}{648} & \frac{1}{18} & \frac{35}{1296} & \frac{1}{96} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{96} \\
\frac{1331}{10368} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{739}{20736} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{179}{20736} \\
\frac{197}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{16} & \frac{35}{1296} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{144} \\
\frac{1835}{10368} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{1819}{20736} & \frac{1}{18} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{107}{20736} \\
\frac{47}{324} & \frac{1}{6} & \frac{179}{1296} & \frac{11}{96} & \frac{107}{1296} & \frac{35}{1296} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{288} \\
\frac{1187}{10368} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{6} & \frac{2899}{20736} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{35}{1296} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{20736} \\
\frac{107}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{6} & \frac{179}{1296} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{245}{10368} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{18} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} & \frac{107}{1296} & \frac{7}{144} & \frac{35}{1296} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{35}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{179}{1296} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{749}{10368} & \frac{1}{18} & \frac{35}{1296} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{35}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{1}{6} & \frac{179}{1296} & \frac{16373}{165878} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{35}{3456} & 0 & 0 & \frac{35}{20736} \\
0 & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{107}{1296} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{6} & \frac{2569}{20736} & \frac{1}{9} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{48} & \frac{35}{1296} & 0 & \frac{1}{288} \\
0 & 0 & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{179}{1296} & \frac{24941}{165888} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{107}{3456} & \frac{1}{18} & \frac{35}{1296} & \frac{107}{20736} \\
0 & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{9} & 0 & 0 & \frac{329}{2592} & \frac{1}{6} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{24} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{11}{324} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{18} & \frac{107}{1296} & \frac{17381}{165888} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{6} & \frac{179}{3456} & \frac{1}{9} & \frac{107}{1296} & \frac{1331}{20736} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{1687}{20736} & \frac{1}{9} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{16} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{241}{2592} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{77}{2592} & \frac{1}{18} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{24} & \frac{179}{1296} & \frac{1}{6} & \frac{47}{324} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{749}{165888} & \frac{35}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{107}{3456} & \frac{1}{9} & \frac{179}{1296} & \frac{3563}{20736} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2304} & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{1}{48} & \frac{107}{1296} & \frac{1}{9} & \frac{367}{2592} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{245}{165888} & 0 & 0 & \frac{35}{3456} & \frac{1}{18} & \frac{107}{1296} & \frac{2339}{20736} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{1}{18} & \frac{1747}{20736} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{1296} & \frac{17}{288} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{667}{20736} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{144} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{179}{20736}
\end{bmatrix}
$$

Polje	Verovatnoća
Go	0.0290833
Mediteran Avenue	0.0200357
Community Chest (South)	0.0176990
Baltic Avenue	0.0203323
Income Tax	0.0218646
Reading Railroad	0.0279631
Oriental Avenue	0.0212455
Chance (South)	0.0081359
Vermont Avenue	0.0217993
Connecticut Avenue	0.0216344
Just Visiting	0.0213125
In Jail	0.0959311
St. Charles Place	0.0255033
Electric Comapny	0.0260934
States Avenue	0.0217045
Virginia Avenue	0.0242348
Pennsylvania Railroad	0.0263278
St.James Place	0.0268036
Community Chest (West)	0.0229539
Tennessee Avenue	0.0282195
New York Avenue	0.0280994
Free Parking	0.0282570
Kentucky Avenue	0.0261104
Chance (North)	0.0104493
Indiana Avenue	0.0256274
Illinois Avenue	0.0299051
B&O Railroad	0.0288901
Atlantic Avenue	0.0253594
Ventnor Avenue	0.0251460
Water Works	0.0264968
Marvin Gardens	0.0253307
Pacific Avenue	0.0251824
North Carolina Avenue	0.0247052
Community Chest (East)	0.0222292
Pennsylvania Avenue	0.0235078
Short Line	0.0228581
Chance (East)	0.0081460
Park Place	0.0205515
Luxury Tax	0.0204828
Boardwalk	0.0247878

Tabela 4.6: Finalne verovatnoće, Duži ostanak

4.1.3 Fiksiranje modela

Naši modeli Kratki boravak i Duži ostanak nisu savršeni. Kada započinjemo potez, od polja Go, ne postoji mogućnost da završimo u zatvoru, osim kao rezultat tri puta uzastopnog dobijanja duplog broja na kockicama, što nas dovodi do toga da moramo izvršiti pomeranje nekoliko puta. Naš model objašnjava ovo, pozivajući se na činjenicu, proučavanjem finalnih verovatnoća, možemo približiti korišćenjem verovatnoća iz tabele 4.2. Korektan model koristi ideju strategije Duži ostanak. U toj strategiji smo uvodili dva virtuelna prostora da bi vodili evidenciju koliko smo poteza odigrali i zadržavali se u zatvoru. Fiksni model za Monopol se može napraviti tako što ćemo uvoditi dva dodatna virtuelna prostora za svako polje na tabli koji prati broj dobijenih duplih na kockicama za dati potez, da bi stigli na lokaciju. Primera radi, pored standardnog Boardwalk, dodajemo Boardwalk 1D i Boardwalk 2D, koji predstavljaju da smo stigli do polja Boradwalk, sa jednim ili dva vezana bacanja na kojim smo dobili duple brojeve.



Slika 4.3: Fiksan model, primer [11]

Slika 4.3 prikazuje primer kako ovo radi. Počinjemo sa poljem Go, dobijamo jedan i tri na kockicama i stajemo normalno na polje Income Tax, ali ako dobijemo dve dvojke, stajemo na Income Tax 1D. Za sada smo imali jedno duplo bacanje i naš virtuelni prostor to prati. Od Income Tax 1D, sa tri i pet mi stajemo na regularnu Electric company, čime se naš potez završava i brojač duplih se resetuje i vraća na nulu. Dok dobijanjem dve četvorke, stajemo na Electric company 2D i imamo dva dvostruka bacanja. Na kraju, sa četvorkom i dvojkom na kockicama, stajemo regularno na Tennessee Avenue, brojač duplih se vraća na nulu a u slučaju da dobijemo dve trojke, direktno idemo u zatvor ili virtuelni zatvor ako je u pitanju Duži ostanak strategija.
Kako ovaj model efektivno dodaje dva dodatna virtuelna prostora za svako polje na tabli, matrica je prevelika za ovaj format, a kako se dobijene verovatnoće ne razlikuju puno od tačnih verovatnoća, poučna verzija naših modela je prevazišla tačne verzije sa stodvadeset stvarnih ili virtuelnih polja. Na tabelama 4.7 i 4.8 su date finalne verovatnoće za strategije Duži ostanak i Kratak boravak koje su pratile fiksan model.

Polje	Verovatnoća
Go	0.0309612
Mediteran Avenue	0.0213138
Community Chest (South)	0.0188488
Baltic Avenue	0.0216240
Income Tax	0.0232852
Reading Railroad	0.0296310
Oriental Avenue	0.0226214
Chance (South)	0.0086505
Vermont Avenue	0.0232096
Connecticut Avenue	0.0230034
Just Visiting	0.0226954
In Jail	0.0394998
St. Charles Place	0.0270166
Electric Comapny	0.0260404
States Avenue	0.0237209
Virginia Avenue	0.0246489
Pennsylvania Railroad	0.0291997
St.James Place	0.0279242
Community Chest (West)	0.0259446
Tennessee Avenue	0.0293559
New York Avenue	0.0308517
Free Parking	0.0288360
Kentucky Avenue	0.0283584
Chance (North)	0.0104803
Indiana Avenue	0.0273569
Illinois Avenue	0.0318577
B&O Railroad	0.0306590
Atlantic Avenue	0.0270720
Ventnor Avenue	0.0267886
Water Works	0.0280742
Marvin Gardens	0.0258605
Pacific Avenue	0.0267737
North Carolina Avenue	0.0262517
Community Chest (East)	0.0236605
Pennsylvania Avenue	0.0250063
Short Line	0.0243264
Chance (East)	0.0086687
Park Place	0.0218640
Luxury Tax	0.0217985
Boardwalk	0.0262596

Tabela 4.7: Finalne verovatnoće, Korigovan model Kratki boravak

Polje	Verovatnoća
Go	0.0291826
Mediteran Avenue	0.0201003
Community Chest (South)	0.0177751
Baltic Avenue	0.0203976
Income Tax	0.0219659
Reading Railroad	0.0280496
Oriental Avenue	0.0213457
Chance (South)	0.0081636
Vermont Avenue	0.0219034
Connecticut Avenue	0.0217118
Just Visiting	0.0214223
In Jail	0.0938552
St. Charles Place	0.0255955
Electric Comapny	0.0261548
States Avenue	0.0217600
Virginia Avenue	0.0242527
Pennsylvania Railroad	0.0263657
St.James Place	0.0267892
Community Chest (West)	0.0229513
Tennessee Avenue	0.0281968
New York Avenue	0.0281156
Free Parking	0.0282480
Kentucky Avenue	0.0261421
Chance (North)	0.0104495
Indiana Avenue	0.0256728
Illinois Avenue	0.0299549
B&O Railroad	0.0289285
Atlantic Avenue	0.0254008
Ventnor Avenue	0.0251920
Water Works	0.0265475
Marvin Gardens	0.0243872
Pacific Avenue	0.0252492
North Carolina Avenue	0.0247692
Community Chest (East)	0.0222919
Pennsylvania Avenue	0.0235764
Short Line	0.0229247
Chance (East)	0.0081745
Park Place	0.0206162
Luxury Tax	0.0205584
Boardwalk	0.0248612

Tabela 4.8: Finalne verovatnoće, Korigovan model Duži ostanak

4.2 Analiza-Riziko

Za razliku od Monopola, gde nam je cilj bio da vidimo sa kojim verovatnoćama stajemo na neka polja na tabli, u Riziku se bavimo predviđanjem verovatnoća sa kojim se dobija/gubi armija u toku jednog napada u zavisnosti od brojeva dobijenih na kockicama. Pre nego što ponovimo pravila vezana za odigravanje borbe, potrebno je razjasniti dva pojma. Prvi pojam je angažman koji je definisan kao jedna bitka između dve suprostavljene sile i odnosi se se na jedno bacanje od strane oba igrača. Drugi pojam je operacija koji se definiše kao niz borbi između suprostavljenih teritorija. Jedna operacija se sastoji od nekoliko angažmana, a igrač može da izvrši nekoliko operacija po potezu. Sledeće varijable će nam pomoći u izražavanju jačine i oštećenja tokom borbe:

1. Varijable napada
   (a) ${N_A}'$-Ukupan broj napadačkih armija
   (b) N_A-Broj armija koje učestvuju u operaciji
   (c) n_a-Broj armija koje učestvuju tokom angažmana
   (d) L_A-Broj armija koje su izgubljene u operaciji
   (e) L_a-Broj armija koje su izgubljene tokom angažmana
2. Varijable odbrane
   (a) ${N_D}'$-Ukupan broj odbrambenih armija
   (b) N_D-Broj armija koje učestvuju u operaciji
   (c) n_d-Broj armija koje učestvuju tokom angažmana
   (d) L_D-Broj armija koje su izgubljene u operaciji
   (e) L_d-Broj armija koje su izgubljene tokom angažmana

Igrač koji napada može da izabere sa koliko će armija napasti i baca jednu kockicu za svaku armiju koja učestvuje u angažmanu. Može da angažuje najviše tri armije, čak iako ima više na toj teritoriji. Pored toga, ne može se napasti sa poslednjom preostalom armijom na teritoriji sa koje se napada. Sa ovim navedenim pravilima imamo ograničenja za date varijable:

1. $n_a \leq 3$
2. $n_a \leq N_A - 1$

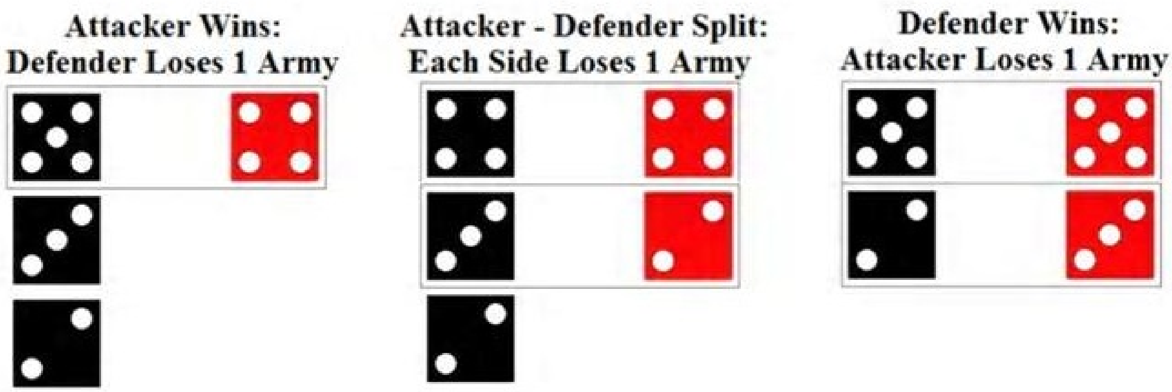
Sa druge strane, igrač koji se brani može da izabere sa koliko će armija da se odbrani i baca kockicu za svaku armiju koja učestvuje. Može da koristi svu raspoloživu armiju u odbrani svoje teritorije. Uticaj ovih pravila na varijable su sledeća:

1. $n_d \leq 2$
2. $n_d \leq N_D$

Pravila koja prate borbu su:

- Svaki učesnik borbe ređa svoje kockice u opadajućem nizu,od najveće ka najmanjoj
- Upoređuju se kockice sa najvećom vrednošću između rivala i veća odnosi pobedu u delu angažmana
  1. Ako obe strane imaju više od jedne kockice onda se upoređuju sledeće najveće vrednosti i veća odnosi pobedu u angažmanu
  2. Ako su upoređene vrednosti jednake, onda odbrana nosi pobedu u tom angažmanu.
  3. Moguće je da napadačka strana pobedi u prvom delu, a odbrambena u drugom delu angažmana i time obe gube po jednu armiju
- Maksimalan broj ukupne izgubljene armije jednak je minimalnom broju bacanja sa obe strane.

Na slici 4.4 se nalaze tri primera ishoda borbe baziranih na sledećim kombinacijama kockica.



Slika 4.4: Primeri borbenih ishoda [6]

Formiranje verovatnoća zavisi od brojeva na bačenim kockicama.
Pre nego što utvrdimo ove verovatnoće, razmatramo raspodelu verovatnoća za maksimalno jedne, dve ili tri kockice i za drugi najveći broj na drugoj i trećoj kockici što je dato na tabeli 4.9.

Broj kockica/Broj na kockici		1	2	3	4	5	6
1	Ishod na kockici	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	Najveća	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$
2	Druga najveća	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	Najveća	$\frac{1}{216}$	$\frac{7}{216}$	$\frac{19}{216}$	$\frac{37}{216}$	$\frac{61}{216}$	$\frac{91}{216}$
3	Druga najveća	$\frac{91}{216}$	$\frac{61}{216}$	$\frac{37}{216}$	$\frac{19}{216}$	$\frac{7}{216}$	$\frac{1}{216}$

Tabela 4.9: Raspodele verovatnoća

Vrednosti iz tabele 4.9 smo izračunali na sledeći način. Sa Y_1, Y_2, Y_3 ćemo označiti neuređen ishod za napadača kad baca tri kockice a sa W_1, W_2 kad baca dve kockice. Odnosno sa Z_1, Z_2 ćemo označiti neuređen ishod za odbrambenog kad baca dve kockice. Neka vrednosti na kockicama budu označene u opadajućem redosledu, $Y^{(1)} \geq Y^{(2)} \geq Y^{(3)}$. Tada su Y_1, Y_2, Y_3, W_1, W_2 i Z_1, Z_2, slučajni uzorci iz diskretne uniformne distribucije na skupu od 1 do 6:

$$P(Y_J = y) = \begin{cases} \frac{1}{6} & y = 1,2,3,4,5,6 \\ 0 & usuprotnom \end{cases}$$

Zajedničke i marginalne raspodele za vektore $(Y^{(1)}, Y^{(2)})$, $(Z^{(1)}, Z^{(2)})$ se mogu dobiti na sledeći način. Kada se bacaju tri kockice:

$$P(Y^{(1)} = y^{(1)}, Y^{(2)} = y^{(2)}) = \begin{cases} \frac{3y^{(1)}-2}{216} & y^{(1)} = y^{(2)} \\ \frac{6y^{(2)}-3}{216} & y^{(1)} > y^{(2)} \\ 0 & usuprotnom \end{cases}$$

$$P(Y^{(1)} = y^{(1)}) = \begin{cases} \frac{1-3y^{(1)}+3(y^{(1)})^2}{216} & y^{(1)} = 1,2,3,4,5,6 \end{cases}$$

Kada se bacaju dve kockice:

$$P(Z^{(1)} = z^{(1)}, Z^{(2)} = z^{(2)}) = \begin{cases} \frac{1}{36} & z^{(1)} = z^{(2)} \\ \frac{2}{36} & z^{(1)} > z^{(2)} \\ 0 & usuprotnom \end{cases}$$

$$P(Z^{(1)} = z^{(1)}) = \begin{cases} \frac{2z^{(1)}-1}{36} & z^{(1)} = 1,2,3,4,5,6 \end{cases}$$

Sve vrednosti koje su 0 su one koje nisu pozitivne i ≤ 6. Zajednička raspodela za $(W^{(1)}, W^{(2)})$ je jednaka $(Z^{(1)}, Z^{(2)})$.

4.2.1 Ishodi borbe

Neka X_n bude stanje sistema na početku n-tog reda u borbi gde je N_A broja napadačkih armija, dok je N_D broj odbrambenih armija:$X_n = (N_A, N_D), 1 \leq N_A \leq N_A{}', 0 \leq N_D \leq N_D{}'$. Početno stanje sistema je $X_0 = (N_A{}', N_D{}')$. Ako je broj armija za svaku stranu poznat pre odigravanja poteza, verovatnoća kretanja iz $X_n = (N_A, N_D)$ u $X_{n+1} = (N_{A+1}, N_{D+1})$ koja se zove verovatnoća tranzicije koja se može naći preko Markovog svojstva: $P\{X_{n+1} = (N_{A+1}, N_{D+1}) | X_n = (N_A, N_D), \cdots,$ $X_0 = (N_A{}', N_D{}')\} = P\{X_{n+1} = (N_{A+1}, N_{D+1}) | X_n = (N_A, N_D)\}$. Može da se formira matrica verovatnoća P. U matrici P, redovi su moguća stanja na početku n-tog poteza X_n, a kolone su moguća stanja na početku sledećeg poteza X_{n+1}. Bitka se završila u sledećim situacijama $X_n = (N_A; 0), N_A \geq 2$ ili $X_n = (1; N_D), N_D > 2$. Ova stanja se zovu apsorbujuća. Ukupan broj mogućih stanja je $N_A' N_D' + N_A' - 1$ gde su $N_A' N_D' - N_D'$ prolazna stanja i $N_A' + N_D' - 1$ su apsorbujuća stanja.
Primera radi, $N_A' = 3, N_D' = 2$. Za ovakav primer imamo 8 mogućih stanja. Moguća stanja su (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (2, 0), (3, 0), (1, 1) i (1, 2). Prva četiri su prelazna stanja,dok poslednja četiri su apsobrujuća.
Matrica P će izgledati ovako:$P = \begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{bmatrix}$, gde su dimenzije matrice $N_A' N_D' + N_A' - 1 \text{x} N_A' N_D' + N_A' - 1$. Q je matrica prelaza iz jednog u drugo prelazno stanje gde su sa 0 označeni nemogući prelazi u drugo stanje a prazan prostor (označen sa ?) se treba popuniti. R je matrica gde se iz prelaznog stanja ide u apsorbujuće stanje. Kao i kod matrice Q, 0 predstavljaju nemoguć događaj. I je matrica prelaza iz apsorbujućeg u apsorbujuće stanje i ona je identična matrica. Ovde ćemo raditi matrice Q, R i P za naš primer, $N_A' = 3, N_D' = 2$. Radi lakšeg zapisa, označićemo sa $a = N_A$ i $d = N_D$.

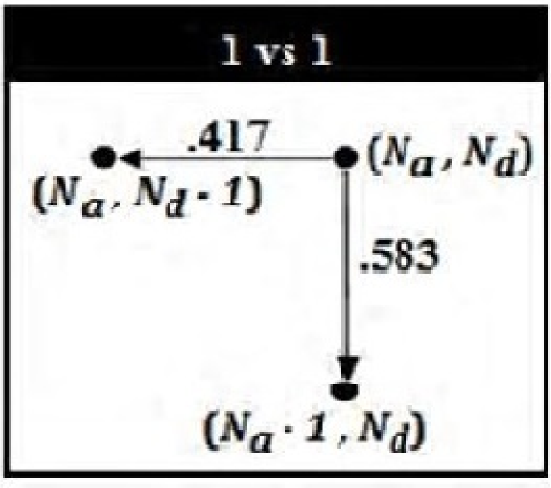
$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ ? & 0 & 0 & 0 \\ ? & 0 & 0 & 0 \\ ? & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} ? & 0 & ? & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ? \\ 0 & ? & 0 & 0 \\ 0 & ? & 0 & ? \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ? & 0 & ? & 0 \\ ? & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ? \\ ? & 0 & 0 & 0 & 0 & ? & 0 & 0 \\ ? & 0 & 0 & 0 & 0 & ? & 0 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

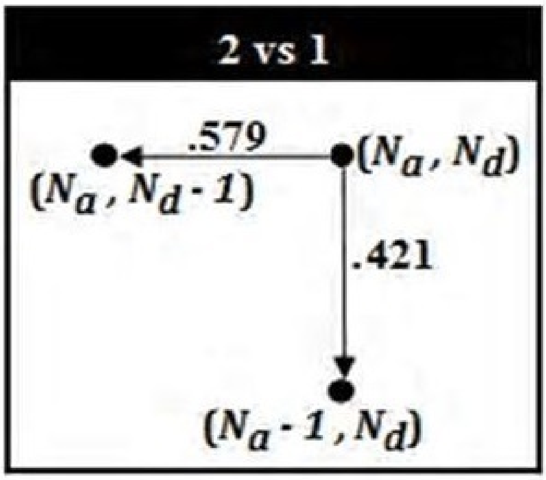
Sada ćemo predstaviti sve moguće situacije u borbama.

1. Kada napadač ima jednu armiju u napadu a odbrambeni se brani samo sa jednom armijom. Prikaz te borbe je na slici 4.5. U ovom slučaju, verovatnoća da napadač pobedi i odbrambeni izgubi svoju armiju iznosi $P\{X_{n+1} = (a, d-1) | X_n = (a, d)\} = P(Y^{(1)} > Z^{(1)}) = \sum_{z_1=1}^{5} \sum_{y_1=z_1+1}^{6} P(Y^{(1)} = y) P(Z^{(1)} = z) = \frac{15}{36} = 0.417$, a da odbrambeni pobedi i napadač izgubi svoju vojsku je $P\{X_{n+1} = (a-1, d) | X_n = (a, d)\} = P(Y^{(1)} \leq Z^{(1)}) = 1 - P(Y^{(1)} > Z^{(1)}) = 1 - \frac{15}{36} = \frac{21}{36} = 0.583$.



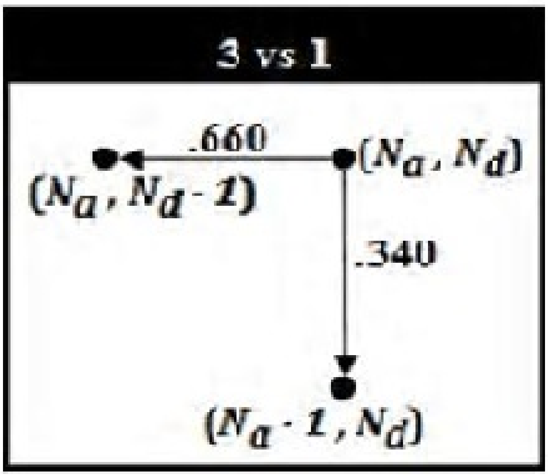
Slika 4.5: Ishodi verovatnoće borbe 1 na 1[6]

2. Napadač ima dve armije dok odbrambeni se brani sa jednom. Borba je na slici 4.6. Verovatnoća da će napadač pobediti i time umanjiti za armiju svog rivala iznosi $P\{X_{n+1} = (a, d-1)|X_n = (a, d)\} = P(Y^{(1)} > Z^{(1)}) = \sum_{z_1=1}^{5} \sum_{y_1=z_1+1}^{6} \sum_{y_2=1}^{y_1} P(Y^{(1)} = y_1, Y^{(2)} = y_2) P(Z^{(1)} = z) = \frac{125}{216} = 0.579$, dok u suprotnom je $P\{X_{n+1} = (a-1, d)|X_n = (a, d)\} = 1 - P(Y^{(1)} > Z^{(1)}) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} = 0.421$ i time je napadač izgubio svoju jednu armiju.



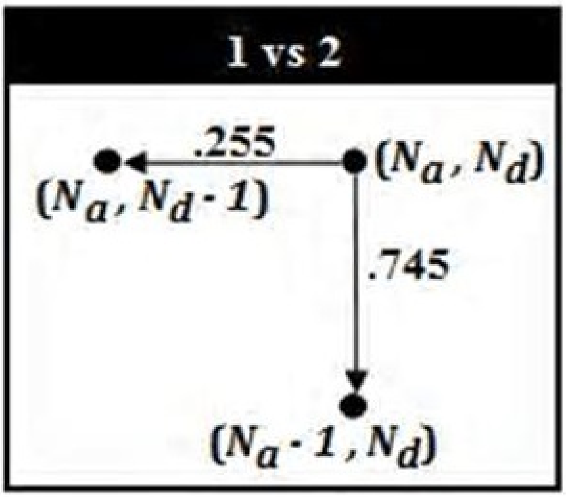
Slika 4.6: Ishodi verovatnoće borbe 2 na 1 [6]

3. Napadač ima tri armije, odbrambeni ima jednu u odbrani. Prikaz na slici 4.7. Sa verovatnoćom $P\{X_{n+1} = (a, d-1)|X_n = (a, d)\} = P(Y^{(1)} > Z^{(1)}) = \sum_{z_1=1}^{5} \sum_{y_1=z_1+1}^{6} \sum_{y_2=1}^{y_1} P(Y^{(1)} = y_1, Y^{(2)} = y_2)P(Z^{(1)} = z) = \frac{855}{1296} = 0.660$ napadač odnosi pobedu i poraženi gubi svoju armiju, a pobeda odbmrambenog i gubitak jedne armije napadača je sa verovatnoćom $P\{X_{n+1} = (a-1, d)|X_n = (a, d)\} = 1 - P(Y^{(1)} > Z^{(1)}) = 1 - \frac{855}{216} = \frac{441}{216} = 0.340$.



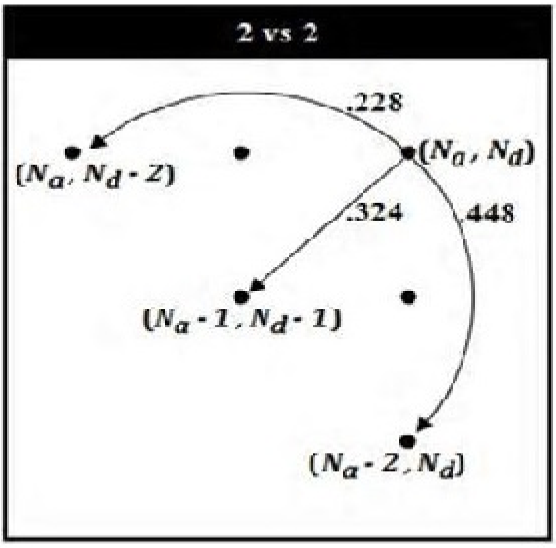
Slika 4.7: Ishodi verovatnoće borbe 3 na 1 [6]

4. Napadač ima jednu armiju, odbrambeni se brani sa dve. U ovom slučaju, verovatnoća pobede napadača i gubitak jedne armije za odbranu iznosi $P\{X_{n+1} = (a, d-1)|X_n = (a, d)\} = P(Y^{(1)} > Z^{(1)}) = \sum_{z_1=1}^{5} \sum_{z_2=1}^{z_1} \sum_{y_1=z_1+1}^{6} P(Z^{(1)} = z, Z^{(2)} = z_2)P(Y^{(1)} = y) = \frac{55}{216} = 0.225$ a poraz napadača i gubitak jedne armije je $P\{X_{n+1} = (a-1, d)|X_n = (a, d)\} = 1 - P(Y^{(1)} > Z^{(1)}) = 1 - \frac{55}{216} = \frac{161}{216} = 0.745$.



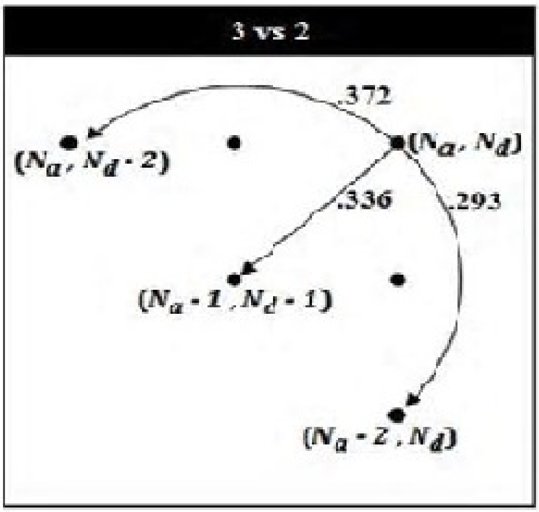
Slika 4.8: Ishodi verovatnoće borbe 1 na 2 [6]

5. Napadač ima dve armije, odbrambeni se brani sa dve armije. Pobeda napadača i gubljenje dve armije za odbranu je dato sa verovatnoćom $P\{X_{n+1} = (a, d-2)|X_n = (a, d)\} = P(Y^{(1)} > Z^{(1)}, Y^{(2)} > Z^{(2)}) = \sum_{z_1=1}^{5}\sum_{z_2=1}^{z_1} P(Y^{(1)} > z_1)P(Y^{(2)} > z_2)P(Z^{(1)} = z_1, Z^{(2)} = z_2) = \sum_{z_1=1}^{5}\sum_{z_2=1}^{z_1}\sum_{y_1=z_1+1}^{6}\sum_{y_2=z_2+1}^{6} P(Y^{(1)} = y_1, Y^{(2)} = y_2)P(Z^{(1)} = z_1, Z^{(2)} = z_2) = \frac{295}{1296} = 0.228$. Pobeda odbrambenog i gubljenje dve armije napadača je $P\{X_{n+1} = (a-2, d)|X_n = (a, d)\} = P(Y^{(1)} \leq Z^{(1)}, Y^{(2)} \leq Z^{(2)}) = \sum_{y_1=1}^{5}\sum_{y_2=1}^{y_1} P(Y^{(1)} \leq z_1)P(Y^{(2)} \leq z_2)P(Z^{(1)} = z_1, Z^{(2)} = z_2) = \sum_{y_1=1}^{5}\sum_{y_2=1}^{y_1}\sum_{z_1=y_1+1}^{6}\sum_{z_2=y_2+1}^{6} P(Y^{(1)} = y_1, Y^{(2)} = y_2)P(Z^{(1)} = z_1, Z^{(2)} = z_2) = \frac{581}{1296} = 0.448$. Treći ishod je da obe strane u toku angažmana izgube po jednu armiju i za tu mogućnost verovatnoća je $P\{X_{n+1} = (a-1, d-1)|X_n = (a, d)\} = 1 - P(Y^{(1)} \leq Z^{(1)}, Y^{(2)} \leq Z^{(2)}) - P(Y^{(1)} > Z^{(1)}, Y^{(2)} > Z^{(2)}) = 1 - \frac{581}{1296} - \frac{295}{1296} = \frac{420}{1296} = 0.324$.



Slika 4.9: Ishodi verovatnoće borbe 2 na 2 [6]

6. Konačno, poslednji slučaj je kada su obe strane sa maksimalnim armijama u napadu, 3 armije i 2 armije za odbrambenog.
$P\{X_{n+1} = (a, d-2)|X_n = (a, d)\} = P(Y^{(1)} > Z^{(1)}, Y^{(2)} > Z^{(2)}) = \sum_{z_1=1}^{5}\sum_{z_2=1}^{z_1} P(Y^{(1)} > z_1)P(Y^{(2)} > z_2)P(Z^{(1)} = z_1, Z^{(2)} = z_2) = \sum_{z_1=1}^{5}\sum_{z_2=1}^{z_1}\sum_{y_1=z_1+1}^{6}\sum_{y_2=z_2+1}^{6} P(Y^{(1)} = y_1, Y^{(2)} = y_2)P(Z^{(1)} = z_1, Z^{(2)} = z_2) = \frac{2890}{7776} = 0.372$ je iznos verovatnoće da napadač odnosi pobedu i poraženog liši dve armije.
$P\{X_{n+1} = (a-2, d)|X_n = (a, d)\} = P(Y^{(1)} \leq Z^{(1)}, Y^{(2)} \leq Z^{(2)}) = \sum_{y_1=1}^{5}\sum_{y_2=1}^{y_1} P(Y^{(1)} \leq z_1)P(Y^{(2)} \leq z_2)P(Z^{(1)} = z_1, Z^{(2)} = z_2) = \sum_{y_1=1}^{5}\sum_{y_2=1}^{y_1}\sum_{z_1=y_1+1}^{6}\sum_{z_2=y_2+1}^{6} P(Y^{(1)} = y_1, Y^{(2)} = y_2)P(Z^{(1)} = z_1, Z^{(2)} = z_2) = \frac{2275}{7776} = 0.293$ je šansa da odbrambeni odnese pobedu i napadača primora na gubitak dve armije.
$P\{X_{n+1} = (a-1, d-1)|X_n = (a, d)\} = 1 - P(Y^{(1)} \leq Z^{(1)}, Y^{(2)} \leq Z^{(2)}) - P(Y^{(1)} > Z^{(1)}, Y^{(2)} > Z^{(2)}) = 1 - \frac{2275}{7776} - \frac{2890}{7776} = \frac{2611}{7776} = 0.336$ je šansa da u toku angažmana, obe strane izgube po jednu armiju.



Slika 4.10: Ishodi verovatnoće borbe 3 na 2 [6]

$n_a v s n_d$	P (Napadač pobedio)	P (Nerešeno)	P (Odbrambeni pobedio)
1 vs 1	$\frac{15}{36} = 0.4167$	0	$\frac{21}{36} = 0.5833$
1 vs 2	$\frac{55}{216} = 0.2546$	0	$\frac{161}{216} = 0.7454$
2 vs 1	$\frac{125}{216} = 0.5787$	0	$\frac{91}{216} = 0.4213$
2 vs 2	$\frac{295}{1296} = 0.2276$	$\frac{420}{1296} = 0.3241$	$\frac{420}{1296} = 0.4483$
3 vs 1	$\frac{855}{1296} = 0.6597$	0	$\frac{441}{1296} = 0.3403$
3 vs 2	$\frac{2890}{7776} = 0.3717$	$\frac{2611}{7776} = 0.3358$	$\frac{2275}{7776} = 0.2926$

Tabela 4.10: Ishodi verovatnoća

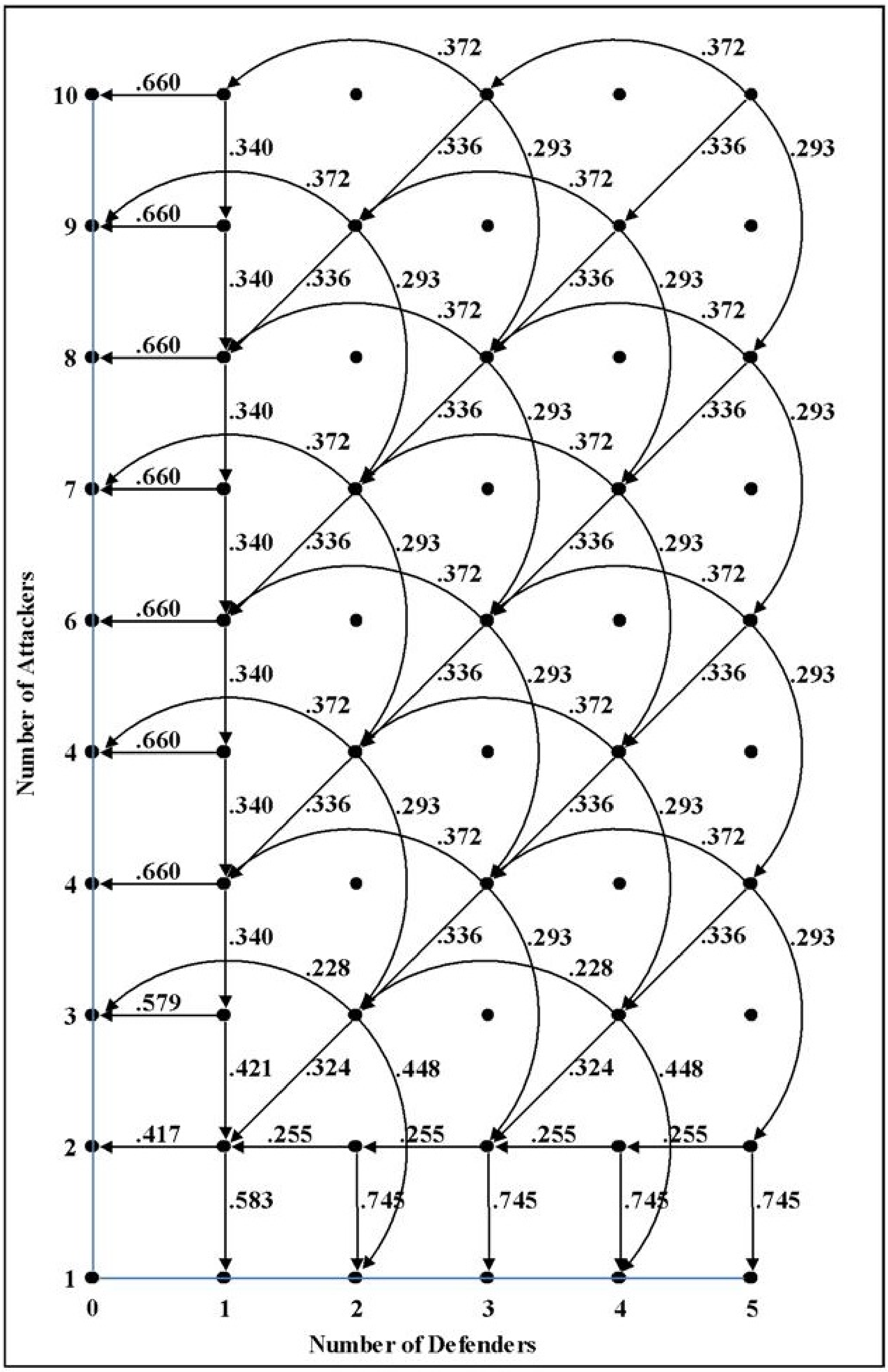
Na tabeli 4.10 prikazane su liste verovatnoća borbenog ishoda.
Kada smo izračunali sve moguće vrednosti koje nam trebaju, vreme je da se popune matrice Q, R i P.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.255 & 0 & 0 & 0 \\ 0.421 & 0 & 0 & 0 \\ 0.324 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.417 & 0 & 0.5834 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.745 \\ 0 & 0.579 & 0 & 0 \\ 0 & 0.228 & 0 & 0.448 \end{bmatrix}$$

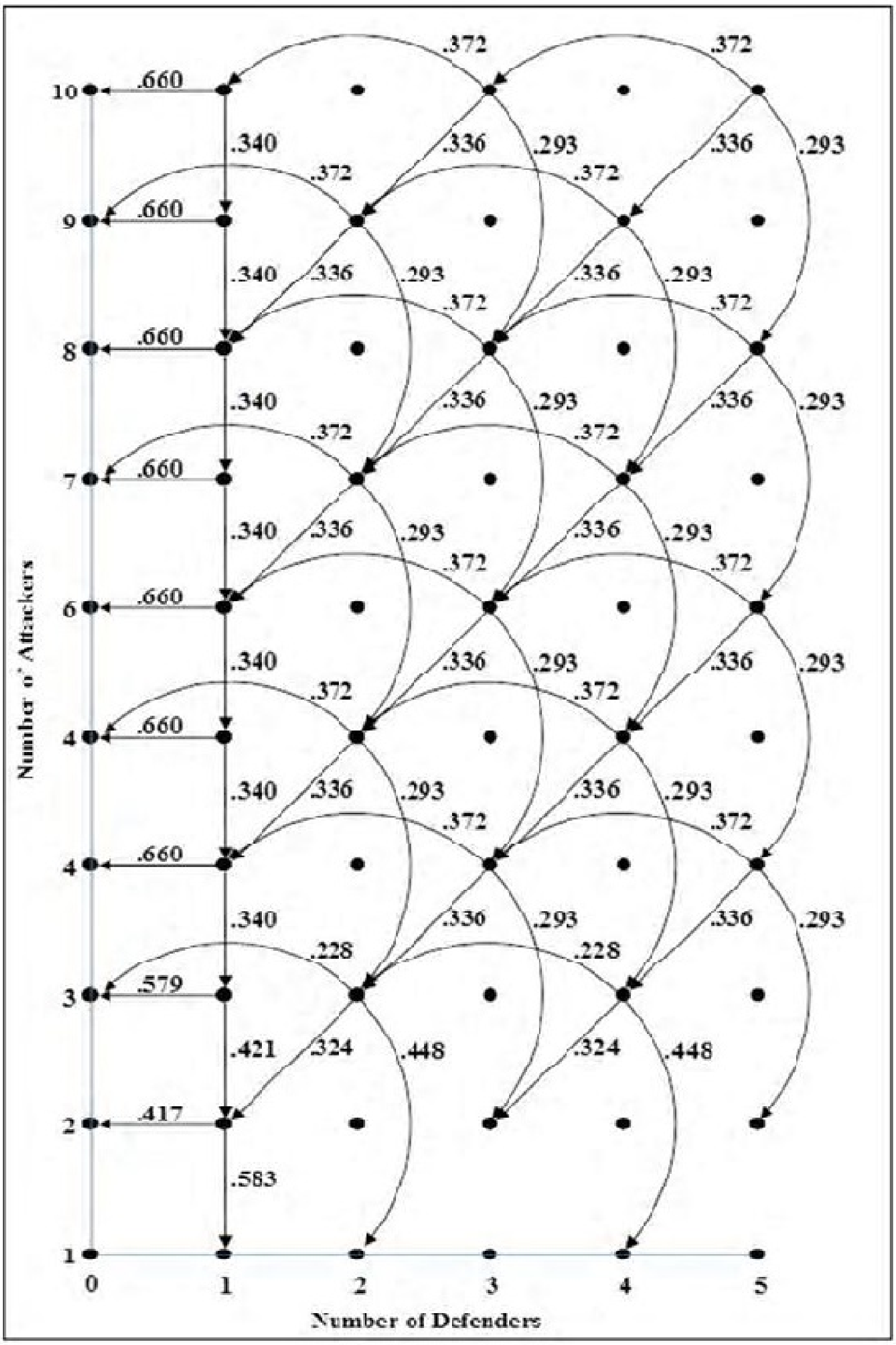
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.417 & 0 & 0.5834 & 0 \\ 0.255 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.745 \\ 0.421 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.579 & 0 & 0 \\ 0.324 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.228 & 0 & 0.448 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lanci Markova postaju operativni plan kako sprovesti strategiju prilikom osvajanja neke od država. Na slici 4.11 je prikazana operativna strategija koja koristi svaku moguću taktičku strategiju.



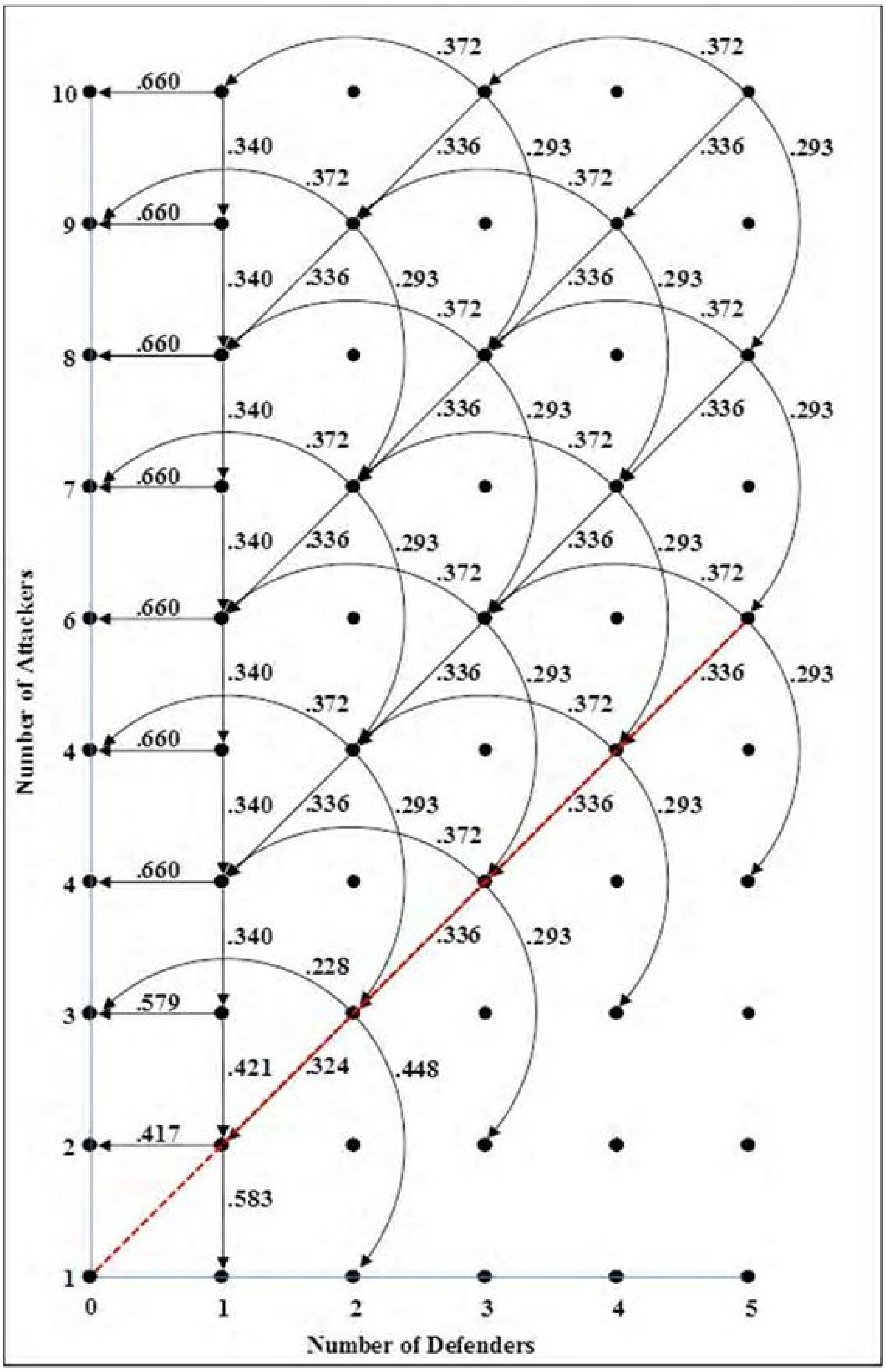
Slika 4.11: Markovski lanac, sve moguće strategije [6]

Na slici 4.12 je prikazana operativna strategija koja koristi sve taktičke strategije osim onog scenarija kada napadač ima jednu armiju, odbrmbeni se brani sa dve armije. Razlika između slike 4.11 i 4.12 je u tome što slici 4.12 nedostaje red mogućih prelazaka duž poslednjeg reda.



Slika 4.12: Markovski lanac, isključujući 1 vs 2 [6]

Slika 4.13 prikazuje operativnu strategiju gde napadač prestaje sa napadima kada njegov broj armija padne ispod broja armije koje poseduje odbrambena strana.



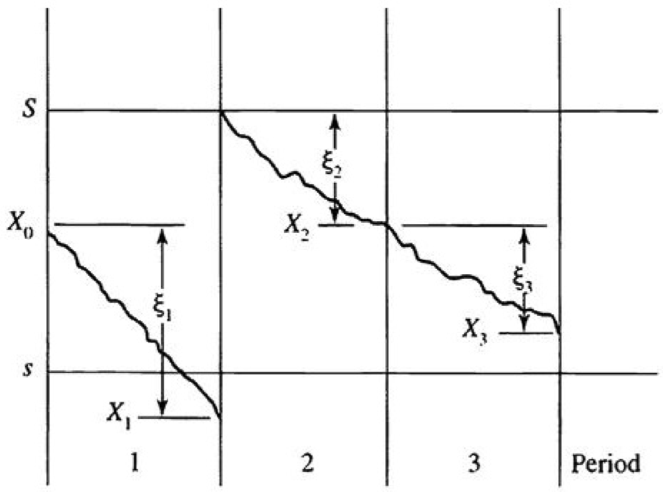
Slika 4.13: Markovski lanac, $N_A \geq N_D$ [6]

5 Primena lanaca Markova u drugim sferama

Značaj Markovskih lanaca leži u tome da postoje brojni fenomeni koji se mogu opisati njime. Zadatak ovog poglavlja je da primeni Markovske lance u drugim sferama, pored društvenih igara koje je prikazano u prethodnom poglavlju.

5.1 Model inventara

Razmatraćemo situaciju da se zaliha robe popunjava usled potražnje kupaca. Pretpostavićemo da se zalihe popunjavaju na kraju perioda, koje ćemo označiti sa $n = 0, 1, 2, 3, ...$ i pretpostavljamo da je agregatna potražnja za robom,tokom n-perioda, slučajna promenljiva ξ_n čija funkcija raspodele ne zavisi od vremenskog trenutka, $P\{\xi_n = k\} = a_k$ za $k = 0, 1, 2, \cdots$, gde je $a_k \geq 0$ i $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$. Na kraju svakog perioda se provera stanje na zalihama. Politika dopunjavanja robe je određena sa dva nenegativna broja s i S>s čije je tumačenje sledeće. Ako je količina robe na kraju perioda manja od s, onda zalihe dopunjavamo do nivoa S. Ukoliko je nivo zaliha na kraju perioda veći od s, tada nema potrebe za dopunjavanjem. Sa X_n označićemo količinu robe pre obnove zaliha na kraju n-tog perioda. Stanja u kojima možemo naći proces $\{X_n\}$ zavisi od količine namirnica: S, S-1, S-2, ..., 2, 1, 0, -1, -2, ... gde negativna vrednost se tumači kao neispunjena potražnja koja će biti zadovoljena nakon obnove zaliha. Proces $\{X_n\}$ je prikazan na slici 5.1.



Slika 5.1: Proces inventara [12]

Način na koji se zalihe dopunjuju, količina robe, u dva uzastopna perioda, data je sledećom relacijom:

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - \xi_{n+1} & s \leq X_n \leq S \\ S - \xi_{n+1} & X_n \leq s \end{cases}$$

gde je ξ_{n+1} količina potražnje u n+1-vom periodu.

Ako pretpostavimo da su slučajne veličine potražnje tokom određenog perioda $\xi_1, \xi_2, \cdots$ nezavisne, tada vrednosti zaliha $X_0, X_1, X_2, \cdots$ čine Lanac Markova čija se matrica prelaska računa na sledeći način:

$$p_{ij} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = \begin{cases} P\{\xi_{n+1} = i - j\} & s < i \leq S \\ P\{\xi_{n+1} = S - j\} & i \leq S \end{cases}$$

Jedna od važnijih osobina ovog modela je da proverimo da li je lanac ergodičan i ako jeste da se izračunaju stacionarne verovatnoće. Postojanje stacionarnih verovatnoća, omogućava nam ispitivanje efikasnosti modela, to jest da proverimo da li su verovatnoće da zalihe nisu zadovoljile potražnju po periodu velike i ako jesu šta treba da se uradi da bi se promenila politika poslovanja.

Primer 5.1 *Dat je sledeći slučaj gde je moguća potražnja od nula, jedan ili dva rezervna dela u bilo kom periodu, sa verovatnoćama* $P\{\xi_n = 0\} = 0.5, P\{\xi_n = 1\} = 0.4, P\{\xi_n = 2\} = 0.1$ *gde su granice s=0 i S=2.Skup stanja za* X_n *je -1, 0, 1, 2. Prvo ćemo razmotriti* $p_{10} = P\{X_{n+1} = 0 | X_n = 1\}$. *Kada* $X_n = 1$ *onda nema potrebe za popunjavanjem zaliha i stanje* $X_{n+1} = 0$ *je rezultat kad je potražnja* $\xi_n = 1$, *a verovatnoća da se to desi je* 0.4 *odnosno* $p_{10} = P\{X_{n+1} = 0 | X_n = 1\} = 0.4$. *Ako je* $X_n = 0$, *onda sledi dopuna do S=2 i* $X_{n+1} = 0$ *je rezultat potražnje* $\xi_n = 2$, *sa verovatnoćom* 0.1, *to jest* $p_{00} = 0.1$. *Daljim računanjem dobijamo matricu verovatnoće:*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Sada ćemo ispitati ergodičnost lanca. Ako je ergodičan onda možemo pristupiti izračunavanju finalnih verovatnoća.

$$P_2 = P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.22 & 0.44 & 0.3 \\ 0.04 & 0.22 & 0.44 & 0.3 \\ 0.05 & 0.25 & 0.45 & 0.25 \\ 0.04 & 0.22 & 0.44 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Kako je po definiciji 2.19, svi elementi pozitivni u P_2, *ispunjen uslov za ergodičnost i kao takav ima finalne verovatnoće koje dobijamo iz formule:*

$$p^* = p^* P; \sum_{j=1}^{m} p_j^* = 1$$

Finalne verovatnoće iznose redom $p_{-1}{}^* = \frac{1}{30}, p_0{}^* = \frac{1}{5}, p_1{}^* = \frac{1}{3}, p_2{}^* = \frac{13}{30}$. *Verovatnoća da zalihe neće zadovoljiti potražnju je jednaka* $\frac{1}{30}$ *i kao zaključak možemo izvesti da nema potrebe da povećavamo nivo skladištenja robe S.*

5.2 Erenfestov model

Klasičan primer difuzije molekula kroz membranu[10], iz matemačikog ugla, predstavlja Erenfestov model posude. Imamo dve posude koje sadrže $2n$ loptica (molekuli). Pretpostavićemo da su loptice označene brojevima, kako bi smo ih razlikovali. Posude ćemo označiti sa slovima A i B, gde je A prva a B druga. U posudi A imamo t loptica, dok u B onda ima 2n-t loptica. Slučajno biramo jednu od 2n loptica, pri čemu svaka ima podjednaku verovatnoću da bude izvučena i premeštamo je iz posude u kojoj se nalazi u drugu posudu. Svaki odabir predstavlja jedan korak u procesu. Sa Y_n ćemo označiti broj loptica u urni A nakon n-tog perioda i definišemo $X_n = Y_n - n$. $\{X_n\}$ je Markovski lanac sa stanjima $\imath = -n, -n+1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, n-1, n$ i verovatnoćama prelaska:

$$p_{\imath\jmath} = \begin{cases} \frac{n+\imath}{2n} & \jmath = \imath - 1 \\ \frac{n-\imath}{2n} & \jmath = \imath + 1 \\ 0 & inae \end{cases}$$

Nas interesuje kako se menja količina loptica posle određenog vremena. Cilj je naći finalne verovatnoće. Matrica verovatnoća izgleda:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2n} & 0 & \frac{2n-1}{2n} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{2n} & 0 & \frac{2n-2}{2n} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{2n-1}{2n} & 0 & \frac{1}{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Iz formule $p^* = p^* P$, gde je $p^* = ({p_{-n}}^*, {p_{-n+1}}^*, \cdots, {p_n}^*)$, dobijamo:

$${p_{-n}}^* = \frac{1}{2n} {p_{-n+1}}^*$$

$${p_\imath}^* = \frac{n - (\imath - 1)}{2n} {p_{\imath-1}}^* + \frac{n + (\imath + 1)}{2n} {p_{\imath+1}}^*, \imath = -n+1, \cdots, n-1$$

$${p_n}^* = \frac{1}{2n} {p_{n-1}}^*$$

Kada se malo sredi, izgleda:

$${p_{-n+1}}^* = 2n {p_{-n}}^* = \binom{2n}{1} {p_{-n}}^*$$

$${p_{-n+2}}^* = \frac{(2n(2n-1))}{2} {p_{-n}}^* = \binom{2n}{2} {p_{-n}}^*$$

$$\vdots$$

$${p_n}^* = \binom{2n}{2n} {p_{-n}}^*$$

[10]Difuzija je transport materija iz sredine sa većom u sredinu sa manjom koncetrancijom sve dok se koncentracije ne izjednače. Intezitet difuzije je proporcionalan hemijskom gradijentu. Difuzija kroz membranu može biti Slobodna (prosta) i olakšana difuzija.

U opštem zapisu:

$$p_\iota{}^* = \binom{2n}{\iota} p_{-n}{}^*, \iota \in \{-n+1, \cdots, n\}$$

Kako znamo da mora biti $\sum_\iota p_\iota^* = 1$, daljim računanjem ćemo dobiti, zamenom opšteg zapisa u formulu, da je

$$p_{-n}{}^* = \frac{1}{2^{2n}}$$

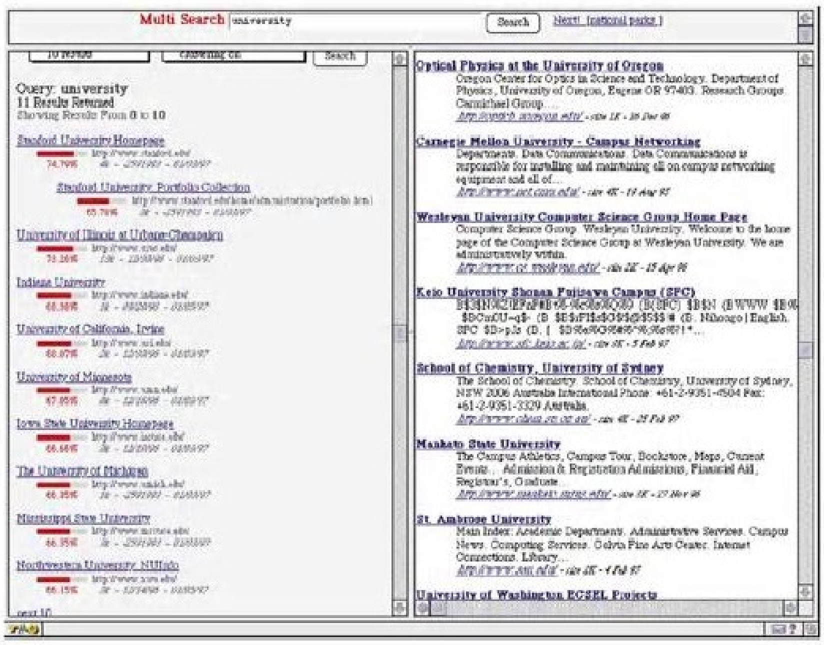
odnosno vraćanjem $p_{-n}{}^*$ u opšti zapis

$$p_\iota{}^* = \frac{\binom{2n}{\iota}}{2^{2n}}, \iota \in \{-n, -n+1, \cdots, n\}$$

Zaključak za ovaj model difuzije je da će dugo proći vremena kada bi trebalo da očekujemo da če biti približno isti broj loptica u posudama, pošto su te verovatnoće najveće.

5.3 Model Page Rank

Algoritam koji Gugl koristi danas kao deo svog pretraživača koristi Markovske lance i predstavlja dokaz njegove primene.
Kad pretražuje po internetu, pretraživačev zadatak je da korisniku vrati veb stranice koje najviše odgovaraju onome što je korisnik zatražio. Kako je broj stranica koji daju odgovor na taj upit veliki, cilj je da se te stranice nekako nađu u uređenom poretku, tako da što bliže odgovaraju zatraženom upitu. Potreban je neki brz algoritam koji će naći potrebne stranice i sortira ih po relevantnosti.



Slika 5.2: Izgled Web pretraživača pre nastanka Gugla [13]

Lari Pejdž i Sergej Brin, osnivači Gugla, su poneli zasluge za otkrivanje i realizaciju algoritma Page Rank. Sličan algoritam za rangiranje članaka bio je već u upotrebi. Važnost nekog članka merena je preko broja citata iz tog članka. Pejdž i Brin su razvili algoritam Page Rank tako što su svaku veb stranicu posmatrali kao članak.

5.3.1 Definicija Page Rank

Neka je S ukupan broj stranica unutar mreže. Definišemo matricu Q tako da važi:

$$Q_{\imath,\jmath} = \begin{cases} \frac{1}{k} & \imath \rightarrow \jmath \\ 0 & usuprotnom \\ Q_{\imath,\imath} > 0 & \forall \imath \end{cases}$$

gde $\imath \rightarrow \jmath$ znači da na stranici $\imath$ postoji link na stranicu $\jmath$. k je ukupan broj veza na stranici $\jmath$. Pravimo lanac Markova tako što za stanja uzimamo veb stranice, dok nam je Q tranziciona matrica Markovog lanca. Ovako konstruisan lanac je nerastavljiv. Odnosno, postoji stabilna raspodela verovatnoća $(p_1, \cdots, p_S)^T$ svih stanja. Deo vremena koje korisnik provede na veb stranici je $p_\imath$. Što je $p_\imath$ veće, to je stranica $\imath$ relevantnija. U pravoj implementaciji algoritma od matrice Q konstruiše se nova matrica na sledeći način, za $0 < \alpha < 1$:

$$P = \alpha \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1S} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2S} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{S1} & Q_{S2} & \cdots & Q_{SS} \end{bmatrix} + \frac{1-\alpha}{S} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

U implementaciji, za α se obično uzima 0.85 i $1 - \frac{1}{S}$. Izbor vrednosti α može uticati na krajnje rangiranje veb stranica. Svaka stranica ima važnost $\frac{1-\alpha}{S}$. Ako strana $P_\imath$ ima važnost $p_\imath$ onda će stranice za koje postoji link unutar stranice $p_\imath$ dobiti važnost $\alpha p_\imath$ od stranice $p_\imath$. Rešavanjem sledećeg sistema jednačina može se izračunati važnost neke stranice $P_\imath$:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_S \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1S} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2S} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{S1} & Q_{S2} & \cdots & Q_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_S \end{bmatrix} + \frac{1-\alpha}{S} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{\imath=1}^{S} p_\imath = 1$$

5.3.2 Rešavanje sistema Page Rank

Jedan od načina za rešavanje ovog sistema je iterativna metoda koja nalazi najveće karakteristične vrednosti i njoj odgavarajući karakteristični vektor.
Data je matrica A dimenzija nxn i važi:

- Karakteristična vrednost najvećeg modula matrice je jedinstveno određena i važi $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots |\lambda_s|$
- Postoji skup linearno nezavisnih karakterističnih vektora $\{u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots, u^{(s)}\}$.

i važi

$$Au^{(i)} = \lambda_\imath u^{(i)}, \imath = 1, \cdots, s$$

$$\|u^{(i)}\| = 1$$

Prvi vektor x_0 se može napisati $x^{(0)} = a_1 u^{(1)} + a_2 u^{(2)} + \cdots + a_s u^{(s)}$.
Dalje iteriramo na vektoru $x^{(0)}$:

$$A^k x^{(0)} = a_1 A^k u^{(1)} + a_2 A^k u^{(2)} + \cdots + a_s A^k u^{(s)} = a_1 {\lambda_1}^k u^{(1)} + a_2 {\lambda_2}^k u^{(2)} + \cdots + a_s {\lambda_s}^k u^{(s)}$$

Deljenjem sa ${\lambda_1}^k$ dobijamo:

$$\frac{A^k x^{(0)}}{{\lambda_1}^k} = a_1 u^{(1)} + a_2 \frac{{\lambda_2}^k}{{\lambda_1}^k} u^{(2)} + \cdots + a_s \frac{{\lambda_s}^k}{{\lambda_1}^k} u^{(s)}$$

Kako je za $\forall \imath \frac{|\lambda_\imath|}{|\lambda_1|} < 1$ dobijamo da je za $\forall \imath$:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|\lambda_\imath|^k}{|\lambda_1|^k} = 0$$

i zaključujemo

$$A^k \approx a_1 {\lambda_1}^k u^{(1)}$$

Za Page Rank najveća karakteristična vrednost matrice P iznosi 1. Najviše procesorskog vremena pri izvršavanju ove metode se potroši na izračunavanje proizvoda matrica i vektora. Brzina konvergencije zavisi od $\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}$. Kamvar i Havelivala[5] su našli gornje ograničenje za $|\lambda_2| \leq \alpha$, dakle metod konvergira brzinom α. Kako se za α uzima vrednost 0.85, onda iteratrivna metoda konvergira za pedeset iteracija na lancu Markova koji sadrži osamdeset miliona stranica.

Primer 5.2 *U ovom primeru od šest stranica, pokazaćemo kako vrednost α=0.85 može da pokaže drugačiju sliku o rangiranju tih stranica. One su organizovane na sledeći način:*

1. *Stranica 1 → 1, 3, 4, 5*
2. *Stranica 2 → 2, 3, 5, 6*
3. *Stranica 3 → 1, 2, 3, 4, 5, 6*
4. *Stranica 4 → 2, 3, 4, 5*
5. *Stranica 5 → 1, 3, 5*
6. *Stranica 6 → 1, 6*

Iz date strukture povezivanja stranica, dobijamo matricu Q:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Daljim rešavanjem sistema

$$p^* = p^* Q, \sum_{\imath=1}^{6} p_\imath^* = 1$$

dobijamo sledeće rezultate:

$$p^* = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)^T = (\frac{380}{1613}, \frac{144}{1613}, \frac{351}{1613}, \frac{198}{1613}, \frac{351}{1613}, \frac{189}{1613})^T$$

i po važnosti rangiranje stranica $1 > 3 \geq 5 > 4 > 6 > 2$.

Matrica P u opštem zapisu glasi:

$$P = \alpha \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{26} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{S1} & Q_{S2} & \cdots & Q_{SS} \end{bmatrix} + \frac{1-\alpha}{S} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Za α=0.85, S=6 dobijamo

$$P = 0.85 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \frac{1-0.85}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{17}{80} & 0 & \frac{17}{80} & \frac{17}{80} & \frac{17}{80} & 0 \\ 0 & \frac{17}{80} & \frac{17}{80} & 0 & \frac{17}{80} & \frac{17}{80} \\ \frac{17}{120} & \frac{17}{120} & \frac{17}{120} & \frac{17}{120} & \frac{17}{120} & \frac{17}{120} \\ 0 & \frac{17}{80} & \frac{17}{80} & \frac{17}{80} & \frac{17}{80} & 0 \\ \frac{17}{60} & 0 & \frac{17}{60} & 0 & \frac{17}{60} & 0 \\ \frac{17}{40} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{17}{40} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{19}{80} & \frac{1}{40} & \frac{19}{80} & \frac{19}{80} & \frac{19}{80} & \frac{1}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{19}{80} & \frac{19}{80} & \frac{1}{40} & \frac{19}{80} & \frac{19}{80} \\ \frac{1}{60} & \frac{1}{60} & \frac{1}{60} & \frac{1}{60} & \frac{1}{60} & \frac{1}{60} \\ \frac{1}{40} & \frac{19}{80} & \frac{19}{80} & \frac{19}{80} & \frac{19}{80} & \frac{1}{40} \\ \frac{37}{120} & \frac{1}{40} & \frac{37}{120} & \frac{1}{40} & \frac{37}{120} & \frac{1}{40} \\ \frac{18}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{18}{40} \end{bmatrix}$$

Daljim rešavanjem sistema

$$p^* = p^* P, \sum_{\iota=1}^{6} p_\iota^* = 1$$

dobijamo sledeće rezultate:

$$p^* = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)^T = (0.2166, 0.1039, 0.2092, 0.1278, 0.2092, 0.1334)^T$$

i po važnosti rangiranje stranica $1 > 3 \geq 5 > 6 > 4 > 2$. *Zapažamo da rangiranje stranice četiri i šest su različita u dva pristupa izračunavanja.*

6 Zaključak

Cilj ovog rada je bio da pokaže kako pojedini matematički pojmovi mogu da pomognu u pravljenju modela odnosno strategija za pobede na kraju igara. Težnja ovog rada nije bila da izmisli neke nove modele jer pomenuti modeli postoje već dugi niz godina, već da kroz neko istraživanje odabere onaj model koji se čini kao najrelevantniji.

Kroz ovaj rad smo pokazali da su lanci Markova jednostavna i korisna klasa slučajnih procesa sa zanimljivim osobinama i raznovrsnim primenama. Teorijski deo je izgrađen od najosnovnijih definicija, preko uvođenja pojma lanaca, da bi preko ergodičnosti došli do finalnih verovatnoća. U analizi igara, uz pomoć Markovljevih lanaca, smo videli koje su verovatnoće da se stigne od jednog polja na tabli do drugog polja, uz sve mogućnosti (kartice Šansi i Iznenađenja, dobijanje uzastopnih duplih) u Monopolu, a u Riziku smo prikazali moguće ishode u jednoj borbi, izražavanjem verovatnoća smo dobili rezultate da se ti ishodi dogode i dovedu do osvajanja teritorije. Na kraju su predstavljeni modeli koji su gruba aproksimacija realnih situacija koje se izražavaju preko lanaca Markova.

Analiza strategija može pomoći u učenju principa strateškog razmišljanja i analize odluka. Svaki igrač ima svoju strategiju kad igra ili Monopol ili Riziko. Nadam se da će informacije iz ovoga rada pomoći igračima da prilagode, promene ili izgrade nove strategije za pobedu ili duži ostanak u igri. Riziko. Korišćenje lanaca Markova je bilo ključno za utvrđivanje verovatnoće osvajanja teritorije i aproksimacije očekivanih gubitaka. Neka buduća istraživanja mogu da budu kako igrač može da osvoji ceo kontinent odnosno očekivani gubitak zauzimanja teritorija koje nisu u vlasništvu igrača. Igrač kada poseduje kontinent dobija dodatnu armiju, koju može da postavi na teritrijama koje su granične i prva su odbrana od napada protivnika. Druga oblast koja može da podlegne istraživanju je upotreba kartica koje igrač dobije kada osvoji neku teritoriju. To je prisutno u Evropskoj verziji igre Riziko. Na toj kartici se nalazi teritorija i ikonica (tenk, pešak, avion) čija kombinacija donosi dodatne armije u nekom od narednih poteza kao i slučaj ako igrač poseduje teritoju koja se nalazi na kartici i kao vlasnik dobija dodatnu vojsku. To može dovesti do promene strategije napadača.

Društvene igre, pored toga što pružaju zabavu, su veoma jako sredstvo za razvoj veština i sticanje znanja. Prilagodljive su različitim uzrastima. Jedna od veština koja se razvija kroz društvene igre je empatija. Empatija je sposobnost da se emocionalno razume šta druga osoba doživljava. Kako živimo u vremenu gde tehnologija uzima primat, društvene igre polako izumiru. Igrice na kompjuterima su učinile svoje, reflektujući našu sve veću otuđenost. Uz TV i kompjuter se vodi virtuelan život, stvara se fiktivni svet u kojem je sve onako kako je zamišljeno, a udaljeno je samo jednim klikom mišem. Budućnost društvenih igara je teško predvidiva. Da li će sve biti zamenjeno kompjuterskim igrama, vreme će pokazati.

Literatura

[1] Ash R. and Bishop R., Monopoly as a Markov process,Mathematics Magazine 45 1972., 26-29

[2] Bewersdorff J., Luck,Logic,and White Lies, AK Peters LTD., 2005.

[3] Blatt S., RISKy Business:An In-Depth Look at the Game RISK, Elon University, 2002.

[4] Chinng WK., Ng M., Markov Chains: Models, Algorithms and Applications, Springer, 2006.

[5] Haveliwala T., Kamvar M., The second eigenvalue of the google matrix, Technical report, Computer Science Department, Stanford University, 2003.

[6] Lee D. J. Major, USAF, The Comparison of Strategies used in the game of RISK via Markovian Analysis and Monte-Carlo Simulation, Air Force Institute Of Technology, 2012.

[7] Osborne J., Markov Chains for the RISK Board Game Revisited, Mathematics Magazine, 2003.;1-8

[8] Rajter-Ćirić D., Verovatnoća. Univerzitet u Novom Sadu. Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu. 2008.

[9] Rajter-Ćirić D., Stohastička analiza. Univerzitet u Novom Sadu. Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu., pisani materijal, 2015.

[10] Tan B., Markov Chains and the RISK Board Game, Mathematics Magazine 70, 1997.;349-357

[11] Taylor D., The mathematics od games:An Introduction to probability, CRC Press, 2015.

[12] Taylor M.H., Karlin S., An introduction to stohastic modeling, 3-rd edition, Academic Press, 1998.

[13] Tibshirani R., PageRank, Carnegie Mellon University, 2013.

[14] Von Hilgers P., Langville N.A., The five greatest applications of Markov chains, Boson Books Raleigh NC, 2006.

[15] RISK: The Game of Global Domination, Hasbro Inc., Pawtucket, RI, 1999.

[16] Pravila igre.Dostupno na https://en.wikipedia.org/wiki/Monopoly(game)

[17] Pravila igre.Dostupno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Risk(game)

[18] Pravila igre UR.Dostupno na: http://www.gamecabinet.com/history/Ur.html

[19] Igre na tabli.Dostupno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Boardgame

[20] Istorija igara.Dostupno na : https://medium.com/swlh/the-full-history-of-board-games-5e622811ce89

Kratka biografija

Dušan Kovačević je rođen 26. jula 1992. godine u Loznici. Osnovnu školu „Borivoje Ž. Milojević” završio je u Krupnju 2007. godine. Srednju školu, smer Gimnazija, završio je u Krupnju, 2011. godine. Nakon toga je upisao Prirodno-matematički fakultet, smer primenjena matematika, modul matematika finansija, gde je 2015. godine završio osnovne studije. Iste godine upisuje i master studije na istom fakultetu. Položio je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija, zaključno sa junskim rokom 2017. godine i ostvario prosek 7,47.

Novi Sad, 2018.

Dušan Kovačević

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: master rad
VR

Autor: Dušan Kovačević
AU

Mentor: docent dr Dušan Jakovetić
MN

Naslov rada: Matematički modeli Markovljevih lanaca:Primene na društvene igre i druge primene
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s/e
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2018.
GO

Izdavač: autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: 6 poglavlja, 67 strana, 20 lit. citata, 11 tabela, 24 slike
FO

Naučna oblast: matematika
NO

Naučna disciplina: primenjena matematika
ND

Ključne reči: Markovski lanci,Monopol(igra),Riziko(igra),Matematički modeli,Matrica verovatnoća
PO
UDK

Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta, u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Cilj rada je da pokaže da se uz pomoć matematike mogu praviti strategije za društvene igre,tako što se prave modeli koji će opisati načine da se napravi pobednička strategija.Osnovni rezultat rada je pravljenje matrica koje opisuju ishod strategije.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 19. februar 2018.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO
Predsednik: dr Nataša Krejić,redovni profesor
Član: dr Dušan Jakovetić,docent
Član: dr Nataša Krklec Jerinkić,docent
Član: dr Dora Seleši,redovni profesor

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: monograph type
DT

Type of record: printed text
TR

Contents code: master thesis
CC

Author: Dusan Kovacevic
AU

Mentor: docent dr Dušan Jakovetić
MN

Title: Mathematical models of Markov Chains: Applications in social games and other applications
XI

Language of text: serbian (latin)
LT

Language of abstract: s/e
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2018.
PY

Publisher: author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: 6 sections, 67 pages, 20 references, 11 tables,24 figures
PD

Scientific field: mathematics
SF

Scientific discipline: applied mathematics
SD

Key words: Markov chains,Monopol(game),Risk(game),Mathematical models,Matrix probability
UC

Holding data: Department of Mathematics and Informatics' Library, Faculty of Sciences, Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: The aim of the paper is to demonstrate that mathematics can be used to develop strategies for social games by making models that will describe how to make a winning strategy.The main result of the work is to create matrices that describe the outcome of the strategy.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 19. February 2018.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB
President: dr Nataša Krejić,full professor
Member: dr Dušan Jakovetić, docent
Member: dr Nataša Krklec Jerinkić, docent
Member: dr Dora Seleši, full professor