UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Dragana Knežević

Teoreme o nepokretnoj tački za višeznačna preslikavanja u metričkim prostorima

-Master rad-

Mentor: Prof. dr Ljiljana Gajić

Novi Sad, 2015.

oznake:

Neka je (X, d) metrički prostor, tada je

2^X = {C | C je neprazan podskup od X },

$\mathcal{B}(X)$ = {A | A je neprazan ograničen podskup od X},

$\mathcal{CB}(X)$ = {A | A je neprazan, zatvoren i ograničen podskup od X},

$\mathcal{K}(X)$ = {A | A je neprazan kompaktan podskup od X},

$\mathcal{F}(X)$ = {A | A je neprazan zatvoren podskup od X},

$\mathcal{KC}(X)$ = {A | A je neprazan, kompaktan i konveksan podskup od X},

$\mathcal{P}(X)$ = {A | A je podskup od X},

F_T = $\{x \in X : \ x \in Tx\}$ (skup svih nepokretnih tačaka preslikavanja T),

$\mathcal{G}r(T) = \{(x, y) : x \in X, \ y \in Tx\}$ (graf višeznačnog operatora T).

Sadržaj:

Predgovor

Teorija nepokretne (fiksne) tačke je jedna od važnijih grana nelinearne analize. Ova teorija povezana je sa mnogim oblastima matematike kao što su klasična analiza, funkcionalna analiza, numerička analiza... Bavi se problemima egzistencije, jedinstvenosti i konstrukcije nepokretne tačke preslikavanja. Osim što se primenjuje u matematici, primenjuje se i u mnogim drugim naukama: fizika, hemija, biologija, kao i u statistici i ekonomiji. Polazni rezultat, metričke teorije nepokretne tačke, slavni Banachov princip kontrakcije iz 1922. godine, do danas je uopšten u raznim pravcima među kojima je pitanje nepokretne tačke za višeznačna preslikavanja u metričkim prostorima. Značajne rezultate u ovoj oblasti dali su S.B Nadler, S.Reich, Lj.Ćirić, O.Hadžić...

U ovom radu su dati dokazi egzistencije nepokretne tačke, prikazane su osnovne i najjednostavnije metode za pronalaženje nepokretne tačke za višeznačna preslikavanja. Rad se satoji iz tri poglavlja.

U uvodnom delu rada su obuhvaćene osnovne osobine topoloških i metričkih prostora, kao i neki rezultati metričke teorije nepokretne tačke za jednoznačna preslikavanja.

U drugom poglavlju su dati osnovni pojmovi: definicije višeznačnog preslikavanja, Lipšicovog višeznačnog preslikavanja i kontraktivnog višeznačnog preslikavanja kao i njihove osobine.

U trećem poglavlju su predstavljeni rezultati S. B. Nadlera, koji je prvi dokazao egzistenciju nepokretne tačke za klasu kontrakcija, višeznačnih preslikavanja u kompletnim metričkim prostorima. Razmatrano je uopštenje Ćirićeve generalizovane kontrakcije, kao i višeznačno Zamfirescu preslikavanje u kome je prezentovan i rezultat o nizu – Pikardovih projekcionih iteracija (Pickard projection iteration). Prikazani su rezultati o egzistenciji nepokretne tačke za vrlo važnu klasu preslikavanja „non-self mappings“ tj. funkcija koje ne preslikavaju ceo skup u samog sebe, nego samo rub. Dati su delimični odgovori na Reichov problem koji je ostao „otvoren“. Za „weakly inward“ preslikavanja prikazani su rezultati u Banachovim prostorima. Uveden je pojam ε-lančastog metričkog prostora i posmatrana je lokalna kontrakcija na takvim prostorima. U poslednjem delu ovog poglavlja dati su i neki rezultati iz teorije nepokretne tačke neekspanzivnih višeznačnih preslikavanja.

1. Uvod

1.1 Osnovni pojmovi i definicije

Metrički prostor predstavlja neprazan skup na kome je definisano rastojanje između svaka dva elemenata tog skupa. Osobine rastojanja između dve tačke, date su u sledećoj definiciji. U ovom poglavlju korišćena je literatura ([17], [11]) .

Definicija 1.1.1: Neka je $X \neq \emptyset$ i $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ tako da važe sledeći uslovi:

- $d\,(x, y) \geq 0$ (nenegativnost)
- $d\,(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $\forall x, y \in X$, $\quad d\,(x, y) = d\,(y, x)$ (simetričnost),
- $\forall x, y, z \in X$, $\quad d\,(x, y) \leq d\,(x, z) + d\,(z, y)$ (nejednakost trougla)

Tada kažemo da je preslikavanje d metrika na skupu X, broj $d(x, y)$ je ***rastojanje*** tačaka x i y, a uređeni par (X, d) je ***metrički prostor.***

Navedeni uslovi govore da je rastojanje između dve tačke uvek nenegativno, rastojanje između tačaka x i y je isto kao i rastojanje između tačaka y i x, rastojanje između tačaka x i y nije veće od zbira rastojanja tačaka x i z i rastojanja z i y.

Primeri: [17]

1. Na skupu *R:* $\quad d\,(x, y) = |x - y|$
2. Na skupu R^n: $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$;

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}},\ 1 \leq p \leq \infty$$

$$d_\infty(x, y) = sup_{i=1,..,n} |x_i - y_i| .$$

Sledeće tvrđenje predstavlja još jednu važnu osobinu rastojanja, koja sledi iz navedena četiri uslova.

Tvrđenje 1.1.1**:** $|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z),\ \ x,y,z \in X.$

Definicija 1.1.2: Neka je (X,d) metrički prostor. ***Otvorena lopta*** sa centrom $x_0 \in X$ i poluprečnikom $r > 0$ se definiše :

$$L(x_0\,,r) \;=\; \{x :\;\; x \;\in\; X\,,\; d\,(x_0\,,x) \;<\; r\}.$$

Definicija 1.1.3: Neka je (X,d) metrički prostor. ***Zatvorena lopta*** sa centrom $x_0 \in X$ i poluprečnikom $r > 0$ se definiše :

$$B(x_0\,,r) \;=\; \{x :\;\; x \;\in\; X\,,\; d\,(x_0\,,x) \;\leq\; r\}.$$

Definicija 1.1.4: U metričkom prostoru ***otvoreni skup*** *O* je unija lopti, tj.

$O \;=\; \bigcup_{\alpha\in\Lambda} L(x_{\alpha,}r_{\alpha})$ je otvoren skup.

U $\mathbb{R}$ su otvoreni skupovi unije intervali.

Teorema 1.1.1: Neka je $\mathcal{O}$ familija svih otvorenih skupova u metričkom prostoru (X,d). Tada važi:

1. $\emptyset \in \mathcal{O},\ \ X \in \mathcal{O}$ (prazan skup i skup X su otvoreni)
2. *Ako* $O_1\,,O_2 \in \mathcal{O} \;\Rightarrow\; O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$ (presek svaka dva otvorena skupa je otvoren skup)
3. *Ako je* $O_p \in \mathcal{O}, p \in B \;\Rightarrow\; \bigcup_{p\in B} O_p \in \mathcal{O}$ (unija proizvoljno mnogo otvorenih skupova je otvoren skup).

Lako se matematičkom indukcijom pokazuje da osobina 2. važi i za svaki konačan presek otvorenih skupova.

Definicija 1.1.5: Neka je $X \neq \emptyset$ i τ neka familija podskupova skupa X sa sledećim osobinama:

$[O_1]$ $\quad X \in \tau, \emptyset \in \tau,$

$[O_2]$ $\quad Ako\ je\ za\ sve\ i \in I\ (I\ je\ proizvoljan\ skup)\ A_i \in \tau\ tada\ je$

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau\ .$$

$[O_3]$ $\quad Ako\ su\ A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau\ (n\ je\ proizvoljan\ prirodan\ broj)\ tada\ je$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau.$$

Tada je uređeni par (X, τ) ***topološki prostor***, a elementi familije τ su otvoreni skupovi, τ se zove ***topologija*** na prostoru X.

Definicija 1.1.6: Neka je (X, d) metrički prostor. Familiju $\tau = \tau_d$ podskupova od X definišemo na sledeći način
$\emptyset \in \tau\ i\ O \in \tau$ ako i samo ako važi sledeći uslov:

$$(\forall x \in O)(\exists r_x > 0)(L(x, r_x) \subset O).$$

Prepoznajemo da je $\tau_d = \mathcal{O}$, pa na osnovu Teoreme 1.1.1, dobija se sledeći rezultat.

Teorema 1.1.2: [17] Familija τ_d definiše topologiju u metričkom prostoru (X, d).

Definicija 1.1.7: Neka je (X, d) metrički proctor. Skup $A \subset X$ je ***okolina tačke*** $x_0 \in A$ ako je za neko $r > 0$

$$L(x_0, r) \subset A.$$

Definicija 1.1.8: U topološkom prostoru (X, τ) familija $\mathcal{B}(x_0)$ nekih okolina tačke $x_0 \in X$ je ***baza okolina tačke*** x_0 ako za svaku okolinu V tačke x_0 postoji $B \in \mathcal{B}(x_0)$ takvo da je $x_0 \in B \subset V$.

Teorema 1.1.3: [17] U (X, d) skup A je otvoren ako i samo ako je okolina svake svoje tačke.

Definicija 1.1.9: Neka je (X, τ) topološki prostor. Ako je $Z \subset X$ komplement otvorenog skupa $O \subset X$ kažemo da je skup Z ***zatvoren***.

Teorema 1.1.4: [17] Za zatvorene skupove važi:

- $X, \emptyset$ su zatvoreni i otvoreni (jer su jedan drugom komplementi)

- ako su Z_1 i Z_2 zatvoreni tada je $Z_1 \cup Z_2$ zatvoren
- Ako su $Z_{\alpha,}$ $\alpha \in \Lambda$ zatvoreni, onda je $\bigcap Z_\alpha$ zatvoren.

Definicija 1.1.10: Neka je (X, d) metrički proctor i $A \subset X$. Tada:

1. Tačka x je ***unutrašnja tačka*** za A $(tj.\ x \in A^o)$ ako postoji $r_x > 0$ tako da je

$$L(x, r_x) \subset A;$$

2. Tačka x je ***adherentna tačka*** za A $(tj. x \in \bar{A})$ ako je za svako $r > 0$

$$L(x, r) \cap A \neq \emptyset;$$

3. Tačka x je ***tačka nagomilavanja*** za A ako je za svako $r > 0$

$$L(x, r) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset.$$

Definicija 1.1.11: Neka je (X, d) metrički prostor. Skup $A \subset X$ je ***gust*** u X, ako je svaka tačka iz X adherentna za A, tj. $\bar{A} = X$.

Definicija 1.1.12: Metrički prostor (X, d) je ***separabilan*** ako postoji prebrojiv gust skup A u X.

Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subset X$ i $x \in X$. Rastojanje tačke x od skupa A je definiano sa

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a);\ a \in A\}.$$

Definicija 1.1.13: Neka je (X, d) metrički prostor i neka je $C \subseteq X$ neprazan i zatvoren. Za dato $x \in X$, rastojanje od podskupa C je dato sa:

$$d(x, C) = d_C(x) = \inf_{y \in C} d(x, y).$$

Ako postoji $z \in C$, gde je

$$d_C(x) = d(x, z)$$

kažemo da x ima ***najbližu tačku*** koja pripada C.

Teorema 1.1.5: [17] Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subset X$. Tada je

$$\bar{A} = \{x;\ \ x \in X,\ \ d(x, A) = 0\}.$$

Definicija 1.1.14: U metričkom prostoru (X, d) kažemo da niz $\{a_n\}_{n\in N}$ iz X ***konvergira*** ka $a \in X$, što označavamo sa $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, ako je $\lim_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0$ odnosno

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ (n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon)$$

Definicija 1.1.15: *Niz* $\{x_n\}_{n\in N}$ iz X je ***Košijev*** ako važi:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0(\epsilon) \in N)(\forall m, n \in N)(m, n > n_0(\epsilon) \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon)$$

Teorema 1.1.6: [17] Ako je niz $\{x_n\}_{n\in N}$ iz X konvergentan onda je Košijev.

Teorema 1.1.7: [17] Neka je (X, d) metrički prostor, $A \subset X$ i a tačka nagomilavanja skupa A. Tada postoji niz $\{a_n\}_{n\in N}$ u A takav da je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Definicija 1.1.16: Topološki prostor je ***Hauzdorfov*** ako za svake dve različite tačke $a, b \in X$ postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1 i O_2 u X takvi da je $a \in O_1\ i\ b \in O_2$.

Teorema 1.1.8: [17] Metrički prostor je Hauzdorfov.

Definicija 1.1.17: Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subset X$. Skup A je ***kompaktan*** ako iz svake familije otvorenih skupova $\{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, za koju važi

$$A \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{O}_\alpha\ ,$$

može da se izdvoji konačna familija skupova $\mathcal{O}_{\alpha_1}, \mathcal{O}_{\alpha_2}, \ldots, \mathcal{O}_{\alpha_s}$ tako da je

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{O}_{\alpha_i}.$$

Ako je $A = X$ kažemo da je (X, d) ***kompaktan metrički prostor***.

Teorema 1.1.9: [17] Sledeći uslovi su ekvivalentni*:*

a) (X, d) je kompaktan metrički prostor.

b) Svaki niz iz X ima konvergentan podniz.

c) Svaki beskonačan podskup od X ima tačku nagomilavanja.

Teorema 1.1.10: [17] Neka je (X, d) metrički prostor i A kompaktan podskup od X. Tada je A zatvoren i ograničen.

Definicija 1.1.18: Ako u metričkom prostoru (X, d) za svaki Košijev niz $\{x_n\}_{\mathrm{n \in N}}$ postoji $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$ kažemo da je (X, d) ***kompletan metrički prostor***.

Teorema 1.1.11: [17] Zatvoren podskup kompletnog metričkog prostora je kompletan.

Teorema 1.1.12: [17] Potreban i dovoljan uslov da je metrički prostor (X, d) kompletan je da proizvoljan niz zatvorenih lopti $\{B(x_n, r_n)\}_{n\in N}$ u X takvih da je

$$B(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n), \text{ za sve } n \in N,$$

i

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

ima neprazan presek.

Definicija 1.1.19: Neka su (X, d_1) i (Y, d_2) metrički prostori, $f: X \to Y$, $x_0 \in X$ i $f(x_0) = y_0$. Funkcija f je ***neprekidna*** u tački x_0 ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta(\varepsilon) > 0$ tako da je

$$f\left(L^{d_1}(x_0, \delta(\varepsilon))\right) \subset L^{d_2}(y_0, \varepsilon).$$

Tvrđenje 1.1.2: [17] Neka je (X, d) metrički prostor. Tada je preslikavanje $d : X \times X \to \mathbb{R}$ neprekidno.

Definicija 1.1.20: Neka je (X, d) metrički prostor, $f: X \to R$ i neka $x_0 \in X$. Tada kažemo da je f:

- **odole poluneprekidna** u tački x_0 ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji okolina U tačke x_0 tako da je
$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon, \quad \forall x \in U;$$

- **odgore poluneprekidna** u tački x_0 ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji okolina U tačke x_0 tako da je
$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon, \quad \forall x \in U.$$

Pretpostavićemo sada da posmatrani skup ima algebarsku strukturu.

Definicija 1.1.21: Neka je X vektorski prostor nad poljem $F = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Preslikavanje $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ za koje važe sledeći uslovi:

1. $\| x \| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$;
2. $\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|$ za sve $\lambda \in F$ i sve $x \in X$;
3. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ za sve $x, y \in X$;

nazivamo ***norma*** nad X, a uređeni par $(X, \|\cdot\|)$ ***normiran prostor***.

Svaki normiran prostor $(X, \|\cdot\|)$ je i metrički prostor (X, d) sa metrikom d koja je definisana na sledeći način:

$$d(x, y) = \| x - y \|, \qquad \text{za sve } x, y \in X.$$

Ako je normiran prostor $(X, \|\cdot\|)$ kompletan metrički prostor kažemo da je ***Banahov*** prostor.

Definicija 1.1.22: Neka je (X, d) metrički prostor. Kažemo da niz $\{\mathrm{x_n}\}_{\mathrm{n \in N}}$ iz X ***jako konvergira*** ka x^*, $(x_n \to x^*)$ ako $\| x_n - x^* \| \to 0$ kada $n \to \infty$.

Definicija 1.1.23: Neka su $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normirani prostori nad istim poljem $F = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Preslikavanje $f : X \to Y$ je ***linearno*** ako je za sve $\alpha, \beta \in F$ i sve $x, y \in X$

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Skup svih neprekidnih linearnih preslikavanja iz X u Y označava se $\mathcal{L}(X, Y)$.

Definicija 1.1.24: Neka je X vektorski prostor nad F. Linearno preslikavanje $f : X \to F$ se naziva ***linearna funkcionela*** nad X.

Definicija 1.1.25: Neka su $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normirani prostori. Linearno preslikavanje je ***ograničeno*** ako postoji $M > 0$ tako da je

$$\| f(x) \|_Y \leq M \, \| x \|_X, \qquad \text{za sve } x \in X.$$

Teorema 1.1.13: [17] Neka su $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normirani prostori i $f : X \to Y$ linearno preslikavanje. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

1. f je neprekidno,
2. f je neprekidno u tački $0 \in X$,
3. f je ograničeno.

Teorema 1.1.14: [17] Neka je $(X, \|\cdot\|_X)$ normiran prostor, a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banahov prostor. Tada je $\mathcal{L}(X, Y)$ Banahov prostor.

Ako je $Y = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ tada je prostor $\mathcal{L}(X, Y)$ Banahov prostor i on se naziva ***dual*** prostora X i obeležava se sa X^*.

Definicija 1.1.26: Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normirani prostor. Topologija indukovana normom na X zove se ***jaka topologija*** na X.
Za svako $\mu \in X^*$ funkcionela

$$\rho_\mu(x) = |(x, \mu)|, \quad x \in X$$

je ***seminorma*** na X.

Topologija indukovana familijom seminormi $\{\rho_\mu\}_{\mu \in X^*}$ je ***slaba topologija*** na X i označavamo je sa

$$\sigma(X, X^*).$$

Definicija 1.1.27: Neka je X Banahov prostor. Niz $\{x_n\} \in X$ ***slabo konvergira*** ka $x \in X$, zapisujemo

$$x_n \rightharpoonup x \quad u \quad X,$$

ako ako niz $\{x_n\}$ konvergira ka x u slaboj topologiji, tj. $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ za svako $f \in X^*$;

Definicija 1.1.28: Skup koji je kompaktan u slaboj topologiji naziva se ***slabo kompaktan*** skup**.**

Definicija 1.1.29: Neka je $A \subset X$, gde je X vektorski prostor. Skup A je ***konveksan*** ako za sve $x, y \in A$ i za sve $\alpha \in (0,1)$ važi:

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in A.$$

Definicija 1.1.30: Neka je dato m tačaka $x_1, x_2, \dots, x_m$ vektorskog prostora X. Tačka

$$x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k$$

je ***konveksna kombinacija*** tačaka $x_1, x_2, \dots, x_m$, ako je $\alpha_k \geq 0$ za sve $k = 1, \dots, m$, i

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1.$$

Skup svih konveksnih kombinacija skupa $S \subset X$ naziva se ***konveksna obvojnica*** skupa S i označava se sa $convS$.

1.2 Metrička teorija nepokretne tačke za jednoznačna preslikavanja

Definicija 1.2.1: Neka je $f: X \to X$. Elemenat $x \in X$ je ***nepokretna tačka*** preslikavanja f ako važi:

$$f(x) = x.$$

Definicija 1.2.2: Neka je (X, d) metrički prostor, M neprazan podskup od X i $f: M \to X$. Ako je $\lambda \in [0,1)$ takvo da je

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda\, d(x, y), \qquad za\ sve\ x, y \in M,$$

tada je f ***λ –kontrakcija*** nad M.

Preslikavanje f je kontrakcija ako je λ – kontrakcija za neko λ ∈ $[0,1)$.

Stefan Banach (1892-1945) je poljski matematičar koji se generalno smatra jednim od najznačajnih i najuticajnijih matematičara 20. veka. On je bio jedan od osnivača moderne funkcionalne analize. 1922. godine objavio je teoremu koja je poznata kao Banachov princip kontrakcije, koji je jedna od najvažnijih rezultata analize i smatra se glavnim izvorom metričke teorije nepokretne tačke.

Teorema 1.2.1: (Banahov princip kontrakcije) [14] Neka je (X, d) kompletan metrički prostor, M neprazan i zatvoren podskup od X i $f: M \to M$ λ–kontrakcija nad M. Tada postoji jedinstvena nepokretna tačka $x^* \in M$ preslikavanja f i važi relacija

$$x^* = \lim_{n \to \infty} f^n(x_0)$$

gde je x_0 proizvoljan elemanat iz M. Šta više, pri tome je

$$d(x^*, x_n) \leq \frac{q^n}{1 - q}\, d\big(x_0, f(x_0)\big), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Kao posledica ovog tvrđenja lako se dobija sledeći rezultat, lokalna verzija Banahovog principa kontrakcije.

Teorema 1.2.2: [3] Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i $f: B(x_0\,, r) \to X$ je λ–kontrakcija u lopti $B(x_0\,, r)$ tako da je

$$d(f(x_0), x_0) \leq (1-\lambda)r.$$

Tada postoji jedinstvena nepokretna tačka $x^* \in B(x_0, r)$ preslikavanja f.

T. Zamfirescu je 1972. godine objedinio Banachovu, Kannanovu i Chatterjeovu teoremu.

Definicija 1.2.3: [1] Neka je (X, d) metrički prostor. Funkcija $T: X \to X$ je ***Zamfirescu*** preslikavanje ako postoje realni brojevi a, b i c, za koje važi $0 \leq a < 1$, $0 \leq b < \frac{1}{2}$ i $0 \leq c < \frac{1}{2}$ tako da je za svako $x, y \in X$ bar jedan od sledećih uslova tačan:

(z_1) $d(Tx, Ty) \leq a\, d(x, y)$ (Banachova kontrakcija)

(z_2) $d(Tx, Ty) \leq b\,[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$ (Kannanova kontrakcija)

(z_3) $d(Tx, Ty) \leq c\,[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$. (Chatterjeova kontrakcija)

Teorema 1.2.3: [1] Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i $T: X \to X$. Ako je T Zamfirescu preslikavanje, tada T ima jedinstvenu nepokretnu tačku.

Lj. Ćirić je 1971. godine definisao i izučavao genaralizovane kontrakcije, funkcije koje uopštavaju Banachovu kontrakciju i Kannanovu kontrakciju.

Definicija 1.2.4: Funkcija $T: (X, d) \to (X, d)$ je generalizovana kontrakcija ako i samo ako postoji konstanta h, $0 \leq h < 1$, tako da je za svako $x, y \in X$,

$$d(Tx, Ty) \leq h \max\left\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2}\right\}.$$

Definicija 1.2.5: Neka je (X, d) metrički prostor, $T: X \to X$ i $x \in X$. Skup

$$O(T, x) = \{T^n(x) : n = 0,1,2, \dots\}$$

naziva se ***orbita*** elementa x u odnosu na T. Metrički prostor je $T-$orbitalno kompletan ako svaki Košijev niz sadržan u $O(T, x)$ konvergira u X.

Teorema 1.2.4: [3] Neka je $T: X \to X$ $\lambda-$generalizovana kontrakcija na $T-$orbitalno kompletnom metričkom prostoru X. Tada,

i. preslikavanje T ima jedinstvenu nepokretnu tačku $u \in X$,

ii. $T^n x \to u$ za svako $x \in X$ i

iii. $d(T^n x, u) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x, Tx)$.

Definicija 1.2.6 : Neka je dato $\varepsilon > 0$. Metrički prostor (X, d) je $\varepsilon -$ lančast, ako za svaki par $x, y \in X$ postoji konačno mnogo tačaka $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ tako da je $d(x_{i-1}, x_i) < \varepsilon$ $i = 1, 2, \dots, n$.

Teorema 1.2.5: [6] Neka je (X, d) kompletan $\varepsilon -$ lančast metrički prostor i $F : X \longrightarrow X$ zadovoljava sledeći uslov: $\forall \eta,\ 0 < \eta < \varepsilon$ postoji $\delta > 0$ takvo da

$$x, y \in X, \qquad \eta \leq d(x, y) < \eta + \delta \ \Rightarrow d(Fx, Fy) < \eta.$$

Tada F ima nepokretnu tačku.

U daljem radu koristićemo i sledeći važan rezultat.

Teorema 1.2.6: (Caristi) [9] Neka je (M, d) kompletan metrički prostor i neka $f: M \to M$. Ako postoji odole poluneprekidna funkcija $\varphi: M \to [0, \infty)$ tako da je

$$d\big(x, f(x)\big) \leq \varphi(x) - \varphi\big(f(x)\big), \qquad\qquad x \in M,$$

tada f ima nepokretnu tačku.

2. Višeznačna preslikavanja

2.1 Definicija i osnovne osobine

Definicija 2.1.1: Neka su X, Y proizvoljni neprazni skupovi. Funkcija $T: X \to 2^Y$ naziva se ***višeznačno preslikavanje*** skupa X u skup Y.

Definicija 2.1.2: Neka je (X, d) metrički prostor. Na skupu $\mathcal{B}(X)$ Hauzdorfova metrika H definiše se na sledeći način:

$$H(A, B) = max\{\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A)\} \qquad A, B \in \mathcal{B}(X)$$

gde je

$$d(x, Z) = inf\{d(x, y) : y \in Z\}, \qquad Z \subseteq X.$$

Funkcija $d(x, Z) = f_Z(x)$, $x \in X$ ima sledeće osobine:

a) preslikavanje $X \ni x \to d(x, Z) \in [0, \infty)$ je neprekidno,

b) $\bar{Z} = \{x \in X;\ d(x, Z) = 0\}$.

Napomena: Neka $A, B \in \mathcal{CB}(X)$ i neka $a \in A$. Za proizvoljno $\varepsilon > 0$, po definiciji rastojanja $H(A, B)$, postoji $b \in B$ takvo da je

$$d(a, b) \leq H(A, B) + \varepsilon.$$

Ako je skup B kompaktan onda postoji $b \in B$ takvo da je

$$d(a, b) \leq H(A, B).$$

U opštem slučaju to ne važi, što ilustruje sledeći primer.

Primer: [19]

Neka je $X = l_2$ (Hilbertov prostor svih kvadratno sumabilnih nizova realnih brojeva), $a = \left(-1, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{n}, \dots\right)$ i neka je $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ niz sa nulama na svim koordinatama sem n-te, koja je jednaka 1.

Neka je $A = \{a, e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ i $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$. Pošto je

$$\| a - e_n \| = \sqrt{\left(\| a \|^2 + 1 + \frac{2}{n}\right)}, \quad n \in \mathbb{N}; \; H(A, B) = \sqrt{(\| a \|^2 + 1)}$$

ali ne postoji e_n u B takvo da je $\| a - e_n \| \leq H(A, B)$..

Lema 2.1.1: [8] Neka je (X, d) metrički prostor, $A, B \in \mathcal{B}(X)$ i $q \in \mathbb{R}$, $q > 1$ dato. Tada za svako $a \in A$ postoji $b \in B$ tako da je $d(a, b) \leq qH(A, B)$.

Definicija 2.1.3: Neka je dat metrički prostor (X, d) i skup $A \subseteq X$. ***Dijametar skupa*** $A \in \mathcal{B}(X)$ definišemo:

$$diam(A) = \sup\{d(x, y) \colon x, y \in A\} \in [0, \infty)$$

Neka je $A, B \subset X$. Funkcija $\delta : \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(X) \to [0, \infty)$ je definisana na sledeći način:

$$\delta(A, B) = sup\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Ako je $A = \{a\}$ jednočlan skup, pišemo da je

$$\delta(A, B) = \delta(a, B),$$

ako je i $B = \{b\}$, tada je

$$\delta(A, B) = d(a, b).$$

Za svako $A, B, C \in \mathcal{B}(X)$ važi:

$$\delta(A, B) = \delta(B, A) \geq 0, \qquad \delta(A, B) \leq \delta(A, C) + \delta(C, B),$$

$$\delta(A, A) = diamA, \qquad \delta(A, B) = 0 \iff A = B = \{a\}.$$

Za $x \in X$ i $A, B \in \mathcal{K}(X)$ neka je

$$\rho(A, B) = \sup\{d(x, B), \; x \in A\}.$$

Treba primetiti da je

$$\rho(A, B) \leq \delta(A, B)$$

***Lema 2.1.2*:** [4] Neka je (X,d) metrički prostor, $x,y \in X$ i A,B i C su podskupovi skupa X. Tada važi:

1. Ako je $A \subseteq B$, tada je $\rho(A,C) \leq \rho(B,C)$ i $\rho(C,A) \geq \rho(C,B)$.
2. $d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A)$.
3. $d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,B) + \rho(B,A)$.
4. $d(x,A) \leq d(x,B) + \rho(B,A)$.

Napomena: Ako je $A \subseteq B$, tada se $\delta(A,C)$ i $\delta(B,C)$ ne mogu porediti.

Definicija 2.1.4: Neka je $T: X \longrightarrow 2^X$, tačka x zove se ***nepokretna (fiksna)*** tačka višeznačnog preslikavanja T ako $x \in Tx$.

Definicija 2.1.5: Višeznačno preslikavanje $T: X \longrightarrow \mathcal{CB}(X)$ je

- α −kontrakcija ako postoji konstanta $\alpha \in [0,1)$ tako da važi:

$$H(Tx,Ty) \leq \alpha\, d(x,y), \qquad x,y \in X.$$

- Lipšicovo ako postoji $L > 0$ ako je

$$H(Tx,Ty) \leq L\, d(x,y), \qquad x,y \in X.$$

- neekspanzivno ako je

$$H(Tx,Ty) \leq d(x,y), \qquad x,y \in X.$$

- kontaktivno ako je

$$H(Tx,Ty) < d(x,y), \qquad x,y \in X, \ x \neq y.$$

***Tvrđenje 2.1.1*:** [19] Neka je $T: X \longrightarrow \mathcal{K}(Y)$ Lipšicovo višeznačno preslikavanje sa Lipšicovom konstantom α. Za proizvoljno $A,B \in \mathcal{K}(X)$ važi da je

$$H\left(\bigcup_{a\in A} T(a), \bigcup_{b\in B} T(b)\right) \leq \alpha H(A,B), \quad \text{tj.}$$

$$H(T(A),T(B)) \leq \alpha H(A,B).$$

Dokaz: Pošto je po pretpostavci T Lipšicovo preslikavanje za sve $a \in A, b \in B$ važi da je

$$H(T(a),T(b)) \leq \alpha\, d(a,b)$$

odakle sledi da je

$$\rho(T(a),T(B)) \leq \alpha \inf_{b\in B} d(a,b)$$

i

$$\rho(T(A),T(B)) \leq \alpha \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} d(a,b) \leq \alpha H(A,B).$$

Analogno

$$\rho(T(B),T(A)) \leq \alpha \sup_{b\in B} \inf_{a\in A} d(a,b) \leq \alpha H(A,B)$$

pa je

$$H(T(A),T(B)) \leq \alpha H(A,B).$$

■

Kao posledica ovog rezultata dobijaju se sledeća tvrđenja.

Tvrđenje 2.1.2: [19] Neka je $T: X \longrightarrow \mathcal{K}(Y)$ Lipšicovo preslikavanje sa Lipšicovom konstantom α, a $G: Y \longrightarrow \mathcal{K}(Z)$ Lipšicovo preslikavanje sa konstantom β. Preslikavanje $G \circ T$ definisano sa

$$(G \circ T)(x) = \bigcup_{y\in T(x)} G(y), \quad x \in X,$$

je Lipšicovo preslikavanje sa konstantom $\alpha \cdot \beta$.

Tvrđenje 2.1.3: [19] Neka je $T: X \longrightarrow \mathcal{K}(Y)$ Lipšicovo preslikavanje sa Lipšicovom konstantom α i neka je $\hat{T}: \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(Y)$ definisana sa

$$\hat{T}(A) = \bigcup_{a\in A} T(a), \quad A \in \mathcal{K}(X).$$

Tada je i $\hat{T}$ Lipšicovo sa Lipšicovom konstantom α.

Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i $T: X \longrightarrow \mathcal{K}(X)$ višeznačna kontrakcija. Na osnovu Tvrđenja 2.1.3 i $\hat{T}$ je višeznačna kontrakcija pošto je i prostor $(\mathcal{K}(X), H)$ kompletan [3] $\hat{T}$ ima nepokretn tačku tj. postoji $A \in \mathcal{K}(X)$ takvo da je $A = \hat{T}(A)$. Međutim, kao što ćemo ilustrovati primerom ta dva skupa su u slaboj vezi.
Pokažimo pre toga tvrđenje koje će nam olakšati ispitivanje da li je neko preslikavanje višeznačna kontrakcija i dati neograničene mogućnosti za konstrukciju višeznačnih kontrakcija koristeći uobičajene (jednoznačne) kontrakcije.

Tvrđenje 2.1.4: [19] Neka je $T: X \longrightarrow \mathcal{CB}(Y)$ višeznačno Lipšicovo preslikavanje sa Lipšicovom konstantom α i $G: X \longrightarrow \mathcal{CB}(Y)$ višeznačno Lipšicovo preslikavanje sa konstantom β. Funkcija $T \cup G : X \longrightarrow \mathcal{CB}(Y)$ definisana sa

$$(T \cup G)(x) = T(x) \cup G(x), \qquad x \in X,$$

je višeznačno Lipšicovo preslikavanje sa Lipšicovom konstantom $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$.

Dokaz: Po definiciji Hausdorfove metrike sledi da je

$$\sup_{u \in T(x)} d\big(u, T(y) \cup G(y)\big) \leq \sup_{u \in T(x)} \inf_{v \in T(y)} d(u, v) \leq H\big(T(x), T(y)\big)$$

i analogno

$$\sup_{u \in G(x)} d\big(u, T(y) \cup G(y)\big) \leq \sup_{u \in G(x)} \inf_{v \in G(y)} d(u, v) \leq H\big(G(x), G(y)\big).$$

Odavde sledi da je

$$\sup_{u \in T(x) \cup G(x)} d\big(u, T(y) \cup G(y)\big) \leq \max\big\{H\big(T(x), T(y)\big), H\big(G(x), G(y)\big)\big\}$$

tj. da je

$$\rho\big(T(x) \cup G(x), T(y) \cup G(y)\big) \leq \max\big\{H\big(T(x), T(y)\big), H\big(G(x), G(y)\big)\big\},$$

isto tako je i

$$\rho\big(T(y) \cup G(y), T(x) \cup G(x)\big) \leq \max\big\{H\big(T(x), T(y)\big), H\big(G(x), G(y)\big)\big\}.$$

Tada se može zaključiti da je

$$H\big(T(x)\cup G(x),T(y)\cup G(y)\big)\le \max\{H\big(T(x),T(y)\big),H\big(G(x),G(y)\big)\}$$

$$\le \max\{\alpha\, d(x,y),\beta\, d(x,y)\}$$

$$\le \max\{\alpha,\beta\}\cdot d(x,y).$$

Što je i trebalo dokazati.

■

Primer :[19]

Neka je $X = I = [0,1]$ jedinični interval u $\mathbb{R}$ sa uobičajenom metrikom i neka je $f\colon I\to I$ definisana na sledeći način:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}x+1, & \frac{1}{2}\le x\le 1.\end{cases}$$

Definišimo sada (višeznačno) preslikavanje $T\colon I\to 2^I$ sa

$$T(x)=\{0\}\cup\{f(x)\}\,,x\in I.$$

Pošto je funkcija f kontrakcija sa konstantom kontrakcije $q=\frac{1}{2}$ koristeći Tvr]enje 2.1.4 (ili direktnom proverom) dobija se da je T višeznačna kontrakcija sa konstantom $q=\frac{1}{2}$. Funkcija f ima nepokretnu tačku $x^*=\frac{2}{3}$. Višeznačno preslikavanje T ima dve nepokretne tačke 0 i $\frac{2}{3}$, a nepokretna tačka funkcije $\hat{T}$ je skup $A=\left\{\frac{2}{3},0,f(0),f\big(f(0)\big),f\Big(f\big(f(0)\big)\Big),\dots\right\}$

Tvrđenje 2.1.5: [19] Neka je $(E,\|\ \|)$ Banahov prostor. Funkcija $\overline{co}\colon X\to\overline{conv}X$, $X\in\mathcal{CB}(X)$ je neekspanzivno preslikavanje tj, za sve $A,B\in\mathcal{CB}(X)$ važi da je

$$H\big(\overline{co}(A),\overline{co}(B)\big)\le H(A,B).$$

Kao direktna posledica ovog tvrđenja dobija se sledeći rezultat.

Tvrđenje 2.1.6: [19] Neka je X zatvoren konveksan podskup Banahovog prostora $(E,\|\ \|)$ i neka je $T\colon X\to\mathcal{CB}(X)$ višeznačno Lipšicovo preslikavanje sa Lipšicovom konstantom α. Preslikavanje $\overline{co}T\colon X\to\mathcal{CB}(X)$ definisano sa

$$\overline{co}T(x) = \overline{conv}T(x), \qquad x \in X,$$

je Lipšicovo preslikavanje sa istom konstantom.

Napomena: Ovo tvrđenje nam daje tehniku za konstruisanje višeznačnih Lipšicovih (kontraktivnih) preslikavanja polazeći od konačno mnogo jednoznačnih Lipšicovih (kontraktivnih) preslikavanja.

Definicija 2.1.6: Neka je (X, d) metrički prostor, a $T: X \longrightarrow 2^X$. Orbita višeznačnog preslikavanja T u tački x_0 je svaki niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ za koji je $x_n \in Tx_{n-1}$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Označimo je sa $O(T, x_0)$.

Napomena: Ako je (X, d) kompletan metrički prostor, onada je $(\mathcal{CB}(X), H)$ kompletan metrički prostor.

3. Metrička teorija nepokretne tačke za višeznačna preslikavanja

3.1 Nadlerova Teorema

S.B Nadler je 1969. u [19] prvi objavio uopštenje Banachovog principa kontrakcije, dokazujući egzistenciju nepokretne tačke višeznačne kontrakcije $T: X \longrightarrow \mathcal{CB}(X)$.

Teorema 3.1.1: [19] Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i neka je $T: X \longrightarrow \mathcal{CB}(X)$ kontrakcija. Tada postoji $x^* \in X$ tako da $x^* \in T(x^*)$, tj. postoji nepokretna tačka preslikavanja T.

Dokaz: Neka je konstanta kontrakcije α i neka je x_0 proizvoljna tačka iz X, a $x_1 \in T(x_0)$. Kako $T(x_0), T(x_1) \in \mathcal{CB}(X)$, a $x_1 \in T(x_0)$ te postoji $x_2 \in T(x_1)$ tako da važi

$$d(x_1, x_2) \leq H\big(T(x_0), T(x_1)\big) + \alpha$$

Takođe postoji $x_3 \in T(x_2)$ tako da je

$$d(x_2, x_3) \leq H\big(T(x_1), T(x_2)\big) + \alpha^2$$

Nastavljajući ovaj postupak dobijamo niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ sa sledećim osobinama:

1. $x_{i+1} \in T(x_i) \qquad i = 0,1,2,\ldots$
2. $d(x_i, x_{i+1}) \leq H\big(T(x_{i-1}), T(x_i)\big) + \alpha^i$

Odavde sledi:

$$\begin{aligned} d(x_i, x_{i+1}) &\leq H\big(T(x_{i-1}), T(x_i)\big) + \alpha^i \leq \alpha d(x_{i-1}, x_i) + \alpha^i \\ &\leq \alpha\big[H\big(T(x_{i-2}), T(x_{i-1})\big) + \alpha^{i-1}\big] + \alpha^i \\ &= \alpha H\big(T(x_{i-2}), T(x_{i-1})\big) + 2\alpha^i \leq \alpha^2 d(x_{i-2}, x_{i-1}) + 2\alpha^i \\ &\leq \cdots \leq \alpha^i d(x_0, x_1) + i\alpha^i. \end{aligned}$$

Sada je za sve $j \in \mathbb{N}$

$$d(x_i, x_{i+j}) \leq \sum_{k=i}^{i+j-1} d(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{k=i}^{i+j-1} (\alpha^k d(x_0, x_1) + k\alpha^k)$$

$$= (\sum_{k=i}^{i+j-1} \alpha^k)\, d(x_0, x_1) + \sum_{k=i}^{i+j-1} k\alpha^k$$

$$\leq (\sum_{k=i}^{\infty} \alpha^k)\, d(x_0, x_1) + \sum_{k=i}^{\infty} k\alpha^k.$$

Odavde sledi da je niz $\{x_n\}_{n\in N}$ Košijev, te iz kompletnosti prostora X sledi da postoji

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \in X.$$

Iz $H\big(T(x_i), T(x^*)\big) \leq \alpha\, d(x_i, x^*)$ sledi da je $\lim_{i\to\infty} T(x_i) = T(x^*)$ u smislu metrike H. Sada iz $d\big(x_{i+1}, T(x^*)\big) \leq H\big(T(x_i), T(x^*)\big)$ i zatvorenosti skupa $T(x^*)$ sledi da $x^* \in Tx^*$ što je i trebalo dokazati.

■

Sledeća teorema predstavlja proširenu varijantu Nadlerove teoreme.

Teorema 3.1.2: [16] Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i neka $T : X \longrightarrow \mathcal{CB}(X)$ $k-$ kontraktivno preslikavanje. Tada T ima nepokretnu tačku ξ i za svako dato x_0 i $\bar{k}, k < \bar{k} < 1$ postoji orbita $\{x_n\}$ preslikavanja T gde $\{x_n\}$ konvergira ka ξ uz uslov

$$d(x_n, \xi) \leq \frac{\bar{k}^n}{1-\bar{k}} d(x_1, x_0), \qquad n \geq 0. \tag{1}$$

Dokaz: Označimo sa $\lambda = \frac{\bar{k}}{k} > 1$. Izaberemo neko $x_1 \in Tx_0$ i rekurzivno definišemo $x_n \in Tx_{n-1}$, $n \geq 2$ tako da važi:

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda\, d(x_n, Tx_n) \leq \lambda\, H(Tx_n, Tx_{n-1}).$$

To nam osigurava i Lema 2.1.1.

Kako je $H(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq k\, d(x_n, x_{n-1})$, dobijamo da važi:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \bar{k}\, d(x_n, x_{n-1}) \leq \cdots \leq \bar{k}^n d(x_1, x_0), \qquad n \geq 0.$$

Odatle dobijamo da je :

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \sum_{i=0}^{p-1} d(x_{n+i,} x_{n+i+1}) \leq \frac{\bar{k}^n}{1-\bar{k}} d(x_1, x_0), \qquad n, p \geq 0. \tag{2}$$

Zbog toga $\{x_n\}$ je Košijev i konvergentan jer je X kompletan metrički prostor. Neka je ξ limes niza $\{x_n\}$. Kao i u prethodnoj teoremi dobija se da $\xi \in T\xi$. Kada $p \to \infty$ iz (2) dobijamo (1).

■

3.2 Uopštenje Ćirićeve generalizovane kontrakcije

Definicija 3.2.1: [16] Preslikavanje $T : X \longrightarrow \mathcal{CB}(X)$ je uopštena višeznačna kontrakcija, gde je (X, d) metrički prostor, ako postoji q, $0 < q < 1$, tako da je:

$$H(Tx, Ty) \leq qmax \left\{ d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty) , \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2} \right\}, \qquad x, y \in X.$$

Teorema 3.2.1: [16] Neka je (X, d) metrički prostor, $T : X \longrightarrow \mathcal{CB}(X)$ uopštena kontrakcija, a prostor X T-orbitalno kompletan prostor. Tada:

i. Za svako $x_0 \in X$ postoji orbita $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ preslikavanja T u tački x_0 i $u \in X$ tako da je :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = u ;$$

ii. Elemenat u je nepokretna tačka preslikavanja T;

iii. Za svako $n \in \mathbb{N}$ zadovoljena je jednakost:

$$d(x_n, u) \leq \frac{(q^{1-a})^n}{1 - q^{1-a}} d(x_0, x_1)$$

gde je $a \in (0,1)$ proizvoljan fiksiran broj.

Dokaz: Neka je x_0 proizvoljan elemenat iz X i $x_1 \in Tx_0$. Za $H(Tx_0, Tx_1) = 0$, $x_1 \in Tx_1$ pa se može pretpostaviti da je $H(Tx_0, Tx_1) > 0$. Neka je $a \in (0,1)$ proizvoljno dato. Tada zbog $q^{-a} > 1$, na osnovu Leme 2.1.1 postoji $x_2 \in Tx_1$ tako da je :

$$d(x_1, x_2) \leq q^{-a}\, H(Tx_0, Tx_1)$$

Nastavljajući dalje na isti način dolazimo do niza $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ elemenata iz X tako da je za svako $n \in \mathbb{N}$: $x_{n+1} \in Tx_n$ i $d(x_n, x_{n+1}) \leq q^{-a}\, H(Tx_{n-1}, Tx_n)$.
Sada treba pokazati da je niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Košijev. Kako je preslikavanje T uopštena kontrakcija sledi da je za sve $n \in \mathbb{N}$:

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq q^{-a}\, H(Tx_{n-1}, Tx_n)$$

$$\leq q^{-a} q \, max \left\{ d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-1}, Tx_{n-1}), d(x_n, Tx_n), \frac{1}{2} \, d(x_{n-1}, x_{n+1}) \right\}$$

$$\leq q^{1-a} max \left\{ d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), \frac{1}{2} \, d(x_{n-1}, x_{n+1}) \right\}$$

jer je

$$d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) \leq d(x_{n-1}, x_n) \quad \text{i}$$

$$d(x_n, Tx_n) \leq d(x_n, x_{n+1}).$$

Ako bi za neko $n \in \mathbb{N}$ bilo $d(x_n, x_{n+1}) \leq q^{1-a} d(x_n, x_{n+1})$ to bi značilo da je $d(x_n, x_{n+1}) = 0$ i tada bi elemenat x_n bio nepokretna tačka preslikavanja T. Zato možemo pretpostaviti da je $x_n \neq x_{n+1}$.
Dakle, važi da je

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq q^{1-a} max \left\{ d(x_{n-1}, x_n), \frac{1}{2} \, d(x_{n-1}, x_{n+1}) \right\} \tag{3}$$

Iz

$$max \left\{ d(x_{n-1}, x_n), \frac{1}{2} \, d(x_{n-1}, x_{n+1}) \right\} = d(x_{n-1}, x_n)$$

iz (3) sledi da je

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq q^{1-a} \, d(x_{n-1}, x_n)$$

Ako bi bilo da je

$$max \left\{ d(x_{n-1}, x_n), \frac{1}{2} \, d(x_{n-1}, x_{n+1}) \right\} = \frac{1}{2} d(x_{n-1}, x_{n+1})$$

tada bi važilo:

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq q^{1-a} \frac{1}{2} \, d(x_{n-1}, x_{n+1}) \leq q^{1-a} \frac{1}{2} \left(d(x_{n-1}, x_n) + \, d(x_n, x_{n+1}) \right)$$

a odavde da je

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{q^{1-a}}{2 - q^{1-a}} \, d(x_{n-1}, x_n) \leq \, q^{1-a} d(x_{n-1}, x_n) \tag{4}$$

Prema tome u oba slučaja sledi da je za svako $n \in \mathbb{N}$

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \; q^{1-a} d(x_{n-1}, x_n)$$

Koristeći ovu nejednakost n puta dobija se da je

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \; q^{1-a} d(x_{n-1}, x_n) \leq \cdots \leq (q^{1-a})^n \, d(x_0, x_1).$$

Dakle za svako $p \in \mathbb{N}$ važi nejednakost:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} d\,(x_k, x_{k+1}) \leq \frac{(q^{1-a})^n}{1 - q^{1-a}} \, d(x_0, x_1) \tag{5}$$

Time je dokazano da je niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Košijev. Koristeći $T -$ orbitalnu kompletnost prostora X može se zaključiti da postoji elemenat $u \in X$ takav da je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = u.$$

Time je dokazano da važi (i). Iz (5) za $p \to \infty$ sledi (iii).
Treba još pokazati da $u \in Tu$. Polazimo od nejednakosti:

$$d(u, Tu) \leq$$

$$\leq d(u, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tu) \leq d(u, x_{n+1}) + H(Tx_n, Tu)$$

$$\leq d(u, x_{n+1}) + q\, max\left\{d(x_n, u), d(x_n, Tx_n), d(u, Tu), \frac{d(x_n, Tu) + d(u, Tx_n)}{2}\right\}$$

$$\leq d(u, x_{n+1}) + \; qmax\left\{d(x_n, u), d(x_n, x_{n+1}), d(u, Tu), \frac{d(x_n, u) + \; d(u, Tu) + \; d(u, x_{n+1})}{2}\right\}$$

Odavde zaključujemo da je zadovoljena jedna od sledećih nejednakosti:

a) $d(u, Tu) \leq \; d(u, x_{n+1}) + q\, d(x_n, u)$

b) $d(u, Tu) \leq d(u, x_{n+1}) + q\, d(x_n, x_{n+1})$

c) $d(u, Tu) \leq \; d(u, x_{n+1}) + q\, d(u, Tu)$

$$d)\quad d(u,Tu) \leq d(u,x_{n+1}) + q\,\frac{d(x_n,u) + d(u,Tu) + d(u,x_{n+1})}{2}.$$

Iz (c) sledi da je

$$d(u,Tu) \leq \frac{1}{1-q} d(u,x_{n+1})$$

Iz (d) sledi da je

$$d(u,Tu) \leq \frac{1}{1-q}\big((2+q)d(u,x_{n+1}) + q\,d(x_n,u)\big)$$

Kada $n \to \infty$ u svakom od tih slučajeva sledi da je $d(u,Tu) = 0$. Koristeći pretpostavku da je skup Tu zatvoren skup, dobija se da je $u \in Tu$.

■

Posledica 3.2.1: [16] Neka je (X,d) kompletan metrički prostor i $T : X \longrightarrow \mathcal{CB}(X)$ tako da je za sve $x,y \in X$ zadovoljena nejednakost:

$$H(Tx,Ty) \leq ad(x,Tx) + bd(y,Ty) + cd(x,y)$$

gde su $a,b,c \geq 0$ i $a+b+c < 1$. Tada preslikavanje T ima nepokretnu tačku.

Dokaz: Primetimo da je tada za sve $x,y \in X$

$$H(Tx,Ty) \leq (a+b+c)\max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\}.$$

Primenom prethodne teoreme dobijamo da T ima nepokretnu tačku. ■

Teorema 3.2.2: [16] Neka je preslikavanje $T : X \longrightarrow \mathcal{B}(X)$ definisano nad $T-$orbitalno kompletnim metričkim prostorom (X,d). Ako preslikavanje T zadovoljava uslov:

$$\delta(Fx,Fy) \leq q\,max\left\{d(x,y), \delta(x,Tx), \delta(y,Ty), \frac{d(x,Ty) + d(y,Tx)}{2}\right\} \tag{6}$$

za sve $x,y \in X$ gde je $q \in (0,1)$ tada:

i. Preslikavanje T ima jedinstvenu nepokretnu tačku u X i $Tu = \{u\}$

ii. Za svako $x_0 \in X$ postoji orbita $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ preslikavanja T u tački x_0 tako da je $\lim_{n\to\infty} x_n = u$.

iii. Za svako $n \in \mathbb{N}$ zadovoljena je nejednakost:

$$d(x_n, u) \le \frac{(q^{1-a})^n}{1 - q^{1-a}} d(x_0, x_1),$$

gde je $a \in (0,1)$ proizvoljan fiksiran broj.

Dokaz: Neka je x_0 proizvoljan element iz X i $a \in (0,1)$. Za $\delta(x_0, Tx_0) = 0, \{x_0\} = Tx_0$ pa možemo pretpostaviti da je $\delta(x_0, Tx_0) > 0$. Neka je $x_1 \in Tx_0$ pri čemu je:

$$\delta(x_0, Tx_0) \le q^{-a} d(x_0, x_1)$$

Nastavljajući dalje tako može se konstruisati orbita $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ preslikavanja T u tački x_0 sa osobinom:

$$\delta(x_n, Tx_n) \le q^{-a} d(x_n, x_{n+1}), \quad \text{za sve } n \in N \cup \{0\}$$

Tada je za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+1}) &\le \delta(Tx_{n-1}, Tx_n) \\
&\le q max\left\{d(x_{n-1}, x_n), \delta(x_{n-1}, Tx_{n-1}), \delta(x_n, Tx_n), \frac{1}{2} d(x_{n-1}, Tx_n)\right\} \\
&\le q max\left\{d(x_{n-1}, x_n), q^{-a} d(x_{n-1}, x_n), q^{-a} d(x_n, x_{n+1}), \frac{1}{2} d(x_{n-1}, x_{n+1})\right\} \\
&\le q^{1-a} max\left\{q^a d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), q^a \frac{1}{2} d(x_{n-1}, x_{n+1})\right\} \\
&\le q^{1-a} max\left\{d(x_{n-1}, x_n), \frac{1}{2} d(x_{n-1}, x_{n+1})\right\}.
\end{aligned}$$

Za

$$max\left\{d(x_{n-1}, x_n), \frac{1}{2} d(x_{n-1}, x_{n+1})\right\} = \frac{1}{2} d(x_{n-1}, x_{n+1})$$

dobija se da je

$$d(x_n, x_{n+1}) \le \frac{q^{1-a}}{2 - q^{-a}} d(x_{n-1}, x_n)$$

Te je u svakom slučaju

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq q^{1-a} d(x_{n-1}, x_n) .$$

Lako se sada dobija da je

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{(q^{1-a})^n}{1 - q^{1-a}} d(x_0, x_1) . \tag{7}$$

Dakle niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ je Košijev. Neka je $\lim_{n\to\infty} x_n = u$.
Nejednakost (iii) sledi iz (7) kada $p \to \infty$. Zbog $x_{n+1} \in Tx_n$, $n \in \mathbb{N}$, je $u \in Tu$.

Treba još pokazati da je $Tu = \{u\}$.
Ako bi važilo da je $Tu \neq \{u\}$ to bi značilo da je $\delta(u, Tu) > 0$. Tada iz (6) sledi:

$$\delta(Tu, Tu) \leq q \max\{d(u, u), d(u, Tu)\} = q\, \delta(u, Tu)$$

a to je nije moguće zbog načina na koji je definisano $\delta(A, B)$.
Pretpostavimo da postoji $v \in X$ takvo da je $\{v\} = Tv$. Tada važi da je

$$\begin{aligned} d(u, v) &= \delta(u, v) = \delta(Tu, Tv) \\ &\leq q \max\left\{d(u, v), \delta(u, Tu), \delta(v, Tv), \frac{d(u, Tv) + d(v, Tu)}{2}\right\} = q\, d(u, v). \end{aligned}$$

Pošto je $q < 1$ sledi da je $d(u, v) = 0$, tj. $u = v$. Tačka u je i jedinstvena nepokretna tačka.
■

Ako uočimo da je $H(A, B) \leq \delta(A, B) \leq diam(A \cup B)$ dobijaju se sledeća dva tvrđenja kao posledice ove teoreme.

Posledica 3.2.2: [16] Neka je $T : X \longrightarrow \mathcal{B}(X)$ preslikavanje definisano nad $T-$orbitalno kompletnim metričkim prostorom (X, d). Ako preslikavanje T zadovoljava nejednakost:

$$diam(Tx \cup Ty) \leq qmax\left\{d(x, y), H(x, Tx), H(y, Ty), \frac{1}{2} d(x, Ty) + \frac{1}{2} d(y, Tx)\right\}$$

za sve $x, y \in X$ gde je $q \in (0,1)$ tada:

1) Postoji jedinstvena nepokretna tačka u preslikavanja T i $Tu = \{u\}$;

2) Za svako $x_0 \in X$ postoji orbita $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ preslikavanja T u tački x_0 tako da je $\lim_{n\to\infty} x_n = u$;

3) Za svako $n \in X$ je zadovoljena nejednakost:

$$d(x_n, u) \leq \frac{(q^{1-a})^n}{1 - q^{1-a}} d(x_0, x_1),$$

gde je $a \in (0,1)$ proizvoljan fiksiran broj.

Posledica 3.2.3: [21] Neka je $T : X \longrightarrow \mathcal{B}(X)$ preslikavanje definisano nad kompletnim metričkim prostorom (X, d) i za sve $x, y \in X$ je:

$$\delta(Tx, Ty) \leq aH(x, Tx) + bH(y, Ty) + cd(x, y)$$

gde je $a, b, c \geq 0$ i $a + b + c < 1$. Tada postoji jedna i samo jedna nepokretna tačka u preslikavanja T i $Tu = \{u\}$.

Dokaz: Primetimo da je tada zadovoljen uslov

$$\delta(Tx, Ty) \leq (a + b + c) \max\{H(x, Tx), H(y, Ty), d(x, y)\}.$$

Primenom Posledice 3.2.2 dobijamo da preslikavanje T ima jedinstvenu nepokretnu tačku. ■

3.3 Preslikavanje Zamfirescua

U [1] autori su koncept Zamfirescuove jednoznačne funkcije proširili na višeznačna preslikavanja i dobili neka interesantna uopštenja.

Definicija 3.3.1: [1] Neka je (X, d) metrički prostor i neka je $T : X \longrightarrow \mathcal{CB}(X)$. T se naziva ***višeznačno preslikavanje Zamfirescu-a*** ako postoje realni brojevi a, b i c za koje važi $0 \leq a < 1$, $0 \leq b < \frac{1}{2}$ i $0 \leq c < \frac{1}{2}$ tako da je za svako $x, y \in X$ bar jedan od sledećih uslova tačan:

$(\widetilde{z_1})$ $\quad H(Tx, Ty) \leq a\, d(x, y)$

$(\widetilde{z_2})$ $\quad H(Tx, Ty) \leq b\, [d(x, Tx) + d(y, Ty)]$

$(\widetilde{z_3})$ $\quad H(Tx, Ty) \leq c\, [d(x, Ty) + d(y, Tx)]$.

Definicija 3.3.2: [1] Neka je (X, d) metrički prostor i neka je $T: X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$. Tada za T kažemo da je ***MWP (Multi-valued Picard) operator*** ako za svako $x \in X$ i neko $y \in Tx$, postoji niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ tako da je:

1. $x_0 = x, x_1 = y$;
2. $x_{n+1} \in Tx_n$ za sve $n = 0,1,2 \ldots$ i
3. niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ je konvergentan i njegova granica je nepokretna tačka preslikavanja T.

Napomena: Niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ koji zadovoljava prva dva uslova u prethodnoj definiciji se naziva niz sukcesivnih aproksimacija od T počevši od (x, y).

Definicija 3.3.3: [1] Neka je (X, d) metrički prostor i $T : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ MWP operator. Tada definišemo višeznačni operator $T^{\infty}: \mathcal{G}r(T) \to \mathcal{P}(F_T)$, na sledeči način:

$$T^{\infty}(x, y) = \{z \in F_T : \text{postoji niz sukcesivnih aproksimacija od } T \text{ počevši od } (x, y) \text{ koji konvergira ka } z\}.$$

Definicija 3.3.4: [1] Neka je (X,d) metrički prostor i $T : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ MWP operator i $c > 0$. Tada se T naziva ***c-MWP operator*** ako za svako $(x,y) \in \mathcal{G}r(T)$ postoji $t^{\infty}(x,y)$ u $T^{\infty}(x,y)$ tako da je $d\big(x, t^{\infty}(x,y)\big) \leq c\, d(x,y)$.
Da je ova klasa operatora interesantna za ispitivanje pokazuju sledeći primeri [1]:

1. Neka je (X,d) metrički prostor i $T : X \longrightarrow \mathcal{CB}(X)$ višeznačna a-kontrakcija $(0 < \alpha < 1)$. Tada je T c-MWP operator, gde je $c = (1-\alpha)^{-1}$.

2. Neka je (X,d) metrički prostor i $T : X \longrightarrow \mathcal{CB}(X)$ višeznačni operator za koji postoje pozitivni realni brojevi $\alpha, \beta\ i\ \gamma$ tako da je $\alpha + \beta + \gamma < 1$ i

$$H(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y) + \beta\, d(x,Tx) + \gamma\, d(y,Ty),$$

za svako $x, y \in X$. Tada je T c-MWP operator, gde je $c = (1-\gamma)[1-(\alpha+\beta+\gamma)]^{-1}$.

3. Neka je (X,d) metrički prostor i $T : X \longrightarrow \mathcal{CB}(X)$ zatvoren višeznačni operator za koji postoje pozitivni realni brojevi α i β tako da je $\alpha + \beta < 1$ i

$$H(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y) + \beta\, d(y,Ty),$$

za svako $x \in X$ i $y \in Ty$. Tada je T c-MWP operator, gde je $c = (1-\beta)[1-(\alpha+\beta)]^{-1}$.

4. Neka je (X,d) metrički prostor, $x_0 \in X$ i $r > 0$. Neka je $T : \widetilde{\mathcal{B}}(x_0,r) \longrightarrow CB(X)$, gde je $\widetilde{\mathcal{B}}(x_0,r) = \{x \in X : d(x_0,x) \leq r\}$ višeznačni operator za koji postoje $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ i $\alpha + \beta + \gamma < 1$ tako da je

   i. $H(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y) + \beta\, d(x,Tx) + \gamma\, d(y,Ty), \quad \forall x,y \in \widetilde{\mathcal{B}}(x_0,r);$

   ii. $\delta(x_0, Tx_0) < [1-(\alpha+\beta+\gamma)](1-\gamma)^{-1} r.$

Tada je T c-MWP operator, gde je $c = (1-\gamma)[1-(\alpha+\beta+\gamma)]^{-1}$.

Sledeća teorema pokazuje ako je svako višeznačno preslikavanje Zamfirescua MWP operator, štaviše, ono je c−MWP operator.

Teorema 3.3.1: [1] Neka je (X,d) kompletan metrički prostor i $T : X \longrightarrow \mathcal{CB}(X)$ višeznačno preslikavanje Zamfirescu. Tada:

a) T je MWP operator;

b) za svako $x_0 \in X$, postoji orbita $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ preslikavanja T u tački x_0 koja konvergira ka nepokretnoj tački x^* preslikavanja T, za koje sledeće procene važe:

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1), \qquad n = 0,1,2, \ldots$$

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\, d(x_{n-1}, x_n), \qquad n = 1,2,3, \ldots$$

za neku konstantu $\alpha < 1$.

Dokaz: Neka je $x_0 \in X$ i $x_1 \in Tx_0$.
Ako je $H(Tx_0, Tx_1) = 0$ tada je $Tx_0 = Tx_1$. (npr. $x_1 \in Tx_1$, to znači da je $F_T \neq \emptyset$.)
Neka je $H(Tx_0, Tx_1) > 0$. Biramo q, $1 < q < \min\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{2c}\right\}$. Na osnovu Leme 2.1.1 postoji $x_2 \in Tx_1$ tako da je $d(x_1, x_2) \leq q\, H(Tx_0, Tx_1)$.
Ako x_0, x_1 zadovoljavaju $(\tilde{z}_1)$, tada imamo da je

$$d(x_1, x_2) \leq qa\, d(x_0, x_1)$$

Ako x_0, x_1 zadovoljavaju $(\tilde{z}_2)$, tada imamo

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &\leq qb[d(x_0, Tx_0) + d(x_1, Tx_1)] \\ &\leq qb[d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)] \end{aligned}$$

odakle dobijamo da je

$$d(x_1, x_2) \leq \left(\frac{qb}{1-qb}\right) d(x_0, x_1).$$

Ako x_0, x_1 zadovoljavaju $(\tilde{z}_3)$, tada imamo

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &\leq qc[d(x_0, Tx_1) + d(x_1, Tx_0)] \\ &= qc\, d(x_0, Tx_1) \leq qc\, d(x_0, x_2) \\ &\leq qc[d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)] \end{aligned}$$

a, odatle je

$$d(x_1, x_2) \leq \left(\frac{qc}{1-qc}\right) d(x_0, x_1).$$

Za $\alpha = \max\left\{qa, \frac{qb}{1-qb}, \frac{qc}{1-qc}\right\}$, imamo $0 \leq \alpha < 1$, i

$$d(x_1, x_2) \leq \alpha d(x_0, x_1).$$

Ako je $H(Tx_1, Tx_2) = 0$ tada je $Tx_1 = Tx_2$, (npr. $x_2 \in Tx_2$, to znači da je $F_T \neq \emptyset$.)
Neka je $H(Tx_0, Tx_1) > 0$. Opet, na osnovu Lema 2.1.2, postoji $x_3 \in Tx_2$ tako da je

$$d(x_2, x_3) \leq \alpha d(x_1, x_2).$$

Na ovaj način dobijamo orbitu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ preslikavanja T u tački x_0 koja zadovoljava

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n), \qquad n = 1,2,3, \dots \tag{8}$$

i na osnovu (8) induktivno dobijamo

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_0, x_1), \tag{9}$$

i, respektivno,

$$d(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \leq \alpha^k d(x_{n-1}, x_n), \qquad k \in N \cup \{0\}. \tag{10}$$

Tako, za svako $n, p \in \mathbb{N}$, na osnovu (9) sledi da je

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} d(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \alpha^k \, d(x_0, x_1) \leq \\ &\leq \frac{\alpha^n(1-\alpha^p)}{1-\alpha} \, d(x_0, x_1) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \, d(x_0, x_1) \end{aligned} \tag{11}$$

na osnovu (10) dolazimo do

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq (\alpha + \alpha^n + \cdots + \alpha^p)\, d(x_{n-1}, x_n) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{n-1}, x_n). \tag{12}$$

Kako je $0 \leq \alpha < 1$, $\alpha^n \to 0$, kada $n \to \infty$. Zajedno sa (11), ovo pokazuje da je $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Košijev niz, pa $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergira ka nekom $x^* \in X$ jer je (X, d) kompletan metrički prostor.

Iz Leme 2.1.2 (2.) dobijamo da je

$$d(x^*, Tx^*) \leq d(x^*, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx^*) \leq d(x^*, x_{n+1}) + H(Tx_n, Tx^*).$$

Ako x_n, x^* zadovoljavaju $(\tilde{z}_1)$, tada je

$$d(x^*, Tx^*) \leq d(x^*, x_{n+1}) + a d(x_n, x^*). \tag{13}$$

Ako x_n, x^* zadovoljavaju $(\tilde{z}_2)$, tada je

$$\begin{aligned} d(x^*, Tx^*) &\leq d(x^*, x_{n+1}) + b[d(x_n, Tx_n) + d(x^*, Tx^*)] \leq \\ &\leq d(x^*, x_{n+1}) + b[d(x_n, x_{n+1}) + d(x^*, Tx^*)]. \end{aligned} \tag{14}$$

Ako x_n, x^* zadovoljavaju $(\tilde{z}_3)$, tada je

$$\begin{aligned} d(x^*, Tx^*) &\leq d(x^*, x_{n+1}) + c[d(x_n, Tx^*) + d(x^*, Tx_n)] \leq \\ &\leq d(x^*, x_{n+1}) + c[d(x_n, Tx^*) + d(x^*, Tx_{n+1})]. \end{aligned} \tag{15}$$

Dakle, kada $n \to \infty$ u (13), (14) i (15), dobijamo da je $d(x^*, Tx^*) = 0$.
Kako je Tx^* zatvoren, sledi da $x^* \in Tx^*$.
Da bismo dokazali tvrđenje pod (b), koristimo (11) i (12) i neprekidnost metrike, pa uzimajući da $p \to \infty$, dokaz je kompletiran. ■

Za datu tačku $x \in X$ i kompaktan skupa $A \subset X$, znamo da uvek postoji $a^* \in A$ tako da je $d(x, a^*) = d(x, A)$. Tada a^* zovemo projekcija tačke x na skupu A i označavamo $a^* = \pi_x A$. Tačka a^* ne mora biti jedinstvena, ali biramo jednu.

Definicija 3.3.5: Neka je $T : X \longrightarrow \mathcal{K}(X)$ (Tx je kompaktan skup za svako $x \in X$). Definišemo projekciju povezanu sa višeznačnim preslikavanjem T pomoću $Px = \pi_x(Tx)$. Za $x_0 \in X$ definišemo $x_{n+1} = Px_n$, $n = 0,1,2,\ldots$ Niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ konstruisan na ovaj način nazivamo ***Pikardova projekciona iteracija*** (Picard projection iteration) preslikavanja T.

Teorema 3.3.2: [1] Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i $T : X \longrightarrow \mathcal{CB}(X)$ višeznačno Zamfiresku preslikavanje takvo da je Tx kompaktan skup za svako $x \in X$. Tada je:

1. $F_T \neq \emptyset$;

2. za proizvoljno $x_0 \in X$, Pikardova projekciona iteracija $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergira ka nekom $x^* \in F_T$;

3. važe sledeće procene

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1), \qquad n = 0,1,2, \ldots$$
$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\, d(x_{n-1}, x_n), \qquad n = 1,2,3, \ldots$$

   za neku konstantu $\alpha < 1$.

Dokaz: Neka je T višeznačno Zamfiresku preslikavanje (to jest, za svako $x, y \in X$ zadovoljen je bar jedan od uslova $(\tilde{z}_1), (\tilde{z}_2)$ ili $(\tilde{z}_3)$, i Tx je kompaktan za svako $x \in X$.)
Neka je $x_0 \in X$ proizvoljno i neka je $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Pikardova projekciona iteracija.
Za $x_1, x_2 \in X$ vidimo da je

$$d(x_1, x_2) = d(x_1, Px_1) = d(x_1, Tx_1) \leq \rho(Tx_0, Tx_1) \leq H(Tx_0, Tx_1).$$

Ako x_0, x_1 zadovoljavaju $(\tilde{z}_1)$, tada je

$$d(x_1, x_2) \leq a d(x_0, x_1).$$

Ako x_0, x_1 zadovoljavaju $(\tilde{z}_2)$, tada je

$$d(x_1, x_2) \leq b[d(x_0, Tx_0) + d(x_1, Tx_1)]$$

$$= b[d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)]$$

odatle dobijamo

$$d(x_1, x_2) \leq \left(\frac{b}{1-b}\right) d(x_0, x_1).$$

Ako x_0, x_1 zadovoljavaju $(\tilde{z}_3)$, tada imamo

$$d(x_1,x_2) \leq c[d(x_0,Tx_1) + d(x_1,Tx_0)]$$

$$= c\, d(x_0,Tx_1)$$

$$\leq c[d(x_0,x_1) + d(x_1,Tx_1)]$$

$$= c[d(x_0,x_1) + d(x_1,x_2)]$$

a, odatle je

$$d(x_1,x_2) \leq \left(\frac{c}{1-c}\right) d(x_0,x_1).$$

Za $\alpha = \left\{a, \frac{b}{1-b}, \frac{c}{1-c}\right\}$, imamo $0 \leq \alpha < 1$, i pri tome je

$$d(x_1,x_2) \leq \alpha d(x_0,x_1).$$

Štaviše, za svako $n \in \mathbb{N}$ imamo da je

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq \alpha d(x_{n-1},x_n). \tag{16}$$

Dalje dokazujemo koristeći iste argumente kao u prethodnoj teoremi. ■

Posledica 3.3.1: [1] Neka je (X,d) kompletan metrički prostor. Ako je T višeznačno Zamfiresku preslikavanje, T je tada $c - MWP$ operator, gde je $c = \frac{1}{1-\alpha}$ za neku konstantu $\alpha < 1$.

Dokaz: Sledi direktno iz teoreme 3.3.1 (b). ■

Teorema 3.3.3: [1] Neka je (X,d) kompletan metrički prostor. Ako je T višeznačno Zamfiresku preslikavanje, tada je F_T kompletan skup.

Dokaz: Neka je $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Košijev niz u F_T. Kako je X kompletan, postoji $u \in X$ tako da $d(x_n,u) \to 0$ kada $n \to \infty$.
Na osnovu leme 2.1.2 (3) imamo

$$d(u,Tu) \leq d(u,x_{n+1}) + d(x_{n+1},Tx_n) + \rho(Tx_n,Tu)$$

$$\leq d(u,x_{n+1}) + d(x_{n+1},Tx_n) + H(Tx_n,Tu)$$

$$= d(u,x_{n+1}) + H(Tx_n,Tu).$$

Ako x_n, u zadovoljavaju $(\tilde{z}_1)$, tada je

$$d(u, Tu) \leq d(u, x_n) + ad(x_n, u). \tag{17}$$

Ako x_n, u zadovoljavaju $(\tilde{z}_2)$, tada je

$$d(u, T) \leq d(u, x_{n+1}) + b[d(x_n, Tx_n) + d(u, Tu)] \tag{18}$$

Ako x_n, u zadovoljavaju $(\tilde{z}_3)$, tada je

$$\begin{aligned} d(u, Tu) &\leq d(u, x_{n+1}) + c[d(x_n, Tu) + d(u, Tx_n)] \\ &\leq d(u, x_{n+1}) + c[d(x_n, Tu) + d(u, x_{n+1})] \end{aligned} \tag{19}$$

Otuda, kada $n \to \infty$ u (17), (18) i (19), dobijamo da je $d(u, Tu) = 0$. Kako je Tu zatvoren skup, $u \in Tu$. Time je dokaz završen. ■

Sledeći primer pokazuje da se za dato preslikavanje T ne može primeniti Nadlerova teorema o nepokretnoj tački, dok možemo koristiti Teoremu 3.3.2. što znači da se radi o pravom uopštenju.

Primer: [1]

Neka je $X = [0,1]$ i preslikavanje $T: X \longrightarrow \mathcal{CB}(X)$ definisano

$$Tx = \begin{cases} \left[0, \dfrac{1}{4}\right] : x \in [0,1) \\ \left[0, \dfrac{1}{2}\right] : x = 1. \end{cases}$$

Ako izaberemo $c = \frac{1}{3}$, tada T zadovoljava $(\tilde{z}_3)$. Dakle, na osnovu Teoreme 3.3.2, preslikavanje T ima nepokretnu tačku. Za $y = 1$, $x \in [\frac{3}{4}, 1)$ je $|x - y| \leq \frac{1}{4} = H(Tx, Ty)$. Ovo znači da T nije višeznačna kontrakcija, pa ne možemo primeniti Nadlerovu teoremu u ovom primeru.

3.4 Reichov problem

Jedan od pravaca generalizacije Banahovog principa, odnosno Nadlerovog rezultata, jeste da se konstanta k zameni funkcijom koja zavisi od rastojanja tačaka x i y.

Neka je $k\colon (0,\infty) \to [0,1)$ funkcija sa osobinom

$$\limsup_{s\to t^+} k(s) < 1\,, \qquad \forall t > 0. \tag{$*$}$$

Teorema 3.4.1: [20,21] Neka je (X,d) kompletam metrički prostor i neka $T : X \longrightarrow \mathcal{K}(X)$ zadovoljava uslov:

$$H(Tx,Ty) \le k\big(d(x,y)\big)\, d(x,y), \qquad x,y \in X, \quad x \neq y, \tag{20}$$

gde $k\colon (0,\infty) \to [0,1)$ ima osobinu $(*)$. Tada T ima nepokretnu tačku.

Reich je postavio sledeći problem:
Da li T ima nepokretnu tačku ako $T\colon X \longrightarrow \mathcal{CB}(X)$ zadovoljava uslov (20) i k ima osobinu $(*)$?
Iako Rajhov problem ostaje nerešen, dati su neki delimični odgovori.

Teorema 3.4.2: [5,15] Neka je (X,d) kompletan metrički prostor i $T\colon X \longrightarrow \mathcal{CB}(X)$ zadovoljava uslov:

$$H(Tx,Ty) \le k\big(d(x,y)\big)\, d(x,y), \qquad x,y \in X, \quad x \neq y, \tag{21}$$

gde je $k\colon (0,\infty) \to [0,1)$ funkcija. Ako k ima svojstvo

$$lim\sup_{s\to t^+} k(s) < 1 \qquad \forall t \geq 0. \tag{$**$}$$

tada T ima nepokretnu tačku.

U dokazu ove teoreme, koristimo lemu:

Lema 3.4.1: [6] Pretpostavimo da $T : X \longrightarrow \mathcal{CB}(X)$ zadovoljava uslov (21) gde k ima svojstvo $(*)$. Tada za svako $x_0 \in N$ postoji orbita $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ preslikavanja T u tački x_0 tako da niz $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ opadajući teži ka 0.

Dokaz: Biramo proizvoljno $x_0 \in X$ i $x_1 \in Tx_0$, a zatim izaberemo $x_{n+1} \in Tx_n$ za $n = 1,2 \ldots$ tako da važi

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq [k\,(d(x_n, x_{n-1}))]^{-1/2}\, d(x_n, Tx_n). \tag{22}$$

(Pretpostavljamo $x_n \neq x_{n-1}$ bez umanjenja opštosti, jer u suprotnom x_{n-1} je nepokretna tačka preslikavanja *T*.) Kako je

$$d(x_n, Tx_n) \leq H(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq k\left(d(x_{n-1}, x_n)\right)\ d(x_{n-1}, x_n),$$

sledi iz (22) da je

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \sqrt{k\left(d(x_{n-1}, x_n)\right)}\, d(x_{n-1}, x_n) < \ d(x_{n-1}, x_n). \tag{23}$$

Tako je niz $\{d(x_{n-1}, x_n)\}$ opadajući. Neka je b limes od $\{d(x_{n-1}, x_n)\}$. Za $n \to \infty$ iz (23) dobijamo da je $b \leq \sqrt{c}b$, gde je $c = \limsup\limits_{r \to b^+} k(r) < 1$, što je kontradikcija. Te sledi da je $b = 0$. ■

Sada se vraćamo na dokaz Teoreme 3.4.2.

Dokaz: Neka je $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ definisano kao u Lemi 3.4.1. Iz svojstva $(**)$ imamo $\delta > 0$ i $a \in (0,1)$ tako da

$$k(t) < a^2 \quad \text{za } t \in (0, \delta).$$

Neka je N takvo da je $d(x_{n-1}, x_n) < \delta$, za $n \geq N$. Iz prve nejednakosti u (23) za $n \geq N$ sledi

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq a\, d(x_{n-1}, x_n) \leq \cdots \leq a^{\,n-N+1} d(x_{N-1}, x_N).$$

Ovo implicira da je $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Košijev niz, a otuda i konvergentan. Neka je $\xi = \lim x_n$. Kako $x_n \in Tx_{n-1}$, za svako n, kada $n \to \infty$ granica $\xi \in T\xi$ i ξ je nepokretna tačka od *T*.

■

Drugi delimičan odgovor na Rajhov problem, dao je Y.Q. Chen [27].

Teorema 3.4.3: [27] Neka je (X,d) kompletan metrički proctor i $T : X \longrightarrow \mathcal{CB}(X)$ zadovoljava uslov:

$$H(Tx,Ty) \leq k\big(d(x,y)\big)\,d(x,y), \qquad x,y \in X, x \neq y$$

gde je $k: (0,\infty) \to [0,1)$ ima svojstvo $(*)$. Pretpostavimo da T ima osobinu $(\lozenge)$:

> Za svaki zatvoren podskup Y od X takav da je $Tx \cap Y \neq \emptyset$, $\forall x \in Y$, važi da je $d(x, Tx \cap Y) = d(x, Tx)$, $\forall x \in Y$. $(\lozenge)$

Tada T ima ima nepokretnu tačku.
Za dokaz ove teoreme u dva koraka koristimo sledeće dve leme.

Pre svega uočimo sledeće:
Neka je dato $\varepsilon > 0$. Neka je $l(\varepsilon)$, takvo da je $\tilde{k}(\varepsilon) < l(\varepsilon) < 1$ gde je $\tilde{k}: (0,\infty) \to [0,1)$ definisano :

$$\tilde{k}(t) \coloneqq \limsup_{r\to t^+} k(r), \qquad t > 0.$$

Iz svojstva $(*)$ sledi da postoji $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0,1)$ tako da je $k(t) < l(\varepsilon)$ za $\varepsilon \leq t < \varepsilon + \delta$.

Lema 3.4.2: [6] Pretpostavimo da je A zatvoren podskup od X tako da važi

$$A \cap Tx \neq \emptyset, \qquad \forall x \in A.$$

Tada je $\inf\{d(x,Tx) : x \in A\} = 0$.

Dokaz: Biramo neko $x_0 \in A$ i $x_1 \in Tx_0 \cap A$. Zatim rekurzivno definišemo x_{n+1} za $n \geq 1$ (možemo pretpostaviti da je $x_n \neq x_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$) na sledeći način : $x_{n+1} \in Tx_n \cap A$ je izabran tako da važi $d(x_n,x_{n+1}) < d(x_n,Tx_n) + \varepsilon_n$, gde je

$$0 < \varepsilon_n < \min\left\{d(x_{n-1},x_n)\big[1 - k\left(d(x_{n-1},x_n)\right)\big], \frac{1}{n}\right\}.$$

Ovo je moguće, s obzirom na pretpostavku imamo da je $d(x_n,Tx_n) = d(x_n,Tx_n \cap A)$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Odatle sledi

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq H(Tx_{n-1},Tx_n) + \varepsilon_n \leq k\left(d(x_{n-1},x_n)\right) d(x_{n-1},x_n) + \varepsilon_n < d(x_{n-1},x_n).$$

Neka je $\lim d(x_{n-1}, x_n) = d$. Ako je $d > 0$, zaključujemo na osnovu svojstva $(*)$ da je $d \leq d\tilde{k}(d) < d$, što je kontradikcija. Dakle $d = 0$, odakle sledi da je $\inf\{d(x, Tx) : x \in A\} = 0$. ■

Lema 3.4.3: [6] Pretpostavimo da je A zatvoren podskup od X tako da je

$$A \cap Tx \neq \emptyset, \qquad \forall x \in A.$$

Tada za $\varepsilon > 0$ postoji $x_0 \in A$ tako da važi $Ty \cap A \neq \emptyset$, $\forall y \in B$, gde je

$$B \coloneqq \{y \in A : d(y, x_0) \leq \check{\varepsilon}\},$$

za

$$\check{\varepsilon} = \varepsilon + \frac{4}{\delta}.$$

Dokaz: Pretpostavimo da ne postoji $x_0 \in A$. Tada za svako $x \in A$ postoji neko $y \in A$, $d(y, x) \leq \check{\varepsilon}$, tako da je $d(z, x) > \check{\varepsilon}$, za svako $z \in Ty$ i specijalno $d(x, Ty) \geq \check{\varepsilon}$. Razlikujemo dva slučaja:

1. slučaj: $d(x, y) < \check{\varepsilon} - 4/\delta$;

$$d(x, Tx) \geq d(x, Ty) - H(Tx, Ty) \geq \check{\varepsilon} - k\big(d(y, x)\big)d(y, x) \geq \check{\varepsilon} - d(y, x) \geq \frac{4}{\delta};$$

2. slučaj: $d(x, y) \geq \check{\varepsilon} - 4/\delta$;

Tada je $\varepsilon \leq d(x, y) < \check{\varepsilon}$ te je

$$d(x, Tx) \geq d(x, Ty) - H(Tx, Ty) \geq \check{\varepsilon} - k\big(d(x, y)\big)d(x, y) \geq \check{\varepsilon} - l(\varepsilon)\check{\varepsilon} = \check{\varepsilon}\big(1 - l(\varepsilon)\big).$$

Odavde zaključujemo da je $\inf\{d(x, Tx) : x \in A\} > 0$. Ovo je kontradikcija sa Lemom 3.4.2. ■

Sada se vraćamo na dokaz Teoreme 3.4.3.

Dokaz: Biramo niz $\{\varepsilon_n\}$ koji je strogo opadajući ka 0. Neka je $l_n = l(\varepsilon_n)$, $\delta_n = \delta(\varepsilon_n)$ i neka je $\check{\varepsilon}_n$ definisano na isti način kao i ranije. Tada na osnovu Leme 3.4.3 možemo definisati niz lopti $\{B_n\}$ tako da je:

1. $Tx \cap B_n \neq \emptyset$, $\forall x \in B_n \; i \; n = 1,2,3\ldots$;

2. B_n je podskup od B_{n-1} i poluprečnik od B_n je ε_n.

Kako je $diam(B_n) = 2\varepsilon_n \to 0$, (prečnik) zbog kompletnosti prostora X imamo da je $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{\zeta\}$ za neko $\zeta \in X$. Na osnovu osobine 1. ovo ζ je nepokretna tačka od T.

■

Napomena: Chenov uslov $(\lozenge)$ je veoma restriktivan. Zaista, čak i konstantno preslikavanje ne zadovoljava uvek uslov $(\lozenge)$, a to je pokazano u sledećem primeru:

Primer: [6]

Neka je $X = [0,5]$ sa uobičajenom metrikom u $\mathbb{R}$. Definišemo konstantno preslikavanje F:

$$Fx \coloneqq [0,1] \cup [4,5], \qquad x \in X.$$

Neka je $Y = [1,3]$. tada imamo $Fx \cap Y \neq \emptyset, \forall x \in X$. Ali za $x = 3 \in Y$ imamo $d(x, Fx) = 1$ dok je $d(x, Fx \cap Y) = 2$. Te je $d(x, Fx) \neq d(x, Fx \cap Y)$.

Evo još jednog parcijalnog odgovora na Reichovo pitanje.

Teorema 3.4.4: [18] Neka je (X, d) kompletan, metrički prostor i $T : X \longrightarrow \mathcal{CB}(X)$ zadovoljava uslov

$$H(Tx, Ty) \leq k\left(d(x,y)\right)\, d(x,y) \qquad x, y \in X, x \neq y, \tag{24}$$

gde $k: (0, \infty) \to [0,1)$ ima osobinu $(*)$. Ako je $k(t) \leq 1 - at^{\sigma}$ za neku konstantu $a > 0$ i $\sigma \in (0,1)$ i svako $t > 0$ dovoljno malo: $0 < t \leq t_0$ za neko $0 < t_0 < a^{-1/\sigma}$, tada T ima nepokretnu tačku.

Dokaz: Možemo da pretpostavimo da je nejednakost (24) stroga. (u suprotnom, možemo k zameniti sa drugom funkcijom $k_1 > k$ koja i dalje zadovoljava svojstvo $(*)$ i koja nejednakost (24) pravi strogom. Na primer, birajući neko a' takvo da je $0 < a' < a$, imamo da je $1 - at^{\sigma} < 1 - a't^{\sigma}$za $t > 0$.) Zatim za proizvoljno $x_0 \in X$ i definišemo orbitu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ od T u tački x_0 tako da je

$$d(x_n, x_{n+1}) < \varphi\big(d(x_{n-1}, x_n)\big), \; n \geq 1, \tag{25}$$

gde je $\varphi(t) \coloneqq tk(t), t > 0$.
Ovo je moguće jer je $d(x_n, Tx_n) \leq H(Tx_{n-1}, Tx_n) < \varphi\big(d(x_{n-1}, x_n)\big)$. (Kada smo definisali $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ pretpostavli smo da je $x_{n-1} \neq x_n$, za svako $n \geq 1$. Zaista, ako je $x_{n-1} = x_n$ za neko $n \geq 1$, tada je x_{n-1} nepokretna tačka od T i to bi bio kraj dokaza.) Kako je $\varphi(t) < t$ za $t > 0$, niz $\{d(x_{n-1}, x_n)\}$ je opadajući. (U dokazu Leme 3.5.1 pokazali smo da je $\lim d(x_{n-1}, x_n) = 0$.) Ali to još nije dovoljno da pokažemo konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1})$. Neka je $\varrho(t) = t(1 - at^{\sigma})$. Tada je $\varphi(t) \leq \varrho(t)$ za $t \in (0, t_0]$. Za svako fiksno $\tau \in (0, t_0]$, koristeći Lemu 4 [18],

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n(\tau) < \infty.$$

(Ovde je ϱ^n n –ta iteracija od ϱ.) Neka je N dovoljno veliko tako da važi $d(x_{n-1}, x_n) < \tau$ za $n \geq N$. Iz monotonosti funkcije ϱ i (25) sledi da je

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \varphi\big(d(x_{n-1}, x_n)\big) \leq \rho\big(d(x_{n-1}, x_n)\big) \leq \cdots \leq \varrho^{n-N+1}\big(d(x_{N-1}, x_N)\big)$$

$$\leq \varrho^{n-N+1}(\tau), \quad n \in N.$$

Ovo pokazuje da je

$$\sum d(x_n, x_{n+1}) < \infty.$$

Dakle, niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ je konvergentan, i $\lim_{n\to\infty} x_n = x^* \in X$. Kako $x_n \in Tx_{n-1}$ za svako n, kada $n \to \infty$ sledi da $x^* \in Tx^*$, te je x^* nepokretna tačka preslikavanja T.

■

3.5 Lokalne kontrakcije

Korišćena literature za ovo poglavlje je ([6], [16]).
Definicije ε-lančastog metričkog prostora data je u uvodnom poglavlju (Definicija 1.2.6).

Teorema 3.5.1: [6] Ako je (X,d) ε-lančast metrički prostor, tada je i $(\mathcal{K}(X),H)$ ε-lančast metrički prostor.

Dokaz: Fiksiramo $y \in X$ i neka je $Y=\{y\} \in \mathcal{K}(X)$. Kako je osobina $\varepsilon -$ lančasto tranzitivna, dovoljno je pokazati da je svako $A \in \mathcal{K}(X)$ $\varepsilon -$ lančast u $\mathcal{K}(X)$ do Y. (postoji $\varepsilon -$ lanac u $\mathcal{K}(X)$ koji povezuje A i Y.) Prvo pokazujemo da ovo važi za konačan skup A, koristeći matematičku indukciju po *n*, gde je *n* broj elemenata koje sadrži A.

1) Za $n=1$ A je jednočlani skup. Pošto je i Y jednočlan tvrđrnje je tačno jer je (X,d) $\varepsilon -$ lančast.
2) Pretpostavimo da tvrdjenje važi za sve konačne podskupove A iz X, koji sadrže ne više od n elemenata.
3) Neka je sada A podskup od X koji sadrži $n+1$ element, $A=\{x_1,\dots,x_{n+1}\}$. Kako je X $\varepsilon -$lančast, postoji $\varepsilon -$ lanac $x_1=u_0,\dots,u_m=x_2$ u X koji povezuje x_1 i x_2. Lako se uočava da konačan skup

$$A,\{u_1,x_2,\dots,x_{n+1}\},\dots,\{u_{m-1},x_2,\dots,x_{n+1}\},\{x_2,\dots,x_{n+1}\}$$

formira $\varepsilon -$ lanac u $\mathcal{K}(X)$ koji povezuje A i B, $B=\{x_2,\dots,x_{n+1}\}$. Ali na osnovu indukcijske pretpostavke, B je $\varepsilon -$ lancem povezan u $\mathcal{K}(X)$ sa Y, te sledi da je A $\varepsilon -$ lancem povezan u $\mathcal{K}(X)$ sa Y.
Sada za proizvoljan kompaktan skup A, nađimo konačnu familiju podskupova $\{A_k\}_{k=1}^{n}$ od A tako da je $A=\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ i svako A_k ima prečnik $<\varepsilon$. Biramo za svako k neko $x_k \in A_k$ i stavimo u skup $C=\{x_1,\dots,x_n\}$. Nije teško primetiti da je za svako $z \in A$, $d(z,C) \leq diam(A_k)$ za neko *k*, $1 \leq k \leq n$. Iz toga sledi

$$H(A,C)=\max\{\sup_{z\in A} d(z,C),\sup_{y\in C} d(y,A)\}=\sup_{z\in A} d(z,C) \leq \max_{1\leq k\leq n} diam(A_k)<\varepsilon,$$

što pokazuje da je A $\varepsilon -$ lancem povezan u $\mathcal{K}(X)$ sa C. Međutim, time smo pokazali i da je C $\varepsilon -$ lancem povezan u $\mathcal{K}(X)$ sa Y. Otuda je A $\varepsilon -$ lancem povezan u $\mathcal{K}(X)$ sa Y. ■

Definicija 3.5.1: Neka je (X,d) $\varepsilon -$lančast metrički prostor. Za preslikavanje $T: X \longrightarrow \mathcal{K}(X)$ kažemo da je lokalna kontrakcija Reichove vrste ako je:

$$H(Tx, Ty) \leq k\left(d(x, y)\right)\ d(x, y) \quad \text{za}\ x, y \in X \quad \text{i pri čemu je} \quad 0 < d(x, y) < \varepsilon,$$

gde $k: (0, \infty) \to [0,1)$ ima svojstvo

$$\limsup_{s \to t^+} k(s) < 1 \qquad \forall t > 0. \tag{$*$}$$

Teorema 3.5.2: [7] Neka je (X, d) $\varepsilon -$ lančast metrički proctor i $T : X \longrightarrow \mathcal{K}(X)$ je lokalna kontrakcija Reich-ove vrste. Tada T ima nepokretnu tačku.

Napomena: Prethodna teorema je delimičan odgovor na Reichovo pitanje kao i specijalni slučaj sledeće teoreme.

Teorema 3.5.3: [7] Neka je (X, d) kompletan $\varepsilon -$ lančast metrički prostor i $T : X \longrightarrow \mathcal{K}(X)$ zadovoljava sledeći uslov: $\forall \eta,\ 0 < \eta < \varepsilon$ postoji δ takvo da

$$\text{iz} \quad \eta \leq d(x, y) < \eta + \delta \quad \Longrightarrow \quad H(Tx, Ty) < \eta\ .$$

Tada T ima nepokretnu tačku.

Dokaz: Neka je $G : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(X)$ definisano na sledeći način

$$G(A) = \bigcup_{a \in A} T(a), \qquad A \in \mathcal{K}(X).$$

Primetimo da G ima svojstvo: $\forall \eta,\ 0 < \eta < \varepsilon$ tada postoji $\delta > 0$ takvo da je

$$\eta \leq H(A, B) < \eta + \delta \quad \Longrightarrow \quad H\big(G(A), G(B)\big) < \eta$$

Otuda G ima nepokretnu tačku $A \in \mathcal{K}(X)$ na osnovu Teoreme 1.2.7. Sada, kako je $A = G(A)$, T preslikava A u samog sebe. Lako se uočava da uslov kontrakcije preslikavanja T implicira da je $\inf\{d(x, Tx) : x \in A\} = 0$. Kompaktnost skupa A obezbeđuje da postoji tačka $x \in A$ za koju je $d(x, Tx) = 0$, tj. da $x \in Tx$.

■

Definicija 3.5.2: [16] Preslikavanje $T : (X, d) \longrightarrow CB(X)$ je ***uniformna lokalna $(\varepsilon, \lambda) -$ kontrakcija*** ako za svako $x, y \in X$ važi implikacija:

$$d(x, y) \leq \varepsilon \Rightarrow H(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)\ , \qquad \lambda \in [0,1).$$

Teorema 3.5.5: [16] Neka je (X,d) kompletan ε −lančast metrički proctor, a $T: X \longrightarrow \mathcal{CB}(X)$ uniformna lokalna $(\varepsilon,\lambda)-$ kontrakcija takva da je skup Tx kompaktan za svako $x \in X$. Tada postoji $x^* \in X$ tako da je $x^* \in Tx^*$.

Dokaz: Neka su x i y proizvoljni elementi iz X i

$$\rho_\varepsilon(x,y) = inf\left\{\sum_{i=1}^{n} d(\,x_{i-1},x_i)\right\}$$

$$\{x_0,x_1,\dots,x_n\} \subset X$$

gde je $x_0 = x$, $x_n = y$, $d(x_{i-1},x_i) < \varepsilon \qquad i = 1,2,\dots n$.
Može se lako pokazati da je ρ_ε metrika sa sledećim osobinama:

1) $\rho_\varepsilon(x,y) \geq d(x,y)$ i

2) $d(x,y) = \rho_\varepsilon(x,y)$ ako je $d(x,y) \leq \varepsilon$.

Takođe (X,ρ_ε) je kompletan metrički prostor.
Pri tome $A,B \in \mathcal{K}(X)$, $H(A,B) < \varepsilon \implies H_\varepsilon(A,B) = H(A,B)$.
Neka je sada $\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ ε −lanac koji spaja tačke x i y. Tada je :

$$H(Tx_i,Tx_{i-1}) \leq \lambda\, d(x_i,x_{i-11}) \leq \varepsilon\,\lambda < \varepsilon, \quad \forall i = 1,2,\dots,n$$

te je:

$$H_\varepsilon(Tx,Ty) \leq \sum_{i=1}^{n} H_\varepsilon(T\,x_i,Tx_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} H(T\,x_i,Tx_{i-1}) \leq \lambda \sum_{i=1}^{n} d(\,x_i,x_{i-1})$$

odakle sledi:

$$H_\varepsilon(Tx,Ty) \leq \lambda\,\rho_\varepsilon(x,y) \qquad\qquad \forall x,y \in X.$$

Prema tome, T je kontrakcija u odnosu na ρ_ε i H_ε pa na osnovu Teoreme 3.1.1 T ima fiksnu tačku, tj. postoji $x^* \in X$ takvo da $x^* \in Tx^*$. ■

3.6 Kontrakcije sa uslovom na rubu

U ovom poglavlju posmatraćemo funkcije koje ne preslikavaju ceo skup u samog sebe već samo rubne tačke. Ta preslikavanja pripadaju klasi „non-self“ preslikavanja. Pri tome neophodno je obogatiti strukturu metričkog prostora. Korišćena je literatura [16].

Definicija 3.6.1: Ako za proizvoljne dve tačke $x, y \in X,\ x \neq y$ postoji tačka $z \in X,\ z \neq x\ i\ z \neq y$ tako da važi

$$d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)$$

Tada kažemo da je (X,d) ***konveksan*** metrički prostor. Skup svih takvih tačaka, zajedno sa x i y označavamo sa $[x,y]$.

U kompletnom metrički konveksnom prostoru svake dve tačke su krajevi metričkog interval. Ako je X metrički konveksan prostor, a K zatvoren podskup od X, iz $x \in K$ i $y \notin K$ sledi da postoji elemanat $z \in \partial K$ tako da je

$$d(x,y) = d(x,z) + d(z,y).$$

Napomena: Svaki Banachov prostor je metrički konveksan.

Teorema 3.6.1: [16] Neka je (X,d) kompletan metrički konveksan prostor, K je neprazan i zatvoren podskup od X i $T : K \longrightarrow \mathcal{CB}(X)$ tako da je:

a) Za sve $x, y \in X$ važi nejednakost:

$$H(Tx,Ty) \leq ad(x,y), \qquad a \in [0,1);$$

b) Ako je $x \in \partial K$, tada $Tx \subseteq K$.

Tada postoji nepokretna tačka preslikavanja *T*.

Dokaz: Posmatramo slučaj kada postoji tačka $x \in K$ takva da važi $Tx \not\subset K$. Ako bi važilo da $Tx \subseteq K$, za svako $x \in K$ tada iz Teoreme 3.1.1 sledi egzistencija nepokretne tačke preslikavanja *T*.

Dakle, postoji elemenat $y \in Tx$ takav da $y \notin K$. Neka je $z \in [x, y]$ tako da $z \in \partial K$. Ako je $\lambda = \frac{d(x,z)}{d(x,y)}$, elemenat z označavamo sa $z(x, y, \lambda)$.

Neka je $x_0 \in \partial K$. Kako je $Tx \subset K$, za sve $x \in \partial K$ postoji $x_1 \in Tx_0$ tako da je $x_1 \in K$. Sada ćemo matematičkom indukcijom pokazati da postoje dva niza $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$i $\{x'_n\}_{n=0}^{\infty}$ takva da je:

$$x'_n \in Tx_{n-1}\,, \qquad x_n = z(x_{n-1}, x'_n, \lambda)$$

gde je $\lambda \in [0,1]$ najveći broj za koji $x_n \in K$ i $d(x'_n, x'_{n+1}) \leq a'\, d(x_{n-1}, x_n)$ za neko fiksirano a' za koje važi $a < a' < 1$.

Pretpostavimo da su za neko $n \geq 1$ nađeni elementi $x_0, x_1, \dots, x_n$ sa gornjim osobinama. Za $n = 1$ to su elementi x_0 i x_1. Koristeći definiciju funkcije H zaključujemo da postoji elemenat

$$x'_{n+1} \in Tx_n \qquad (\spadesuit)$$

takav da je:

$$d(x'_n, x'_{n+1}) \leq H(Tx_{n-1}\,, Tx_n\,) + \varepsilon$$

za $\varepsilon = (a' - a)\, d(x_{n-1}, x_n)$. Tada je:

$$d(x'_n, x'_{n+1}) \leq a\, d(x_{n-1}, x_n) + (a' - a)\, d(x_{n-1}, x_n) = a'\, d(x_{n-1}, x_n).$$

Sada treba proceniti veličinu $d(x_n, x_{n+1})$ pri čemu razlikujemo dva slučaja:

$$x_n = x'_n$$
$$x_n \neq x'_n$$

1. Pretpostavimo da je $x_n = x'_n$.

   Ako je tada $x_{n+1} = x'_{n+1}$ sledi da je

   $$d(x_n, x_{n+1}) = d(x'_n, x'_{n+1}) \leq a'\, d(x_{n-1}, x_n).$$

   Ako je je $x_{n+1} \neq x'_{n+1}$. Tada je

   $$d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x'_n, x'_{n+1}) \leq a'\, d(x_{n-1}, x_n).$$

2. Pretpostavimo sada da je $x_n \neq x'_n$.

Tada je $x_n \in \partial K$ te je $Tx_n \subseteq K$ odakle je $x_{n+1} = x'_{n+1}$. Kako iz $x_{n-1} \in \partial K$ sledi da je $Tx_{n-1} \subseteq K$, a odavde $x_n = x'_n$ sledi da $x_{n-1} \notin \partial K$.
Dakle, u ovom slučaju važi da je:

$$x_{n-1} = x'_{n-1}$$
$$x_{n+1} = x'_{n+1}$$

te je:

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_n, x'_n) + d(x'_n, x_{n+1}) = d(x_n, x'_n) + d(x'_n, x'_{n+1})$$

$$\leq d(x_n, x'_n) + a'\, d(x_{n-1}, x_n) \leq d(x_{n-1}, x'_n)$$

$$= d(x'_{n-1}, x'_n) \leq a'\, d(x_{n-2}, x_{n-1}).$$

Matematičkom indukcijom dokazujemo da je za svako $n \geq 0$ zadovoljena nejednakost:

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq (a')^{n/2}\, d(x_0, x_1) \tag{26}$$

1. Za $n = 0$ to je očigledno

   Za $n = 1$ i $x_2 \in K$ $\quad d(x_1, x_2) = d(x'_1, x'_2) \leq a' d(x_0, x_1)$

   a za $x_2 \notin K$ $\quad d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x'_2) = d(x'_1, x'_2) \leq a' d(x_0, x_1)$

i gornja nejednakost je zadovoljena.

2. Pretpostavimo sada da je nejednakost (26) zadovoljena za neko n.
3. Pokažimo sada da iz te pretpostavke sledi da je (26) tačna za $n + 1$

Posebno se razmatraju slučajevi kada je $x_{n+1} = x'_{n+1}$ odnosno kada je $x_{n+1} \neq x'_{n+1}$.
U prvom slučaju je:

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq a'\, d(x_n, x_{n+1}) \leq a'\, (a')^{n/2}\, d(x_0, x_1)$$

$$\leq (a')^{n+1/2}\, d(x_0, x_1).$$

Pretpostavimo da je $x_{n+1} \neq x'_{n+1}$. Tada je:

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq a'\, d(x_{n-1}, x_n) \leq a'\, (a')^{(n-1)/2}\, d(x_0, x_1) =$$

$$= (a')^{(n+1)/2}\, d(x_0, x_1).$$

Na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da je nejednakost (26) tačna za svako $n \geq 0$.
Niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ je Košijev, te iz kompletnosti prostora X sledi egzistencija elementa $u \in K$ takvog da je $\lim_{n\to\infty} x_n = u$. Treba još pokazati da $u \in Tu$.

Primetimo da postoji podniz $\{x_{n_k}\}$ niza $\{x_n\}$, za koji važi $x_{n_k} = x'_{n_k}$, $k = 1,2, \ldots$ Na osnovu (♠), $x'_{n_k} \in Tx_{n_{k-1}}$, $k = 1,2, \ldots$ Kako $x_{n_{k-1}} \to u$, kada $k \to \infty$, dobijamo da $Tx_{n_{k-1}} \to Tu$, kada $k \to \infty$ u Hauzdorfovoj metrici. Dakle $u \in Tu$.

■

3.7 „Weakly inward" preslikavanje

Nastavljamo sa ispitivanjem „non-self" preslikavanja još opširnijeg tipa.
Neka je C neprazan, zatvoren podskup Banahovog prostora X i $T : C \longrightarrow \mathcal{C}(X)$.

Definicija 3.7.1: [6] T je „weakly inward" (slabo unutrašnje) preslikavanje na C ako je

$$Tx \subset \overline{I_C(x)}, \qquad x \in C, \tag{27}$$

gde je

$$I_C(x) = x + \{\lambda(y - x) : \lambda \geq 1, \;\; y \in C\}$$

slaba unutrašnjost skupa C u x (sa $\bar{A}$ označavamo zatvaranje podskupa $A \subset X$).

Napomena*:* Postoji još jedan koncept definisanja slabe unutrašnjosti (Demling [12])

T je slabo unutrašnje preslikavanje na C ako je $Tx \subset x + T_C(x)$, $x \in C$ gde je

$$T_C(x) = \left\{ y \in X : \liminf_{\lambda \to 0^+} \frac{d(x + \lambda y, C)}{\lambda} \right\}$$

Ako je C konveksan, tada se oba koncepta poklapaju, međutim, ako C nije konveksan, tada se razlikuju i u opštem slučaju je $\overline{I_C(x)}$ šire od $x + T_C(x)$.

Teorema 3.7.1: [12] Neka je C zatvoren podskup Banahovog prostora X i $T : C \to \mathcal{C}(X)$ kontrakcija tako da svako $x \in C$ ima najbližu tačku koja pripada Tx. Pretpostavimo da je T slabo unutašnje preslikavanje, u smislu da je $Tx \subset x + T_C(x)$, $x \in C$. Tada T ima nepokretnu tačku.

Teorema 3.7.2: [6] Neka je C zatvoren podskup Banahovog prostora X i $T : C \longrightarrow \mathcal{C}(X)$ je kontrakcija tako da svako $x \in C$ ima najbližu tačku koja pripada Tx. Pretpostavimo da je T slabo unutašnje preslikavanje, u smislu da je $Tx \subset \overline{I_C(x)}, x \in C$. Tada T ima nepokretnu tačku.

Dokaz: Prvo uočimo da je uslov (27) ekvivalentan uslovu:

$$Tx \subseteq x + \overline{\{\lambda(y - x) : \lambda > 1, \;\; y \in C\}}, \qquad \forall x \in C. \tag{28}$$

Zatim izaberemo $q \in (0,1)$ i $\varepsilon \in (0,1)$ tako da

$$k < q < \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Neka je

$$\varphi(x) = \frac{1}{q-k} d(x, Tx), \qquad x \in C$$

gde je k konstanta kontrakcije.

Za $x \in C$, po pretpostavci, imamo da postoji neko $f(x) \in Tx$ tako da je

$$\| x - f(x) \| = d(x, Tx) = \inf_{y \in Tx} d(x, y).$$

Iz (28) sledi da postoje $\lambda_n > 1$ i $y_n \in C$ takvi da

$$\| f(x) - \big(x + \lambda_n (y_n - x)\big) \| \to 0, \qquad \text{kada } n \to \infty.$$

Pretpostavimo suprotno tvrđenju, da T nema nepokretnu tačku u C. Tada postoji ceo broj $N \geq 1$ dovoljno veliki tako da je

$$\| f(x) - \big(x + \lambda_N (y_N - x)\big) \| < \varepsilon d(x, Tx).$$

Neka je

$$z \stackrel{\text{def}}{=} \left(1 - \frac{1}{\lambda_N}\right) x + \frac{1}{\lambda_N} f(x)$$

i

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} y_N.$$

Time je definisano preslikavanje $g : C \to C$. Pokazaćemo da g zadovoljava uslov

$$\| x - g(x) \| < \varphi(x) - \varphi\big(g(x)\big), \qquad \forall x \in C. \tag{29}$$

Iz Teoreme 1.2.6 sledi da u tom slučaju g ima nepokretnu tačku, što je kontradikcija sa gore strogom nejednakosti. Dakle, ostaje da se dokaže (29).

Kako $f(x) \in T(x)$ imamo

$$d\Big(g(x), T\big(g(x)\big)\Big) \leq \| g(x) - z \| + d(z, Tx) + H\big(Tx, T\big(g(x)\big)\big)$$

$$\leq \| g(x) - z \| + \| z - f(x) \| + k \| x - g(x) \|$$

$$\leq \| y_N - z \| + \| z - f(x) \| + k \| x - g(x) \|.$$

Kako je

$$\| f(x) - \left(x + \lambda_N(y_N - x)\right) \| < \varepsilon d(x, Tx),$$

dobijamo da je

$$\| y_N - z \| = \| y_N - \left(\frac{1}{\lambda_N} f(x) + \left(1 - \frac{1}{\lambda_N}\right) x\right) \| < \frac{\varepsilon}{\lambda_N} d(x, Tx).$$

Takođe je

$$\| z - f(x) \| = \left(1 - \frac{1}{\lambda_N}\right) \| x - f(x) \| = \left(1 - \frac{1}{\lambda_N}\right) d(x, Tx).$$

Odatle dalje sledi

$$\varphi\big(g(x)\big) = \frac{1}{q-k} d\left(g(x), T\big(g(x)\big)\right)$$

$$\leq \varphi(x) + \frac{\varepsilon - 1}{\lambda_N(q-k)} d(x, Tx) + \frac{k}{q-k} \| x - g(x) \|$$

$$= \varphi(x) - \frac{1-\varepsilon}{q-k} \| z - x \| + \frac{k}{q-k} \| x - g(x) \|.$$

Ostaje da se pokaže

$$-\frac{1-\varepsilon}{q-k} \| z - x \| + \frac{k}{q-k} \| x - g(x) \| < -\| x - g(x) \|$$

ili ekvivalentno

$$\| z - g(x) \| < \frac{1-\varepsilon}{q} \| z - x \| = \frac{1-\varepsilon}{q\lambda_N} d(x, Tx).$$

S obzirom na izbor celog broja N, vidimo da je

$$\varepsilon\, d(x, Tx) > \| (f(x) - x) - \lambda_N(y_N - x) \|$$

$$\geq \| \lambda_N(y_N - x) \| - \| f(x) - x \|$$

$$= \lambda_N \| y_N - x \| - d(x, Tx).$$

Tako s obzirom na izbor broja q imamo

$$\| g(x) - x \| = \| y_N - x \| < \frac{1+\varepsilon}{\lambda_N} d(x, Tx) < \frac{1-\varepsilon}{q\lambda_N} d(x, Tx).$$

■

Uslov kompaktnosti slika može se odbaciti ali uz novi dodatni uslov.

Teorema 3.7.3: [6] Neka je E zatvoren podskup Banahovog prostora X i $T : E \longrightarrow \mathcal{C}(X)$ je kontrakcija. Ako, za neko $x \in E$,

$$\liminf_{\lambda \to 0^+} \frac{d\big((1-\lambda)x + \lambda z, E\big)}{\lambda} = 0, \quad \text{uniformno po } z \in Tx, \tag{30}$$

tada T ima nepokretnu tačku.

Dokaz: Uzimamo neko $\varepsilon \in (0,1)$ dovoljno malo tako da je $(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon) > k$ i neka je

$$\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} - k\right)^{-1} d(x, Tx), \qquad x \in E.$$

Pretpostavimo da T nema nepokretnu tačku u E. Tada je $d(x, Tx) > 0$ za svako $x \in E$.
Iz pretpostavke (30) sledi da postoji $\lambda = \lambda(x) \in (0, \varepsilon)$ tako da je

$$d\big((1-\lambda)x + \lambda z, E\big) < \frac{1}{2} \lambda\varepsilon d(x, Tx), \qquad \forall z \in Tx.$$

Sada biramo $z \in Tx$ tako da

$$\| x - z \| < \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\varepsilon\lambda} d(x, Tx). \tag{31}$$

Zatim uzimamo $y \in E$ tako da je

$$\| (1-\lambda)x + \lambda z - y \| < \frac{1}{2} \lambda\varepsilon d(x, Tx). \tag{32}$$

Definišimo preslikavanje $f : E \to E$,

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} y.$$

Lako se uočava da f nema nepokretnu tačku na E. U stvari, ako bi bilo $f(x) = x$ za neko $x \in E$ tada iz (32) sledi

$$d(x,Tx) \leq \parallel x - z \parallel < \frac{1}{2}\lambda\varepsilon d(x,Tx).$$

Dakle tada je $\varepsilon > 2$. Dobijamo kontradikciju sa pretpostavkom $\varepsilon \in (0,1)$.
Sada pokazujemo da je zadovoljen uslov

$$\parallel x - f(x) \parallel \ \leq \varphi(x) - \varphi\big(f(x)\big), \qquad \forall x \in E, \tag{33}$$

Zaista, ako stavimo da je $u = (1-\lambda)x + \lambda z$, imamo

$$d(y,Ty) \leq \parallel y - u \parallel + d(u,Tx) + H(Tx,Ty).$$

Kako je T kontrakcija, dobijamo

$$d(y,Ty) \leq \parallel y - u \parallel + d(u,Tx) + k \parallel x - y \parallel. \tag{34}$$

Na osnovu (32),

$$\parallel u - y \parallel < \frac{1}{2}\lambda\varepsilon d(x,Tx) \leq \frac{1}{2}\lambda\varepsilon \parallel x - z \parallel = \frac{1}{2}\varepsilon \parallel u - x \parallel$$

i

$$d(u,Tx) \leq \parallel u - z \parallel = (1-\lambda) \parallel x - z \parallel = \parallel x - z \parallel - \lambda \parallel x - z \parallel = \parallel x - z \parallel - \parallel u - x \parallel$$

te je

$$\parallel x - y \parallel \leq \parallel x - u \parallel + \parallel u - y \parallel \leq \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon\right) \parallel u - x \parallel < (1+\varepsilon) \parallel u - x \parallel,$$

iz (34) i (31) sledi da je

$$\begin{aligned} d(y,Ty) &\leq \frac{1}{2}\varepsilon \parallel u - x \parallel + \parallel x - z \parallel - \parallel u - x \parallel + k \parallel x - y \parallel \\ &= -(1-\varepsilon) \parallel u - x \parallel + k \parallel x - y \parallel + \parallel x - z \parallel - \frac{1}{2}\varepsilon \parallel u - x \parallel \\ &\leq -\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} - k\right) \parallel x - y \parallel + \left(1 - \frac{1}{2}\lambda\varepsilon\right) \parallel x - z \parallel \\ &\leq -\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} - k\right) \parallel x - y \parallel + d(x,Tx), \end{aligned}$$

što implicira (33). Sada iz Teoreme 1.2.6 sledi da f ima nepokretnu tačku u E, a to je kontradikcija.

■

Napomena: T.C Lim izostavio je uslov da svako x ima najbližu tačku u Tx i time značajno uopštio prethodnu teoremu.

Teorema 3.7.4: [23] Neka je C zatvoren podskup Banahovog prostora X i $T : C \longrightarrow \mathcal{F}(X)$ kontraktivno preslikavanje. Neka je T slabo unutašnje preslikavanje, u smislu da je $Tx \subset \overline{I_C(x)}, x \in C$. Tada T ima nepokretnu tačku.

3.8 Neekspanzivna preslikavanja

Da se podsetimo: preslikavanje $T : X \to 2^Y$ je neekspanzivno ako za sve $x, y \in X$ važi da je

$$H(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

Neka je K slabo kompaktan i konveksan podskup Banahovog prostora $(X, \| \|)$ i $\{x_n\}$ ograničen niz iz X, definisaćemo funkciju f na X, na sledeći način:

$$f(x) = \limsup_{n\to\infty} \| x_n - x \|, \quad x \in X.$$

Neka je

$$r \equiv r_K(\{x_n\}) = inf\{f(x) \colon x \in K\}$$

i

$$A \equiv A_K(\{x_n\}) = \{x \in K : f(x) = r\}.$$

Definicija 3.8.1: [6] Kažemo da su r i A asimptotski poluprečnik i centar od $\{x_n\}$ koji se odnose na K, respektivno.
Kako je K slabo kompaktan i konveksan, $A_K(\{x_n\})$ je neprazan, slabo kompaktan i konveksan.

Definicija 3.8.2: [6] Neka je $\{x_n\}$ ograničen niz u X, a K slabo kompaktan i konveksan podskup Banahovog prostora. Tada se $\{x_n\}$ zove ***regularan*** u odnosu na K ako $r_K(\{x_n\}) = r_K(\{x_{n_i}\})$, za sve podnizove $\{x_{n_i}\}$ od $\{x_n\}$. Niz, $\{x_n\}$ se naziva ***asimptotski ravnomeran*** ako je $A_K(\{x_n\}) = A_K(\{x_{n_i}\})$ za sve podnizove $\{x_{n_i}\}$ od $\{x_n\}$.

Lema 3.8.1: [13,24] Neka je $\{x_n\}$ ograničen niz iz X, a K slabo kompaktan i konveksan podskup Banahovog prostora. Tada

1. uvek postoji podniz od $\{x_n\}$ koji je regularan u odnosu na K;

2. ako je K separabilan, tada $\{x_n\}$ sadrži podniz koji je asimptotski ravnomeran u odnosu na K.

Napomena: Ako je X ravnomerno konveksan, tada se $A_K(\{x_n\})$ sastoji od tačno jedne tačke, pa je svaki regularan niz u prostoru asimptotski ravnomeran u odnosu na K.
Podsetimo se da je Banahov prostor X ravnomerno konveksan ako je

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\| x + y \|}{2} : x, y \in B_X, \quad \| x - y \| \geq \varepsilon \right\} > 0 \quad \forall \varepsilon \in (0,2]$$

gde je B_X zatvorena jedinična lopta u X.

Tvrđenje 3.8.1: [6] Neka je $(X, \| \|)$ Banahov prostor i $r > 0$ je dat broj. Tada je X ravnomerno konveksan ako i samo ako je norma $\|\cdot\|$ od X ravnomerno konveksna na zatvorenoj lopti $B_r = \{x \in X : \| x \| \leq r\}$. To znači da postoj neprekidno, strogo rastuća funkcija $g: [0, \infty) \to [0, \infty)$, koja zavisi od r, gde je $g(t) = 0$ ako i samo ako je $t = 0$, tako da važi :

$$\| tx + (1-t)y \| \leq t \| x \| + (1-t) \| y \| - t(1-t)g(\| x - y \|), \quad x, y \in B_r, \qquad t \in [0,1].$$

Lako se zaključuje da za konveksan skup C važi:

$$I_C(x) = \{x + \lambda(y - x) : \lambda \geq 0, \qquad y \in C\}.$$

Tvrđenje 3.8.2 : [6] Neka je X ravnomerno konveksan Banahov prostor i neka je E zatvoren konveksan podskup od X. Pretpostavimo da je $\{x_n\}$ ograničen niz u X i da je $z = A_E(\{x_n\})$. Tada je $A_{\overline{I_E(z)}}(\{x_n\}) = z$ i $r_E(\{x_n\}) = r_{\overline{I_E(z)}}(\{x_n\})$.

Dokaz: Neka je

$$f(x) = \limsup_{n\to\infty} \| x_n - x \|,$$

$$r_1 = \inf\{f(x) : x \in E\} = r_E(\{x_n\}),$$

$$r_2 = \inf\{f(x) : x \in \overline{I_E(z)}\} = r_{\overline{I_E(z)}}(\{x_n\}).$$

Dovoljno je pokazati da je $r_1 = r_2$. Očigledno je da je $r_2 \leq r_1$. Ostaje da se pokaže da je $r_1 \leq r_2$. Primenom Tvrđrnja 3.8.1 dobijamo, za neko $r > 0$ i neprekidnu strogo rastuću funkciju g (koja zavisi od r) tako da je:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - t(1-t)g(\| x - y \|), \quad x, y \in B_r, \quad t \in [0,1]. \tag{35}$$

Jasno je da je $r_2 = \inf\{f(x) : x \in I_E(z)\}$; Dakle, imamo niz $w_n = z + \lambda_n(z_n - z)$, gde je $\lambda_n \geq 0$ i $z_n \in E$, tako da $f(w_n) \to r_2$. Ako je $\lambda_n \leq 1$, za beskonačno mnogo n, tada $w_n \in E$, a tako je $f(w_n) \geq r_1$ za to n. Kada $n \to \infty$ dobijamo da je $r_1 \leq r_2$, a to je trebalo da pokažemo.
Prepostavimo da je $\lambda_n > 1, \forall n$. Ako $\{\lambda_n\}$ ima ograničen podniz, isto označen sa $\{\lambda_n\}$, možemo pretpostaviti da $\lambda_n \to \lambda \geq 1$. Kako je $\{z_n\}$ ograničen, možemo takođe pretpostaviti

da $z_n \rightharpoonup \tilde{z} \in E$. (Ovde znak " $\rightharpoonup$ " označava slabu konvergenciju.) Kada $n \to \infty$ dobijamo $w_n \rightharpoonup \widetilde{w} = z + \lambda(\tilde{z} - z)$. Drugim rečima, možemo zapisati

$$\tilde{z} = \frac{1}{\lambda}\widetilde{w} + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)z.$$

Kako je f slabo sa donje strane poluneprekidno, dobijamo

$$f(\widetilde{w}) \leq \liminf f(w_n) = r_2.$$

Sa druge strane, na osnovu konveksnosti funkcije f dobijamo

$$f(\tilde{z}) \leq \frac{1}{\lambda}f(\widetilde{w}) + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)f(z).$$

Kako je $f(\tilde{z}) \geq r_1$, $f(z) = r_1$ i $f(\widetilde{w}) \leq r_2$, iz poslednje nejednakosti sledi da je

$$r_1 \leq \frac{1}{\lambda}r_2 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)r_1$$

i tako je

$$r_1 \leq r_2.$$

Konačno, pretpostavimo da $\lambda_n \to \infty$. U ovom slučaju možemo pisati

$$z_n = \frac{1}{\lambda_n}w_n + \left(1 - \frac{1}{\lambda_n}\right)z.$$

Neka je sada r dovoljno veliko tako da je $B_r \supset \{w_n\} \cup \{z\}$. Koristeći nejednakost (35) dobijamo da je

$$f(z_n) \leq \frac{1}{\lambda_n}f(w_n) + \left(1 - \frac{1}{\lambda_n}\right)f(z) - \frac{1}{\lambda_n}\left(1 - \frac{1}{\lambda_n}\right)g(\| w_n - z \|).$$

Kako je $f(z_n) \geq r_1$ i $f(z) = r_1$, iz poslednje nejednkaosti sledi da je

$$\left(1 - \frac{1}{\lambda_n}\right)g(\| w_n - z \|) \leq f(w_n) - r_1.$$

Neka sada $n \to \infty$. Dobijamo

$$\limsup g(\| w_n - z \|) \leq r_2 - r_1 \leq 0.$$

Otuda, $w_n \to z$ i $r_2 = \lim f(w_n) = f(z) = r_1$.

■

Ako je $T : E \to \mathcal{K}(X)$, tada ne možemo da pretpostavimo da je E separabilan, time Lema 3.8.1 (2) nije primenljiva. Zbog toga je potrebno da definišemo univerzalnu mrežu.

Definicija 3.8.3: Ako je X neprazan skup, onda svako preslikavanje f proizvoljno usmerenog skupa A u skup X zovemo ***mreža*** u skupu X. Pišemo da je $f(\alpha) = x_\alpha$, za svako $\alpha \in A$. Mrežu označavamo sa $\{x_\alpha\}$.

Definicija 3.8.4: Mreža $\{x_\alpha\}$ u prostoru S zove se ***univerzalna mreža*** ako je za svaki potprostor U prostora S , $\{x_\alpha\}$ u U ili je $\{x_\alpha\}$ u $S \setminus U$.

Sledeće činjenice su značajne: [10]

a) Svaka mreža u prostoru ima univerzalnu podmrežu.

b) Ako je $f: S_1 \to S_2$ preslikavanje i ako je $\{x_\alpha\}$ univerzalna mreža u S_1, tada je $\{f(x_\alpha)\}$ univerzalna mreža u S_2.

c) Ako je S kompaktan i ako je $\{x_\alpha\}$ univerzalna mreža u S, tada postoji $lim_\alpha x_\alpha$.

Neka je E konveksan i slabo kompaktan podskup Banahovog prostora $(X, \|\ \|)$ i $T: E \to \mathcal{K}(E)$ neekspanzivno preslikavanja. Za fiksiran elemenat $x_0 \in E$ i proizvoljan ceo broj $n \geq 1$, kontrakcija $T_n : E \to \mathcal{K}(E)$ definisana sa:

$$T_n(x) = \frac{1}{n}x_0 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)Tx, \quad x \in E,$$

ima nepokretnu tačku $x_n \in E$. Lako se uočava da $d(x_n, Tx_n) \leq \frac{1}{n} diam(E) \to 0,\ n \to \infty$. Neka su r i A asimptotski poliprečnik i centar od $\{x_n\}$ respektivno, koji se odnose na E. Pošto T ima kompaktne slike, možemo izabrati $y_n \in Tx_n$ tako da

$$\| y_n - x_n \| = d(x_n, Tx_n), \ \ n \geq 1.$$

Kako je T preslikavanje skupa u samog sebe, možemo pretpostaviti da je E separabilan (ako nije, možemo konstruisati zatvoren, konveksan podskup od E koji je invarijantan u odnosu na

T, vidi [25]). Na osnovu Leme 3.8.1 možemo pretpostaviti da je $\{x_n\}$ asimptotski ravnomeran. Biramo proizvoljno $z \in A$. Kako je Tz kompaktan, postoji $z_n \in Tz$

$$\| y_n - z_n \| = d(y_n, Tz) \leq H(Tx_n, Tz) \leq \| x_n - z \|.$$

Zbog kompaktnosti skupa Tz, možemo takođe pretpostaviti da $\{z_n\}$ (jako) kovergira ka nekom $\tilde{z} \in Tz$. Odatle sledi da je:

$$\limsup \| z_n - \tilde{z} \| = \limsup \| y_n - z_n \| \leq \limsup \| x_n - z \|.$$

Ovo pokazuje da $\tilde{z} \in A$. Dakle, možemo definisati preslikavanje $\widetilde{T} : A \to \mathcal{K}(A)$

$$\widetilde{T}z = A \cap Tz, \qquad z \in A$$

Ovo $\widetilde{T}$ generalno, nije ni neekspanzivno ni sa donje strane poluneprekidno preslikavanje, međutim, jeste sa gornje strane poluneprekidno, a to su primetili Kirk i Massa [26]. Oni su dokazali sledeću teoremu, koristeći Bohenblust-Karlin teoremu o nepokretnoj tački, koja je više topološke nego metričke prirode. U ovom radu biće naveden dokaz koji koristi princip višeznačne kontrakcije Nadlera.

Lema 3.8.2: [6] Ako je C kompaktan i konveksan podskup Banahovog prostora X i $T: C \to \mathcal{KC}(X)$ je neekspanzvno preslikavanje koje zadovoljava (granični) uslov

$$Tx \cap \overline{I_C(x)} \neq \emptyset, \qquad \forall x \in C.$$

Tada T ima nepokretnu tačku.

Dokaz: Fiksiramo neko $x_0 \in C$ i definišemo za svaki ceo broj $n \geq 1$ kontrakciju $T_n : C \to \mathcal{KC}(X)$ na sledeću način:

$$T_n(x) = \frac{1}{n}x_0 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)Tx, \ \ x \in C.$$

Tada je T_n kontrakcija koja zadovoljava isti (granični) uslov koji zadovoljava T, tj:

$$T_n(x) \cap \overline{I_C(x)} \neq \emptyset, \qquad \forall x \in C.$$

Tada, na osnovu teoreme Deimlinga (Teorema 11.5 [12]), T_n ima nepokretnu tačku $x_n \in C$. Kako je C kompaktan skup, možemo pretpostaviti $x_n \to x \in C$. Takođe, lako se uočava da je

$$d(x_n, Tx_n) \leq \frac{1}{n} diamC \to 0, \text{ kada } n \to \infty.$$

Dobijamo $d(x, Tx) = 0$, dakle $x \in Tx$.

■

Teorema 3.8.1: (Kirk-Massa) [27] Neka je E neprazan, zatvoren, ograničen i konveksan podskup Banahovog prostora X i $T : E \to \mathcal{KC}(E)$ neekspanzivno preslikavanje. Pretpostavimo da je asimptotski centar u E svakog ograničenog niza u X neprazan i kompaktan. Tada T ima nepokretnu tačku.

Dokaz: Kako je T preslikavanje u samog sebe, možemo pretpostaviti da je E separabilan. Dakle, imamo asimptotski ravnomeran niz $\{x_n\}$ u E tako da je $\lim d(x_n, Tx_n) = 0$. Takođe imamo i niz $\{y_n\}$ za koji važi da

$$y_n \in Tx_n \quad \text{i}$$

$$\| x_n - y_n \| = d(x_n, Tx_n), \forall n \in N.$$

Neka je

$$A = A_E(\{x_n\}) \text{ i } r = r_E(\{x_n\}).$$

Već smo pokazali da je

$$Tx \cap A \neq \emptyset, \ \forall x \in A. \tag{36}$$

Ideja je da ne posmatramo preslikavanje u samog sebe $\widetilde{T}x = Tx \cap A$, $x \in A$, kako $\widetilde{T}$ gubi ne-ekspanzivnost. Umesto toga, posmatramo preslikavanje $T : A \to \mathcal{KC}(E)$. Prednost ove ideje je u tome da je neekspanzivnost preslikavanja T sačuvana, šta više, (rubni) uslov, (36) je zadovoljen, iako T više nije „self-mapping“.

Sada, za svaki ceo broj $m \geq 1$, definišemo kontrakciju $S_m : A \to \mathcal{KC}(E)$ pomoću:

$$S_m(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m} x_0 + \left(1 - \frac{1}{m}\right) Tx, \qquad x \in A, \tag{37}$$

gde je $x_0 \in A$ fiksirano. Tada svako S_m je kontrakcija koja zadovoljava uslov

$$S_m(x) \cap A \neq \emptyset, \qquad \forall x \in A.$$

Kako S_m ima kompaktne i konveksne vrednosti, na osnovu Leme 3.8.2, S_m ima nepokretnu tačku $v_m \in A$. Niz $\{v_m\}$ zadovoljava

$$\lim d(v_m, Tv_m) = 0\,. \tag{38}$$

Kako je A kompaktan, $\{v_m\} \subset A$, $\{v_m\}$ ima konvergentan podniz $\left\{v_{m_j}\right\}$. Za podniz $\left\{v_{m_j}\right\}$ važi $\lim v_{m_j} = v \in A$. Na osnovu (38)

$$\lim d\left(v_{m_j}, Tv_{m_j}\right) = 0$$

odakle dobijamo da $v \in Tv$.

■

Neka je X Banahov prostor i E neprazan, zatvoren i konveksan podskup prostora X. Podsetimo se da je tada unutrašnjost prostora E u tački x data sa:

$$I_E(x) = \{x + \lambda(y - x) \colon \lambda \geq 0, y \in E\},$$

a višeznačno preslikavanje $T \colon E \to \mathcal{F}(X)$ je unutrašnje (slabo unutrašnje) ako je $Tx \subset I_E(x)$, $\left(Tx \subset \overline{I_E(x)}\right)$ za $x \in E$.

Teorema 3.8.2: [6] Neka je E neprazan, zatvoren, ograničen i konvekan podskup Banahovog prostora X i $T \colon E \to \mathcal{KC}(X)$ je neekspanzivno preslikavanje, koje zadovoljava uslov unutrašnjosti: $Tx \subset I_E(x)$, za $x \in E$. Pretpostavimo da je asimptotski centar u E, svakog ograničenog niza u X, neprazan i kompaktan. Tada T ima nepokretnu tačku.

Dokaz: Fiksiramo neko $x_0 \in E$ i definišemo za svaki ceo broj $n \geq 1$ kontrakciju $T_n \colon E \to \mathcal{KC}(X)$ na sledeći način:

$$T_n(x) = \frac{1}{n}x_0 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)Tx, \quad x \in E.$$

Tada T_n zadovoljava uslov unutrašnjosti tj. $T_n x \subset I_E(x)$, za svako $x \in E$. Tako, na osnovu Teoreme 3.7.2, T_n ima nepokretnu tačku $x_n \in E$. Na osnovu Leme 3.8.1, možemo pretpostaviti je da je niz $\{x_n\}$ regularan. Neka je $y_n \in Tx_n$ definisano kao i ranije tj.: $\| x_n - y_n \| = d(x_n, Tx_n)$. Neka je $\left\{x_{n_\alpha}\right\}$ univerzalna podmreža od $\{x_n\}$ i funkcija g definisana:

$$g(x) = \lim_{\alpha} \| x_{n_\alpha} - x \|, \qquad x \in E.$$

Neka je

$$C = \{x \in E : g(x) = r\},$$

gde je $r = inf_{x \in E} g(x)$. Tada (propozicija 6, [26]), C je neprazan i kompaktan. Ključ ovog dokaza leži u tome da uslov unutrašnjost preslikavanja T na E implicira da je

$$Tx \cap I_C(x) \neq \emptyset, \qquad x \in C. \tag{39}$$

Zaista, ako $x \in E$, iz kompaktnosti, imamo da za svako $n \geq 1$, postoji neko $z_n \in Tx$ tako da je

$$\| y_n - z_n \| = d(y_n, Tx) \leq H(Tx_n, Tx) \leq \| x_n - x \|.$$

Neka je $z = \lim_\alpha z_{n_\alpha} \in Tx$. Odatle sledi da je

$$g(z) = \lim_\alpha \| x_{n_\alpha} - z \| = \lim_\alpha \| y_{n_\alpha} - z_{n_\alpha} \| \leq \| x_{n_\alpha} - x \|.$$

Dakle,

$$g(z) \leq g(x) = r. \tag{40}$$

Ostaje još da se pokaže $z \in I_C(x)$. Kako je $Tx \subset I_E(x)$, imamo neko $\lambda \geq 0$ i $v \in E$ tako da je

$$z = x + \lambda(v - x).$$

Ako je $\lambda \leq 1$, tada $z \in E$ na osnovu konveksnosti E, stoga, na osnovu (40), $z \in C \subset I_C(x)$, a to je trebalo pokazati.
Pretpostavimo da je $\lambda > 1$. Tada je

$$v = \mu z + (1 - \mu)x, \text{ gde je } \mu = \frac{1}{\lambda} \in (0,1).$$

Na osnovu konveksnosti funkcije g i (45), imamo

$$g(v) \leq \mu g(z) + (1 - \mu) g(x) \leq r.$$

Kako $v \in E$, odatle sledi da $v \in C$ i važi $z = x + \lambda(v - x)$ pripada $I_C(x)$. Sada imamo ne-ekspanzivno preslikavanje $T : C \to \mathcal{KC}(X)$ koje zadovoljava (granični) uslov (39). Na osnovu Leme 3.8.2 T ima nepokretnu tačku.

■

Teorema 3.8.3: [6] Pretpostavimo da je X ravnomerno konveksan Banahov prostor, E je zatvoren, ograničen i konveksan podskup od X, i $T: E \to \mathcal{K}(X)$ neekspanzivno preslikavanje koje zadovoljava uslov slabe unutrapnjosti:

$$Tx \subset \overline{I_E(x)}\,, \quad \text{za } x \in E.$$

Tada T ima nepokretnu tačku.

Dokaz: Fiksiramo $x_0 \in E$, zatim definišemo, za svaki ceo broj $n \geq 1$, kontrakciju $T_n: E \to K(X)$ na sledeći način:

$$T_n(x) = \frac{1}{n}x_0 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)Tx, \quad x \in E.$$

Lako se uočava da T_n zadovoljava uslov slabe unutrašnjosti, $T_n x \subset \overline{I_E(x)}$ za svako $x \in E$, zaključujemo, na osnovu Teoreme 3.6.2 da T_n ima nepokretnu tačku, označenu sa x_n. Takođe, lako se uočava da je

$$d(x_n, Tx_n) \leq \frac{1}{n} diamE \to 0, \text{ kada } n \to \infty.$$

Možemo da pretpostavimo da je $\{x_n\}$ regularan i odatle asimptotski ravnomeran jer prostor X je ravnomerno konveksan. Neka je z jedini element asimptotskog centra od $\{x_n\}$ u E; Tada je $z \in E$ jedini minimizer u E funkcije:

$$f(x) = \limsup_{n\to\infty} \| x_n - x \|.$$

Neka je

$$r = f(z) = \inf_{x \in E} f(x).$$

Biramo $z_n \in Tz$ koje zadovoljava $\| y_n - z_n \| = d(y_n, Tz)$.
Iz neekspanzivnosti preslikavanja T sledi da je

$$\| y_n - z_n \| \leq H(Tx_n, Tz) \leq \| x_n - z \|.$$

Kako je Tz kompaktan, možemo pretpostaviti da $\{z_n\}$ jako konvergira ka tački $\tilde{z} \in Tz$. Sledi da je

$$f(\tilde{z}) = \limsup \| x_n - \tilde{z} \| = \limsup \| y_n - z_n \| \leq \limsup \| x_n - z \|;$$

te je

$$f(\tilde{z}) \leq f(z). \tag{41}$$

Sada ćemo pokazati da je $\tilde{z} = z$, čime završavamo dokaz. Prvo ćemo primetiti da je $\tilde{z} \in \overline{I_E(z)}$. Tada, na osnovu Tvrđenja 3.8.2 i (41) dobijamo da je $f(\tilde{z}) = f(z)$. To znači da su z i $\tilde{z}$ minimizeri funkcije f na $\overline{I_E(z)}$, odakle je $\tilde{z} = z$ i z je nepokretna tačka od T.
H.K.Xu daje dokaz, da se $\tilde{z}$ i z poklapaju, koji koristi nejednakost ravnomerne konveksnosti, tj. Tvrđenje 3.8.1.

Kako $\tilde{z} \in \overline{I_E(z)}$, postoji niz $\{\lambda_k\}$ nenegativnih brojeva i niz $\{u_k\}$ elemanata potprostora E tako da je:

$$w_k = z + \lambda_k(u_k - z) \to \tilde{z}. \tag{42}$$

Ako je $\lambda_k \leq 1$ za beskonačno mnogo k, tada $w_k \in E$ za te k-ove i odatle $\tilde{z} \in E$. Za ovo, (41) pokazuje da $\tilde{z} \in E$ je takođe minimizer od f u E odakle je $\tilde{z} = z$ na osnovu jdinstvenosti.
Neka je sada $\lambda_k > 1$, za svako k. Ako $\{\lambda_k\}$ ima ograničen podniz, tada je $\{u_k\}$ ograničen, imamo, za neki podniz $\{k_i\}$ pozitivnih celih brojeva da $\lambda_{k_i} \to \lambda$ i $u_{k_i} \rightharpoonup u \in E$. Odatle sledi da je

$$\tilde{z} = z + \lambda(u - z)$$

smanjujući slučaj na slučaj unutrašnjosti koji je objašnjen u [2,12,22,].
Pretpostavimo da $\lambda_k \to \infty$. Tada (42) pišemo

$$u_k = \mu_k w_k + (1 - \mu_k)z, \text{ gde je } \mu_k = \frac{1}{\lambda_k} \to 0.$$

Sada, neka je r dovoljno velik broj tako da zatvorena lopta B_r sadrži nizove $\{x_n - w_k\}$ i $\{x_n - z\}$. Primenjujemo Tvrđenje 3.8.1 i dobijamo da dok $u_k \in E$:

$$\begin{aligned} f(z) \leq f(u_k) &= f(\mu_k w_k + (1 - \mu_k)\, z) \\ &= \limsup_{n\to\infty} \| \mu_k(x_n - w_k) + (1 - \mu_k)(x_n - z) \| \\ &\leq \mu_k f(w_k) + (1 - \mu_k) f(z) - \mu_k(1 - \mu_k) g(\| w_k - z \|). \end{aligned}$$

Dakle,

$$(1 - \mu_k) g(\| w_k - z \|) \leq f(w_k) - f(z).$$

Uzimajući limes kada $k \to \infty$

$$g(\| \tilde{z} - z \|) \leq f(\tilde{z}) - f(z) \leq 0 \text{ jer je } f(\tilde{z}) \leq f(z).$$

Kako je g strogo rastuća funkcija i $g(0) = 0$, mora biti $\tilde{z} = z$. ■

Teorema Downing-Kirk 3.8.4: [6] Neka je E neprazan, zatvoren, konveksan podskup Banahovog prostora X i $T : E \to F(X)$ je sa donje strane poluneprekidno preslikavanje koje zadovoljava uslove:

1. Za $x \in E$ postoji $\delta = \delta(x) > 0$ tako da za $k \in (0,1)$

$$y \in B_\delta(x) \cap E \implies d(y, Tx) + k \| x - y \|.$$

2. $T_1(x) \cap \overline{I_E(x)} \neq \emptyset$ za $x \in E$, gde je $T_1(x) = \{z \in Tx : \| x - z \| = d(x, Tx)\}$

Tada T ima nepokretnu tačku.

Postavlja se pitanje: Ako se pretpostavka (2) u prethodnoj teoremi promeni u

$$T(x) \cap I_E(x) \neq \emptyset \text{ za } x \in E$$

da li preslikavanje T ima nepokretnu tačku?
Daćemo primer, koji daje negativan odgovor na ovo pitanje.

Primer :[6]

Neka je $X = \mathbb{R}$ i $E = [0,1]$. Definišemo $T: E \to K(X)$

$$T(x) = \{-1,2\} \text{ za svako } x \in E.$$

Tada je T konstantno preslikavanje i $T_x \cap I_E(x) \neq \emptyset$ za svako $x \in E$, pošto je $I_E(x) = \mathbb{R}$, za $x \in (0,1)$, $(-\infty, 1]$ za $x = 1$ i $[0, \infty)$ za $x = 0$.

Literatura

[1] A.Kaewkhao, K.Neammanee, Fixed point theorem of multi-valued Zamfirescu Mapping. J. Math. Res., Vol.2, No.2, 2010.

[2] D.Downing ,W. A. Kirk, Fixed point theorems for set-valued mappings in metric Banach space, Math. Japon. 22 (1977)

[3] D.Ilić, V.Rakočević, Kontraktivna preslikavanja na metričkim prostorima i uopštenja, Univerzitet u Nišu, Niš 2014

[4] H.E. Kunze, D. La Torre, E.R. Vrscay,Contractive multifunctions, fixed point inclusions and iterated multifunction systems, J.Math. Appl. ,330, 2007

[5] H.K.Xu, Fixed point theorems for single-valued and set-valued mappings, thesis, Zhejiang Univ.,1985.

[6] H.K.Xu, Metric fixed point theory for multivalued mappings, Disert. Math., 2000.

[7] H.K.Xu, $\varepsilon -$ chainability and fixed points of set-valued mappings, Math. Japon. 39 (1994)

[8] I.A. Rus, Generalized contractions, Cluj University Press: Cluj-Napoca, 2001

[9] J. Caristi, Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions, Trns. Amer. Math. Soc. Vol. 215, 1976

[10] J.L. Kelley, General Topology, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1955

[11] J. M. Borwein, O. Giladi, Nearest points and delta convex functions in Banach space

[12] K. Deimling, Multivalued Differential Equations, Walter de Gruyter, Berlin and New York, 1992

[13] K. Goebel, On a fixed point theorem for multivalued nonexpansive mappings, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska 1975

[14] Lj.Gajić, M.Kurilić, S.Pilipović, B.Stanković, Zbirka zadataka iz funkcionalne analize, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2000

[15] N.Mizoguchi , W. Takahashi, fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric space, J.Math. Anal. Appl. 141 (1989)

[16] O. Hadžić, Osnovi teorije nepokretne tačke, Institut za matematiku, Novi Sad, 1978

[17] O. Hadžić, S. Pilipović, Uvod u funkcionalnu analizu, Novi Sad, 1996.

[18] P. D. Daffer, H. Kaneko, W. Li, On a conjecture of S.Reich, Proc.Amer. Math. Soc. Vol. 124, 1996.

[19] S.B. Nadler, JR., Multi-valued contraction mappings, Pacific J. Math. 30, 1969

[20] S.Reich, A fixed point theorem for locally contractive multivalued functions, Rev.Roumaine Math. Pures Appl. Vol. 17, 1992

[21] S.Reich, Fixed points of contractive functions, Boll. Un. Math. Ital., 1972

[22] S. Reich, Some fixed point theorems, Atti. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 57 (1974)

[23] T. C. Lim, A fixed point theorem for weakly inward multivalued contractions, J. Math. Anal. Appl., to appear

[24] T. C. Lim, Remarks on some fixed point theorems, Proc. Amer. Math. Soc. Vol.60, 1976

[25] T. Kuczumow, S. Prus, Compact asymptotic centers and fixed points of multivalued nonexpansive mappings, ibid., 465–468

[26] W. A. Kirk, S.Massa, Remarks on asymptotic centers and Chebyshev centers, Houston J. Math. Vol. 16, 1990

[27] Y. Q. Chen, On a fixed point problem of Reich, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 124, 1996

Biografija

Dragana Knežević je rođena 05.03.1990. u Bihaću, Bosna i Hercegovina. Završila je 2005. godine osnovnu školu „20. oktobar" u Vrbasu. Potom je upisala Gimnaziju „Žarko Zrenjanin", u Vrbasu, prirodno matematički smer, koju je završila 2009. godine. Iste godine je upisala osnovne akademske studije Primenjene matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, modul Matematika finansija. U oktobru 2013. godine Dragana upisuje master studije na istom usmerenju. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom i stekla uslov za odbranu master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: *Monografska dokumentacija*
TD
Tip zapisa: *Tekstualni štampani materijal*
TZ
Vrsta rada: *Master rad*
VR
Autor: *Dragana Knežević*
AU
Mentor: *dr Ljiljana Gajić*
MN
Naslov rada: *Teoreme o nepokretnoj tački za višeznačna preslikavanja u metričkim prostorima*
NR
Jezik publikacije: *srpski (latinica)*
JP
Jezik izvoda: *s/en*
JI
Zemlja publikovanja: *Republika Srbija*
ZP
Uže geografsko područje: *Vojvodina*
UGP
Godina: *2015.*
GO
Izdavač: *Autorski reprint*
IZ
Mesto i adresa: *Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4*
MA
Fizički opis rada: (3/74/0/0/0/0/0)
(broj poglavlja/strana/literalnih citata/tabela/grafika/priloga)
FO
Naučna oblast: *Matematika*
NO

Naučna disciplina: *Nelinearna analiza*
ND
Predmetna odrednica/ključne reči: *višeznačno preslikavanje, kontrakcija, nepokretna tačka, metrički prostor*
PO
UDK:
Čuva se: *Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu*
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod:
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: Jun 2015.
DP
Datum odbrane: Oktobar 2015.
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: *dr Zagorka Lozanov-Crvenković, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu*

Član: *dr Ivana Štajner-Papuga, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu*

Mentor: *dr Ljiljana Gajić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu*

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

ANO
Identification number:
INO
Document type: *Monograph type*
DT
Type of record: *Printed text*
TR
Contents code: *Master's thesis*
CC
Author: *Dragana Knežević*
AU
Mentor: *Ljiljana Gajić, PhD*
MN
Title: *Fixed point theorems for multi-valued mappings in metric spaces*
TI
Language of text: *Serbian (Latin)*
LT
Language of abstract: *s/en*
LA
Country of publication: *Serbia*
CP
Locality of publication: *Vojvodina*
LP
Publication year: *2015*
PY
Publisher: *Author's reprint*
PU
Publ.Place: *Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*
PP
Physical description: (3/74/0/0/0/0/0)
PD
Scientific field: *Mathematics*
SF
Scientific discipline*: Nonlinear Analysis*
SD
Subject/Key words: *multivalued mappings, contraction, fixed point, metric space*

SKW
UC:
Holding data: *The library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad*
HD
Note:
N
Abstract:
AB
Accepted by the Scientific Board on: June 2015
ASB
Defended: October 2015
DE
Thesis defend board:
DB
President: *Zagorka Lozanov-Crvenković, PhD, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad*

Member: *Ivana Štajner-Papuga, PhD, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad*

Mentor: Ljiljana Gajić, PhD, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad