UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Dunja Vukčević

Primena fazi odlučivanja u procesu kreditnog skoringa

- MASTER RAD -

Mentor:
Prof. dr Ivana Štajner-Papuga

Novi Sad, 2018.

Sadržaj

Predgovor

As complexity rises, precise statements lose meaning and meaningful statements lose precision.[1]
Lotfi Zadeh

Definicija reči fazi (eng. *fuzzy*) zapravo je najbolje moguće objašnjenje fazi skupova u jednoj rečenici. To je pridev koji opisuje nešto što je teško za izmeriti, spoznati, sagledati. U srpskom jeziku se ovakvi skupovi baš zbog svojih specifičnih osobina nazivaju i rasplinuti skupovi. Fazi skupove uveo je Lotfi Zadeh 1965. godine u svom naučnom radu pod imenom *Fazi skupovi*. Polazna ideja za uvođenje fazi skupova bila je delimična, tzv. gradacijska pripadnost [7]. Zadeh je upotrebu svoje teorije fazi logike prvenstveno video u prepoznavanju oblika (eng. *pattern recognition*) i obradi informacija, ali se kasnije kroz istoriju ispostavilo da, ne samo da je bio u pravu, već je daleko potcenio značaj i mogućnosti fazi logike. Ipak, kao i većina velikih ideja u matematici, ni ideja o fazi skupovima nije se pojavila odjednom. Prvi koji su izrazili nezadovoljstvo što u tadašnjoj logici nema dovoljno mesta za studije o neodređenosti bili su engleski filozof i matematičar Bertnard Rasel[2] (1920. godine) i američki filozof Čarls Pirs[3] (1931. godine). Jan Lukašijevič[4] je tridesetih godina prošlog veka počeo sa intenzivnim zanimanjem za koncept

---

[1] *Kako raste kompleksnost, precizni iskazi gube značenje, a iskazi od značaja gube preciznost*, *Lotfi Aliasker Zadeh* (1921 – 2017) tvorac je fazi skupova i fazi logike. Po profesiji matematičar, ali takođe i infomatičar, inženjer, stručnjak za veštačku inteligenciju i nosilac počasnog zvanja profesor emeritus Berkli Univerziteta u Kaliforniji.

[2] *Bertrand Russell* (1872 – 1970), britanski filozof i matematičar, ali i dobitnik Nobelove nagrade za književnost (1950). Ostavio je poseban doprinos u logici, teoriji skupova, lingvistici, veštačkoj inteligenciji kompjuterskim naukama, ali i filozofiji.

[3] *Charles Sanders Peirce* (1839 – 1914) bio je američki filozof, matematičar i naučnik, često nazivan *ocem pragmatizma*.

[4] *Jan Łukasiewicz* (1878 - 1956) bio je poljski filozof i matematičar, a smatra se i najvećim istoričarem logike. Bavio se pretežno analitičkom filozofijom, istorijom i matematikom logike, posebno istražujući viševrednosnu logiku, princip kontradikcije i isključenja trećeg.

viševrednosne logike, a Vitgenštajn[5] je ukazao na činjenicu da koncepti u jeziku ne mogu imati precizna svojstva, već da ih karakterišu *rastegljive* granice, kao i da postoje centralni i manje centralni članovi neke kategorije. Zatim je američki filozof Maks Blek[6] 1937. godine predložio tzv. profile konzistencije za opisivanje neodređenih simbola, to su upravo bile preteče fazi funkcije pripadnosti. 1940. godine je Vejl[7] eksplicitno uveo neprekidnu karakterističnu funkciju, kao zamenu za klasičnu, diskretnu. Pojam koji je 1951. godine uvek Karl Menger[8] u svom radu o probabilističkim metričkim prostorima, *ensemble flou,* francuski je naziv baš za – fazi skup [7]. Dakle, čak 31 godina je trebalo da prođe od ideje Bernarda Rasela da bi trebalo više pažnje posvetiti neodređenostima do prvog uvođenja pojma koji bi ih mogao opisivati od strane Karla Mengera, odnosno čak 45 godina do Zadehovog naučnog rada u kom se definišu fazi skupovi na način na koji ih i danas poznajemo.

Od tada pa do danas, fazi skupovi su polako zauzimali sve važniju poziciju, baš zato što su jedini opisivali nešto što se toliko često javlja u prirodi – neodređenost. Međutim, tek sa razvojem računara i mašinskog učenja, fazi logika je mogla u potpunosti da pokaže svoju moć. Danas je fazi logika u upotrebi svuda oko nas: od upotrebe u prepoznavanju oblika i obradi podataka koje je predlagao Zadeh još 1965. godine, preko kontrole metro sistema, automatskih letelica, sistema kočenja, obrađivanja slika, robotike, automatizacije u industriji, predviđanja u vremenskoj prognozi, medicinskih dijagnoza, metodama upravljanja rizikom, trgovanja na berzi, pa sve do veš mašina i usisivača i mnogih drugih oblasti.

Procvat tzv. nauke o podacima (eng. *data science*) se u poslednje vreme sve više oseća u svim sferama modernog poslovanja. Velike baze podataka sa informacijama o klijentima, podaci o kretanju tržišta i makroekonomskih pokazatelja su sve dostupnije, rasipanje potencijala bilo bi ne iskoristiti ih. Zato su modeli predviđanja postali standard i dobra praksa – kako u bankama, tako i u poslovanju uopšte. Među modelima koji se koriste prednjače linearna i logistička regresija, ali je poslednjih decenija ekspanzija mašinskog učenja dovela do neverovatnih rezultata, pa se sve češće koriste metode poput genetskih algoritama, algoritma drveta odlučivanja i nasumičnih šuma, neuronske mreže, SVM metode (eng. *support vector machine*) i mnoge druge, među kojima i fazi skupovi. Upravo je sposobnost fazi skupova da opisuju nestalne i neodređene situacije i pojave bila motivacija da se fazi zaključivanje upotrebi za modeliranje rizika u bankarskom sektoru. Konkretnije, pravila fazi zaključivanja iskorišćena su za kreiranje modela aplikativnog kreditnog skoringa – modela koji predviđa buduće ponašanje novih klijenata jedne banke.

U prvom poglavlju se definišu fazi skupovi preko odgovarajućih funkcija pripadnosti. Kroz brojne primere, navode se osnovni pojmovi vezani za fazi skupove: α – presek fazi skupa, nosač, jezgro i visina fazi skupa, a zatim se pomoću teoreme uvodi i pojam konveksnosti fazi skupa. Tri osnovne operacije sa fazi skupovima: komplement, presek i unija, objašnjene su u poglavlju 1.4, a zatim se izvodi zaključak da

[5] *Ludwig Wittgenstein* (1889 – 1951) je austrijsko – britanski filozof, učenik Bertnarda Rasela. Bavio se logikom, filozofijom jezika, matematike i duha.
[6] *Max Black* (1909 – 1988) je britansko – američki filozof, bavio se analitičkom filozofijom, filozofijom jezika i matematike, ali i umetnosti.
[7] *André Weil* (1906 – 1998) bio je francuski matematičar koji se posebno zanimao za teoriju brojeva i algebru.
[8] *Karl Menger* (1902 – 1985), bio je američko-austrijski naučnik, sin svetski poznatog ekonomiste Karla Mengera. Bavio se pretežno algebrom i teorijom dimenzija, ali i teorijom igara i socijalnim naukama.

fazi skupovi zadovoljavaju sve osobine kao i klasični skupovi, osim zakona kontradikcije i zakona isključenja trećeg – što ih čini de Morganovim algebrama. Na kraju prvog poglavlja uvode se i osnovni pojmovi fazi logike, koristeći logičke operacije negacije, implikacije, konjukcije i disjunkcije. Slede pravila zaključivanja najčešće sretana u fazi logici, AKO...ONDA... pravila, zajedno sa lingvističkim promenljivama, njihovim modifikatorima, i na samom kraju, navode se par najčešćih metoda za defazifikaciju. Literatura korišćena za pisanje ovog poglavlja je: [4], [6], [13], [14], [15], [19], [22], [24], [25], [26], [27] i [28].

Drugo poglavlje tiče se fazi operatora. Najvažniji fazi operatori, fazi komplement, trougaone norme i trougaone konorme, definisani su uz pomoć aksioma, a zatim su najpoznatiji od njih navedeni po imenima naučnika koji su ih definisali. Na kraju ovog poglavlja objašnjeni su i operatori usrednjavanja, kao i posebna klasa ovih operatora poznatija kao OWA operatori. Literatura korišćena u ovom poglavlju je: [2], [3], [8], [10], [11], [13], [18] i [28]

Treće poglavlje bavi se fazi operacijama, odnosno fazi aritmetikom. Nakon što je objašnjen pojam fazi broj, uz pomoć teoreme se uvode i specijalni fazi brojevi, tzv. LR fazi brojevi. Ovaj tip fazi brojeva veoma je važan za razvoj modela (poglavlje 4). U ovom poglavlju je takođe definisan i princip proširenja, princip neophodan da bi fazi brojevi mogli koristiti u praksi na odgovarajući način. Ovaj princip omogućava i uvođenje fazi aritmetike, koja je ukratko opisana na kraju poglavlja. Literatura na kojoj se bazira ovo poglavlje je: [4], [13], [15], [16] i [28].

Poslednje, četvrto poglavlje, započinje kratkom istorijom kredita i kreditiranja, a nastavlja sa uvođenjem pojma kreditni skoring. Ovaj deo rada bazira se na [1], [5], [20], [21], [23]. Zatim se kreditni skoring posmatra i razlaže sa stanovišta fazi logike, gde je sa nekoliko dijagrama objašnjeno kako se, koristeći fazi zaključivanje, može doći do konačnog ishoda – skora za određenog klijenta. U ovom poglavlju opisan je uzorak korišćen za modeliranje, po svim svojim promenljivama, zatim su one grupisane u blokove zaključivanja, a blokovi zaključivanja su dalje povezani odgovarajućim pravilima zaključivanja. Sam model bazira se na LR fazi brojevima trougaonog (i trapezoidnog) tipa i razvijan je koristeći Beta Trial verziju softvera FuzzyTech8.40. Ovaj softver je veoma moćan alat za fazi modeliranje, ide u korak s vremenom jer se njegove mogućnosti i opcije konstantno unapređuju i pruža veoma intuitivne i jasne grafičke prikaze. Fazi brojevi se prave za svaku promenljivu ponaosob, a zatim se unose i sva pravila zaključivanja. Nakon unošenja vrednosti varijabli za nekog klijenta, dobija se rezultat koji može biti: *jako loš, loš, prosečan, dobar* ili *jako dobar* klijent. Sve moguće opcije, kreiranje fazi brojeva, njihovi prikazi koje softver pravi, unošenje pravila zaključivanja, kao i sam proces defazifikacije i dolazak do konačnog ishoda prikazani su na slikama priloženim u ovom poglavlju.

1 Uvod u fazi skupove i fazi logiku

1.1 Od klasičnih skupova do fazi skupova

A set is a Many that allows itself to be thought of as a One[9].
Georg Kantor

U matematici se termin skup smatra osnovnim pojmom i kao takav se ne definiše eksplicitno, već aksiomatski. Njegovo suštinsko svojstvo je da se sastoji od članova (elemenata) sa kojim ga veže osnovni odnos – pripadanje. Skup se može definisati navođenjem elemenata koji se u njemu nalaze ($A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$) ili svojstva s_i ili više njih koje element mora posedovati da bi se našao u posmatranom skupu ($B = \{b | s_1, s_2, \dots, s_n\}$).
Pripadnost nekog elementa nekom skupu može se takođe definisati uz pomoć karakteristične funkcije (indikator funkcije).

Definicija 1.1.1 [15] (karakteristična funkcija klasičnog skupa)
Za skup $A \subseteq X$ **karakteristična funkcija** $\mu_A: X \to \{0,1\}$ je data na sledeći način:

$$\mu_A = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

gde je X univerzum (univerzalni skup, skup svih skupova).

[9] *Skup je mnoštvo koje pristaje da bude posmatrano kao jedno,* Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 - 1918). Kantor, čuveni nemački matematičar rođen u Rusiji, nazivan je u tadašnjim naučnim krugovima šarlatanom i varalicom, sve zbog ideja koje su bile daleko ispred njegovog vremena. Ipak, Kantor je bio prvi koji je uveo red u, tada elementarno, ali haotično, znanje o skupovima, stvorivši ono što danas nazivamo Teorija skupova, dokazao je da je skup realnih brojeva „brojniji" od skupa prirodnih brojeva, time uvodeći kardinalnost skupova i pojam partitivnog skupa, zatim je izučavao injektivna preslikavanja, a iza njega su ostali i čuveni Kantorov skup i Kantorova teorema.

Postavlja se pitanje da li je svet zaista organizovan na taj način, tj. da li se svakom elementu tako jednostavno može dodeliti nula ili jedinica. Odgovor na ovo pitanje predmet je brojnih filozofskih rasprava još iz vremena velikih grčkih mislilaca i zapravo u sebi krije još mnoštvo drugih velikih pitanja na koja odgovori počinju da pristižu tek osamdesetih godina prošlog veka kada se fazi logika počela naširoko razvijati. Naravno, mnoga od postavljenih pitanja još uvek nemaju adekvatne odgovore, ali je svakako uz razvoj i napredak teorije fazi skupova i fazi logike nauka sve bliža njihovom rešavanju.

Dakle, za posmatrani element a, jedine dve moguće opcije su da on pripada skupu A $(a \in A)$ ili da ne pripada skupu A $(a \notin A)$. Za neke koncepte vrlo je jednostavno utvrditi pripadnost, na primer, jasno je koje vrednosti sadrži skup temperatura pri kojima će se voda zalediti, koji brojevi spadaju u skup prostih brojeva ili koje države sveta imaju izlaz na more. Međutim, nije toliko lako utvrditi ko pripada skupu plavokosih ljudi, do koje starosne granice se osobe smatraju decom, do kojeg nivoa ostvarenog prinosa investicija profitabilnom, i slično. Upravo ova ideja o nejasnim granicama dovela je do činjenice da je uvođenje nekog drugačijeg skupa, fazi skupa, neophodno.

Osnovni koncept koji stoji iza pojma fazi skupa može se posmatrati kao dodeljivanje stepena pripadnosti svakom elementu skupa. Može se reći da stepen pripadnosti nekog elementa fazi skupu oslikava njegovu kompatibilnost sa konceptom koji taj fazi skup predstavlja. Ovo se matematički predstavlja jednostavnom promenom kodomena u prethodnoj definiciji. Sada karakteristična funkcija može uzeti vrednosti iz čitavog intervala $[0,1]$ i radi razgraničenja počinje da se naziva funkcija pripadnosti (pripadanja). Interval koji se koristi je zapravo proizvoljan, najčešći je jedinični, te će on i biti korišćen.

Definicija 1.1.2 [15] (funkcija pripadnosti)
Za skup A, **funkcija pripadnosti** je preslikavanje $\mu_A: X \to [0,1]$.

Fazi skup je dat svojom funkcijom pripadnosti, a može se posmatrati takođe i kao uređeni par $(x \in X, \mu_A)$. S obzirom na to da je svaki fazi skup jedinstveno određen svojom funkcijom pripadnosti, ekvivalentan zapis je i onaj u kome je funkcija pripadnosti μ_A potpuno izostavljena, tj. $A: X \to [0,1]$.

Jasno je da je fazi skup zapravo samo uopštenje običnog skupa, tj. da je karakteristična funkcija iz definicije 1.1.1 samo specijalan oblik funkcije pripadanja iz definicije 1.1.2. Pri tome, veće vrednosti funkcije pripadnosti povlače veći stepen pripadnosti nekog elementa fazi skupu. U poređenju sa običnim skupom gde važi jednostavno pravilo pripadnosti, u skladu sa njegovom definicijom, fazi skup se posmatra kao skup sa nejasnim granicama.

Ovakav koncept može delovati zbunjujuće i nelogično, ali je dovoljno nabrojati samo nekoliko primera koji nas okružuju da bi se ideja koja leži iza fazi skupova ilustrovala. U jeziku postoji bezbroj pojmova koji poseduju baš takav karakter nejasnih granica, te su lingvističke promenljive upravo one koje se najčešće sreću među primerima fazi skupova.

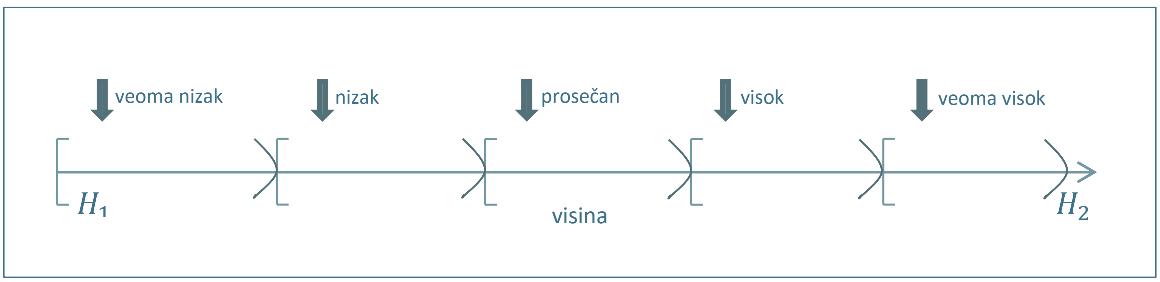
Primer 1.1.1

Kada se govori o pojmu *visoka temperatura,* jasno je da svako ima subjektivno viđenje o značenju sintagme *toplo vreme*. Ako se smatra da skup visokih temperatura sadrži temperature od 20°C naviše, to bi značilo da 19.5°C podrazumeva hladno vreme, a samo pola stepena više od toga se već smatra visokom temperaturom. Problem je ovde veoma lako uočljiv. Osim toga, 20°C je potpuno različit pojam za, recimo, jedan od najtoplijih krajeva na zemlji, Dolinu Smrti u Kaliforniji, gde temperature svake godine dostižu 50°C i, na primer, Sibir, gde čak i letnje temperature retko prelaze taj prag. Zbog ovog problema praktično je nemoguće praviti ankete i istraživanja na temu vremena na nivou celog čovečanstva, uz upotrebu klasičnih skupova, jer svi, u skladu sa tim gde žive, o vremenu imaju različitu predstavu. ⌑

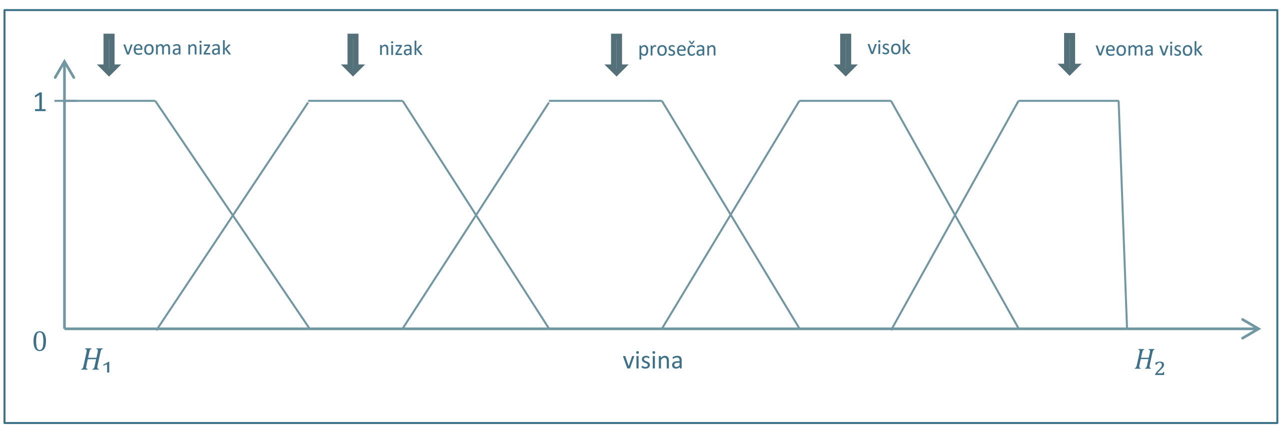
Primer 1.1.2

Ako se posmatra *skup visokih ljudi*, i odredi granica da su svi koji imaju više od 180cm visoki, to dovodi do nerealne situacije u kojoj neko ko ima 179.9cm ne upada u skup visokih ljudi, iako je za samo 0.1cm niži od nekoga ko se smatra visokim. Osim toga, granica nakon koje se ljudi u Danskoj, gde žive najviši ljudi na planeti, smatraju visokim, i u Kini, koja se smatra za jednu od najnižih nacija, je takođe vrlo različita, te je opet nemoguće izvesti istraživanja o predstavama o visini na nivou svih nacija.

Neka je interval $(H_{1,}H_2)$ interval visina, a 5 lingvističkih opisa mogućih visina: *veoma nizak, nizak, prosečan, visok, veoma visok.* Na slici 1.1.1a grafički je predstavljen običan skup $(H_{1,}H_2)$, dok je na slici 1.1.1b predstavljen grafički prikaz fazi skupa koji odgovara posmatranim visinama i njihovim lingvističkim opisima. Ovakav fazi skup naziva se trapezoidan, a o različitim oblicima fazi skupova biće više reči u trećem poglavlju. Na krajevima intervala, razlika je vrlo očigledna, ali se zato između njih javlja veliki broj poklapanja. ⌑



Slika 1.1.1a Visina na intervalu $(H_{1,}H_2)$ posmatranom kao običan skup



Slika 1.1.1b Visina na intervalu $(H_{1,}H_2)$ posmatranom kao fazi skup

Uopšte, svi neodređeni pojmovi, pojmovi koji nemaju jasno definisane granice i striktno ne objašnjavaju šta u njih spada, a šta ne, mogu se opisati uz pomoć jednostavne i prirodne ideje fazi skupa, tj. dodeljivanja stepena pripadnosti.

Običan skup ima jasno definisane granice, dakle, neki element datom skupu ili pripada ili ne pripada. Drugim rečima, funkcija pripadnosti za taj element je ili 0 ili 1. To što je određeni element a smešten u neki skup $A = \{a \mid s_1, s_2\}$, daje informaciju samo da a poseduje osobine s_1 i s_2 koje taj skup definišu, ali ne i u kojoj meri. Određivanje mere, stepena pripadanja nekom skupu, područje je funkcije pripadanja fazi skupova. Što je vrednost funkcije μ_A veća, element a „više pripada“ datom fazi skupu, odnosno

„bolje zadovoljava" uslove s_1 i s_2. Ako element a u potpunosti zadovoljava zadate uslove, vrednost njegove funkcije pripadnosti biće 1. Slika 1.1.2 prikazuje intuitivnu predstavu običnog skupa sa jasno definisanim granicama (levo) i fazi skupa čije su granice zadimljene, odnosno predstavljaju postepeni, a ne trenutni, prelazak plave boje u belu (desno).

Slika 1.1.2 Intuitivan prikaz običnog skupa (levo) i fazi skupa (desno)

Primer 1.1.3

Posmatrajući neku kancelariju, može se napraviti fazi skup stolica. Naime, običan skup stolica, dobija se tako što se svim predmetima iz kancelarije dodeli 0 ukoliko nisu stolice i 1 ukoliko jesu. Međutim, fazi skup uzima u obzir i sve predmete koji mogu da posluže kao stolica. Tako, na primer, stolica će pripadati ovom skupu sa vrednošću 1, sto sa vrednošću 0.6, tepih sa vrednošću 0.2, žardinjera sa vrednošću 0.1, prozor sa vrednošću 0, itd. Dakle, vrednosti funkcije pripadnosti su redom:

$$\mu_A(stolica) = 1,$$

$$\mu_A(sto) = 0.6,$$

$$\mu_A(tepih) = 0.2,$$

$$\mu_A(\check{z}ardinjera) = 0.1,$$

$$\mu_A(prozor) = 0.$$

A skup A – fazi skup stolica u kancelariji se može zapisati na sledeći način:

$$A = \{(stolica, 1), (sto, 0.6), (tepih, 0.2), (\check{z}ardinjera, 0.1), (prozor, 0)\}.$$

Prozor u ovom slučaju ne pripada skupu A, stoga uređeni par $(prozor, 0)$ nije neophodno navoditi. Isto važi i za svaki drugi element čija je vrednost funkcije pripadanja 0. ⌗

Dakle, za adekvatan zapis fazi skupa potrebne su vrednosti njegove funkcije pripadnosti u svakoj tački skupa, tj. skup A je skup uređenih parova:

$$A = \{(x_1, \mu_A(x_1)), (x_2, \mu_A(x_2)), \dots, (x_n, \mu_A(x_n))\}.$$

1.2 Izbor funkcije pripadnosti i različiti načini zapisa fazi skupova

Veliki značaj fazi skupova ogleda se i u tome što adekvatno opisuju postepene promene stanja i upravo iz tog razloga imaju veliki uticaj na smanjenje grešaka koje nastaju prilikom ogleda i merenja. To znači da podaci grupisani u fazi skupove često bolje i preciznije opisuju realnost, ali je korišćenje klasičnih skupova zgodnije jer su lakši za korišćenje. Problem koji se javlja na samom početku i od kog umnogome zavisi uspeh istraživanja koja kao matematičku podlogu imaju fazi skupove vezan je za izbor odgovarajuće funkcije pripadnosti. Jasno, ovom je problemu neophodno posvetiti svu pažnju jer pogrešan izbor funkcije pripadanja dovodi do obmanjujućih rezultata. Pri odabiru odgovarajuće funkcije pripadnosti važno je održati balans između funkcije koja što bolje opisuje problem i funkcije koja nije suviše komplikovana za kasniju upotrebu. Ovaj izbor obično je ostavljen stručnjaku za matematičko modeliranje koji uz pomoć znanja dobijenog od tima eksperata iz oblasti o kojoj se radi dolazi do najboljeg mogućeg rešenja. Postoji mnogo različitih algoritama za dolaženje do najkompatibilnije funkcije pripadanja, a svi se mogu podeliti u dve grupe: direktni i indirektni metodi. Što se tiče direktnog pristupa, timu eksperata se postavlja niz pitanja koja se odnose direktno na funkciju pripadnosti, dok se, pak, kod indirektnog pristupa, ekspertima postavljaju jednostavna pitanja koja što više isključuju subjektivnost i uticaj predrasuda, a takođe su i samo indirektno povezana sa funkcijom pripadnosti [13].

Primer 1.2.1

Jedna od funkcija pripadnosti koja dobro opisuje skup $A = \{realni\ brojevi\ blizu\ 0\}$ je:

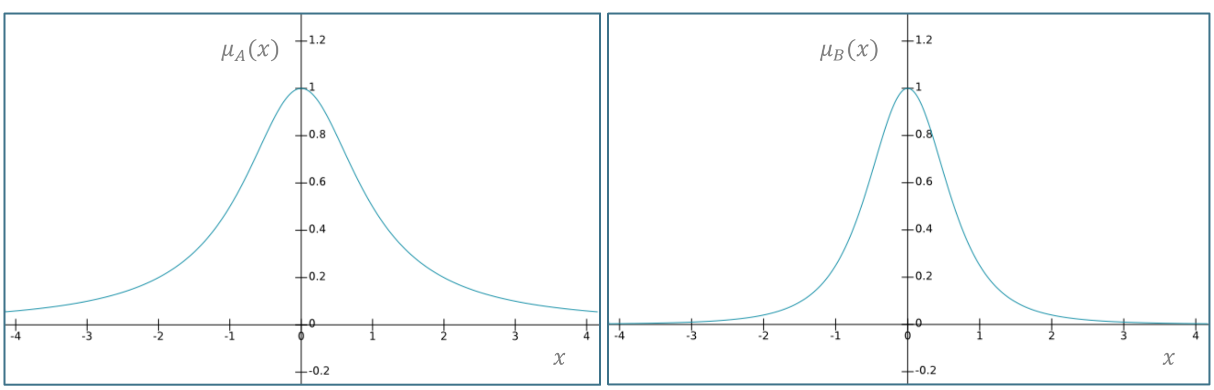
$$\mu_A(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\mu_A(0) = 1, \mu_A(1) = 0.5, \mu_A(2) = 0.2\ , \ldots$$

Ako se pak posmatra skup $B = \{realni\ brojevi\ veoma\ blizu\ 0\}$, tada bi odgovarajuća funkcija pripadnosti mogla biti:

$$\mu_B(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2.$$

$$\mu_B(0) = 1, \mu_B(1) = 0.25, \mu_B(2) = 0.04\ , \ldots$$



Slika 1.2.1 Grafički prikaz funkcija pripadnosti $\mu_A(x)$ i $\mu_B(x)$ iz primera 1.2.1

U zavisnosti od toga koliko se strogo posmatra pojam veoma blizu 0, izbor za μ_B bi mogla biti i funkcija

$$\mu_B(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^3. \quad ⌑$$

Napomena 1.2.1

Modifikacijom $\mu_A(x) = \frac{1}{1+(x-a)^2}$ dobija se funkcija pripadnosti za opšti oblika skupa $A = \{realni\ brojevi\ blizu\ a\}$.

Uopšte, izbor funkcije pripadnosti nikada nije jedinstven. U zavisnosti od ličnih preferencija i zahteva koje treba ispuniti, bira se ona koja najviše odgovara konceptu koji se opisuje. Neke od najčešće korišćenih metoda za pronalaženje funkcije pripadnosti su

- metod intuicije – inteligencija i iskustvo su od presudnog značaja kada se funkcija pripadnosti traži isključivo na osnovu nečije intuicije,
- metod deduktivnog zaključivanja – do funkcije pripadnosti se dolazi deduktivnim zaključivanjem na osnovu poznatih činjenica,
- metod induktivnog zaključivanja – uključuje pravljenje klastera (pogodan je samo za statične modele),
- metod rangiranja – stepeni pripadanja se određuju na osnovu uređene liste,
- *uglasti* fazi skupovi – fazi skupovi čija je funkcija pripadnosti periodična sa periodom 2π (najčešće u slučaju polarnih koordinata),
- metod neuronskih mreža – imitira rad neurona u ljudskom mozgu,
- genetski algoritmi – koriste Darvinovu teoriju evolucije, odnosno preživljavanje najboljih izbora,
- i mnogi drugi.

Postoji nekoliko načina koji se mogu koristiti za predstavljanje fazi skupova, i zapravo razlog zbog kojeg se nije izdvojio jedan najpraktičniji leži u činjenici da je za različite tipove fazi skupova pogodan i drugačiji prikaz [13]. Svaki fazi skup jedinstveno je određen svojom funkcijom pripadnosti, te je osnovni zapis fazi skupa upravo preko njegove funkcije pripadnosti, na primer $\mu_A(x) = x^2$. Ekvivalentan zapis predstavlja potpuno izostavljanje funkcije pripadnosti, odnosno $A = x^2$.

Diskretne fazi skupove je moguće zapisati na sledeći način:

$$A = \{(x, \mu_A(x) | x \in X)\}.$$

Na primeru to izgleda ovako:

$$A = \{(7,1), (4,0.6), (3,0.1), (1,0.01)\}.$$

Ovakav zapis značio bi da element 7 pripada fazi skupu A sa stepenom pripadanja 1, element 4 sa stepenom pripadanja 0.6, itd. Drugi način za prikaz diskretnog fazi skupa je tabelarno, kao što je to urađeno u tabeli 1.2.1:

$\boldsymbol{x_i}$	7	4	2	1
$\boldsymbol{\mu_A(x_i)}$	1	0.6	0.1	0.01

Tabela 1.2.1 primer tabelarnog prikaza diskretnog fazi skupa

1.3 Osnovni pojmovi fazi skupova

Jedan od najvažnijih koncepata vezanih za fazi skupove je α – presek fazi skupa. To je, kako sama reč kaže, skup koji sadrži sve elemente fazi skupa veće od proizvoljne granice (preseka) $\alpha \in [0,1]$ i predstavlja jedan od načina za dobijanje klasičnog skupa polazeći od fazi skupa[10].

Definicija 1.3.1 [13] (α – presek fazi skupa)
Za fazi skup A i proizvoljno $\alpha \in [0,1]$, definiše se **α – presek fazi skupa**, u oznaci $\boldsymbol{A_\alpha}$, kao skup koji sadrži sve elemente čija pripadnost nije manja od α.

$$A_\alpha = \{\, x \mid \mu_A(x) \geq \alpha \,\}.$$

Analogno se definiše i **strogi α – presek** fazi skupa $\boldsymbol{A_{\alpha+}}$:

$$A_{\alpha+} = \{\, x \mid \mu_A(x) > \alpha \,\}.$$

Kako su i A_α i $A_{\alpha+}$ precizno definisani skupovi, tj. imaju jasne granice, može se zaključiti da nijedan od njih nije fazi skup, već se radi o klasičnim skupovima. Ovaj koncept je veoma koristan jer se uz pomoć njega može postaviti granica, odnosno mogu se iz posmatranja isključiti neki elementi sa pripadnošću koja se u datom trenutku smatra nedovoljnom.

Teorema 1.3.1 [13] (neke osobine α – preseka fazi skupa)
Neka je A fazi skup i neka je $\alpha_1 < \alpha_2$. Tada važi:

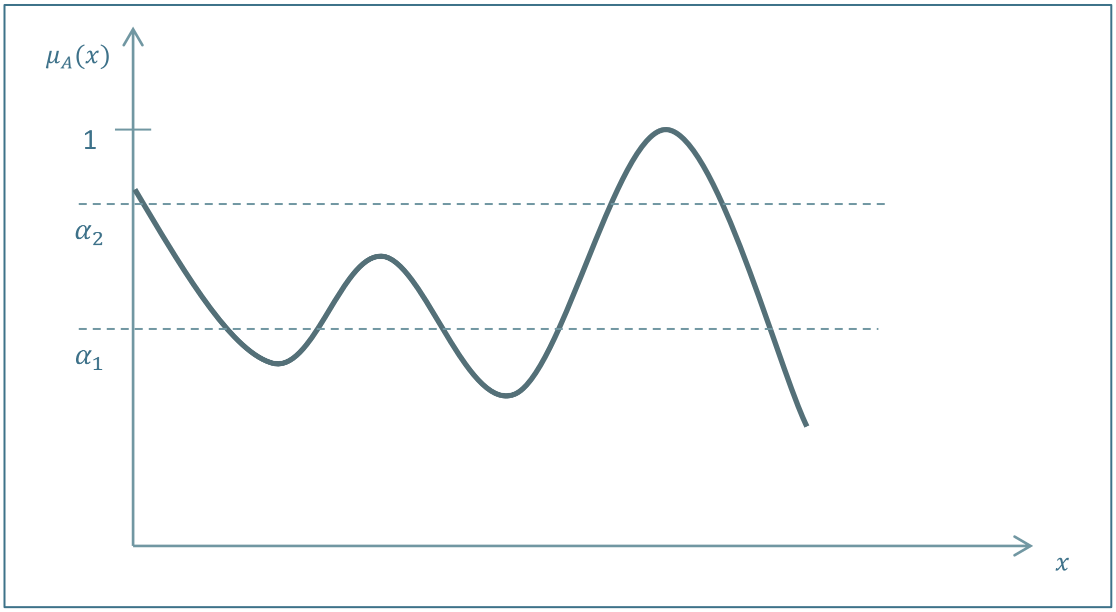
1. $A_{\alpha_{1+}} \subseteq A_{\alpha_1}$
2. $A_{\alpha_1} \supseteq A_{\alpha_2}$
3. $A_{\alpha_{1+}} \supseteq A_{\alpha_{2+}}$

Dokaz:

1. Neka $x \in A_{\alpha_{1+}}$, treba pokazati da tada važi $x \in A_{\alpha_1}$. Strogi α – presek podrazumeva da važi: $\mu_A(x) > \alpha_1$, a samim tim važi i $\mu_A(x) \geq \alpha_1$ što je definicija običnog α – preseka.
2. Neka je $x \in A_{\alpha_2}$. Tada važi: $\mu_A(x) \geq \alpha_2$, a kako je $\alpha_1 < \alpha_2$ sledi da važi i $\mu_A(x) \geq \alpha_1$, što je i trebalo pokazati.
3. Analogno kao pod 2. ■

Vrlo prirodna osobina α – preseka je činjenica da što je odabrana granica pripadnosti α veća, to je manji broj elemenata koji u skupu preostaje. Naime, ako se posmatraju samo ljudi koji pripadaju skupu visokih sa stepenom 0.8 i više, to će sigurno dati manji skup nego što će se dobiti sa α – presekom od, na primer, 0.6. Ovo svojstvo α – preseka lako se može uočiti na slici 1.3.1.

[10] Svi postupci koji za cilj imaju dobijanje klasičnog skupa polazeći od fazi skupa nazivaju se postupci defazifikacije i o njima se govori u poglavlju 1.5.4.



Slika 1.3.1 Grafički prikaz α – preseka fazi skupa

Skup koji u sebi sadrži sve različite stepene pripadnosti $\alpha \in [0,1]$ naziva se skup nivoa (stepena) pripadnosti. Dva specijalna slučaja α – preseka fazi skupa su nosač i jezgro skupa:

Definicija 1.3.2 [13] (nosač fazi skupa)
Nosač fazi skupa A_{0+}[11] se definiše kao strogi α – presek za $\alpha = 0$, tj. strogi 0 – presek.

$$A_{0+} = \{\, x \mid \mu_A(x) > 0 \,\}.$$

Jasno, u njemu se nalaze svi elementi iz univerzuma koji imaju nenula stepen pripadnosti skupu A.

Definicija 1.3.3 [13] (jezgro fazi skupa)
U **jezgru fazi skupa A_1** [12] se nalaze svi elementi koji imaju pun stepen pripadnosti, tj.

$$A_1 = \{\, x \mid \mu_A(x) = 1 \,\}.$$

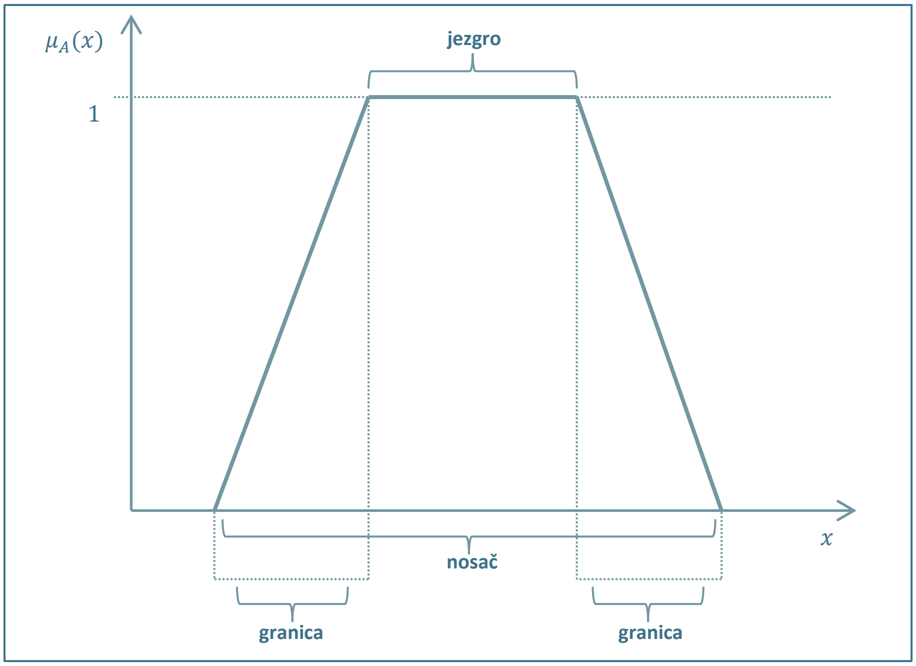
Značaj nosača je što daje klasičan skup u kom se nalaze svi oni elementi koji *iole* pripadaju skupu, dok se važnost jezgra ogleda u činjenici da predstavlja skup u kome se nalaze elementi sa punom pripadnošću, odnosno samo oni koji skupu *potpuno* pripadaju. Sa druge strane, granica fazi skupa je pojam koji isključuje sve krajnje vrednosti, odnosno, ne samo one elemente čija je pripadnost 0, nego i one koji skupu *potpuno* pripadaju, tj. čija je pripadnost 1.

Definicija 1.3.4 [13] (granica fazi skupa)
U **granicu fazi skupa $\dot{A}$** spadaju svi elementi za koje važi $\mu_A \in (0, 1)$, tj.

$$\dot{A} = \{x \mid 0 < \mu_A(x) < 1\}.$$

Na Slici 1.3.2 grafički su predstavljeni nosač, jezgro i granica fazi skupa.

[11] Alternativne oznake za nosač fazi skupa A su: *support(A), supp(A) ili $S(A)$.*
[12] Alternativne oznake za jezgro fazi skupa A su: *core(A), $C(A)$, $kernel(A)$*.



Slika 1.3.2 Grafički prikaz jezgra, nosača i granice fazi skupa

Definicija 1.3.5 [13] (visina fazi skupa)
Visina fazi skupa $\boldsymbol{h(A)}$ je najveći stepen pripadnosti koji postoji u datom fazi skupu A, odnosno:

$$h(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x).$$

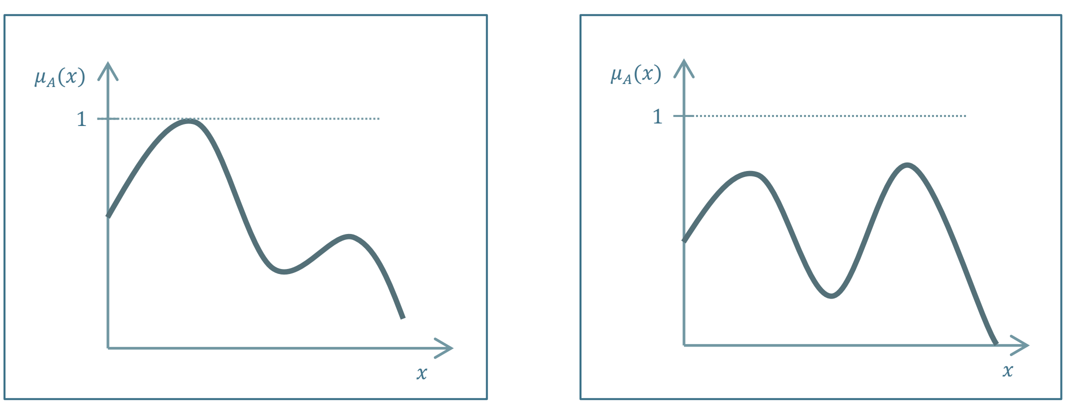
Visina fazi skupa A analogno se može definisati i kao najveće α za koje važi $A_\alpha \neq \emptyset$.

Definicija 1.3.6 [13] (normalizovan fazi skup)

Za fazi skup A kaže se da je **normalizovan** ukoliko je makar jedan element skupa dostigao punu pripadnost (Slika 1.3.3), tj. ukoliko je:

$$h(A) = 1.$$

Takođe, u skladu sa definicijom jezgra, svaki fazi skup čije je jezgro neprazno je normalizovan fazi skup. U praksi je ovo svojstvo veoma važno, te se uglavnom svaki fazi skup normalizuje na neki način, uglavnom tako što se njegova funkcija pripadnosti $\mu_A(x)$ podeli sa visinom $h(A)$.



Slika 1.3.3 Grafički prikaz normalizovanog (levo) i nenormalizovanog fazi skupa (desno)

Primer 1.3.1

Neka je univerzum X koji predstavlja godine života definisan na sledeći način:

$$X = \{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}.$$

Primer fazi skupova *bebe B*, *mladi M*, *odrasli O* i *stari S* definisanih nad X dat je u tabeli 1.3.1.

godine	bebe (*B*)	mladi (*M*)	odrasli (*O*)	stari (*S*)
0	1	0	0	0
10	0	0.5	0.1	0
20	0	0.9	0.8	0
30	0	0.7	1	0
40	0	0.3	1	0.1
50	0	0.1	1	0.3
60	0	0	1	0.6
70	0	0	1	0.9
80	0	0	1	1
90	0	0	1	1

Tabela 1.3.1 primer fazi skupova definisanih nad intervalom godina

Ovo je primer konstrukcije diskretnog fazi skupa, koji se može tumačiti na sledeći način: osoba od, na primer, 40 godina pripada skupu mladih sa stepenom pripadanja 0.3, sa stepenom 1 pripada skupu odraslih osoba i sa stepenom 0.1 skupu starih. Drugačije rečeno, za ovu osobu po ovoj funkciji pripadanja važi da je 30% mlada, 100% odrasla i 10% stara, pri čemu procenti ne predstavljaju verovatnoću nego stepen pripadanja svakom od skupova.

Za skup *starih* S jedan α – presek bio bi za $\alpha = 0.2$:

$$S_{0.2} = \{x | \mu_S(x) \geq 0.2\}, \text{ tj.} \qquad S_{0.2} = \{50, 60, 70, 80, 90\}.$$

α – presek za $\alpha = 0.6$ bio bi

$$S_{0.6} = \{60, 70, 80, 90\}.$$

Dakle, što je oštriji kriterijum za α, dobija se manji α – presek. Skupovi $S_{0.2}$ i $S_{0.6}$ su obični skupovi, po definiciji α – preseka. U ovom primeru važi odnos $S_{0.6} \subseteq S_{0.2}$, takođe u skladu sa definicijom α – preseka.
Skup stepena pripadnosti fazi skupa S sadrži sve vrednosti μ_S koje mogu da se pojave, tj.

$$\Lambda_S = \{\alpha \mid \mu_S(x) = \alpha, \alpha \in [0,1], x \in X\},$$

$$\Lambda_S = \{0, 0.1, 0.3, 0.6, 0.9, 1\}.$$

Nosač fazi skupa S sadrži sve elemente čiji je stepen pripadnosti strogo veći od 0, tj.

$$S_{0+} = \{ x \mid \mu_S(x) > 0 \},$$

$$S_{0+} = \{40, 50, 60, 70, 80, 90\}.$$

Jezgro skupa S se sastoji od svih elemenata čiji je stepen pripadnosti jednak 1, tj.

$$S_1 = \{\, x \mid \mu_S(x) = 1 \,\},$$

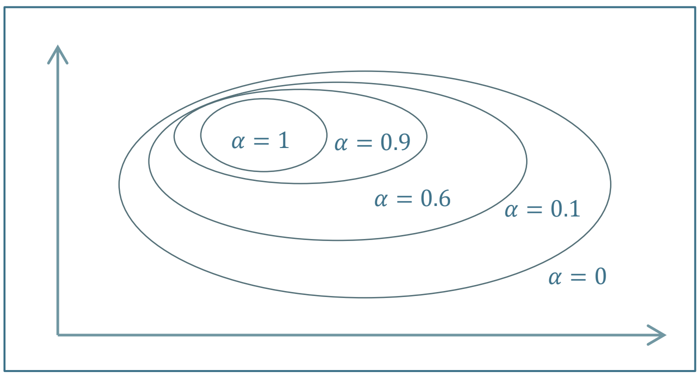
$$S_1 = \{80, 90\}.$$

Najveći stepen pripadnosti fazi skupu S je 1, te je visina $h(S) = 1$. Ovo za posledicu ima i to da je fazi skup S normalizovan, dok, na primer, fazi skup M nije normalizovan jer je njegova visina $h(M) = 0.9$.

Još jedan važan pojam koji se može posmatrati za fazi skupove definisane na $\mathbb{R}^n$ je **konveksnost fazi skupa**. Ona se definiše uz pomoć α – preseka i zapravo predstavlja generalizaciju konveksnosti klasičnih skupova[13]. Naime, da bi fazi skup bio konveksan neophodno je da svi njegovi α – preseci za $\alpha \in (0, 1]$ budu konveksni skupovi[14] (Slika 1.3.4).

Definicija 1.3.7 [13] (konveksan fazi skup)
Za fazi skup A kaže se da je konveksan ukoliko su svi njegovi α – preseci za $\alpha \in (0, 1]$ konveksni.

Nula – presek je isključen zato što u ovom slučaju predstavlja ceo $\mathbb{R}^n$, pa tako sadrži i $-\infty$ i $+\infty$.



Slika 1.3.4 Grafički prikaz normalizovanog i konveksnog fazi skupa definisanog preko α – preseka ($A_{0.1}, A_{0.6}, A_{0.9}, A_1$)

S obzirom na to da je tehnički vrlo zahtevno proveravati konveksnost α – preseka za svako $\alpha \in (0, 1]$, konveksnost fazi skupa se najčešće proverava uz pomoć sledeće teoreme:

Teorema 1.3.2 [13] (o konveksnosti fazi skupa)
Fazi skup A je konveksan ako i samo ako važi

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\},$$

za svako $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$[15] i $\lambda \in [0,1]$.

---

[13] Klasičan skup A je konveksan ako za svako $x_1, x_2 \in A$, $\lambda \in [0,1]$ važi $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in A$.

[15] Teorema je uopštenje na $\mathbb{R}$

Dokaz:

Neka je A konveksan skup i neka je $\alpha = \mu_A(x_1) \leq \mu_A(x_2)$. Tada $x_1, x_2 \in A_\alpha$.
Kako je A konveksan skup, $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A_\alpha$ za svako $\lambda \in [0,1]$. Odatle sledi da je stepen pripadnosti elementa $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ bar α, tj.

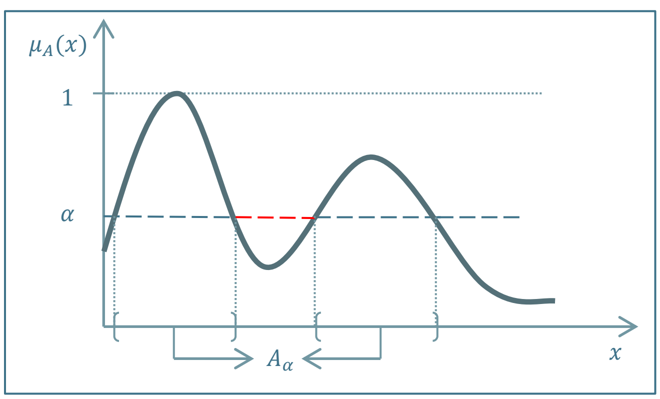
$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \alpha = \mu_A(x_1) = \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}.$$

Neka A zadovoljava $\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$.
Treba pokazati da je A_α konveksan za svako $\alpha \in (0,1]$.
Za svako $x_1, x_2 \in A_\alpha (\mu_A(x_1) \geq \alpha, \mu_A(x_2) \geq \alpha)$ i za svako $\lambda \in [0,1]$ važi:

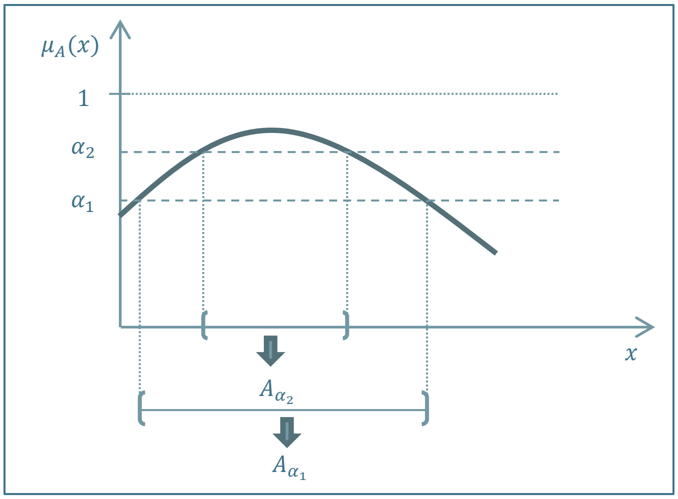
$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\} \geq \min\{\alpha, \alpha\} = \alpha,$$

odnosno, A_α je konveksan za svako $\alpha \in (0,1]$. ▪

Intuitivno, konveksnost znači da duž koja spaja bilo koje dve tačke nekog skupa mora u celosti da pripada posmatranom skupu. Na grafiku 1.3.5 jasno se vidi da to svojstvo ne važi, dok je na grafiku 1.3.6 navedeno svojstvo ispunjeno. Važno je napomenuti i to da konveksnost fazi skupa ne znači i konveksnost po obliku odgovarajuće funkcije pripadnosti. Naprotiv, funkcije pripadnosti konveksnih fazi skupova imaju konkavan, a ne konveksan oblik, kao što je to slučaj i na slici 1.3.6.



Slika 1.3.5 Grafički prikaz normalizovanog fazi skupa koji nije konveksan



Slika 1.3.6 Grafički prikaz nenormalizovanog fazi skupa koji je konveksan

Još neki od pojmova koji su u teoriju fazi skupova uvedeni po uzoru na klasične skupove su podskup, pravi podskup, ekvivalencija i skalarni kardinalni broj fazi skupa.

Definicija 1.3.8 [28] (podskup fazi skupa)
Fazi skup A je podskup fazi skupa B, $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$, ukoliko za svako $x \in X$ važi:

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x).$$

Definicija 1.3.9 [28] (pravi podskup fazi skupa)
Fazi skup A je pravi podskup fazi skupa B, $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$, ukoliko za svako $x \in X$ važi:

$$\mu_A(x) < \mu_B(x).$$

Definicija 1.3.10 [28] (ekvivalentni fazi skupovi)
Fazi skupovi A i B su ekvivalentni, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, ako za svako $x \in X$ važi

$$\mu_A(x) = \mu_B(x).$$

Definicija 1.3.11 [28] (skalarni kardinalni broj fazi skupa)
Za prebrojiv fazi skup A, skalarni **kardinalni broj** $|\boldsymbol{A}|$ definiše se kao

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x).$$

1.4 Osnovne operacije sa fazi skupovima

Postoji mnogo različitih načina za uvođenje operacija u teoriju fazi skupova, a osnovni način među njima predložen je još 1965. godine od strane Zadeha i oslanja se na definisanje ovih operacija po uzoru na analogne operacije među klasičnim skupovima. Ovako definisane operacije nazivaju se standardne operacije sa fazi skupovima, dok će u poglavlju 2 biti predstavljeni neki alternativni načini za definisanje kako unarnih, tako i binarnih fazi operatora.

Komplement, presek i unija fazi skupova definišu se uz pomoć odgovarajućih funkcija pripadnosti, a po uzoru na operatore klasičnih skupova na sledeći način:

Definicija 1.4.1 [13] (komplement fazi skupa)
Komplement fazi skupa definisanog nad univerzumom X je skup $\overline{A}$ za koji važi

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \qquad \forall x \in X.$$

Elementi koji zadovoljavaju $\mu_{\overline{A}}(x) = \mu_A(x)$ nazivaju se **ekvilibrijumi** fazi skupa A. To su tačke u kojima funkcija pripadnosti dostiže vrednost $\mu_A(x) = 0.5$.

Definicija 1.4.2 [13] (presek i unija fazi skupova)
Za fazi skupove A i B, **presek** i **unija** se definišu na sledeći način:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad \forall x \in X$$

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad \forall x \in X.$$

Primer 1.4.1
Skup mladih i skup odraslih iz primera 1.3.1 izgledaju ovako:

$M = \{(0,0), (10,0.5), (20,0.9), (30,0.7), (40,0.3), (50,0.1), (60,0), (70,0), (80,0), (90,0)\}$

$O = \{(0,0), (10{,}0.1), (20,0.8), (30,1), (40,1), (50,1), (60,1), (70,1), (80,1), (90,1)\}.$

Komplementi, presek i unija skupova M i O su:
$\overline{M} = \{(0,1), (10,0.5), (20,0.1), (30,0.3), (40,0.7), (50,0.9), (60,1), (70,1), (80,1), (90,1)\}$ i

S obzirom na to da element 10 iz skupa mladih zadovoljava uslov $\mu_M(10) = \mu_{\overline{M}}(10) = 0.5$, on predstavlja ekvilibrijum ovog skupa.

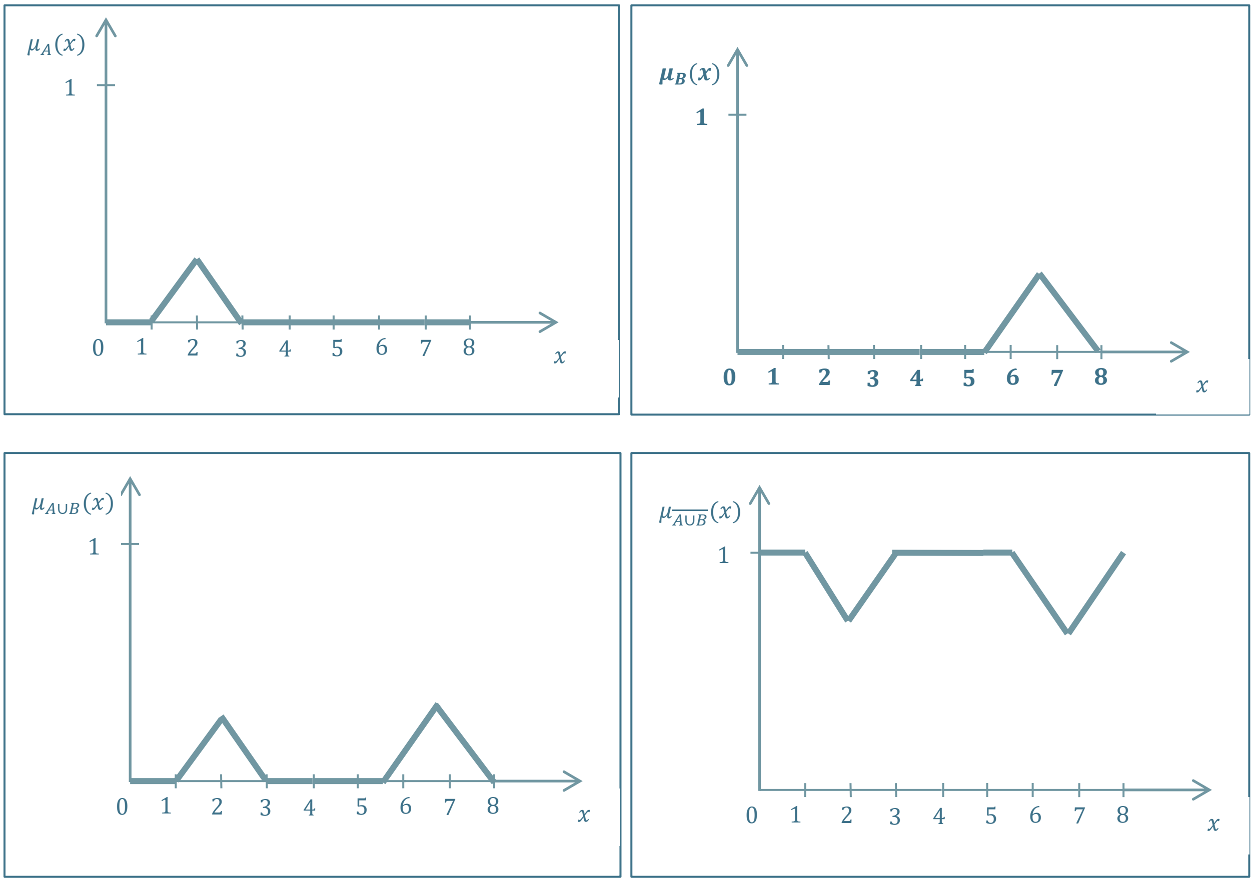
$\overline{O} = \{(0,1), (10,0.9), (20,0.2)\}.$

$M \cap O = \{(10,0.1), (20,0.8), (30,0.7), (40,0.3), (50,0.1)\}$

$M \cup O = \{(10,0.5), (20,0.9), (30,1), (40,1), (50,1), (60,1), (70,1), (80,1), (90,1)\}.$ ⌑

Primer 1.4.2
Na slici 1.4.1, grafički su prikazani fazi skupovi A i B, zatim njihova unija i komplement unije, sve preko odgovarajućih funkcija pripadnosti. Iako su i skup A i skup B konveksni fazi skupovi, njihova unija, kao i komplement njihove unije, nisu konveksni, što se na osnovu grafika njihovih funkcija pripadnosti lako može zaključiti. Dakle, osobina konveksnosti ne mora ostati očuvana u slučaju unije dva konveksna

skupa. Sa druge strane, presek dva konveksna fazi skupa daje takođe konveksan fazi skup. Jasno, u ovom slučaju, presek skupova A i B bio bi prazan skup. ⌑



Slika 1.4.1 Grafički prikaz osnovnih operacija sa fazi skupovima

Primer 1.4.3

Neka su fazi skupovi $A = \{\text{svi brojevi značajno veći od } 2\}$ i $B = \{\text{svi brojevi približno jednaki } 3\}$ definisani preko svojih funkcija pripadnosti na sledeći način:

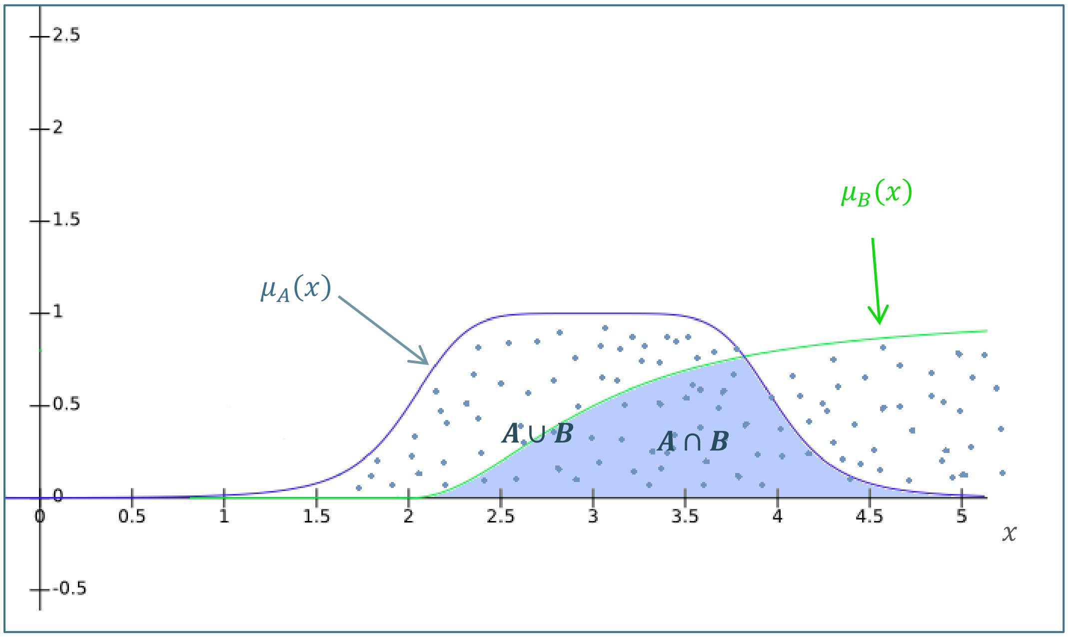
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{(x-2)^2}}, & x > 2 \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \frac{1}{1 + (x-3)^6}, \qquad x \in X.$$

Skup $A \cap B$ sadrži brojeve koji su značajno veći od 2 i približno jednaki 3, dok skup $A \cup B$ sadrži sve brojeve koji su ili značajno veći od 2 ili približno jednaki 3. Na grafiku 1.4.2 plavom bojom označen je presek, dok je kružićima označena unija skupova A i B.

$$\mu_{A\cap B} = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ \min\left\{ \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{(x-2)^2}}, \ \dfrac{1}{1+(x-3)^6} \right\}, & x > 2 \end{cases}$$

$$\mu_{A\cup B} = \max\left\{ \frac{1}{1+\frac{1}{(x-2)^2}}, \ \frac{1}{1+(x-3)^6} \right\}, \quad x \in X. \quad ⌑$$



Slika 1.4.2 Fazi skupovi A i B iz primera 1.4.3, kao i njihov presek i unija.

Ako su operacije komplement, presek i unija definisane na opisane načine, fazi skupovi zadovoljavaju sve osobine kao i klasični skupovi (Tabela 1.4.1), osim zakona kontradikcije i zakona isključenja trećeg[16]. Ovo teoriju fazi skupova čini podobnijom za opisivanje sistema u kojima vlada neka vrsta neodređenosti, tj. u situacijama kada su dostupni podaci nepouzdani i nepotpuni.

U sledećoj tabeli pobrojane su osobine koje zadovoljavaju klasični skupovi. Neka su A, B i C klasični skupovi, a X univerzum.

Involucija	$\bar{\bar{A}} = A$
Komutativnost	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$
Asocijativnost	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Distributivnost	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Idempotentnost	$A \cap A = A$ $A \cup A = A$

[16] Strukture koje zadovoljavaju sve osobine iz Tabele 1.4.1, se nazivaju Bulove algebre, a one koje zadovoljavaju sve osim zakona kontradikcije i zakona isključenja trećeg, de Morganove algebre.

Apsorpcija	$A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (A \cap B) = A$
apsorpcija sa univerzumom X i praznim skupom $\emptyset$	$A \cup X = X$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
Identiteti	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap X = A$
zakon kontradicije	$A \cap \bar{A} = \emptyset$
zakon isključenja trećeg	$A \cup \bar{A} = X$
de Morganovi zakoni	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Tabela 1.4.1 Osnovne osobine klasičnih skupova

Intuitivno, neki element ili pripada klasičnom skupu ili njegovom komplementu. Sa druge strane, kako su fazi skupovi definisani bez jasnih granica, neki element a može pripadati fazi skupu A sa stepenom 0.2, te po definiciji komplementa pripada skupu $\bar{A}$ sa stepenom 0.8. Presek ova dva skupa biće fazi skup čija funkcija pripadanja u tački a dostiže vrednost 0.2, dakle njihov presek neće biti prazan skup. Formalno, da bi se pokazalo da je zakon kontradikcije narušen, potrebno je pronaći makar jedno $x \in X$ takvo da ne važi $A \cap \bar{A} = \emptyset$, odnosno,

$$\min\{\mu_A(x),\ \mu_{\bar{A}}(x)\} = 0,$$

$$\min\{\mu_A(x), 1 -\ \mu_A(x)\} = 0.$$

Ovo je, očigledno, narušeno za bilo koje $x \in (0,1)$, odnosno, tačno je samo za $x \in \{0,1\}$.

Analogno, potrebno je pronaći makar jedno $x \in X$, za koje je narušen zakon isključenja trećeg, tj. $A \cup \bar{A} = X$, odnosno,

$$\max\{\mu_A(x), 1 - \mu_A(x)\} = 1.$$

Ovo svojstvo je opet zadovoljeno samo za $x \in \{0,1\}$, te za bilo koje $x \in (0,1)$ zakon isključenja trećeg ne važi.

Lako se može pokazati da su zadovoljene sve ostale osobine navedene u Tabeli 1.4.1.

U sledećoj teoremi pokazano je da je de Morganov zakon $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ zadovoljen za fazi skupove.

Teorema 1.4.1 (De Morganov zakon za fazi skupove)

Ako su operacije komplement, presek i unija definisane na način opisan u definicijama 1.4.1 i 1.4.2, fazi skupovi zadovoljavaju de Morganov zakon.

Dokaz:

Neka je $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$, dokaz ide analogno u obrnutom slučaju.

Treba pokazati $\mu_{\overline{A \cap B}}(x) = \mu_{\bar{A} \cup \bar{B}}(x)$.

$$\mu_{\overline{A \cap B}}(x) = 1 - \mu_{A \cap B}(x) = \ 1 - \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = 1 - \mu_A(x).$$

Sa druge strane jednakosti je

$$\mu_{\bar{A}\cup\bar{B}}(x) = \max\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\} = \max\{1-\mu_A(x), 1-\mu_B(x)\} = 1-\mu_A(x)$$

Dakle, de Morganov zakon je za fazi skupove zadovoljen. ▪

Primer 1.4.3

Uz pomoć skupova mladih, odraslih i starih iz primera 1.3.1:

$$M = \{(0,0),(10,0.5),(20,0.9),(30,0.7),(40,0.3),(50,0.1),(60,0),(70,0),(80,0),(90,0)\}$$

$$O = \{(0,0),(10{,}0.1),(20,0.8),(30,1),(40,1),(50,1),(60,1),(70,1),(80,1),(90,1)\},$$

$$S = \{(0{,}0),(10,0),(20,0),(30,0),(40,0.1),(50,0.3),(60,0.6),(70,0.9),(80,1),(90,1)\}.$$

kao i njihovih komplemenata, unije i preseka dobijenih u primeru 1.4.1:

$$\overline{M} = \{(0,1),(10,0.5),(20,0.1),(30,0.3),(40,0.7),(50,0.9),(60,1),(70,1),(80,1),(90,1)\} \text{ i}$$

$$\overline{O} = \{(0,1),(10,0.9),(20,0.2)\}.$$

$$M\cap O = \{(10,0.1),(20,0.8),(30,0.7),(40,0.3),(50,0.1)\}$$

$$M\cup O = \{(10,0.5),(20,0.9),(30,1),(40,1),(50,1),(60,1),(70,1),(80,1),(90,1)\}.$$

mogu se ilustrovati osobine iz tabele 1.4.1 koje fazi skupovi zadovoljavaju, kao i to da za fazi skupove ne važe zakon kontradikcije i zakon isključenja trećeg.

Involucija:

$$\bar{\bar{O}} = \{(0{,}0),(10,0.1),(20,0.8),(30,1),(40,1),(50,1),(60,1),(70,1),(80,1),(90,1)\} = O$$

Komutativnost:

$$O\cap M = \{(10,0.1),(20,0.8),(30,0.7),(40,0.3),(50,0.1)\} = M\cap O$$

$$O\cup M = \{(10,0.5),(20,0.9),(30,1),(40,1),(50,1),(60,1),(70,1),(80,1),(90,1)\} = M\cup O$$

Asocijativnost:

$$(M\cap O)\cap S = \{(40,0.1),(50,0.1)\} = M\cap(O\cap S)$$

$$(M\cup O)\cup S = \{(10,0.5),(20,0.9),(30,1),(40,1),(50,1),(60,1),(70,1),(80,1),(90,1)\}$$
$$= M\cup(O\cup S)$$

Distributivnost:

$$M\cap(O\cup S) = \{(10,0.1),(20,0.8),(30,0.7),(40,0.3),(50,0.1)\} = (M\cap O)\cup(M\cap S)$$

$$M \cup (O \cap S) = \{(10, 0.5), (20, 0.9), (30, 0.7), (40, 0.3), (50, 0.3), (60, 0.6), (70, 0.9), (80, 1), (90, 1)\}$$
$$= (M \cup O) \cap (M \cup S)$$

Idempotentnost:

$$O \cap O = \{(0, 0), (10{,}0.1), (20, 0.8), (30, 1), (40, 1), (50, 1), (60, 1), (70, 1), (80, 1), (90, 1)\} = O$$

$$O \cup O = \{(0, 0), (10{,}0.1), (20, 0.8), (30, 1), (40, 1), (50, 1), (60, 1), (70, 1), (80, 1), (90, 1)\} = O$$

Apsorpcija:

$$M \cap (M \cup O)$$
$$= \big\{\{(0, 0), (10, 0.5), (20, 0.9), (30, 0.7), (40, 0.3), (50, 0.1), (60, 0), (70, 0), (80, 0), (90, 0)\}\big\} = M$$

$$M \cup (M \cap O)$$
$$= \{(0, 0), (10, 0.5), (20, 0.9), (30, 0.7), (40, 0.3), (50, 0.1), (60, 0), (70, 0), (80, 0), (90, 0)\} = M$$

Apsorpcija sa X i $\emptyset$ i identiteti važe prirodno:

$$M \cup X = X \text{ i } M \cap \emptyset = \emptyset$$

$$M \cup \emptyset = M \text{ i } M \cap X = M$$

de Morganovi zakoni:

$$\overline{M \cap O} = \{(0, 1), (10, 0.9), (20, 0.2), (30, 0.3), (40, 0.7), (50, 0.9), (60, 1), (70, 1), (80, 1), (90, 1)\}$$
$$= \bar{M} \cup \bar{O}$$

$$\overline{M \cup O} = \{(0, 1), (10, 0.5), (20, 0.1)\} = \bar{M} \cap \bar{O}$$

Zakon kontradikcije:

$$M \cap \bar{M} = \{(10, 0.5), (20, 0.1), (30, 0.3), (40, 0.3), (50, 0.1)\} \neq \emptyset$$

Zakon isključenja trećeg:

$$M \cup \bar{M} = \{(0, 1), (10, 0.5), (20, 0.9), (30, 0.7), (40, 0.7), (50, 0.9), (60, 1), (70, 1), (80, 1), (90, 1)\} \neq X$$

Dakle, kao ni u opštem slučaju, ni kod ovog fazi skupa nisu zadovoljeni zakoni kontradikcije i isključenja trećeg, dok su sva ostala svojstva zadovoljena. ⌗

Sa uvođenjem unije kao standardne operacije među fazi skupovima, može se definisati još jedna važna osobina α – preseka, koja omogućava neku vrstu reprezentacije fazi skupova. Mogućnost da se fazi skup predstavi uz pomoć svojih α – preseka formulisana je u narednoj teoremi:

Teorema 1.4.2 [13] (o dekompoziciji fazi skupa)
Za svaki fazi skup $A \in X$ važi

$$A = \bigcup_{\alpha \epsilon [0,1]} A^{\alpha},$$

gde je

$$A^{\alpha}(x) = \alpha \cdot A_{\alpha}(x).$$

Dokaz:
Neka za svako $x \in X$ važi $a = A(x)$. Tada važi:

$$\left(\bigcup_{\alpha \epsilon [0,1]} A^{\alpha} \right)(x) = \sup_{\alpha \epsilon [0,1]} A^{\alpha}(x) = \max\left(\sup_{\alpha \epsilon [0,a]} A^{\alpha}(x), \sup_{\alpha \epsilon [A,1]} A^{\alpha}(x) \right).$$

Za svako $\alpha \epsilon [a, 1]$, $A(x) = a < \alpha$, pa važi: $A^{\alpha}(x) = 0$ i za svako $\alpha \epsilon [a, 1]$, $A(x) = a \geq \alpha$, pa važi: $A^{\alpha}(x) = \alpha$. Dakle,

$$\left(\bigcup_{\alpha \epsilon [0,1]} A^{\alpha} \right)(x) = \sup_{\alpha \epsilon [0,a]} \alpha = a = A(x)$$

Primer 1.4.4
Neka je A diskretan fazi skup definisan na sledeći način:

$$A = \{(x_1, 3), (x_2, 5), (x_3, 9)\}$$

Mogu se uočiti samo tri α – preseka i oni u potpunosti definišu posmatrani fazi skup:

$$A_3 = \{(x_1, 1), (x_2, 1), (x_3, 1)\}$$

$$A_5 = \{(x_1, 0), (x_2, 1), (x_3, 1)\}$$

$$A_9 = \{(x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 1)\}$$

Dalje se ova tri α – preseka mogu zapisati kao specijalan fazi skup iz teoreme 1.4.1, u oznaci A^{α}, definisan za svako $x \in \{x_1, x_{2,} x_3\}$ na sledeći način:

$$A^{\alpha}(x) = \alpha \cdot A_{\alpha}(x).$$

Tada se dobija:

$$A^3 = \{(x_1, 3), (x_2, 3), (x_3, 3)\}$$

$$A^5 = \{(x_1, 0), (x_2, 5), (x_3, 5)\}$$

$$A^9 = \{(x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 9)\}$$

Jasno, koristeći standardnu uniju fazi vrednosti, dobija se baš polazni fazi skup A.

$$A = A^3 \cup A^5 \cup A^9.$$

1.5 Osnovni pojmovi fazi logike

Ja sam Krićanin, a svi Krićani lažu.
Epimenidov paradoks

Osnovni princip na kom počiva teorija klasične logike je da je svaki iskaz ili tačan ili netačan. Postavlja se pitanje da li je u stvarnosti moguće očekivati ovako stroge podele na istine i laži. Iskaz *Osoba A je visoka 180cm* je iskaz čija se istinitost može lako proveriti. Međutim, iskaz *Osoba A je visoka* se od strane različitih osoba može interpretirati na različite načine. Ovakav iskaz zahteva pronalaženje dodatnih karakteristika posmatrane osobe, poput njenog geografskog porekla, pola i slično. Čak i tada, različite osobe imaju različitu predstavu o visini, te bi verovatno češći odgovor na pitanje *Da li je osoba A visoka* bio *onako, možda, pomalo,* itd. nego što bi to bili prosti odgovori *da i ne.*

Jedini način za rešavanje ovakvih problema, i Epimenidovog paradoksa između ostalog, je prelazak sa dvovrednosne[17] logike na onu koja je viševrednosna, kakva je fazi logika. Naime, u klasičnoj logici, kao što neki element ili pripada klasičnom skupu ili ne, tako i neki iskaz može biti ili tačan ili netačan. Siva zona, polovične istine ili polovične laži ne postoje.

Epimenidov paradoks je paradoks klasične logike koji u fazi logici ima jednostavno rešenje: ekvilibrijum. Ovo se lako može utvrditi posmatrajući uprošćenu verziju ovog paradoksa koja glasi *Ja lažem*.

Neka je iskaz p – *Ja lažem*. Ako je p tačno, znači da lažem, pa ono što izgovaram nije tačno. Drugim rečima, moja izjava, *Ja lažem*, je netačna, tj. *Ja ne lažem* je tačno. Sa druge strane, ako je p netačno, znači da izjava *Ja lažem* nije tačna, pa je *Ja ne lažem* tačno, odnosno $\neg p$ je netačno. Dakle, p i $\neg p$ su istovremeno tačni, odnosno istovremeno netačni, tj. važi:

$$t(p) = t(\neg p\ ) = 1 - t(p), \text{ odnosno, } t(p) = \frac{1}{2}$$

Što će reći da je svaki od ova dva iskaza dopola tačan, odnosno oba pripadaju skupu tačnih iskaza sa stepenom pripadanja $\frac{1}{2}$.

Još jedan veoma poznat primer koji ilustruje potrebu za viševrednosom logikom je čuveno pitanje: Da li je čaša polupuna ili poluprazna [13]? Naime, ako za čašu od 200ml koja sadrži 100ml vode kažemo da je polupuna, da li se onda za istu čašu iz koje se izlije jedan mililitar takođe može reći da je polupuna? A ako se izlije još jedan mililitar? Pravo pitanje je zapravo koliko mililitara treba izliti iz čaše da bismo za nju rekli da je prazna? Nažalost, ne postoji tačno određeni mililitar posle kog možemo reći da je čaša ipak poluprazna. Ovaj prelazak je postepen, i tačan odgovor na ovo pitanje mora se potražiti u fazi logici. Ona obezbeđuje da neki iskaz može biti tačan sa određenom preciznošću, a to je upravo ono što je iskazima ovakvog tipa neophodno da bi se mogli tačnije deklarisati.

Dakle, ono što fazi logika predstavlja su koncepti čije granice nisu jasno obeležene, odnosno iskaze koji ne mogu bespogovorno biti svrstani ni u potpune istine, niti u potpune laži.

[17] S obzirom na to da u klasičnoj logici postoje samo dve vrednosti: tačno i netačno – ona se naziva dvovrednosna logika. Po istom principu se sve logike u kojima postoji više od dve moguće vrednosti nazivaju viševrednosne logike.

1.5.1 Logičke operacije u fazi logici

Istinitosna vrednost dodeljena nekom iskazu p u fazi logici može biti bilo koji broj iz intervala $[0, 1]$, te je fazi logika upravo uopštenje klasične logike na način na koji su fazi skupovi uopštenje klasičnih skupova. To zapravo znači da u fazi logici postoji stepen tačnosti (istinitosti) nekog iskaza. Taj stepen tačnosti potiče od vrednosti funkcije pripadnosti fazi skupa na kom je iskaz definisan. Prateći način na koji su osnovne operacije klasične logike definisane, i operacije fazi logike se mogu konstruisati na sličan način. Međutim, kako se u fazi logici istinitosna vrednost proteže na čitav skup $(0, 1)$, praktično je nemoguće konstruisati tablice istinitosti na način karakterističan za definisanje operatora u klasičnoj logici. Zato se negacija, disjunkcija, konjunkcija i implikacijau fazi logici definišu na sledeći način [13]:

Negacija:

$$t(\neg p) = 1 - t(p)$$

Disjunkcija:

$$p \vee q : t(p \vee q) = \max(t(p), t(q))$$

Konjunkcija:

$$p \wedge q : t(p \wedge q) = \min(t(p), t(q))$$

Implikacija[18]:

$$p \to q : t(p \to q) = t(\neg p \vee q) = \max(\mathrm{t}(\neg p), t(q)).$$

Gde su p i q neki iskazi definisani na fazi skupovima A i B[19], t funkcija koja preslikava univerzum U $t: U \to (0, 1)$ i važi $t(p) = \mu_A(x)$. To znači da je stepen istinitosti iskaza $p: x \in A$ zapravo stepen pripadanja elementa x fazi skupu A, odnosno njegova funkcija pripadnosti $\mu_A(x)$.

1.5.2 Fazi sistemi zaključivanja

Dobra odluka se zasniva na znanju.
Platon

Najčešći način za predstavljanje znanja eksperata koje je upotrebljivo u sistemima veštačke inteligencije je uz pomoć deduktičke forme zaključivanja, odnosno pravila AKO...ONDA. Osnovni oblik tih pravila je sledeći:

AKO hipoteza **ONDA** posledica

[18] Ovo je definicija implikacije Zadeha iz 1973. godine. Postoji mnoštvo drugih načina za definisanje implikacije od kojih je jedan od najpoznatijih Lukašijevičeva implikacija: $t(p \to q) = \min(1 - t(p) + t(q), 1)$.

[19] Iskazi p i q se mogu posmatrati na sledeći način: $p: x \in A$ i $q: x \in B$

Ovakav oblik zaključivanja podrazumeva da se uz pomoć neke hipoteze (premise) dolazi do zaključka (posledice), odnosno da se pod pretpostavkom neke činjenice zaključuje neka nova činjenica. Dalje se svako složeno pravilo može uz pomoć različitih operatora i modifikatora može razložiti na konjukciju ili disjunkciju određenog broja ovako definisanih pravila. Na primer:

Konjunkcija više hipoteza [13]

AKO A_1, I A_2, $I \dots, I\ A_n$ ONDA B

Neka je $A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$, a odgovarajući funkcija pripadnosti

$$\mu_A(x) = \min\left(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \dots, \mu_{A_n}(x)\right),$$

Tada je dobijeno pravilo

AKO A ONDA B

Disjunkcija više hipoteza [13]

AKO A_1, ILI A_2, ILI, ..., ILI A_n ONDA B

Neka je $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, a odgovarajući funkcija pripadnosti

$$\mu_A(x) = \max\left(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \dots, \mu_{A_n}(x)\right),$$

Tada je dobijeno pravilo

AKO A ONDA B

1.5.3 Lingvističke promenljive i lingvistički modifikatori

Prosečan čovek ima osobinu da razmišlja u mentalnim slikama i šablonima, a ne zamišljajući bilo kakve numeričke vrednosti. Zato je polazna tačka pri pokušaju imitiranja čovekovog razmišljanja uvođenje veličina koje bi mogle predstavljati govorni jezik, odnosno uvođenje lingvističkih promenljivih. Naš govor se sastoji od reči koje se sklapaju u rečenice, a upravo predstavljanje sintaksi iz realnog govora je osnovni zadatak fazi zaključivanja [8].

Ako posmatramo, na primer, lingvističku promenljivu profit, ona potencijalno može da uzme mnoštvo različitih vrednosti. Neka su to nizak profit, zadovoljavajući profit, visok profit, itd. Konkretno u ovom primeru, radi se o profitu, ali se na sličan način može posmatrati bilo koja promenljiva, recimo temperatura, starost, rizik, dohodak, visina, itd. Sve navedene vrednosti koje lingvistička promenljiva profit može da ima mogu se dodatno gradirati koristeći pomoćne reči koje se nazivaju lingvistički modifikatori (eng. *hedges*).

Neka je A neki fazi skup koji je određen svojom funkcijom pripadnosti $\mu_A(x)$. Njegovu funkciju pripadnosti je tada moguće dodatno (bliže) odrediti korišćenjem lingvističkog modifikatora m i na taj način se dolazi do modifikovanog fazi skupa, u oznaci $\mu_{mA}(x)$. Ukoliko je, na primer, lingvistički modifikator reč veoma, a polazni fazi skup se odnosio na visok profit, skup A_m postaje skup koji sadrži veoma visoke profite. Na ovaj način se može veoma lako izvršiti dodatno segmentiranje u okviru fazi skupova, što je često vrlo korisno. Način na koji se definiše lingvistički modifikator u smislu njegovog delovanja na funkciju pripadnosti je proizvoljan, a mogu se podeliti u tri grupe [13]:

1 **jaki modifikatori** koji pojačavaju značenje funkcije pripadnosti i samim tim smanjuju broj (i stepen pripadanja) elemenata koji ostaju u modifikovanom fazi skupu: $\mu_{mA}(x) < \mu_A(x)$,

2 **slabi modifikatori** koji slabe funkciju pripadnosti i na taj način uvećavaju stepen pripadanja elemenata: $\mu_{mA}(x) > \mu_A(x)$ i

3 **identitet** - $\mu_{mA}(x) = \mu_A(x)$.

Neki primeri:

- veoma - $\mu_{veoma\ A}(x) = (\mu_{mA}(x))^2$ za lingvistički modifikator veoma, najčešće se uzima kvadrat funkcije pripadnosti, što bi značilo da će u ovom slučaju manje elemenata pripadati posmatranom fazi skupu mA – a oni koji ovom fazi skupu budu i dalje pripadali, pripadaće mu *veoma*.
- izrazito - $\mu_{izrazito\ A}(x) = (\mu_{mA}(x))^3$, slično kao i prethodni modifikator, samo još više pojačava pripadnost.
- Modifikator slabo - $\mu_{slabo\ A}(x) = (\mu_{mA}(x))^{\frac{1}{2}}$, ovaj modifikator umanjuje jačinu funkcije pripadnosti, odnosno povećava broj i pripadnost elemenata koji pripadaju skupu mA.
- nimalo - $\mu_{nimalo\ A}(x) = (\mu_{mA}(x))^{\frac{1}{5}}$, slično kao modifikator slabo, sa još većim efektom slabljenja funkcije pripadnosti.

Velika moć lingvističkih modifikatora leži u njihovoj primeni. Naime, ukoliko je za neki fazi skup određena njegova funkcija pripadnosti, tada se od polazne tačke, imajući samo jednu funkciju pripadnosti, može na veoma jednostavan način doći do neograničenog broja mogućih kombinacija, a samim tim i novih fazi skupova. To ilustruje sledeći primer.

Primer 1.5.3.1

Posmatra se lingvistička promenljiva profit. Neka je dat diskretan fazi skup A definisan tabelarno, koji predstavlja nizak profit, i fazi skup B, koji predstavlja visok profit.

x_i	200€	500€	1800€	3500€
$\mu_A(x_i)$	1	0.75	0.2	0.1

x_i	200€	500€	1800€	3500€
$\mu_B(x_i)$	0.05	0.25	0.6	1

Zatim se definiše fazi skup izuzetno nizak profit, tako što se funkcija pripadnosti $\mu_A(x)$ modifikuje uz pomoć lingvističkog modifikatora na sledeći način:

izuzetno nizak profit $\mu_{izuzetno\ A}(x)$ = ${\mu_A}^3(x)$, tj.

x_i	200€	500€	1800€	3500€
${\mu_A}^3(x_i)$	1	0.42	0.008	0.001

Na sličan način se fazi skup B modifikacijom njegove funkcije pripadnosti pretvara u fazi skup veoma visok profit $\mu_{veoma\ B}(x)$ = ${\mu_A}^2(x)$, tj.:

x_i	200€	500€	1800€	3500€
$\mu_B{}^2(x_i)$	0.0025	0.0625	0.36	1

Slično, može se konstruisati fazi skup koji označava ne veoma visok profit tako što se funkcija pripadnosti dobijenog skupa $\mu_{veoma\ B}(x)$ modifikuje na sledeći način:

$\mu_{ne\ veoma\ B}(x) = 1 - \mu_{veoma\ B}(x)$, ili tabelarno:

x_i	200€	500€	1800€	3500€
$1 - \mu_B{}^2(x_i)$	0.9975	0.9375	0.64	0

Koristeći samo tri modifikacije može se doći do različitih kombinacija, a samim tim i velikog broja različitih novih lingvističkih promenljivih. Na primer, profit koji nije veoma visok, ali nije ni izuzetno nizak tabelarno bi izgledao ovako:

Prvo je neophodno napraviti tabelu koja označava profit koji nije izuzetno nizak:

x_i	200€	500€	1800€	3500€
$1 - \mu_A{}^3(x_i)$	0	0.58	0.92	0.999

Zatim, koristeći operator preseka, dolazi se do fazi skupa koji predstavlja profit koji nije ni veoma visok, a ni izuzetno nizak:

x_i	200€	500€	1800€	3500€
$(1 - \mu_A{}^3(x_i)) \cap (1 - \mu_B{}^2(x_i))$	0	0.58	0.64	0

Posmatrajući tabelu koja oslikava ovakav skup, može se zaključiti da je polazna logika u potpunosti ispraćena. Naime, rezultat ove operacije je sledeći skup: profit nije izuzetno nizak – dakle 0 ukoliko je profit 200€, a nije ni veoma visok, jer je 0 i za profit od 3500€. U ostalim slučajevima, ravnomerno su raspoređene vrednosti, tj. više *naginju* ka desnoj strani upravo iz razloga što je modifikator za skup A bio *izuzetno*, a modifikator za skup B bio samo *veoma*.

1.5.4 Proces defazifikacije

Fazi sistemi zaključivanja procenjuju AKO…ONDA… lingvistička pravila i, prirodno, njihov rezultat je takođe u fazi obliku i neophodno ga je pretvoriti u običan broj koji pruža svima jasnu informaciju. Defazifikacija je važan proces jer omogućava dobijanje jedne skalarne vrednosti[20] koja zamenjuje čitav

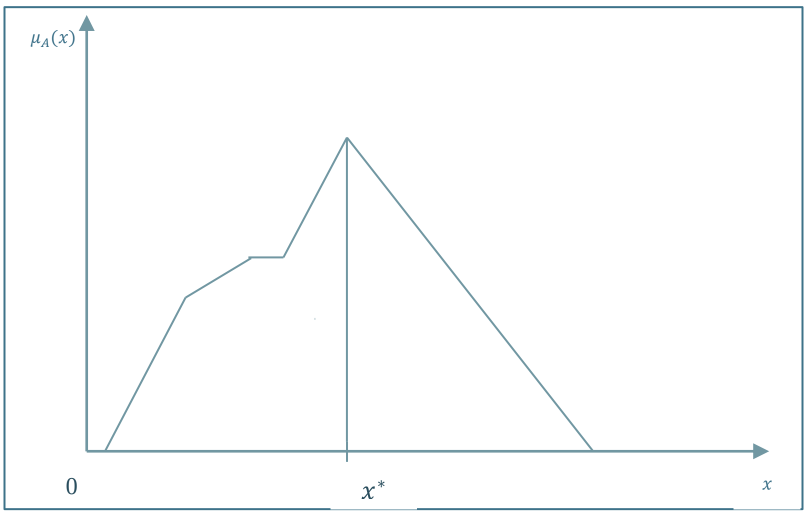
[20] Jedan od načina za dobijanje klasičnog skupa od postojećeg fazi skupa je korišćenje α – preseka opisanih u poglavlju 1.3

fazi skup. Izlazna veličina fazi procesa može biti fazi skup ili unija više njih. Postoji mnogo različitih metoda za dobijanje defazifikovane veličine x^* od kojih su neki [19]:

1 **Metod maksimalne pripadnosti (metoda visine)**

Ova metoda je jedna od najčešće korišćenih, prvenstveno iz razloga što se veoma lako definiše, a takođe i izračunava. Međutim, mana ove metode je što se može primenjivati isključivo na fazi skupove koji imaju samo jednu visinu, odnosno ne može se primenjivati na fazi intervalima. Osnovna ideja na kojoj se zasniva je da se za rezultat defazifikacije uzima ono x za koje funkcija pripadnosti posmatranog fazi skupa A dostiže najveću vrednost. S obzirom da se takvo x naziva upravo visina fazi skupa, ova metoda se takođe naziva i metoda visine. Formula je vrlo jednostavna:

$$\mu_A(x^*) \geq \mu_A(x), \quad \forall x \in A.$$

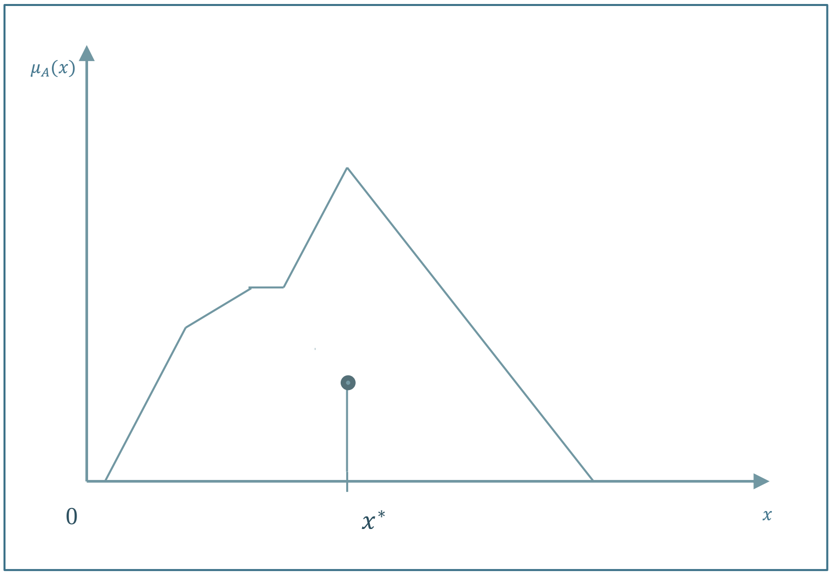


Slika 4.3.1 Grafički prikaz metode maksimalne pripadnosti

2 **Metod centroida (metod gravitacije)**

Ovaj metod veoma brzo i efikasno dolazi do najboljeg kompromisa među mogućim vrednostima lingvističke promenljive. Prvo je potrebno izračunati površinu oivičenu funkcijom pripadnosti, a zatim pomoću formule izračunati geometrijsku sredinu posmatrane površine.

$$x^* = \frac{\int \mu_A(x) \cdot x \, dx}{\int \mu_A(x)},$$



Slika 4.3.2 Grafički prikaz metode centroida

3 **Metod ponderisane sredine** – samo za simetrične funkcije pripadnosti

$$x^* = \frac{\int \mu_A(\bar{x}) \cdot \bar{x}\, dx}{\int \mu_A(\bar{x})},$$

gde je $\bar{x}$ centroid,

Ova metoda podrazumeva da se svakoj funkciji pripadnosti (tj. svakom fazi skupu) dodeli vrednost koju ima element sa najvećom pripadnošću.

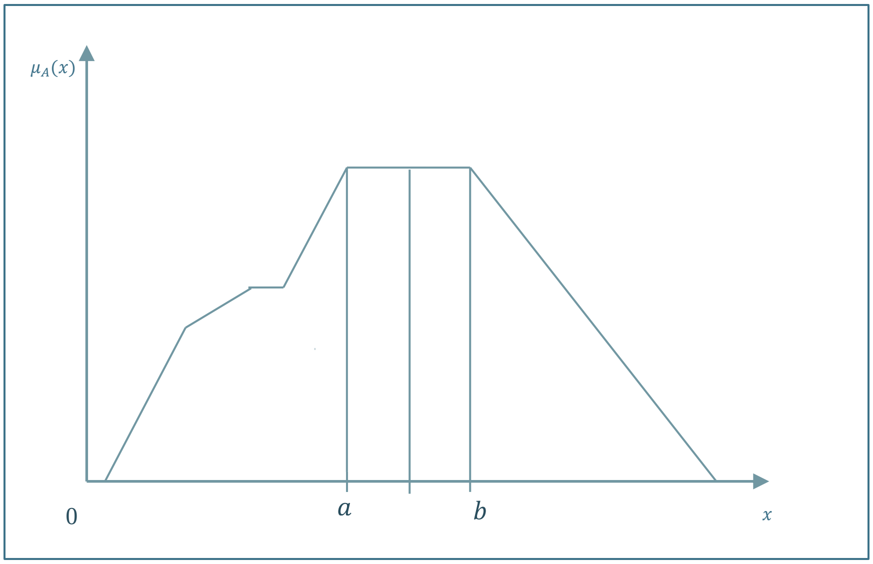
4 **Metod sredine maksimuma, metod početka maksimuma i metod kraja maksimuma**

Neka su a i b početak i kraj intervala na kojem funkcija pripadnosti nekog fazi skupa dostiže svoj maksimum. Tada se metod sredine maksimuma definiše na sledeći način:

$$x^* = \frac{a+b}{2}$$

Metod početka maksimuma znači da će defazifikacija odrediti početak intervala (u ovom slučaju vrednost a) kao izlaznu skalarnu veličinu, a metod kraja maksimuma analogno, u krajnjoj tački intervala (što je u ovom slučaju b).

Ova metoda može da se koristi ukoliko funkcija pripadnosti ne dostiže svoj maksimum samo u jednoj tački, nego na intervalu, kao što je prikazano na slici.



Slika 4.3.4 Grafički prikaz metode sredine maksimuma

2 Fazi operatori

Fazi operatori, kako im samo ime kaže, funkcionišu tako što preslikavaju jedan ili više fazi skupova u novi fazi skup. U prethodnom poglavlju, standardna operacija komplement fazi skupa je primer jedne unarne fazi operacije, dok su standardne operacije presek i unija primeri za binarne operacije među fazi skupovima. Unija fazi skupova A i B daje najmanji fazi skup koji sadrži oba skupa, dok njihov presek predstavlja najveći fazi skup sadržan istovremeno i u A i u B. Drugim rečima, standardna opercija unije fazi skupova je najslabija moguća njihova unija, a standardna operacija preseka predstavlja njihov najjači mogući presek. To svakako nisu jedinstveni, a pokazaće se često ni najbolji, načini za definisanje operatora. Na primer, kod preseka fazi skupova, veći fazi skup se potpuno izbacuje iz razmatranja i jedino manji fazi skup utiče na rezultat. Ovakvi rezultati su za neka istraživanja dovoljni, dok su za neka jednostavno nepotpuni i zbog toga je neophodno uvođenje alternativnih operatora. Svi alternativni operatori koji slede biće uvedeni uz pomoć aksioma, a zatim će biti navedene neke od važnih osobina koje tako definisani operatori zadovoljavaju.

Operatori usrednjavanja predstavljaju treću klasu binarnih fazi operatora. Intuitivno potiču od zamisli da se nekoliko fazi skupova kombinuju u jedan na osnovu koga se donosi odluka. Na primer, neka se posmatra uspeh neke kompanije po kvartalima i neka je on ocenjen jednim od sledećih opisa: *veoma dobar, dobar, osrednji, loš, veoma loš*. Operator usrednjavanja služi da izvuče jedan fazi skup na osnovu sva četiri koji će dobro oslikavati uspeh kompanije na nivou cele godine.

2.1 Fazi komplement

Komplement je unarna operacija koja, intuitivno, mora da predstavlja neku vrstu negacije. Drugačije rečeno, fazi komplement se definiše kao funkcija za koju važi da što je veći stepen pripadnosti nekog elementa x u A, to je manji stepen pripadnosti tog elementa u $\bar{A}$. Formalno,

Definicija 2.1.1 [13] (fazi komplement)

Fazi komplement je funkcija $c\colon [0,1] \to [0,1]$

$$c\big(\mu_A(x)\big) = \mu_{\bar{A}}(x),$$

koja zadovolja sledeće dve aksiome:

A1 (rubni uslovi) $c(0) = 1$ i $c(1) = 0$,

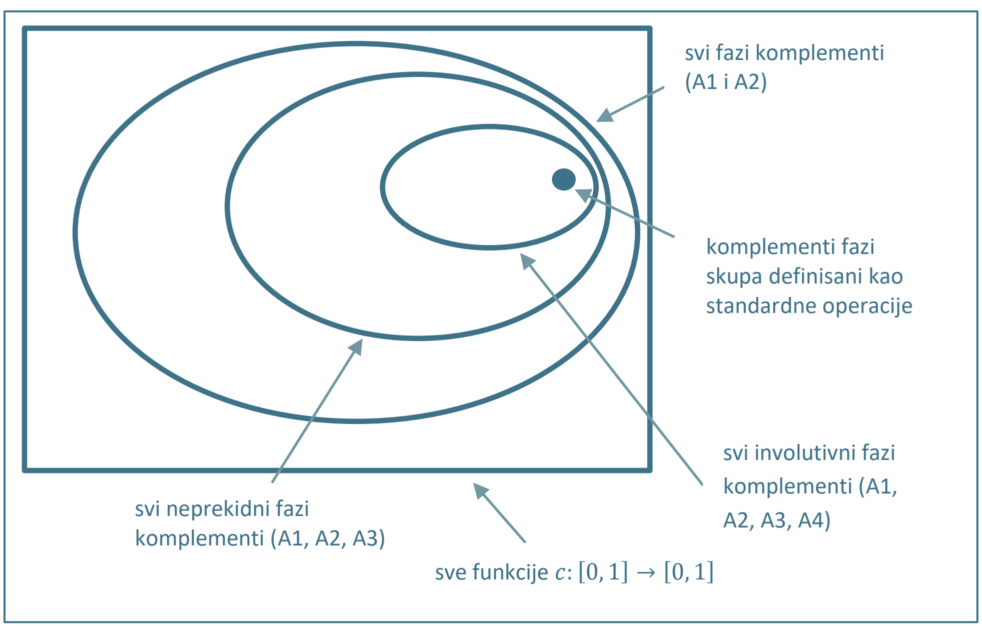
A2 (monotonost) $a < b \Rightarrow c(a) \geq c(b)$[21], $\forall a, b \in [0,1]$.

A1 kaže da ako element pripada skupu A sa pripadnošću 0, onda pripada $\bar{A}$ sa pripadnošću 1. Analogno, ako pripada A sa stepenom 1, tada pripada $\bar{A}$ sa stepenom 0. Aksioma A2 zahteva od funkcije c da bude monotono nerastuća funkcija. Zbog praktičnog značaja, često se od fazi komplementa traži da zadovoljava još dve dodatne aksiome:

A3 neprekidnost i

A4 involucija $c\big(c(a)\big) = a$, $\forall a \in [0,1]$.

Navedene četiri aksiome ipak nisu nezavisne, tj. može se pokazati da činjenica da neka funkcija $c\colon [0,1] \to [0,1]$ zadovoljava A2 i A4 povlači za sobom i ispunjenje aksioma A1 i A3. Na slici 2.1.1 prikazane su klase različitih fazi komplemenata.



Slika 2.1.1 Klase fazi komplemenata

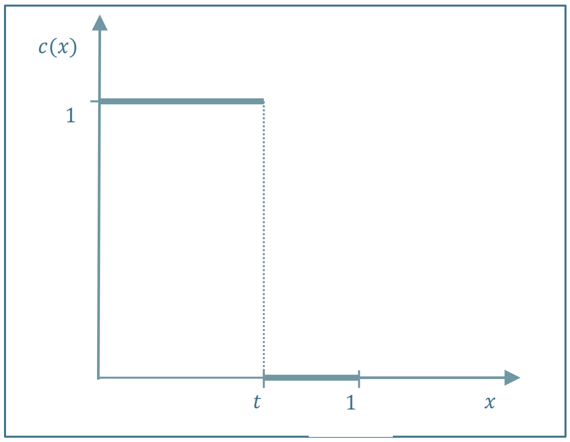
[21] Oznake $a, b \in [0,1]$ uvedene su radi lakšeg zapisa, ali one zapravo predstavljaju funkcije pripadnosti fazi skupova A i B, tj. $\mu_A(x)$ i $\mu_B(x)$.

Primer 2.1.1

Funkcija

$$c(x) = \begin{cases} 1, & x \leq t \\ 0, & x > t \end{cases}, \qquad x \in [0,1], \qquad t \in [0,1]$$

predstavljena na grafiku 2.1.2 je jedan primer fazi komplementa koji zadovoljava samo rubne uslove i monotonost, tj. aksiome A1 i A2. ⌑



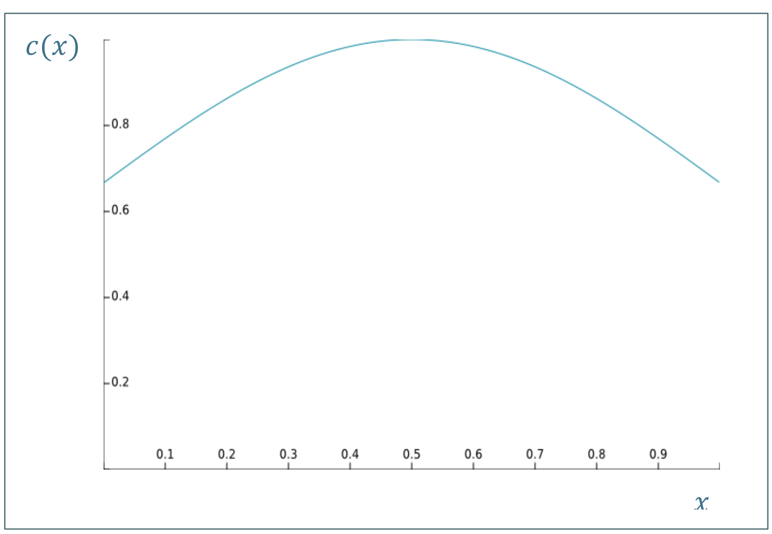
Slika 2.1.2 Fazi komplement koji zadovoljava samo A1 i A2

Primer 2.1.2

Funkcija

$$c(x) = \frac{1}{3}(2 + \sin \pi x)$$

je primer fazi komplementa koji pored osnovnih aksioma A1 i A2 zadovoljava i neprekidnost, odnosno A3. Da $c(x)$ ne zadovoljava A4 sledi iz $c\big(c(1)\big) = 0.68$. Grafički je predstavljen na slici 2.1.3. ⌑



Slika 2.1.3 Fazi komplement koji nije involutivan

Jedna važna klasa involutivnih fazi komplemenata je **Sugeno**[22] **klasa** koja se definiše na sledeći način:

$$c_\lambda(x) = \frac{1-x}{1+\lambda x}, \qquad \lambda \in (-1, \infty).$$

Za svako različito λ dobija se različiti involutivni fazi komplement, dok se za $\lambda = 0$, dobija standardni fazi komplement $c_0(x) = 1 - x$. Na slici 2.1.4, grafički je prikazan Sugenov fazi komplement za različite vrednosti $\lambda \in (-1, \infty)$.

Teorema 2.1.1 [13] (involucija Sugeno komplementa)

Klasa Sugeno komplemenata

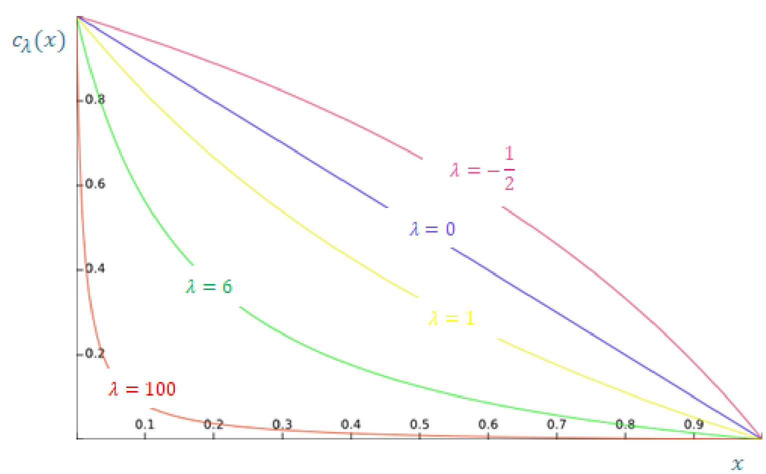
$$c_\lambda(x) = \frac{1-x}{1+\lambda x}, \qquad \lambda \in (-1, \infty)$$

je klasa involutivnih fazi komplemenata.

Dokaz:

Treba pokazati da važi $c_\lambda\big(\, c_\lambda(x)\big) = x$.

$$c_\lambda\big(\, c_\lambda(x)\big) = \frac{1-c_\lambda(x)}{1+\lambda c_\lambda(x)} = \frac{1-\dfrac{1-x}{1+\lambda x}}{1+\lambda\dfrac{1-x}{1+\lambda x}} = \frac{\dfrac{1+\lambda x-1+x}{1+\lambda x}}{\dfrac{1+\lambda x+\lambda(1-x)}{1+\lambda x}} = \frac{x(\lambda+1)}{\lambda+1} = x$$



Slika 2.1.4 klasa Sugenovih fazi komplemenata $c_\lambda(x)$ za različite vrednosti $\lambda \in (-1, \infty)$.

Još jedan važan tip fazi komplemenata je **Jagerova**[23] **klasa** u kojoj se nalaze svi fazi komplementi definisani na sledeći način:

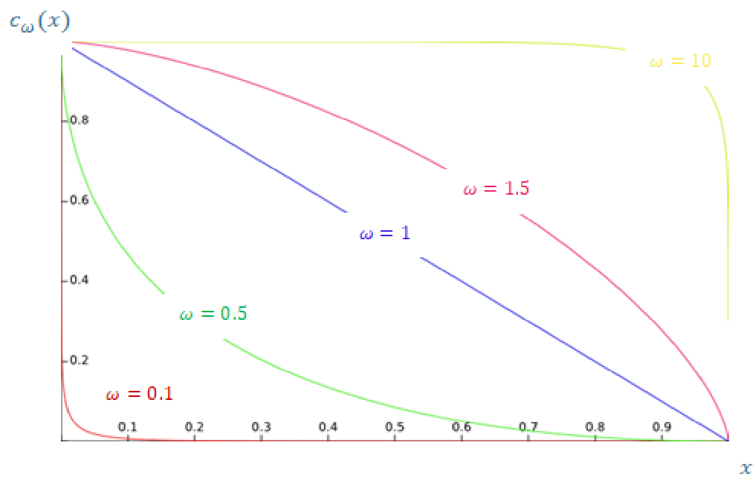
---

[22] Michio Sugeno je japanski naučnik koji je posvetio većinski deo svog rada upravo fazi skupovima, fazi logici i, pre svega, njihovim aplikacijama. Bio je predsednik japanskog Društva za Fazi Teoriju i Sisteme, kao i Internacionalne Asocijacije Fazi Sistema. Poznat je po svojim nastojanjima da spoji praktičan život i nauku, te je fazi sisteme upotrebljavao pri modeliranju pametnih kamera, industrijskih kontrola sistema, malih kućnih aparata, automobila i helikoptera na daljinsko upravljanje. Po njemu je nazvan i jedan od najčuvenijih modela za fazi zaključivanje - Takagi – Sugeno model.

[23] Ronald Robert Yager je američki istraživač usmeren na veštačku inteligenciju, donošenje odluka usled neizvesnosti kao i fazi logiku.

$$c_\omega(x) = (1 - x^\omega)^{\frac{1}{\omega}}, \qquad \omega\epsilon(0, \infty).$$

Slika 2.1.5 prikazuje različite oblike funkcije $c_\omega(x)$ u zavisnosti od promene parametra ω. Ovoga puta, za $\omega = 1$ dobija se standardni fazi komplement, tj. $c_1(x) = 1 - x$. Iz činjenice da je $c_1(1) = 0 \neq 1$ sledi da ova klasa ne sadrži involutivne fazi komplemente.



Slika 2.1.5 klasa Jagerovih fazi komplementa $c_\omega(x)$ za različite vrednosti $\omega\epsilon(0, \infty)$

Definicija 2.1.2 [13] (ekvilibrijum fazi komplementa)
Ako je $c(a)$ fazi komplement, njegov **ekvilibrijum** je vrednost $a \in [0, 1]$ za koju važi:

$$c(a) = a.$$

Teorema 2.1.1 [13]

Svi fazi komplementi imaju najviše jedan ekvilibrijum.

Dokaz:

Neka je c proizvoljan fazi komplement. Njegov ekvilibrijum a zadovoljava jednačinu

$$c(a) - a = 0, \qquad a \in [0, 1].$$

Neka su, dalje, a_1 i a_2 dva različita ekvilibrijuma i neka je $a_1 < a_2$. Tada važi,

$$c(a_1) - a_1 = c(a_2) - a_2.$$

Po definiciji je funkcija c monotono nerastuća (A2), pa važi da je $c(a_1) \geq c(a_2)$, za $a_1 < a_2$. Odnosno,

$$c(a_1) - a_1 > c(a_2) - a_2,$$

što je u kontradiciji sa potrebnom jednakošću, te se može zaključiti da je polazna pretpostavka o postojanju dva različita ekvilibrijuma netačna. ▪

Primer 2.1.3

Ekvilibrijum Sugeno fazi komplementa dobija se kao pozitivno rešenje jednačine $c_\lambda(e_{c_\lambda}) = e_{c_\lambda}$:

$$e_{c_\lambda} = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+\lambda}-1}{\lambda}, & \lambda \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & \lambda = 0 \end{cases}. \qquad \blacksquare$$

2.2 Trougaone norme i konorme

Trougane norme i konorme vode poreklo još iz radova Karla Mengera[24] (1942. godine), ali se formalna definicija koja se koristi i danas uvodi tek 1963. godine u delu *Asocijativne funkcije i apstraktne semigrupe*[25] naučnika Švajcera i Sklara, doduše ne u sklopu fazi skupova već za modeliranje rastojanja u probabilističkim metričkim prostorima. U teoriju fazi skupova uvode ih Hole u svom delu *Probabilistička uniformizacija fazi topologija*[26] i Alsina, Triljas i Valverde u delu *O nekim logičkim veznicima teorije fazi skupova*[27].

One prestavljaju uopštenje konjunkcije koja se javlja u klasičnoj logici na fazi logiku. Ime su dobile zbog činjenice da su, predstavljene na graficima, trougaonog oblika. Do danas su trougaoni operatori našli svoju primenu u mnogim oblastima kao što su teorija informacija, teorija igara, fazi logika, statistika i mnoge druge.

Trougaone norme i konorme ne pokrivaju sve načine na koji se fazi skupovi mogu spajati, ali objedinjuju sve operatore agregacije koji su asocijativni.

Klasa preseka fazi skupova se može definisati koristeći ideju upotrebljenu za formulaciju fazi komplementa. Dakle, presek fazi skupova je funkcija koja uz pomoć funkcija pripadnosti μ_A i μ_B konstruiše funkciju pripadnosti preseka dva fazi skupa, tj. $\mu_{A\cap B}$.

Definicija 2.2.1. [13] (trougaona norma)

Trougaona norma, ili kraće **t-norma**, je funkcija $T: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ koja za svako $a, b, c \in [0,1]$[28] zadovoljava sledeće aksiome:

A1	rubni uslovi	$T(a,1) = a$,
A2	monotonost	Ako je $b \leq c$ onda $T(a,b) \leq T(a,c)$
A3	komutativnost	$T(a,b) = T(b,a)$,
A4	asocijativnost	$T(a,T(b,c)) = T(T(a,b),c)$.

[24] K. Menger, *Statistical Metrics*
[25] B. Schweizer, A. Sklar, *Associative Functions and Abstract Semigroups*
[26] U. Höhle, *Fuzzy Sets and Systems*
[27] C. Alsina, E. Trillas, L. Valverde, *On Some Logical Connectives for Fuzzy Set Theory*
[28] $a, b, c \in [0,1]$ predstavljaju funkcije pripadnosti $\mu_A(x), \mu_B(x), \mu_C(x)$ fazi skupova A, B i C.

Kada neki od argumenata funkcije T dostiže punu pripadnost, intuitivno, stepen pripadnosti preseka postaje drugi argument, što obezbeđuje prva aksioma. Aksioma monotonosti obezbeđuje logičan zahtev da smanjenje stepena pripadnosti bilo kog skupa, ne sme da proizvede povećanje stepena pripadnosti u preseku. Komutativnost obezbeđuje simetričnost trougaone norme, dok asocijativnost daje mogućnost da se posmatra presek bilo kog broja skupova, nezavisno od njihovog redosleda.

Ovako definisana t-norma se može koristiti za modeliranje preseka fazi skupova. Za modeliranje preseka fazi skupova je prvobitno korišćena funkcija minimuma (poglavlje 1.4), a sada se presek fazi skupova može definisati koristeći bilo koju funkciju koja zadovoljava osobine iz definicije 2.2.1.

Teorema 2.2.1 [13] (o rubnim uslovima trougaonih normi)
Za trougaonu normu $T: [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ važi:

$$T(0, 0) = T(0, 1) = T(1, 0) = 0 \text{ i}$$

$$T(1,1) = 1.$$

Dokaz:

A1 $T(a, 1) = a, a = 0 \Rightarrow T(0, 1) = 0,$

A3 $T(0, 1) = T(1, 0) = 0 \Rightarrow T(0, 1) = 0,$

A2 $0 \leq 1, 1 \leq 1 \Rightarrow T(0, 0) \leq T(0, 1) = 0 \Rightarrow T(0, 0) = 0.$ ■

Analogno definiciji t-norme definiše se trougaona konorma kao operator koji opisuje fazi uniju:

Definicija 2.2.2 [13] (trougaona konorma)
Trougaona konorma, ili kraće **t-konorma**, je funkcija $S: [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ koja za svako $a, b, c \in [0, 1]$ zadovoljava sledeće aksiome:

A1	rubni uslovi	$S(a, 0) = a,$
A2	monotonost	Ako je $b \leq c$, onda $S(a, b) \leq S(a, c),$
A3	komutativnost	$S(a, b) = S(b, a),$
A4	asocijativnost	$S\big(a, S(b, c)\big) = S(S(a, b), c).$

Dakle, slično kao trougaona norma, unija fazi vrednosti se može definisati koristeći trougaonu konormu, tj: $\mu_{A \cup B}(x) = S\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big)$.

Poredeći definicije 2.2.1 i 2.2.2 može se zaključiti da se t-norme i t-konorme razlikuju samo po prvoj aksiomi, tj. razlikuje im se samo rubni uslov. Jasno, standardan presek fazi skupova definisan od strane Zadeha, odnosno funkcija minimuma je jedna trougaona norma, dok je standardna unija fazi skupova, tj. funkcija maksimuma trougaona konorma.

Teorema 2.2.2 [13] (o rubnim uslovima trougaonih konormi)
Za trougaonu konormu $S: [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ važi:

$$S(0, 0) = 0 \text{ i}$$

$$S(0, 1) = S(1, 0) = S(1, 1) = 1.$$

Dokaz:

Sledi direktno iz aksioma A1, A2 i A3, a analogno dokazu teoreme 2.2.1 ▪

Trougaone konorme mogu se posmatrati i kao dualan operator odgovarajuće trougaone norme, odnosno, za t-normu $t(a,b)$ i t-konormu $s(a,b)$ važe sledeće jednakosti:

$$S(a,b) = 1 - T(1-a, 1-b) \text{ i}$$
$$T(a,b) = 1 - S(1-a, 1-b).$$

Sledeće tvrđenje govori o načinu kako se od proizvoljne t-norme i proizvoljnog involutivnog fazi komplementa formira odgovarajuća t-konorma[29].

Teorema 2.2.3 [13] (o dualnosti trougaonih normi i konormi)

Neka je data trougaona norma $T(a,b)$ i involutivan fazi komplement $c(a)$:

$$T: [0,1] \times [0,1] \to [0,1],$$
$$c: [0,1] \to [0,1], \quad c\big(c(a)\big) = a.$$

Tada je funkcija $S: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$:

$$S(a,b) = c\left(T\big(c(a), c(b)\big)\right)$$

trougaona konorma. Analogno važi i tvrđenje da je $T(a,b) = c\left(S\big(c(a), c(b)\big)\right)$ trougaona norma.

Dokaz:

Potrebno je pokazati sve četiri aksiome iz definicije t-konorme:

(A1) $\boldsymbol{S(a,0)} = c\left(T\big(c(a), c(0)\big)\right)$

$= c\big((c(a), 1)\big)$ (A1 za fazi komplement)

$= c(c(a))$ (A1 za t-normu)

$= \boldsymbol{a}$ (involutivan fazi komplement)

(A2) $b \le d \Rightarrow c(b) \ge c(d)$ (A2 za fazi komplement)

$T(c(a), c(b)) \ge T(c(a), c(d))$ (A2 za t-normu)

$\boldsymbol{S(a,b)} = c\left(T\big(c(a), c(b)\big)\right) \le c\left(T\big(c(a), c(d)\big)\right) = \boldsymbol{S(a,d)}, \quad b \le d$

(A3) $\boldsymbol{S(a,b)} = c(T\big(c(a), c(b)\big))$

$= c(T\big(c(b), c(a)\big))$ (A3 za t-normu)

$= \boldsymbol{S(b,a)}$

(A4) $\boldsymbol{S\big(a, S(b,d)\big)} = c\left(T\left(c(a), c\big(S(b,d)\big)\right)\right)$

$= c(T\left(c(a), c\left(c\left(T\big(c(b), c(d)\big)\right)\right)\right))$

$= c\left(T\left(c(a), T\big(c(b), c(d)\big)\right)\right)$ (involutivan fazi komplement)

[29] Kako je $c(a) = 1 - a$ involutivan fazi komplement, tako su ove jednakosti samo specijalan slučaj teoreme 2.2.3.

$$= c(T\left(T\big(c(a), c(b)\big), c(d)\right)) \qquad \text{(A4 za t-normu)}$$

$$= c(T\left(c\left(c\left(T\big(c(a), c(b)\big)\right)\right), c(d)\right)) \qquad \text{(involutivan fazi komplement)}$$

$$= \boldsymbol{S}(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \boldsymbol{d})$$

Iz A1, A2, A3 i A4 sledi da je ovako definisano $S: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ trougaona konorma. ■

Teorema 2.2.4 [13] (o idempotentnosti)
$T_{min}(a,b) = \min\{a,b\}$, je jedina idempotentna t-norma, kao što je i $S_{max}(a,b) = \max\{a,b\}$ jedina idempotentna t-konorma.
Dokaz:
Neka je T idempotentna t-norma. Tada važi:

$$T(a,a) = a, \quad a \in [0,1].$$

Iz A2 (monotonost) za trougaone norme i teoreme 2.2.1 (teorema o rubnim uslovima t-normi) sledi da za svako $a, b \in [0,1], a \leq b$ važi:

$$a = T(a,a) \leq T(a,b) \leq T(a,1) = a.$$

Dakle, $T(a,b) = a = \min\{a,b\}$.

Za $a \geq b$ analogno se dobija:

$$b = T(b,b) \leq T(b,a) \leq T(b,1) = b,$$

odnosno $T(a,b) = b = \min\{a,b\}$.
Analogno se pokazuje tvrđenje za t-konormu. ■

Kao i kod fazi komplementa, tako se i od trougaonih normi i konormi zbog praktičnih razloga najčešće traži da zadovoljavaju još neke uslove, najčešće su to neprekidnost i striktna monotonost, tj. ($\forall\, a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0,1]$, $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$, $T(a_1,b_1) < T(a_2,b_2)$, odnosno $S(a_1,b_1) < S(a_2,b_2)$.

U literaturi postoji mnoštvo različitih predloga za t-norme i t-konorme. Ono što im je zajedničko je da su u krajnjim tačkama intervala (nuli i jedinici) sve potpuno iste. Razlozi zbog kojih postoji toliko različitih klasa t-normi i t-konormi leže u činjenici da norma koja daje sjajne rezultate u jednoj aplikaciji, može da dovede do potpuno beznačajnih rezultata u nekoj drugoj. Stoga formulisanje i izbor trougaonih normi i konormi zavisi od toga u kojoj oblasti i kako nameravaju da se primenjuju, kao i od onoga šta se od njih očekuje.

Četiri osnovne trougaone norme (konorme) su norma drastičnog preseka (unije), norma standardnog preseka (unije), algebarski proizvod (suma) i Lukašijevičeva trougaona norma (trougaona konorma) i prikazane su u tabeli 2.2.1.

četiri osnovne T-norme		T-konorme	
norma drastičnog preseka	$\boldsymbol{T_{dp}(a,b)} = \begin{cases} a, & b = 1 \\ b, & a = 1 \\ 0, & inače \end{cases}$	**norma drastične unije**	$\boldsymbol{S_{du}(a,b)} = \begin{cases} a, & b = 0 \\ b, & a = 0 \\ 1, & inače \end{cases}$
norma standardnog preseka	$T_{min}(a,b) = min\,\{a,b\}$	**norma standardne unije**	$S_{max}(a,b) = max\,\{a,b\}$

algebarski proizvod	$T_{ap}(a,b) = ab$	**algebarska suma**	$S_{as}(a,b) = a + b - ab$
Lukašijevičeva t-norma	$T_L(a,b) = max\{a + b - 1, 0\}$	**Lukašijevičeva t-konorma**	$S_L(a,b) = min\{1, a + b\}$

Tabela 2.2.1 Četiri najpoznatije trougaone norme (konorme)

Neke od standardnih klasa t-normi date su u Tabeli 2.2.2a, dok se u Tabeli 2.2.2b nalaze analogne klase t-konormi, sve su nabrojane po imenima naučnika koji su ih definisali:

klase t-normi	
Dombi	$T_D(a,b) = \dfrac{1}{1 + \left[(\frac{1}{a} - 1)^\lambda + (\frac{1}{b} - 1)^\lambda\right]^{\frac{1}{\lambda}}}, \quad \lambda \in (0, \infty)$
Duboa - Prade	$T_{DP}(a,b) = \dfrac{ab}{\max\{a, b, \alpha\}}, \quad \alpha \in [0,1]$
Jager	$T_Y(a,b) = 1 - \min\left\{1, [(1-a)^\omega + (1-b)^\omega]^{\frac{1}{\omega}}\right\}, \quad \omega \in (0, \infty)$
Frank	$T_F(a,b) = \log_s\left(1 + \dfrac{(s^a - 1)(s^b - 1)}{s - 1}\right), \quad s > 0, s \neq 1$
Hamaker	$T_H(a,b) = \dfrac{ab}{r + (1-r)(a + b - ab)}, \quad r > 0$
Švajcer i Sklar	$T_{SS}(a,b) = (\max\{a^p + b^p - 1, 0\})^{\frac{1}{p}}, \quad p \neq 0$
Veber	$T_W(a,b) = \max\left\{\dfrac{a + b + \lambda ab - 1}{1 + \lambda}, 0\right\}, \quad \lambda > -1$
Ju	$T_{YU}(a,b) = \max\{(1+\lambda)(a + b - 1) - \lambda ab, 0\}, \quad \lambda > -1$

Tabela 2.2.2a Neke klase t-normi

Klase odgovarajućih t-konormi	
Dombi	$S_D(a,b) = \dfrac{1}{1 + \left[(\frac{1}{a} - 1)^\lambda + (\frac{1}{b} - 1)^\lambda\right]^{-\frac{1}{\lambda}}}, \quad \lambda > 0$
Duboa - Prade	$S_{DP}(a,b) = 1 - \dfrac{(1-a)(1-b)}{\max\{(1-a), (1-b), \alpha\}}, \quad \alpha \in [0,1]$
Jager	$S_Y(a,b) = \min\left\{1, [a^\omega + b^\omega]^{\frac{1}{\omega}}\right\}, \quad \omega > 0$
Frank	$S_F(a,b) = 1 - \log_s\left(1 + \dfrac{(s^{1-a} - 1)(s^{1-b} - 1)}{s - 1}\right), \quad s > 0, s \neq 1$
Hamaker	$S_H(a,b) = \dfrac{a + b + ab(r-2)}{r + ab(1-r)}, \quad r > 0$
Švajcer i Sklar	$S_{SS}(a,b) = 1 - (\max\{(1-a)^p + (1-b)^p - 1, 0\})^{\frac{1}{p}}, \quad p \neq 0$
Veber	$S_W(a,b) = \min\left\{1, a + b - \dfrac{\lambda}{1-\lambda} ab\right\}, \quad \lambda > -1$
Ju	$S_{YU}(a,b) = \min\{1, a + b + \lambda ab, 0\}, \quad \lambda > -1$

Tabela 2.2.2b Neke klase t-konormi

Četiri elementarne t-norme i t-konorme iz tabele 2.2.1 mogu se na različite načine izvesti iz klasa prikazanih u tabelama 2.2.1 i 2.2.2, i to:

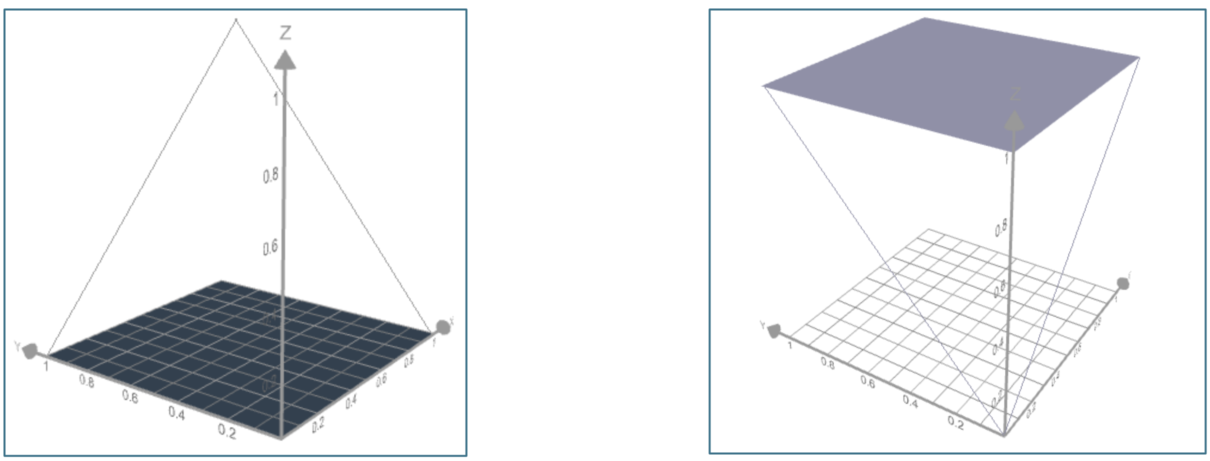
Norma drastičnog preseka, u oznaci $\boldsymbol{T_{dp}(a,b)}$, dobija se kao specijalan slučaj norme koju je formulisao Dombi 1982. godine, za $\lambda \to 0$. Takođe, ista norma može se dobiti i kada parametri iz Hamakerove ili Juove klase t-normi teže beskonačnosti, ili u slučaju kada parametar ω iz Jagerove klase konvergira ka nuli.

Analogno, norma drastične unije, $S_{du}(a,b)$, je specijalan slučaj klase Dombijevih t-konormi za $\lambda \to 0$. Norma drastičnog preseka i norma drastične unije predstavljene su na grafiku 2.2.6.

Norme standardnog preseka i unije (slika 2.2.7) formulisanih u prethodnom poglavlju, mogu se takođe dobiti na više načina, na primer kada je parametar α iz klase Duboa-Prade t-normi jednak nuli.

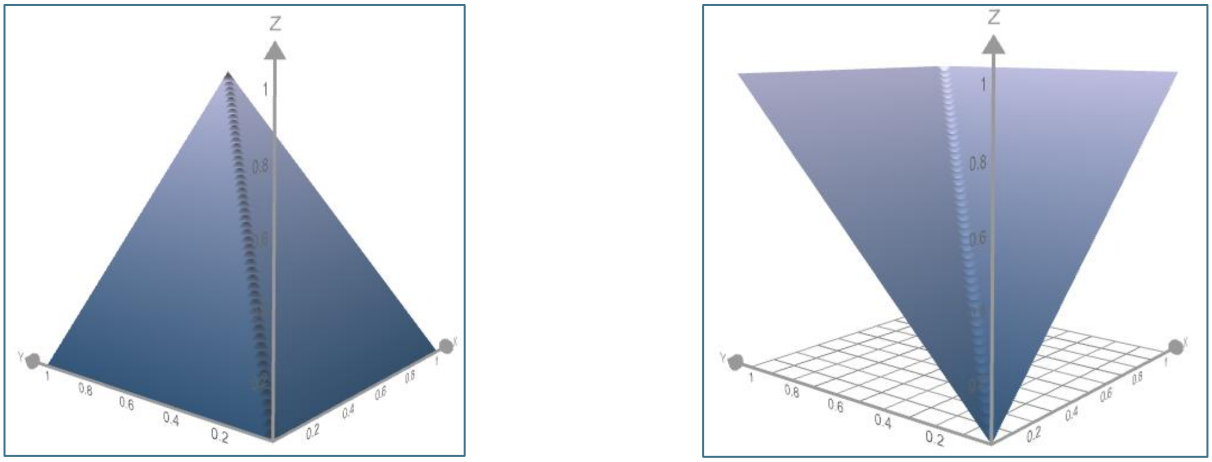
Algebarski proizvod može se dobiti ukoliko u Veberoj klasi t-normi parametar λ teži beskonačnosti, ili kada $p \to 0$ u klasi Švajcera i Sklara. Analogno se iz odgovarajućih klasa t-konormi dobija algebarska suma. Grafički su predstavljene na slici 2.2.8.

Norma poznata u literaturi kao Lukašijevičeva t-norma, dobija se kao specijalan slučaj Frankove klase (za $s \to \infty$) ili Jagerove (za $\omega = 1$). Analogno se može izvesti i Lukašijevičeva t-konorma[30], a obe su predstavljene na slici 2.2.9.

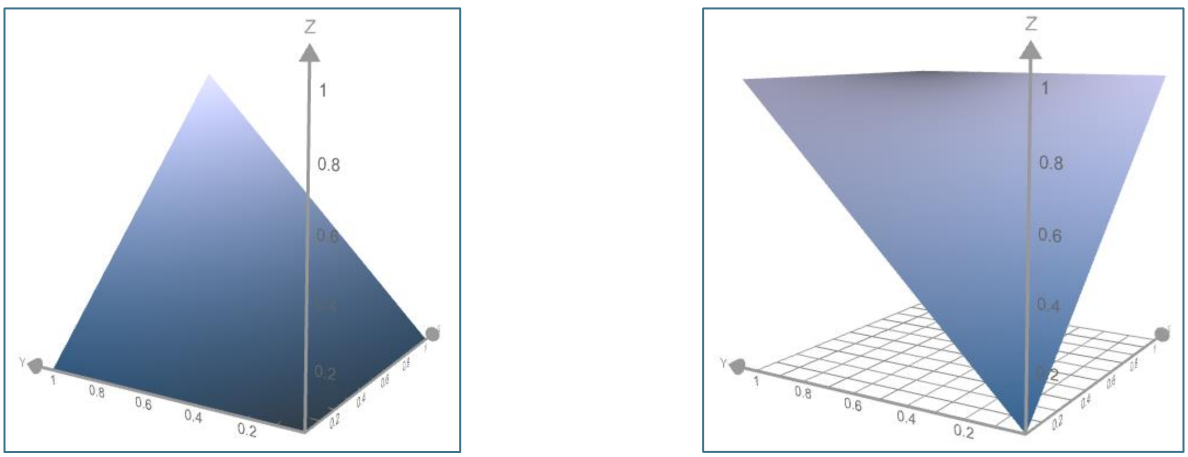


Slika 2.2.6 Grafički prikaz norme drastičnog preseka (levo) i drastične unije (desno)

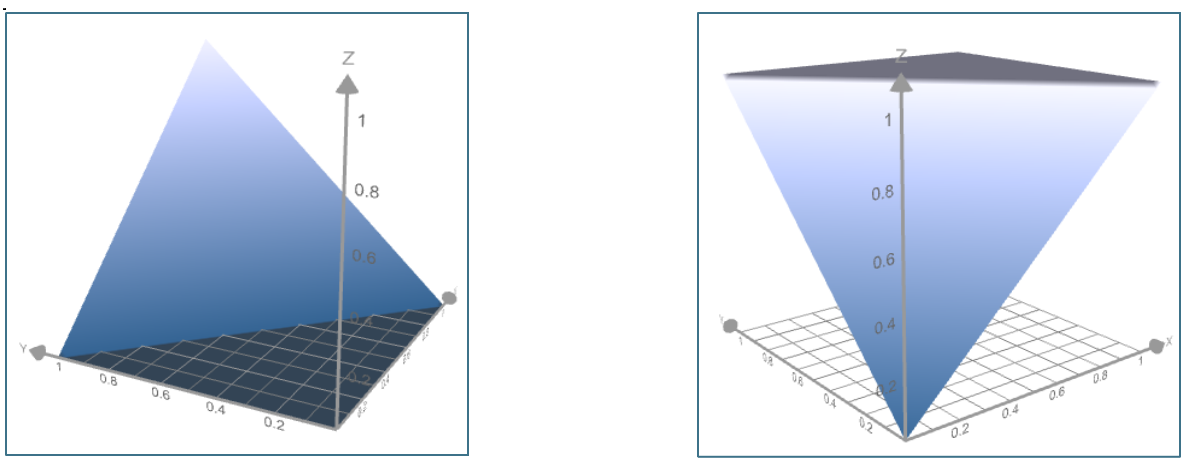
[30] Lukašijevičeva norma i konorma poznate su takođe i pod nazivima ograničena razlika, odnosno ograničen zbir.



Slika 2.2.7 Grafički prikaz t-norme standardnog preseka (levo) i t-konorme standardne unije (desno)



Slika 2.2.8 Grafički prikaz t-norme algebarskog proizvoda (levo) i t-konorme algebarske sume (desno)



Slika 2.2.9 Grafički prikaz Lukašijevičeve t-norme (levo) i t-konorme (desno)

Za četiri elementarne t-norme važi sledeći odnos:

$$T_{dp}(a,b) \leq T_L(a,b) \leq T_{ap}(a,b) \leq T_{min}(a,b),$$

dok za t-konorme, analogno, važi:

$$S_{\max}(a,b) \leq S_{ap}(a,b) \leq S_L(a,b) \leq S_{du}(a,b).$$

U narednoj teoremi pokazano je da je proizvoljna t-norma uvek veća od norme drastičnog, a manja od norme standardnog preseka, kao i da je proizvoljna t-konorma uvek manja od norme standardne, a veća od norme drastične unije. Ovaj odnos je veoma važan pre svega zato što ilustruje interval na kom trougaone norme i konorme deluju.

Teorema 2.2.5 [13]

Za svaku t-normu T: $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ važi:

$$T_{dp}(a,b) \leq T(a,b) \leq T_{min}(a,b).$$

Dokaz:

Iz A1 (rubni uslovi) i A2 (monotonost) za t-normu važi:

$$T(a,b) \leq T(a,1) = a,$$

a zbog A3 (komutativnost):

$$T(a,b) = T(b,a) \leq T(b,1) = b.$$

Dakle, kako važi $T(a,b) \leq a$ i $T(a,b) \leq b$, tako je

$$T(a,b) \leq \min\ \{a,b\} = T_{min}(a,b).$$

Dalje, zbog A1 važi:

$T(a,b) = a, \ \ b = 1$ i $T(a,b) = b, \ \ a = 1$, a kako je
$T(a,b) \leq \min\ \{a,b\}$, i $T(a,b) \in [0,1]$, jasno je da važi:

$$T(a,0) = T(0,b) = 0.$$

Dalje je zbog A2 zadovoljeno:

$T(a,b) \geq T(a,0) = T(0,b) = 0$, a kako je $T_{dp}(a,b)$ definisano na sledeći način:

$$T_{dp}(a,b) = \begin{cases} a, & b = 1 \\ b, & a = 1 \\ 0, & inače \end{cases}$$

važi da je $T_{dp}(a,b) \leq T(a,b)$. ∎

Teorema 2.2.6 [13]

Za svaku t-konormu S: $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ važi:

$$S_{max}(a,b) \leq S(a,b) \leq S_{du}(a,b).$$

Dokaz:

Sledi direktno iz aksioma A1, A2 i A3 za t-konorme, a analogno dokazu teoreme 2.2.5. ▪

2.3 Operatori usrednjavanja

Još jednu važnu klasu fazi operatora predstavljaju operatori usrednjavanja koji su veoma značajni u mnogim oblastima, prevashodno u donošenju odluka, kao i glasanju. Matematički gledano, njihova važnost ogleda se u činjenici da pokrivaju deo intervala koji nije objašnjen trougaonim normama i konormama. Drugačije rečeno, pružaju mogućnost da se niži stepen nekog kriterijuma kompenzuje višim stepenom nekog drugog, što sa presekom fazi skupova i unijom fazi skupova nije bilo moguće (presek skupova će imati visoke vrednosti samo ako ih svi skupovi budu imali, dok će unija imati visoke vrednosti ako ih bilo koji od skupova ima). Naime, sve trougaone norme daju rezultat koji je manji ili jednak $\min\{a, b\}$, dok sve trougaone konorme daju rezultat veći ili jednak $\max\{a, b\}$ (teoreme 2.2.5 i 2.2.6). Deo intervala koji se nalazi između $\min\{a, b\}$ i $\max\{a, b\}$ prostor je delovanja operatora agregacije koji se definišu na sledeći način:

Definicija 2.3.1 [13] (operator usrednjavanja)

Operator usrednjavanja je funkcija $H: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ koja za svako $a, b, c \in [0,1]$[31] zadovoljava sledeće aksiome:

- **A1** idempotentnost $H(a, a) = a,$
- **A2** monotonost $H(a, b) \le H(a, c), \quad \forall b, c \in [0,1], b \le c,$
- **A3** komutativnost $H(a, b) = H(b, a),$

Kao i kod t-normi i t-konormi, tako se i od operatora usrednjavanja često zahtevaju neke dodatne osobine, najčešće je to neprekidnost.

Može se pokazati da su svi operatori agregacije koji se nalaze između standardne operacije minimuma i maksimuma idempotentni, tj. da za svaki operator usrednjavanja važi odnos naznačen u narednoj teoremi (Slika 2.3.1 predstavlja intuitivan prikaz odnosa između t-normi, s-normi i operatora usrednjavanja).

Teorema 2.3.1 [13]

Za svaki operator usrednjavanja $H: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ važi[32]:

$$\min\{a_1, a_2\} \le H(a_1, a_2) \le \max\{a_1, a_2\}.$$

Dokaz:

Neka je:

$$a_{min} = \min\{a_1, a_2\} \text{ i}$$
$$a_{max} = \max\{a_1, a_2\}.$$

Jasno, $a_{min} \le a_{max}$.

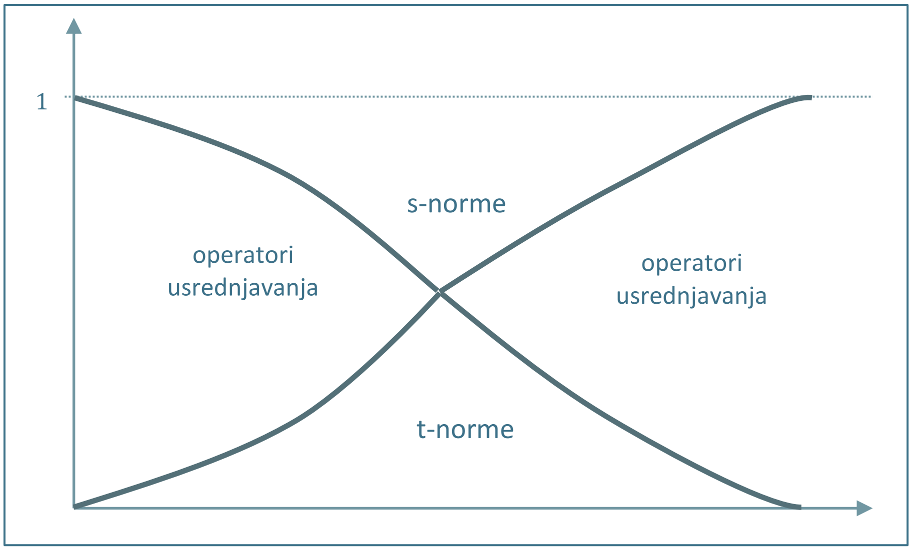
Tada iz aksioma A1 (idempotentnost) i A2 (monotonost) sledi:

$$\mathbf{min}\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\} = a_{min} = H(a_{min}, a_{min}) \le \boldsymbol{H(a_1, a_2)} \le H(a_{max}, a_{max}) = a_{max} = \mathbf{max}\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}. \quad ▪$$

---

[31] $a, b, c \in [0,1]$ predstavljaju vrednosti funkcije pripadnosti $\mu_A(x), \mu_B(x), \mu_C(x)$ fazi skupova A, B i C.

[32] Odsustvo stroge nejednakosti potiče iz činjenice da je standardna operacija minimuma jedina idempotentna t-norma, a standardna operacija maksimuma jedina idempotentna s-norma. (teorema 2.2.4)



Slika 2.3.1 Intuitivan prikaz svih operatora agregacije

Teorema 2.3.2 [13] (o rubnim uslovima operatora usrednjavanja)

Za operator usrednjavanja $H: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ važi:

$$H(0,0) = 0 \text{ i}$$

$$H(1,1) = 1.$$

Dokaz:

Sledi direktno iz aksiome A1, tj. idempotentnosti operatora usrednjavanja. ∎

U tabeli 2.3.1 pobrojane su neke osnovne klase operatora usrednjavanja.

klase operatora usrednjavanja	
generalizovana p-sredina	$H_p(a,b) = \sqrt[p]{\frac{a^p + b^p}{2}}, \quad p \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$
fazi veznik *i*	$H_\wedge(a,b) = \lambda \min\{a,b\} + \frac{(1-\lambda)(a+b)}{2}, \qquad \lambda \in [0,1]$
fazi veznik *ili*	$H_\vee(a,b) = \lambda \max\{a,b\} + \frac{(1-\lambda)(a+b)}{2}, \qquad \lambda \in [0,1]$
Hurvicov[33] operator usrednjavanja	$H_\lambda(a,b) = \lambda \max\{a,b\} + (1-\lambda) \min\{a,b\}, \quad \lambda \in [0,1]$
medijana	$H_{med} = \begin{cases} \max\{a,b\}, & a,b \in [0,\lambda] \\ \min\{a,b\}, & a,b \in [\lambda,0] \\ \lambda, & inače \end{cases}$
kvaziaritmetička sredina	$H_{ks}(a,b) = f^{-1}\big(\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)\big),$ $f - \text{neprekidna, strogo monotona}$

Tabela 2.3.1 Neke klase operatora usrednjavanja

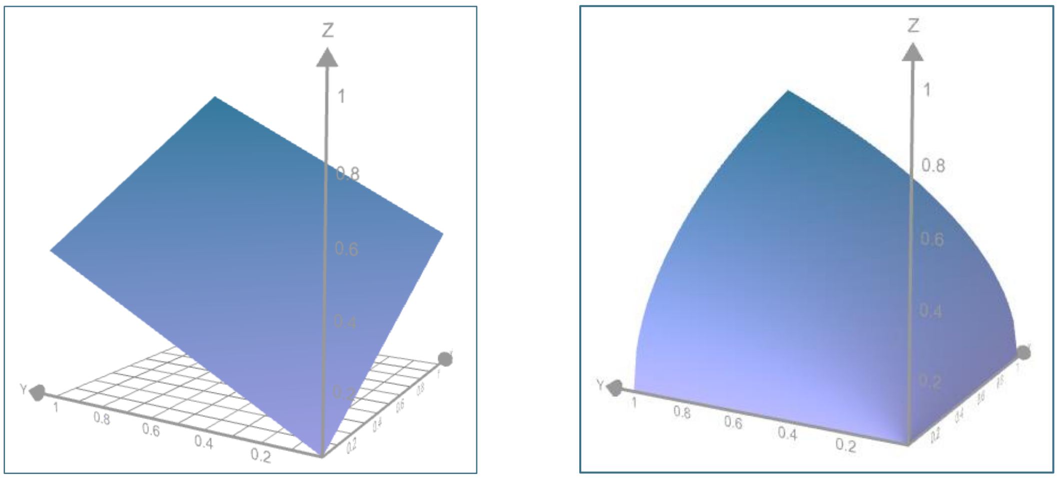
[33] Adolf Hurwitz (1859 - 1919) bio je nemački matematičar. Bavio se algebrom, analizom, geometrijom i teorijom brojeva.

Napomena 2.3.1

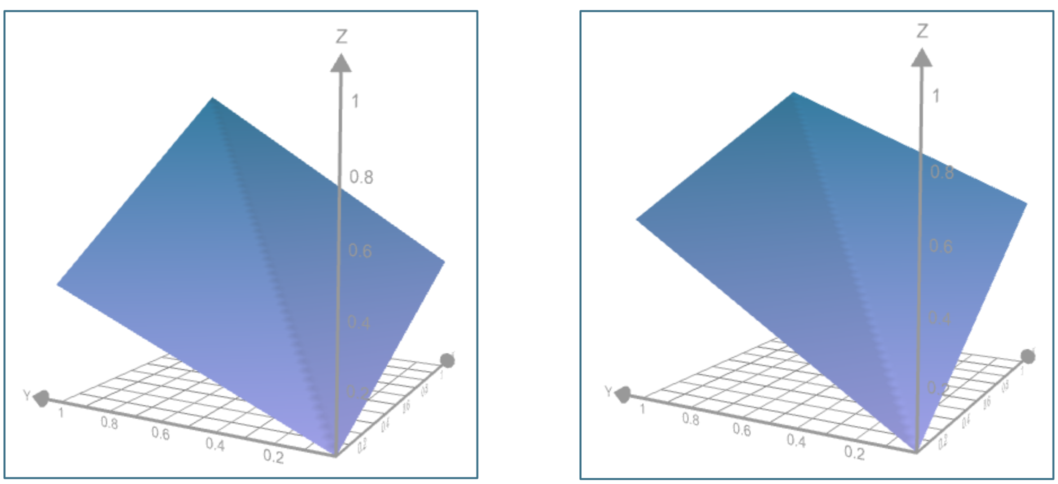
Generalizovana sredina: za $p \to -\infty$ je to minimum, za $p = -1$ harmonijska sredina, a za $p \to 0$ geometrijska, za $p = 1$ aritmetička, a za $p \to \infty$ dobija se maksimum, te se može zaključiti da klasa generalizovanih p-sredina pokriva ceo interval $[\max\{a, b\}, \min\{a, b\}]$.

Napomena 2.3.2

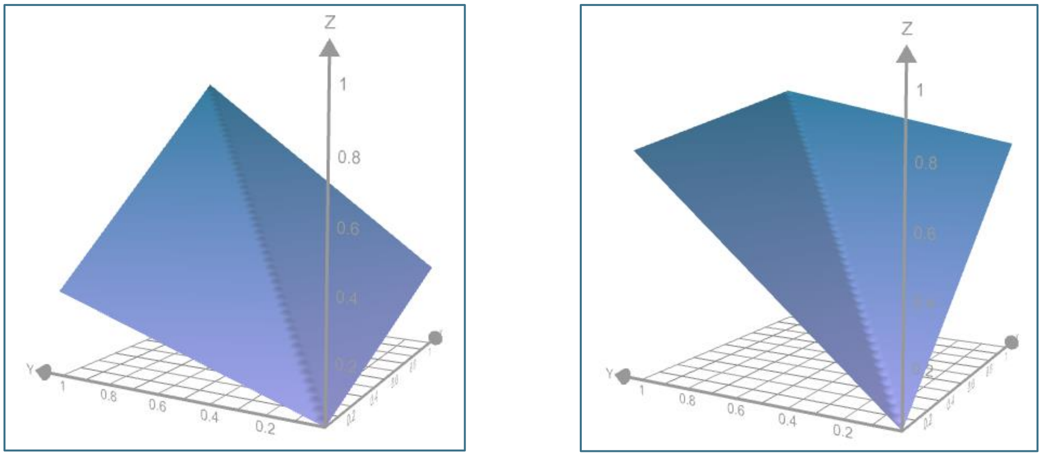
Može se pokazati da je medijana jedini asocijativan operator usrednjavanja.



Slika 2.3.2 Grafički prikaz aritmetičke (levo) i geometrijske sredine (desno)



Slika 2.3.3 Grafički prikaz fazi veznika ∧ (levo) i fazi veznika ∨ (desno) za $\lambda = 0.2$



Slika 2.3.4 Grafički prikaz Hurvicovog operatora za $\lambda = 0.3$ (levo) i $\lambda = 0.8$ (desno)

Specijalna klasa operatora usrednjavanja je klasa OWA operatora (eng. *Ordered Weighted Averaging operators*) koju je uveo Jager 1988. godine u svom delu *O uređenim ponderisanim operatorima usrednjavanja u višekriterijumskom odlučivanju*[34]. Klasa OWA operatora, iako relativno nov pojam, našla je široku primenu, pre svega u modeliranju lingvističkih promenljivih. Njihova važnost ogleda se naročito u tome što predstavljaju klasu operatora koji pokrivaju ceo interval $[\min\{a,b\}, \max\{a,b\}]$.

Definicija 2.3.2 [25] (OWA operatori)
Neka je $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ vektor pondera i neka važi:

$$\forall i \in \mathbb{N}, \omega_i \in [0,1] \text{ i}$$
$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1.$$

Tada se **OWA operator** definiše kao operator usrednjavanja za koji važi:

$$H_{OWA}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i b_i$$

gde je vektor $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ permutacija vektora $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ takva da važi $b_i \leq b_j, \forall i < j$.
Lako je primetiti da se za specijalne slučajeve vektora pondera ω dobijaju neki od osnovnih operatora usrednjavanja: za $\omega = (0, \dots, 0, 1)$ dobija se minimum, za $\omega = (1, 0, \dots, 0)$ maksimum, za $\omega = (1/n, 1/n, \dots, 1/n)$ aritmetička sredina, dok se za $\omega = (\alpha, 0, 0, \dots, 0, 1-\alpha)$ dobija Hurvicov OWA operator.

[34] Yager, 1988, *On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in multicriteria decision making*

3 Operacije sa fazi brojevima

3.1 Fazi broj

Definicija fazi brojeva intuitivno potiče od fazi skupova koji su oblika $A = \{svi\ brojevi\ oko\ a\}$. Ovakvi skupovi sreću se veoma često u većini aplikacija koje koriste fazi skupove, a po svojoj definiciji uvek zadovoljavaju određene osobine. Jasno, ti skupovi su uvek normalizovani, jer dostižu punu pripadnost za element a. Ostali zahtevi pobrojani su u formalnoj definiciji:

Definicija 3.1.1 [13] (Fazi broj)

Fazi broj je fazi skup A definisan na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ koji je:

- normalizovan visina $h(A)$ je jednaka 1,
- ograničen jezgro A_{0+} je ograničen skup i
- konveksan $\alpha -$ presek A_α je zatvoren interval.

Ograničenost jezgra i konveksnost se zahtevaju da bi se na fazi brojeve mogle uvesti aritmetičke operacije po uzoru na standardne operacije.

Primer 3.1.1

Na slici 3.1.1 prikazana je evolucija realnog broja 2017 kroz njegovu karakterističnu funkciju. Na prvom grafiku je to tačka 2017, tj. funkcija $\mu_A(x)$

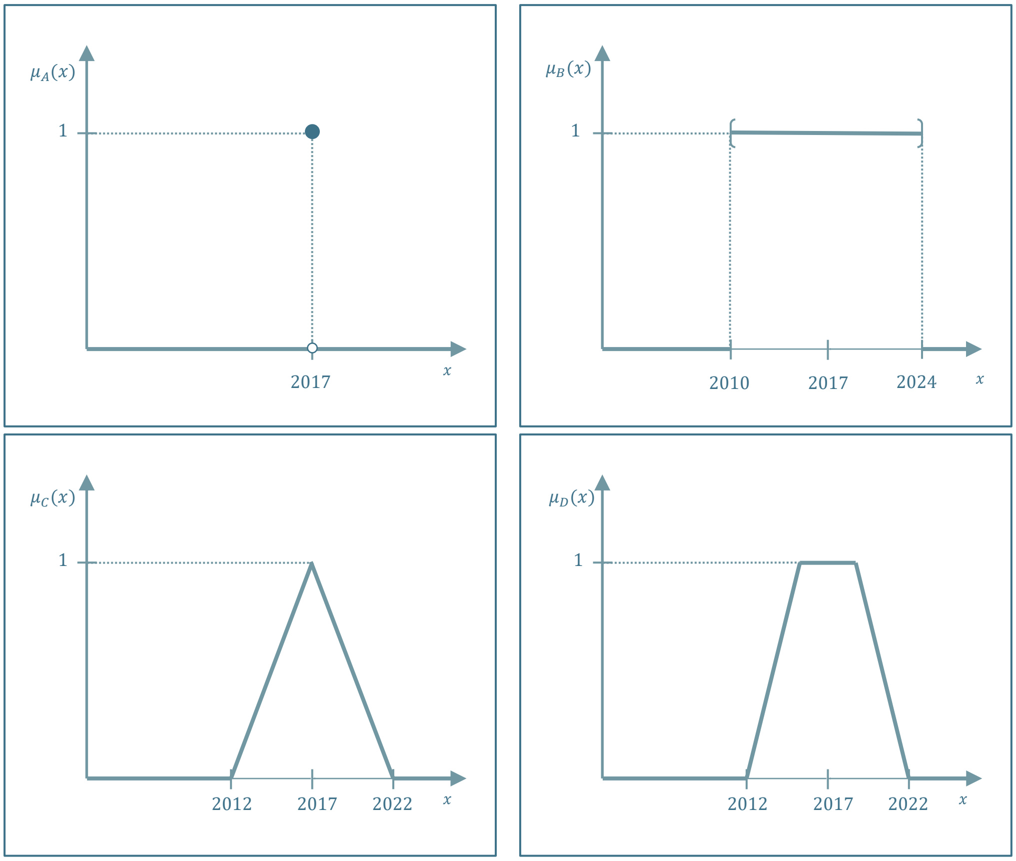
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x = 2017 \\ 0, & inače \end{cases}.$$

Na drugom grafiku je predstavljen interval, tj. funkcija $\mu_B(x)$ koja je jednaka 1 na intervalu $2010 \leq x \leq 2024$, a inače 0.

Na poslednja dva grafika prikazani su skupovi

$$C = \{svi\ realni\ brojevi\ oko\ broja\ 2017\} \text{ i}$$
$$D = \{svi\ realni\ brojevi\ blizu\ broja\ 2017\}.$$

Skup C je primer fazi broja. To je normalizovan, konveksan fazi skup, čije je jezgro ograničeno na $[2012, 2022]$. Skup D se naziva fazi interval, koji je sam po sebi takođe fazi broj, jedina razlika je što ne postoji samo jedan element koji dostiže punu pripadnost, već više njih[35]. ⌗



Slika 3.1.1 Grafički prikaz broja 2017*, kao realan broj, realan interval, fazi broj i fazi interval*

Dva najčešća oblika fazi brojeva su trougaoni i trapezoidni fazi broj (kao u primeru 3.1.1). Međutim, postoje i drugi oblici fazi brojeva koji su u nekim aplikacijama mnogo korisniji, to je, recimo, fazi broj čija je funkcija pripadnosti u obliku zvona[36]. Takođe, funkcije pripadnosti fazi brojeva ne moraju biti simetrične, naprotiv, to mogu biti i opadajuće ili rastuće funkcije koje često služe za opisivanje skupova oblika $A = \{brojevi\ veći\ (manji)\ od\ x\}$.

Sledeća teorema daje interpretaciju fazi broja uz pomoć dve funkcije koje se nalaze levo (*left* - *L*), odnosno desno (*right* - *R*) od elementa (ili elemenata) koji imaju punu pripadnost. Drugim rečima, daje mogućnost da se, uz specijalne uslove, funkcija pripadnosti nekog fazi broja definiše po delovima. Fazi brojevi definisani na ovaj način zovu se LR fazi brojevi.

Teorema 3.1.1 [13] (LR fazi brojevi)
Fazi skup A je fazi broj ako i samo ako postoji zatvoren interval $[a, b] \neq \emptyset$ takav da važi:

---

[35] U zavisnosti od autora, termin fazi interval se posebno obrađuje, ili se smatra posebnim slučajem fazi brojeva. S obzirom na to da je razlika između ova dva pojma veoma mala, u radu će se posmatrati zajedno.

[36] Funkcija koja ima oblik zvona zavisi od tri parametra a, b i c i najčešće je zadata na sledeći način: $f(x) = \frac{1}{1+\left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$, ali takođe se često upotrebljava i Gausovo zvono: $f(x) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}$.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b] \\ l(x), & x \in (-\infty, a) \\ r(x), & x \in (b, \infty) \end{cases}$$

gde su funkcije $l(x)$ i $r(x)$ definisane na sledeći način:

$l\colon (-\infty, a) \to [0,1]$ monotono rastuća, neprekidna sa desne strane i
$\exists a_1$ tako da je $l(x) = 0,\, x \in (-\infty, a_1)$ i

$r\colon (b, \infty) \to [0,1]$, monotono opadajuća, neprekidna sa leve strane i
$\exists b_1$ tako da je $r(x) = 0, x \in (b_1, \infty)$.

Dokaz:

$\Rightarrow$

Neka je skup A fazi broj. Tada je (po definiciji 3.1.1) $\alpha -$ presek A_α zatvoren za svako $\alpha \in (0,1]$ i A_1 je neprazan zatvoren interval jer je fazi skup A normalizovan. Dakle, postoje neki realni brojevi a i $b, a \leq b$ takvi da je $A^1 = [a,b]$, odnosno $\mu_A(x) = 1$ za $x \in [a,b]$ i $\mu_A(x) < 1$ za $x \notin [a,b]$.

$l(x)$ monotono rastuća
Neka je $l(x) = \mu_A(x), x \in (-\infty, a)$, tj. važi $0 \leq l(x) < 1$ jer $0 \leq \mu_A(x) < 1$.
Kako je A konveksan i važi $\mu_A(a) = 1$

$$\mu_A(y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(a)\} = \mu_A(x), \text{ za } x \leq y < a.$$

Dakle, za $x \leq y$, $l(x) \leq l(y)$, pa je $l(x)$ monotono rastuća.

$l(x)$ neprekidna sa desne strane
Neka važi suprotno, tj. neka za neko $x_0 \in (-\infty, a)$ postoji niz $\{x_n\}$ takav da je $x_n \geq x_0$ za svako n i važi:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Tada važi:

$$\lim_{n\to\infty} l(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_A(x_n) = \alpha > l(x_0) = \mu_A(x_0).$$

$\forall n, x_n \in A_\alpha$, pa i $x_0 \in A_\alpha$. Dakle, $l(x_0) = \mu_A(x_0) \geq \alpha$, što je kontradikcija, pa se može zaključiti da je početna pretpostavka pogrešna, odnosno da je $l(x)$ neprekidna sa desne strane.

Analogno se dokazuje da je funkcija $r(x)$ monotono opadajuća i neprekidna sa leve strane.
Kako je A fazi broj, nosač A_{0+} je ograničen skup, odnosno postoje $a_1, b_1 \in \mathbb{R}/\{-\infty, \infty\}$ takvi da je $\mu_A(x) = 0$ za $x \in (-\infty, a_1) \cup (b_1, \infty)$.

$\Leftarrow$

Neka je fazi skup A definisan prateći uslove teoreme.
Ovakav fazi skup je očigledno normalizovan, a njegov nosač, A_{0+} je ograničen jer je $A_{0+} \subseteq [a_1, b_1]$.
Ostaje samo da se pokaže da je svaki α-presek zatvoren interval. Neka važi

$$x_\alpha = \inf\{x | l(x) \geq \alpha, x < a\} \text{ i}$$
$$y_\alpha = \sup\{x | r(x) \geq \alpha, x > b\}.$$

Treba pokazati da je $A_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$, za svako $\alpha \in [0,1]$.
Za svako $x_0 \in A_\alpha$, ukoliko je $\boldsymbol{x_0} < \boldsymbol{a}$, onda je $l(x_0) = \mu_A(x_0) \geq \alpha$. To znači da $x_0 \in \{x | l(x) \geq \alpha, x < a\}$, odnosno, $x_0 \geq \inf\{x | l(x) \geq \alpha, x < a\} = x_\alpha$.

Za $\boldsymbol{x_0} > \boldsymbol{b}$, $r(x_0) = \mu_A(x_0) \geq \alpha$, odnosno $x_0 \in \sup\{x|r(x) \geq \alpha, x > b\}$, pa važi
$x_0 \geq \sup\{x|r(x) \geq \alpha, x > b\} = y_\alpha$.

Jasno je da važi $x_\alpha \leq a$ i $y_\alpha \geq b$, odnosno $[a, b] \subseteq [x_\alpha, y_\alpha]$. Pošto $x_0 \in [x_\alpha, y_\alpha]$, onda je $A_\alpha \subseteq [x_\alpha, y_\alpha]$.

Još treba pokazati da se x_α i y_α nalaze u A_α.
Po definiciji x_α mora postojati niz $\{x_n\}$ takav da

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_\alpha, \qquad \forall n, x_n \geq x_\alpha$$

Kako je funkcija $l(x)$ neprekidna sa desne strane, važi:

$$l(x_\alpha) = l\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} l(x_n) \geq \alpha.$$

Pa $x_\alpha \in A_\alpha$ što je i trebalo pokazati.
Da $y_\alpha \in A_\alpha$ pokazuje se analogno. ∎

Primer 3.1.2

Fazi broj koji služi za predstavljanje koncepta *visoka, ali ne veoma visoka žena,* može se, koristeći ideje iz teoreme 3.1.1, zapisati na sledeći način:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in [175, 180] \\ l(x), & x \in (-\infty, 175) \\ r(x), & x \in (180, \infty) \end{cases}$$

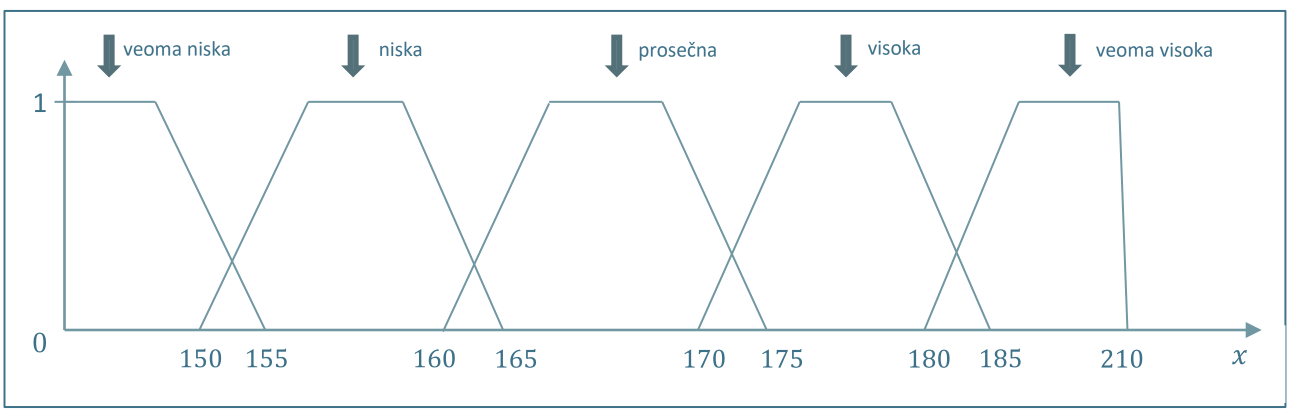
gde su:

$$l(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 170) \\ 0.2(x - 175) + 1, & x \in [170, 175] \end{cases}$$

$$r(x) = \begin{cases} 0, & x \in (185, \infty) \\ -0.2(x - 185), & x \in [180, 185] \end{cases}$$

Jasno, parametri iz teoreme su sledeći:

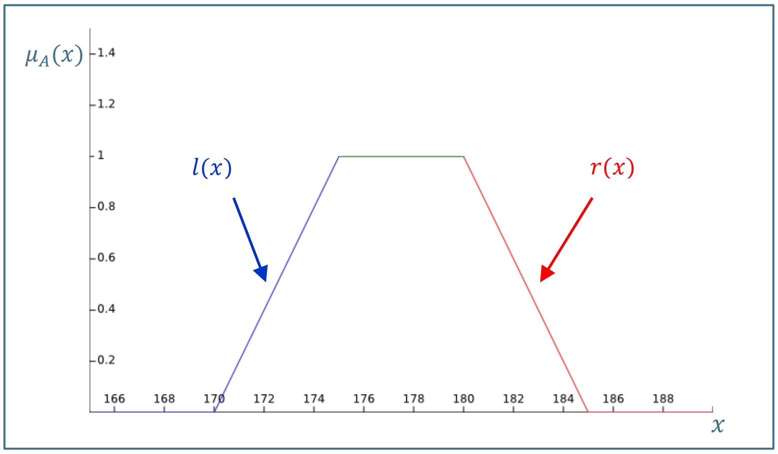
$$a_1 = 170, a = 175, b = 180, b_1 = 185.$$



Slika 3.1.2 Fazi skupovi koji opisuju visinu

Na ovaj način je funkcija pripadnosti traženog fazi skupa definisana *po delovima*, tj. preko svoje leve funkcije pripadnosti, $l(x)$, koja je rastuća, neprekidna i jednaka nuli na intervalu $x \in (-\infty, 170)$ i svoje desne funkcije pripadnosti, $r(x)$, za koju važi da je opadajuća, neprekidna i jednaka nuli na intervalu

$x \in (185, \infty)$. Leva i desna strana spojene su intervalom $[175, 180]$ na kojem je vrednost funkcije pripadnosti jednaka 1, kao što traži postavka teoreme. Na grafiku 3.1.3 može se uočiti da ovako definisan fazi broj (fazi interval) ima trapezoidan oblik i intuitivno potpuno odgovara predstavi o fazi skupovima kao skupovima koji imaju nejasno definisane granice. ⌑



Slika 3.1.3 Trapezoidan fazi broj definisan po delovima

Postoje i formule uz pomoć kojih se na jednostavan način može doći do trougaonih, odnosno trapezoidnih fazi brojeva, ukoliko su poznate željene granice intervala:
Funkcija pripadnosti **trougaonog fazi broja** definiše se na $[c, d]$ za $c \leq a \leq d$, gde je $[c, d]$ jezgro fazi broja, a a je vrednost u kojoj funkcija pripadnosti dostiže 1.

$$\mu_{\triangle}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-c}{a-c}, & c \leq x \leq a \\ \dfrac{x-d}{a-d}, & a < x \leq d \end{cases}$$

Analogno, na $[c, d]$ se definiše funkcija pripadnosti **trapezoidnog fazi broja** za $c \leq a \leq b \leq d$, gde je $[c, d]$ jezgro fazi broja, a $[a, b]$ α – presek za $\alpha = 1$:

$$\mu_{\frown}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-c}{b-c}, & c \leq x \leq a \\ 1, & a < x < b \\ \dfrac{x-d}{b-d}, & b \leq x \leq d \end{cases}$$

3.2 Princip proširenja

Da bi se fazi skupovi mogli koristiti u inteligentnim sistemima današnjice, neophodno ih je modifikovati tako da se sa njihovim elementima mogu vršiti, za početak, osnovne aritmetičke operacije: sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje. Ovo se postiže uvođenjem principa proširenja koji predstavlja jedan od najvažnijih koncepata kada su fazi skupovi u pitanju. Intuitivno, ovaj princip podrazumeva prevođenje funkcije koja preslikava jedan običan skup u drugi, u funkciju koja preslikava jedan fazi skup u drugi fazi skup.

Neka se u fazi skupu A nalaze svi brojevi blizu a, a u fazi skupu B svi brojevi blizu b. Postavlja se pitanje šta bi bilo sadržano u skupu $C = A + B$. Intuitivno, skup dobijen sabiranjem dva fazi skupa trebalo bi i sam da bude fazi skup. Osim toga, može se pretpostaviti da se sabiranjem broja blizu a i broja blizu b dobija neki broj koji je blizu njihovog zbira, tj. blizu broja $a + b$. Ono što ostaje nepoznato jeste koja je zapravo funkcija pripadnosti koja određuje skup C, definisan kao zbir fazi skupova A i B kao i kako se ona može formalno zapisati uz pomoć funkcija pripadnosti skupova A i B.

Princip proširenja formulisan od strane Zadeha je još uvek u upotrebi. Osnovna ideja je objasniti kako izgleda slika nekog fazi podskupa A, univerzuma X, kada je na njega primenjena funkcija $f: X \to Y$. Posmatrana slika fazi podskupa A bi, po prirodi, trebalo da se nalazi u nekom fazi podskupu skupa Y.

Definicija 3.2.1 [4] (Princip proširenja)
Neka je $f: X \to Y$, funkcija koja slika običan skup X u običan skup Y. Neka je dalje A fazi podskup skupa X definisan preko svoje funkcije pripadnosti $\mu_A(x)$.
Tada se $f(A)$ kao fazi podskup skupa Y definiše na sledeći način:

$$f(A)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x), & f^{-1}(y) \neq 0 \\ 0, & inače \end{cases}$$

gde je $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$.

Primer 3.2.1
Neka je funkcija f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisana kao $f(x) = e^x$, i fazi interval (trapezoidni fazi broj) A dat preko svoje funkcije pripadnosti:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Tada se koristeći pravila iz definicje 3.2.1 može lako dobiti $f(A)(y)$ na sledeći način:

$$f(A)(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ \log y, & 1 \leq y < e \\ 2 - \log y, & e \leq y \leq e^2 \\ 0, & y > e^2 \end{cases}$$

⌑

Kada je jednom uveden princip proširenja, otvorile su se brojne mogućnosti za korišćenje fazi brojeva. Prvi korak je utvrđivanje pravila po osnovu kojih se osnovne operacije sabiranja, množenja, oduzimanja i deljenja proširuju sa klasičnih na fazi brojeve. Prateći formulaciju principa proširenja, definiše se operacija $*$ među fazi brojevima na sledeći način:

$$(A * B)(z) = \sup_{z = x * y} min[A(x), B(y)], \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

gde su A i B proizvoljni fazi brojevi, a rezultat je fazi skup $A * B$. Može se pokazati da je ovako definisan fazi skup $A * B$ zapravo takođe fazi broj.

Osnovne operacije se po uzoru na proizvoljnu operaciju $*$ definišu na sledeći način:

$$(A+B)(z) = \sup_{z=x+y} min[A(x), B(y)], \quad \forall z \in \mathbb{R},$$

$$(A \cdot B)(z) = \sup_{z=x \cdot y} min[A(x), B(y)], \quad \forall z \in \mathbb{R},$$

$$(A-B)(z) = \sup_{z=x-y} min[A(x), B(y)], \quad \forall z \in \mathbb{R},$$

$$(A/B)(z) = \sup_{z=x/y} min[A(x), B(y)], \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Napomena 3.2.1

Operacija $*$ među fazi brojevima se može uvesti i korišćenjem proizvoljne trougaone norme, na sledeći način:

$$(A*B)(z) = \sup_{z=x*y} T[A(x), B(y)], \qquad \forall z \in \mathbb{R}.$$

3.3 Aritmetičke operacije uz pomoć α – preseka

Osim koristeći Zadehov princip proširenja definisanog u prethodnom poglavlju, aritmetičke operacije među fazi brojevima mogu se uvesti i korišćenjem α – preseka, pojma definisanog u definiciji 1.3.1 prvog poglavlja. Pod pojmom α – preseka podrazumeva se skup koji sadrži sve elemente čija pripadnost nije manja od α. Tada se fazi aritmetika bazira na dva osnovna svojstva –

1. svaki fazi skup (pa time i svaki fazi broj) je jedinstveno određen svojim α – presecima (Teorema 1.4.1)
2. α – preseci svakog fazi broja su zatvoreni intervali za svako $\alpha \in (0, 1]$.

Ova dva svojstva pružaju mogućnost da se definišu aritmetičke operacije sa fazi brojevima preko aritmetičkih operacija na njihovim α – presecima.

Definicija 3.3.1 [13]

Neka su A i B fazi brojevi, a $*$ neka od osnovnih aritmetičkih operacija. Tada se fazi skup $A*B$ može zapisati preko svog α – preseka, i to na sledeći način:

$$(A*B)_{\alpha} = A_{\alpha} * B_{\alpha}, \quad \alpha \in (0,1].$$

Jasno, za slučaj da je operacija deljenje, zahteva se da $0 \notin B_{\alpha}, \forall \alpha \in (0,1]$.
Koristeći ideju teoreme 1.4.1, $A*B$ se može posmatrati kao

$$A*B = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (A*B)^{\alpha}.$$

Kako je $(A*B)^{\alpha}$ zatvoren interval za svako $\alpha \in (0,1]$, a A i B su fazi brojevi, i $A*B$ je fazi broj.

Napomena 3.2.1

Uvođenje aritmetičkih operacija među fazi brojeve koristeći α – presek poklapa se upravo sa Zadehovim principom proširenja opisanim u definiciji 3.2.1, tj. kada se koristi T-norma standardnog preseka, odnosno minimum.

4 Kreditni skoring

4.1 Kratak osvrt na istoriju kredita i nastanak kreditnog skoringa

Kreditiranje vuče svoje korene još iz vremena pre nove ere, a sa pravom se može pretpostaviti da je neka vrsta pozajmice nastala maltene onog trenutka kada i prvo svesno ljudsko biće. Najstariji dokument koji svedoči o postojanju koncepta pozajmljivanja i primitivnog oblika kamatne stope pronađen je u Vavilonu i datira još iz 2000. godine pre nove ere. Na toj je kamenoj ploči napisano da je *Mas-Schamach*, sin *Adadrimeni*, pozajmio od sveštenice sunca *Amat – Schamach* dva šekela[37] srebra. Osim toga, na ploči je zabeležena i njegova obaveza da sveštenici plaća kamatu, a nakon žetve i vrati ukupan iznos pozajmljenog novca. Ove i slične primitivne vrste pozajmica uglavnom su se odvijale između poljoprivrednika kojima je bio neophodan novac u vreme setve i pripadnika viših slojeva društva, u to vreme najčešće sveštenika ili vladara. Od tog trenutka pa nadalje kroz istoriju, pozajmice su se razvijale i menjale svoj oblik i pravila funkcionisanja, ali su uvek postojale. Par vekova kasnije je u Mesopotamiji u sklopu Hamurabijevog zakonika propisano da svaka vrsta pozajmice mora biti dokumentovana od strane nekog državnog službenika, kao i da je nelegalno da poverilac traži pozajmicu nazad pre nego što je žetva završena. Osim toga, postojale su i neke olakšice za poljoprivrednike, pa su tako, na primer, oni bili oslobođeni plaćanja kamate na pozajmice ukoliko je godina bila sušna. Lako je uočljivo da, iako primitivan, tadašnji način funkcionisanja se ne razlikuje mnogo u odnosu na današnja pravila, makar kada je osnovna koncepcija u pitanju. I dalje traži pozajmicu onaj kome je u datom trenutku novac neophodan da bi prebrodio neki nedostatak u svojim novčanim tokovima, i dalje je dužan da tu privilegiju isplati na neki način, odnosno, dužan je da plati određeni iznos kamate. Ono što se u međuvremenu promenilo je visina kamatne stope, na sreću dužnika, jer su u drevnom Vavilonu kamatne stope iznosile čak i do 33%. Pozajmice su se dalje razvijale na svim krajevima sveta, doduše u različitim oblicima, pod različitim okolnostima i pravilima funkcionisanja.

[37] Reč šekel potiče od akadske reči she, što znači ječam. U početku su ga zapadni semitski narodi koristili kao meru za težinu, da bi kasnije počeo da se koristi i kao novčana jedinica.

Za vreme Krstaških ratova počele su da se razvijaju zalogodavnice, na početku humanitarnog karaktera, ali su trgovci ubrzo uočili svoju priliku. Zalogodavnice se i dan danas često sreću i i dalje funkcionišu po potpuno istom principu – uzimajući u zalog gotovo bilo šta kao neku vrstu osiguranja za slučaj da im novac ne bude isplaćen. Takođe, već u vreme grčkih i rimskih imperija počele su da se razvijaju ustanove koje se s punim pravom mogu nazvati bankama. U to vreme su usluge banaka bile rezervisane samo za najviše slojeve društva, ali je princip i dalje bio isti, osim što se opus bankarskih usluga proširio, pa uporedo nastaju i prvi pravi potrošački krediti.

Prava revolucija dešava se u prvoj polovini dvadesetog veka, tačnije sa pojavom motornih vozila. Automobili su bili veoma skupi, retko je ko mogao da ih priušti, a takođe su bili pokretni, te nisu mogli biti uzeti kao depozit ili obezbeđenje (kao što je to slučaj sa zlatom, nekretninama ili zemljom). Osim pojave automobila, važan uticaj na razvoj potrošačkih kredita imala je i pojava kataloške prodaje koja se paralelno razvijala po manjim mestima u Engleskoj. Naime, poraslo je interesovanje za određene proizvode koje nisu mogli da nabave po manjim mestima, pa su ih ljudi kupovali *na kredit* preko kataloga, od trgovaca koji su im zatim tu robu donosili iz udaljenih gradova, najčešće Londona. Uporedo su i banke konačno promenile svoje politike kreditiranja samo velikih preduzeća i važnih klijenata i počele su da oglašavaju svoje proizvode namenjene stanovništvu. Sve ovo dovelo je do toga da su potrošački krediti u drugoj polovini dvadesetog veka imali jednu od najvećih stopa rasta među svim granama poslovanja.

Odluka koju su svaka banka i svaki putujući trgovac koji nudi robu preko kataloga morali da donesu bila je: *Da li pozajmiti novac (doneti robu) određenom klijentu?* – i to je zapravo obeležilo početak kreditnog skoringa.

Iako istorija kreditiranja postoji već sigurno 5000 godina, istorija kreditnog skoringa još uvek nije napunila ni ceo jedan vek. Naime, tokom druge polovine dvadesetog veka, praksa određivanja kreditnog skoringa uopšte nije ni postojala. Sve se zasnivalo na nečijem ličnom osećaju, bilo je subjektivno i samim tim vrlo podložno predrasudama. Banka je morala da proceni nečiji karakter, njegovo imovinsko stanje, da utvrdi koje nekretnine poseduje, kakva je njihova vrednost, itd. S obzirom na to da je menadžer banke bio u obavezi da se lično sastane sa svakim ko bi želeo pozajmicu, čitav proces odobravanja kredita je trajao suviše dugo i bio potpuno nedosledan. Zbog toga se neretko dešavalo da neko sa savršenom reputacijum ne dobije kredit prosto zbog činjenice da se nije dopao bankaru, ili suprotna situacija – da neko ko ne ispunjava uslove za dobijanje kredita, ipak dobije, samo iz razloga što je bankaru delovao simpatično. Na ovaj način banke ne samo da su ostvarivale velike gubitke kao posledice nečijeg lošeg osećaja, već su takođe i gubile mnogo klijenata (potencijalnog profita) zbog nemogućnosti da obrade sve kreditne zahteve. S obzirom na to da je svakim danom pristizalo sve više zahteva, neka vrsta automatizacije pri obradi zahteva je postala apsolutno neizbežna, a tome je umnogome doprinela i sve rasprostranjenija upotreba računara.

Bil Fer[38] i Erl Isak[39] su 1950. godine napravili prvi automatski sistem za kreditni skoring [23]. Dodatno usavršavanje njihovog modela uz pomoć računara dovelo je do FICO[40] skora, i danas široko upotrebljavanog sistema za kreditni skoring, naročito na području Amerike. Kada su se 1960. godine pojavile prve kreditne kartice, banke su prepoznale značaj i olakšice koje kreditni skoring donosi, pa je on počeo da doživljava svoju ekspanziju. Majers i Fordži su 1963. godine izneli rezultate svog istraživanja koje je pokazalo da su takozvane *default rates,* odnosno stope loših klijenata opale za čak 50%. Ubrzo su zakonima regulisani načini kako se podaci o klijentima mogu čuvati i koristiti, zatim koji se podaci smeju upotrebljavati, a koje je *neumesno* koristiti u svrhu donošenja odluke. U zavisnosti od države, razlikuje se skup informacija koje nije dozvoljeno koristiti u svrhu donošenja odluke o nečijem kreditnom rejtingu. Neke od takvih osobina su: rasa, boja kože, pripadnost određenoj religiji, pol, bračni status i mnogi drugi. Zanimljivo je, na primer, da je neetički koristiti pol kao karakteristiku zato što bi u tom slučaju žene ređe dobijale kredite, ali je, pak, statistika pokazala da su kod žena niska primanja pokazatelj redovnijih ispata. Podaci koji se takođe smatraju neetičkim za korišćenje su i zdravstveni status, prethodna istorija u kriminalnom dosijeu, itd. Etika korišćenja određenih karakteristika je predmet brojnih rasprava, pa je u nekim zemljama neetički koristiti čak i podatke o primanjima, stepenu obrazovanja ili državljanstvu klijenta – a to su baš podaci koji su u svim modelima na značajnijim pozicijama. Razvoj kreditnih biroa je takođe doprineo lakšem sakupljanju i obradi podataka o klijentima, jer oni predstavljaju izvor informacija o svim klijentima koji su nekada koristili kreditne usluge, ne samo onima koji imaju neku istoriju ponašanja u okviru banke. Kreditni biro spontano je nastao još u XIX veku, kada su trgovci međusobno razmenjivali svoje liste loših klijenata (preteče današnjih crnih lista), ali su se formalno razvili tek nakon Drugog svetskog rata. Definiše se kao ustanova koja pruža informacije o dosadašnjim kreditnim aktivnostima trenutnih ili potencijalnih klijenata. Izveštaj kreditnog biroa je veoma važan izvor informacija za svaku banku – u njemu se nalaze informacije poput trenutne zaduženosti, broja apliciranja, broj dana kašnjenja, limite po kreditnim karticama,... i sve to na nivou određenog klijenta, uzimajući u obzir sve njegove kreditne proizvode, u svim bankama.

Potpuna prekretnica u kreditnom skoringu, kao i u mnogo čemu u današnjoj ekonomiji, bila je Velika svetska ekonomska kriza iz 2008. godine. Danas, desetak godina kasnije, više niko i ne dovodi u pitanje to da je njen uzrok kriza tržišta nekretnina u SAD, odnosno veliki broj loših procena hipotekarnih banaka Amerike. Kako to obično biva, loše stvari su se nizale jedna za drugom, sve više dužnika je bilo u nemogućnosti da izmiri svoje obaveze, a istovremeno, enorman pad cena nekretnina rezultirao je potpunim kolapsom tržišta, što je ubrzo dovelo i do stečaja velikog broja banaka, a zatim se prenelo i na opštu ekonomsku krizu koja je dovela do stečaja mnogih svetskih korporacija. Nauk celom svetu bio je da donošenje pogrešnih odluka o kreditiranju može imati nesagledive posledice na čitavu svetsku ekonomiju, te je i značaj kreditnog skoringa konačno u potpunosti prepoznat.

[38] Bill Fair – američki inženjer i osnivač modela FICO i istoimene kompanije
[39] Earl Isaac (1921 - 1983) – američki matematičar i osnivač modela FICO i istoimene kompanije
[40] Fair, Isaac and Company je kompanija osnovana 1956. godine sa ciljem da popularizuje njihov osnovni proizvod – model za kreditni skoring – FICO.

4.2 Proces kreditnog skoringa

Sve što pomaže predviđanju – korisno je.[41]

Odobriti klijentu kredit ili ne je ključna odluka svake banke, a kreditni skoring (eng. *credit scoring*) je alat uz pomoć kojeg se ovakvi tipovi odluka donose. To je odluka koja donosi profit ukoliko je dobra ili vodi ka gubicima ako je procena bila pogrešna. Kreditni skoring se bazira na prostoj pretpostavci da se na osnovu iskustva o ponašanju starih klijenata može predvideti buduće ponašanje novih. To podrazumeva primenu nekog algoritma na sve informacije koje o nekom klijentu postoje i njegova osnovna ideja je grupisati klijente na osnovu njihovih osobina u podgrupe, a zatim doneti odluku o tome u koji skup klijent spada. Prvi primer ovakve ideje u matematici je Fišerov[42] pokušaj (1963. godine) da opiše poreklo lobanja na osnovu njihovih fizičkih karakteristka, a ubrzo zatim (1941. godine) je Duran[43] pokušao da sličnu ideju upotrebi pri razgraničavanju dobrih i loših klijenata. Ideja koju je on izneo u svom radu za Nacionalni ekonomski biro Amerike i dalje je polazna tačka svih modela kreditog skoringa, a to je da se svi klijenti koji apliciraju za kredit najčešće mogu podeliti na sledeća dva skupa [26]:

D – skup svih klijenata koji se smatraju *dobrim,* a to su klijenti koji nemaju većih kašnjenja[44] pri izmirenju obaveza
L - skup svih klijenata koji se smatraju *lošim*, odnosno, klijenti koji imaju kašnjenja ili uopšte ne isplaćuju svoje dospele obaveze.

Naravno, podaci o tome koji klijent je dobar, a koji loš su dostupni tek nakon određenog vremena, a koji se vremenski opseg uzima u razmatranje stvar je izbora, najčešće je to godinu dana.

Kreditni skoring, kako mu sama reč kaže, kao rezultat daje skor – to je numerički ili opisno izražena jedinica rizika na osnovu koje se donosi odluka o prihvatanju, odnosno odbijanju zahteva nekog klijenta. Postoje dve različite vrste kreditnog skoringa, a njihova podela je nastala sasvim prirodno, zbog razlike u količini informacija koja je u svakom od slučaja dostupna. To je podela na sledeća dva modela:

1. aplikativni skoring – za slučaj novih i potpuno novih klijenata (najčešće onih koji su do 6 meseci klijenti određene banke) i
2. bihejvioristički skoring – za obradu podataka već postojećih klijenata, o čijem ponašanju postoje neki podaci (duže od 6 meseci).

Logički se nameće da je pri pravljenju bihejviorističkog modela količina informacija sa kojima banka raspolaže neuporedivno veća, jer u tom slučaju banka pored svih informacija koje ima još od apliciranja klijenta, raspolaže i sa dodatnim informacijama koje govore o njegovom ponašanju.

Vremenom je korišćen veliki broj različitih pristupa za kreiranje kreditnog skoringa, a neki od najčešćih su:

---

[41] L.C. Thomas, David B. Edelman, Jonathan N. Crook, Credit Scoring and Its Applications
[42] Fisher
[43] Durand
[44] svaka država, a zatim i svaka institucija ima različite pojmove od tome koliko kašnjenja se toleriše, odnosno koji je prag materijalnosti kada su dani kašnjenja u pitanju. Najčešće se, u bankarskom sektoru, smatra da je klijent koji kasni manje od 90 dana uzastopno *dobar*, a onaj koji kasni više od 90 dana uzastopno, smatra se *lošim* klijentom.

- linearna i logistička regresija,
- diskriminaciona analiza,
- operaciona istraživanja (linearno programiranje),
- metode veštačke inteligencije (neuronske mreže, metoda podržavajućih vektora, genetski algoritmi, metoda najbližeg komšije i mnoge druge),
- fazi zaključivanje,
- i mnogi drugi.

Odabir konkretne metode koja će biti korišćena zavisi od mnogo faktora, a presudan je skup informacija koji je na raspolaganju. Za mnoge od pobrojanih metoda neophodno je postojanje sređene baze podataka koja seže makar nekoliko godina unazad i sadrži sve neophodne detalje o klijentima, kao i krajnji ishod njihovog kreditiranja.

Dobar, pouzdan i tačan model za kreditni skoring ima brojne prednosti, kako za banku, tako i za klijente, od kojih su neke:

- pozitivan uticaj na novčane tokove banke,
- osiguravanje pravovremene naplate,
- smanjenje broja loših klijenata,
- povećanje profita banke šireći mrežu dobrih klijenata
- omogućavanje maltene momentalne procene kreditnog rejtinga,
- u skladu sa prethodnom stavkom, smanjenje troškova procene,
- marketing olakšice (odnosno, odgovor na pitanje kome ponuditi dodatne proizvode banke),
- objektivna procena klijenta, tj. smanjenje mogućnosti da dođe do pristrasnih odluka,
- povoljnije uslove za klijente koji su ocenjeni kao dobri, itd.

4.2.1 Proces kreditnog skoringa – metod fazi zaključivanja

U poređenju sa statističkim metodama, fazi skupovi i fazi zaključivanje se vrlo lako nose sa neprecizno formulisanim problemima, nepotpunim podacima i neizvesnošću i u tome se ogleda njihova najveća prednost u odnosu na sve ostale metode. Pored toga, fazi skupovi su veoma podobni za opisivanje dinamičnih sistema u kojima vlada određena vrsta nestalnosti ili sistema čije je kretanje nemoguće u potpunosti predvideti – a ekonomski sistemi su oduvek bili baš takvi. Zbog toga se kreditni skoring koji se zasniva na fazi zaključivanju brzo i lako prilagođava promenama u ekonomskim prilikama, dok se statistički dobijeni modeli u tim situacijama moraju kompletno menjati. Ovakav kreditni skoring se zasniva na znanju i iskustvu eksperata, te je njihova stručnost ključna za razvijanje kvalitetnog modela. Fazi zaključivanje imitira proces donošenja odluke eksperta. Zapravo se od 1992. koristi Džonsonov model *Pravilo desne ruke* koji je ujedno i prvi primer ekspertnog sistema u kreditnom skoringu. Naime, njega karakterišu jednostavni uslovi, kriterijumi i pravila formulisana od strane jednog eksperta ili tima eksperata koje je posmatrani klijent morao da ispuni da bi mu kredit bio odobren. Ova pravila su kasnije koristili zaposleni koji nemaju iskustva u oblasti, na taj način donoseći odluke približne onima koje bi doneli i eksperti. Na ovaj način se, praktično rečeno, postiže efekat sličan postojanju jednog savršenog, bezgrešnog bankara koji je u mogućnosti da donosi odluke za svakog klijenta ponaosob. To takođe dovodi i do veoma jasnog principa zaključivanja, odnosno, može se jednostavno shvatiti zbog čega je i na koji način određena odluka donešena.

Dobar i pregledan model bilo kog tipa mora se razvijati po određenim pravilima. Za početak, neophodno je formulisati korake koji se prate i izvršavaju po tačno određenom redosledu. Ovako konstruisan model jednostavan je kako za upotrebu i praćenje, tako i za uvođenje eventualnih modifikacija u budućnosti. Razvoj kreditnog skoringa uz pomoć fazi skupova ima nekoliko faza:

1 Definisanje zavisne promenljive kao izlazne vrednosti, odnosno osnovnog cilja čitavog modela – to je u ovom slučaju kreditni rejting, odnosno skor koji model proizvodi,

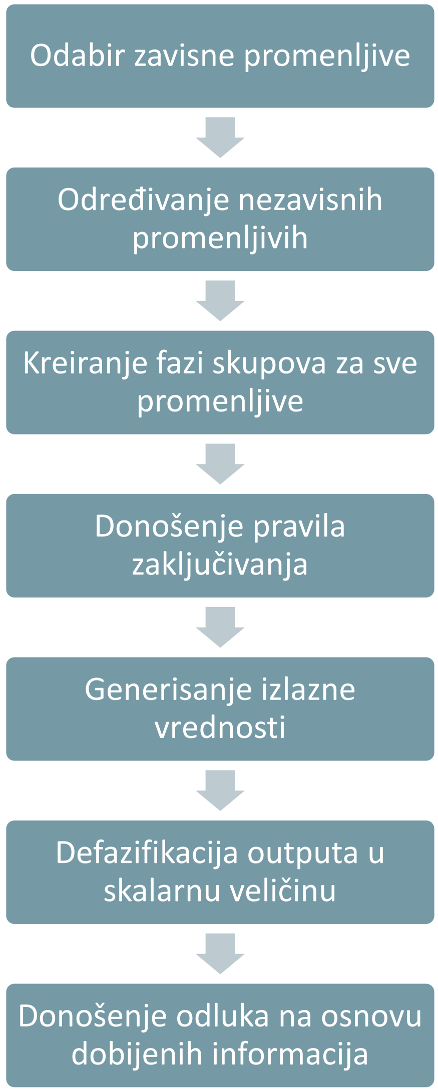
2 Prikupljanje, određivanje i računanje nezavisnih promenljivih. Važno je odabrati nezavisne promenljive koje što bolje, što detaljnije i što preciznije opisuju posmatranu izlaznu veličinu. Ovaj izbor se ili u potpunosti prepušta ekspertima ili se uz pomoć statističkih alata određuje koje to nezavisne promenljive imaju najviše uticaja na posmatranu zavisnu promenljivu. Prvo i osnovno pravilo je da se koriste one promenljive koje su lako dostupne, a da se, istovremeno, biraju promenljive koje nisu podložne manipulacijama klijenta. Takođe je važno voditi računa i o korelaciji odabranih promenljivih. Ukoliko sve promenljive nose sličnu informaciju, uzalud što ih ima mnogo i što svaka ponaosob dobro predviđaju.

3 Određivanje fazi skupova, kako za nezavisne promenljive, tako i za zavisnu promenljivu. Umesto korišćenja konkretnih numeričkih vrednosti, koriste se fazi skupovi koji opisuju ponašanje i uticaj nezavisnih promenljivih na zavisnu promenljivu. Fazi skupovi se definišu uz pomoć odgovarajuće funkcije pripadnosti.

4 Definisanje pravila zaključivanja, koja su osnov čitavog modela. Ova pravila su najčešće u formi AKO...ONDA... i potiču od eksperta ili tima eksperata i njihovog mišljenja, znanja i akumuliranog iskustva.

5 Na osnovu nezavisnih promenljivih se generiše zavisna promenljiva – odnosno izlazna vrednost koja se na kraju kroz proces defazifikacije prevodi u numeričku vrednost koja se dalje koristi za donošenje odluka.

Na slici 4.2.1.1 slikovito je prikazan algoritam fazi zaključivanja koji počinje sa odabirom zavisne i nezavisnih promenljivih, a završava sa donošenjem odluka na osnovu dobijenog kreditnog skoringa.



Slika 4.2.1.1 Algoritam fazi zaključivanja

4.2.2 Izbor promenljivih koje ulaze u model

Osnovni sastav modela su promenljive koje ga konstruišu, te od izbora promenljivih zavisi i kvalitet samog modela. Danas je bankama na raspolaganju veliki obim informacija sa različitih strana – iz formi koje klijenti popunjavaju pri apliciranju za kredit, karticu ili otvaranje tekućeg računa, podaci koji su javno dostupni iz kreditnih biroa, kreditna istorija ukoliko je već neko vreme klijent banke[45], itd. Važno je ispuniti takođe i nekoliko uslova: da su promenljive fleksibilne i dobro povezane sa svim eksternim izvorima (kreditni biro), da funkcionišu i na nivou klijenta i na nivou računa, isključiti promenljive koje su

[45] Prave razlike u broju raspoloživih promenljivih sreću se zapravo pri formiranju bihejviorističkih modela. Tada svaka banka ima mogućnost da, u skladu sa svim alatima prikupljanja i skladištenja podataka koje poseduje, napravi veliki broj različitih promenljivih koje mogu sjajno opisivati ponašanje klijenta. Osim toga, takve promenljive se često mogu kombinovati da bi se napravile promenljive koje predstavljuju odnose (tj. racije), a njihova predviđačka moć je najčešće odlična.

suviše podložne fluktuacijama[46], kao i sve one promenljive sa mnoštvom nedostajućih podataka (to su često promenljive koje se dobijaju kao odgovori klijenata na pitanja koja nisu označena kao obavezna) Sve promenljive koje potencijalno mogu ući u model mogu se podeliti u tri velike grupe:

1 Promenljive koje sadrže socio – demografske informacije o klijentima
Sve promenljive koje se tiču lično klijenta i dobijaju se pri njegovom apliciranju za neku uslugu u banci. To mogu biti godine starosti, podaci o državljanstvu, bračni status, broj dece u porodici, broj osoba koje klijent izdražava, stepen obrazovanja, podaci o zaposlenju (podaci o firmi u kojoj klijent radi, o vremenskom periodu koliko je tamo zaposlen, tipu njegovog ugovora, itd), podaci o visini primanja, podaci o stanovanju (poseduje nekretninu, podstanar), itd.

2 Promenljive koje se tiču transakcija (za bihejviorističke skoringe)
Podaci koje banka poseduje o klijentu u sopstvenim sistemima: prosečan broj dana kašnjenja, informacije o blokadi računa, odnos dospelih obaveza i stanja na računu, procenat korišćenja dozvoljenog minusa, itd.

3 Promenljive koje potiču iz eksternih izvora
To su informacije koje se dobijaju iz kreditnog registra centralnih banaka i kreditnih biroa. Oni pružaju informacije o ponašanju klijenta u ostalim bankama kao što su broj apliciranja u drugim bankama, kreditni limit, broj važećih kredita, ukupna izloženost, broj kreditnih kartica, itd.

4.2.3 Opis uzorka

S obzirom na činjenicu da su baze podataka u bankama strogo poverljive[47], pronalaženje validnog uzorka za konstrukciju modela istraživačkog karaktera je teško izvodljivo. Za ovakve potrebe može se pronaći tek nekoliko uzoraka na internetu, od kojih je za ovaj rad odabran onaj koji, po mišljenju autora, sadrži najreprezentativnije podatke i najkorisnije promenljive. Svakako da ovakav uzorak ima dosta mana, od kojih je najveća sledeća:

Uzorak datira iz 1994. godine, te je samim tim prilično nereprezentativan za današnje ekonomske prilike. Na primer, promenljiva telefon je tada imala mnogo značajniji uticaj (u uzorku više od polovine klijenata nema lični telefon), dok je danas maltene potpuno nerelevantna. Baš iz razloga starosti uzorka, među promenljivama nedostaju mnoge za koje je statistika pokazala da imaju najviše uticaja na predviđačku moć modela, a to su: broj dana kašnjenja klijenta, tip radnog ugovora klijenta, itd. Zbog nabrojanih karakteristika ovog uzorka, on je korišćen samo načelno, za potrebe ilustrovanja konstrukcije fazi skupova koji opisuju promenljive. Pravila zaključivanja su formulisana u skladu sa današnjom poslovnom logikom koja se veoma razlikuje od perioda iz kog uzorak datira. Osnovni razlog za takvu konstrukciju pravila leži u činjenici da se svaki model koji u pozadini ima fazi pravila zaključivanja veoma lako može promeniti i prilagoditi trenutnim prilikama.

[46] Takve su najčešće sve promenljive koje su u nominalnom iznosu. Zato je veoma važno umesto takvih promenljivih koristiti racije, odnosno relativne veličine. Na primer, umesto promenljive *plata klijenta* koristiti odnos njegove plate sa trenutnim prosekom plate na nivou države.
[47] Banka je, pre svega, obavezna da sve lične podatke klijenata drži u tajnosti, ali, čak i da to nije slučaj, ovi podaci bi svakako bi se svakako čuvali u tajnosti zbog konkurencije

Uzorak sadrži 21 promenljivu, a u tabeli 4.2.3.1 pobrojane su sve promenljive koje se nalaze u uzorku, zajedno sa njihovim tipom (numerička ili kategorijalna) i kratkim objašenjenjem o njihovom značenju.

	ime promenljive	Tip	Objašnjenje
1	godine starosti	numerička	godine starosti klijenta u trenutku apliciranja
2	tip zaposlenja	kategorijalna	pozicija na kojoj je klijent zaposlen
3	bračni status	kategorijalna	bračni status klijenta
4	broj izdržavanih lica	numerička	broj lica koje klijent izdržava
5	kreditna istorija	kategorijalna	ponašanje klijenta sa postojećim kreditima
6	štednja	kategorijalna	štednja na računu klijenta
7	procenat rate	numerička	procenat rate kredita u odnosu na raspoloživi dohodak
8	mesto stanovanja	kategorijalna	način stanovanja klijenta (iznajmljuje ili poseduje nekretninu)
9	broj kredita	numerička	broj kredita klijenta u banci
10	stanje na računu	numerička	raspoloživo stanje na računu klijenta u nemačkim markama
11	svrha kredita	kategorijalna	svrha koju je klijent naveo kao razlog apliciranja za kredit
12	iznos kredita	numerička	iznos kredita u nemačkim markama
13	pol	kategorijalna	indikator promenljiva
14	žirant	kategorijalna	postojanje žiranta i koaplikanta
15	dužina stanovanja	numerička	dužina stanovanja klijenta na trenutnoj adresi
17	telefon	kategorijalna	indikator da li klijent poseduje telefon
18	imovina	kategorijalna	indikator da li klijent poseduje nekretninu, automobil ili oročenu štednju
19	kalendari dospeća	kategorijalna	druge obaveze klijenta (čekovi, krediti)
20	dužina zaposlenja	numerička	dužina trajanja trenutnog zaposlenja klijenta
21	period otplate	numerička	period otplate kredita u mesecima

Tabela 4.2.3.1 Dostupne promenljive za formiranje modela fazi zaključivanja

Iz modela su u samom startu isključene sledeće promenljive:

- telefon – u periodu nastanka ove baze podataka posedovanje sopstvenog telefona je nosilo mnogo više informacija nego što je to slučaj sa današnjim prilikama,
- pol – ova promenljiva isključena je iz etičkih razloga,
- inostrani radnik – ova indikator promenljiva je isključena iz razvoja modela iz istog razloga kao i promenljiva telefon – danas informacija koju ona nosi nema istu vrednost kao nekada,
- svrha kredita – za ovu stavku je istorija pokazala da je u skupu promenljivih kod kojih klijenti pri aplikaciji najčešće prikrivaju pravo stanje.

4.2.4 Grupisanje promenljivih u blokove

Osnovna ideja kod konstruisanja modela koji se baziraju na AKO...ONDA... pravilima opisanih u poglavlju 1.5.2 je grupisati promenljive u klase, tj. *blokove* po sličnosti informacija koje one nose. Razmatranje raspoloživih promenljivih u uzorku pokazalo je da je sledeća podela na blokove najprirodnija:

BLOK 1 Demografski podaci o klijentu

Zbog brojnosti promenljivih koje u ovaj blok spadaju, on je podeljen na 3 manja bloka:

BLOK 1.1 **porodica klijenta** – bračni status i broj izdržavanih lica,

BLOK 1.2 **stan klijenta** – mesto stanovanja, dužina stanovanja na trenutnoj adresi

BLOK 1.3 **posao klijenta** – tip zaposlenja, dužina trajanja trenutnog zaposlenja

I promenljiva **godine** kao zasebna promenljiva.

BLOK 2 Podaci o kreditnoj istoriji klijenta i kreditu uopšte

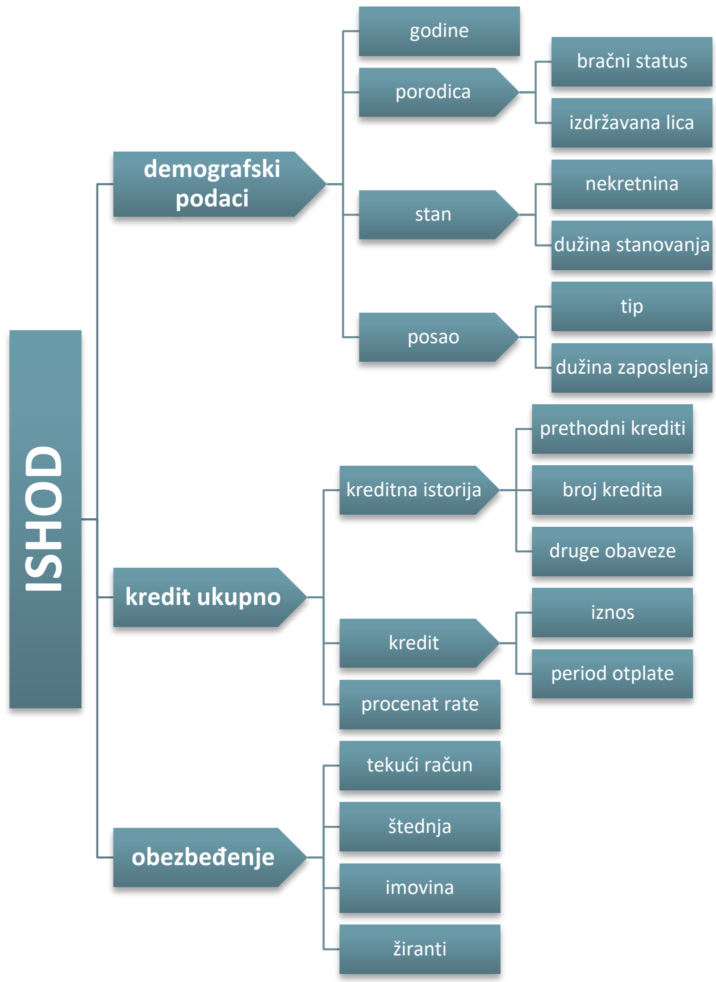
BLOK 2.1 **kreditna istorija** – kreditna istorija, broj postojećih kredita u banci i druge obaveze

BLOK 2.2 **kredit** – iznos kredita i period otplate kredita,

i procenat rate kao zasebna promenljiva.

BLOK 3 obezbeđenje – tekući račun, štednja na računu, imovina i žirant.

Na dijagramu 4.2.4.1 je slikovito predstavljen sistem zaključivanja, kao i raspodela promenljivih po odgovarajućim blokovima. Kada se problem predstavi na ovakav način, lako se uviđa iz kojeg se tačno koraka donosi zaključak o tačno određenom bloku, pa je sistem zaključivanja veoma transparentan. S obzirom na mogućnost lociranja svakog koraka u zaključivanju, rad ovakvog modela je lako pratiti, a takođe se i eventualne izmene mogu veoma jednostavno implementirati. Na primer, ukoliko je potrebno promeniti neke granice koje važe za tip zaposlenja klijenta, dovoljno je samo promeniti parametre u toj promenljivoj, a zatim će njen uticaj u bloku odlučivanja kojem pripada tu promenu preneti i na sam konačan rezultat.



Slika 4.2.4.1 Raspodela dostupnih promenljivih na blokove

Vrednosti koje promenljive mogu da uzmu, kao i kriterijumi za njihovo svrstavanje su smešteni u tabeli 4.2.4.2

promenljiva	vrednosti iz uzorka	kriterijumi
godine starosti	$[19, 75]$	mlad: <35 srednjih godina: (26, 58) star: >53
bračni status	Iz skupa $\{0, 1\}$ gde je 0 samac, a 1 oženjen	samac: 0 oženjen: 1
broj izdržavanih lica	$\{0, 1, 2\}$	malo: ≤ 1 puno: >1
mesto stanovanja	Iz skupa $\{0, 1, 2\}$, gde je 2 poseduje nekretninu, 1 živi sa roditeljima i 0 iznajmljuje nekretninu	Iznajmljuje: ≤ 1 Roditelji: (0.5,1.6) stan: >1
dužina stanovanja	$[1, 4]$	Kratko: <1.5 Srednje: (1.1,3)

		Dugo: >2.1
tip zaposlenja	Iz skupa $\{0, 1, 2, 3\}$gde je 0 – nezaposlen, 1 – fizički radnik, 2 – školovan radnik, 3 – visokoobrazovani radnici	Nizak nivo: <1.1 Srednji nivo:(0.7, 2.3) Visok nivo: >1.9
dužina zaposlenja	Od 0 pa nadalje	Kratko: <1.3 Srednje: (0.9, 3) Dugo: > 2.5
prethodni krediti	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$, gde je 0 – bez kredita, 1 – svi krediti otplaćeni na vreme, 2 – postoji kredit koji otplaćuje na vreme, 3 – postoji kašnjenje u plaćanju, 4 – kritičan klijent	Loša: >2.8 Prosečna: (1.3, 3.1) Dobra: < 2
broj kredita u banci	$\{0, 1, 2, 3\}$	Malo: <1.5 Srednje: (1.1, 2.4) Puno: >1.8
druge obaveze	$\{0, 1, 2\}$, gde je 0 – nema drugih obaveza, 1 – čekovi, 2 – obaveze prema bankama	Malo: <1.1 Srednje: (0.8, 1.6) Puno:>1.4
iznos kredita	(1, 25 000)	Mali: <2000 Srednji: (1000, 10000) Veliki: >8000
period otplate	(6, 60)	Kratak: <24 Srednji: (18, 36) Dug: >32
procenat rate	[1, 4], gde važi: 1 – 10%, 2 – 20%, 3 – 30% i 4 – 40% itd.	Mali: <2 Srednji: (1.5, 3.3) Velik: >3
stanje na računu	0 – klijent nema račun u banci, (0, 200) i >200 klijent prima redovnu platu u banci	Loše: <150 Prosečno: (100, 220) Dobro: >180
štednja na računu	(0, ∞), gde je 0 – klijent nema štednju	Loše: <200 Prosečno: (150, 600) Dobro: >450
imovina	[0, 4] gde je 4 nekretnina, 2.5 štednja, 1.3 automobil i 0 ništa	Nizak nivo: < 1.9 Srednji nivo: [1.7, 3] Visok nivo: >2.8
žirant	$\{0, 1, 2\}$, gde je 0 – nema žiranta, 1 – koaplikant, 2 - žirant	Loše: <1.1 Prosečno: (0.8, 1.3) Dobro: >1.5

Slika 4.2.4.2 Vrednosti i kriterijumi za odlučivanje pobrojani po promenljivama

4.2.5 Pravila zaključivanja

Pravila zaključivanja AKO...ONDA... tipa predstavljena su tabelarno, jer bi zbog velikog broja kombinacija bilo nepraktično njihovo čitanje u drugim oblicima. S obzirom na to da su prirodno sve ove lingvističke promenljive neki podaci o klijentu, sve vreme se koristi isključivo veznik i. Na primer, pravilo *klijent je samac ili izdržava puno lica* nema nikakvog smisla. Svaka od tabela u zaglavlju ima imena promenljivih koje se pri zaključivanju koriste, dok je poslednja kolona kolona koja se naziva ishod. Ishod predstavlja pravilo zaključivanja i može se čitati na sledeći način:

AKO je klijent samac I broj izdržavanih lica malo ONDA je ishod prosečan.

Tabele za blok zaključivanja 1: DEMOGRAFSKI PODACI

Blok 1.1 porodica

porodica		
bračni status	**broj izdržavanih**	**ishod**
samac	malo	prosečan
samac	puno	loš
oženjen	malo	dobar
oženjen	puno	prosečan

stan		
mesto stanovanja	**dužina stanovanja**	**ishod**
iznajmljivanje	kratko	loš
iznajmljivanje	srednje	loš
iznajmljivanje	dugo	loš
roditelji	kratko	prosečan
roditelji	srednje	prosečan
roditelji	dugo	loš
stan	kratko	prosečan
stan	srednje	dobar
stan	dugo	dobar

posao		
tip	**dužina**	**ishod**
nizak	kratko	loš
nizak	srednje	loš
nizak	dugo	prosečan
srednji	kratko	loš
srednji	srednje	prosečan

srednji	dugo	dobar
visok	kratko	prosečan
visok	srednje	dobar
visok	dugo	dobar

Dobijeni blokovi zaključivanja se zatim koriste za formiranje konačne tabele ishoda demografskih podataka. Godine su u sistem zaključivanja ušle kao samostalna promenljiva, dok su ostale tri promenljive (porodica, stan i posao) zapravo rezultat prethodnih analiza. Godine se smatraju promenljivom koja veoma dobro opisuje klijenta, nisu podložne manipulaciji jer banka uvek ima tačan uvid u klijentov datum rođenja, mogu se menjati kroz vreme (ne koristi se isključivo samo vrednost koju je klijent dao pri apliciranju, kao što je to slučaj sa, na primer, stambenim pitanjem) i kroz istoriju su se pokazale kao jedna od najboljih promenljivih u aplikativnim skorinzima. Upravo iz navedenih razloga, one utiču samostalno u ovom bloku odlučivanja, jer se tako njihov uticaj uvećava. Na ovaj način se dolazi do konačnog ishoda koji se tiče klijentovih demografskih podataka i on može biti dobar, prosečan i loš.

demografski podaci				
godine	**porodica**	**stan**	**posao**	**ishod**
mlad	loš	loš	loš	loš
mlad	loš	loš	prosečan	loš
mlad	loš	loš	dobar	loš
mlad	loš	prosečan	loš	loš
mlad	loš	prosečan	prosečan	loš
mlad	loš	prosečan	dobar	prosečan
mlad	loš	dobar	loš	loš
mlad	loš	dobar	prosečan	prosečan
mlad	loš	dobar	dobar	prosečan
mlad	prosečan	loš	loš	loš
mlad	prosečan	loš	prosečan	loš
mlad	prosečan	loš	dobar	prosečan
mlad	prosečan	prosečan	loš	loš
mlad	prosečan	prosečan	prosečan	loš
mlad	prosečan	prosečan	dobar	prosečan
mlad	prosečan	dobar	loš	loš
mlad	prosečan	dobar	prosečan	prosečan
mlad	prosečan	dobar	dobar	prosečan
mlad	dobar	loš	loš	loš
mlad	dobar	loš	prosečan	prosečan
mlad	dobar	loš	dobar	prosečan
mlad	dobar	prosečan	loš	loš
mlad	dobar	prosečan	prosečan	prosečan
mlad	dobar	prosečan	dobar	prosečan
mlad	dobar	dobar	loš	loš

mlad	dobar	dobar	prosečan	prosečan
mlad	dobar	dobar	dobar	dobar
srednjih godina	loš	loš	loš	loš
srednjih godina	loš	loš	prosečan	loš
srednjih godina	loš	loš	dobar	loš
srednjih godina	loš	prosečan	loš	loš
srednjih godina	loš	prosečan	prosečan	prosečan
srednjih godina	loš	prosečan	dobar	prosečan
srednjih godina	loš	dobar	loš	loš
srednjih godina	loš	dobar	prosečan	prosečan
srednjih godina	loš	dobar	dobar	dobar
srednjih godina	prosečan	loš	loš	loš
srednjih godina	prosečan	loš	prosečan	loš
srednjih godina	prosečan	loš	dobar	prosečan
srednjih godina	prosečan	prosečan	loš	loš
srednjih godina	prosečan	prosečan	prosečan	prosečan
srednjih godina	prosečan	prosečan	dobar	prosečan
srednjih godina	prosečan	dobar	loš	loš
srednjih godina	prosečan	dobar	prosečan	dobar
srednjih godina	prosečan	dobar	dobar	dobar
srednjih godina	dobar	loš	loš	loš
srednjih godina	dobar	loš	prosečan	loš
srednjih godina	dobar	loš	dobar	prosečan
srednjih godina	dobar	prosečan	loš	loš
srednjih godina	dobar	prosečan	prosečan	prosečan
srednjih godina	dobar	prosečan	dobar	prosečan
srednjih godina	dobar	dobar	loš	loš
srednjih godina	dobar	dobar	prosečan	dobar
srednjih godina	dobar	dobar	dobar	dobar
star	loš	loš	loš	loš
star	loš	loš	prosečan	loš
star	loš	loš	dobar	loš
star	loš	prosečan	loš	loš
star	loš	prosečan	prosečan	loš
star	loš	prosečan	dobar	loš
star	loš	dobar	loš	loš
star	loš	dobar	prosečan	prosečan
star	loš	dobar	dobar	prosečan
star	prosečan	loš	loš	loš
star	prosečan	loš	prosečan	loš
star	prosečan	loš	dobar	loš
star	prosečan	prosečan	loš	loš
star	prosečan	prosečan	prosečan	prosečan

star	prosečan	prosečan	dobar	prosečan
star	prosečan	dobar	loš	loš
star	prosečan	dobar	prosečan	prosečan
star	prosečan	dobar	dobar	dobar
star	dobar	loš	loš	loš
star	dobar	loš	prosečan	loš
star	dobar	loš	dobar	loš
star	dobar	prosečan	loš	loš
star	dobar	prosečan	prosečan	prosečan
star	dobar	prosečan	dobar	prosečan
star	dobar	dobar	loš	loš
star	dobar	dobar	prosečan	prosečan
star	dobar	dobar	dobar	dobar

Tabele za blok zaključivanja 2: KREDIT UKUPNO

U sistem zaključivanja koji se tiče klijentove kreditne istorije ušle su sledeće promenljive: prethodni krediti, broj kredita i druge obaveze. Kombinacijom ovih promenljivih dolazi se do 27 pravila zaključivanja koja su pobrojana u tabeli kreditne istorije.

kreditna istorija			
prethodni krediti	**broj kredita**	**druge obaveze**	**ishod**
Loš	malo	malo	loš
loš	malo	srednje	loš
loš	malo	puno	loš
loš	srednje	malo	loš
loš	srednje	srednje	loš
loš	srednje	puno	loš
loš	puno	malo	loš
loš	puno	srednje	loš
loš	puno	puno	loš
prosečan	malo	malo	prosečan
prosečan	malo	srednje	prosečan
prosečan	malo	puno	loš
prosečan	srednje	malo	prosečan
prosečan	srednje	srednje	loš
prosečan	srednje	puno	loš
prosečan	puno	malo	loš
prosečan	puno	srednje	loš
prosečan	puno	puno	loš
dobar	malo	malo	dobar

dobar	malo	srednje	dobar
dobar	malo	puno	prosečan
dobar	srednje	malo	dobar
dobar	srednje	srednje	prosečan
dobar	srednje	puno	prosečan
dobar	puno	malo	prosečan
dobar	puno	srednje	prosečan
dobar	puno	puno	loš

Zbog međusobne povezanosti, u istoj tabeli našle su se promenljive iznos kredita i period otplate.

kredit		
iznos	**period otplate**	**ishod**
mali	kratak	dobar
mali	srednji	dobar
mali	dug	dobar
srednji	kratak	dobar
srednji	srednji	prosečan
srednji	dug	dobar
velik	kratak	loš
velik	srednji	prosečan
velik	dug	prosečan

Dobijeni ishodi za pravila zaključivanja o kreditnoj istoriji i kreditu zajedno formiraju još jedan blok zaključivanja koji se naziva kredit ukupno. Ovaj blok osim toga koristi i samostalne vrednosti promenljive procenat rate u odnosu na dohodak, prvenstveno zbog toga što ta promenljiva ima veliki uticaj na ishod. Takođe, u ovom bloku odlučivanja se može uočiti kako se u fazi modelima zaključivanja može favorizovati neka promenljiva, za koju je ekspertski utvrđeno da je važnija od drugih. U ovom primeru, to je promenljiva procenat rate. Ona nosi zaista veliku vrednost jer stavlja u odnos klijentovu zaradu (koja je sama po sebi veoma važna promenljiva) i iznos mesečne rate koju će klijent plaćati ukoliko mu kredit bude odobren.

kredit ukupno			
kreditna istorija	**kredit**	**procenat rate**	**ishod**
loš	loš	mali	loš
loš	loš	srednji	loš
loš	loš	velik	loš
loš	prosečan	mali	loš
loš	prosečan	srednji	loš
loš	prosečan	velik	loš
loš	dobar	mali	loš

loš	dobar	srednji	loš
loš	dobar	velik	loš
prosečan	loš	mali	loš
prosečan	loš	srednji	loš
prosečan	loš	velik	loš
prosečan	prosečan	mali	prosečan
prosečan	prosečan	srednji	prosečan
prosečan	prosečan	velik	loš
prosečan	dobar	mali	dobar
prosečan	dobar	srednji	prosečan
prosečan	dobar	velik	prosečan
dobar	loš	mali	prosečan
dobar	loš	srednji	prosečan
dobar	loš	velik	loš
dobar	prosečan	mali	dobar
dobar	prosečan	srednji	dobar
dobar	prosečan	velik	prosečan
dobar	dobar	mali	dobar
dobar	dobar	srednji	dobar
dobar	dobar	velik	prosečan

Tabela za blok zaključivanja 3: OBEZBEĐENJE

U tabeli zaključivanja koja se tiče obezbeđenja nalaze se četiri promenljive. To su stanje na računu, štednja klijenta na računu u banci, imovina klijenta i postojanje žiranta. Ishod kombinacije ove četiri promenljive predstavlja stepen obezbeđenosti banke u trenutku podnošenja zahteva za kredit. Obezbeđenje banke u slučaju neplaćanja je, prirodno, veoma važna stavka pri donošenju odluke. Najveće obezbeđenje je, svakako, imovina, zato što je ona najmanje likvidna i najmanje su šanse da će klijent moći brzo da je pretvori u gotov novac.

.

obezbeđenje				
stanje na računu	**štednja**	**imovina**	**žirant**	**ishod**
loše	loše	nizak nivo	loše	loše
loše	loše	nizak nivo	prosečno	loše
loše	loše	nizak nivo	dobro	loše
loše	loše	prosečan nivo	loše	loše
loše	loše	prosečan nivo	prosečno	loše
loše	loše	prosečan	dobro	loše

		nivo		
loše	loše	visok nivo	loše	loše
loše	loše	visok nivo	prosečno	loše
loše	loše	visok nivo	dobro	prosečno
loše	prosečno	nizak nivo	loše	loše
loše	prosečno	nizak nivo	prosečno	loše
loše	prosečno	nizak nivo	dobro	loše
loše	prosečno	prosečan nivo	loše	loše
loše	prosečno	prosečan nivo	prosečno	loše
loše	prosečno	prosečan nivo	dobro	prosečno
loše	prosečno	visok nivo	loše	loše
loše	prosečno	visok nivo	prosečno	prosečno
loše	prosečno	visok nivo	dobro	prosečno
loše	dobro	nizak nivo	loše	loše
loše	dobro	nizak nivo	prosečno	loše
loše	dobro	nizak nivo	dobro	loše
loše	dobro	prosečan nivo	loše	loše
loše	dobro	prosečan nivo	prosečno	prosečno
loše	dobro	prosečan nivo	dobro	prosečno
loše	dobro	visok nivo	loše	loše
loše	dobro	visok nivo	prosečno	prosečno
loše	dobro	visok nivo	dobro	prosečno
prosečno	loše	nizak nivo	loše	loše
prosečno	loše	nizak nivo	prosečno	loše
prosečno	loše	nizak nivo	dobro	loše
prosečno	loše	prosečan nivo	loše	loše
prosečno	loše	prosečan nivo	prosečno	prosečno
prosečno	loše	prosečan nivo	dobro	prosečno
prosečno	loše	visok nivo	loše	loše
prosečno	loše	visok nivo	prosečno	prosečno
prosečno	loše	visok nivo	dobro	prosečno
prosečno	prosečno	nizak nivo	loše	loše
prosečno	prosečno	nizak nivo	prosečno	prosečno
prosečno	prosečno	nizak nivo	dobro	prosečno
prosečno	prosečno	prosečan nivo	loše	prosečno

prosečno	prosečno	prosečan nivo	prosečno	prosečno
prosečno	prosečno	prosečan nivo	dobro	dobro
prosečno	prosečno	visok nivo	loše	prosečno
prosečno	prosečno	visok nivo	prosečno	dobro
prosečno	prosečno	visok nivo	dobro	dobro
prosečno	dobro	nizak nivo	loše	loše
prosečno	dobro	nizak nivo	prosečno	prosečno
prosečno	dobro	nizak nivo	dobro	prosečno
prosečno	dobro	prosečan nivo	loše	prosečno
prosečno	dobro	prosečan nivo	prosečno	dobro
prosečno	dobro	prosečan nivo	dobro	dobro
prosečno	dobro	visok nivo	loše	prosečno
prosečno	dobro	visok nivo	prosečno	dobro
prosečno	dobro	visok nivo	dobro	dobro
dobro	loše	nizak nivo	loše	loše
dobro	loše	nizak nivo	prosečno	loše
dobro	loše	nizak nivo	dobro	loše
dobro	loše	prosečan nivo	loše	loše
dobro	loše	prosečan nivo	prosečno	prosečno
dobro	loše	prosečan nivo	dobro	prosečno
dobro	loše	visok nivo	loše	loše
dobro	loše	visok nivo	prosečno	prosečno
dobro	loše	visok nivo	dobro	prosečno
dobro	prosečno	nizak nivo	loše	loše
dobro	prosečno	nizak nivo	prosečno	prosečno
dobro	prosečno	nizak nivo	dobro	prosečno
dobro	prosečno	prosečan nivo	loše	prosečno
dobro	prosečno	prosečan nivo	prosečno	prosečno
dobro	prosečno	prosečan nivo	dobro	dobro
dobro	prosečno	visok nivo	loše	prosečno
dobro	prosečno	visok nivo	prosečno	prosečno
dobro	prosečno	visok nivo	dobro	dobro
dobro	dobro	nizak nivo	loše	prosečno
dobro	dobro	nizak nivo	prosečno	prosečno

dobro	dobro	nizak nivo	dobro	dobro
dobro	dobro	prosečan nivo	loše	prosečno
dobro	dobro	prosečan nivo	prosečno	dobro
dobro	dobro	prosečan nivo	dobro	dobro
dobro	dobro	visok nivo	loše	dobro
dobro	dobro	visok nivo	prosečno	dobro
dobro	dobro	visok nivo	dobro	dobro

KONAČAN ISHOD

Tabela konačnog zaključivanja sastoji se iz kombinacije svih dosadašnjih ishoda. Ovoga puta postoji više od tri moguća ishoda, tačnije, dodati su ishodi *jako loš* i *jako dobar* koji predstavljaju ekstremne vrednosti – sa jedne strane klijente koji se istog trenutka mogu odbiti, a sa druge one koji se automatski mogu prihvatati. Do konačnog ishoda dolazi se kombinacijom svih napravljenih blokova do sada: demografski podaci, kredit ukupno i obezbeđenje. Ovako specifičnom konstrukcijom blokova zaključivanja dobija se mogućnost da svaka promenljiva učestvuje u konačnom rezultatu kroz svoju grupu, a ne zasebno. Ovako se smanjuje mogućnost greške, dok se, pritom, i dalje zadržava transparentnost čitavog procesa zaključivanja. Dakle, ako je neki klijent dobio konačnu ocenu *jako loš*, može se pogledati struktura prethodnih blokova odlučivanja. Odatle se zaključuje koji tačno blok odlučivanja (ili više njih) je doprineo takvoj odluci. Zatim se može direktno otići u taj blok odlučivanja i utvrditi koja tačno promenljiva je pokvarila klijentov ishod vezan za taj blok. Na ovaj način je izbegnut princip *crne kutije,* tj. poreklo svakog ishoda je veoma lako locirati, prekontrolisati, i na kraju, potvrditi.

konačan ishod			
demografski podaci	kredit ukupno	obezbeđenje	ishod
loš	loš	loš	jako loš
loš	loš	prosečan	jako loš
loš	loš	dobar	loš
loš	prosečan	loš	jako loš
loš	prosečan	prosečan	loš
loš	prosečan	dobar	prosečan
loš	dobar	loš	loš
loš	dobar	prosečan	prosečan
loš	dobar	dobar	dobar
prosečan	loš	loš	jako loš
prosečan	loš	prosečan	loš
prosečan	loš	dobar	prosečan

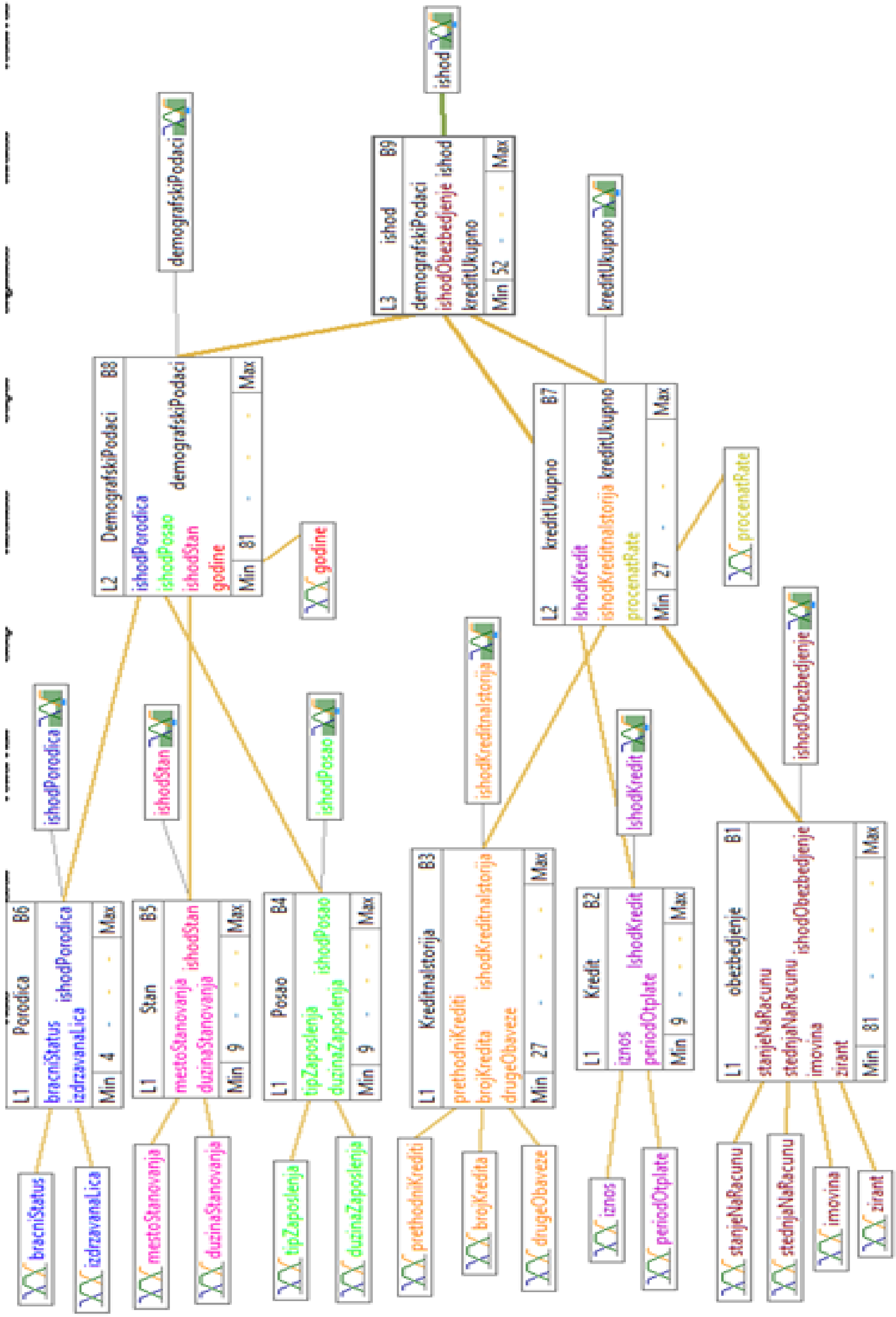
prosečan	prosečan	loš	prosečan
prosečan	prosečan	prosečan	dobar
prosečan	prosečan	dobar	dobar
prosečan	dobar	loš	prosečan
prosečan	dobar	prosečan	dobar
prosečan	dobar	dobar	jako dobar
dobar	loš	loš	loš
dobar	loš	prosečan	prosečan
dobar	loš	dobar	prosečan
dobar	prosečan	loš	prosečan
dobar	prosečan	prosečan	dobar
dobar	prosečan	dobar	dobar
dobar	dobar	loš	dobar
dobar	dobar	prosečan	jako dobar
dobar	dobar	dobar	jako dobar

4.2.6 Razvoj modela

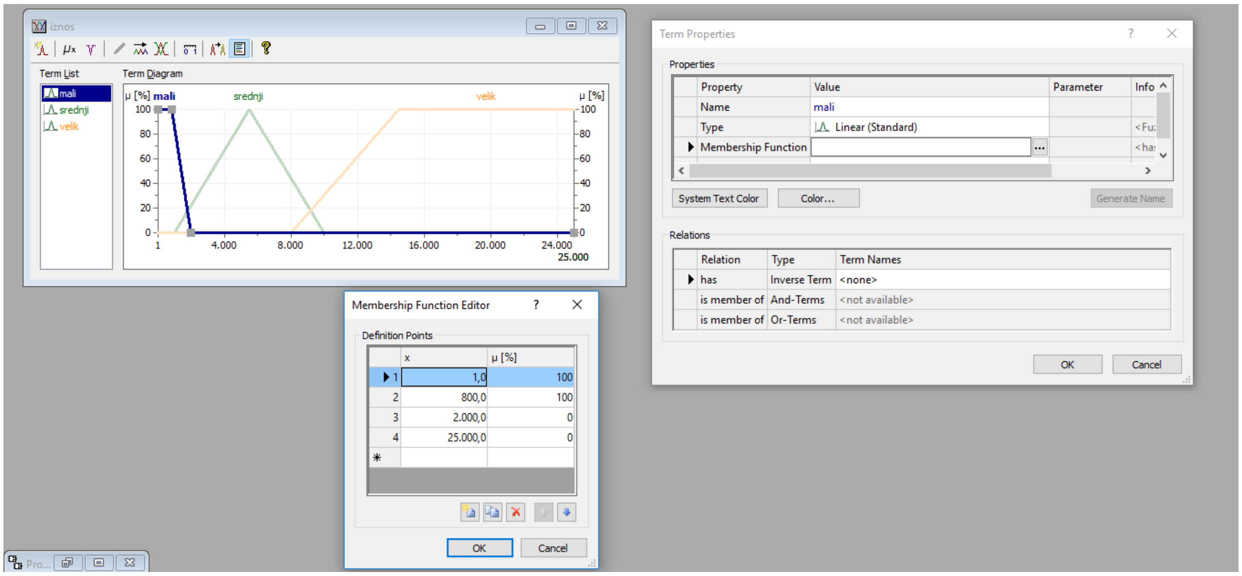
Tok zaključivanja predstavljen je na slici 4.2.6.1. Radi preglednosti, promenljive koje zajedno ulaze u određeni blok zaključivanja su predstavljene istom bojom. Plavo su obeležene promenljive koje se tiču porodičnog statusa klijenta, one zajedno formiraju novi fazi broj koji se naziva ishodPorodica. Zatim su roze bojom predstavljene promenljive koje se tiču klijentovog stambenog pitanja, one formiraju fazi broj ishodStan. Zelenom bojom označene su promenljive tipZaposlenja i duzinaZaposlenja koje zajedno čine fazi broj ishodPosao. Ova tri fazi broja (ishodPorodica, ishodStan i ishodPosao) zajedno sa promenljivom godine daju fazi broj demografskiPodaci koji predstavlja rezultat svih dostupnih socio-demografskih podataka o klijentu. Dalje su narandžastom bojom predstavljene promenljive prethodniKrediti, brojKredita, drugeObaveze, i njihov rezultat, fazi broj ishodKreditnaIstorija. Nakon toga, ljubičastom bojom predstavljene su promenljive iznos i periodOtplate kredita i one formiraju fazi broj ishodKredit. A kada se fazi brojevima ishodKreditiranja i ishodKredit doda i promenljiva procenatRate – dobija se fazi broj nazvan kreditUkupno. Poslednji blok odlučivanja čine četiri promenljive predstavljene bordo bojom – to su stanjeNaRacunu, stednjaNaRacunu, imovina i zirant. Njihovim grupisanjem dolazi se do fazi broja ishodObezbedjenje. Na kraju se tri dobijena fazi broja (demografskiPodaci, kreditUkupno i procenatRate) međusobno grupišu u konačan ishod, i to je fazi broj koji predstavlja rezultat ovog procesa fazi zaključivanja.

Svi fazi brojevi definisani su preko odgovarajućih funkcija pripadnosti, a softver FuzzyTECH 8.40b pruža mogućnosti da se funkcije pripadnosti definišu na način koji prati logiku LR fazi brojeva opisanih u teoremi 3.1.1 poglavlja 3. Na slici 4.2.6.2 predstavljen je primer kako se definiše fazi broj koji odgovara promenljivoj iznos kredita. Na isti način predstavljen je i ishod svakog bloka pravila, osim što su vrednosti ishoda uvek *loš*, *prosečan* i *dobar* (slika 4.2.6.3). Ulazne promenljive su fazi brojevi LR tipa, dok su sve izlazne promenljive računate po principu centra gravitacije, odnosno centra oblasti[48] opisanog u poglavlju 1.5.4.

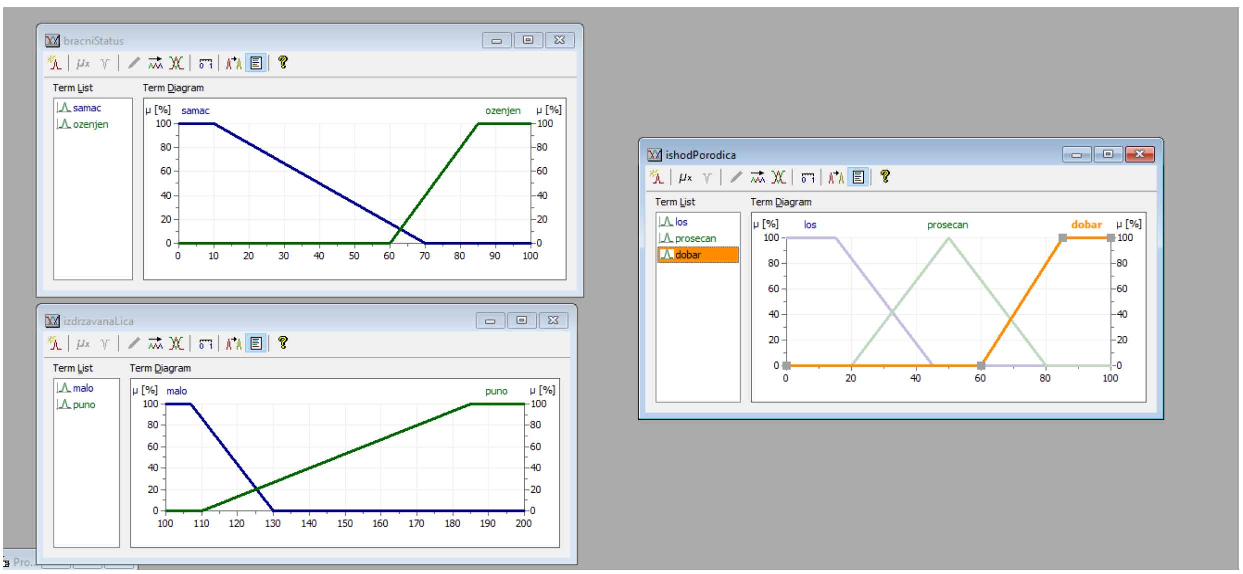
[48] Fast CoA – *Fast Center of Area* je klasičan metod defazifikacije centra gravitacije prilagođen aplikacijama jer na neki način predstavlja približno rešenje, za koje se pokazalo da umnogome umanjuje vreme izračunavanja, ne gubeći time na kvalitetu dobijenih izlaznih veličina.



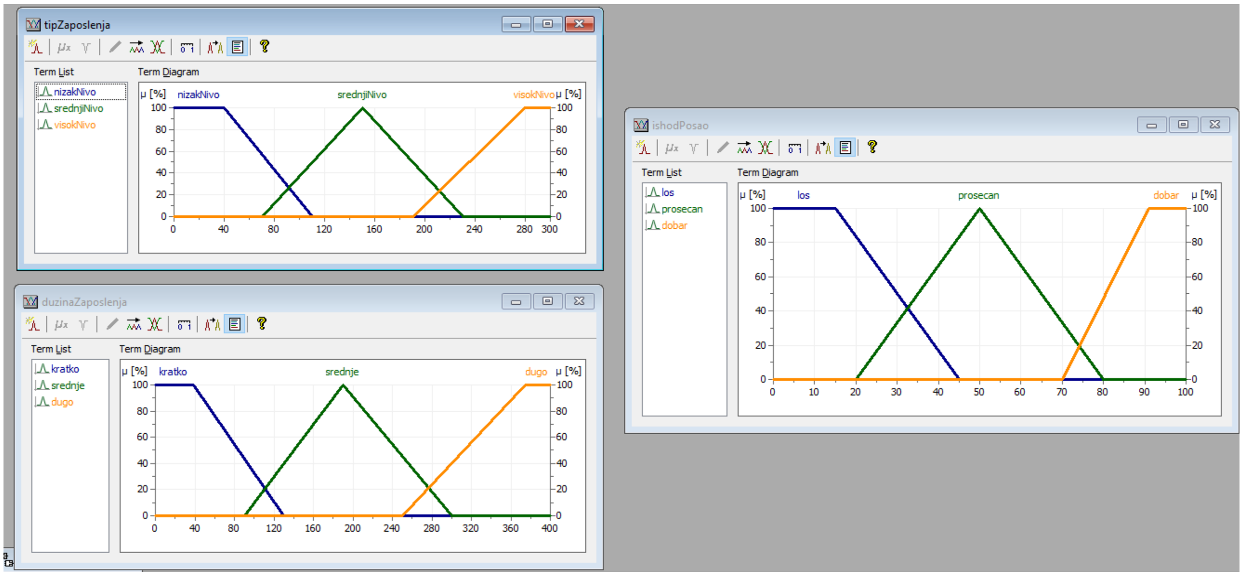
Slika 4.2.6.1 Sveobuhvatni prikaz svih blokova koji učestvuju u fazi odlučivanju



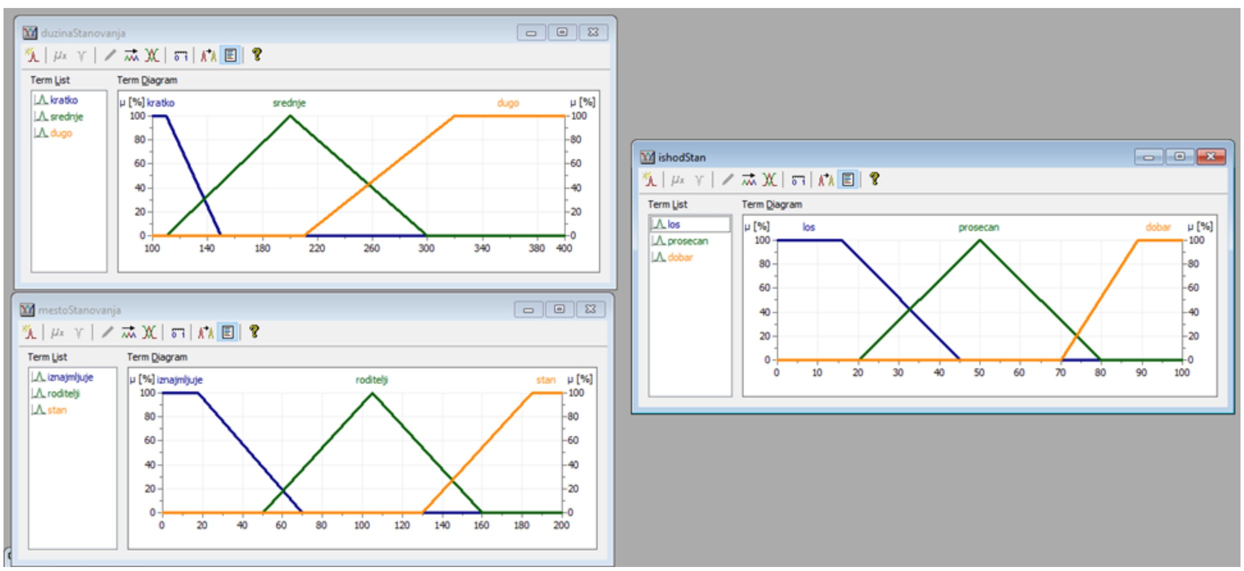
Slika 4.2.6.2 Fazi broj koji predstavlja promenljivu iznos kredita



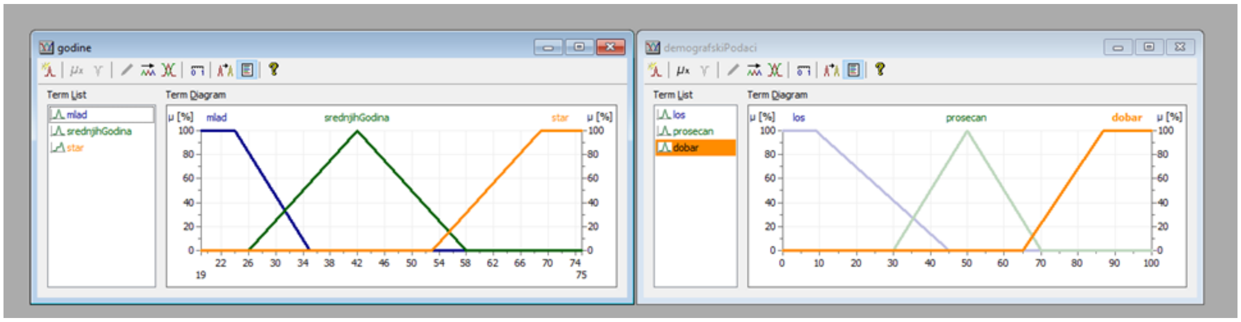
Slika 4.2.6.3 Fazi broj koji predstavlja spajanje fazi brojeva bračni status i izdržavana lica u fazi broj ishodPorodica



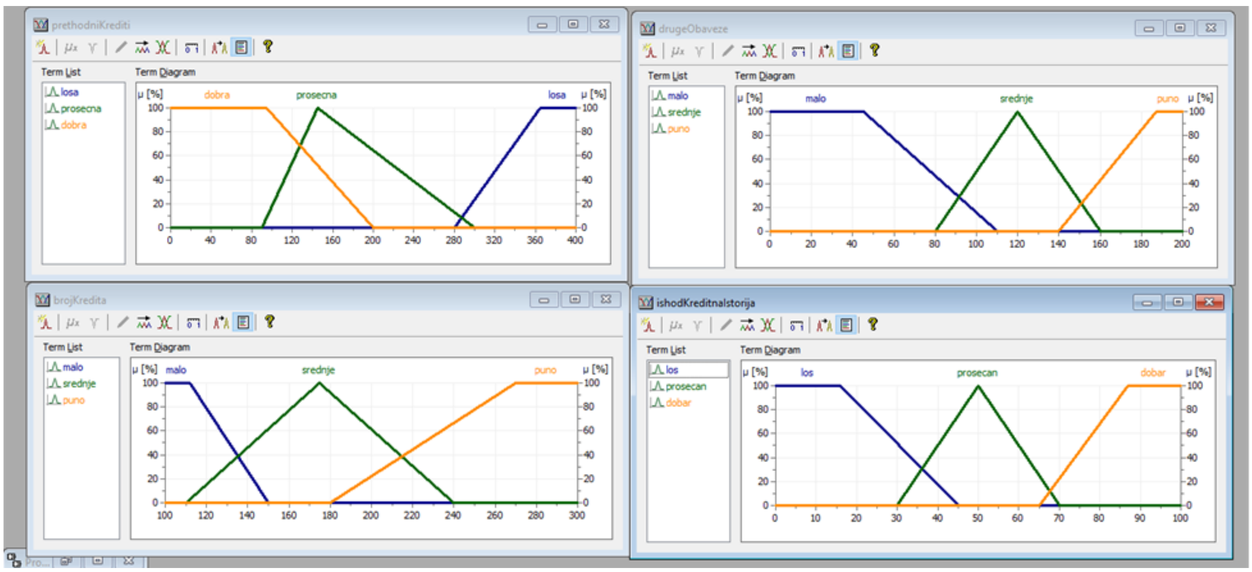
Slika 4.2.6.4 Fazi broj koji predstavlja spajanje fazi brojeva tip zaposljenja i dužina zaposlenja u fazi broj ishodPosao



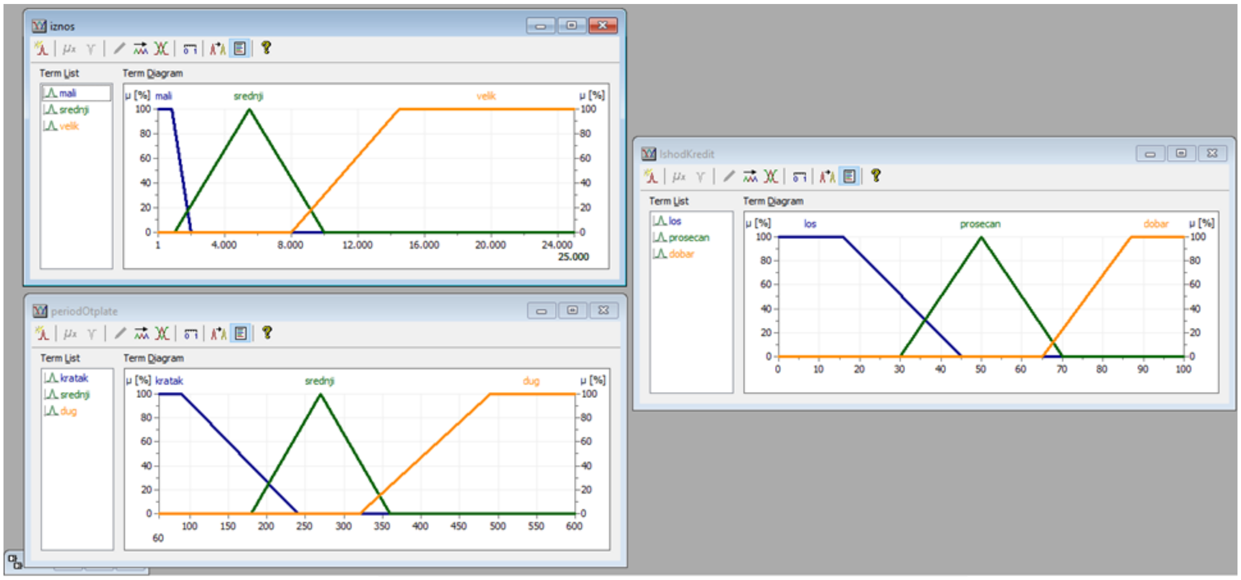
Slika 4.2.6.5 Fazi broj koji predstavlja spajanje fazi brojeva dužina stanovanja i mesto stanovanja u fazi broj ishodStan



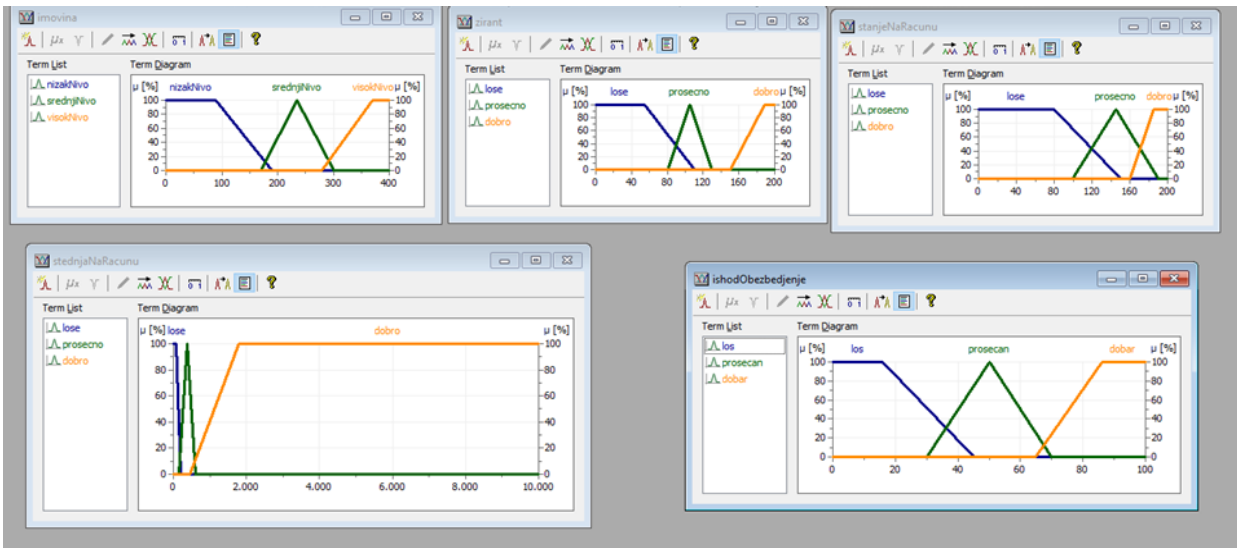
Slika 4.2.6.6 Promenljiva godine predstavljena kao fazi broj sa leve, i konačan ishod bloka demografski podaci predstavljen kao fazi broj sa desne strane



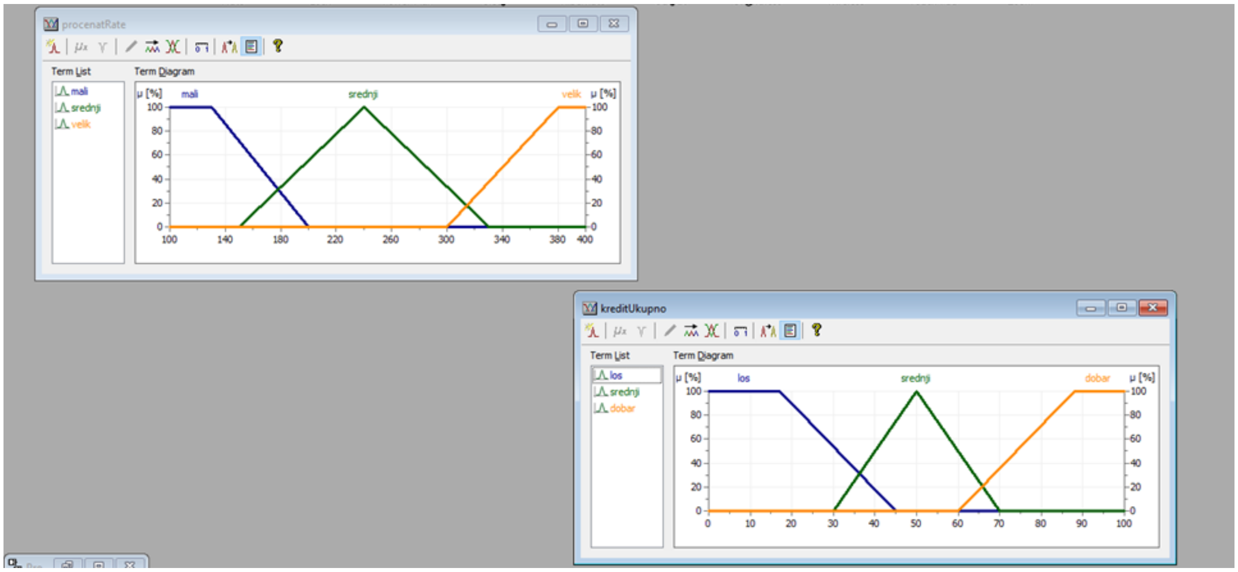
Slika 4.2.6.7 Fazi brojevi prethodniKrediti, brojKredita i druge obaveze zajedno sa njihovim ishodom predstavljenim u vidu fazi broja ishodKreditinaIstorija



Slika 4.2.6.8 Kombinacija fazi brojeva iznos kredita i periodOtplate koji učestvuju u formiranju fazi broja ishodKredit

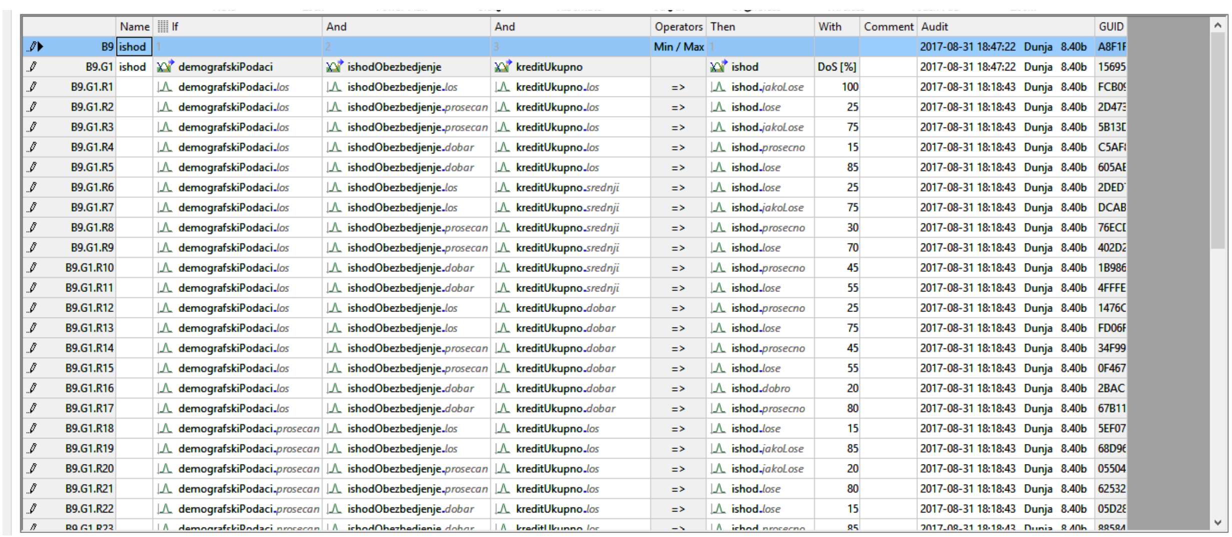


Slika 4.2.6.9 Svi fazi brojevi koji učestvuju u formiranju fazi broja ishodObezbeđenje (imovina, žirant, stanje na računu i štednja na računu)



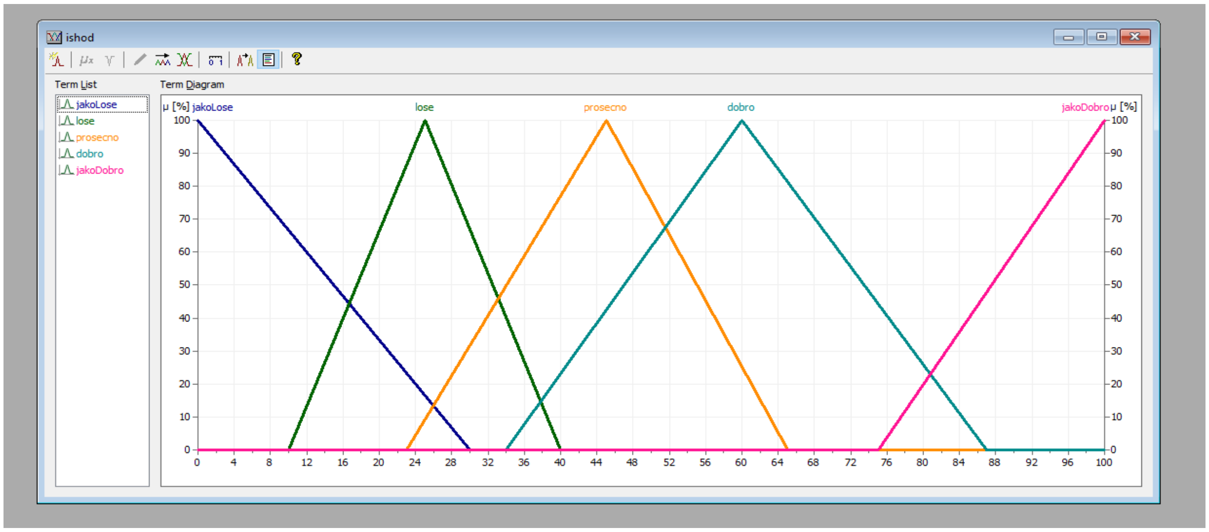
Slika 4.2.6.10 Fazi broj procenatRate koji zajedno sa fazi brojevima ishodKredit i ishodKreditnaIstorija formira fazi broj kreditUkupno

Nakon definisanja fazi brojeva uz pomoć odgovarajućih funkcija pripadnosti, neophodno je konstruisati pravila zaključivanja koja prate tabele iz poglavlja 4.2.5 – Pravila zaključivanja. Način na koji se pravila zaključivanja zadaju softveru prikazan je na slici 4.2.6.11, a grafički prikaz konačnog ishoda nalazi se na slici 4.2.6.12. Pravila do kojih se dolazi na osnovu ekspertskih analiza jednostavno se unose ukucavanjem. S obzirom na to da postoji ukupno 3 vrednosti za svaki od već izračunatih ishoda (loše, prosečno i dobro), ukupan broj mogućih kombinacija je 27, te postoji tačno 27 pravila zaključivanja koja vode do konačnog ishoda.



	Name	If	And	And	Operators	Then	With	Comment	Audit	GUID
B9	ishod	1	2	3	Min / Max	1			2017-08-31 18:47:22 Dunja 8.40b	A8F1F
B9.G1	ishod	demografskiPodaci	ishodObezbedjenje	kreditUkupno		ishod	DoS [%]		2017-08-31 18:47:22 Dunja 8.40b	15695
B9.G1.R1		demografskiPodaci.los	ishodObezbedjenje.los	kreditUkupno.los	=>	ishod.jakoLose	100		2017-08-31 18:18:43 Dunja 8.40b	FCB0
B9.G1.R2		demografskiPodaci.los	ishodObezbedjenje.prosecan	kreditUkupno.los	=>	ishod.lose	25		2017-08-31 18:18:43 Dunja 8.40b	2D47
B9.G1.R3		demografskiPodaci.los	ishodObezbedjenje.prosecan	kreditUkupno.los	=>	ishod.jakoLose	75		2017-08-31 18:18:43 Dunja 8.40b	5B13
B9.G1.R4		demografskiPodaci.los	ishodObezbedjenje.dobar	kreditUkupno.los	=>	ishod.prosecno	15		2017-08-31 18:18:43 Dunja 8.40b	C5AF
B9.G1.R5		demografskiPodaci.los	ishodObezbedjenje.dobar	kreditUkupno.los	=>	ishod.lose	85		2017-08-31 18:18:43 Dunja 8.40b	605AE
B9.G1.R6		demografskiPodaci.los	ishodObezbedjenje.los	kreditUkupno.srednji	=>	ishod.lose	25		2017-08-31 18:18:43 Dunja 8.40b	2DED
B9.G1.R7		demografskiPodaci.los	ishodObezbedjenje.los	kreditUkupno.srednji	=>	ishod.jakoLose	75		2017-08-31 18:18:43 Dunja 8.40b	DCAB
B9.G1.R8		demografskiPodaci.los	ishodObezbedjenje.prosecan	kreditUkupno.srednji	=>	ishod.prosecno	30		2017-08-31 18:18:43 Dunja 8.40b	76ECD
B9.G1.R9		demografskiPodaci.los	ishodObezbedjenje.prosecan	kreditUkupno.srednji	=>	ishod.lose	70		2017-08-31 18:18:43 Dunja 8.40b	402D2
B9.G1.R10		demografskiPodaci.los	ishodObezbedjenje.dobar	kreditUkupno.srednji	=>	ishod.prosecno	45		2017-08-31 18:18:43 Dunja 8.40b	1B986
B9.G1.R11		demografskiPodaci.los	ishodObezbedjenje.dobar	kreditUkupno.srednji	=>	ishod.lose	55		2017-08-31 18:18:43 Dunja 8.40b	4FFFE
B9.G1.R12		demografskiPodaci.los	ishodObezbedjenje.los	kreditUkupno.dobar	=>	ishod.prosecno	25		2017-08-31 18:18:43 Dunja 8.40b	1476C
B9.G1.R13		demografskiPodaci.los	ishodObezbedjenje.los	kreditUkupno.dobar	=>	ishod.lose	75		2017-08-31 18:18:43 Dunja 8.40b	FD06F
B9.G1.R14		demografskiPodaci.los	ishodObezbedjenje.prosecan	kreditUkupno.dobar	=>	ishod.prosecno	45		2017-08-31 18:18:43 Dunja 8.40b	34F99
B9.G1.R15		demografskiPodaci.los	ishodObezbedjenje.prosecan	kreditUkupno.dobar	=>	ishod.lose	55		2017-08-31 18:18:43 Dunja 8.40b	0F467
B9.G1.R16		demografskiPodaci.los	ishodObezbedjenje.dobar	kreditUkupno.dobar	=>	ishod.dobro	20		2017-08-31 18:18:43 Dunja 8.40b	2BAC
B9.G1.R17		demografskiPodaci.los	ishodObezbedjenje.dobar	kreditUkupno.dobar	=>	ishod.prosecno	80		2017-08-31 18:18:43 Dunja 8.40b	67B11
B9.G1.R18		demografskiPodaci.prosecan	ishodObezbedjenje.los	kreditUkupno.los	=>	ishod.lose	15		2017-08-31 18:18:43 Dunja 8.40b	5EF07
B9.G1.R19		demografskiPodaci.prosecan	ishodObezbedjenje.los	kreditUkupno.los	=>	ishod.jakoLose	85		2017-08-31 18:18:43 Dunja 8.40b	68D9
B9.G1.R20		demografskiPodaci.prosecan	ishodObezbedjenje.prosecan	kreditUkupno.los	=>	ishod.jakoLose	20		2017-08-31 18:18:43 Dunja 8.40b	05504
B9.G1.R21		demografskiPodaci.prosecan	ishodObezbedjenje.prosecan	kreditUkupno.los	=>	ishod.lose	80		2017-08-31 18:18:43 Dunja 8.40b	62532
B9.G1.R22		demografskiPodaci.prosecan	ishodObezbedjenje.dobar	kreditUkupno.los	=>	ishod.lose	15		2017-08-31 18:18:43 Dunja 8.40b	05D2
B9.G1.R23		demografskiPodaci.prosecan	ishodObezbedjenje.dobar	kreditUkupno.los	=>	ishod.prosecno	85		2017-08-31 18:18:43 Dunja 8.40b	88584

Slika 4.2.6.11 Formiranje tabela za zaključivanje u softveru

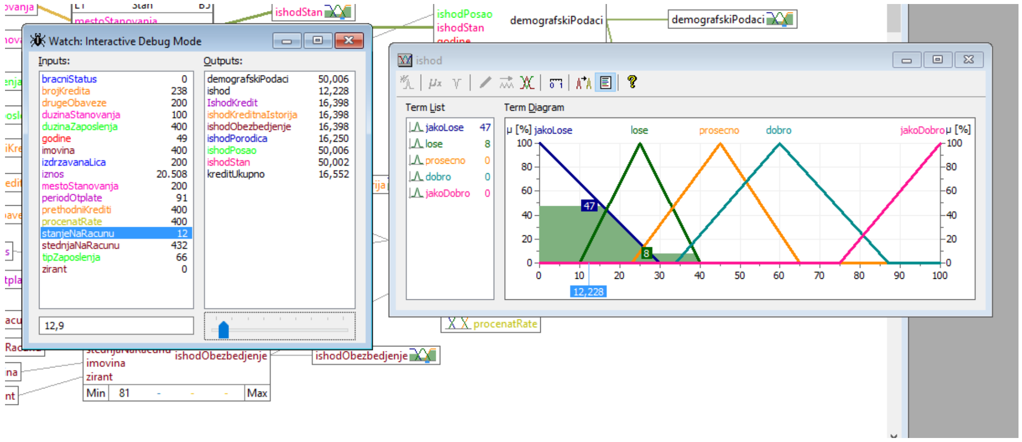


Slika 4.2.6.12 Konačan ishod predstavljen u vidu fazi brojeva

4.2.7. Simulacija

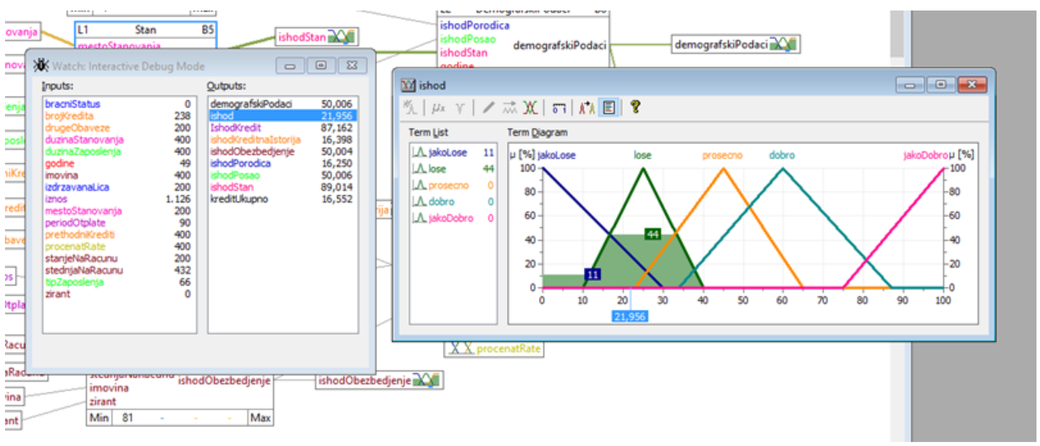
Kada su svi potrebni parametri podešeni, fazi brojevi i izlazne veličine konstruisani na odgovarajući način, a pravila zaključivanja pažljivo odabrana tako da prate poslovnu logiku vremena u kom se kreiraju, dovoljno je samo ukucati parametre koji određuju klijenta i njegov *skor* se izračunava koristeći fazi zaključivanje. Na narednim slikama prikazano je pet klijenata od kojih svaki upada u jednu od pet mogućih kategorija: *jako loš, loš, prosečan, dobar, jako dobar*. Sa leve strane su prikazane vrednosti ulaznih promenljivih (*inputs*), sa desne su sve izlazne veličine (*outputs*), dok je pored toga prikazan i grafik koji jasno oslikava pomenuti metod defazifikacije - metod centra gravitacije.

Na slici 4.2.7.1 prikazan je primer klijenta koji je dobio ukupnu ocenu loš. Sa leve strane mogu se videti njegovi parametri za svaku promenljivu. Tako je na primer on dobio 0 poena po osnovu bračnog statusa, a 200 poena po osnovu izdržavanih lica – ovo je prikazano u koloni Inputs. Kombinacijom ova dva fazi broja, on je ukupno dobio 16,250 poena kao ishod bloka odlučivanja vezanog za njegovo porodično stanje. Na isti način su zasebno izračunate kombinacije svih parametara, a njihove vrednosti su pobrojane u koloni Outputs. Zatim je ukupan ishod za ovog klijenta grafički prikazan. Po osnovu pravila centra gravitacije, on je upao u kategoriju izrazito loših klijenata. Iako su njegovi demografski podaci dosta dobri, ostali blokovi zaključivanja su ovog klijenta ipak deklarisali kao jako lošeg.



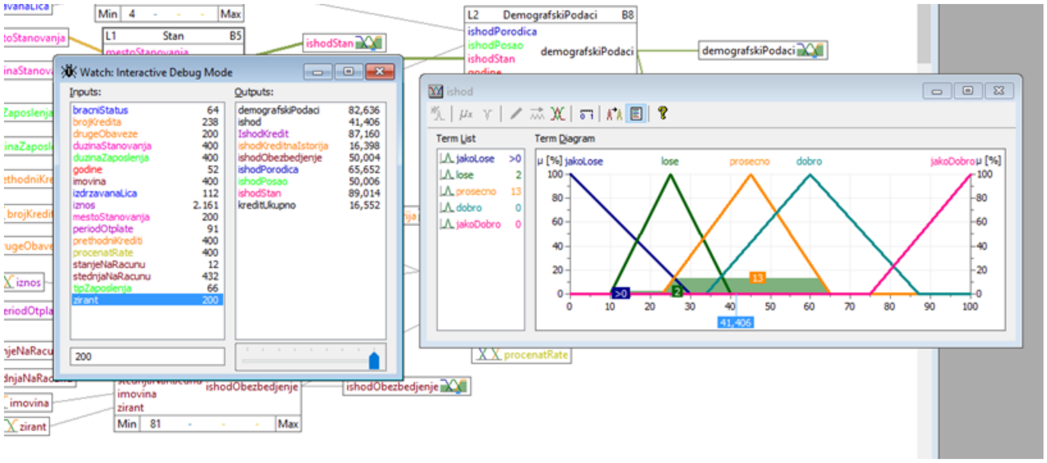
Slika 4.2.7.1 Primer klijenta koji je dobio ocenu jako loš

Na narednoj slici, slici 4.2.7.1, prikazan je primer klijenta koji upada u grupu loših. I ovoga puta se po osnovu njegovih ulaznih podataka i primenom metode centra gravitacije dolazi do njegove ocene koja se može utvrditi na grafiku. Ovaj klijent ima veoma dobre demografske podatke, kao i podatke koje se tiču njegovog stambenog pitanja, ali ga je loša kreditna istorija odvukla u grupu loših klijenata.



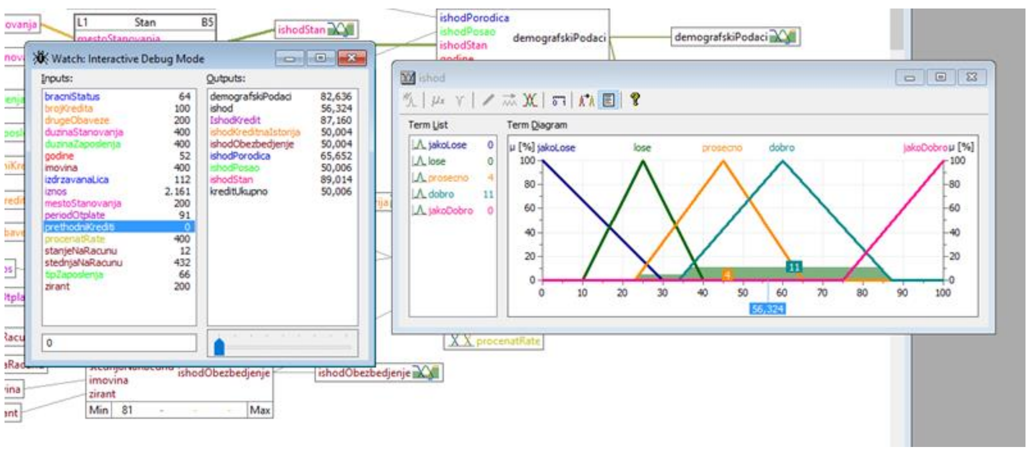
Slika 4.2.7.2 Primer klijenta koji je dobio ocenu loš

Na slici 4.2.7.3 nalazi se primer klijenta koji je upao u kategoriju prosečni. Na ovom primeru se može videti kako on pripada skupu loših klijenata sa 2%, nešto iznad 0% pripada skupu jako loših klijenata, a metodom centra gravitacije određuje se da je njegova konačna pripadnost zapravo u grupi prosečnih klijenata, jer njoj pripada 13%, što je najveća pripadnost.



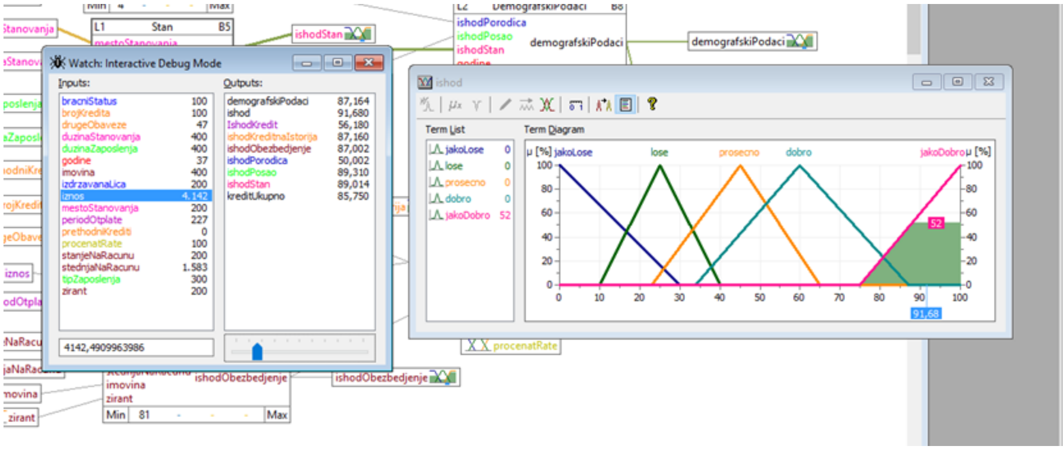
Slika 4.2.7.3 Primer klijenta koji je dobio ocenu prosečan

Slika 4.2.7.4 predstavlja klijenta koji je dobio ocenu dobar. Kombinacijom njegovih parametara dolazi se do ukupne ocene 56,324 što mu dodeljuje pripadnost od 11% skupu dobrih klijenata.



Slika 4.2.7.4 Primer klijenta koji je dobio ocenu dobar

Poslednji primer je primer klijenta koji u potpunosti pripada skupu jako dobrih klijenata. Njegov ukupan skor je 91,68, što ga svrstava u grupu jako dobrih klijenata i to sa vrlo visokom pripadnošću od 52%.



Slika 4.2.7.5 Primer klijenta koji je dobio ocenu jako dobar

Zaključak

If you think the math isn't important, you don't know the right math.[49]

Kris Ferguson, profesionalni pokeraš

Matematika je nauka koja rešava probleme. Ono što je za preduzetnika uspešna godina, za lekara izlečen pacijent, za pisca milionski tiraž – to je za matematičara rešen zadatak. A rešenja ima mnogo. Sa trenutnim razvojem matematike i računarskih tehnologija, sve je manje dilema da li rešenje za neki problem postoji, a sve više koje je od bezbroj mogućih rešenja najbolje. A onda i definicija najboljeg postaje problem za sebe.

Za jednu banku najbolji model biće onaj koji je najkonzervativniji u pogledu rizika, a za drugu to može biti model sa kojim želi da privuče što više novih klijenata, sa blagom sklonošću ka riziku koju takva strategija sa sobom nosi. U moru zadatih kriterijuma, u poslednje vreme se sve češće nameće i potreba da model što bolje prati aktuelne promene u ekonomskim prilikama, tj. da bude moguće njegovo brzo i jednostavno prilagođavanje na trenutne uslove. Ovo je upravo test na kom najrasprostranjeniji modeli zasnovani na linearnoj ili logističkoj regresiji padaju – uglavnom se u takvim situacijama oni moraju razvijati ispočetka, a ponovni razvoj zahteva i vreme i novac. Ovde se krije velika prednost modela zasnovanih na fazi zaključivanju jer je njihova osetljivost na promene na ekonomskoj sceni zadivljujuća, a, pre svega, leži u činjenici da oni i jesu nastali da bi se omogućilo opisivanje sistema u kojima vlada nestalnost i nepredvidljivost. Ono što daje moć fazi modelima je to što se, čak i ako se desi neka nepredviđena drastična promena ekonomskih prilika koju sam model ne može toliko dobro ispratiti (npr.

[49] *Ako smatrate da matematika nije važna – ne znate pravu matematiku,* rečenica je poznatog pokeraša Krisa Fergusona, čiji su roditelji doktorirali matematiku (njegov otac predaje teoriju igara na kalifornijskom univerzitetu – UCLA), a i on sam je doktorirao kompjuterske nauke. Njegov stil igre se u potpunosti bazira na matematici i velikom poznavanju teorije igara, a priznao je i da se služi kompjuterskim simulacijama kako bi što više unapredio svoju igru.

ekonomska kriza), bilo koji deo modela može veoma jednostavno i brzo modifikovati, bez ikakvog uticaja na ostale korake u zaključivanju. Fazi model je po svojoj prirodi jednostavan za razumevanje i praćenje. Njegova specifična konstrukcija pruža uvid u sve korake koji su doveli do određene odluke, te ovakav model uspešno rešava čest problem u modeliranju – efekat crne kutije (eng. *black box effect*) koji onemogućava da se odlučivanje razlaže na činioce i na taj način do detalja analizira. Osim što su ekonomske prilike veoma nezahvalne za predviđanje, slučaj je isti i kada se radi o previđanju ponašanja klijenta. S obzirom na način na koji su konstruisani trougaoni fazi brojevi koji opisuju svaku promenljivu, a naročito i na usaglašenost međusobne interakcije među promenljivama u blokovima odlučivanja, ovakav model pruža nebrojeno mnogo mogućnosti za kombinovanje, pa samim tim i usavršavanje modela, odnosno preciznosti njegovog predviđanja. Naravno, kao i svi modeli, oni imaju i svoje mane, a možda i najveća mana potiče iz činjenice da spadaju u ekspertske modele, te bez dobrog eksperta, nema ni dobrog modela. Druga mana koju je važno spomenuti je da se performanse fazi modela mogu adekvatno meriti tek nakon njegove implementacije, jer se pretpostavlja da se ekspertsko mišljenje na kom je model zasnovan kreira kroz poznavanje svih dosadašnjih slučajeva, pa bi svako merenje performansi koristeći istorijske podatke bilo nepouzdano.

Ovaj rad napisan je sa verovanjem da modeli fazi zaključivanja imaju neprocenjivu vrednost i primenu u maltene svim oblastima oko nas i da im kao takvim predstoji sjajna budućnost i u bankarskom sektoru.

Literatura

[1] Bandemer, Hans and Nather, Wolfgand, *Fuzzy Data Analysis*, Springer, 1992.
[2] Beliakov, Gleb, Pradera, Ana and Calvo Tomasa*, Aggregation Functions: A Guide for Practitioners*, Springer, 2007
[3] Bojadziev George and Bojadziev Maria*, Fuzzy Logic for Business, Finance, and Management*, Second Edition, World Scientific, 2007.
[4] Chen, Guanrong and Pham, Trung Tat, *Introduction to Fuzzy Sets*, Fuzzy Logic and Fuzzy Control Systems, CRC Press, 2001.
[5] Dompere, Kofi K, *Cost-Benefit Analisis and the Theory of Fuzzy Decisions*, Springer, 2004.
[6] Dubois, Didier and Prade, Henri, *Fuzzy Sets and Systems, Theory and Applications*, Academic Press Inc, 1980.
[7] Dubois, Ostasiewicz, Prade, *Fuzzy Sets: History and Basic Notions*, Springer
[8] Fuller, Robert, *Fuzzy Reasoning and Fuzzy Optimization*, Eotvos Lorand University, 1998,
[9] Garrido, Angel*, A Brief History of Fuzzy Logic*, Scientific Paper, UNED, Madrid
[10] Gupta, Qi, *Theory of T-norms and fuzzy inference methods*, University of Saskatchewan, 1989.
[11] Ibrahim, Ahmad M, *Fuzzy Logic for Embedded Systems Applications*, Elsevier Science, 2004.
[12] Kandasamy, Vasantha W.B, Smarandache, Florentin and Amal K, *Fuzzy Linguistic Topological Spaces*, Zip Publishing, 2012.
[13] Klir, George J. and Yuan, Bo*, Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Theory and Applications*, Prentice Hall PTR, 1995.
[14] Kosko, Bart, *Introduction to Fuzzy Set Theory*, University of Southern California, 1990.
[15] Lee, Kwang H, *First Course on Fuzzy Theory and Applications*, Springer, 2005.
[16] Li, Halang, Chen, *Integration of Fuzzy Logic and Chaos Theory*, Springer, 2006.
[17] Loia, Nikravesh, Zadeh, *Fuzzy Logic and the Internet*, Springer, 2004.
[18] Martinez, Acosta, *Aggregation Operators Review - Mathematical Properties and Behavioral Measures*, Modern Education and Computer Science, 2015.
[19] Ross, Timothy J, *Fuzzy Logic with Engineering Applications*, Third Edition, Wiley, 2010.
[20] Ruan, Chen, Kerre, Wets, *Intelligent Data Mining*, Techniques and Applications, Springer, 2005.
[21] Siddiqi, Naeem, *Credit Risk Scorecards - Developing and Implementing Intelligent Credit Scoring*, John Wiley & Sons Inc, 2006
[22] Sivanandam, Sumathi, Deepa*, Introduction to Fuzzy Logic using Matlab*, Springer, 2007.
[23] Thomas, Edelman and Crook, *Credit Scoring and Its Applications*, S.I.A.M, 2002.
[24] Wang, Paul P, Ruan Da and Kerre, Etienne E, *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, A Spectrum of Theoretical & Practical Issues, Springer, 2007.
[25] Wierman, Mark J, *An Intro to Mathematics of Uncertainty*, Creighton University, 2010.
[26] Zadeh, Lofti A, *The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning*, Computer Science Division, University of Californica, Berkely, 1975.
[27] Zadeh, Lofti A. and Yager, Ronald R, *An Introduction to Fuzzy Logic Applications in Intelligent Systems*, Springer, 1992.
[28] Zimmermann, Hans J, *Fuzzy Set Theory – and Its Applications*, Fourth Edition, Springer, 2001.

Biografija

Dunja Vukčević rođena je 04.02.1991. godine u Vrbasu, gde je završila osnovnu školu Bratstvo-jedinstvo. 2005. godine upisala je društveno-jezički smer gimnazije Žarko Zrenjanin, takođe u Vrbasu. Nakon toga, 2009. godine upisuje Prirodno-matematički Fakultet na Univerzitetu u Novom Sadu, smer primenjena matematika – matematika finansija. Master na istom smeru upisala je 2013. godine. Od 2017. godine zaposlena je u Raiffeisen banci u Beogradu, na poziciji analitičar podataka u okviru odeljenja za modeliranje.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Dunja Vukčević
AU

Mentor: dr Ivana Štajner-Papuga
ME

Naslov rada: Primena fazi odlučivanja u procesu kreditnog skoringa
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s/en

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2018.

GO

Izdavač: autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno – matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (4/94/28/9/33/41/0)
FOR (broj poglavlja/strana/lit.citata/tabela/slika/grafika/priloga)

Naučna oblast: matematika

NO

Naučna disciplina:	primenjena matematika
ND	
Predmetne odrednica,	fazi skupovi, fazi logika, fazi zaključivanje, kreditni skoring, aplikativni model kreditnog skoringa
ključne reči:(**PO**, **UDK**)	
Čuva se:	Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno - matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČS	
Važna napomena:	nema
VN	
Izvod **(IZ):**	U ovom radu predstavljeni su osnovni pojmovi fazi skupova i fazi logike, zajedno sa trougaonim normama i konormama. Takođe su predstavljeni fazi brojevi i fazi aritmetika, a oni se kasnije koriste u primeru skoring modela za klijente koji apliciraju za gotovinski kredit u banci.
Datum prihvatanja teme od strane NN veća:	03.09.2018.
DP	
Datum odbrane:	oktobar 2018.
DO	.

Članovi komisije:

KO

Predsednik:	dr Andreja Tepavčević, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član:	dr Nataša Spahić, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor:	dr Ivana Štajner-Papuga, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES & MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Textual printed material

TR

Contents code: Master’s thesis

CC

Author: Dunja Vukčević

AU

Mentor: Dr Ivana Štajner-Papuga

ME

Title: Fuzzy Inference in Credit Scoring

TI

Language of text: Serbian (Latinic)

LT

Language of abstract: s /en

LT

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2018.

PY

Publisher: author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Trd D. Obradovića 4

PP

Physical description: (4/94/28/9/33/41/0)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Applied mathematics

SD

Subject Key words: fuzzy sets, fuzzy logic, fuzzy inference, credit scoring, application scoring

SKW

Holding data: In the library of Department of Mathematics and Informatics

HD

Note:

N

Abstract **(AB):** This paper presents basic concepts of fuzzy sets and fuzzy logic, together with triangular norms and conorms. Furthermore, the fuzzy number and fuzzy arithmetics are introduced, and later used for the development of the application scorecard model for a client applying for a cash loan in a bank.

Accepted on Scientific board on: 03.09.2018.

AS

Defended: October 2018.

DE

Thesis Defend board:

DB

President:	dr Andreja Tepavčević, full profesor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member:	dr Nataša Spahić, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Mentor:	dr Ivana Štajner-Papuga, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad