UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Problem momenta i njegova primena u stohastičkim finansijskim modelima

MASTER RAD

Mentor:
dr Dora Seleši

Student:
Diana Popić

Br. indeksa:
257m/14

Novi Sad, 2018.

Sadržaj

Glava 1

Uvod

Cilj ovog rada je da se detaljno upoznamo sa problemom momenta i njegovom primenom u stohastičkim finansijskim modelima.

Evolucija cena akcija, cena derivata, dobitaka, itd., je raznolika, dinamična i slučajna. Zato za modeliranje koristimo različite stohastičke procese sa diskretnim ili neprekidnim vremenom, sa trajektorijama koje su neprekidne ili imaju skokove, i sa specifičnim svojstvima raspodele. Raspodele su esencijalne za opisivanje finansijskih instrumenata. U mnogim slučajevima pitanja od značaja, a samim tim i odgovori, se daju u smislu momenata. Momenti se smatraju, i oni zaista i jesu najjednostavnije karakteristike raspodele. To je razlog zbog kojeg je puno pažnje posvećeno onim svojstvima raspodele koja se izražavaju u smislu momenata.

Problem momenta je jedinstveno rešiv (ima jedinstveno rešenje) ako je neka raspodela jedinstveno određena preko svojih momenata proizvoljnog reda. U suprotnom, problem momenta nije jedinstveno rešiv (postoji više raspodela koje imaju dati niz momenata). Asimtotsko ponašanje repa(ova) raspodele je važna osobina prilikom određivanja jedinstvenosti raspodele u smislu njenih momenata: svaka raspodela sa lakim repom je jedinstveno određena svojim momentima, dok jedinstvenost može biti narušena za raspodele sa teškim repom. Raspodele sa teškim repom su zaista uključene u modeliranje tržišta akcija, i većina njih nije jedinstvena u pogledu momenata. Ovo je razlog zašto fenomen *nejedinstvenosti raspodela* zaslužuje posebnu pažnju.

Većina raspodela koje se koriste u stohastičkim finansijskim modelima imaju težek rep i beskonačno su deljive. Međusobni uticaj ova dva svojstva je veoma delikatan. Za raspodele koje se koriste u finansijskim modelima možemo reći da imamo puno "slobode". Pošto su cene akcija i cene derivata pozitivne, koristimo za njih slučajne promenljive i stohastičke procese sa vrednostima u $\mathbb{R}_+$. Dobici su slučajne promenljive sa vrednostima u $\mathbb{R}$. Konkretan izbor modela zavisi od karakteristika koje se posmatraju za finansijski fenomen koii želimo proučiti. Sami modeli su uvek zanimljivi, jer njihova studija donosi nova i izazovna teoretska pitanja.

U nastavku uvodnog dela podsetićemo se osnovih pojmova iz teorije verovatnoće, stohastičke analize i finansijske matematike neophodnih za bolje razumevanje ovog rada.

U drugoj glavi definišemo obične, apsolutne i centralne momente, koeficijente asimetrije i ekscesa raspodela verovatnoća, kao i funkciju generatrisu momenata i karakterističnu funkciju.

Treća glava je posvećena problemu momenta. Dati su najkorisniji uslovi u oblasti određivanja jedinstvenosti raspodele preko njenih momenata (Kramerov, Karlemanov, Kreinov, Linov i Hardijev uslov). Objašnjene su i eksplicitne Stiltjesove klase, stopa rasta momenata, problem momenta prilikom transformacije stepena slučajnih promenljivih koje imaju eksponencijalnu, lognormalnu, normalnu, logističku, dvostruku generalizovanu gama, Laplasovu, inverznu Gausovu raspodelu. Urađeno je i poređenje raspodela koje nisu jedinstvene u smislu momenata, a takođe je definisan i multidimenzionalni problem momenta. Na kraju ove glave razmatran je problem identifikacije mešovitih raspodela stepenog reda preko jedinstvenosti problema momenta.

U četvrtoj glavi obrađena je primena problema momenta u stohastičkim finansijskim modelima. Date su stroge granice za cene kupovnih opcija koje su zasnovane na momentima. Gornja i/ili donja ograničenja za cene opcija su važna ne samo u kontekstu stohastičkih finansija, već i generalno. Takođe je diskutovana jedinstvenost u smislu momenata u rešenjima stohastičkih diferencijalnih jednačina. Izložene su i izazovne pretpostavke i pitanja.

* * *

Ovu priliku koristim da se zahvalim svom mentoru dr Dori Seleši na konstruktivnim savetima, sugestijama i pomoći ukazanoj tokom izrade master rada. Želela bih da se zahvalim i članovima komisije dr Danijeli Rajter-Ćirić i dr Milici Žigić na saradnji i na svom znanju prenetom tokom osnovnih i master studija.

Veliku zahvalnost dugujem svojim roditeljima Gagi i Branki, sestrama Milki i Katici, kao i svim dragim prijateljima i kolegama koji su mi na bilo koji način pružili pomoć i podršku tokom studiranja i učinili ga lepšim.

Diana Popić

1.1 Osnovni pojmovi teorije verovatnoće

Osnovni pojmovi iz teorije verovatnoće bazirani su na knjizi *Sluajni procesi* (vidi [29]).

Neka je Ω neprazan skup. Svaki elemenat ω iz Ω zvaćemo *elementaran slučajni događaj* ili *elementaran slučajni ishod*. Skup Ω zvaćemo *prostor elementarnih događaja* ili *prostor ishoda*.

Definicija 1. *Neka je $\mathcal{F}$ familija podskupova prostora Ω sa sledećim osobinama:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$;
2. $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \equiv (\Omega - A) \in \mathcal{F}$;
3. *ako je $A_1, A_2, \ldots$ niz skupova iz $\mathcal{F}$, tada $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.*

Familija $\mathcal{F}$ sa osobinama $1. - 3.$ je σ-algebra (σ-polje, borelovsko polje) događaja. Elementi σ-algebre su slučajni događaji.

Uređeni par $(\Omega, \mathcal{F})$ je *merljiv prostor*.

Presek proizvoljno mnogo σ-polja (zadanih na istom Ω) je σ-polje (podskupova Ω). Za unije i Dekartove proizvode takva tvrđenja ne važe.

Neka je $\mathcal{A}$ familija podskupova Ω. Presek svih σ-polja koja sadrže $\mathcal{A}$ je *minimalno σ-polje* koje sadrži $\mathcal{A}$. Označavaćemo ga sa $\sigma(\mathcal{A})$.

Definicija 2. *Funkcija P, definisana na σ-polju $\mathcal{F}$, koja je:*

i) *nenegativna, tj. za svako $A \in \mathcal{F}$ je $P(A) \geq 0$;*

ii) *prebrojivo aditivna (σ-aditivna), tj. ako je $\{A_n\}$ niz u parovima disjunktnih događaja iz $\mathcal{F}$, tada $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$;*

iii) *normirana uslovom $P(\Omega) = 1$*

je verovatnoća.

Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je *prostor verovatnoća*.

Teorema 1.1.1. *(Teorema Karateodorija) Neka je $\mathcal{M}$ jedno polje i neka ono generiše σ-polje $\sigma(\mathcal{M})$. Ako je P verovatnoća na $\mathcal{M}$, tada postoji (jedna i samo jedna) verovatnoća P' na $\sigma(\mathcal{M})$ čija restrikcija na $\mathcal{M}$ je P.*

Definicija 3. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća i $\mathcal{F}^*$ skup svih podskupova A prostora Ω, za koje postoje skupovi B_1 i B_2 iz $\mathcal{F}$, takvi da je $B_1 \subset A \subset B_2$ i $P(B_2 - B_1) = 0$. Stavljajući $P(A) = P(B_1)$ mi verovatnoću određujemo i za sve skupove iz $\mathcal{F}^*$. Novi prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}^*, P)$ naziva se kompletan prostor verovatnoća, a verovatnoća P je kompletna.*

Definicija 4. *Neka je* $\mathbb{R}$ *realna prava i* $\mathcal{A} = \{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}$. *Minimalno* σ*-polje koje sadrži* $\mathcal{A}$ *označimo sa* $\mathcal{B}$ *ili* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. *To je Borelovo* σ*-polje podskupova realne prave. Njevi elementi su Borelovi skupovi realne prave. Merljiv prostor* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *je Borelova prava (borelovska prava).*

Pri konstrukciji σ-polja $\mathcal{B}$ ne mora se poći od intervala $(-\infty, x)$, već od bilo kojeg od sledećih skupova

$$(a, b),\ [a, b],\ [a, b),\ (a, b],\ (-\infty, b],\ (a, +\infty).$$

Definicija 5. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *prostor verovatnoća i* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *borelovska prava. Merljiva funkcija* $X = X(\omega)$*, koja preslikava merljiv prostor* $(\Omega, \mathcal{F})$ *u merljiv prostor* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$*, tj. funkcija koja ima svojstvo*

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \quad \textit{za svako} \quad B \in \mathcal{B}$$

je realna slučajna promenljiva. Dakle, X *je* $(\mathcal{F} - \mathcal{B})$*-merljiva funkcija. Merljiv prostor* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *je fazni prostor slučajne promenljive* X*.*

Definicija 6. *Funkcija* P_X *definisana sa*

$$P_X(B) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\}) \equiv P([X \in B]), \quad B \in \mathcal{B}$$

je verovatnoća na $\mathbb{R}$*. Da bi* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *bila slučajna promenljiva dovoljno je da svaki skup* $\{\omega : X(\omega) \in (-\infty, a)\} = \{\omega : X(\omega) < a\} = [X < a]$ *bude slučajni događaj u* Ω*. Funkcija*

$$F(a) = P_X(-\infty, a) = P[X < a], \quad a \in \mathbb{R}$$

je funkcija raspodele slučajne promenljive X*.*

Svakoj verovatnoći P na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ odgovara neka funkcija raspodele F. Isto tako, važi i obrnuto tvrđenje: Svakoj funkciji raspodele F na brojnoj pravoj odgovara jedna verovatnoća P na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ takva da je $P(-\infty, x) = F(x)$. Tada je P *Lebeg-Stiltjesova mera* koja odgovara funkciji raspodele F. U slučaju uniformne na segmentu $[0; 1]$ raspodele odgovarajuća P-mera je *Lebegova mera* na segmentu $[0; 1]$. Označavaćemo je sa μ_L. Za skup $S = [a, b] \subset [0; 1]$ je $\mu_L(S) = F(b) - F(a) = b - a$.

Familija $\mathcal{B}([0; 1]) = \{B \cap [0; 1],\ B \in \mathcal{B}\}$ je σ-polje borelovskih podskupova segmenta $[0; 1]$. Neka je $A \subset [0; 1]$ sa osobinom: postoje borelovski skupovi B_1 i B_2 tako da je $B_1 \subset A \subset B_2$ i $\mu_L(B_2 - B_1) = 0$. Tada je A *Lebegov skup* segmenta $[0; 1]$. (Radi se dakle, o kompletiranju - kao u teoremi Krateodorija). Familija Lebegovih skupova je jedno σ-polje.

Definicija 7. *Neka je* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ *Dekartov proizvod* n *realnih pravih (*n *kopija realne prave):*

$$\mathbb{R}^n = \{x : x = (x_1, ..., x_n),\ -\infty < x_j < +\infty,\ j = \overline{1, n}\,\}$$

i $\mathcal{A}$ *familija intervala u* $\mathbb{R}^n$ *oblika* $(-\infty, x) = (-\infty, x_1) \times ... \times (-\infty, x_n)$*. Minimalno* σ*-polje* $\mathcal{B}^n = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *generisano familijom* $\mathcal{A} = \{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}^n\}$ *je borelovsko* σ*-polje u* $\mathbb{R}^n$*, a njegovi elementi borelovski skupovi u* $\mathbb{R}^n$*.*

Do σ-polja $\mathcal{B}^n$ se može doći i polazeći od familije skupova $B = B_1 \times ... \times B^n$ sa borelovskim komponentama ($B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $j = \overline{1,n}$). Dakle,

$$\mathcal{B}^n = \sigma\big(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times ... \times \mathcal{B}(\mathbb{R})\big).$$

Neka $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je $(\mathcal{F} - \mathcal{B}^n)$ - merljivo preslikavanje, tj.

$$X^{-1}(B^n) \in \mathcal{F} \text{ za svako } B^n \in \mathcal{B}^n.$$

Funkcija X je, onda, *n-dimenzionalna slučajna promenljiva* (*n-dimenzionalni slučajni vektor*) i $\mathbb{R}^n$ je njen fazni prostor. Slučajni vektor X se može predstaviti u obliku $X = (X_1, ..., X_n)$, gde su $X_1, ..., X_n$ realne (jednodimenzionalne slučajne promenljive). Funkcija F definisana za svako $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$F(x) \equiv F(x_1, ...x_n) = P[X_1 < x_1, ..., X_n < x_n] \equiv P[X < x]$$

je *funkcija raspodele slučajnog vektora* X. Verovatnoća P_X u faznom prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ definiše se sa:

$$P_X(B^n) = P[X \in B^n], \;\; B^n \in \mathcal{B}^n.$$

Slučajna promenljiva $X = (X_1, ..., X_n)$ je *diskretna* ako postoji prebrojiv skup S u $\mathbb{R}^n$ tako da je $P_X(S) = 1$. Mera m definisana na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ je *singularna* (u odnosu na Lebegovu meru μ_L u $\mathbb{R}^n$) ako postoji skup $D \subset \mathbb{R}^n$ tako da je $\mu_L(D) = 0$, $m(D) = 1$. Ako je slučajna promenljiva X diskretna, onda je verovatnoća P_X singularna. Obrnuto ne važi.

Mera m definisana u $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ je *apsolutno neprekidna* (u odnosu na Lebegovu meru μ_L u $\mathbb{R}^n$), ako

$$\mu_L(D) = 0 \Longrightarrow m(D) = 0.$$

Slučajna pormenljiva $X = (X_1, ..., X_n)$ sa apsolutno neprekidnom verovatnosnom merom P_X je *slučajna promenljiva apsolutno neprekidnog tipa*. Tada postoji nenegativna funkcija $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ tako da za $M \subset \mathbb{R}^n$ je

$$P_X(M) = \int_M f(x)dx.$$

Funkcija $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ (o kojoj se ovde govori) je *gustina raspodele*. Za $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ je, onda,

$$F(a) = F(a_1, ..., a_n) = \int_{-\infty}^{a_1} \cdots \int_{-\infty}^{a_n} f(x_1, ..., x_n)dx_1...dx_n.$$

Neka su $(S, \mathcal{F})$ i $(K, \mathcal{A})$ dva merljiva prostora i $h : S \to K$. Funkcija h je *merljiva funkcija* ako inverzna slika $X^{-1}(B)$ svakog skupa $B \in \mathcal{A}$ je elemenat σ-polja $\mathcal{F}$ iz oblasti definisanosti funkcije h. Ako je $(S, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća i h je $(\mathcal{F} - \mathcal{A})$ - merljiva funkcija, tada je h slučajna promenljiva ili *slučajni element* sa vrednostima u K. Dakle, ako je $X = (X_1, ..., X_n)$ slučajna promenljiva sa vrednostima u $\mathbb{R}^n$ i $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je merljiva funkcija, tada je $Y = h(X) = (Y_1, ..., Y_m)$ slučajna promenljiva.

1.2 Osnovni pojmovi stohastičke analize

DEFINICIJA 8. *Stohastički (slučajni) proces* $\{X(t),\ t \in T\}$ *(ili:* $\{X_t,\ t \in T\}$*,* $\{X(t,\omega),\ t \in T\}$*) je familija realnih slučajnih promenljivih definisanih na istom prostoru verovatnoća* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*. Za svako* $t \in T$ *prostor vrednosti je* $\mathbb{R}$*, pa je* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *fazni prostor svake slučajne promenljive* $X(t)$*. Njega zovemo fazni prostor stohastičkog procesa. Skup* T *zovemo parametarski ili indeksni skup.*

Dakle, stohastički proces je familija slučajnih promenljivih definisanih na istom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, odnosno familija funkcija $X(t,\omega)$ takvih da za svako fiksirano $t \in T$, funkcija $X(t,\omega)$ je $\mathcal{F}$-merljiva. Umesto $X(t,\omega)$ najčešće ćemo pisati samo $X(t)$ ili X_t.

Parametar t može biti realan, kompleksan ili još opštijeg tipa, npr. može biti n-dimenzionalan. Sem toga, on može biti kako diskretan tako i neprekidan. Skup T svih vrednosti parametra često zovemo i *oblast definisanosti procesa*. U matematičkoj teoriji stohastičkih procesa nema nikakvih razloga da se parametru t da neka određena interpretacija. Ipak, u primenama se često izučavaju procesi koji protiču u vremenu, pa ćemo parametar t često zvati *vreme*, a njegovu fiksiranu vrednost - *vremenski trenutak*.

DEFINICIJA 9. *Neka je* $X = \{X(t),\ t \in T\}$ *dat stohastički proces. Iz toga onda sledi da za svako fiksirano* $t \in T$*,* $X(t)$ *je slučajna promenljiva. Nju zovemo zasek ili sečenje procesa* X *u tački* t*. Ta slučajna promenljiva ima svoj zakon raspodele, koji je određen odgovarajućom funkcijom raspodele:*

$$F_1(t;x) = P\{X(t) < x\}.$$

Familija tih funkcija (u odnosu na $t \in T$*) je familija jednodimenzionalnih funkcija raspodele.*

DEFINICIJA 10. *Neka je fiksirano* n *vremenskih trenutaka* $t_1, ..., t_n$*. Svakom od tih vremenskih trenutaka odgovara po jedna slučajna promenljiva. Tako dobijamo* n *slučajnih promenljivih* $X(t_1), ..., X(t_n)$*, koje možemo posmatrati kao koordinate* n*-dimenzionalnog slučajnog vektora* $(X(t_1), ..., X(t_n))$*. To je jedan* n*-dimenzionalni zasek stohastičkog procesa* X*. Raspodela* n*-dimenzionalnog zaseka određena je* n*-dimenzionalnom funkcijom raspodele:*

$$\begin{aligned} F_n(t_1, ..., t_n; x_1, ..., x_n) &= P\{(X(t_1), ..., X(t_n)) < (x_1, ..., x_n)\} \\ &\equiv P\{X(t_1) < x_1, ..., X(t_n) < x_n\}. \end{aligned}$$

Ako pustimo da $(t_1, ..., t_n)$ *prođe kroz skup* T^n*, onda dobijamo familiju* n*-dimenzionalnih funkcija raspodele. Familija svih* n*-dimenzionalnih funkcija raspodele* $F_n(t_1, ..., t_n; x_1, ..., x_n)$*,* $n = 1, 2, ...$ *je familija konačno-dimenzionalnih funkcija raspodele stohastičkog procesa* X*.*

DEFINICIJA 11. *Autokovarijansna funkcija (korelaciona funkcija) stohastičkog procesa* $\{X(t),\ t \in T\}$ *je*

$$K_X(t,s) = K(t,s) = E[(X_t - E(X_t))(X_s - E(X_s))] = E[X_t X_s] - E[X_t]E[X_s].$$

U nastavku navodimo neke klase stohastičkih procesa.

Klasa I: *Stohastički procesi sa nezavisnim vrednostima*

Stohastički proces $\{X(t),\, t \in T\}$ je proces sa nezavisnim vrednostima ako su slučajne promenljive $X(t_1), ..., X(t_n)$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i $(t_1, ..., t_n) \in T^n$ nezavisne. Tada je

$$F_n(t_1, ..., t_n; x_1, ..., x_n) = F_1(t_1; x_n) \ldots F_n(t_n; x_n).$$

To znači da se kod ovih procesa sve n-dimenzionalne raspodele izučavaju preko jednodimenzionalnih.

Klasa II: *Procesi sa nezavisnim priraštajima*

Proces sa nezavisnim priraštajima je proces $\{X(t),\, t \in T = [t_0, +\infty]\}$ sa svojstvom: za svaki prirodan broj n i n tačaka $t_1, ..., t_n \in T$ za koje je $t_0 < t_1 < ... < t_n$ slučajne promenljive

$$X(t_0),\, X(t_1) - X(t_0),\, X(t_2) - X(t_1), ..., X(t_n) - X(t_{n-1})$$

su nezavisne slučajne promenljive. Tada se vrednost slučajne promenljive $X(t_0)$ naziva *početno stanje*, a njena raspodela - *početna raspodela*.

Klasa III: *Procesi sa konačnim momentima drugog reda* ili L^2 *procesi* su kompleksni procesi

$$X(t) = \xi(t) \,+\, i\,\eta(t),\;\; t \in T$$

kod kojih su koordinatni procesi ξ i η realni procesi i drugi momenat

$$E[|X(t)|^2] = E[X(t)\overline{X(t)}] = E[\xi^2(t)] + E[\eta^2(t)]$$

je konačan za svako $t \in T$.

Klasa IV: *Stacionarni procesi*

U ovoj klasi razlikujemo dve podklase procesa: strogo stacionarne i slabo stacionarne procese.

Stohastički proces $\{X(t),\, t \in T\}$ je *strogo stacionaran* ako su sve njegove konačnodimenzionalne raspodele invarijantne u odnosu na translaciju vremena, tj. ako za svako n i za sve $t_1, ..., t_n \in T$ raspodela n slučajnih poromenljivih $X(t_1 + h), ..., X(t_n + h)$ ne zavisi od h. To se može izraziti na sledeći način:

$$F_n(t_1 + h, ..., t_n + h; x_1, ..., x_n) = F_n(t_1, ..., t_n; x_1, ..., x_n).$$

Stohastički proces $\{X(t),\, t \in T\}$ je *slabo stacionaran* ako su svi njegovi momenti drugog reda konačni, srednja vrednost je konstantna i korelaciona funkcija je funkcija razlike argumenata:

$$E[|X(t)|^2] < \infty, \;\; E[X(t)] = m, \;\; K(t,s) = B(t-s).$$

Klasa V: *Markovski procesi (procesi Markova, Markovljevi procesi)*

Stohastički proces $\{X(t),\, t \in T\}$ je markovski proces ako za svaku neopadajuću kolekciju $t_1, ..., t_n \in T$

$$P\{X(t_n) < x_n / X(t_1) < x_1, ..., X(t_{n-1}) < x_{n-1}\} = P\{X(t_n) < x_n / X(t_{n-1}) < x_{n-1}\}.$$

Grubo govoreći, ako su poznate "prošlost" $(X(t_1), ..., X(t_{n-2}))$ i "sadašnjost" $X(t_{n-1})$, onda "budućnost" $X(t_n)$ zavisi samo od "sadašnjosti", a ne zavisi od "prošlosti". Dakle, ako je poznato $X(t)$, tada $X(s)$ za $s > t$ ne zavisi od $X(u)$ za $u < t$.

Klasa VI: *Gausovski procesi*

Realan stohastički proces $\{X(t),\, t \in T\}$ je gausovski ako je svako njegovo n-dimenzionalno sečenje $(X(t_1), ..., X(t_n))$, $t_1, ..., t_n \in T$ gausovska slučajna promenljiva.

Definicija 12. *Stohastički proces $\{W(t),\, t \geq 0\}$ se zove standardno Braunovo kretanje (Vinerov proces) ako:*

1. *$W(0) = 0$;*
2. *$W(t)$ ima nezavisne priraštaje i stacionarne priraštaje;*
3. *$W(t) - W(s) : \mathcal{N}(0, t-s)$, $t \geq s \geq 0$.*

Specijalno, za $s = 0$ važi: $W(t) : \mathcal{N}(0, t)$.

Definicija 13. *Stohastički proces $\{X(t),\, t \in T\}$ se zove Levijev proces ako:*

1. *$X(0) = 0$;*
2. *$X(t)$ ima nezavisne i stacionarne priraštaje;*
3. *$X(t)$ je stohastički neprekidno, tj. za sve $a > 0$ i sve $s \geq 0$ važi:*

$$\lim_{t \to s} P(|X(t) - X(s)| > a) = 0.$$

Definicija 14. *OU (Ornstein-Uhlenbeck) proces je stohastički proces koji zadovoljava sledeću stohastičku diferencijalnu jednačinu:*

$$dX_t = k(\theta - X_t)dt + \sigma dW_t$$

gde je W_t, $t \in [0, \infty)$ standardno Braunovo kretanje, parametar $\sigma > 0$ predstavlja volatilnost, parametar $k > 0$ stopu proređivanja skokova i meru stabilizacije oko očekivane vrednosti, a parametar θ očekivanu vrednost procesa (za $t \to \infty$), tj. ekvilibrijum.

DEFINICIJA 15. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ prostor sa σ-algebrom. Niz σ-algebri $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ sadržanih u $\mathcal{F}$ se zove filtracija ako za svako $s, t \in I$, $s \leq t$ važi da je*

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t.$$

Ovde $\mathcal{F}_t$ predstavlja naše znanje u trenutku t. Kako raste t, tako raste i naše znanje.

DEFINICIJA 16. *Niz stohastičkih procesa $\{X_i\}_{i\in I}$ je adaptiran filtraciji $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ ako je X_i $\mathcal{F}_i$ merljivo za sve $i \in I$.*

Uslov u prethodnoj definiciji znači da $\mathcal{F}_i$ sadrži sve informacije koje se mogu saznati iz stohastičkih procesa $X_1, X_2, ..., X_i$.

DEFINICIJA 17. *Stohastički proces $\{X_i\}_{i\in I}$ se zove martingal u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ ako je*

i) adaptiran filtraciji $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$;

ii) važi $E[X_{i+1}|X_i, X_{i-1}, ..., X_1] = X_i$.

Naredne teoreme, definicije i primer, vezani za stohastičke diferencijalne jednačine, bazirani su na radu [53].

Teorema 1.2.1. *(Itôva formula za Braunovo kretanje) Neka je proces W_t Braunovo kretanje na intervalu $[0, T]$ i neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna i dva puta diferencijabilna funkcija na skupu $\mathbb{R}$. Tada za svako $t \leq T$ važi:*

$$f(W_t) = f_0 + \int_0^t f'(W_s)dWs + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)ds. \tag{1.1}$$

Iako je Braunovo kretanje nigde-diferencijabilna funkcija, u literaturi se često pojavljuje pojam procesa, koji je jednak izvodu Braunovog kretanja po vremenu i koji spada u procese neprekidne u vremenu sa međusobno nezavisnim vrednostima, tzv. proces belog šuma, oblika: $\xi(t) = dW(t)/dt = W'(t)$. S obzirom da izvod Braunovog kretanja ne postoji, ne postoji ni proces belog šuma u klasičnom smislu. Proces belog šuma je moguće rigorozno definisati isključivo u okviru teorije uopštenih funkcija. Ako sa $\sigma(x, t)$ označimo intezitet šuma u tački x u trenutku t, tada prema dogovoru važi:

$$\int_0^T \sigma(X_t, t)\xi(t)dt = \int_0^T \sigma(X_t, t)W'(t)dt = \int_0^T \sigma(X_t, t)dW_t,$$

gde poslednji izraz predstavlja Itôv integral. Stohastičke diferencijalne jednačine (kraće, SDJ) nastaju npr. kada se koeficijenti običnih diferencijalnih jednačina pertubuju belim šumom.

DEFINICIJA 18. *Neka je W_t, za $t \geq 0$ proces Braunovog kretanja, $\mu(X_t, t)$ i $\sigma(X_t, t)$ su date funkcije, a X_t je nepoznati proces. Tada, jednačinu oblika*

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t \tag{1.2}$$

nazivamo stohastička diferencijalna jednačina vođena Braunovim kretanjem ili SDJ difuznog tipa. Funkcije $\mu(x, t)$ i $\sigma(x, t)$ se nazivaju koeficijentima jednačine, gde je $\mu(x, t)$ mera prosečnog rasta X_t (average rate of growth), kaže se i koeficijent drifta (pomeranja), dok je $\sigma(x, t)$ koeficijent volatilnosti, koji meri disperziju procesa X_t.

DEFINICIJA 19. *(Striktno rečenje SDJ) Neka je W_t, za $t \geq 0$ zadat proces Braunovog kretanja. Proces X_t se naziva striktno rešenje (strong solution) stohastičke diferencijalne jednačine oblika (1.2), ako je adaptiran filtraciji generisanoj Vinerovim procesom, ako za svako $t > 0$ postoje integrali $\int_0^t \mu(X_s, s)ds$ i $\int_0^t \sigma(X_s, s)dW_s$, i ako važi sledeća relacija:*

$$X_t = X_0 + \int_o^t \mu(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dW_s,$$

gde je X_0 početni uslov.

Teorema 1.2.2. *(Egzistencija i jedinstvenost striktnog rešenja SDJ) Neka su μ i σ merljive funkije koje ispunjavaju sledeće uslove:*

i) Koeficijenti μ i σ su lokalno Lipšicovi po x i uniformno Lipšicovi po t. To znači da za svako T i N postoji konstanta K koja zavisi samo od T i N, takva da za svako $|x|, |y| \leq N$ i za svako $0 \leq t \leq T$ važe sledeći uslovi:

$$|\mu(x,t) - \mu(y,t)| < K|x-y| \text{ } i \text{ } |\sigma(x,t) - \sigma(y,t)| < K|x-y|.^1$$

ii) Koeficijenti μ i σ ispunjavaju uslove maksimalnog linearnog rasta:

$$|\mu(x,t)| \leq K(1+|x|) \text{ } i \text{ } |\sigma(x,t)| \leq K(1+|x|), \text{ } za\, svako\ 0 \leq t \leq T.^2$$

Slučajna promenljiva X_0 je nezavisna od Braunovog kretanja $\{W_t, 0 \leq t \leq T\}$, ili drugim rečima, X_0 je nezavisna od σ-polja generisanog stohastičkim procesom $\{W_t, s \geq 0\}$. Takođe, za X_0 mora da bude ispunjen i uslov integrabilnosti:

$$E[X_0^2] < +\infty.$$

U tom slučaju stohastička diferencijalna jednačina oblika $dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t$ ima jedinstveno striktno rešenje X_t koje je neprekidno po t. Dato rešenje poseduje i osobinu da je adaptirano filtraciji generisanoj slučajnom promenljivom X_0 i procesom $W_s(\cdot)$, $s \leq t$, kao i osobinu integrabilnosti:

$$E\Big[\int_0^T |X_t|^2 dt\Big] < \infty.$$

Pored navedenih osobina, striktno rešenje zadovoljava i sledeću nejednakost:

$$E\Big[\sup_{0\leq t\leq T} X_t^2\Big] < C(1 + E[X_0^2]),$$

pri čemu konstanta C zavisi samo od promenljivih K i T.

Koncept slabog rešenja omogućava nam da damo značenje stohastičkoj diferencijalnoj jednačini kada striktno rešenje ne postoji. Slaba rešenja su rešenja u raspodeli i ona

[1] Dati uslovi se mogu zameniiti jednim zajedničkim uslovom: $|\mu(x,t) - \mu(y,t)| + |\sigma(x,t) - \sigma(y,t)| < K'|x-y|$.

[2] Kao i u slučaju i), dva uslova se mogu zameniti jednim ekvivalentnim uslovom: $|\mu(x,t)| + |\sigma(x,t)| < K'(1+|x|)$.

mogu biti definisana na nekom drugom prostoru verovatnoće, gde su uslovi za koeficijente SDJ koji se odnose na egzistenciju slabih rešenja manje strogi od uslova za egzistenciju striktnih rešenja.

Definicija 20. *(Egzistencija slabog rešenja) Ako postoji prostor verovatnoća sa filtracijom, Braunovo kretanje W_t definisano na tom prostoru, kao i proces X_t adaptiran datoj filtraciji, takvi da: X_0 ima datu raspodelu, za svako t važi da su integrali u formuli (1.3) definisani i ako za X_t važi sledeća jednakost:*

$$X_t = X_0 + \int_o^t \mu(X_u, u)du + \int_0^t \sigma(X_u, u)dW_u, \tag{1.3}$$

tada proces X_t nazivamo slabim rešenjem SDJ, čiji je diferencijalni oblik: $dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t$.

Definicija 21. *(Jedinstvenost slabog rešenja) Za slabo rešenje kažemo da je jedinstveno ako važi sledeći stav: Kada god imamo dva rešenja X_t i X'_t (koja mogu biti definisana i na različitim prostorima verovatnoće), takva da su im raspodele od X_0 i X'_0 jednake, tada su i sve konačno-dimenzionalne raspodele od X_t i X'_t jednake.*

Iz prethodne definicije zaključujemo da je svako striktno rešenje ujedno i slabo rešenje. Jedinstvenost striktnog rešenja podrazumeva i jedinstvenost slabih rešenja.

Primer 1.2.1. *Blek-Šolsov model (Black-Sholes model)*

Prvo ćemo navesti Blek-Šolsov model, u kome se stopa prinosa dx_t/x_t opisuje slučajnom funkcijom.
Neka je $x(t)$ vrednost koju će imati \$1 nakon određenog vremenskog perioda t, pošto je uložen na štedni račun u banci, gde se parametar r tumači kao kamatna stopa. Ako pretpostavimo da se okamaćivanje vrši neprekidno u vremenu, vrednost $x(t)$ se dobija kao rešenje obične diferencijalne jednačine: $dx(t)/x(t) = rdt$ i iznosi:

$$x(t) = e^{rt}, \ x(0) = 1. \tag{1.4}$$

Ako je stopa prinosa $dx(t)/x(t)$ podložna slučajnim fluktuacijama (koje predstavljaju slučajne funkcije), tada se umesto konstantnog člana r, uzima član pertubovan šumom, koji je oblika: $r + \xi(t)$. Tada se dobija SDJ oblika: $dX_t/dt = (r + \sigma\xi(t))X_t$, čiji je ekvivalentni zapis oblika:

$$dX_t = rX_tdt + \sigma X_tdW_t,$$

gde se r i σ nazivaju koeficijent drifta i koeficijent volatilnosti. Model oblika (1.4), čiji su koeficijenti r i σ konstantni, naziva se model geometrijskog Braunovog kretanja, dok je rešenje ove SDJ proces koji nazivamo geometrijsko Braunovo kretanje i oblika je:

$$X_t = e^{(r-\sigma^2)t+\sigma W_t}, \ gde\, je\, X_0 = 1.$$

Pokažimo sada da je geometrijsko Braunovo kretanje rešenje date SDJ: $dX_t = rX_tdt + \sigma X_tdW_t$. Zato posmatrajmo izvode logaritamske funkcije $f(x) = \ln(x)$, $f'(x) = 1/x$, $f''(x) = -1/x^2$.

Koristeći Itôvu formulu izračunaćemo stohastički diferencijal funkcije $f(x) = \ln x$ *na sledeći način:*

$$d(\ln X_t) = \frac{1}{X_t} dX_t + \frac{1}{2}(-\frac{1}{X_t^2})\sigma^2 X_t^2 dt = \frac{1}{X_t}(rX_t dt + \sigma X_t dW_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt =$$

$$= (r - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t.$$

Proces $\ln X_t$ *dobijamo primenom Itôve formule za Braunovo kretanje (1.1):*

$$\ln X_t = \ln X_0 + \int_0^t (r - \frac{1}{2}\sigma^2)ds + \int_0^t \sigma dW_s = \ln X_0 + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma(W_t - W_0),$$

odakle jednostavno dobijamo rešenje ove SDJ u obliku:

$$X_t = e^{\ln X_0 + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} = X_0 \cdot e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}.$$

Definicija 22. *Za stohastičku diferencijalnu jednačinu:* $dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t$ *kažemo da je linearna SDJ, ako su koeficijenti jednačine* μ *i* σ *oblika:* $\mu(X_t, t) = \alpha(t) + \beta(t)X_t$, $\sigma(X_t, t) = \gamma(t) + \delta(t)X_t$, *gde su funkcije* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *unapred zadati adaptirani procesi i neprekidne funkcije po promenljivoj* t. *Prema tome, jednodimenzionalne linearne SDJ u najopštijem slučaju imaju oblik:*

$$dX_t = (\alpha(t) + \beta(t)X_t)dt + (\gamma(t) + \delta(t)X_t)dW_t.$$

1.3 Osnovni pojmovi finansijske matematike

Pojmovi iz ovog poglavlja su bazirani na knjizi *Finansijska matematika* (vidi [19]).

Finansijski derivati (contingent claims) ili izvedene hartije od vrednosti predstavljaju značajnu grupu finansijskih instrumenata koji su se u poslednjih tridesetak godina naglo razvili. Njihova pojava dovela je do znatnih promena na finansijskim tržištima najrazvijenijih zemalja, ali i na mejunarodnom finansijskom tržištu. Finansijsko poslovanje je danas skoro pa nezamislivo bez poznavanja i upotrebe ovih finansijskih instrumenata. Tokom 1970-ih godina finansijske institucije su se našle u rizičnom okruženju koje je tokom devedesetih godina postajalo sve rizičnije. Kamatne stope su se učestalije menjale, dok su tržišta akcija i obveznica s vremena na vreme bila veoma nestabilna. Iz tog razloga su menadžeri finansijskih institucija počeli da vode više računa o smanjenju rizika sa kojima su se te institucije suočavale. Zainteresovanost za smanjenje rizika dovela je do pojave finansijskih inovacija, odnosno pojave novih finansijskih instrumenata koji finansijskim institucijama i njihovim menadžerima pomažu da bolje upravljaju rizicima. Ti instrumenti nazivaju se finansijskim derivatima.

Najznačajniji finansijski derivati koje menadžeri koriste radi smanjenja rizika su: forvardi (forwards), finansijski fjučersi (futures), svopovi (swaps) i opcije (options). Derivati su u osnovi ugovori sa vrednostima koje su izvedene iz cene aktiva ili tržišta. Oni podrazumevaju ugovor između dve strane koje se obavezuju da izvrše razmenu uplata baziranih na vrednosti definisane aktive na neki određeni budući dan.

Opcija je ugovor koji vlasniku opcije (holder) daje pravo, ali ne i obavezu, da kupi ili proda aktivu (underlined asset) u nekom budućem vremenu po unapred ugovorenoj ceni K (strike price, exercise price). Aktiva opcija su najčešće hartije od vrednosti - akcije i obveznice, ali i akcioni indeksi, strane valute, fjučersi i drugo. Osnovni tipovi opcija su evropske i američke opcije, a složenije su egzotične opcije: azijske, izraelske, binarne, i druge. Pošto opcijski ugovor podrazumeva samo pravo, a ne i obavezu za vlasnika opcije, on mora imati neku vrednost - kupac plaća prodavcu opcije premiju (premium price), čime prodavcu nadoknađuje rizik zbog preuzimanja obaveze opcijskog ugovora. Datum dospeća (expirion date, exercise date) opcije je datum kada opcijskom ugovoru ističe važnost, a T je njegov rok dospeća. Evropska opcija se može realizovati samo na datum dospeća opcije, dok se američka opcija može realizovati u bilo kom trenutku do njenog datuma dospeća.

Prema pravu koje ostvaruje prihode, postoje dve vrste opcija: kupovne (call) i prodajne (put). Vlasnik kupovne opcije ima pravo da kupi, a prodavac te opcije je u obavezi da proda aktivu po ugovorenoj ceni na datum dospeća (kod evropskih opcija) ili u bilo kom trenutku do datuma dospeća (kod američkih opcija). Vlasnik prodajne opcije ima pravo da proda aktivu po ugovorenoj ceni na datum dospeća (kod evropskih opcija) ili u bilo kom trenutku do datuma dospeća (kod američkih opcija). Prodavac takve opcije obavezan je da kupi pomenutu aktivu.

Kako opcijski ugovor podrazumeva pravo vlasnika opcije, dok za prodavca podrazumeva obavezu, on mora imati neku vrednost. Dakle, kupac opcije plaća prodavcu pravo, a prodavac dobija naknadu za preuzimanje ovaveze za ispunjenje tog ugovora. Ta suma novca se naziva *premija*. Potrebno je odrediti premiju, kao i vrednost opcije u svakom trenutku do datuma dospeća. Ta vrednost se zove *arbitražna cena opcije*.

Neka je $C_t = C(S_t)$ cena evropske kupovne opcije na aktivu čija je cena S_t u trenutku t (spot cena aktive). Ako je u trenutku T na datum dospeća opcije, cena aktive viša od ugovorene cene, dakle ako je $S_T \geq K$, kupovna opcija će se realizovati, pri čemu vlasnik opcije (kupac) plaća iznos K da bi kupio aktivu čija je cena S_T. Ako je $S_T < K$, cena aktive je niža od ugovorene cene, tako da nema smisla realizovati tu opciju jer bi se u suprotnom napravio gubitak $K - S_T$. *Naplata* (payoff) kupovne opcije na datum dospeća označava se sa C_T, pri čemu je

$$C_T = \max\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)^+.$$

Pošto je za kupovinu opcije u trenutku t plaćena premija C_t, profit vlasnika kupovne opcije, za koga se kaže da zauzima *dugu poziciju* u opciji, jednak je $(S_T - K)^+ - C_t$. Naplata prodavca kupovne opcije, koji zauzima *kratku poziciju* u opciji, jednaka je $\min\{K - S_T, 0\}$, a njegov profit je $C_t - (S_T - K)^+$.

Propozicija 1.3.1. *Cena evropske kupovne opcije sa datumom dospeća u trenutku T ima osobinu homogenosti reda jedan u odnosu na spot cenu aktive i ugovorenu cenu,* *tj. za dvako $\lambda > 0$ je*

$$C(\lambda S_t, \lambda K) = \lambda C(S_t, K), \;\; t \leq T.$$

Neka je $P_t = P(S_t)$ cena prodajne opcije u trenutku t. U trenutku T prodajna opcija se ne realizuje ako je cena aktive viša od ugovorene cene, tj. $S_T \geq K$, a u suprotnom, kada je $S_T < K$ prodajna opcija se realizuje, tako što se prodaje aktiva po ceni K i ostvaruje zarada od $K - S_T$. Naplata duge pozicije u prodajnoj opciji u trenutku T se označava sa P_T i jednaka je

$$P_T = \max\{K - S_T, 0\} = (K - S_T)^+.$$

Ako se odbije plaćena premija, čist profit vlasinka date opcije je $(K - S_T)^+ - P_t$. Iz pozicije prodavca prodajne opcije, naplata je jednaka $\min\{S_T - K, 0\}$.

U zavisnosti od odnosa između cene aktive S_t, u trenutku sačinjavanja opcijskog ugovora t, i ugovorene cene K, opcije se mogu podeliti na tri kategorije: opcije sa dobitkom (in-the-money), opcije na istom (at-the-money) i opcije sa gubitkom (out-of-the-money). U slučaju kupovne opcije te kategorije opisuju, redom, odnosi: $S_t > K$, $S_t = K$ i $S_t < K$.

Binarne opcije su ugovori koji daju trgovcu pravo bez obaveze da kupi osnovna sredstva po dogovorenoj ceni za određeni vremenski period. Reč binarno znači da postoje dva moguća ishoda, ili će se ostvariti profit ako je predviđanje tačno, ili će se izgubiti novac, ukoliko predviđanje nije tačno.

Na cenu opcija utiče sledećih šest faktora: spot cena aktive, ugovorena cena, datum dospeća, volatilnost cene aktive, kamatna stopa i prihod koji obezbeđuje aktiva za vreme trajanja opcije.
Ako se kupovna opcija realizuje u neko vreme u budućnosti, njena naplata će biti jednaka sumi za koju cena aktive premaši ugovorenu cenu. Dakle, kupovna opcija postaje vrednija kada cena aktive raste i manje vredna kada ugovorena cena raste. Ako se realizuje prodajna opcija, naplata je jednaka sumi za koju ugovorena cena premaši cenu aktive, pa je ona manje vredna kada cena aktive raste i vrednija kada ugovorena cena raste.
Kod američkih opcija kasniji datum dospeća povećava vrednost te opcije jer postoji više mogućnosti za njenu realizaciju. Kod opcija evropskog tipa, to, u opštem slučaju ne važi.
Cena aktive se menja u vremenu na slučajan način. Što je volatilnost veća, to su češći skokovi na grafiku funkcije cene aktive u zavisnosti od vremena. To utiče na raspodelu cena na datum dospeća, a tako i na očekivanu zaradu od opcije. Grubo govoreći, volatilnost cene aktive je mera nesigurnosti u buduće kretanje cene aktive. Kada volatilnost raste, rastu i šanse da će se cena aktive znatno promeniti naviše ili naniže. Zato je logično da i cene kupovnih i prodajnih opcija značajno rastu sa povećanjem volatilnosti.
Cena opcije zavisi i od važeće kamatne stope r. Pritom će se podrazumevati da je kamatna stopa pozitivna. Opcija se plaća unapred, u trenutku sklapanja ugovora, dok zarada, ako je bude, dolazi kasnije. Zbog toga cena opcije mora održavati nivo dobiti koja bi se ostvarila kada bi se na bankovni račun uložio iznos jednak ceni aktive. Kada

kamatna stopa raste, sadašnja vrednost bilo koje sume, koja bi trebalo da bude primljena u budućnosti, opada, tako da cena prodajne opcije opada, a kupovne raste.
Ako je aktiva opcija akcija koja obezbeđuje poznatu dividendu, cena kupovne opcije se smanjuje sa povećanjem očekivane dividende, dok se cena prodajne opcije povećava.

Kupovne opcije čija aktiva ne obezbeđuje prihod

Neka je c_t cena evropske kupovne, a C_t američke kupovne opcije na aktivu čija je spot cena S_t u trenutku t. U cilju određivanja cene opcije potrebno je odrediti njenu gornju i donju granicu.
Evropska i američka kupovna opcija daju svom vlasniku pravo na kupovinu aktive po ugovorenoj ceni, bez obzira šta se dešavalo na tržištu sa cenom aktive, pa cene datih opcija ne mogu premašiti cenu aktive. Dakle, cena aktive predstavlja gornju granicu kupovnih opcija, tj.

$$c_t \leq S_t, \;\; C_t \leq S_t.$$

Propozicija 1.3.2. *Donja granica cene evropske kupovne opcije čija aktiva ne obezbeđuje prihod za vreme trajanja opcije ima vrednost:*

$$c_t \geq \max\{S_t - Ke^{-r(T-t)}, 0\}, \quad t \leq T.$$

Američka kupovna opcija na aktivu koja ne obezbeđuje prihod za vreme njenog trajanja može se realizovati u bilo kom trenutku t do datuma dospeća, tj. do trenutka T, tako da će cena te opcije biti bar koliko iznosi odgovarajuća stvarna vrednost, tj.

$$C_t \geq \max\{S_t - K, 0\}, \quad t \leq T.$$

Propozicija 1.3.3. *Američka kupovna opcija čija aktiva ne obezbeđuje prihod, vredi kao odgovarajuća evropska kupovna opcija na istu aktivu, tj.* $C_t = c_t$, $t \leq T$.

Posledica 1.3.1. *Američku kupovnu opciju čija aktiva ne obezbeđuje prihod za vreme njenog trajanja, nije optimalno realizovati pre datuma dospeća.*

Propozicija 1.3.4. *Donja granica cene američke kupovne opcije čija aktiva ne obezbeđuje prihod za vreme njenog trajanja je*

$$C_t \geq \max\{S_t - Ke^{-r(T-t)}, 0\}, \quad t \leq T.$$

Prodajne opcije čija aktiva ne obezbeđuje prihod

Neka je p_t cena evropske prodajne, a P_t američke prodajne opcije na aktivu čija je spot cena S_t u trenutku t.
Evropska i američka prodajna opcija vlasniku daje pravo da proda aktivu po ugovorenoj ceni K. Bez obzira na cenu aktive na tržištu, ove opcije ne mogu vredeti više od K. Dakle, mora biti:

$$p_t \leq K, \;\; P_t \leq K.$$

Međutim, evropska prodajna opcija u trenutku $t \leq T$ ne može vredeti više od sadašnje vrednosti K, tj.

$$p_t \leq Ke^{-r(T-t)}.$$

Propozicija 1.3.5. *Donja granica cene evropske prodajne opcije čija aktiva ne obezbeđuje prihod za vreme trajanja opcije, ima vrednost:*

$$p_t \geq \max\{Ke^{-r(T-t)} - S_t, 0\}, \quad t \leq T.$$

Propozicija 1.3.6. *Američku prodajnu opciju čija aktiva ne obezbeđuje prihod za vreme njenog trajanja, optimalno je realizovati ranije ako je ona dovoljno duboko na dobitku.*

Opcije čija aktiva obezbeđuje poznati prihod

Neka je D_t, $t \leq T$, sadašnja vrednost ukupnog prihoda koji će obezbediti aktiva u periodu do datuma dospeća opcije. U tom smislu mogu se odrediti donje i gornje granice cena kupovnih i prodajnih opcija.

Gornja granica cene evropske kupovne opcije u trenutku $t \leq T$ je jednaka razlici cene aktive i prihoda D_t, tj.

$$c_t \leq S_t - D_t.$$

Propozicija 1.3.7. *Donja granica cene evropske kupovne opcije čija aktiva obezbeđuje poznati prihod za vreme njenog trajanja, ima vrednost:*

$$c_t \geq \max\{S_t - D_t - Ke^{-r(T-t)}, 0\}, \quad t \leq T.$$

Gornja granica cene evropske prodajne opcije na aktivu koja obezbeđuje poznati prihod za vreme njenog trajanja ista je kao u slučaju kada aktiva ne obezbeđuje poznati prihod, tj.

$$p_t \leq Ke^{-r(T-t)}, \quad t \leq T.$$

Propozicija 1.3.8. *Donja granica cene evropske prodajne opcije čija aktiva obezbeđuje poznati prihod za vreme njenog trajanja ima vrednost:*

$$p_t \geq \max\{D_t + Ke^{-r(T-t)} - S_t, 0\}, \quad t \leq T.$$

Sledećim propozicijama su određene gornje i donje granice cena američkih opcija na aktivu koja obezbeđuje poznati prihod.

Propozicija 1.3.9. *Granice cene američke kupovne opcije čija aktiva obezbeđuje poznati prihod za vreme njenog trajanja imaju vrednost:*

$$\max\{S_t - K, S_t - D_t - Ke^{-r(T-t)}, 0\} \leq C_t \leq S_t, \quad t \leq T.$$

Propozicija 1.3.10. *Granice cene američke prodajne opcije čija aktiva obezbeđuje poznati prihod za vreme njenog trajanja imaju vrednost:*

$$\max\{K - S_t, D_t + Ke^{-r(T-t)} - S_t, 0\} \leq P_t \leq K, \ \ t \leq T.$$

Prodajno-kupovni paritet

Neka investitor poseduje jedinicu aktive. Ispituje se efekat kupovine prodajne opcije i prodaje kupovne opcije na tu aktivu, pri čemu su ove opcije sa istom ugovorenom cenom K i istim datumom dospeća u trenutku T. Vrednost takvog portfolija zavisi od spot cene aktive, pa je $\Pi_t = \Pi(S_t)$, ili preciznije,

$$\Pi = S_t + p_t - c_t, \quad t \leq T.$$

Na datum dospeća opcija, vrednost portfolija je:

$$\Pi_T = S_T + \max\{K - S_T, 0\} - \max\{S_T - K, 0\},$$

tj.

$$\Pi_T = \begin{cases} S_T + (K - S_T) - 0, & S_T < K \\ \\ S_T + 0 - (S_T - K), & S_T \geq K \end{cases}$$

Otuda je na datum dospeća vrednost ovog portfolija K, bez obzira na odnos cene aktive i ugovorene cene. U tom slučaju vrednost portfolija u proizvoljnom trenutku $t < T$ mora biti jednaka sadašnjoj vrednosti ugovorene cene, tj. $\Pi_t = Ke^{-r(T-t)}$, odnosno

$$S_t + p_t - c_t = Ke^{-r(T-t)}. \tag{1.5}$$

Odnos (1.5) izmedju vrednosti aktive i njenih opcija se naziva *prodajno-kupovni paritet* (put-call parity).

Glava 2

Momenti slučajne promenljive

2.1 Obični, apsolutni i centralni momenti

Definicija 23. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća na kome je definisana slučajna promenljiva $X = X(\omega)$. Apstraktan Lebegov integral od X u odnostu na P:*

$$E(X) = \int_\Omega X\, dP \equiv \int_\Omega X(\omega)\, P(dw)$$

je ***matematičko očekivanje*** *slučajne promenljive X. Kada se govori o matematičkom očekivanju podrazumeva se da je integral od $|X(\omega)|$ konačan, u suprotnom, matematičko očekivanje ne postoji.*

Definicija 24. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća, a Y proizvoljna slučajna promenljiva. Uslovno očekivanje $E[X|Y]$ je bilo koja $\mathcal{F}(Y)$-merljiva slučajna promenljiva koja zadovoljava uslov:*

$$E[X|Y] = \int_A X\, dP = \int_A E[X|Y]\, dP, \quad za\, svako\, A \in \mathcal{F}(Y).$$

Matematičko očekivanje se može definisati i preko integracije na realnoj pravoj uz korišćenje funkcije raspodele:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x),$$

gde se, dakle, radi o Lebeg-Stiltjesovom integralu.

Ako je slučajna promenljiva X aposlutno neprekidnog tipa i f je njena gustina raspodele, onda poslednja formula prelazi u

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Ako je slučajna promenljiva diskretnog tipa, određena sa $P(X = x_j) = p_j$, gde je $\sum_j p_j = 1$ i red $\sum_j |x_j| p_j$ konvergira, tada $E(X)$ postoji i važi:

$$E(X) = \sum_j p_j x_j.$$

Neke osobine matematičkog očekivanja slučajne promenljive:

1. $E(c) = c$, tj. matematičko očekivanje konstante jednako je toj konstanti;
2. $E(cX) = c\,E(X)$, tj. matematičko očekivanje proizvoda slučajne promenljive i konstante jednako je proizvodu matematičkog očekivanja te slučajne promenljive i konstante;
3. Ako slučajne promenljive $X_1, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, imaju očekivanja onda
$$E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$
4. Ako su slučajne promenljive $X_1, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, nezavisne i imaju očekivanja onda važi
$$E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$
5. Matematičko očekivanje apsolutne vrednosti slučajne promenljive nije manje od apsolutne vrednosti matematičkog očekivanja te promenljive, to jest:
$$E(|X|) \geq |E(X)|$$
6. Ako je za skoro svako $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geq 0$, tada je $E(X) \geq 0$;
7. Ako je $X \geq Y$ (za skoro svako $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geq Y(\omega)$), tada je $E(X) \geq E(Y)$;
8. Ako slučajna promenljiva X ima očekivanje onda
$$E(X - E(X)) = 0.$$

Raspodela verovatnoća je *simetrična* u odnosu na pravu $x = c$, ako je za svaku realnu vrednost x ispunjeno:
$$f(c + x) = f(c - x)$$

Teorema 2.1.1. *Ako je raspodela verovatnoća simetrična u odnosu na pravu $x = c$, onda je $E(X) = c$.*

Definicija 25. ***Momenat reda k*** *slučajne promenljive X je matematičko očekivanje od X^k, tj.*
$$m_k = E(X^k) = \int_\Omega X^k \, dP,$$
aposlutni momenat reda k *je matematičko očekivanje od $|X|^k$:*
$$a_k = E(|X|^k) = \int_\Omega |X|^k \, dP,$$
centralni momenat reda k *je matematičko očekivanje od $(X - E(X))^k$:*
$$\mu_k = E[(X - E(X))^k] = \int_\Omega (X - E(X))^k \, dP.$$

Centralni momenat reda 2 slučajne promenljive X se naziva *disperzija* ili *varijansa* i označava se sa $D(X)$:

$$D(X) = \mu_2 = E[(X - E(X))^2] = \int_\Omega (X - E(X))^2 \, dP.$$

Standardna devijacija (standardno odstupanje, prosečno odstupanje) slučajne promenljive X predstavlja pozitivan kvadratni koren iz disperzije:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Iz praktičnih razloga, formula za disperziju može imati i drugi oblik. Kako je:

$$[\,(X \,-\, E(X))\,]^2 = X^2 - 2XE(X) + E^2(X)$$

formula postaje:

$$D(X) = E[\,(X - E(X))^2\,] = E(X^2) - 2E^2(X) + E^2(X) = E(X^2) - E^2(X) = m_2 - m_1^2$$

gde je $m_2 = E(X^2)$ drugi običan momenat, a $m_1 = E(X)$.
Iz formule za centralni momenat reda k, za $k = 1, 2, 3, 4$ dobijamo centralne momente izražene pomoću običnih momenata:
$\mu_1 = 0$
$\mu_2 = m_2 - m_1^2$
$\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3$
$\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4$

Neke osobine disperzije slučajne promenljive:

1. $D(X) \geq 0$;
2. $D(X) = 0$ ako i samo ako je $X = c = const$, skoro sigurno;
3. Ako je c konstanta, onda je:

   $$D(cX) = c^2 D(X) \text{ i } D(X + c) = D(X)$$

4. Ako su slučajne promenljive $X_1, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, nezavisne i imaju disperzije, onda važi

   $$D(\textstyle\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n D(X_i)$$

Standardizovana(normalizovana) slučajna promenljiva X^* se dobija iz slučajne promenljive X transformacijom:

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

Bitne osobine standardizovane slučajne promenljive su da je

$$E(X^*) = 0, \;\; D(X^*) = 1.$$

Teorema 2.1.2. *Ako slučajna promenljiva X ima momenat (obični, apsolutni ili centralni) reda $n \in \mathbb{N}$, tada ona ima sve momente reda $1, 2, ..., n$.*

Dokaz: Iz definicije matematičkog očekivanja proizilazi da $E(X^k)$ postoji ako i samo ako postoji $E(|X|^k)$. Centralni momenat reda k moze se izraziti preko običnih momenata reda $1, 2, ..., k$ ako se iskoristi binomni razvoj. Prema tome, dovoljno je dokazati teoremu za apsolutni momenat.
Pretpostavimo da postoji $E(|X|^n)$, gde je n prirodan broj veći od 1. Neka je k prirodan broj manji od n. Ako je $|X| \geq 1$, tada je $|X|^k \leq |X|^n < 1 + |X|^n$. Ako je $|X| < 1$, tada je i $|X|^k < 1 \leq 1 + |X|^n$. Dakle, u oba slučaja imamo da je $|X|^k \leq 1 + |X|^n$, pa je

$$E(|X|^k) < E(1 + |X|^n) = 1 + E(|X|^n) < \infty,$$

čime je dokaz završen.

□

Ako je X slučajna promenljiva i h borelovska funkcija, takva da $\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| \, dF_X(x) < \infty$, tada se formulom

$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dF_X(x) < \infty$$

određuje matematičko očekivanje slučajne promenljive $h(X)$.

Neka je $X = (X_1, ..., X_n)$ i $E(X_1), ..., E(X_n)$ postoje. Tada je $E(X) = (E(X_1), ..., E(X_n))$ *vektor srednjih vrednosti*.
Neka je F funkcija raspodele slučajnog vektora $X = (X_1, ..., X_n)$ i neka je h borelovska funkcija definisana u $\mathbb{R}^n$. Tada $E[h(X_1, ..., X_n)]$ postoji ako i samo ako je

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x_1, ..., x_n)| \, dF_X(x_1, ..., x_n) < \infty$$

i tada je

$$E[h(X_1, ..., X_n)] = \int_{\mathbb{R}^n} h((x_1, ..., x_n) \, dF_X(x_1, ..., x_n)$$

(gde se, naravno, radi o Lebeg-Stiltjesovim integralima). U slučaju apsolutno neprekidne raspodele sa gustinom f biće

$$E[h(X_1, ..., X_n)] = \int_{\mathbb{R}^n} h(x_1, ..., x_n) \, g(x_1, ..., x_n) \, dx_1 ... dx_n$$

(gde je na desnoj strani Lebegov integral).

Za slučajne promenljive X i Y sa konačnim momentima drugog reda definišemo *koeficijent korelacije*:

$$\rho(X, Y) = \frac{E[(X - E(X))(Y - E(Y))]}{\sqrt{D(X) D(Y)}}.$$

Navešćemo sada nekoliko nejednakosti koje se odnose na momente slučajnih promenljivih.

Nejednakost Švarca (Koši-Bunjakovskog). Ako su X i Y slučajne promenljive sa konačnim momentima drugog reda, tada je $E(|XY|)$ konačno i

$$(E(|XY|))^2 \leq E(X^2)E(Y^2).$$

Nejednakost Ljapunova. Ako je $0 < p < q$, tada je

$$(E(|X|^p))^{1/p} \leq (E(|X|)^q)^{1/q}.$$

Nejednakost Heldera. Neka je $p \geq 1$, $q \geq 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ i neka su $E(|X|^p)$ i $E(|Y|^q)$ konačni. Tada je $E(|XY|)$ konačno i

$$E(|XY|) \leq (E(|X|^p))^{1/p}\,(E(|Y|^q))^{1/q}.$$

Nejednakost Minkovskog. Ako su $E(|X|^p)$ i $E(|Y|^p)$ konačni za $p \geq 1$, tada je i $E(|X + Y|^p)$ konačno i

$$(E(|X+Y|^p))^{1/p} \leq (E(|X|^p))^{1/p} + (E(|Y|^p))^{1/p}.$$

Nejednakost Jensena. Ako je φ konveksna funkcija, tada je

$$\varphi(E(X)) \leq E(\varphi(X)).$$

Sve navedene jednakosti važe, naravno, pod pretpostavkom da momenti koji se u njima pojavljuju postoje.

Primer 2.1.1. *Iz Jensenove nejednakosti mogu se dobiti razne zanimljive relacije između momenata. Na primer, kako su sve funkcije $x \mapsto x^{2k}$ konveksne za $k = 1, 2, ...$, imamo da je*

$$(E(X))^{2k} \leq E(X^{2k}).$$

Sada dajemo jedan alternativan način za izračunavanje apsolutnih momenata.

Teorema 2.1.3. *Neka je X slučajna promenljiva koja ima momenat reda r. Tada je*

$$E(|X|^r) = \int_0^\infty rt^{r-1}P(|X| > t)dt.$$

Dokaz: Neka je f gustina slučajne promenljive $Y = |X|$. Tada je

$$\int_0^\infty rt^{r-1}P(|X| > t)dt = \int_0^\infty \int_t^\infty rt^{r-1} f(u)du\,dt = \int_0^\infty \Big(\int_0^u rt^{r-1}dt\Big) f(u)du$$

$$= \int_0^\infty u^r f(u)du = E(Y^r) = E(|X|^r).$$

□

Ako je X nenegativna slučajna promenljiva, iz navedene teoreme se dobija da je

$$E(X) = \int_0^\infty P(X > t)dt.$$

2.2 Koeficijenti asimetrije i ekscesa raspodela verovatnoća

Matematičko očekivanje $E(X)$ i varijansa $D(X)$ su karakteristike raspodela verovatnoća kojima se u praksi najviše služimo. One karakterišu dve najznačajnije crte raspodele verovatnoća: centar rasturanja i stepen rasturanja. Za opširniji opis raspodele verovatnoća koriste se centralni momenti višeg reda.

Teorema 2.2.1. *Ako je raspodela simetrična u odnosu na pravu $x = E(X)$ onda su svi centralni momenti neparnog reda jednaki nuli (ako postoje).*

Dokaz: Prema pretpostavci je:

$$f(\mu - t) = f(\mu + t)$$

Kada u integralu koji definiše treći centralni momenat, stavimo prvo $x-\mu = t$, a zatim, $t = -u$, imamo:
$\mu_3 = E[(X-\mu)^3] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^3 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} t^3 f(\mu+t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} t^3 f(\mu+t)\,dt + \int_0^{\infty} t^3 f(\mu+t)\,dt = \int_{\infty}^{0} (-u)^3 f(\mu-u)\,(-du) + \int_0^{\infty} t^3 f(\mu+t)\,dt = -\int_{\infty}^{0} u^3 f(\mu+u)\,du + \int_0^{\infty} t^3 f(\mu+t)\,dt.$

Razlika dobijenih integrala je jednaka nuli, jer su ovi integrali jednaki među sobom. Dokaz se i u diskretnom slučaju izvodi na sličan način.

□

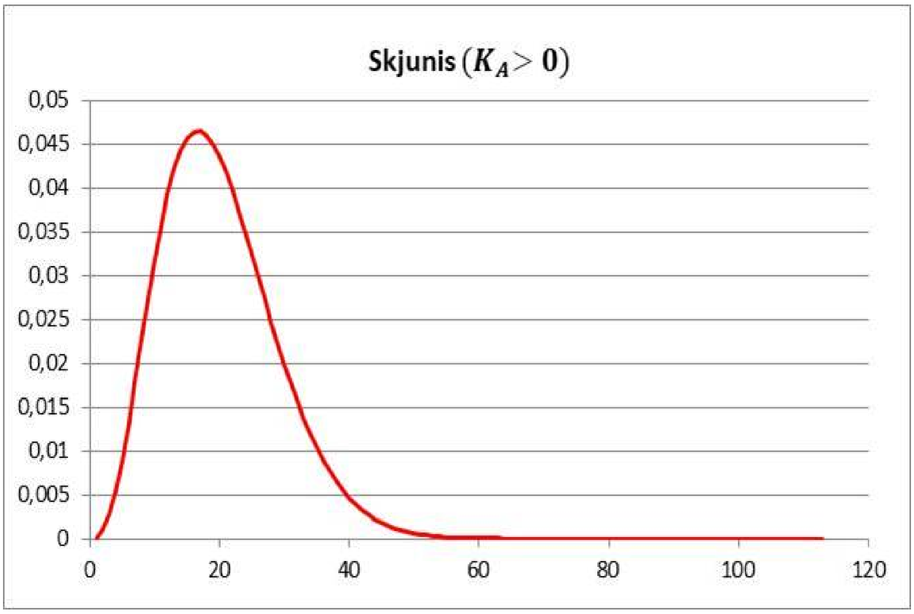
Dakle, prirodno je, kao karakteristiku asimetrije uzeti najprostiji od neparnih centralnih momenata, odnosno treći centralni momenat, $\mu_3 = E[(X - E(X))^3]$.

Budući da se treći centralni momenat izražava kubnim jedinicama, kao meru asimetrije pogodnije je uzeti **koeficijent asimetrije** (na engleskom: skewness) koji ne zavisi od jedinica mere:

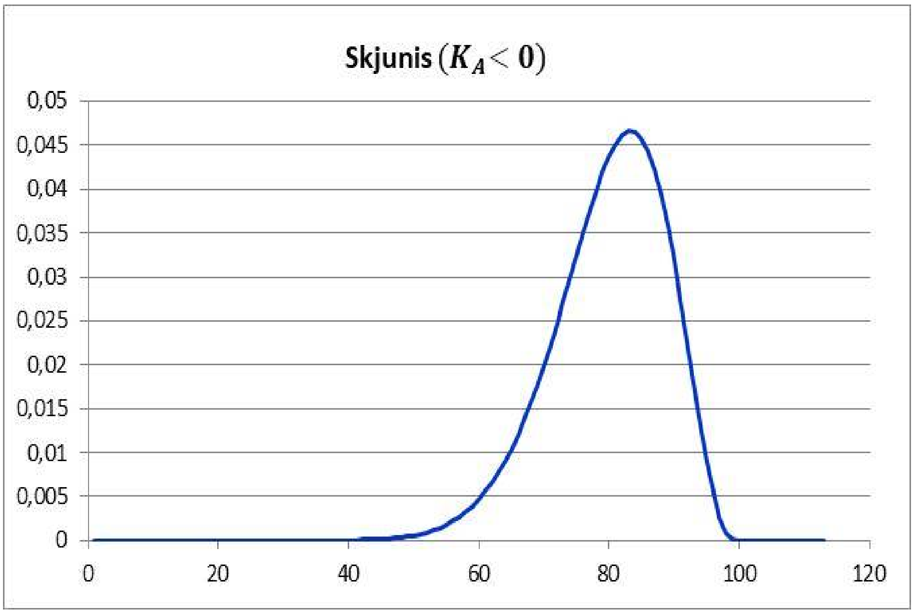
$$K_A = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

S obzirom da je $\sigma^3 = (\sigma^2)^{3/2}$ uvek pozitivna, predznak K_A potpuno je određen predznakom μ_3. Koeficijent asimetrije jednak je nuli za simetrične raspodele; dobija veliku pozitivnu vrednost kada je raspodela verovatnoća asimetrična nadesno (pozitivna asimetrija) i dobija veliku negativnu vrednost kada je raspodela verovatnoća asimetrična nalevo (negativna asimetrija). Odnosno, što je koeficijent asimetrije veći po svojoj apsolutnoj vrednosti, raspodela je sve asimetričnija. Pozitivna i negativna asimetrija prikazane su na Slikama 2.1 i 2.2. Prilikom klasifikacije asimetrije obično se prihvata sledeće pravilo:

- ako je $0 < |K_A| < 0.1$, u tom slučaju nema asimetrije;
- ako je $0.1 < |K_A| < 0.25$, asimetrija je mala;
- ako je $0.25 < |K_A| < 0.5$, asimetrija je srednja, i
- $0.5 < |K_A|$, asimetrija je izrazita, jaka.



Slika 2.1: Koeficijent asimetrije (pozitivna asimetrija)



Slika 2.2: Koeficijent asimetrije (negativna asimetrija)

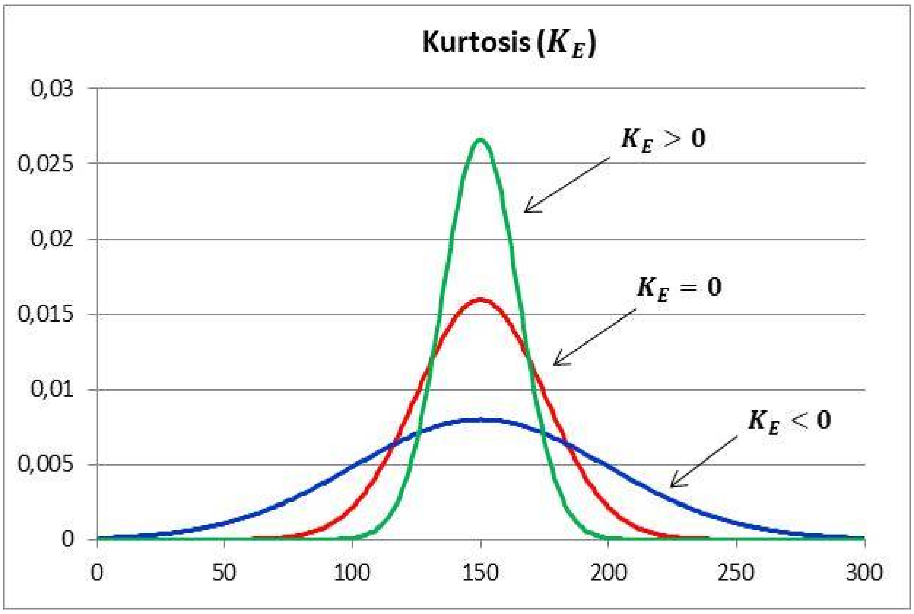
Na sličan način, kao mera ekscesa ili spljoštenosti raspodele verovatnoća, uvodi se **koeficijent ekscesa** (na engleskom: kurtosis):

$$K_E = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

Neki analitičari koriste sledeću formulu za koeficijent ekscesa:

$$K_E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

Kod normalne raspodele $\mu_4 = 3\sigma^4$, pa je koeficijent spljoštenosti jednak nuli. Zbog toga se pod ekscesom podrazumeva odstupanje posmatrane raspodele verovatnoća po visini (spljoštenosti) od normalne raspodele. Krive gustine sa oštrijim vrhom imaju pozitivan eksces, a spljoštenije krive gustine imaju negativan eksces, kao što je prikazano na Slici 2.3.



Slika 2.3: Koeficijent ekscesa

2.3 Funkcija generatrisa momenata i karakteristična funkcija

Često je potrebno računati momente višeg reda od dva. Pokazalo se da se pomoću funkcije generatrise, momenti nekih raspodela mogu jednostavnije izračunati.

Definicija 26. *Ako je X slučajna promenljiva, onda je njena* **funkcija generatrisa (izvodnica) momenata** *(na engleskom: moment generating function) $M_X(t)$ jednaka matematičkom očekivanju funkcije e^{tX}:*

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} dF(x),$$

za sve realne brojeve t za koje gornje matematičko očekivanje postoji, tj. $E(e^{tX}) < \infty$.

Kako je:

$$e^{tX} = 1 + \frac{tX}{1!} + \frac{t^2X^2}{2!} + \frac{t^3X^3}{3!} + \dots$$

sledi da je

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = 1 + \frac{tE(X)}{1!} + \frac{t^2E(X^2)}{2!} + \frac{t^3E(X^3)}{3!} + \dots = 1 + \frac{m_1}{1!}\,t + \frac{m_2}{2!}\,t^2 + \frac{m_3}{3!}\,t^3 + \dots$$

gde je m_r $r-$ti momenat slučajne promenljive X.

Odavde se dobija veza između $r-$tog momenta slučajne promenljive X i $r-$tog izvoda funkcije generatrise za $t = 0$:

$$m_r = M^r(0)$$

Ako je $Y = \psi(X)$, onda je funkcija generatrisa slučajne promenljive Y jednaka:

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t\psi(X)}) = M_{\psi(X)}(t)$$

Na primer, ako su slučajne promenljive X i Y linearno povezane $Y = a\,X + b$, onda se funkcija generatrisa slučajne promenljive Y može izraziti pomoću funkcije generatrise slučajne promenljive X:

$$M_Y(t) = M_{aX+b}(t) = E(e^{t(aX+b)}) = e^{bt}\,E(e^{atX}) = e^{bt}\,M_X(at)$$

Teorema 2.3.1. *Ako su X i Y slučajne promenljive koje imaju istu funkciju generatrisu $M(t)$, za sve vrednosti t za koje postoji $M(t)$, onda X i Y imaju istu funkciju raspodele.*

Teorema 2.3.2. *Ako su funkcije $f_n(x)$ i $M_n(t)$ gustina raspodele verovatnoća i funkcija generatrise slučajne promenljive X_n, i ako $\lim_{n\to\infty} M_n(t)$ postoji i jednak je $M(t)$, onda i $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ postoji. Ako je $M(t)$ funkcija generatrisa slučajne promenljive X, onda je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ njena gustina raspodele verovatnoća.*

Teorema 2.3.3. *Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive i ako su im generatrise respektivno jednake $M_X(t)$ i $M_Y(t)$, onda je funkcija generatrisa njihovog zbira $Z = X + Y$ jednaka:*

$$M_Z(t) = M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

Posledica 2.3.1. *Funkcija generatrisa konačnog zbira nezavisnih slučajnih promenljivih jednaka je proizvodu funkcija izvodnica tih promenljivih, tj. ako je $X = X_1 + X_2 + , \dots , + X_n$, onda je:*

$$M_X(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$$

U Teoremama 2.3.2, 2.3.3 i Posledici 2.3.1, formule važe samo za one "t" za koje postoje sve generatrise svih slučajnih promenljivih koje se spominju.

Primer 2.3.1. *Slučajna promenljiva X definisana je gustinom:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3}, & 1 \leq x < \infty \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

Matematičko očekivanje $E(X) = m_1$ postoji i jednako je

$$m_1 = E(X) = \int_1^\infty \frac{2}{x^2} dx = 2$$

Međutim, integral koji određuje drugi momenat

$$m_2 = \int_1^\infty \frac{2}{x} dx = (2 \ln x)\Big|_1^\infty$$

je neograničen, jer $\ln x$ teži beskonačnosti kad x teži beskonačnosti. Na taj način, m_2 ne postoji, a ne postoje ni svi momenti m_r reda većeg od dva ($r \geq 2$). Na isti način vidimo da i funkcija generatrisa

$$M_X(t) = \int_1^\infty e^{xt} \frac{2}{x^3} dx > \int_1^\infty \frac{x^3 t^3}{3!} \frac{2}{x^3} dx, \ t > 0$$

ne postoji.

Iz prethodnog primera vidimo da funkcija generatrisa nije određena za sve slučajne promenljive. Kako je funkcija e^{tX} neograničena zdesna kad X teži beskonačnosti, pa i matematičko očekivanje slučajne promenljive e^{tX} ne postoji uvek. Zbog toga se funkcija e^{tX} zamenjuje funkcijom koja je ograničena za sve vrednosti t i X. Takva je funkcija:

$$e^{itX} = \cos tX + i \sin tX$$

gde je i imaginarna jedinica.

DEFINICIJA 27. ***Karakterističnom funkcijom*** *$K_X(t)$ slučajne promenljive X nazivamo matematičko očekivanje slučajne promenljive e^{itX}:*

$$K_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x).$$

Daćemo osnovne osobine karakteristične funkcije i njenu vezu sa momentima slučajne promenljive X.

Teorema 2.3.4. *Karakteristična funkcija $K_X(t)$ proizvoljne slučajne promenljive ima sledeće osobine:*

1. *Karakteristična funkcija uvek postoji, tj. za svaku slučajnu promenljivu X postoji $E(e^{itX})$;*
2. *Raspodela je jedinstveno određena svojom karakterističnom funkcijom, tj. različitim karakterističnim funkijama odgovaraju različite raspodele i obrnuto;*
3. *$K_X(0) = 1$;*

4. $|K_X(t)| \leq 1$, *za proizvoljno* t;
5. $K_X(t) = \overline{K_X(-t)}$, *gde crta odozgo označava konjugovano-kompleksan broj;*
6. *ako je* $Y = aX + b$, *onda je* $K_Y(t) = e^{itb} K_X(at)$;
7. $K_X(t)$ *je uniformno neprekidna na celoj brojnoj osi.*

Teorema 2.3.5. *Ako slučajna promenljiva* X *ima momenat reda* n, *tada se on može naći pomoću* $n-$*tog izvoda karakteristične funkcije u nuli:*

$$E(X^n) = i^{-n} K^{(n)}(0).$$

Dokaz: Ako je f gustina raspodele slučajne promenljive X i ako postoji momenat reda n, tada je

$$K_X^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx = i^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} x^n f(x) dx. \tag{2.1}$$

Diferenciranje pod znakom integrala je dozvoljeno jer je izvodni integral uniformno konvergentan po Vajerštrasovom kriterijumu:

$$|e^{itx} x^n f(x)| = |x|^n f(x); \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x|^n f(x) dx = E(|x|^n) < \infty.$$

Iz (2.1) za $t = 0$ dobijamo da je

$$E(X^n) = K^{(n)}(0) = i^n E(X^n),$$

čime je tvrđenje dokazano.

□

Pomoću karakterističnih funkcija mogu se veoma jednostavno odrediti raspodele zbira nezavisnih slučajnih promenljivih. Ovde se, u stvari, koristi poznata osobina Furijeove transformacije da je slika konvolucije dve ili više funkcija jednaka proizvodu odgovarajućih slika.

Teorema 2.3.6. *Ako su* X *i* Y *nezavisne slučajne promenljive, tada je*

$$K_{X+Y}(t) = K_X(t) \cdot K_Y(t).$$

Dokaz: Neka su X i Y nezavisne slučajne promenljive. Tada su itX i itY takođe nezavisne slučajne promenljive, pa je

$$K_{X+Y}(t) = E(e^{it(X+Y)}) = E(e^{itX}) \cdot E(e^{itY}) = K_X(t) \cdot K_Y(t).$$

□

U Tabeli 2.1 dajemo nekoliko primera funkcije generatrise momenta ($M_X(t)$) i karaktetistične funkcije ($K_X(t)$).

Raspodela	$M_X(t)$	$K_X(t)$
Bernulijeva $P(X=1)=p$	$1-p+pe^t$	$1-p+pe^{it}$
Geometrijska $(1-p)^{k-1}p$	$\dfrac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$, $\forall t < -\ln(1-p)$	$\dfrac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$
Binomna $\mathcal{B}(n,p)$	$(1-p+pe^t)^n$	$(1-p+pe^{it})^n$
Poasonova $\mathcal{P}(\lambda)$	$e^{\lambda(e^t-1)}$	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
Uniformna (neprekidna) $\mathcal{U}(a,b)$	$\dfrac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$	$\dfrac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$
Uniformna (diskretna) $\mathcal{U}(a,b)$	$\dfrac{e^{at}-e^{(b+1)t}}{(b-a+1)(1-e^t)}$	$\dfrac{e^{ait}-e^{(b+1)it}}{(b-a+1)(1-e^{it})}$
Normalna $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	$e^{t\mu+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$	$e^{it\mu-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$
Hi-kvadrat χ_k^2	$(1-2t)^{-\frac{k}{2}}$	$(1-2it)^{-\frac{k}{2}}$
Gama $\Gamma(k,\theta)$	$(1-t\theta)^{-k}$, $\forall t < \dfrac{1}{\theta}$	$(1-it\theta)^{-k}$
Eksponencijalna $\mathcal{E}xp(\lambda)$	$(1-t\lambda^{-1})^{-1}$, $(t<\lambda)$	$(1-it\lambda^{-1})^{-1}$
Laplasova $\mathcal{L}(\mu,b)$	$\dfrac{e^{t\mu}}{1-b^2t^2}$	$\dfrac{e^{it\mu}}{1+b^2t^2}$
Negativna Binomna $\mathcal{NB}(r,p)$	$\dfrac{(1-p)^r}{(1-pe^t)^r}$	$\dfrac{(1-p)^r}{(1-pe^{it})^r}$
Košijeva $Cauchy(\mu,\theta)$	Ne postoji	$e^{it\mu-\theta\|t\|}$

Tabela 2.1: *Funkcija generatrisa momenata i karakteristična funkcija*

Glava 3

Problem momenta

Kao što smo već ranije rekli, ako je X takva da $E(|X|^k) < \infty$ za sve $k = 1, 2, ...$, onda je $m_k = E(X^k)$ momenat reda k i $\{m_k, k = 1, 2, ...\}$ je niz momenata od X, i od F. Primetimo, niz momenata $\{m_k, k = 1, 2, ...\}$ je diskretan i prebrojiv objekat. To je samo niz brojeva. Ako je X pozitivna slučajna promenljiva, tj. njene vrednosti su na $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, tada momenti od X rastu i teže ka beskonačnosti. (Izuzeci su slučajne promenljive sa vrednostima na bilo kom intervalu $[a, b]$, što je trivijalan slučaj.) Ako slučajna promenljiva X uzima vrednosti na $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, onda čak i red momenata raste i teži ka beskonačnosti. Na osnovu niza momenata $\{m_k, k = 1, 2, ...\}$, odnosno na osnovu diskretne informacije, možemo dobiti osnovna svojstva ili čak tačno odrediti nepoznatu raspodelu $F(x), x \in \mathbb{R}$. Primetimo, F je beskonačan i neprebrojiv objekat. Problem momenta se odnosi na pitanje da li je, ili nije, raspodela verovatnoća (ili, ekvivalentno, pridružena slučajna promenljiva), jedinstveno određena nizom momenata, od kojih bi svi trebali da postoje, odnosno da su konačni. Ako je F jedina funkcija raspodele sa nizom momenata $\{m_k\}$, onda kažemo da je F jedinstveno određena preko svojih momenata, ili F je **M-jedinstvena**. Obrnuto, F nije jedinstvena u smislu momenata, ili F je **M-nejedinstvena**. U drugom slučaju, tj. u slučaju nejedinstvenosti, mora postojati bar jedna funkcija raspodele, recimo G, tako da G ima iste momente kao F, međutim, $G \neq F$. Radovi [4] i [6] pokazuju netrivijalni rezultat da ako je F M-nejedinstvena, tada postoji beskonačno mnogo apsolutno neprekidnih raspodela i beskonačno mnogo diskretnih raspodela koje sve imaju iste momente kao i F. Primeri u Poglavlju 3.1 predstavljaju delimične ali dobre ilustracije ovog rezultata. Dobar razlog za proučavanje problema momenta dat je u [9]. Jednostavno rečeno, za dat niz slučajnih promenljivih $X_n \sim F_n$, $n = 1, 2, ...$, sa konačnim momentima $m_k^{(n)} = [X_n^k]$ za sve prirodne brojeve k, konvergencija momenata ($\lim_{n\to\infty} m_k^{(n)} = m_k$, $\forall k$) ne garantuje slabu konvergenciju raspodela $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($F_n \xrightarrow{s} F$ kad $n \to \infty$) osim ako je granična raspodela F M-jedinstvena. Prema tome, svojstvo M-(ne)jedinstvenosti je jedno od fundamentalih osobina koje moramo znati o određenoj raspodeli.

Problem momenta ima specifično ime u zavisnosti od nosača raspodele, $supp(F)$, ili opsega vrednosti slučajne promenljive:

$supp(F)$:

1. $[0, 1]$ Hausdorfov problem momenta (Hausdorff moment problem)

2. $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ Stiltjesov problem momenta (Stieltjes moment problem)

3. $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ Hamburgerov problem momenta (Hamburger moment problem)

Najvažnije za M-(ne)jedinstvenost je asimptotsko ponašanje repa. *Rep* raspodele verovatnoća neke slučajne promenljive određen je verovatnoćom događaja da slučajna promenljiva uzima vrednosti veće od nekog praga. Ta verovatnoća jako brzo opada ka nuli kada prag neograničeno raste, ako je raspodela normalna ili eksponencijalna, s obzirom da odgovarajuća gustina raspodele teži nuli eksponencijalnom brzinom. Gustina raspodela Paretovog tipa opadaju ka nuli pri neograničenom rastu argumenta polinomnom brzinom, dakle sporije, pa slučajne promenljive sa takvim raspodelama uzimaju velike vrednosti sa većim verovatnoćama. Kaže se da je rep, na primer, Paretove raspodele teži od repa normalne raspodele. Jedan od načina na koji se može odrediti da li raspodela ima težak (ili debeo) i lak (ili tanak) rep je na osnovu postojanja momenata određenog reda k raspodele koja se posmatra. Ako postoje svi k-ti momenti, za $k > 0$, određene raspodele, tada kažemo da raspodela ima lak rep. Raspodela ima težak rep ako posvoje svi k-ti momenti do određenog reda, a momenat većeg reda od tog ne postoji.

Takođe ćemo razmotriti i drugo svojstvo raspodele, tj. beskonačnu deljivost. Slučajna promenljiva X sa funkcijom raspodele F_X je *beskonačno deljiva* ako za sve prirodne brojeve n postoji n nezavisnih, jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih $X_1^{(1/n)}, ..., X_n^{(1/n)}$ tako da važi

$$X \stackrel{d}{=} X_1^{(1/n)} + ... + X_n^{(1/n)}.$$

Budući da su slučajne promenljive $X_1^{(1/n)}, ..., X_n^{(1/n)}$ nezavisne, osobinu beskonačne deljivosti možemo utvrditi ako važi

$$K_X(t) = (K_{X^{(1/n)}}(t))^n,$$

gde je K_X karakteristična funkcija slučajne promenljive X.

3.1 Prve ilustracije

Počinjemo sa normalnom $\mathcal{N}$ i lognormalnom raspodelom $\mathcal{L}og\mathcal{N}$, koje imaju široku primenu u stohastičkom finansijskom modeliranju. Posmatrajmo dve slučajne promenljive,

$$Z \sim \mathcal{N} \text{ i } S \sim \mathcal{L}og\mathcal{N}.$$

Zanima nas M-jedinstvenost od Z, S i njihove nelinearne transformacije.

Primer 3.1.1. *Kao što smo već rekli (Poglavlje 2.2), postoje dva koeficijenta, K_A i K_E, koeficijent asimetrije ili skjunis i koeficijent ekscesa ili kurtosis, uvedena za bilo koju slučajnu promenljivu $X \sim F$ sa konačna prva četiri momenta, definisana na sledeći način:*

$$K_A = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \quad K_E = \frac{\mu_4}{\sigma^4}.$$

Uloga ova dva koeficijenta pri opisu oblika raspodele je dobro poznata u statističkoj teoriji i praksi. Za slučajnu promenljivu $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$*, prva četiri momenta su 0,1,0,3. Dakle,* Z *ima skjunis* $K_A = 0$ *i kurtosis* $K_E = 3$.

Posmatrajmo sada diskretnu slučajnu promenljivu Y*:*

$$P(Y = \pm\sqrt{3}) = \frac{1}{6}, \qquad P(Y = 0) = \frac{2}{3}.$$

Lako je videti da su prva četiri momenta 0,1,0,3, odnosno, isti kao prva četiri momenta od slučajne promenljive Z*. (Čak štaviše, kod* Z, Y *se poklapaju svi momenti neparnog reda, oni su svi jednaki nuli.) Dakle,* Y *ima skjunis* $K_A = 0$ *i kurtosis* $K_E = 3$.
Imamo različite raspodele a iste koeficijente,$K_A = 0$ *i* $K_E = 3$.

Sledeća ilustracija uključuje apsolutno neprekidne raspodele. Posmatrajmo familiju dvostruke gama raspodele sa parametrom a*,* $\mathcal{DG}(a)$*,* $a > 0$*. Slučajna promenljiva* $Y \sim \mathcal{DG}(a)$ *ako je njena funkcija gustine jednaka*

$$f(x) = \frac{1}{2\,\Gamma(a)}\,|x|^{a-1}\,e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Za određenu vrednost a*,* $a = \frac{1}{2}(\sqrt{13}+1)$*, nalazimo da je* $K_A = 0$ *i* $K_E = 3$.

Dakle, postoji beskonačno mnogo raspodela, neprekidnih i diskretnih, sve različite od normalne, i sve imaju isti skjunis 0 i kurtosis 3 kao $\mathcal{N}(0,1)$.

Nakon gore navedenog možemo pomisliti da ćemo biti u boljem položaju ako znamo sve momente, što nam omogućava da jedinstveno odredimo raspodelu. U opštem slučaju ovo ne važi, kao što je prikazano u sledećem primeru koji uključuje lognormalnu raspodelu.

Primer 3.1.2. *Funkcija gustine* f *slučajne promenljive* $X \sim \mathcal{L}og\mathcal{N}(0,1)$ *je*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\dfrac{1}{x}\,\exp\left[-\dfrac{1}{2}(\ln x)^2\right], & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Može se pokazati da su za sve pozitivne cele brojeve k *(koji predstavlja red momenta), momenti od* X *konačni i*

$$m_k = E[X^k] = e^{k^2/2}, \qquad k = 1, 2, ...$$

Zanimljivo je da, i k*-ti red može biti bilo koji negativni celi broj, i imamo odnos* $E[X^k] = E[X^{-k}]$*. Ovo proizilazi iz činjenice da je* X^{-1} *dobro definisana slučajna promenljiva sa istom* $\mathcal{L}og\mathcal{N}$ *raspodelom kao* X.

Definišimo sada dva beskonačna skupa slučajnih promenljivih, koja se zovu Stiltjesove klase (Stieltjes classes) o kojima ćemo više govoriti u Poglavlju 3.3 :

$$S_c = \{X_\epsilon,\, \epsilon \in [-1,1]\,\}, \quad X_\epsilon \sim f_\epsilon,\; f_\epsilon(x) = f(x)[1+\epsilon\sin(2\pi\ln x)],\; x \in \mathbb{R};$$
$$S_d = \{Y_a,\, a > 0\}, \quad P(Y_a = ae^n) = \frac{a^{-n}e^{-n^2/2}}{A}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Ovde je A normalizirajuća konstanta. U oznakama, S_c i S_d, S označava Stiltjesovu klasu, c neprekidnu, i d diskretnu.

Ako je $X_0 = X \sim \mathcal{L}og\mathcal{N}(0,1)$, za svako $\epsilon \in [-1,1]$ i svako $a > 0$, važe sledeće relacije:

$$E[X_\epsilon^k] = E[Y_a^k] = E[X^k] = e^{k^2/2}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Zaključak: Lognormalna raspodela je M-nejedinstvena! Jasno se vidi da postoji "mnogo" drugih raspodela, sve sa istim momentima. Primetimo, familija S_c se sastoji od apsolutno neprekidnih slučajnih promenljivih, dok S_d sadrži diskretne slučajne promenljive. Takođe, možemo uzeti proizvoljnu konveksnu kombinaciju ove dve raspodele.

Gore navedene eksplicitne konstrukcije predstavljaju dva različita načina da se pokaže da je lognormalna raspodela M-nejedinstvena. Postoji još najmanje četiri druge metode.

Drugi neposredni zaključak je da cena akcije u Blek-Šolsovom modelu, koja ima lognormalnu raspodelu je M-nejedinstvena za sve $t \in (0,T]$.

Druga dva važna svojstva su da je $\mathcal{L}og\mathcal{N}$ unimodalna i beskonačno deljiva. Lako je videti da u Stiltjesovoj klasi S_c, za svako $\epsilon \neq 0$, f_ϵ ima beskonačno mnogo modova. Poznato je da za $\epsilon = 1$, X_1 nije beskonačno deljiva. Za svako $\epsilon \in (-1,1)$ i $\epsilon \neq 0$, f_ϵ nije beskonačno deljiva.

Vredi napomenuti da je od značaja i klasa $LSN(\lambda)$, koja se zove logaritamski-koso normalne raspodele (logarithmic skew-normal distributions). Ovde λ može biti bilo koji realan broj. Kažemo da $X \sim LSN(\lambda)$ ako je njena funkcija gustine jednaka

$$f_\lambda(x) = \varphi(x)\,\Phi(\lambda x) \;\; x \in \mathbb{R},$$

gde su φ i Φ standardizovane normalne funkcije gustine i raspodele.
Ako je $\lambda = 0$, dobijamo običnu $\mathcal{L}og\mathcal{N}$ raspodelu. Klasa $LSN(\lambda)$ koja se koristi u stohastičkom modeliranju, šira je od $\mathcal{L}og\mathcal{N}$.
Svaka slučajna promenljiva $X_\lambda \sim LSN(\lambda)$ je M-nejedinstvena.

Primer 3.1.3. *Posmatrajmo slučajnu promenljivu X sa sledećom gustinom:*

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot \exp(-\alpha x^\lambda), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Ovde je $\alpha > 0$, $0 < \lambda < \dfrac{1}{2}$ i c je normalizirajuća konstanta.
Za $\epsilon \in (-1,1)$ i $\beta = \alpha\tan\lambda\pi$ definišimo opet funkciju f_ϵ :

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} c \cdot \exp(-\alpha x^\lambda)(1+\epsilon\sin(\beta x^\lambda)), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Očigledno $f_\epsilon \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$. *Sledeće što ćemo koristiti je relacija*

$$\int_0^\infty x^n \exp(-\alpha x^\lambda) \sin(\beta x^\lambda) dx = 0. \tag{3.2}$$

Sada ćemo utvrditi validnost formule (3.2). Ako je $p > 0$ *i* q *je kompleksan broj sa* $\Re_q > 0$, *koristimo dobro poznat identitet*

$$\int_0^\infty t^{p-1} e^{-qt} dt = \Gamma(p)/q^p.$$

Označavanjem $p = (n+1)/\lambda$, $q = a + ib$, $t = x^\lambda$, *nalazimo*

$$\int_0^\infty x^{\lambda[(n+1)/\lambda - 1]} \exp[-(a+ib)x^\lambda] \lambda x^{\lambda-1} dx = \lambda \int_0^\infty x^n \exp[-(a+ib)x^\lambda] dx$$
$$= \lambda \int_0^\infty x^n \exp(-ax^n) \cos(bx^\lambda) dx - i\lambda \int_0^\infty x^n \exp(-ax^\lambda) \sin(bx^\lambda) dx =$$
$$= \Gamma((n+1)/\lambda)[a^{(n+1)/\lambda}(1 + i \tan \lambda\pi)^{(n+1)/\lambda}].$$

Poslednji količnik je realan broj zato što je $\sin[\pi(n+1)] = 0$ *i*

$$(1 + i \tan \lambda\pi)^{(n+1)/\lambda} = (\cos \lambda\pi)^{-(n+1)/\lambda} (\cos \lambda\pi + i \sin \lambda\pi)^{(n+1)/\lambda}$$
$$= (\cos \lambda\pi)^{-(n+1)/\lambda} e^{i\pi(n+1)} = (\cos \lambda\pi)^{-(n+1)/\lambda} \cos \pi(n+1).$$

Time je (3.2) dokazano. Uzimajući $n = 0$ *vidimo da je* f_ϵ *funkcija gustine.*
Označimo sa X_ϵ *slučajnu promenljivu čija je gustina* f_ϵ. *Veza između* f_ϵ *i* f, *zajedno sa (3.2), implicira da*

$$E(X_\epsilon^n) = E(X^n), \ \ za\, svako\; n = 1, 2, ...$$

Na taj način smo konstruisali beskonačno mnogo slučajnih promenljivih X_ϵ *sa istim momentima kao od* X, *iako su njihove gustine* f_ϵ *i* f *različite (*$f_\epsilon = f$ *samo ako je* $\epsilon = 0$*). Dakle, u ovom slučaju je problem momenta nije jedinstveno rešiv.*

3.2 Uslovi za jedinstvenost raspodele preko njenih momenata

U kompaktnoj formi, navodimo dole esencijalne uslove za jedinstvenost ili nejedinstvenost raspodele u pogledu njenih momenata. Istorijski, ovi uslovi su se pojavili u različito vreme i u različitoj formi.

3.2.1 Kramerov uslov

Počinjemo sa klasičnim rezultatom koji se pojavio u prvim decenijama 20. veka i koji je opisao H. Kramer sredinom tridesetih.

Neka je X slučajna promenljiva sa vrednostima na $\mathbb{R}$, tako da njena funkcija generatrisa momenata postoji, tj. za neko $t_0 > 0$

$$M(t) = E(e^{tX}) < \infty \text{ za sve } t \in (-t_0, t_0) \quad \textbf{(Kramerov uslov)}$$

U tom slučaju, raspodela od X ima lake repove, ili, kažemo da X ima eksponencijalni momenat.

Teorema 3.2.1. *Neka je Kramerov uslov zadovoljen za slučajnu promenljivu X. Tada su svi momenti (čiji je red pozitivan ceo broj) od X konačni i X je M-jedinstvena.*

Laka posledica je da svaka slučajna promenljiva sa vrednostima na ograničenom intervalu je M-jedinstvena. Ovo je Hausdorfov slučaj.

Ako funkcija generatrisa momenata ne postoji, tj. $M(t) = E(e^{tx}) = \infty$ za sve $t \neq 0$, onda raspodela od X ima teške repove. Raspodele kao što su Pareto i Studentova, koje se često koriste u finansijskom modeliranju, ne samo da nemaju generatrisu momenata, već je samo ograničen broj njihovih momenata konačan. Ako ipak, raspodele sa teškim repom imaju sve konačne momente, onda je opravdano pitati o njihovoj jedinstvenosti u smislu momenta. Postoje dve mogućnosti, ili je X M-jedinstvena, ili je M-nejedinstvena.

Napomenimo još da je Kramerov uslov dovoljan uslov ali ne i potreban uslov. Postoje raspodele sa teškim repom, tj. one koje ne zadovoljavaju Kramerov uslov, koje su M-jedinstvene. Kasnije ćemo ovo ilustrovati.

3.2.2 Karlemanov uslov

Posmatrajmo slučajnu promenljivu X sa funkcijom raspodele F i nizom momenata $\{m_k, k \in \mathbb{N}\}$. Ako je opseg vrednosti od X, tj. $supp(F)$ ograničen, onda je X M-jedinstvena preko Kramerovog uslova. Pretpostavimo da $supp(F)$ nije ograničen. U Hamburgerovom slučaju $supp(F) = \mathbb{R}$ ili je njegov podskup, dok je u Stiltjesovom slučaju $supp(F) = \mathbb{R}_+$ ili je njegov podskup. Koristimo momente $\{m_k\}$ da bismo definisali beskonačne redove, koje se obično nazivaju Karlemanovi redovi:

$$C = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(m_{2k})^{1/2k}} & \textit{(Hamburgerov slučaj)} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(m_k)^{1/2k}} & \textit{(Stiltjesov slučaj)} \end{cases}$$

Teorema 3.2.2. *Uslov $C = \infty$, zove se* **Karlemanov uslov***, i implicira da je X, i takođe F, M-jedinstvena.*

Ovaj rezultat, dobijen od strane T. J. Karlemana 1926. godine, postao je veoma koristan alat, "lako" se primenjuje, i kad je $C = \infty$, zaključujemo da je raspodela M-jedinstvena. Karlemanov uslov eksplicitno koristi sve momente. Budući da je važna divergencija Karlemanovih redova, potrebno je poznavanje asimptotskog ponašanja momenata m_k za veliko k. Ponekad ovi mali "trikovi" pomažu da se uspostavi svojstvo jedinstvenosti.
Napomenimo još da je Karlemanov uslov jedini dovoljan uslov za jedinstvenost. Ako je raspodela M-nejedinstvena, onda je neophodno da je $C < \infty$. Postoje M-jedinstvene raspodele sa Karlemanovim redovima $C < \infty$.

Na dva različita načina dokazaćemo da Karlemanov uslov nije potreban da bi problem momenta bio jedinstveno rešiv.

I) Neka je F_H simetrična raspodela na $(-\infty, \infty)$ i F_S raspodela na $[0, \infty)$. (Indeksi H i S odgovaraju Hamburgerovom i Stiltjesovom slučaju.) Prema relacijama

$$F_H(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}[1 + F_S(x^2)], & x \geq 0 \\ \\ \dfrac{1}{2}[1 - F_S(x^2)], & x < 0 \end{cases}$$

možemo da definišemo $''1-1''$ korespondenciju između skupa simetričnih raspodela na $(-\infty, \infty)$ i skupa raspodela na $[0, \infty)$. Jasno je da F_H ima momente $\{\tilde{m_k}\}$ svih redova akko F_S ima momente $\{m_k\}$ svih redova. U ovom slučaju

$$\tilde{m_{2k}} = m_k, \;\; \tilde{m}_{2k+1} = 0, \;\; k = 0, 1, 2, ...$$

Tada dolazimo do zaključka da je Hamburgerov problem za $\{\tilde{m_k}\}$ jedinstveno rešiv akko je odgovarajući Stiltjesov problem jedinstveno rešiv. Štaviše, Karlemanov uslov $\sum (m_{2k})^{-1/(2k)} = \infty$ za jedinstvenost Hamburgerovog slučaja postaje $\sum (m_k)^{-1/(2k)} = \infty$ u Stiltjesovom slučaju. Sada ćemo formulisati sledeći rezultat (vidi [14]): ako niz momenata $\{m_k\}$ odgovara nekom Stiltjesovom problemu koje jeste M-jedinstveno rešiv i čije je rešenje neprekidno u koordinatnom početku, tada niz $\{m_k\}$ takođe odgovara nekom Hamburgerovom problemu koji je takođe M-jedinstveno rešiv.
Posmatrajno slučajnu promenljivu X sa gustinom f datom

$$f(x) = \begin{cases} [1/\Gamma(1/\beta)] \exp(-x^\beta), & x > 0 \\ \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

gde je $0 < \beta < 1$. Može se pokazati da $m_k = E(X^k) = \Gamma((k+1)/\beta)/\Gamma(1/\beta)$, $k = 0, 1, 2, ...$, tako da je $m_k^{1/n} \sim Ck^{1/\beta}$ za neku konstantu C. Tada je $\sum (m_k)^{-1/(2k)} = \infty$ za $\dfrac{1}{2} \leq \beta < 1$, i preko Karlemanovog uslova (za Stiltjesov slučaj), Stiltjesov problem za ove momente ima jedinstveno rešenje za $\dfrac{1}{2} \leq \beta < 1$. Pošto raspodela sa gustinom f nema tačku prekida, iz gornjeg rezultata zaključujemo da je Hamburgerov problem koji odgovara momentima $m_k = \Gamma((k+1)/\beta)/\Gamma(1/\beta)$, $k = 0, 1, 2, ...$, $\dfrac{1}{2} \leq \beta < 1$ takođe jedinstven rešiv. Lako je proveriti da $\sum(m_{2k})^{-1/(2k)} < \infty$ za $0 < \beta < 1$. Dakle, Karlemanov uslov nije potreban da problem momenta bude jedinstveno rešiv (na $(-\infty, \infty)$).

II) Sada ćemo koristiti sledeći zanimljiv i intuitivno neočekivan rezultat (vidi [14]): neka momenti $\{1, m_1, m_2, ...\}$ odgovaraju Stiltjesovom problemu koji ima jedinstveno rešenje. Nakon što dodamo verovatnoću skoncentrisanu u nuli i nakon što se raspodela renormalizuje, moguće je da će novi niz momenata $\{1, m_1(1+\epsilon)^{-1}, m_2(1+\epsilon)^{-1}, ...\}$ odgovarati Stiltjesovom problemu koji nije jedinstveno rešiv. Neka onda $\{1, m_1, m_2, ...\}$ i $\{1, m_1(1+\epsilon)^{-1}, m_2(1+\epsilon)^{-1}, ...\}$, $0 < \epsilon < 1$ budu nizovi momenata odgovarajući respektivno, jedinstveno rešivom Stiltjesovom problemu i Stiltjesovom problemu koji nema jedinstveno rešenje. Pretpostavimo da je Karlemanov uslov potreban za jedinstvenost. Tada bi trebalo da imamo $\sum(m_{2k})^{-1/(2k)} = \infty$, što je nemoguće jer $\sum(m_{2k})^{-1/(2k)}(1+\epsilon)^{1/(2k)} < \infty$.

Takođe nam je potreban rezultat koji je obrnut Tvrđenju 3.2.2. Za detalje, vidi [36].

Teorema 3.2.3. *Pretpostavimo da Karlemanov uslov nije zadovoljen: $C < \infty$. Pretpostavimo da je F apsolutno neprekidna i da postoji $x_0 > 0$ tako da je funkcija gustine $f = F'$ pozitivna za $x > x_0$, i funkcija $-\ln f(e^x)$ je konveksna za $y > y_0$, gde je $y_0 = \ln x_0$. Ovaj uslov, zajedno sa $C < \infty$ implicira da je X M-nejedinstvena.*

3.2.3 Kreinov uslov

Pretpostavimo sada da je X apsolutno neprekidna slučajna promenljiva sa funkcijom raspodele G, gustinom $g = G'$, i da su momenti proizvoljnog reda konačni. Druga pretpostavka je da X uzima vrednosti na neograničenom domenu, na kojem je $g(x) > 0$. U Hamburgerovom slučaju domen je $\mathbb{R}$. U Stiltjesovom slučaju domen je $\mathbb{R}_+$ ako je g ograničena na $\mathbb{R}_+$. Međutim, ako je g neograničena u okolini nule, onda uzimamo (x_0, ∞), za neko $x_0 > 0$, da bi izbegli singularnost od g. Definišimo dalje normalizovan logaritamski integral, koji se zove i Kreinov integral:

$$K[g] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\ln g(y)}{1+y^2}\, dy \ \textit{(Hamburgerov slučaj)} \\ \int_{x_0}^{\infty} \frac{-\ln g(y^2)}{1+y^2}\, dy \ \textit{(Stiltjesov slučaj)} \end{cases}$$

Teorema 3.2.4. *Uslov $K[g] < \infty$, koji se zove* **Kreinov uslov**, *implicira da je X M-nejedinstvena.*

Kreinov uslov je jedini dovoljan uslov za nejedinstvenost raspodele. Ako je raspodela M-jedinstvena, i njena funkcija gustine je pozitivna, onda je nužno da je Kreinov integral divergentan. Teorema 3.2.4 u Hamburgerovom slučaju je jedan od poznatih rezultata dobijenih od M. G. Kreina 1944. godine. Oba slučaja, Hamburger i Stiltjes, su proučavani i prošireni u radovima N. I. Ahizera, H. Pedersena, E. Slada, G. D. Lina i A. G. Pejksa.

Dokazaćemo kroz dva primera da Kreinov uslov nije potreban da problem momenta nema jedinstveno rešenje.

I)Neka je X slučajna promenljiva, $X \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$, i $\delta > 0$. Tada je gustina slučajne promenljive $|X|^\delta$ jednaka

$$f_\delta(x) = \begin{cases} (2/\delta\sqrt{\pi})x^{1/\delta-1}\exp(-x^{2/\delta}), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

i lako se vidi da svi momenti $E[(|X|^\delta)^k]$, $k = 1, 2, ...$ postoje. Berg je 1988. godine pokazao da je raspodela za $|X|^\delta$ M-jedinstvena za $\delta \leq 4$ i M-nejedinstvena za $\delta > 4$ (o čemu ćemo više u Poglavlju 3.5). Međutim, za gustinu f_δ dobijamo da je $\int_0^\infty [\log f_\delta(x)/(\sqrt{x}(1+x))]dx = -\infty$, tj. Kreinov uslov nije zadovoljen, dakle, on nije potreban uslov da problem momenta nema jedinstveno rešenje.

II) Uzmimo funkciju

$$h(x) = \begin{cases} \exp(-x^\gamma), & x > 0 \\ \exp(x), & x \leq 0 \end{cases}$$

Ovde $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ i neka je c konstanta tako da $g_\gamma(x) = c_\gamma h(x)$, $x \in \mathbb{R}$ je funkcija gustine. Ako je Y slučajna promenljiva sa gustinom g_γ, tada svi momenti $E[Y^k]$, $k = 1, 2, ...$ postoje. Štaviše, $\int_{-\infty}^\infty [\log g_\gamma(x)/(1+x^2)]dx = -\infty$. Dakle, Kreinov uslov nije zadovoljen, ali raspodela od Y je M-nejedinstvena kao što sledi iz Primera 3.1.3.

Takođe nam je potreban i rezultat koji je obrnut Teoremi 3.2.4. Detaljnije se može naći u [23].

Teorema 3.2.5. *Pretpostavimo da je g funkcija gustine slučajne promenljive X, i da je Kreinov integral divergentan: $K[g] = \infty$. U Hamburgerovom slučaju zahtevamo da g bude simetrična. Neka u oba slučaja, Hamburgerovom i Stiltjesovom, bude zadovoljen* **Linov uslov**: *za neko $x_0 \geq 0$, g je diferencijabilana za $x > x_0$ i količnik*

$$L(x) := -\frac{xg'(x)}{g(x)}$$

strogo monotono raste i teži ka beskonačnosti kad $x \to \infty$. Uslov $K[g] = \infty$ i Linov uslov, zajedno impliciraju da je X M-jedinstvena.

Dokaz: Pišemo

$$(x^{2n}g(x))' = x^{2n-1}g(x)[2n + xg'(x)/g(x)], \; za \, x > 0. \tag{3.3}$$

Pod pretpostavkom $-xg'(x)/g(x) \nearrow \infty$ kad $x_0 < x \to \infty$, postoji pozitivan ceo broj m i niz realnih brojeva $x_0 \leq x_m < x_{m+1} < ... < x_n \nearrow \infty$ tako da

$$x_n^{2n}g(x_n) = \sup_{x \geq x_0} x^{2n}g(x), \;\; za \; n \geq m.$$

Sada tražimo gornje ograničenje za momente:

$$m_{2n} \equiv 2\int_0^\infty x^{2n} g(x)dx = 2\Big[\int_0^{x_m} x^{2n} g(x)dx + \int_{x_m}^\infty \frac{x^{2n+2} g(x)}{x^2}dx\Big] \le Cx_{n+1}^{2n+2}, \;\; za\ n \ge m,$$

gde je C pozitivna konstanta. Ovo znači da ako $\sum_{n=m}^\infty x_n^{-1} = \infty$, onda $\sum_{n=m}^\infty m_{2n}^{-1/(2n)} = \infty$ i stoga je F M-jedinstvena. Da bismo našli donje ograničenje za $\sum_{n=m}^\infty x_n^{-1}$, primenjujemo parcijalnu integraciju i dobijamo da za $n > m$

$$-\int_{x_m}^{x_n} \frac{1}{x^2}\log g(x)dx - \frac{1}{x_n}\log g(x_n) + \frac{1}{x_m}\log g(x_m)$$

$$= \int_{x_m}^{x_n} \frac{1}{x^2}\Big(-\frac{xg'(x)}{g(x)}dx\Big) \le \sum_{p=m+1}^{n}\int_{x_{p-1}}^{x_p}\frac{2p}{x^2}dx$$

$$= \sum_{p=m+1}^{n} 2p\Big(\frac{1}{x_{p-1}} - \frac{1}{x_p}\Big) \le (2m+2)\sum_{p=m}^{n}\frac{1}{x_p},$$

u kojoj prva nejednakost, zbog činjenice da se $x^{2p}g(x)$ povećava za $x \le x_p$, čini veličinu u (3.3) (sa n zamenjenim sa p) nenegativnom. Puštajući $n \to \infty$, zajedno sa uslovom $K[g] = \infty$, dobijamo da je $\sum_{p=m}^\infty x_p^{-1} = \infty$. Ovim je dokaz kompletan.

□

3.2.4 Hardijev uslov

Sledeći uslov koji se primenjuje na pozitivne slučajne promenljive baziran je na osnovu dva stara rada od G. H. Hardija objavljena 1917/1918 god.

Lema: Za svaku slučajnu promenljivu $X \ge 1$ i svaku fiksiranu konstantu $c > 0$, funkcija $g(\delta) := E[\exp(cX^\delta)]$ je neopadajuća za $\delta > 0$.

Dokaz: Uvodimo broj $\delta_0 = \sup\{\delta : E[\exp(cX^\delta)] < \infty\}$, kojeg ćemo zvati Kramerov indeks od X. Tada je $E[\exp(cX^\delta)] = \infty$ za svako $\delta > \delta_0$, dok je $E[\exp(cX^\delta)] < \infty$ za $\delta \in [0, \delta_0]$. Sada, tvrdnja iz Leme lako sledi iz karakteristika stepene i eksponencijalne funkcije.

□

Teorema 3.2.6. *Neka je X nenegativna slučajna promenljiva, $X \sim F$, gde je F proizvoljna funkcija raspodele. Pretpostavimo da $\sqrt{X}$ ima funkciju generatrisu momenta (ekvivalento, važi Kramerov uslov za $\sqrt{X}$), to jest: za neko $c > 0$,*

$$E(e^{c\sqrt{X}}) < \infty \qquad \textbf{(Hardijev uslov)}$$

Tada su svi momenti od X konačni, tj. $m_k = E(X^k) < \infty, k = 1, 2, ...,$ i štaviše, F je jedina funkcija raspodele sa nizom momenata $\{m_k, k = 1, 2, ...\}$, tj. F je M-jedinstvena.

Napomena 1: Uslov važi za $\sqrt{X}$, tj. zahtevamo da važi Kramerov uslov za $\sqrt{X}$. Ovo implicira da je $\sqrt{X}$ M-jedinstvena. Međutim, zaključak u teoremi je o samom X.

Dokaz: Predstavićemo tri glavna koraka dokaza Hardijevog uslova. Ne dajemo tehničke detalje.
Hardijev uslov je uveden za proizvoljnu funkciju raspodele F. Koncetrisaćemo se na apsolutno neprekidan slučaj. Ako je $f(x) = F'(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, funkcija gustine slučajne promenljive $X \sim F$, pretpostavljamo da za neko $c > 0$

$$\int_0^\infty e^{c\sqrt{X}} f(x)dx < \infty. \tag{3.4}$$

Naš cilj je da odredimo funkciju $f(x)$, $x > 0$, koja zadovoljava relaciju

$$\int_0^\infty x^k f(x)dx = m_k, \quad k = 1, 2, ... \tag{3.5}$$

Podsetimo se da je $\{m_k, k = 1, 2, ...\}$ niz momenata od X, i takođe od F.
Korak 1: Uvodimo funkciju $\Phi(z)$ za kompleksno z:

$$\begin{aligned}\Phi(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k m_k z^{2k}}{(2k)!} = \int_0^\infty f(x) \frac{(-1)^k x^k z^{2k}}{(2k)!} dx \\ &= \int_0^\infty f(x) \cos(z\sqrt{x}) dx = 2 \int_0^\infty u f(u^2) \cos(zu) du.\end{aligned}$$

Integrabilnost funkcije $f(x)e^{c\sqrt{x}}$ garantuje da je funkcija $\Phi(z)$ dobro definisana za z sa $|z| < c$. Takođe, $\Phi(z)$ je čak i funkcija koja je analitička u traci $\{z = x+iy, \ -c < y < c\}$ sa $\Phi(z) \to 0$ kad $x \to \pm\infty$.
Korak 2: Konvergencija integrala $\int_0^\infty f(x) \cosh(|z|\sqrt{x})dx$ nam dozvoljava da obrnemo jednakost $\Phi(z) = 2\int_0^\infty u f(u^2) \cos(zu)du$, tako dobijamo

$$u f(u^2) = \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^\lambda (1 - \frac{z}{\lambda}) \Phi(z) \cos(zu) dz,$$

i ovaj odnos važi za skoro sve $u > 0$. Ovo daje vrednost $f(x)$ za skoro svako $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x}} \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^\lambda (1 - \frac{z}{\lambda}) \Phi(z) \cos(z\sqrt{x}) dz \tag{3.6}$$

Osobina od $\Phi(z)$ i primenljivost inverzije podrazumeva da je $f(x)$, $x > 0$, funkcija gustine koja je jedinstvena do vrednosti na skupu mere nula.
Korak 3: Poslednji korak je da pokažemo da je funkcija $f(x)$, $x > 0$, u formuli (3.6) rešenje našeg problema, tj. da su sve relacije (3.5) zaista zadovoljene. Ovo se može postići daljom inverzijom i upotrebom Parsevalove formule, vidi [54], Poglavlje 11.9.

□

Napomena 2: Gore navedeni argumenti dati su u apsolutno neprekidnom slučaju kada se sve izražava u smislu gustine. Hardi je pomenuo da je njegov rezultat tačan za proizvoljnu funkciju raspodele F na $\mathbb{R}_+$. U ovom slučaju, Hardijev uslov je napisan kao $\int_0^\infty e^{c\sqrt{x}} dF(x) < \infty$ za neko $c > 0$.

Posledica 3.2.1. *Ako slučajna promenljiva* $X \geq 0$ *zadovoljava Kramerov uslov* $E[e^{cX}] < \infty$ *za neko* $c > 0$, *onda je* X^2 *M-jedinstvena.*

Posledica 3.2.2. *Ako je* $X \geq 0$ *slučajna promenljiva sa Kramerovim indeksom jednakim* δ_0, *onda je transformisana slučajna promenljiva* $X^{2\delta}$ *M-jedinstvena za svako* $\delta \in (0, \delta_0)$.

Primer 3.2.1. *Neka je* $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. *Kramerov uslov je zadovoljen, pa je* X, *ili* $N(0, 1)$, *M-jedinstvena. Ovo implicira da polu-normalna raspodela, od* $|X|$, *zadovoljava Kramerov uslov, dakle, ona je M-jedinstvena. Preko Hardijevog rezultata,* X^2 *je M-jedinstvena, dakle* $X^2 = \chi_1^2$ *ima funkciju generatrisu momenata, odnosno važi Kramerov uslov. Primenom Hardijevog rezultata opet dobijamo da je* X^4 *M-jedinstvena, o čemu ćemo više govoriti u Poglavlju 3.5.*

Teorema 3.2.7. *Konstanta* $\frac{1}{2}$ *(kvadratni koren) u Hardijevom uslovu je najbolja moguća. Drugim rečima, za svako* $\rho \in (0, \frac{1}{2})$ *postoji slučajna promenljiva* $X \geq 0$, *tako da* $E[e^{cX^\rho}] < \infty$, *za neko* $c > 0$. *Međutim,* X *je M-nejedinstvena.*

3.3 Eksplicitne Stiltjesove klase

Način na koji smo ilustrovali u Poglavlju 3.1 nejedinstvenost lognormalne raspodele daje jasnu ideju o terminu *Stiltjesova klasa*. Posmatrajmo skupove S_c i S_d. Svaki od njih je parametrizovan beskonačnom falmilijom različitih slučajnih promenljivih. Dakle, različite raspodele sve imaju iste momente kao jedna početna raspodela. Ideja za konstruisanje takve familije potiče od T. J. Stiltjesa 1894.god., koji je prvi opisao eksplicitno raspodele na pozitivnom delu x ose koje su M-nejedinstvene.

Kada kažemo eksplicitna Stiltjesova klasa, to je ekvivalentno sa iskazom da su svi članovi u klasi M-nejedinstveni. Međutim, konstruisati Stiltjesovu klasu je delikatan analitički problem, čije bi rešenje potvrdilo tvrdnju da se bavimo raspodelama koje su M-nejedinstvene.

Počinjemo sa dve funkcije, f i h, i pretpostavimo da one zadovoljavaju sledeće uslove:

(a) $f = (f(x), x \in \mathbb{R})$ je funkcija gustine, $f = F'$, gde je F funkcija raspodele neke slučajne promenljive X;

(b) $h = (h(x), x \in \mathbb{R})$ je neprekidna funkcija, nije identički jednaka nuli, i zadovoljava uslov $-1 \leq h(x) \leq 1$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Ako nam je na početku data funkcija $\tilde{h}$, koja je neprekidna i ograničena, onda uzimamo $h(x) = \tilde{h}(x)/c$, gde je $c = \sup |h(x)|$ za $x \in \mathbb{R}$, pod pretpostavkom da je $c > 0$.

Posmatramo Hilbertov prostor L_f^2 svih realnih funkcija koje su kvadratno integrabilne na $\mathbb{R}$ u odnosu na Lebegovu meru i sa težinskom funkcijom f. Skalarni proizvod $\langle a, b \rangle_f$ za a, $b \in L_f^2$ je definisan na uobičajan način:

$$\langle a, b \rangle_f = \int a(x) b(x) f(x) dx.$$

Jasno, funkcija h je u L^2_f. Uvodimo sledeće dve pretpostavke:

Pretpostavka 1: Ako je $Q(x)$, $x \in \mathbb{R}$ bilo koji polinom sa realnim koeficijentima i bilo kog pozitivnog celog stepena, onda $Q \in L^2_f$.

Pretpostavka 2: Funkcija gustine f i funkcija h su takve da u prostoru L^2_f svaki polinom Q je ortogonalan na h:

$$\langle Q, h\rangle_f \;=\; \int Q(x)h(x)f(x)dx \;=\; 0.$$

Sada možemo da definišemo klasu funkcija koja se označava sa S i naziva **Stiltjesova klasa**:

$$S = \{f_\epsilon(x) = f(x)[1 + \epsilon\, h(x)];\, x \in \mathbb{R},\, \epsilon \in [-1, 1]\}$$

Funkcija h igra ulogu "male" perturbacije gustine f. Jasno je da proizvod $h(x)f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, ima "nestabilne momente" u smislu da:

$$\int x^k h(x)f(x)dx \;=\; 0 \;\; \text{za sve } k = 0, 1, 2, ...$$

Teorema 3.3.1. *Stiltjesova klasa S ima sledeće osobine:*

(i) Za svako $\epsilon \in [-1, 1]$, f_ϵ je funkcija gustine. Neka se f_ϵ odnosi na slučajnu promenljivu X_ϵ čija je funkcija raspodele F_ϵ; pa je $f_0 = f$, $X_0 = X$, $F_0 = F$. Tada su svi momenti od X_ϵ čiji je red pozitivan ceo broj konačni.

(ii) Za različito ϵ, raspodele F_ϵ su različite.

(iii) Sve slučajne promenljive $\{X_\epsilon,\, \epsilon \in [-1, 1]\}$, ili ekvivalentno, sve raspodele $\{F_\epsilon,\, \epsilon \in [-1, 1]\}$ imaju iste momente kao one od X, za svaki red k, gde je k pozitivan ceo broj

$$E[X_\epsilon^k] = E[X^k], \quad \textit{za sve } k = 1, 2, ... \textit{ i svako } \epsilon \in [-1, 1].$$

Otuda, raspodela F sa gustinom f, kao i svaka raspodela F_ϵ, $\epsilon \in [-1, 1]$, je M-nejedinstvena.

Dokaz: Za $k = 0$, $Q(x) = 1$, gde $x \in \mathbb{R}$ i koristimo činjenicu da je $\langle 1, h\rangle_f \;=\; 0$. Ovo implicira da je f_ϵ funkcija gustine za svako $\epsilon \in [-1, 1]$. Tada možemo lako zaključiti da su svi momenti od X_ϵ konačni. Jasno, $F_{\epsilon_1} \neq F_{\epsilon_2}$, za $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$. Promenljive X i X_ϵ imaju iste momente, što proizilazi iz $E[X_\epsilon^k] \;=\; E[X^k] + \langle x^k, h\rangle_f$ i činjenice da, , $\langle x^k, h\rangle_f \;=\; 0$ za $k = 1, 2, ..$

□

Rezimiraćemo gore navedeno. Stiltjesova klasa je bazirana na dve funkcije, f i h, od kojih je gustina f osnovna. Uopšteno, mogu biti različite perturbacije h koje odgovaraju istoj f. Ako su $h^{(1)}$ i $h^{(2)}$ dve perturbacije kao što je definisano gore, svaka sa nestabilnim momentima, onda je njihova konveksna kombinacija funkcija sa istim osobinama.

Pokažimo da, počev od Stiltjesove klase $S = S(f, h)$, možemo dobiti druge Stiltjesove klase korišćenjem odgovarajućih transformacija od f i h. Uzmimo neprekidnu i ograničenu funkciju $b(x)$, $x \in \mathbb{R}$, i pretpostavimo da, za neke realne brojeve, b_1, b_2, takve da $0 < b_1 < b_2 < \infty$, imamo $b_1 \leq b(x) \leq b_2$, za sve $x \in \mathbb{R}$.

Sada, sa $c_1 = \int f(u)b(u)du$ i $c_2 = sup_u|h(u)|/b(u)$, definišemo funkcije

$$g(x) = \frac{1}{c_1} f(x)b(x) \text{ i } q(x) = \frac{1}{c_2}\frac{h(x)}{b(x)}, \; x \in \mathbb{R}.$$

Jasno, g je funkcija gustine neke funkcije raspodele G, i G je M-nejedinstvena. Pitanje koje se postavlja je, da li možemo da zapišemo Stiltjesovu klasu za G? Možemo, i q je prirodni kandidat kao perturbacija od g. Formulišimo ovo na sledeći način.

Posledica 3.3.1. *Pretpostavimo da je $S = S(f, h)$ Stiltjesova klasa bazirana na funkciji gustine f i funkciji perturbacje h. Tada, sa g i q definisanim gore,*

$$S = S(g, q) = \{g_\epsilon(x) = g(x)[1 + \epsilon\, q(x)];\, x \in \mathbb{R},\, \epsilon \in [-1, 1]\}$$

je Stiltjesova klasa za funkciju raspodele G.

Potrebno je samo napomenuti da se nova klasa $S(g, q)$ dobija iz $S(f, h)$ transformacijom gustine f i perturbacije h. Detaljnije o Stiltjesovim klasama se može naći u [34, 47, 32, 33].

3.4 Stopa rasta momenata

Intuitivno, repovi raspodele su povezani sa rastom njenih momenata. Ako su repovi teži, momenti rastu "brže". Videćemo da postoji kritična granica rasta momenata koja razdvaja raspodele u dve grupe, M-jedinstvene i M-nejedinstvene. Tretiramo posebno pozitivne slučajne promenljive i promenljive sa vrednostima na $\mathbb{R}$.

Stiltjesov slučaj. Za slučajnu promenljivu X sa vrednostima u $\mathbb{R}_+$ i momentima $m_k = E(X^k)$, $k = 1, 2, ...$, posmatramo odnos dva uzastopna momenta:

$$\Delta_k = \frac{m_{k+1}}{m_k}.$$

Lako se može proveriti da se Δ_k povećava zajedno sa k, $k \geq k_0$, za neki fiksiran ceo broj $k_0 \geq 1$. Pretpostavimo da postoji broj $\gamma > 0$, tako da

$$\Delta_k = O((k+1)^\gamma), \quad kad\, k \to \infty.$$

Broj γ se naziva **stopa rasta momenata** od X.

Teorema 3.4.1. *Ako je stopa $\gamma \leq 2$, onda je X M-jedinstvena.*

Prirodno pitanje koje se postavlja je uloga vrednosti $\gamma = 2$. Odgovor je dat sledećom teoremom.

Teorema 3.4.2. *Vrednost $\gamma = 2$ je najbolja moguća konstanta za koje je X M-jedinstvena. Tada postoji pozitivna slučajna promenljiva Y, sa konačnim momentima tako da je $\Delta_k = O((k+1)^{2+\delta})$ za neko $\delta > 0$ i Y je M-nejedinstvena.*

Sada se postavlja pitanje o M-jedinstvenosti X, ako je stopa $\gamma > 2$. Možemo da pretpostavimo da je takva X M-nejedinstvena. Potreban nam je ipak dodatni uslov, i tu se nalazi mogući odgovor.

Teorema 3.4.3. *Pretpostavimo da je Y pozitivna slučajna promenljiva sa konačnim momentima i njena stopa rasta momenata je $\gamma > 2$. Pretpostavimo još, da je Y apsolutno neprekidna slučajna promenljiva sa glatkom gustinom g tako da je Linov uslov zadovoljen: za neko $y_0 > 0$, količnik $-\frac{y\,g'(y)}{g(y)}$, $y > y_0$ monotono raste i teži ka beskonačnosti kad $y \to \infty$. Tada je Y M-nejedinstvena.*

Hamburgerov slučaj. Slično gore navedenom, možemo proučavati slučajne promenljive sa vrednostima u $\mathbb{R}$ i konačnim momentima. Definišemo stopu rasta γ:

$$\Delta_{2(k+1)} = \frac{m_{2(k+1)}}{m_{2k}} = O((k+1)^{\gamma}), \text{ kad } k \to \infty.$$

Mogu se formulisati tri tvrđenja koja su analogna onima u Stiltjesovom slučaju. Za više detalja, vidi [25].

Napomena: Uslovi i rezultati opisani iznad pružaju nam različite alate koji nam omogućavaju analizu M-jedinstvenosti bilo koje raspodele. Međutim, postoje slučajevi kada nije tako jednostavno pronaći odgovor. Uvek je korisno raditi sa specifičnim raspodelama koje se često koriste u statističkoj teoriji i praksi.

3.5 Problem momenta prilikom transformacije stepena slučajnih promenljivih

Koristeći prethodno znanje, dajemo detalje o M-jedinstvenosti prilkom menjanja stepena slučajnih promenljivih za različite raspodele.

3.5.1 Eksponencijalna raspodela

Slučajna promenljiva $X \sim \mathcal{E}xp(1)$ ima gustinu e^{-x}, $x > 0$, i momente $m_k(X) = k!$, $k = 1, 2, \ldots$. Budući da X zadovoljava Kramerov uslov, X je M-jedinstvena. Drugi način dokazivanja je da se proveri da li zadovoljava Karlemanov uslov, i ako zadovoljava, X je opet M-jedinstvena. Treći način jeste korišćenje Krein-Linovog rezultata, odnosno Teoreme 3.2.5. Četvrti dokaz je da se primeni Teorema 3.4.1 i vidi da X ima stopu rasta momenata $\gamma = 1$.

Posmatrajmo sada X^2, X^3, ili bilo koji drugi stepen X^r, $r \in \mathbb{R}$. U svakom od ovih slučajeva možemo eksplicitno napisati gustinu i koristiti je u analizi. X^2 ima težak rep, ali je M-jedinstvena. Ovo važi zato što njeni momenti $m_k(X^2) = (2k)!$, $k = 1, 2, ...$ zadovoljavaju Karlemanov uslov. Takođe možemo da se pozovemo i na Hardijev uslov: ako X zadovoljava Kramerov uslov, onda je X^2 M-jedinstvena.

Uopšteno, X^r je M-jedinstvena za svaki realan broj $r \in [0, 2]$ i M-nejedinstvena za sve $r > 2$. Posebno, X^3 je M-nejedinstvena, tj. $r = 3$ je najmanji stepen tako da X poseduje ovo svojstvo. Momenti su $m_k(X^3) = (3k)!$, $k = 1, 2, ...$, i oni rastu veoma brzo. Gustina f, od X^3 je

$$f(x) = \frac{1}{3}\, x^{-2/3}\, e^{-x^{1/3}}, \quad x > 0,$$

Kreinov uslov (u Stiltjesovom slučaju) je zadovoljen, i tako je, zaista, X^3 M-nejedinstvena.

Možemo napraviti i korak više. Naime, napisati eksplicitno Stiltjesovu klasu za "kub" $Y = X^3$, $X \sim \mathcal{E}xp(1)$:

$$S(f, h) = \{f_\epsilon = f[1 + \epsilon h],\ \epsilon \in [-1, 1]\},$$

gde je f gustina od X^3, i pertubacija $h(x) = \sin(\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}x^{1/3})$, $x > 0$. Primetimo, funkcija f_ϵ, u $S(f, h)$, za svako $\epsilon \in [-1, 1]$, je gustina slučajne promenljive, recimo Y_ϵ, i imamo da je $E(Y_\epsilon^k) = m_k = (3k)!$, $k = 1, 2, ...$ Ovo su sve isti momenti kao od X^3.

Dok je poznato da je slučajna promenljiva $Y = X^3$ za $X \sim \mathcal{E}xp$ beskonačno deljiva, primetimo da važi da je za svako $\epsilon \neq 0$ u gore navedenoj Stiltjesovoj klasi, slučajna promenljiva Y_ϵ nije beskonačno deljiva.

Napomena: Funkcija gustine od X^3 unimodalna, dok gustina f_ϵ, od Y_ϵ, ima beskonačno mnogo modova za svako $\epsilon \neq 0$.

3.5.2 Lognormalna raspodela

Neka je X pozitivna slučajna promenljiva sa nosačem $(0, \infty)$. Kažemo da X ima (standardizovanu) lognormalnu raspodelu sa parametrima $(0, 1)$, i pišemo $X \sim \mathcal{L}og\mathcal{N}(0, 1)$ ako je njena gustina data izrazom (3.1), Primer 3.1.2. Slučajna promenljiva X ima konačne momente za svaki red k, $m_k = E[X^k] = e^{k^2/2}$, $k = 1, 2, ...$ Nosač od X je $(0, \infty)$, pa tražimo rešenje za Stiltjesov problem momenta. Karlemanov uslov $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(m_k)^{1/2k}} = \infty$ nije zadovoljen u ovom slučaju. Međutim, čak i da je zadovoljen, ovaj uslov je samo dovoljan, ali ne i potreban da bi problem momenta imao jedinstveno rešenje. Druga mogućnost je razmatranje reda $\sum_{k=0}^{\infty} t^k e^{k^2/2}/k!$, koji je kandidat za funkciju generatrisu momenata. Međutim, ovaj red divergira za svako $t > 0$, što znači da X nema funkciju generatrisu momenta (uprkos postojanju svih momenata!). Uopšteno (vidi [28]), postojanje funkcije generatrise momenata implicira jedinstvenost raspodele.

Teorema 3.5.1. *Neka je X slučajna promenljiva sa lognormalnom raspodelom $\mathcal{L}og\mathcal{N}(0, 1)$. Tada, za sve realne brojeve r, izuzev $r = 0$, raspodela od X^r je M-nejedinstvena, tj. problem momenta za X^r nema jedinstveno rešenje.*

Dokaz: Ako je $r = 0$, onda je $X^0 = 1$, kao degenerisana slučajna promenljiva, njena raspodela je jedinstvena. Zato se okrenimo slučaju $r \neq 0$.
Za dokaz teoreme, biće nam potrebni sledeći integrali:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^b}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2\cos(b\pi/2)}, \quad b \in (-1,1) \\ \int_0^\infty \frac{\ln x}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}\ln a, \quad a > 0 \\ \int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi^3}{8}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Neka je $r > 0$, i neka je sa f_r označena funkcija gustine "nove" slučajne promenljive X^r. Nosač od f_r je opet $(0, \infty)$. Očigledno, kao X, s obzirom na Ljapunovu nejednakost, X^r takođe ima sve konačne momente, za sve $r > 0$. Možemo direktno pronaći gustinu f_r od X^r, ili da iskoristimo činjenicu (vidi [37]) da r-ti stepen od X, X^r takođe ima lognormalnu raspodelu, označenu u ovom slučaju sa $\mathcal{L}og\mathcal{N}(0, r^2)$, i gustinu $f_r(x)$:

$$f_r(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{xr}\exp\left[-\dfrac{1}{2r^2}(\ln x)^2\right], & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

Ispisivanjem $f_r(x^2)$ za $f_r(x)$ (koja je data preko (3.8)), i korišćenjem integrala (3.7), lako se vidi da je

$$K_r := \int_0^\infty \frac{-\ln f_r(x^2)}{1+x^2}\,dx < \infty \quad \text{za sve } r > 0.$$

Dakle, Kreinov uslov je zadovoljen, i Teorema 3.2.4 implicira da je raspodela od X^r M-nejedinstvena za sve $r > 0$. Ovo takođe implicira da je raspodela od X^{-r} M-nejedinstvena za $r > 0$, pošto $X = e^\xi$ za slučajnu promenljivu $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$, i s obzirom na simetriju ξ. Dakle, raspodela od X^r je M-nejedinstvena za sve $r \neq 0$.

□

Napomena: Slučaj $r = 1$ je specijalan slučaj: $X^1 = X$ je samo lognormalno distribuirana slučajna promenljiva X čija je gustina data sa (3.1). Teorema 3.5.1 daje da je $\mathcal{L}og\mathcal{N}(0,1)$ raspodela od X M-nejedinstvena, tj. problem momenta za standardizovanu lognormalnu raspodelu nema jedinstveno rešenje. Zapravo, ovaj rezultat, iako u drugom obliku, otkrio je T. Stiltjes 1894.godine, detalji su dati u [3]. Termin 'lognormalna raspodela' je uveden kasnije. Od pojavljivanja rada od Hejda 1963. godine, ova raspodela je među najčešće navođenim kao M-nejedinstvena. Imajmo na umu da Hejd nije koristio Kreinov uslov. On je pratio drugačiju, ali efikasnu ideju, eksplicitno opisujući beskonačnu familiju ne-lognormalnih raspodela, od kojih svaka ima iste momente kao i lognormalna raspodela. Detalji se mogu naći u [15], ali i u drugim izvorima kao što su [37], [3] ili [43].

3.5.3 Normalna raspodela

Pretpostavimo da je X slučajna promenljiva sa normalnom raspodelom $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$. Svi momenti od X su konačni, funkcija generatrisa momenata $E[e^{tX}] = e^{\mu t + 1/2 t^2 \sigma^2}$ postoji za sve $t \in \mathbb{R}$. Dakle, normalna raspodela je M-jedinstvena. Isti zaključak se može izvesti za X^2. Obzirom da X^2 ima lak rep, to znači da X^4 zadovoljava Hardijev uslov, pa je X^4 M-jedinstvena. Primetimo, korišćenje dva puta Kramerovog uslova i dva puta Hardijevog uslova, predstavlja najkaraći i najlepši način da se pokaže da je X^4, gde $X \sim \mathcal{N}$, M-jedinstvena. Međutim, X^3 je M-nejedinstvena. Odnosno, M-nejedinstvenost od X^3 je "između" M-jedinstvenosti X^2 i X^4. Štaviše, apsolutna vrednost $|X^3|$ je M-jedinstvena. Svaki od njih se može dokazati na nekoliko načina.

Teorema 3.5.2. *Neka je X slučajna promenljiva sa normalnom raspodelom. Tada važe sledeća tvrđenja:*

a) Raspodela od X^{2n+1} je M-nejedinstvena za sve $n = 1, 2, ...$

b) Raspodela od $|X|^r$ je M-jedinstvena za sve $r \in (0, 4]$.

c) Raspodela od $|X|^r$ je M-nejedinstvena za sve $r > 4$.

Dokaz: Tvrđenja $a), b)$ i $c)$ su među glavnim rezultatima u [5]. Bergov pristup, kada ih dokazuje, jeste da napiše beskonačne familije sa istim momentima u slučajevima nejedinstvenosti, ili da koristi Karlemanov uslov u slučaju jedinstvenosti. Kreinov uslov se ne koristi.

Naš pristup je da koristimo Krein-Linovu tehniku koja nudi lakše dokaze tih tvrđenja. Za dokaz teoreme, biće nam potrebni prva dva integrala iz (3.7), Poglavlje 3.5.2.

Očigledno da tvrdnje $a), b), c)$ ne zavise od specifičnih vrednosti parametara normalne raspodele. Stoga, zbog jednostavnosti, pretpostavimo da $X \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$, tako da je njena fukcija gustine jednaka

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Za naše naredne korake potrebni su eksplicitni izrazi gustina f_{2n+1} za X^{2n+1} i g_r za $|X|^r$:

$$f_{2n+1}(x) = \frac{1}{(2n+1)\sqrt{\pi}} |x|^{-2n/(2n-1)} \exp[-|x|^{2/(2n+1)}], \; x \in (-\infty, \infty), n = 1, 2, ...,$$

(3.9)

$$g_r(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{r\sqrt{\pi}} x^{1/r-1} \exp[-x^{2/r}], & x > 0, r > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

Postoji očigledna razlika: X^{2n+1} je distribuirano na $(-\infty, \infty)$, što je Hamburgerov slučaj, dok je $|X|^r$ distribuirano na $(0, \infty)$, što je Stiltjesov slučaj. Prilikom pronalaženja veličine

$$K_{2n+1} := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\ln f_{2n+1}(x)}{1+x^2}\, dx$$

koristimo formulu (3.9) da dobijemo $K_{2n+1} = C + I_1 + I_2$, gde je

$$C = const, \quad I_1 = \frac{2n}{2n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\ln|x|}{1+x^2}\, dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^{2/(2n+1)}}{1+x^2}\, dx.$$

Imamo da je $I_1 = \dfrac{4n}{2n-1} \int_0^{\infty} \dfrac{\ln x}{1+x^2}\, dx = 0$ imajući u vidu drugi integral u (3.7). Obzirom da je $\dfrac{2}{2n+1} < 1$ za sve $n = 1, 2, ...$, prvi integral iz (3.7) implicira da je $I_2 < \infty$. Dakle, $K_{2n+1} < \infty$, Kreinov uslov je zadovoljen, odnosno, raspodela od X^{2n+1} je M-nejedinstvena za sve $n = 1, 2, ...$
Sada posmatrajmo veličinu

$$K_r^* := \int_0^{\infty} \frac{-\ln g_r(x^2)}{1+x^2}\, dx.$$

Za g_r iz (3.10) napišemo prvo $g_r(x^2)$ i uzmemo $-\ln g_r(x^2)$, čime se dobija $K_r^* = C_2 + J_1 + J_2$, gde je

$$C_2 = const, \quad J_1 = -\left(\frac{2}{r} - 2\right) \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx, \quad J_2 = \int_0^{\infty} \frac{x^{4/r}}{1+x^2}\, dx.$$

Drugi integral iz (3.7) implicira da je $J_1 = 0$, za sve $r > 0$. Tako je J_2 dominantan član u K_r^*. Obzirom da je $r > 0$, i imajući u vidu prvi integral iz (3.7), dobijamo da je

$$J_2 < \infty \Leftrightarrow \frac{4}{r} < 1 \Leftrightarrow r > 4$$

.
Dakle, $K_r^* < \infty$, za ove vrednosti r, Kreinov uslov je zadovoljen, i raspodela od $|X|^r$ je M-nejedinstvena, za svaki realan broj $r > 4$. Štaviše, za svako $r \in (0, 4]$, $J_2 = \infty$, što je tačno Kreinov uslov. Stoga, u ovom slučaju moramo proveriti da li je zadovoljen Linov uslov:

$$-\frac{x g_r'(x)}{g_r(x)} = -\left(\frac{2}{r} - 2\right) + \frac{4}{r} x^{4/r} \nearrow \infty, \text{ kad } x \to \infty.$$

Tako je Linov uslov zadovoljen za svako $r > 0$, ne samo za $r \in (0, 4]$. Dakle, prema Teoremi 3.2.5, raspodela od $|X|^r$ je M-jedinstvena za sve $r \in (0, 4]$.

□

Podsetimo se, za raspodelu se kaže da je nejedinstvena u smislu Hamburga ako postoji više raspodela sa istim momentima. Za raspodelu na $[0, \infty)$ se kaže da je nejedinstvena u Stiltjesovom smislu ako postoji više raspodela na $[0, \infty)$ sa istim momentima. Raspodela na $[0, \infty)$ može biti jedinstvena u smislu Stiltjesa i još uvek nejedinstvena u smislu Hamburga (vidi, na primer, [1]). Videli smo da za normalnu slučajnu promenljivu imamo situaciju da su X^3 i X^5 nejedinstvene, dok su $|X|^3$ i X^4 jedinstvene. Slad je 1963.godine je istražio polinome od nekoliko normalnih slučajnih promenljivih, Targeta je 1990.godine je pokazao da ako je gama slučajna promenljiva sa gustinom

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)}\, x^{a-1}\, e^{-x}, \quad x > 0, \quad a > 0,$$

onda je X^r nejedinstvena u smislu Stiltjesa za $r > \max\{2, 2a\}$. Uopšteno, Pejks i Katre su 1992. godine pokazali da ako X ima raspodelu nazvanu $\mathcal{G}am(a, b, \lambda)$, gustina generalizovane gama raspodele je

$$f(x) = \frac{b^{\lambda a}}{\lambda\Gamma(\lambda a)}\, x^{a-1}\, \exp(-bx^{1/\lambda}), \;\; x > 0, a > 0, b > 0, \lambda > 0 \tag{3.11}$$

onda je X^r nejedinstvena u smislu Stiltjesa za $r > \dfrac{2}{\lambda}$ i jedinstvena u smislu Stiltjesa za $0 < r \leq \dfrac{2}{\lambda}$. Tako je Vejlbulova slučajna promenljiva sa gustinom $f(x) = abx^{a-1}e^{(-bx^a)}$, $x > 0$ je nejedinstvena u smislu Stiltjesa za $a < \dfrac{1}{2}$.

Ako kubiranje (ili podizanje eksponenta na neki drugi stepen) dovodi do nejedinstvenosti, šta je sa "kubiranjem" onih sa još "težim" repovima od normalne? Sigurno mora postojati više interesantnih primera ove vrste. Glavni rezultat u ovoj napomeni je da je logistička raspodela jedna od značajnijih raspodela čiji je "kub" M-nejedinstven.

3.5.4 Logistička raspodela

Teorema 3.5.3. *Standardna logistička slučajna promenljiva X sa gustinom*

$$f(x) = e^{-x}(1 + e^{-x})^{-2}, \;\; -\infty < x < \infty \tag{3.12}$$

je M-jedinstvena. Njeni neparni stepeni X^n, $n = 3, 4, ...$ su M-nejedinstveni. $|X|^r$ je jedinstvena u smislu Stiltjesa ako $0 < r \leq 2$, i nejedinstvena ako $r > 2$.

Dokaz: Dovoljan uslov za jedinstvenost je Karlemanov uslov

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[E(X^{2n})\right]^{-1/(2n)} = \infty$$

Za logističku gustinu, simetrija od $x^{2n}f(x)$, $n = 1, 2, ...$ omogućava nam da napišemo

$$E(X^{2n}) = 2\int_0^{\infty} x^{2n}e^{-x}(1 + e^{-x})^{-2}dx \;\leq\; 2\int_0^{\infty} x^{2n}e^{-x}dx = 2\Gamma(2n+1)$$

.
Strilingovom formulom vidimo da $[2\Gamma(2n+1)]^{-1/(2n)} \sim (const) \cdot n^{-1}$. Tako je Karlemanov uslov zadovoljen i X je M-jedinstvena.
Sledeće razmatranje $Y = X^n$ za neparne prirodne brojeve n. Gustina od Y je

$$g(y) = \frac{1}{n}|y|^{(1/n-1)} \exp(-|y|^{1/n})[1+\exp(-|y|^{1/n})]^{-2}, \quad -\infty < y < \infty.$$

Prema Kreinovom kriterijumu, Y je M-nejedinstvena ako je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\ln g(y)}{1+y^2} dy < \infty \tag{3.13}$$

Pošto je u izrazu (3.13) simetrična, konačnost integrala je ekvivalentna tome da

$$\int_0^{\infty} \frac{-\ln g(y)}{1+y^2} dy = \int_0^{\infty} \frac{\ln n + (1-1/n)\ln y + y^{1/n} + 2\ln[1+\exp(-y^{1/n})]}{1+y^2} dy \tag{3.14}$$

Dominantni član u izrazu je $y^{1/n}(1+y^2)^{-1}$, koji ima konačan integral ako i samo ako $n > 1$. Drugim rečima, neparni stepeni (3, 5, 7,...) od logističke su M-nejedinstveni baš kao kod normalne raspodele.
Sada posmatramo $Z = |X|^r$, $r > 0$. Ona ima gustinu

$$h(z) = \frac{2}{r} z^{1/r-1} \exp(-z^{1/r})[1+\exp(-z^{1/r})]^{-2}, \; z > 0. \tag{3.15}$$

Dovoljan uslov za jedinstvenost u smislu Stiltjesa slučajne promenljive Z, koncetrisan na pozitivnom delu ose je Karlemanov uslov

$$\sum_{n=1}^{\infty} [E(Z^n)]^{-1/(2n)} = \infty \tag{3.16}$$

Ovde za $0 < r \leq 2$ i prirodan broj n,

$$\begin{aligned} E(Z^n) &= \frac{2}{r}\int_0^{\infty} z^{n-1+1/r} \exp(-z^{1/r})[1+\exp(-z^{1/r})]^{-2} dz \\ &\leq \frac{2}{r}\int_0^{\infty} z^{n-1+1/r} \exp(-z^{1/r}) dz = 2\Gamma(nr+1) \leq 2\Gamma(2n+1). \end{aligned}$$

Opet, Stirlingovom formulom imamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [E(Z^n)]^{-1/(2n)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} [2\Gamma(2n+1)]^{-1/(2n)} \sim (const) \cdot \sum n^{-1} = \infty.$$

Dakle, (3.16) je zadovoljen i $|X|^r$ je jedinstvena u smislu Stiltjesa za $r \leq 2$.
Ostaje da se pokaže da je $|X|^r$ nejedinstvena za $r > 2$.
Za raspodele koncentrisane na pozitivnom delu ose, dovoljan uslov za nejedinstvenost je Kreinov uslov prilagođen pozitivnom delu realne ose preko simetrizacije

$$\int_0^\infty \frac{-\ln h(z^2)}{1+z^2} dz < \infty \tag{3.17}$$

Za gustinu (3.15), dominantan član u izrazu (3.17) je $z^{2/r}(1+z^2)^{-1}$, koji ima končan integral ako i samo ako $r > 2$. Zbog toga, $|X|^r$ je M-nejedinstvena za $r > 2$ i dokaz je kompletan.

□

Napomena 1: Teorema 3.5.3 se može pojačati. Za $|X|^r$, nejedinstvenost se može nadograditi do nejedinstvenosti u smislu Stiltjesa, i jedinstvenost u smislu Stiltjesa do M-jedinstvenosti, koristeći napomenu iz [5], naime ako je raspodela jedinstvena u smislu Stiltjesa i M-nejedinstvena, onda je diskretna.
Što se tiče Kreinovog uslova, kontraprimer gde je gustina $f(x)$ jednaka

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\exp(x), & x < 0 \\ \frac{1}{48}\exp(-x^{1/4}), & x \geq 0 \end{cases} \tag{3.18}$$

pokazuje da je to dovoljno, ali daleko od potrebnog.

Napomena 2: Interesantan je kontrast između normalne i logističke raspodele. Za $2 < r \leq 4$, $|X|^r$ je nejedinstvena u smislu Stiltjesa za logističku X, ali jeste jedinstvena za normalnu. Iako su X^3 i X^5 M-nejedinstvene i za normalnu i za logisitičku , X^4 je M-jedinstvena samo za normalnu. Da je potreban manji stepen da dovede logističke u nejedinstvenost je možda zbog činjenice da logistički repovi su "teži" u smislu simetrije, $<_s$, iz [21]:

gustina U-oblika $<_s$ uniformna $<_s$ normalna $<_s$ logistička $<_s$ Laplasova $<_s$ Košijeva

Napomena 3: Logistička gustina (3.12) dozvoljava različita uopštavanja. Četiri "uopštene" logističke familije se mogu naći u radu [18]. Može se pokazati da Teorema 3.5.3 nastavlja da važi za sve četiri proširene porodice.

3.5.5 Dvostruka generalizovana gama raspodela

Pogodno je razmotriti simetričnu gustinu indukovanu preko (3.11), koja se zove dvostruka generalizovana gama ($\mathcal{DG}gam(a, b, \lambda)$)

$$f(x) = \frac{b^{\lambda a}|x|^{a-1}\exp(-b|x|^{1/\lambda})}{2\lambda\Gamma(\lambda a)}, \ -\infty < x < \infty, a > 0, b > 0, \lambda > 0. \tag{3.19}$$

Primetimo da ako X ima $\mathcal{DG}gam(a, b, \lambda)$ raspodelu, onda $|X|$ ima $\mathcal{G}am(a, b, \lambda)$ iz (3.11). U međuvremenu, X^n ostaje unutar $\mathcal{DG}am$ familije za neparne prirodne brojeve n i ima $\mathcal{DG}gam(\frac{a}{n}, b, \lambda n)$. Gustina (3.19) je bimodalna ako $a > 1$. Ona ima singularitet ako je $a < 1$. To je Gausova raspodela ako je $a = 1$ i $\lambda = \frac{1}{2}$, i Laplasova (dvostruko eksponencijalna) ako je $a = \lambda = 1$.

Teorema 3.5.4. *Neka X ima gustinu od $\mathcal{DG}gam(a, b, \lambda)$. Tada:*

(a) X je M-jedinstvena ako i samo ako $\lambda \leq 1$,

(b) $|X|$ je M-jedinstvena za $\lambda \leq 2$, i nejedinstvena u smislu Stiltjesa za $\lambda > 2$.

Dokaz: Da bismo pokazali da je X M-jedinstvena za $\lambda \leq 1$, neka je n paran prirodan broj. Pošto je $x^n f(x)$ simetrična, možemo napisati

$$E(X^n) = \int_0^\infty \frac{b^{\lambda a}}{\lambda\Gamma(\lambda a)} x^{n+a-1} \exp(-bx^{1/\lambda})\, dx \; = \; b^{-n\lambda} \frac{\Gamma((n+a)\lambda)}{\Gamma(\lambda a)}$$

Iz Stirlingove formule sledi $[E(X^n)]^{-1/n} \sim (const){\cdot}n^{-\lambda}$. Prema tome, imamo $\sum_{n=1}^\infty [E(X^{2n})]^{-1/(2n)} \sim (const) \cdot \sum_{n=1}^\infty (2n)^{-\lambda} = \infty$. Tako je $\mathcal{DG}gam(a, b, \lambda)$ M-jedinstvena za $\lambda \leq 1$. Da bismo pokazali nejedinstvenost od X za $\lambda > 1$, koristimo Kreinov uslov (3.13). Opet pomoću simetrije dovoljno je proveriti

$$\int_0^\infty \frac{-\ln f(x)}{1+x^2}\, dx < \infty \tag{3.20}$$

Vodeći član u izrazu je $bx^{1/\lambda}(1+x^2)^{-1}$, pa je (3.20) zadovoljeno ako je $\lambda > 1$. b) Kao specijalan slučaj $r = 1$ (Lema 3.1 u [37]), sledi da je $|X|$ jedinstvena u smislu Stiltjesa ako i samo ako je $\lambda \leq 2$.

Da bismo dokazali nejedinstvenost u smislu Stiltjesa za $\lambda > 2$ u (b), umesto korišćenja kontrapirmera kao što je u [37], možda bi bilo lakše da se prvo uspostavi nejedinstvenost korišćenjem kriterijuma (3.17). Obzirom na to da je dominantan član u $(-\ln f(x^2))/(1+x^2)$ je $bx^{2/\lambda}/(1+x^2)$, integral je konačan za $\lambda > 2$.

□

Posledica 3.5.1. *Ako X ima $\mathcal{DG}gam(a, b, \lambda)$ raspodelu, onda za neparan prirodan broj n, X^n je M-jedinstvena ako i samo ako je $n \leq \frac{1}{\lambda}$. Posebno, neparni (≥ 3) stepeni Laplasove raspodele su M-nejedinstveni, baš kao što su za normalnu i logističku.*

Dokaz: Tvrđenje sledi iz Teoreme 3.5.4 (a), čim se promeni da X^n ima $\mathcal{DG}gam(a/n, b, \lambda n)$.

□

Posledica 3.5.2. *Ako Y ima $\mathcal{G}gam(a, b, \lambda)$ raspodelu, onda Y^r, $r > 0$, je nejedinstvena u smislu Stiltjesa ako $r\lambda > 2$, i M-jedinstvena ako $r\lambda \leq 2$.*

Dokaz: Ako je X $\mathcal{DG}gam(a, b, \lambda)$, onda $|X|^r = Y^r$ je $\mathcal{G}gam(a/r, b, r\lambda)$ i rezultat sledi iz Teoreme 3.5.4 (b).

□

3.5.6 Laplasova raspodela

Za dve funkcije raspodele F i G koje odgovaraju slučajnim promenljivama X i Y, kažemo da su *M-ekvivalentne* (ekvivalentne u smislu momenata) ako su njihovi momenti $m_k(F) = E(X^k) = \int x^k dF(x)$ i $m_k(G) = E(Y^k) = \int x^k dG(x)$, $k = 1, 2, ...$ konačni i nizovi momenata su isti:

$$m_k(F) = m_k(G), \quad k = 1, 2, ... \quad \text{Oznaka: } F \overset{M}{=} G.$$

Dalje kažemo da se F i G poklapaju ako

$$F(x) = G(x) \text{ za sve } x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty) \quad \text{Oznaka: } F = G.$$

Pretpostavimo da su X i Y slučajne promenljive sa funkcijama raspodele F i G, i gustinama f i g, redom. Pretpostavimo da se f i g poklapaju na konačnom intervalu, recimo (s_1, s_2) i takođe da su momenti od X isti kao momenti od Y. Da li to podrazumeva da se raspodele poklapaju? U nekim slučajevima, "da", uopšteno je odgovor "ne".

Teorema 3.5.5. *Ako su dve raspodele M-ekvivalentne i poklapaju se na nekom konačnom intervalu, one i dalje mogu biti različite.*
Ekvivalentno: Neka su

$$F = (F(x), \, x \in \mathbb{R}) \text{ i } G = (G(x), \, x \in \mathbb{R})$$

različite funkcije raspodele, koje odgovaraju nekim slučajnim promenljivama X i Y, svaka sa konačnim momentima proizvoljnog reda (za koji podrazumevamo da je prirodan broj), tako da su sledeće dve osobine zadovoljene:

(a) $m_k(F) = m_k(G)$, *za sve* $k = 1, 2, ...$

(b) Za neki interval (s_1, s_2), gde je $s_1 < s_2$, s_1 i s_2 konačni brojevi, imamo da za svaki podinterval $(a, b) \subset (s_1, s_2)$,

$$P[X \in (a, b)] = F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = P[Y \in (a, b)].$$

Međutim, primetimo da verovatnoće $P[X \in (a_1, b_1)]$ i $P[Y \in (a_1, b_1)]$ mogu biti različite ako je bar jedna od tačaka a_1 i b_1 izvan intervala (s_1, s_2).

Napomena 1: Gornja teorema potvrđuje koliko su važni repovi raspodela kada se traži njihova jedinstvenost u smislu momenata. Uopšteno, različiti repovi dovode do različitih raspodela koje mogu biti M-ekvivalentne.

Predstavićemo eksplicitan rezultat za "kub" Laplasove raspodele. Koristimo Kreinov uslov i Teoremu 3.5.5.

Definicija 28. *Slučajna promenljiva η sa vrednostima u $\mathbb{R}$ ima Laplasovu raspodelu (dvosturko eksponencijalnu raspodelu) sa parametrom 1, i pišemo $\eta \sim \mathcal{L}(1)$, ako je gustina od η, označena sa p, jednaka*

$$p(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Razmatramo transformaciju stepena od η i proučavamo jedinstvenost njihovih raspodela preko njihovih momenata. Zbog jednostavnosti uzimamo parametar 1.

Teorema 3.5.6. *Funkcija raspodele F slučajne promenljive $X = \eta^3$, gde $\eta \sim \mathcal{L}(1)$ je M-nejedinstvena.*

Dokaz: Prvi korak je naći funkciju gustine f od X

$$f(x) = \frac{1}{6}\,|x|^{-2/3}\exp\big(-|x|^{1/3}\big), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sada koristimo f da se proceni Kreinov integral $K[f]$. Sa osvrtom na neke formule u [11], lako zaključujemo da je $K[f] < \infty$. Otuda je F M-nejedinstvena.

□

Nakon što saznamo da "kub" Laplasa ima M-nejedinstvenu raspodelu, možemo napraviti još jedan korak. Želimo da konstruišemo Stiltjesovu klasu ili klase, sledeći [45] i [50].
Neka je funkcija pertubacije jednaka

$$h(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\Big[\cos(\sqrt{3}|x|^{1/3}) - \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}|x|^{1/3})\Big],\ x \in \mathbb{R},$$

i posmatramo funkciju proizvoda g:

$$g(x) = f(x)h(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Uzmimo proizvoljan konačan broj $s > 0$, i upotrebimo ga da definnišemo "novu" funkciju $\tilde{g}$ kao simetrični s - pomak ulevo i s - pomeranje udesno:

$$\tilde{g}(x) = 0 \text{ za } x \in (-s, s) \ \text{ i } \ \tilde{g}(x) = g(|x| - s) \text{ za } x \notin (-s, s).$$

Može se pokazati da je funkcija $\tilde{g}(x)/f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ ograničena, tako da za neke konačne c_0 imamo $|\tilde{g}(x)/f(x)| \le c_0$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Tačna vrednost c_0 nije važna. Sada, definišemo funkciju $\tilde{h}$:

$$\tilde{h}(x) = \frac{1}{c_0}\frac{\tilde{g}(x)}{f(x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 3.5.7. *(a) Sa gore datim f i h, familija funkcija*

$$S(f,h) = \{f_\epsilon(x) = f(x)[1 + \epsilon h(x)],\ x \in \mathbb{R},\ \epsilon \in [-1,1]\}$$

je Stiltjesova klasa za kub Laplasove raspodele.

(b) Sa gore definisanim istim f i $\tilde{h}$, familija funkcija

$$\tilde{S}(f,h) = \{\tilde{f}_\epsilon(x) = f(x)[1+\epsilon\tilde{h}(x)],\ x\in\mathbb{R},\ \epsilon\in[-1,1]\}$$

je takođe Stiltjesova klasa za kub Laplasove raspodele.

Dokaz: Navešćemo samo nekoliko kratkih komentara. Za tvrđenje (a) moramo da obezbedimo da je proizvod $g(x) = f(x)h(x)$, $x\in\mathbb{R}$, funkcija sa nestabilnim momentima i da je $|h(x)|$, $x\in\mathbb{R}$ ograničena sa 1. Specifični oblik f i h, dozvoljava da se za g koriste neke formule iz [11]. Izostavljamo detalje. Stoga, imamo beskonačnu familiju slučajnih promenljivih, X_ϵ, $X_\epsilon \sim F_\epsilon$, gde F_ϵ ima gustinu f_ϵ, $\epsilon\in[-1,1]$.

Za tvrđenje (b) koristimo činjenicu da proizvod g ima nestabilne momente i pozivamo se na Teoremu 3.5.5 sa $s_1=-s$ i $s_2=s$. Na taj način dobijamo sličnu beskonačnu familiju $\tilde{X}_\epsilon$, $X_\epsilon\sim\tilde{F}_\epsilon$, gde $\tilde{F}_\epsilon$ ima gustinu $\tilde{f}_\epsilon$, $\epsilon\in[-1,1]$.

Jasno, sve slučajne promenljive X_ϵ i $\tilde{X}_\epsilon$ imaju iste momente one od X, kuba od Laplasa. Ekvivalentno, sve funkcije raspodele F_ϵ i $\tilde{F}_\epsilon$, $\epsilon\in[-1,1]$ su M-ekvivalentne.

Napomenimo još i razliku između Stiltjesovih klasa $S(f,h)$ i $\tilde{S}(f,\tilde{h})$. Na primer, uzmimo bilo koje $\epsilon\neq 0$, i posmatrajmo $F_\epsilon\in S(f,h)$. Obzirom da je $f_\epsilon\neq f(x)$ za sve $x\in\mathbb{R}$, lako je zaključiti da se F_ϵ i $\tilde{F}_\epsilon$ ne mogu poklopiti. Istovremeno, za to ϵ imamo $\tilde{f}_\epsilon = f(x)$ za sve $x\in(-s,s)$, stoga, raspodela $\tilde{F}_\epsilon$ se poklapa sa F na intervalu $(-s,s)$, a izvan ovog intervala je različita.

□

3.5.7 Inverzna Gausova raspodela

Kažemo da slučajna promenljiva X ima *inverznu Gausovu raspodelu* sa parametrima $\mu>0$, $\lambda>0$, $X\sim\mathcal{IG}(\mu,\lambda)$, ako je X apsolutno neprekidna sa gustinom

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{1/2} \exp\left[-\dfrac{\lambda}{2\mu^2}\dfrac{(x-\mu)^2}{x}\right], & x>0 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

Prvo možemo proveriti da li X ima konačne momente $m_k = E(X^k)$, za sve $k = 1,2,...$ Funkcija generatrisa momenata $M_X(t) = E(e^{tX})$ je eksplicitno poznata (vidi, na primer, [42]):

$$M_X(t) = \exp\{\,(\lambda/\mu)\,[1-(1-2\mu^2 t/\lambda)^{1/2}]\,\}$$

Očigledno, $M_X(t)$ je dobro definisana za sve $t<\lambda/(2\mu^2)$, što znači da M_X postoji u okolini $t=0$. Generalna teorema u [28] daje da je raspodela od X, tj. inverzna Gausova raspodela M-jedinstvena. Dakle, za koje vrednosti r, raspodela od X^r je M-nejedinstvena?

Teorema 3.5.8. *Neka $X \sim \mathcal{IG}(\mu, \lambda)$ i neka je r realan broj. Tada važe sledeća tvrđenja:*

i) Ako je $r < -2$ ili $r > 2$, onda je raspodela za X^r M-nejedinstvena.

ii) Ako je $-2 \leq r \leq 2$, onda je raspodela za X^r M-jedinstvena.

Dokaz: Kao što smo već rekli, slučajna promenljiva X sa gustinom f ima konačne momente bilo kog reda k, $k = 1, 2, \ldots$.
Za svaki realan broj r, X^r je dobro definisana slučajna promenljiva sa nosačem na pozitivnoj realnoj polupravi $\mathbb{R}_+$. Lako se može zaključiti da ako je $r > 0$, onda svaka slučajna promenljiva X^r i X^{-r} ima konačne momente proizvoljnog reda. Slučaj $r = 0$ je trivijalan: $X^0 = 1$. Stoga, X^r i raspodelu od X^r generiše samo jedan niz momenata za svaki realan broj r. Tačna vrednost momenata nije eksplicitno uključena u ovu našu diskusiju. Razumno pitanje je da li je, ili nije, problem momenta jedinstveno rešiv za raspodele od X^r i X^{-r}, pod pretpostavkom da je $r > 0$.
Posmatrajmo prvo slučajnu promenljivu X^r. Kasnije ćemo videti da rešenje problema za X^r, kao i X^{-r}, ne zavisi od specifične vrednosti dva parametara μ i λ. Tako za proizvoljne pozitivne μ i λ, gustina (3.21) se svodi na sledeći oblik:

$$f(x) = \Big(\frac{\lambda}{2\pi}\Big)^{1/2} e^{\lambda/\mu} \exp\Big[-\frac{3}{2}\ln x - \frac{\lambda}{2}\Big(\frac{1}{\mu^2}x + \frac{1}{x}\Big)\Big], \ x \in \mathbb{R}_+. \tag{3.22}$$

Jasno, sledeći korak je napisati eksplicitno funkciju gustine f_r za "novu" slučajnu promenljivu X^r. Za $x > 0$, imamo

$$P[X^r \leq x] = P[X \leq x^{1/r}] = \int_0^{x^{1/r}} f(u)du,$$

gde je f dato sa (3.21), i očigledno, $f_1 = f$. Tada je $f_r(x) = (P[X^r \leq x])'$. Diferenciranjem po x, zamenom f po svom izrazu (3.22) i pojednostavljivanjem dobijamo

$$f_r(x) = \Big(\frac{\lambda}{2\pi}\Big)^{1/2} \frac{e^{\lambda/\mu}}{r} \exp\Big[-\Big(1 + \frac{1}{2r}\Big)\ln x - \frac{\lambda}{2}\Big(\frac{x^{1/r}}{\mu^2} + x^{-1/r}\Big)\Big], \ x \in \mathbb{R}_+. \tag{3.23}$$

Ovo sledi iz Kreinovog (Teorema 3.2.4) i Linovog uslova (Teorema 3.2.5) da za svako od tvrđenja (i) i (ii) u Teoremi 3.5.8 moramo znati vrednost integrala

$$K_r := \int_0^\infty \frac{-\ln f_r(x^2)}{1 + x^2} dx.$$

Uzimajući x^2 kao argument od $f_r(x)$ u (3.23) lako možemo videti da

$$K_r = C(\lambda, \mu, r) + (2 + \frac{1}{r}) \int_0^\infty \frac{\ln x}{1 + x^2} dx + \frac{\lambda}{2\mu^2} \int_0^\infty \frac{x^{2/r}}{1 + x^2} dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty \frac{x^{-2/r}}{1 + x^2} dx,$$

gde je $C(\lambda,\mu,r)$ konačna konstanta. Sada želimo da nađemo r za koje je K_r $(+\infty)$ i r takvo da je K_r manje od $(+\infty)$ (ne treba nam tačna vrednost K_r). Dobro je poznato da $\int_0^\infty [(lnx)/(1+x^2)]dx = 0$, pa je odgovor baziran na relaciji:

$$J_p := \int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2\cos(p\pi/2)} \Longleftrightarrow p \in (-1,1).$$

Za sve vrednosti p izvan intervala $(-1,1)$, integral J_p je divergentan, vidi, npr. [10]. Međutim, pod pretpostavkom $r>0$, i otuda

$$K_r < \infty \text{ ako } r>2;\ K_r = \infty \text{ ako } r \in (0,2].$$

Neposredna posledica, s obzirom na Teoremu 3.2.4, je što za $r>2$ raspodela od X^r je M-nejedinstvena. Ovo je naše tvrđenje (a) za $r>0$. Pošto je $K_r=\infty$ za $r\in(0,2]$, tvrđenje (b) će biti dokazano ako pokažemo da je Linov uslov zadovoljen. Zaista, lako je videti da je gustina f_r, vidi (3.23), diferencijabilna i prostom računicom dobijamo da je

$$-\frac{xf_r'(x)}{f_r(x)} = \big(1+\frac{1}{2r}\big) + \frac{\lambda}{2\mu^2 r}x^{1/r} - \frac{\lambda}{2r}x^{-1/r}.$$

Sada $r\in(0,2]$, možemo uzeti bilo koje $x_0>0$ i razmatramo $x\geq x_0$. Tako nalazimo da $[-xf_r'(x)/f_r(x)] \nearrow \infty$ kad $x\to\infty$. Primetimo da je dominantan član $(\lambda/(2\mu^2 r))x^{1/r}$ koji konvergira ka ∞; za $r\in(0,2]$ drugi član $(-\lambda/(2r))x^{-1/r}$ teži nuli kad $x\to\infty$. Stoga, iz Teoreme 3.2.5 izvlačimo da je raspodela od X^r M-jedinstvena za svako $r\in(0,2]$. Ovo naše tvrđenje (b) je tačno ali samo u slučaju kada je $r>0$.
Ostaje da se razmotri slučajna promenljiva X^{-r} za $r>0$. Za $x>0$ imamo

$$P[X^{-r}\leq x] = P[X\geq x^{-1/r}] = \int_{x^{-1/r}}^\infty f(u)du.$$

Ako je g_r funkcija gustine slučajne promenljive X^{-r}, $g_r(x) = (P[X^{-r}\leq x])'$, nalazimo

$$g_r(x) = \big(\frac{\lambda}{2\pi}\big)^{1/2}\frac{e^{\lambda/\mu}}{r}\exp\Big[\big(\frac{1}{2r}-1\big)\ln x - \frac{\lambda}{2}\big(x^{1/r}+\frac{x^{-1/r}}{2\mu^2}\big)\Big],\ x\in\mathbb{R}_+. \tag{3.24}$$

Sada uporedimo izraz (3.23) za gustinu f_r sa (3.24) i vidimo da postoji samo mala razlika koja, međutim, nije esencijalna kada računamo veličinu

$$K_r^* := \int_0^\infty \frac{-\ln g_r(x^2)}{1+x^2}dx.$$

Zaključak ovde je sličan onom za veličinu K_r:

$$K_r^* < \infty \text{ za } r>2;\quad K_r^* = \infty \text{ za } r\in(0,2].$$

Dakle, iz Teoreme 3.2.4, raspodela od X^{-r} je M-nejedinstvena za sve $r>2$. Ovo je ekvivalentno ako kažemo da je raspodela od X^r M-nejedinstvena za sve $r<-2$.
Zaključak za X^{-r} kada $r\in(0,2]$, se bazira na divergenciji K_r^* i na Linovom uslovu, koji je u ovom slučaju zadovoljen za gustinu g_r. Ovo se proverava baš kao što je to

učinjeno za gustinu f_r. Stoga, iz Teoreme 3.2.5, raspodela od X^{-r} je M-jedinstvena za sve $r \in (0, 2]$. Ovo je ekvivalentno tome da je raspodela od X^r M-jedinstvena za $r \in [-2, 0)$.

Pošto je u trivijalnom slučaju $r = 0$, raspodela degenerisane slučajne promenljive $X^0 = 1$ je jedinstveno određena, možemo dodati ovaj slučaj drugima kada je raspodela od X^r M-jedinstvena. Sumirajući tako naše zaključke gore, vidimo da je raspodela od X^r M-jedinstvena za sve $r \in [-2, 2]$; obrnuto, tj. za r izvan intervala $[-2, 2]$ ona je M-nejedinstvena. Dakle, oba tvrđenja (a) i (b) su pokazana i dokaz teoreme je kompletan.

□

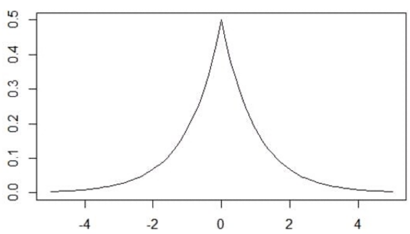
3.5.8 Poređenje raspodela koje su M-nejedinstvene

Razmotrićemo neke raspodele koje se koriste u statističkoj praksi, kao što su normalna, eksponencijalna, Laplasova i izvući ćemo neke zaključke o M-jedinstvenosti raspodela i njihovih transformacija stepena.

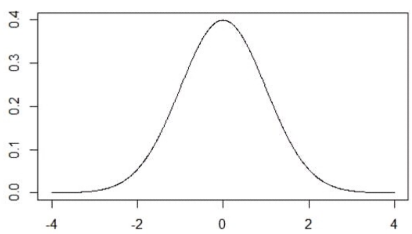
Počinjemo sa sledeće tri slučajne promenljive

$$\eta \sim \mathcal{L}(1), \;\; \theta \sim \mathcal{N}(0, 1), \;\; \xi \sim \mathcal{E}xp(1),$$

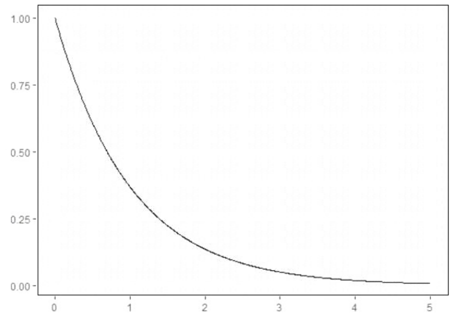
čije su gustine prikazane na Slikama 3.1, 3.2 i 3.3.



Slika 3.1: Grafik funkcije gustine Laplasove raspodele sa parametrom 1



Slika 3.2: Grafik funkcije gustine normalne raspodele sa parametrima 0 i 1



Slika 3.3: Grafik funkcije gustine eksponencijalne raspodele sa parametrom 1

Pretpostavimo da imamo dve raspodele F i G, sa istim nosačem, ili $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{R}_+$, i znamo da su obe M-nejedinstvene. Postavljamo pitanje: Koja od njih je "više" M-nejedinstvena? Očigledno, odgovor zavisi od toga kako definišemo meru nejedinstvenosti za raspodelu. Ako je raspodela M-jedinstvena, onda njena nejedinstvenost mora biti jednaka nuli, a time i njena jedinstvenost, recimo, mora biti jednaka 1.

S obzirom da M-jedinstvenost zavisi od repa raspodele ili od stope rasta momenata, možemo da predložimo, na primer, razmatranje odnosa repa i njegove granične vrednosti:

$$\Delta(x) = \frac{P\big[|X| > x\big]}{P\big[|Y| > x\big]} \quad \text{i}$$

$$\delta = \lim_{|x|\to\infty} \Delta(x)$$

Tada, u bilo koja od tri moguća slučaja, $\delta = 0$, $\delta = c$, (gde je c konačan pozitivan broj) i $\delta = \infty$, na prirodan način definišimo koja je raspodela "više" nejedinstvena. Korisno je napraviti poređenje između dve specifične M-nejedinstvene raspodele na celoj realnoj pravi $\mathbb{R}$.

Označimo sa F i G funkcije raspodela, redom, slučajnih promenljivih, $X = \eta^3$ i $Y = \theta^3$, gde $\theta \sim \mathcal{N}(0,1)\, i\ \eta \sim \mathcal{L}(1)$. Kao što znamo, obe funkcije raspodele, F i G su M-nejedinstvene. Možemo koristiti veličinu $\Delta(x)$ i njegovu graničnu vrednost δ da zaključimo da je "kub" normalne raspodele "manje" nejedinstven od "kuba" Laplasove raspodele.

Možemo napraviti još jedno zanimljivo poređenje, ako od X i Y uzmemo apsolutne vrednosti $|X|$ i $|Y|$. Sada je nosač njihovih funkcija raspodela $F_{|X|}$ i $G_{|Y|}$ pozitivna poluprava $\mathbb{R}_+$. Primetimo prvo da ako $\eta \in \mathcal{L}(1)$, onda raspodela apsolutne vrednosti $|\eta|$ je $\mathcal{E}xp(1)$, tj. $|\eta| = \xi$. Dakle, $|X| = \xi^3$ je kub eksponencijalne. Štaviše, $|\theta|$ je polu-normalna slučajna promenljiva, i otuda $|Y|$ je kub polu-normalne. Raspodela $F_{|X|}$ je M-nejedinstvena, jer to važi za raspodelu bilo kog stepena ξ^r za $r > 2$. Međutim, korišćenjem Krein-Linove tehnike, može se pokazati da je raspodela $G_{|Y|}$ M-jedinstvena. Različiti argumenti i detalji se mogu videti u [5] i [43].

Podsetimo se, raspodela kuba θ^3, $\theta \sim \mathcal{N}$ je M-nejedinstvena, ali, raspodela apsolutne vrednosti $|\theta^3|$ je M-jedinstvena. Ovaj fenomen se može objasniti na više načina. Obe θ^3 i $|\theta^3|$ su definisane preko originalne slučajne promenljive $\theta \sim \mathcal{N}$. Parametri nisu važni. Nosači obe raspodele su različiti, njihovi repovi su teški. Međutim, raspodela od θ^3 ima dva repa dok od $|\theta^3|$ samo jedan! Takođe, svaki od repova od θ^3 je ekvivalentan repu od $|\theta^3|$ u smislu da svi teže nuli sa istom brzinom kad $x \to \infty$ ili $-\infty$. Stoga, možemo povezati dva repa od θ^3 sa osobinom M-nejedinstvenosti, dok samo jedan rep od $|\theta^3|$ sa M-jedinstvenosti.
Paralelno sa kubom normalne, razmotrimo kub Laplasa i njegovu apsolutnu vrednost. Sa $\eta \sim \mathcal{L}(1)$, obe slučajne promenljive η^3 i $|\eta^3|$ imaju M-nejedinstvene raspodele. Razlog za obe (da budu M-nejedinstvene) je što su repovi raspodela od η^3 "prilično teški", ustvari dovoljno teški da izazovu nejedinstvenost raspodele od $|\eta^3|$.

Takođe je korisno, kada poredimo dve raspodele da pogledamo njihove momente. Odnos $m_k(F)/m_k(G)$ za pozitivne slučajne promenljive ili $m_{2k}(F)/m_{2k}(G)$ za proizvoljne slučajne promenljive, može se koristiti za izvođenje osobina raspodela F i G. Uzmimo, na primer, $X = \eta^3$ i $Y = \theta^3$, gde $\eta \sim \mathcal{L}(1)$ i $\theta \sim \mathcal{N}(0,1)$. Imamo $m_{2k}(X) = (6k)!$ i $m_{2k}(Y) = (6k-1)!!$ Momenti od X rastu sa k mnogo brže nego momenti od Y, tako da možemo koristiti takvo zapažanje kada diskutujemo o nejedinstvenosti ove dve M-nejedinstvene raspodele.

Drugi često korišćeni par transformacija slučajnih promenljivih zasniva se na ekponencijalnoj funkciji, i njenoj inverznoj, logaritamskoj funkciji. Spominjali smo M-nejedinstvenost lognormalne raspodele. Šta je sa drugim log-raspodelama? Kažemo da slučajna promenljiva $Y \sim \mathcal{L}og\mathcal{L}(1)$, ako $X = \ln Y$ ima Laplasovu raspodelu sa parametrom 1. Tako, $Y = e^X$ sa $X \sim \mathcal{L}(1)$. Funkcija gustine od Y se može lako napisati, i zaključiti da je raspodela od Y zaista "veoma teška", jednostavno ne postoje momenti. Dakle, mi čak ni ne pitamo da li je raspodela F_Y M-jedinstvena.

Konačno, hajde da ukratko napišemo još jedan način određivanja nejedinstvenosti raspodele. Ako je F sa gustinom f M-nejedinstvena, onda tražimo Stiltjesovu klasu $S(f,h)$. Klasa S se može okarakterisati brojem koji se zove *indeks različitosti* označen sa D_s i definisan na sledeći način:

$$D_s = E[|h(X)|] = \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| f(x) dx.$$

Nekoliko argumenata koji dovode do ove definicije i tumačenja indeksa D_s se mogu naći u [47]. Vrednosti od D_s su u intervalu $[0, 1]$; $D_s = 0$ ako i samo ako je raspodela od F M-jedinstvena. Veća vrednost D_s znači "više" nejedinstvenosti u Stiltjesovoj klasi $S(f, h)$. Međutim, jasno je, koliko je važan izbor pertubacije h. Indeks različitosti D_s se može koristiti za upoređivanje različitih M-nejedinstvenih raspodela.

3.5.9 Funkcije koje čuvaju ili narušavaju M-jedinstvenost

Za slučajnu promenljivu X koja ima neke od popularnih raspodela, ispostavilo se da su raspodele od X i X^2 M-jedinstvene, dok od X^3 M-nejedinstvene, i vrednost $r = 3$ je najmanji pozitivan ceo broj stepena tako da raspodela od X^r ili $|X|^r$ postaje M-nejedinstvena. Zanimljivo je pokrenuti pitanje misteriozne uloge broja 3 kao stepena od X kada "izgubimo" jedinstvenost u problemu momenta.
U sledećim tvrđenjima, $r = 3$ je najmanja vrednost stepena r kada raspodela od X^r ili $|X|^r$ postaje M-nejedinstvena.

(a) Ako X ima normalnu raspodelu, onda je raspodela od X^3 M-nejedinstvena.

(b) Ako X ima eksponencijalnu raspodelu, onda je raspodela od X^3 M-nejedinstvena.

(c) Ako X ima Laplasovu raspodelu, onda je raspodela od X^3 M-nejedinstvena.

(d) Ako X ima gama raspodelu, onda je raspodela od X^3 M-nejedinstvena.

(e) Ako X ima logističku raspodelu, onda je raspodela od X^3 M-nejedinstvena.

(f) Ako X ima inverznu Gausovu raspodelu, onda je raspodela od X^3 M-nejedinstvena.

Pitanje iznad je bilo o ulozi stepena 3. Da je ovo slučajnost sledi iz tvdrnje c) u Teoremi 3.5.2, koja implicira da je $r = 5$ (ne 3) najmanja pozitivna vrednost za r kada $|X|^r$ postaje M-nejedinstvena, za X sa normalnom raspodelom.

Pogledajmo takođe i logaritamsku funkciju koja narušava jedinstvenost normalne raspodele. Interesantno je proveriti da li je log-eksponencijalna raspodela M-jedinstvena, ili nije. Međutim, ako uzmemo slučajnu promenljivu X sa beta raspodelom na $(0, 1)$ i definišemo novu slučajnu promenljivu $Y := -\ln X$, sa $log - beta$ raspodelom, tada lako dobijamo da raspodela od Y, čiji je nosač $(0, \infty)$, M-jedinstvena. Dakle, u ovom slučaju logaritamska funkcija čuva jedinstvenost. Napomenimo, da ova funkcija narušava jedinstvenost Poasonove raspodele: $log - Poasonova$ raspodela je M-nejedinstvena (vidi [43], Primer 11.7).

3.6 Multidimenzionalni problem momenta

Dok je problem momenta za jednodimenzionalne raspodele generalno dobro razvijen i nekoliko rezultata je dostupno u literaturi, vrlo malo se radi za multidimenzionalne raspodele. Imajući u vidu Hardijev uslov, možemo uspostaviti novi i prilično opšti rezultat.

Pretpostavimo da je $X = (X_1, ...X_n)$ proizvoljan slučajan vektor u n-dimenzionalnom Euklidovom prostoru $\mathbb{R}^n$ sa svim multiindeksiranim momentima

$$m_{k_1,...,k_n} = E[X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n}], \quad k_j = 1, 2, ... , \quad j = 1, ..., n,$$

koji su konačni. Budući da je raspodela od X proizvoljna, ovo je Hamburgerov problem momenta.

Označimo sa $||X||$ Euklidovu dužinu od X, tj.

$$||X|| = \sqrt{||X||^2} = \sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2}$$

Teorema 3.6.1. *Pod gore uvedenim oznakama, pretpostavimo da jednodimenzionalna nenegativna slučajna promenljiva $||X||$ zadovoljava Kramerov uslov:*

$$E[e^{c||X||}] < \infty, \quad za\ neko\ c > 0.$$

Tada slučajni vektor $X \in \mathbb{R}^n$, ili ekvivalentno, njegova n-dimenzionalna funkcija raspodele je jedinstveno određena skupom multiindeksiranih momenata $\{m_{k_1,...,k_n}, \ k_j = 1, 2, ... , \ j = 1, ..., n\}$.

Dokaz: Kramerov uslov za $||X||$ implicira da je sam $||X||$ kao nenegativna slučajna promenljiva M-jedinstvena. Ovo je Stiltjesov problem momenta.
Međutim, Kramerov uslov za $||X||$ znači da Hardijev uslov važi za kvadrat $||X||^2$, i na osnovu Teoreme 3.2.6, $||X||^2$ je M-jedinstvena. Ovo je takođe Stiltjesov problem momenta.
Konačno, ostaje da se primeni rezultat iz [39] u kojem se navodi da ako je kvadrat $||X||^2$ M-jedinstven, ovo je Stiltjesov problem momenta, tada $X \in \mathbb{R}^n$ je M-jedinstvena, kao Hamburgerov problem momenta.

□

3.7 Mešovite raspodele stepenog reda: identifikacija preko M-jedinstvenosti

Neka je (X, θ) dvodimenzionalni slučajni vektor definisan na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Pretpostavimo da slučajna promenljiva X uzima vrednosti na skupu $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, ..., k, ...\}$ svih nenegativnih celih brojeva ili u na nekom od njegovih konačnih ili beskonačnih podskupova $\mathbb{N}_0^*$. Skup vrednosti slučajne promenljive θ je označen sa T i $T \subset [0, \infty)$.

Neka je F_t uslovna raspodela od X za $\{\theta = t\}$, gde je za svako $t \in T$, F_t je *raspodela stepenog reda* definisana sa:

$$F_t = \{f(k|t),\ k = 0, 1, 2, ...\} \text{ i } f(k|t) := P[X = k|\theta = t] = \frac{a_k t^k}{A(t)}. \tag{3.25}$$

Ovde su a_k, $k = 0, 1, ...$, nenegativni realni brojevi i

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

je *stepeni red* na $[0, \infty)$ koja odgovara funkciji raspodele F_t. Jedna od naših pretpostavki je da beskonačni red $A(t)$ ima strogo pozitivan radijus konvergencije ρ_A, $0 < \rho_A \leq \infty$. Slučaj $\rho = \infty$ pruža mnogo mogućnosti, dok je slučaj $\rho_A = 0$ trivijalan i nije od interesa. Među raspodelama stepenih redova spadaju binomna, Poasonova, negativna-binomna, logaritamska i njihovih nekoliko modifikacija.

Pretpostavimo da θ ima funkciju raspodele $G(t)$, $t \in T = [0, \rho_A)$. Dalje sledi da G može biti proizvoljna, diskretna ili apsolutno neprekidna, sa ograničenim ili neograničenim nosačem.
Sada, kažemo da "mešamo" raspodele familije $F = \{F_t,\ t \in T\}$ u odnosu na *raspodelu mešanja* G i tako dobijamo *mešovitu raspodelu* H, gde je

$$H = \{h_k,\ \ k = 0, 1, 2, ...\} \text{ sa } h_k = P[X = k] = \int_T f(k|t) dG(t). \tag{3.26}$$

Pretpostavimo da je $F = \{F_t, t \in T\}$ familija uslovnih raspodela, sa F_t definisanim u (3.25) fiksirana. Relacija (3.26) dovodi do pitanja: kako su raspodela mešanja G i mešovita raspodela H međusobno povezane? Ako sa datim F, postoji samo jedna raspodela mešanja G na T, koja proizvodi H, kažemo da je mešovita raspodela H *identifikovana*. Međutim, ako postoje bar dve raspodele na T, recimo G_1 i G_2, takve da

$$h_k = \textstyle\int_T f(k|t) dG_1(t) = \int_T f(k|t) dG_2(t) \text{ za sve } k = 0, 1, ..., \text{ ali } G_1 \neq G_2,$$

tada je mešovita raspodela $H = \{h_k\}$ *neidentifikovana*. To ustvari znači: ako je mešovita raspodela H identifikovana, onda možemo jedinstveno dobiti raspodelu mešanja G, dok G ne može biti dobijena jedinstveno ako je H neidentifikovana.

Ako se slučajni vektor (X, θ) smatra stohastičkim modelom neke pojave, onda je jasno iz gornje postavke da je model opisan pomoću trojke (F, G, H), gde je $F = \{F_t, t \in T\}$ skup uslovnih raspodela F_t (što je ekvivalentno poznavanju stepenog reda A), G je raspodela mešanja i H je dobijena mešovita raspodela. Kako se deo dostupnih informacija izražava u smislu mešovitih raspodela, za par (X, θ) možemo koristiti naziv *mešoviti model*. Tako, ako je mešovita raspodela H identifikovana, kažemo da je mešoviti model (X, θ) identifikovan. Obrnuto, ako je H neidentifikovana, model je neidentifikovan.

Jedna od naših pretpostavki je da brojevi a_k u (3.25), dakle, i koeficijenti reda $A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ su nenegativni i $A(t)$ ima radijus konvergencije $\rho_A \in (0, \infty]$. Ako je indeks $k \in \mathbb{N}_0$ takav da $a_k > 0$, to znači da je broj k atom raspodele F_t slučajne promenljive X

uslovno za $\{\theta = t\}$ za svako t i takođe bezuslovno. Pretpostavljamo uvek da je $a_0 > 0$, ali uopšteno, neki od preostalih koeficijenata mogu biti nule. Za sada, osim ako nije drugačije naznačeno, pretpostavljamo da su svi koeficijenti iz $A(t)$ strogo pozitivni, tj. $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, ..., $a_k > 0$,.... Ovo svojstvo od a_k zajedno sa relacijom (3.26) implicira da je h_k takođe strogo pozitivno i ovo je tačno za svaku raspodelu mešanja G. Kao u [41], definisaćemo "novu" funkciju, recimo $\tilde{G}$:

$$d\tilde{G}(t) := \frac{a_0}{h_0}\frac{1}{A(t)}dG(t), \quad t \in T = [0, \rho_A). \tag{3.27}$$

Lako je proveriti da je $\tilde{G} = (\tilde{G}(t),\, t \in T)$ funkcija raspodele. Dakle, postoji slučajna promenljiva, recimo $\tilde{\theta}$, čija je raspodela $\tilde{G}$, tj. $\tilde{\theta} \sim \tilde{G}$. Označavanjem sa $\tilde{m}_k$ k-ti red momenata od $\tilde{\theta}$, i takođe od $\tilde{G}$, imamo da je

$$\tilde{m}_k := E[\tilde{\theta}^k] = \int_T u^k d\tilde{G}(u) = \frac{a_0}{h_0}\frac{h_k}{a_k}, \quad \text{za} \quad k = 1, 2, ... \tag{3.28}$$

Dakle, $\tilde{\theta}$ ima konačne momente za svaki pozitivan red k, i, štaviše, relacija (3.28) nam govori da je niz momenata $\{\tilde{m}_k\}$ eksplicitno izražen u pogledu $\{a_k\}$ i $\{h_k\}$.
Iz gore navedenog, jasno je da je problem identifikacije direktno povezan sa Stiltjesovim problemom momenta. Formulisaćemo ovo na sledeći način.

Propozicija 3.7.1. *a) Neka je dat je stepeni red $A(t)$, $t \in [0, \rho_A)$. Funkcija raspodele $\tilde{G}$ jedinstveno određuje raspodelu mešanja G, i obrnuto.*

b) Identifikacija mešovite raspodele H, i dakle modela (X, θ), je ekvivalentna M-jedinstvenosti raspodele $\tilde{G}$.

Teorema 3.7.1. *i) (neidentifikovane mešovite raspodele) Pretpostavimo da je za svako $t \in [0, \infty)$ uslovna raspodela F_t je raspodela konačnog stepenog reda koja je definisana preko stepenog reda $A(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_k t^k + ... + a_{n^*} t^{n^*}$. Ovde je n^* fiksiran pozitivan ceo broj i koeficijenti a_0, a_1, ..., a_{n^*} su pozitivni; svi drugi koeficijenti u (3.25) su jednaki nuli. Tada za svaku raspodelu mešanja G, mešovita raspodela H je neidentifikovana.*

ii) (identifikovane mešovite raspodele) Pretpostavimo da je uslovna raspodela F_t, $t \in [0, \infty)$ raspodela beskonačnog stepenog reda zansnovana na stepenom redu $A(t)$, čiji je radijus konvergencije ρ_A, $0 < \rho_A \leq \infty$. Neka raspodela mešanja G ima ograničen nosač, $supp(G) \subset [0, \rho_A)$. Tada je mešovita raspodela H identifikovana.

iii) (više identifikovanih mešovitih raspodela) Posmatrajmo model (X^*, θ), gde je F_t^* raspodela beskonačnog stepenog reda zasnovana na stepenom redu $A^*(t)$ koja je definisana na sledeći način. Pretpostavimo da je u (3.25) beskonačno mnogo strogo pozitivnih koeficijenata, ali ne obavezno svi: $a_k > 0$ samo za indekse $k \in \mathbb{N}_0^*$, gde je $\mathbb{N}_0^*$ beskonačan skup celih brojeva:

$$\mathbb{N}_0^* := \{0 = k_0 < k_1 < k_2 < ...\} \subset \mathbb{N}_0 \quad \textit{sa} \;\; \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} \dfrac{1}{k_j} = \infty.$$

Tako je stepeni red $A^*(t) := \sum_{k \in \mathbb{N}_0^*} a_k t^k$, i neka je njen radijus konvergencije ρ_{A^*}, $0 < \rho_{A^*} \leq \infty$. Neka je G proizovljna raspodela mešanja sa ograničenim nosačem, $supp(G) \subset [0, \rho_{A^*})$. Tada je mešovita raspodela H identifikovana.

Lema 1: Neka je Y slučajna promenljiva koja odgovara raspodeli G na ograničenom intervalu $[a, b]$ sa $a \geq 0$. Pretpostavimo da je $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ niz pozitivnih realnih brojeva koji zadovoljavaju uslov $\sum_{n=1}^{\infty}(t_n)^{-1} = \infty$ i ograničen je sa nulom. Tada je raspodela G okarakterisana nizom momenata $\{E(Y^{t_n})\}_{n=1}^{\infty}$.

Teorema 3.7.2. *Neka je (X, θ) mešoviti model, gde je uslovna raspodela F_t raspodela beskonačnog stepenog reda definisana preko (3.25) sa strogo pozitivnim a_k i tako da stepeni red $A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ ima radijus konvergencije $\rho = \infty$. Ako je $G(t)$, $t \in T = [0, \infty)$, raspodela mešanja, dobijamo da je mešovita raspodela $H = \{h_k\}$ iz relacije (3.26).*

i) Pretpostavimo da je sledeći uslov zadovoljen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{h_k}\right)^{1/2k} = \infty. \tag{3.29}$$

Tada je mešovita raspodela H identifikovana.

ii) Pretpostavimo da je sledeći uslov zadovoljen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{h_k}\right)^{1/2k} < \infty. \tag{3.30}$$

Pretpostavimo još da je G apsolutno neprekidna sa gustinom g i da je funkcija količnika $g(t)/A(t)$, $t \geq 0$, strogo log-konknavna. Pod ovim uslovima mešovita raspodela H je neidentifikovana.

Dokaz: Deo $i)$ je jedan od rezultata iz [41]. Ideja je ispitati raspodelu $\tilde{G}$ i Karlemanovu veličinu $\tilde{C}$ izračunatu za niz momenata $\{\tilde{m}_k\}$: $\tilde{C} = C[\{\tilde{m}_k\}] = \sum_{k=1}^{\infty}(\tilde{m}_k)^{-1/2k}$. Uslov (3.29) lako implicira da je $\tilde{C} = \infty$. Dakle, raspodela $\tilde{G}$ je M-jedinstvena. S obzirom da $\tilde{G}$ jedinstveno određuje raspodelu mešanja G, u pogledu Propozicije 3.7.1, mešovita raspodela H je identifikovana.
Za deo $ii)$, vidimo da je funkcija raspodele $\tilde{G}$ apsolutno neprekidna sa gustinom $\tilde{g}(t) = \tilde{c}g(t)/A(t)$, $t \geq 0$, gde je $\tilde{c}$ normalizirajuća konstanta. Sada posmatramo čak i za proizvoljnu G, uslov (3.30) vodi ka konačnoj Karlemanovoj veličini izračunatoj za momente $\{\tilde{m}_k\}$ od $\tilde{G}$, tj. $C[\{\tilde{m}_k\}] < \infty$. Štaviše, uslov iz količnika $g(t)/A(t)$ daje da je gustina $\tilde{g}$ strogo log-konkavna. Tako smo u poziciji da primenimo Teoremu 1 iz [36] i zaključimo da je raspodela $\tilde{G}$ M-jedinstvena. Kao posledica, postoji beskonačno mnogo izbora za G i oni su svi proizvod iste mešovite raspodele H, tako da je H neidentifikovana.

□

Teorema 3.7.3. *Pretpostavimo da je raspodela mešanja G apsolutno neprekidna, i da ima gustinu g koja je pozitivna. Neka su, dalje, g i stepeni red A takve da je Kreinova veličina, izračunata za količnik g/A konačna, tj.*

$$K[g/A] = \int_0^{\infty} \frac{-\ln[g(x^2)/A(x^2)]}{1 + x^2} dx < \infty. \tag{3.31}$$

Tada je mešovita raspodela H neidentifikovana.

Dokaz: Pošto je $\tilde{g}(t) = (a_0/h_0)g(t)/A(t)$ za $t > 0$, gornji uslov (3.31) i elementarna svojstva integrala zajedno impliciraju da je Kreinova veličina $K[\tilde{g}]$ konačna: $K[\tilde{g}] < \infty$. Dakle, raspodela $\tilde{G}$ je M-nejedinstvena, odnosno, $\tilde{G}$ nije jedinstveno određena njenim momentima. Stoga, iz Propozicije 3.7.1 *b*), mešovita raspodela H je neidentifikovana.

□

Teorema 3.7.4. *Neka je (X, θ) mešoviti model opisan gore, i neka je g gustina od G. Nadalje, neka je količnik g/A pozitivno ograničen sa desne strane sa 0, i g i A su takve da je Kreinova veličina K izračunata za količnik g/A divergentna:*

$$K[g/A] = \int_0^\infty \frac{-\ln[g(x^2)/A(x^2)]}{1+x^2}dx = \infty \tag{3.32}$$

i za neko fiksirano $x_0 > 0$,

$$L[g(x)/A(x)] \nearrow \infty, \ \ kad \ \ x_0 \leq x \to \infty.$$

Pod ovim uslovima, mešovita raspodela H je identifikovana.

Dokaz: Uslov (3.32) implicira da gustina $\tilde{g}$ ima divergentnu Kreinovu veličinu $K[\tilde{g}] = \infty$. Dakle, kombinujući ovo sa Linovim uslovom, zaključujemo da je raspodela $\tilde{G}$ sa gustinom $\tilde{g}$ M-jedinstvena. Pozivajući se na Propoziciju 3.7.1, mešovita raspodela H je identifikovana.

□

3.7.1 Mešoviti modeli eksponencijalnog tipa

Analizirajmo model (X, θ) pod pretpostavkom da raspodela mešanja G i stepeni red A imaju specijalan oblik, odnosno, da su obe eksponencijalnog tipa.
Koristimo standardnu oznaku $\mathcal{RV}(\rho)$, gde $\rho \in (-\infty, \infty)$, za klasu merljivih i pozitivnih funkcija $u(t)$, $t \in [0, \infty)$, koje su regularno varirajuće u beskonačnosti sa eksponentom ρ. Ako $u \in \mathcal{RV}(\rho)$ znači da $u(tx)/u(t) \to x^\rho$ kad $t \to \infty$ za sve $x > 0$. Ako je eksponent $\rho = 0$, tada $\mathcal{RV}(0)$, obično označečeno sa $\mathcal{SV}$, se zove klasa sporo varirajućih funkcija. Za detalje vidi [7], [8] i [13].

Pretpostavka 1: Neka je $v_1 = (v_1(t),\, t \geq 0)$ pozitivna funkcija takva da $v_1 \in \mathcal{RV}(\rho_1)$ za neko $\rho_1 > 0$. Definišimo stepeni red $A = (A(t),\, t \geq 0)$ da bude $A(t) = \exp[v_1(t)]$, $t \geq 0$. Takođe pretpostavimo da je $A(t)$ beskonačno diferencijabilna funkcija sa Tejlorovim/Makleronovim razvojem $A(t) = \sum_{k=0}^\infty a_k t^k$ konvergentnim za sve $t \geq 0$. Dakle, radijus konvergencije od $A(t)$ je $\rho_A = \infty$. Konačno, pretpostavimo da su svi koeficijenti a_k, $k = 0, 1, 2, ...$, strogo pozitivni.

Pretpostavka 2: Neka je $G = (G(t),\, t \geq 0)$ apsolutno neprekidna funkcija raspodele sa gustinom g sledećeg eksponencijalnog tipa:

$$g(t) = c\, u(t) \exp[-v(t)], \ \ t > 0.$$

Ovde su u i v pozitivne funkcije takve da $u \in \mathcal{RV}(\rho_0)$ i $v \in \mathcal{RV}(\rho_2)$ za neke $\rho_0 > -1$ i $\rho_2 > 0$; $c > 0$ je normalizirajuća konstanta.

Koristimo funkcije A i g opisane u Pretpostavkama 1 i 2 da definišemo mešoviti model (X, θ), ekvivalentno, trojku (F, G, H). Kao na početku ovog poglavlja, uslovna raspodela F_t je raspodela beskonačnog stepenog reda, definisana u (3.25). Sa raspodelom mešanja G, koristimo relaciju (3.26) da dobijemo mešovitu raspodelu H.

Teorema 3.7.5. *Pretpostavimo da je (X, θ) mešoviti model takav da su F, G i H definisani kao gore. Neka su ρ_1 i ρ_2 eksponenti uvedeni u Pretpostavkama 1 i 2, redom. Tada važi sledeće:*

i) ako je $\max\{\rho_1, \rho_2\} > \frac{1}{2}$, mešovita raspodela H je identifikovana;

ii) ako je $\max\{\rho_1, \rho_2\} < \frac{1}{2}$, mešovita raspodela H je neidentifikovana.

Dokaz: Sa A, ρ_1, g i ρ_2 kao u Pretpostavkama 1 i 2, razmatramo funkciju gustine $\tilde{g}(t) := (a_0/h_0)g(t)/A(t)$, $t > 0$. Neka je $\tilde{G}$ odgovarajuća funkcija raspodele i $\tilde{\theta}$ slučajna promeniljiva takva da $\tilde{\theta} \sim \tilde{G}$. Vidi se da je $\tilde{g}(t) = \tilde{c}u(t)\exp[-\tilde{v}(t)]$, $t > 0$, gde $\tilde{v}(t) = v(t) + v_1(t)$ i $\tilde{c}$ je normalizirajuća konstanta. Štaviše, $\tilde{v} \in \mathcal{RV}(\tilde{\rho})$ sa $\tilde{\rho} = \max\{\rho_1, \rho_2\}$. S obzirom da je $\rho_1 > 0$ i $\rho_2 > 0$, slučajna promenljiva $\tilde{\theta}$ ima sve momente konačne. Ako je $\tilde{\rho} \geq 1$, $\tilde{\theta}$ ima funkciju generatrisu momenata i dakle raspodela $\tilde{G}$ je M-jedinstvena. U ovom slučaju je zaključak jasan; Propozicija 3.7.1 b) govori nam da je mešovita raspodela H identifikovana. Ako je $\tilde{\rho} < 1$, ne postoji funkcija generatrisa momenata, pa $\tilde{G}$ ima težak rep (kad $t \to \infty$), ali je još uvek moguće da $\tilde{G}$ bude M-jedinstvena. Potreban nam je rezultat (vidi Lemu 2 ispod), koji je posebno povezan sa [35] i [13]. Autori ovih radova daju prilično opšte uslove pod kojima je raspodela M-jedinstvena ili je M-nejedinstvena. U oba slučaja, vrednost $\tilde{\rho} = \frac{1}{2}$ je kritična. Preciznije, ako je $\tilde{\rho} > \frac{1}{2}$, raspodela $\tilde{G}$ je M-jedinstvena, dok je za $\tilde{\rho} < \frac{1}{2}$, $\tilde{G}$ je M-nejedinstvena. Dakle, po Propoziciji 3.7.1, zaključujemo da je mešovita raspodela H identifikovana za $\tilde{\rho} > \frac{1}{2}$ i neidentifikovana za $\tilde{\rho} < \frac{1}{2}$.

□

Lema 2: Neka je $G = (G(t),\, t \geq 0)$ apsolutno neprekidna funkcja raspodele čija je gustina g kao u Pretpostavci 2. Tada:

a) G je M-jedinstvena ako je $\rho_2 > \frac{1}{2}$;

b) G je M-nejedinstvena ako je $\rho_2 < \frac{1}{2}$.

Dokaz: Kao što smo već ranije govorili, presudno za M-jedinstvenost raspodele, u našem slučaju G je asimptotsko ponašanje njenog repa $1 - G(t)$. Ovo je razlog zašto uključujemo ponašanje gustine g za veliko t. Jasno, $g(t)$ može da zavisi od obe regularno varirajuće funkcije iz neke klase $\mathcal{RV}(\rho)$ i sporo varirajuće funkcije iz klase $\mathcal{SV} = \mathcal{RV}(0)$. Važi: ako $l \in \mathcal{SV}$ i $\epsilon > 0$, onda imamo $t^{-\epsilon}\, l(t) \to 0$ i $t^{\epsilon}\, l(t) \to \infty$ kad $t \to \infty$ (vidi str. 16 u [7]). Kombinujući ovu činjenicu sa našim pretpostavkama i shodno diskusiji u [35] (vidi Teoremu 1, str. 108), dolazimo do tvrdnje a). Konačno, tvrdnja b) je jedan od rezultata iz [13] (tj. Teorema 6.1 a)).

□

3.7.2 Ilustrativni primeri

Primer 3.7.1. *Posmatrajmo mešoviti model (X, θ), gde je F_t Poasonova raspodela sa parametrom $t > 0$. Ovo je raspodela beskonačnog stepenog reda sa $a_k = 1/k!$, stepeni red je $A(t) = e^t$ i njegov radijus konvergencije je $\rho_A = \infty$. Pretpostavimo sada da slučajna promenljiva θ ima gama raspodelu, $\theta \sim \gamma(a, b)$, za neke $a > 0$, $b > 0$, tako da, ovo će biti raspodela mešanja G. Poznato je da bezuslovna raspodela od X, tj. mešovita raspodela $H = \{h_k\}$, je negativna binomna raspodela. Zato postavljamo obrnuto pitanje: ako je rezultat mešanja Poasonove raspodele negativna binomna raspodela, da li je tačno da je gama raspodela jedina raspodela mešanja? Odgovor je "da", i on sledi iz Teoreme 3.7.2.*
Zaista, prvo koristimo formulu (3.26) i eksplicitno nalazimo mešovitu raspodelu H:

$$H = \{h_k,\ k = 0, 1, ...\},\ \textit{gde je}\quad h_k = \frac{b^a \Gamma(k+a)}{k!(1+b)^{k+a}\Gamma(a)}.$$

Sledeći korak je da napišemo količnik a_k/h_k i analiziramo ponašanje $(a_k/h_k)^{1/2k}$. Koristeći svojstva gama funkcije i Stirlingovom formulom dolazimo do divergencije reda (3.29). Dakle, model (X, θ) je identifikovan. Drugim rečima, gama raspodela je jedina raspodela mešanja u ovom slučaju.

Primer 3.7.2. *Neka je stepeni red $A = (A(t),\, t \geq 0)$ i raspodela mešanja $g = (g(t),\, t > 0)$ budu oblika:*

$$A(t) = c_1 \exp[t^{\rho_1}],\ t \geq 0\ \ i\ \ g(t) = c_2 t^{\rho_0} \exp[-t^{\rho_2}],\ t > 0,$$

za neke $\rho_1 > 0$, $\rho_0 > -1$, i $\rho_2 > 0$. Pratimo istu proceduru kao što je opisano ranije i definišemo mešoviti model (X, θ) i njegovu trojku (F, G, H). Identifikacija modela zavisi od vrednosti ρ_1 i ρ_2.
Identifikacija gama-mešavine Poasonove raspodele (vidi Primer 3.7.1) nije iznenađujuća u pogledu Teoreme 3.7.5. Jednostavno, u ovom slučaju $A(t) = e^t$, pa je $\rho_1 = 1$. Štaviše, $\rho_0 = a - 1$ za neko $a > 0$, $\rho_2 = 1$ i dakle $\tilde{\rho} \geq 1$. S druge strane, za fiksiran stepeni red $A(t) = c_1 \exp[t^{\rho_1}]$ sa eksponentom $\rho_1 \in (0, \frac{1}{2})$, mešovita raspodela H je identifikovana ili neidentifikovana u zavisnosti da li je eksponent $\rho_2 > \frac{1}{2}$ ili $\rho_2 < \frac{1}{2}$.

Primer 3.7.3. *Kako postupati sa mešovitim modelima (X, θ) uključujući eksponente $\rho_1 = \frac{1}{2}$ i $\rho_2 = \frac{1}{2}$? Jasno, ovaj ograničen slučaj nije pokriven Teoremom 3.7.5.*
Posmatrajmo stepeni red $F_t = \{f(k|t)\}$ definisan kao što sledi:

$$f(k|t) = P[X = k|\theta = t] = \frac{1}{(2k)!}\frac{t^k}{A(t)}, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Slučajna promenljiva X uzima vrednosti na skupu $\mathbb{N}_0$ i nalazimo sledeći kompaktan izraz za funkciju $A(t)$:

$$A(t) = \frac{1}{2}\big(e^{\sqrt{t}} + e^{-\sqrt{t}}\big) = \frac{1}{2}\frac{e^t + 1}{e^{\sqrt{t}}}, \ t \geq 0.$$

Uzmimo raspodelu mešanja G sa gustinom g:

$$g(t) = \frac{1}{2}e^{-\sqrt{t}}, \ \ t > 0.$$

Iz izraza za funkcije A i g jasno je da zaista $\rho_1 = \frac{1}{2}$, $\rho_2 = \frac{1}{2}$. Teorema 3.7.5 ne može da okarakteriše identifikaciju mešovite raspodele H. Naš zaključak će biti zasnovan na svojstvima gustine $\tilde{g}(t)$. Koristimo Krein-Linove tehnike. Prvo, lako možemo proveriti da je Kreinova veličina za $\tilde{g}$ divergentna: $K[\tilde{g}] = \infty$. Tako nam je potrebno ponašanje Linove funkcije $L[\tilde{g}(t)]$ kad $t \to \infty$. Pošto je $L[\tilde{g}(t)] = (\ln 2)^{-1}\, t\, e^t/(e^t + 1)$, lako vidimo da je ova funkcija strogo monotona i divergira ka beskonačnosti, tj. Linov uslov je zadovoljen. Dakle, raspodela $\tilde{G}$ je M-jedinstvena, i preko Propozicije 3.7.1, mešovita raspodela H je identifikovana.

Primer 3.7.4. *Ako želimo da posmatramo model sa $\rho_1 = \frac{1}{4}$ i $\rho_2 = \frac{1}{3}$, možemo uzeti raspodelu stepenog reda $F_t = \{f(k|t)\}$ date sa:*

$$f(k|t) = P[X = k|\theta = t] = \frac{1}{(4k)!}\frac{t^k}{A(t)}, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

gde je

$$A(t) = \frac{1}{4}\big(e^{t^{1/4}} + e^{-t^{1/4}}\big) + \frac{1}{2}\cos(t^{1/4}), \ \ t > 0.$$

Ovaj eksplicitan izraz stepenog reda $A(t)$ je pronađen u Formuli 5.2.7.10 iz [38]. Pretpostavimo sada da raspodela mešanja G ima sledeću gustinu g:

$$g(t) = ce^{-t^{1/3}}, \ \ t > 0 \ (c \text{ je normalizirajuća konstanta}).$$

Iz izraza za A i g imamo da je zaista $\rho_1 = \frac{1}{4}$ i $\rho_2 = \frac{1}{3}$.
Sledeći korak je da vidimo da gustina $\tilde{g}$ raspodele $\tilde{G}$ ima sledeće ponašanje repa:

$$\tilde{g}(t) \sim \tilde{c}\big(e^{t^{1/3}} + e^{-t^{1/4}}\big), \ \ \text{za veliko } t.$$

Postoji različiti načini da nađemo odgovor na pitanje da li je mešovita raspodela H dobijana iz ovih A i G identifikovana ili neidentifikovana.
Nalazimo se u dobroj poziciji da primenimo Teoremu 3.7.5 (ii). Krucijalno u ovom slučaju je $\tilde{\rho} = \max\{\rho_1, \rho_2\} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$. Čak i bez pozivanja na ovu teoremu, vidimo da slučajna promenljiva sa gustinom $\tilde{g} = \tilde{c}\, g(t)/A(t)$, gde su g i A dati gore, ima sve momente konačne. Kako bi se uspostavila M-nejedinstvenost raspodele $\tilde{G}$ čija je gustina $\tilde{g}$,

ispitujemo Kreinovu veličinu $K[\tilde{g}]$*. Lako nalazimo da je* $K[\tilde{g}] < \infty$*. Dakle, raspodela* $\tilde{G}$ *je M-nejedinstvena, i u pogledu Propozicije 3.7.1, mešovita raspodela* H*, bazirana na* A *i* G *u ovom slučaju, je neidentifikovana.*

Drugi pristup je da primenimo Teoremu 3.7.2 (ii). Znamo koeficijente a_k *i koristimo formulu (3.26) da izračunamo* h_k*. Iako ne možemo da definišemo eksplicitno izraze za* h_k*, možemo da koristimo neka svojstva gama funkcije i Stirlingovu formulu, i da pokažemo konvergenciju reda* $\sum_{k=1}^{\infty}(a_{k/h_k})^{1/2k}$ *i dakle konačnost Karlemanove veličine. Zatim, moramo da proverimo da je gustina* $\tilde{g}(t) = \tilde{c}g(t)/A(t)$, $t \geq 0$*, strogo log-konkavna. Tako će neidentifikacija mešovite raspodele* H *slediti iz Teoreme 3.7.2 (ii).*

Primer 3.7.5. *Ovo je slučaj koji je "blizak" Primeru 3.7.4. Posmatramo istu raspodelu stepenog reda* F_t *datu gore, i umesto gustine mešanja* $g(t) = ce^{-t^{1/3}}$*, uzimamo sledeću gustinu:*

$$g(t) = \frac{1}{4}\, t^{-3/4}\, e^{-t^{1/4}}, \quad t > 0.$$

Mešoviti model (X, θ) *je dobro definisan i ako ponovimo isto rezonovanje kao gore, dolazimo do zaključka da u ovom slučaju mešovita raspodela* H *je neidentifikovana. Možemo prepoznati da* $g(t) = \dfrac{1}{4}t^{-3/4}e^{-t^{1/4}}$, $t > 0$*, je upravo ona gustina slučajne promenljive* ξ^4*, gde* $\xi \sim \mathcal{E}xp(1)$*. Raspodela sa gustinom* g *je M-nejedinstvena. Neidentifikovana mešovita raspodela* H *je posledica "spore" stope rasta eksponencijalnog stepenog reda* $A(t)$*, kad* $t \to \infty$*. Ovde je stopa jednaka* $1/4$*. Da je stopa bila* 1*, kao za Poasonovu raspodelu, pod istom gustinom mešanja* g *(gustina od* ξ^4*), mešovita raspodela bi bila identifikovana.*

Glava 4

Problem momenta u stohastičkim finansijskim modelima

Centralno pitanje u finansijskoj ekonomiji je utvrđivanje cene finansijskog derivata s obzirom na informacije o primarnoj finansijskoj aktivi. Uzmimo primer evropske kupovne opcije sa ugovorenom cenom K i datumom dospeća T. Jasno, naplata ove opcije je $\max(S_T - K, 0)$, odnosno nenegativna je, ima neku vrednost. Ključni problem u finansijskoj ekonomiji je odrađivanje cene takve opcije. To je upravo područje dobitnika Nobelove nagrade 1997. godine dodeljene Robertu Mertonu i Majronu Šolsu. Pod pretpostavkom da cena finansijske aktive prati geometrijsko Braunovo kretanje i pretpostavkom da nema arbitraže, Blek-Šols formula daje jasan i uverljiv odgovor na ovo pitanje.

4.1 Odnosi između cena akcija i cena opcija

Nejedinstvenost lognormalne raspodele je činjenica koja nam govori da moramo biti oprezni kada proučavamo metode Blek-Šols tipa koristeći momente. Za modeliranje različitih segmenata tržišta, pored geometrijskog Braunovog kretanja, koristi se i nekoliko drugih raspodela sa teškim repom. Nije iznenenađujuće da je većina njih M-nejedinstvena.

Napisaćemo kratak spisak mogućih i razumnih pitanja koja proizilaze iz proučavanja bilo kog stohastičkog finansijskog modela. Uglavnom postoji jedna ili više aktiva u takvom modelu koji je opisan u stohastičkom proscesu S_t, $t \in [0, T]$.

- Direktno pitanje: Prilikom određivanja cene evropskog kontingenta, postoji naplata f koja se plaća u trenutku dospeća potraživanja T. U tom kontekstu, koje su najbolje moguće granice za cenu potraživanja na osnovu poznavanja prvih n momenata cena akcije na dan dospeća?
- Obrnuto pitanje: Ne znamo cenu akcije i dostupne su nam posmatrane cene opcija. Da li možemo izvesti zaključak o dinamici cene akcije?
- S obzirom na posmatrane cene opcija, da li možemo pronaći granice za cene drugih derivata na istoj akciji?

- Kako odgovoriti na prethodna pitanja ako postoje troškovi transkacije?
- Da li možemo odrediti cenu opcija ako znamo sve momente cene akcija na dan dospeća?

Ideja istraživanja odnosa cena opcija i cena akcija na osnovu pretpostavke da nema arbitrže na tržištu ima dugu istoriju u literaturi finansijske ekonomije. Otkriće moderne stohastičke finansijske teorije je da bez-arbitražna finansijska tržista imaju veoma specijalnu verovatnosnu strukturu, martingalsku strukturu u odnosu na tzv. martingalsku meru. Harison, Pliska i Kreps su 1980-ih proučavali Blek-Šolsov model i izveli rezultate koji su uključivali reprezentaciju preko martingala. Harison i Kreps su primetili kako se ovi rezultati mogu generalizovati sa jednom veoma opštom pretpostavkom da su cene na tržištu kvadratno integrabilne. Iz ovog pristupa proizišla je i *Fundamentalna Teorema Cena Aktiva na tržištu* koja se bazira na konceptu ne-arbitraže (tj. konceptu ne garantovanog profita bez rizika). Ova teorema daje uslove pod kojima je tržište esencijalno bez arbitraže, tj. govori da je to zadovoljeno ako i samo ako postoji ekvivalentna martingalna mera u odnosu na koju je proces cena aktiva zapravo martingal. Ako je ta mera čak i jedinstvena, onda se može naći fer model cena tako što se uzme očekivanje u odnosu na tu cenu. Harrison i Pliska su pokazali da u Blek-Šolsovom modelu postoji ovakva martingalna mera i da je ona jedinstvena. Ali, uopšteno govoreći, ovakva martingalna mera ne mora da postoji, već je za to potrebno da tržište zadovoljava određene uslove. U ovom slučaju je to osobina bez-arbitraže. Sa ovom teoremom dozvoljeno nam je da pojednostavimo proces ocenjivanja cena na izračunavanje očekivanih vrednosti. Ključna razlika je što ovde ne uzimamo očekivanje u odnosu na originalnu verovatnosnu meru, već u odnosu na veštačku rizik-neutralnu verovatnosnu meru, tj. u odnosu na meru za koju je proces (model) cena akcija jedan martingal. Naravno, ove dve verovatnosne mere jesu ekvivalentne međusobno.

4.2 Stroge granice za kupovnu opciju bazirane na momentima

Neka je $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq ... \subseteq \mathcal{F}_t$ niz σ-algebri na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}_t, P_t)$. Pretpostavljamo da na tržistu hartija od vrednosti nema arbitraže i da se ono sastoji od dve aktive. Jedna aktiva je rizična aktiva sa cenom $S_t \geq 0$, $t \geq 0$. Druga aktiva je finansijska aktiva na tržištu novca sa bezrizičnom stopom prinosa r.

Nadalje, neka $E_t[\cdot] = E_t[\cdot|\mathcal{F}_t]$ označava uslovno očekivanje u vremenu t u odnosu na jedinstvenu ekvivalentnu meru verovatnoće $F_t(x) = P_t(S_t \geq x)$ i $P_t = P_t(\cdot|\mathcal{F}_t)$ označava uslovnu rizik-neutralnu verovatnoću za vreme t.
Počećemo pozivajući se na rezultate o očekivanoj naplati opcije i sadašnje cene dobijene iz radova Loa i Grandija ([27] i [12]).
Posmatramo evropsku kupovnu opciju na rizičnoj aktivi sa ugovorenom cenom K i koja ističe u trenutku T. Očekivana naplata opcije u vremenu t je $E_t[\max(S_T - K, 0)] = E_t[(S_T - K)^+]$ i njena rizik-neutralna cena za vreme t je $e^{-r(T-t)} \cdot E_t[(S_T - K)^+]$. Lo je 1987. godine pokazao da u vremenu t očekivanje $E_t[(S_T - K)^+]$ zadovoljava sledeće stroge nejednakosti:

$$E_t[(S_T-K)^+] \leq \begin{cases} m_t - K\dfrac{m_t^2}{\sigma_t^2+m_t^2}, & K \leq \dfrac{\sigma_t^2+m_t^2}{2m_t} \\ \dfrac{1}{2}(m_t - K + \sqrt{(K-m_t)^2+\sigma_t^2}), & inače \end{cases} \tag{4.1}$$

gde je $m_t = E_t[S_T]$ i $\sigma_t^2 = E_t[S_T^2] - m_t^2$. Grandi je 1991. godine dokazao da za $p \geq 1$, gde je p p-ti momenat od S_T, važi sledeća stroga nejednakost:

$$E_t[(S_T-K)^+] \leq \begin{cases} (E_t[S_T^p])^{1/p} - K, & K \leq \dfrac{p-1}{p}(E_t[S_T^p])^{1/p} \\ (E_t[S_T^p])\,\dfrac{1}{p}\,(\dfrac{p-1}{pK})^{p-1}, & inače \end{cases} \tag{4.2}$$

Pretpostavimo da pored poznatog očkivanja $m_t = E_t[S_T]$ i varijanse $\sigma_t^2 = E_t[S_T^2] - m_t^2$, kao u Loovoj (1987.god.) postavci, takođe znamo verovatnću repa u vremenu t, $\pi_t = 1 - F_t(K) = P_t(S_T > K)$ odnosno, verovatnoću da će u trenutku t kupovna opcija biti opcija sa dobitkom (in-the-money). Sledeća teorema daje lako računaje strogih granica za očekivanu naplatu evropske kupovne opcije u smislu karakteristika m_t, σ_t^2 i π_t na osnovu raspodele cene aktive.

Teorema 4.2.1. *Važe sledeće stroge nejednakosti:*

$$(m_t - K)\pi_t \leq E_t[(S_T-K)^+] \leq (m_t-K)\pi_t + \sigma_t\sqrt{\pi_t - \pi_t^2} \tag{4.3}$$

Dokaz: Imamo da za sve slučajne promenljive X i Y važi sledeći identitet:

$$E_t[XY] = E_t(X)E_t(Y) + \frac{1}{2}E_t(X-X^{'})(Y-Y^{'}) \tag{4.4}$$

gde je $(X^{'}, Y^{'})$ nezavisna kopija[3] (X,Y), pod uslovom da očekivanja postoje. Relacija (4.4) je probabilistički analog Korkinovom identitetu (vidi npr., [31], [2]).

$$\int_a^b p(s)ds \int_a^b p(s)g(s)h(s)ds - \int_a^b p(s)g(s)ds \int_a^b p(s)h(s)ds$$
$$= \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b p(s)p(u)(g(s)-g(u))(h(s)-h(u))dsdu$$

što važi za sva merljiva preslikavanja p, g, h : $[a,b] \to \mathbb{R}$ za koje integrali postoje i konačni su. Neka je $S_T^{'}$ nezavisna kopija od S_T. Uzimajući u (4.4) $X = S_T - K$, $Y = I(S_T > K)$, $X^{'} = S_T^{'} - K$, $Y^{'} = I(S_T^{'} > K)$, gde $I(\cdot)$ označava funkciju indikatora, dobijamo:

$$\begin{aligned} E_t[(S_T-K)^+] &= E_t[(S_T-K)I(S_T>K)] \qquad (4.5)\\ &= (E_t(S_T)-K)E_t(I(S_T>K)) + \frac{1}{2}E_t[\{S_T - S_T^{'}\}\{I(S_T>K) - I(S_T^{'}>K)\}] \\ &= (m_t-K)\pi_t + \frac{1}{2}E_t[(S_T-S_T^{'})(I(S_T>K)-I(S_T^{'}>K))]. \end{aligned}$$

[3]Slučajni vektor $(X^{'}, Y^{'})$ je nezavisna kopija slučajnog vektora (X,Y) ako su $(X^{'}, Y^{'})$ i (X,Y) nezavisni vektori sa identičnom raspodelom.

Pošto je lako videti da je $E_t[\{S_T - S_T^{'}\}\{I(S_T > K) - I(S_T^{'} > K)\}] \geq 0$, dobijamo levu stranu nejednakosti (4.3). Preko Helderove nejednakosti,

$$
\begin{aligned}
& E_t[\{S_T - S_T^{'}\}\{I(S_T > K) - I(S_T^{'} > K)\}] \\
\leq & \left[E_t(S_T - S_T^{'})^2\right]^{1/2}\left[E(I(S_T > K) - I(S_T^{'} > K))^2\right]^{1/2} \\
& = 2\sigma_t\sqrt{\pi_t - \pi_t^2}.
\end{aligned}
$$

Ovo i (4.5) impliciraju gornju granicu u (4.3).

Da bismo pokazali da je gornja granica u (4.3) stroga, uzimamo $K = \sqrt{3}/3$ i slučajnu promenljivu S_T uniformno raspoređenu na $[0, 2\sqrt{3}/3]$. Tada $m = E(S_T) = \sqrt{3}/3$, $\pi = P(S_T > K) = \frac{1}{2}$, $\sigma^2 = E(S_T^2) - m^2 = 1/9$ i $E_t[(S_T - K)^+] = \frac{1}{6} = (m-K)\pi + \sigma\sqrt{\pi - \pi^2}$. Strogost donje granice u (4.3) sledi, na primer, iz izbora $S_T = 1$ i $K = \frac{1}{2}$. Dokaz je kompletan.

$\square$

Neka je sada $0 \leq a_t < b_t$, $T \geq 1$ i pretpostavimo da cena aktive S_t uzima vrednosti na intervalu $[a, b]$. Nadalje pretpostavimo da je cena S_T apsolutno neprekidna. Označimo sa f_t uslovnu gustinu cene i sa $F_t(x) = \int_{-\infty}^{x} f_t(s)ds$ njenu uslovnu raspodelu u odnosu na filtracionu algebru $\mathcal{F}_t$.

Sledeća teorema daje granice u vremenu t za očekivanu naplatu evropske kupovne opcije sa ugovorenom cenom K na aktivu koja ističe u trenutku T.

Teorema 4.2.2. *Važe sledeće stroge nejednakosti:*

1. *Ako $f_t \in L_\infty[a, b]$ (uslovno na $\mathcal{F}_t$),*

$$E_t[(S_T - K)^+] \leq (m_t - K)\pi_t + \frac{b-a}{2}(b-K)(K-a)||f_t||_\infty^2 I(a < K < b). \quad (4.6)$$

2. *Ako $f_t \in L_p[a, b]$ (uslovno na $\mathcal{F}_t$), $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,*

$$
\begin{aligned}
& E_t[(S_T - K)^+] \leq (m_t - K)\pi_t + \quad (4.7) \\
+ ||f_t||_p^2 & \left(\frac{(b-a)^{q+2} - (b-K)^{q+2} - (K-a)^{q+2}}{(q+1)(q+2)}\right)^{1/q} I(a < K < b).
\end{aligned}
$$

3. *I,*

$$E_t[(S_T - K)^+] \leq (m_t - K)\pi_t + (b-a)I(a < K < b). \quad (4.8)$$

Napomena 1: Gornja granica u (4.3) i procene (4.6)-(4.8) mogu biti bolje od onih dobijenih u [27] i [12]. Na primer, ako je S_T uniformno distribuirana na $[0,b]$ i $K = b/3$, tada gornja granica u (4.3) daje procenu $E_t[(S_T - K)^+] \leq 0.247b$, dok iz (4.1) i (4.2) sledi da $E_t[(S_T - K)^+] \leq 0.250b$ i tačna vrednost od $E_t[(S_T - K)^+]$ je $0.222b$. Kao što je primećeno u dokazu Teoreme 4.2.2., u slučaju uniformno distribuirane slučajne promenljive S_T, nejednakost (4.6) važi kao jednakost i granica (4.7) važi kao jednakost u ograničenju. Na primer, za S_T uniformno distribuiranu na $[0,b]$ i $K = 0.75b$, dobijamo $E_t[(S_T - K)^+] = 0.031b = (E_t(S_T) - K)(1 - F_t(K)) + (b/2)(b-K)(K-a)||f_t||_\infty^2$. U ovom slučaju, procena (4.7) sa $p = 11$ daje procenu $E_t[(S_T - K)^+] \leq 0.048b$, dok iz (4.1) sledi da $E_t[(S_T - K)^+] \leq 0.066b$ i (4.2) daje procenu $E_t[(S_T - K)^+] \leq 0.111b$.

Napomena 2: Struktura granica data u Teoremama 4.2.1 i 4.2.2 je jednostavnija od onih granica u [27] i [12] u smislu da je oblik procena u teoremama isti za sve vrednosti K, ugovorenu cenu opcije, dok su oblici granica dobijeni od gore navedenih autora različiti jedan od drugoga u slučajevima malih i velikih K.

Dokaz Teoreme 4.2.2: Očigledno je da nejednakosti (4.6) - (4.8) važe za $K \leq a$ i $K \geq b$. Neka je $a < K < b$. Birajući u (4.5) $p(s) = f_t(s)$, $g(s) = s - K$, $h(s) = I(s > K)$, ili ekvivalentno, koristeći (4.4) sa $X = S_T - K$, $Y = I(S_T > K)$, $X' = S'_T > K$, $Y' = I(S'_T > K)$ dobijamo:

$$E_t[(S_T - K)^+] - E_t(S_T - K)P(S_T > K) = E_t[(S_T - K)^+] - (m_t - K)\pi_t \tag{4.9}$$
$$= \int_a^b f_t(s)ds \int_a^b (s-K)I(t > K)f_t(s)ds - \int_a^b (s-K)f_t(s)ds \int_a^b I(s > K)f_t(s)ds$$
$$= \frac{1}{2}\int_a^b \int_a^b (s-u)[I(s > K) - I(u > K)]f_t(s)f_t(u)dsdu.$$

Pretpostavimo $f_t \in L_\infty[a,b]$ (uslovno na $\mathcal{F}_t$). Tada iz (4.9) sledi da

$$E_t[(S_T - K)^+] - (m_t - K)\pi_t \leq \frac{1}{2}\Big(\sup_{(s,u)\in[a,b]^2} f_t(s)f_t(u)\Big) \int_a^b \int_a^b (s-u)[I(s > K) - I(u > K)]dsdu \tag{4.10}$$
$$= \frac{1}{2}||f_t||_\infty^2 \int_a^b \int_a^b (s-u)[I(s > K) - I(u > K)]dsdu.$$

Sada, pošto

$$\int_a^b \int_a^b (s-u)[I(s > K) - I(u > K)]dsdu = 2\int_K^b \int_a^K (s-u)dsdu$$
$$= (b-a)(b-K)(K-a),$$

iz (4.10) dobijamo da (4.6) važi za $a < K < b$. Neka je sada $f_t \in L_p[a,b]$ (uslovno na $\mathcal{F}_t$), $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Preko Helderove nejednakosti imamo

$$\int_a^b \int_a^b f_t(s)f_t(u)(s-u)(I(s > K) - I(u > K))dsdu = 2\int_K^b \int_a^K f_t(s)f_t(u)(s-u)dsdu \tag{4.11}$$

$$\leq 2\Big(\int_a^b\int_a^b f_t^p(s)f_t^p(u)dsdu\Big)^{1/p}\Big(\int_K^b\int_a^K (s-u)^2dsdu\Big)^{1/q}$$
$$= 2||f_t||_p^2\Big(\frac{(b-a)^{q+2}-(b-K)^{q+2}+(K-a)^{q+2}}{(q+1)(q+2)}\Big)^{1/q}.$$

Relacije (4.9) i (4.11) impliciraju da (4.7) važi za $a < K < b$. Pošto je

$$\int_a^b\int_a^b f_t(s)f_t(u)(s-u)(I(s>K)-I(u>K))dsdu$$
$$\leq \sup_{(s,u)\in[a,b]^2}(s-u)(I(s>K)-I(u>K))$$
$$= b-a,$$

iz (4.9) dobijamo nejednakost (4.8) za $a < K < b$. Lako je videti da granica (4.6) važi kao jednakost za slučajnu promenljivu S_T uniformno distribuiranu na $[a,b]$ i $K \in (a,b) : E_t[(S_T-K)^+] = (b-K)^2/(2(b-a)) = (E(S_T)-K)(1-F_t(K)) + (\frac{b-a}{2})(b-K)(K-a)||f_t||_\infty^2$. Dalje, (4.7) daje u gornjem slučaju nejednakost $\frac{(b-K)^2}{2(b-a)} \leq (\frac{a+b}{2}-K)\frac{b-K}{b-a}+(b-a)^{2/p-2}\Big[\frac{(b-a)^{q+2}-(b-K)^{q+2}+(K-a)^{q+2}}{(q+1)(q+2)}\Big]^{1/q}$ za sve $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Puštajući ovde $p\to\infty$, dobijamo jednakost koja dokazuje strogost u (4.7). Dokaz je kompletan.

□

Sledeća teorema daje granice očekivane naplate evropske kupovne opcije bazirane na prva tri momenta raspodele aktive. Uvodimo oznake: $m_{1t}=E_t(S_T)$, $m_{2t}=E_t(S_T^2)$, $m_{3t}=E_t(S_T^3)$, $m_{2t}^{'}=\sigma_t^2=m_{2t}-m_{1t}^2$, $m_{3t}^{'}=m_{3t}-3m_{1t}m_{2t}+2m_{1t}^3$. Neka je $c_t = m_{1t}+\frac{m_{3t}-\sqrt{m_{3t}^{'}2+4m_{2t}^{'}3}}{2m_{2t}^{'}}$, $c_t^{'}=m_{1t}+\frac{m_{3t}+\sqrt{m_{3t}^{'}2+4m_{2t}^{'}3}}{2m_{2t}^{'}}$, $r=K-\sqrt{(m_{1t}-K)^2+m_{2t}-m_{1t}^2}$. Označićemo sa s najveći koren u intervalu $[\frac{2c_t^{'2}}{3c_t^{'}-c_t},\infty)$ kubne jednačine $-2m_{1t}s^3+(2m_{2t}+3m_{1t}K)s^2-2m_{2t}Ks+Km_{3t}=0$. Stavićemo $s^{'}=\frac{m_{3t}-sm_{2t}}{m_{2t}-sm_{1t}}$.

Teorema 4.2.3. *Važe sledeće stroge nejednakosti:*

$$E_t[(S_T-K)^+] \leq \begin{cases} m_{1t}-K\frac{m_{1t}^2}{m_{2t}}, & K\leq\frac{m_{2t}}{2m_{1t}} \\ \frac{(r-m_{1t})^2}{r^2-2rm_{1t}+m_{2t}}\Big(\frac{rm_{1t}-m_{2t}}{r-m_{1t}}-K\Big), & \frac{m_{2t}}{2m_{1t}}\leq K\leq m_{1t}+\frac{m_{3t}^{'}}{2m_{2t}^{'}} \\ \frac{m_{1t}-c_t}{c_t^{'}-c_t}(c_t^{'}-K), & m_{1t}+\frac{m_{3t}^{'}}{2m_{2t}^{'}}\leq K\leq\frac{2c_t^{'2}}{3c_t^{'}-c_t} \\ \frac{m_{2t}-s^{'}m_{1t}}{s(s-s^{'})}(s-K), & K\geq\frac{2c_t^{'2}}{3c_t^{'}-c_t} \end{cases}$$

Dokaz: Označimo sa $\Phi(m_1, m_2, m_3)$ desnu stranu nejednakosti u teoremi. Za sve slučajne promenljive $X \geq 0$ sa $E(X) = m_1$, $E(X^2) = m_2$ i $E(X^3) = m_3$ postoji niz slučajnih promenljivih X_n sa ograničenim nosačem, $0 \leq X_n \leq b_n$, $b_n \to \infty$, tako da $E(X_n) = m_1$, $E(X_n^2) = m_2$ i $E(X_n^3) = m_3$. Prema Jensenu, Hazendonku i Guvertsu (vidi [17])

$$E_t[(S_T - K)^+] \leq \Psi(m_1, m_2, m_3, b_n), \tag{4.12}$$

gde je

$$\lim_{b \to \infty} \Psi(m_1, m_2, m_3, b) = \Phi(m_1, m_2, m_3). \tag{4.13}$$

Pošto je niz $\{\max(X_n - K, 0)\}_{n=1}^{\infty}$ očigledno uniformno integrabilan, uzimajući ograničenje u (4.12) sledi da

$$E_t[(S_T - K)^+] \leq \Phi(m_1, m_2, m_3). \tag{4.14}$$

Štaviše, prema Jensenu, Hazendonku i Guvertsu postoji niz slučajnih promenljivih $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $0 \leq X_n \leq b_n$, $b_n \to \infty$ tako da $E(X_n) = m_1$, $E(X_n^2) = m_2$ i $E(X_n^3) = m_3$ i $E_t[(S_T - K)^+] \leq \Phi(m_1, m_2, m_3, b_n)$. Ovo i (4.13) dokazuje strogu nejednakost u (4.14).

□

4.3 Granice za cene prodajnih i kupovnih opcija

Pretpostavimo da je tržište kao i ranije: raspodela cene akcije S_T na dan dospeća T je nepoznata, na tržištu se trguje evropskom kupovnom opcijom i evropskom prodajnom opcijom sa istom ugovorenom cenom K i datumom dospeća T. Kamatna stopa ili je $r = 0$ ili $r > 0$. Oba slučaja su od značaja i tretiraju se u literaturi. Prvi i osnovni korak je analiza modela sa kamatnom stopom $r = 0$. Takođe, standardna pretpostavka je da nema arbitraže na tržištu, tako da se sve kalkulacije vrše u odnosu na martingale, i očekivanja su označena kao i ranije sa E_t. Cene kupovnih i prodajnih opcija su

$$C(K) = E_t[(S_T - K)^+] \ \text{ i } P(K) = E_t[(K - S_T)^+].$$

Teorema 4.3.1. *Pretpostavimo da su svi pozitivni i svi negativni redovi momenata cene akcije S_T na dan dospeća T konačni, tj. $E[S_T^p] < \infty$ i $E[S_T^{-q}] < \infty$ za sve realne brojeve $p > 0$ i $q > 0$.*

i) Za svaki fiksiran broj p i sve ugovorene cene $K > 0$, gornja granica cene kupovne opcije je

$$C(K) \leq \frac{B_0 E[S_T^{p+1}]}{p+1} \left(\frac{p}{p+1}\right)^p \frac{1}{K^p}. \tag{4.15}$$

ii) Za svaki fiksiran broj q i za sve ugovorene cene K, gornja granica cene prodajne opcije je

$$P(K) \leq \frac{B_0 E[S_T^{-q}]}{q+1} \left(\frac{q}{q+1}\right)^q K^{q+1}. \tag{4.16}$$

Dokaz: Za sve $s \geq 0$ imamo:

$$s - K \leq \frac{s^{p+1}}{p+1}\Big(\frac{p}{p+1}\Big)^p \frac{1}{K^p},$$

jer leva i desna strana, kao funkcije od s imaju jednake vrednosti i prve izvode, pri čemu je $s = (p+1)K/p$, međutim, desna strana ima pozitivan drugi izvod. Štaviše, pošto je desna strana nenegativna, leva strana se može poboljšati do $(s-K)^+$. Sada, potrebno je da zamenimo S_T sa s, odredimo očekivanja i pomnožimo sa B_0 da bismo dobili (4.15).
Slično, argument za konveksnost pokazuje da za sve $s > 0$,

$$(K - s)^+ \leq \frac{s^{-q}}{1+q}\Big(\frac{q}{1+q}\Big)^q K^{1+q}$$

što implicira (4.16).

□

Napomena: Možemo koristiti odnos prodajno-kupovni paritet i u slučaju i) lako izvesti donju granicu za $P(K)$ u smislu pozitivnog $(p+1)$-og reda momenta od S_T, dok u slučaju pod ii) pišemo donju granicu za $C(K)$ preko negativnog q-tog reda momenta od S_T.

U većini modela koji se posmatraju u literaturi, ali ne i uvek, proces cene akcije u svakom trenutku ima sve konačne momente, za sve pozitivne i sve negativne redove. Ovo važi za sve S_T koji zadovoljavaju Kramerov uslov, tj. za raspodele sa lakim repom. Međutim, to važi i za nekoliko raspodela sa teškim repom. Takav primer je geometrijsko Braunovo kretanje, u tom slučaju imamo eksplicitne izraze za momente, pozitivne i negativne. To omogućava pronalazak dvostranih granica za cenu kupovne opcije i cenu prodajne opcije.

Poslednji komentar ovde je o ulozi ugovorene cene K, u gore navedenim granicama. Ispostavilo se da neke granice "rade" dobro za malo K, dok su druge dobre za veliko K. Gornje ograničenje za $C(K)$, (vidi i)), je "korisno" za veliko K. Ako $E[S_T^{p+1}] < \infty$ za neko $p > 0$, onda $C(K) = O(K^{-p})$ kad $K \to \infty$. Gornje ograničenje za $P(K)$, (vidi ii)), je "korisno" za malo K. Ako $E[S_T^{-q}] < \infty$ za neko $q > 0$, onda $P(K) = O(K^{q+1})$ kad $K \to 0$. Ako se uzme $p \downarrow 0$ u i), doći će se do poznatog ograničenja $C(K) \leq B_0 E[S_T]$. Ako se uzme $q \downarrow 0$ u i), naći će se drugo poznato ograničenje $P(K) \leq B_0 K$.

4.4 M-jedinstvenost u rešenjima stohastičkih diferencijalnih jednačina (SDJ)

U ovom poglavlju ćemo raspravljati o osobini M-jedinstvenosti stohastičkog procesa $X = (X_t, t \in [0,T])$ koje je rešenje sledeće Itove SDJ:

$$dX_t = a(t, X_t)dt \,+\, \sigma(t, X_t)dW_t,\ X_0,\ t \in [0,T],\ ili\ t \geq 0.$$

Kao i do sada, $W = (W_t, t \in [0,T])$ je standardno Braunovo kretanje, sa početnim uslovom X_0 koje je ili konstanta ili slučajna promenljiva, nezavisna od W.

Pod nekim "opštim uslovima", gde je $a(\cdot)$ drift, $\sigma^2(\cdot)$ volatilnost, X_0 početni položaj, ova SDJ ima jedinstveno rešenje X_t, i u svakom trenutku t ima sve momente konačne. Budući da nas, u osnovi, zanimaju momenti, dovoljno je da posmatramo jedinstvenost u slabom smislu rešenja SDJ.

Početna vrednost X_0 igra ulogu u konačnosti momenata od X_t, za $t \geq 0$. Trivijalno je uzeti $X_0 = const$. Međutim, ako je X_0 slučajna promenljiva, pretpostavljamo da su njeni momenti konačni i da je X_0 M-jedinstvena. Tako da, u narednom delu radimo sa koeficijentima drifta i volatilnosti, i ako je potrebno, specifiramo X_0.

Postavlja se pitanje, kada su jednodimenzionalne i konačnodimenzionalne raspodele procesa X jedinstveno određene njihovim marginalnim ili višestrukim indeksom momenata?

Može se desiti da SDJ ima jedinstveno slabo rešenje, koje, međutim, nije jedinstveno u smislu momenata. Ovo može biti iznenađujuće jer su to sasvim različita svojstva.
Prema nedavnom rezultatu u radu [51], ako su sve marginalne jednodimenzionalne raspodele procesa X M-jedinstvene, onda je svaka konačnodimenzionalna raspodela od X M-jedinstvena. Dakle, dovoljno je dati detalje samo za slučajnu promenljivu X_t, gde je $t > 0$ fiksirano. Pretpostavljamo da su X_0, $a(\cdot)$ i $\sigma^2(\cdot)$ "lepe" u smislu da postoji jedinstveno slabo rešenje odgovarajuće SDJ. Iznećemo četiri primera koji obuhvataju veliki opseg SDJ sa različitom M-jedinstvenošću i različitim svojstvom integrabilnosti.

Primer 4.4.1. *Ako su $a(\cdot)$ i $\sigma^2(\cdot)$ "lepe" i $\sigma^2(\cdot)$ je uniformno ograničena, onda je X_t M-jedinstvena, X_t^2 je M-jedinstvena, međutim, X_t^3 je M-nejedinstvena. Uočimo prvo da su, svojstva u smislu momenta rešenja X_t, u ovom slučaju ista kao ona u standardnom Braunovom kretanju W_t. Onda možemo lako izvući svojstva stepena normalno distribuirane slučajne promenljive, vidi Poglavlje 3.5. Iste karakteristike M-jedinstvenosti za X_t, X_t^2 i X_t^3 važe za Gausov proces. Tu osobinu ima, na primer, Ornstein-Uhlenbeck tip procesa (posebno linearna SDJ)*

$$dX_t = (\alpha_0 + \alpha_1 X_t)dt + \sigma dW_t \,,$$

gde su α_0, α_1 i σ konstante.

Drugi slučaj, koji je više opšti, umesto toga da $\sigma^2(\cdot)$ bude uniformno ograničena, pretpostavlja da su $a(\cdot)$ i $\sigma^2(\cdot)$ takve da X_t zadovoljava Kramerov uslov, tj. da X_t ima eksponencijalni momenat. Tada je X_t M-jedinstvena. Štaviše, ako su $a(\cdot)$ i $\sigma^2(\cdot)$ takve da slučajna promenljiva $X_T^* = \sup_{0 \leq t \leq T} X_t$ je eksponencijalno integrabilna, onda je X_t M-jedinstvena za svako $t \in [0,T]$.
Eksponencijalna integrabilnost je intezivno proučavana za nekoliko klasa SDJ, martingala, Levijevih procesa. Jedna od posledica u svakom takvom slučaju je da su raspodele M-jedinstvene. Zaključci se takođe mogu izvesti za apsolutnu vrednost $|X_t|$ i njene stepene $|X_t|^r$.

Primer 4.4.2. *Posmatrajmo poznatu linearnu SDJ (Black-Scholes Model)*

$$dS_t = \mu\, S_t\, dt \,+\, \sigma\, S_t\, dW_t,\ S_0 \,=\, s_0 \,=\, const \,>\, 0,\ t \in [0,T], ili\ t \geq 0.$$

Postoji jedinstveno slabo rešenje S_t, $t \geq 0$, gde

$$S_t \sim \mathcal{L}og\mathcal{N}(a_t, b_t^2),\ a_t = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t,\ b_t^2 = \frac{1}{2}\sigma^2 t$$

Dakle, svi momenti od S_t, $t > 0$ su konačni, mogu se napisati eksplicitno i zaključak je da je S_t, za $t > 0$ M-nejedinstvena, kao što znamo iz Poglavlja 3.5.

Evo još jedna zanimljiva činjenica. Dok nejedinstvenost momenata implicira da S_t nije eksponencijalno integrabilno, možemo reći da čak "manja" slučajna promenljiva, $\sqrt{S_t}$, takođe nije eksponencijalno integrabilna. Ovo sledi iz Hardijeovog uslova, diskutovanog u Poglavlju 3.2.

Primer 4.4.3. *Sada ćemo predstaviti jednostavan primer nelinearne SDJ sa jedinstvenim netrivijalnim slabim rešenjem tako da je X_t M-nejedinstvena za sve $t > 0$. Uzimamo:*

$$dX_t = 3X_t^{1/3} dt \,+\, 3X_t^{2/3} dW_t,\ \ X_0 = 0,\ \ t \geq 0$$

.

(Ignorisaćemo trivijalno rešenje $X_t = 0$ za sve $t \geq 0$.) Kako pokazati nejedinstvenost momenta od X_t? Prvo, koristeći Itovu formulu, nalazimo jedinstveno slabo rešenje $X_t = W_t^3$. Drugo, pošto $W_t \sim \mathcal{N}$, mislimo na Poglavlje 3.5 i činjenicu da je "kub" normalno distribuirane slučajne promenljive M-nejedinstven.

Primer 4.4.4. *Pretpostavimo da su X_0, $a(\cdot)$ i $\sigma^2(\cdot)$ takve da X_t ne zadovoljava Kramerov uslov, tj X_t je teškog repa (nema eksponencijalni momenat). Pretpostavimo još uvek da su svi momenti od X_t konačni. Postoje dve mogućnosti. Prva je, da X_t bude M-nejedinstvena, što je ilustrovano u Primerima 4.4.2 i 4.4.3. Druga mogućnost je, izabrati drift i volatilnost takve da jedinstveno (netrivijalno) slabo rešenje odgovarajuće SDJ bude M-jedinstveno čak i ako ima težak rep(ove). Da bismo videli da je to moguće, posmatrajmo sledeću SDJ:*

$$dX_t = dt \,+\, 2X_t^{1/2} dW_t\ \ X_0 = 0,\ \ t \geq 0$$

.

Ova SDJ ima jedinstveno (netrivijalno) slabo rešenje sa osobinom da za sve $t > 0$, ima sve momente konačne, i da je M-jedinstvena. Može se lako videti da ovo sledi iz činjenice da je $X_t = W_t^2$ i odnosi se na Poglavlje 3.5.

Napomena: Različite ideje mogu biti upotrebljene za karakterizaciju M-jedinstvenosti rešenja opšte SDJ. Na primer, odgovor se može naći ako znamo svojstva gustine $p(s, x; t, y)$, rešenje za prethodno Kolmogorove PDJ. Jasno, drift i volatilnost su suštinski uključeni. Fiksiramo prva tri argumenta, s, x, t i analiziramo $p(\cdot)$ kao funkciju od y, naročito asimptotsko ponašanje $p(\cdot)$ kad $y \to \infty$. Tada možemo koristiti Kreinov uslov, ili obrnuto Kreinov uslov zajedno sa Linovim uslovom i doneti zaključak o M-jedinstvenosti X_t. Zanimljivo i relevantno je proučavati takođe M-jedinstvenost od

X_t kad $t \to \infty$.

U literaturi su dostupna gornja ograničenja za momente $E[X_t^{2k}]$, $E[X_t^{2k+1}]$ ili $E[|X_t|^k]$. Međutim, oni nisu toliko korisni jer dovode do konvergencije Karlemanovih redova. Dakle, ne može se izvući zaključak o M-jedinstvenosti.

Ako pogledamo ponovo primere date gore, vidimo da je koeficijent volatilnosti $\sigma^2(\cdot)$ najvažniji za M-jedinstvenost rešenja SDJ. Ako napišemo $|\sigma(x)| \approx c|x|^\gamma$, vidimo da za neko γ, rešenje X_t je M-jedinstvena, za druge je M-nejedinstvena.
Poželjno je imati odgovore na pitanja kao što su gore, za stohastički proces, koji je rešenje SDJ sledećeg tipa:

$$\begin{aligned} dX_t &= (\alpha_0 + \alpha_1 X_t)dt + (\beta_0 + \beta_1 X_t)dW_t, \ X_0; \\ dX_t &= (\alpha_0 + \alpha_1 X_t)dt + \sigma X_t^\gamma dW_t, \ X_0; \\ dX_t &= (\alpha_0 + \alpha_1 r_t + \alpha_2 r_t^2 + \alpha_3 / r_t)dt + \sqrt{\beta_0 + \beta_1 r_t + \beta_2 r_t^\gamma}\, dW_t, \ r_0. \end{aligned}$$

4.5 Izazovna pitanja i neki savremeni rezultati

Postavićemo nekoliko pitanja u opštem obliku.

Pitanje 1: Da li je moguće da postoji samo jedna SDJ takva da u svakom trenutku $t \geq 0$, njeno rešenje X_t, $t \geq 0$, ima momente $E[X_t^k] = k!$, $k = 1, 2, ...$?

Pitanje 2: Da li je moguće da postoji samo jedna SDJ takva da u svakom trenutku $t \geq 0$, njeno rešenje X_t, $t \geq 0$, ima momente $E[X_t^k] = (2k)!$, $k = 1, 2, ...$?

Pitanje 3: Da li je moguće da postoji beskonačno mnogo SDJ tako da sva rešenja za bilo koje $t \geq 0$, imaju iste momente $\{(3k)!\,, k = 1, 2, ...\}$?

Nakon što vidimo brojeve $k!$, $(2k)!$, $(3k)!$, možemo ih identifikovati kao momente slučajnih promenljivih ξ, ξ^2, ξ^3, gde $\xi \sim \mathcal{E}xp(1)$. Budući da želimo da ovo budu momenti, za sve $t \geq 0$, onda to znači da procesi moraju biti stacionarni. Međutim, stacionarnost procesa zahteva da marginalne raspodele budu invarijantne na promenu vremena i da proces ima specifičnu korelacionu strukturu. Stoga, u svakom od tri gore navedena slučaja, moramo da obezbedimo kompletni opis procesa koji želimo da konstruišemo.

Propozicija 4.5.1. *Postoji samo jedna SDJ sa eksplicitnim koeficijentima, drift i volatilnost, takva da ima jedinstveno slabo rešenje $X = (X_t, t \geq 0)$ koje je stacionaran difuzan proces Markova sa korelacionom funkcijom e^{-ct} i u svakom trenutku $t \geq 0$, momenti od X_t su $E[X_t^k] = k!$, $k = 1, 2, ...$ Štaviše, X_t je eksponencijalno integrabilan.*

Propozicija 4.5.2. *Postoji samo jedna SDJ sa eksplicitnim koeficijentima takva da ima jedinstveno slabo rešenje $X = (X_t, t \geq 0)$ koje je stacionaran difuzan proces Markova sa korelacionom funkcijom e^{-ct} i u svakom trenutku $t \geq 0$, momenti od X_t su $E[X_t^k] = (2k)!$, $k = 1, 2, ...$ Štaviše, u ovom slučaju, X_t nije eksponencijalno integrabilan.*

Propozicija 4.5.3. *Postoji parametrizovana beskonačna familija SDJ, $\{SDJ^{(\epsilon)}, \epsilon \in [-1,1]\}$ sa eksplicinim koeficijentima, tako da su njihova rešenja $\{X^{(\epsilon)}, \epsilon \in [-1,1]\}$ stacionarni difuzni procesi Markova sa korelacionom funkcijom e^{-ct}, i u svakom trenutku $t \geq 0$, svi $X_t^{(\epsilon)}$ imaju iste momente $E[(X_t^{(\epsilon)})^k] = (3k)!$, $k = 1, 2, ...$ Nijedan nije eksponencijalno integrabilan.*

Pre skice dokaza ovih propozicija, navešćemo rezultat koji će nam biti neophodan.

Neka je F apsolutno neprekidna funkcija raspodele sa gustinom $f = F'$ i X slučajna promenljiva, $X \sim F$. Označimo sa (a,b) opseg vrednosti od X, tj. nosač od F: $supp(F) = (a,b)$. Pretpostavimo da je f neprekidna, ograničena i strogo pozitivna u domenu (a,b) koji može biti konačan ili beskonačan interval. Još jedan od zahteva je da X ima konačan drugi momenat, dakle konačnu varijansu. Prvi momenat od X označavaćemo sa m_1, kao i ranije.
Sa ovako datim F i f, i ako uzmemo bilo koji broj $c > 0$, definisaćemo "novu" funkciju, $\nu = (\nu(x),\, x \in (a,b))$:

$$\nu(x) = \frac{2c}{f(x)} \int_a^x (m_1 - u) f(u) du = \frac{2c}{f(x)} \left(m_1 F(x) - \int_a^x u f(u) du \right).$$

Može se proveriti da je funkcija ν strogo pozitivna na (a,b), otuda je i njen kvadratni koren $\sqrt{\nu(x)}$ dobro definisana funkcija.

Teorema 4.5.1. *Pretpostavimo da su F, f i ν kao gore, W je standardno Braunovo kretanje koje je nezavisno od slučajne promenljive X_0 i $c > 0$ je proizvoljan broj. Tada sledeća SDJ*

$$dX_t = -c(X_t - m_1)dt + \sqrt{\nu(X_t)} dW_t, \quad X_t\big|_{t=0} = X_0, \quad t \geq 0,$$

ima jedinstveno slabo rešenje $X = (X_t,\, t \geq 0)$ koje je difuzan proces Markova. Štaviše, X je ergodičan sa ergodičnom funkcijom gustine f. Ako je f gustina od X_0, proces X je stacionaran sa korelacionom funkcijom e^{-ct}, $t \geq 0$.

Skica dokaza Propozicija 4.5.1, 4.5.2 i 4.5.3: Kao što je gore pomenuto, koristili bismo znanje o M-jedinstvenosti od $\xi \sim \mathcal{E}xp(1)$ i njegovim stepenima ξ^2, ξ^3.
Teorema 4.5.1 daje nam jasnu ideju šta treba da uradimo. Uzimamo $F = \mathcal{E}xp(1)$, njen nosač je $(a,b) = (0,\infty) = \mathbb{R}_+$. Dakle, sada možemo dati glavne detalje u svakom od gornja tri slučaja, Propozicije 4.5.1, 4.5.2 i 4.5.3.

Detalji za Slučaj 1. Radimo sa ξ, $m_k(\xi) = k!$, $f(x) = e^{-x}$ i pretpostavimo da $X_0 \sim \mathcal{E}xp(1)$. Imamo sve što nam je potrebno da izračunamo $\nu(x)$. Dakle, možemo eksplicitno napisati samo jednu SDJ i zaključiti da je jedinstveno slabo rešenje $X = (X_t,\, t \geq 0)$ upravo željeni stacionarni difuzan proces Markova X. Korelaciona funkcija je e^{-ct}, $t \geq 0$; X_t ima k-ti momenat jednak $k!$ i X_t je M-jedinstvena. Eksponencijalna integrabilnost za X_t sledi iz Kramerovog uslova za $\xi \sim \mathcal{E}xp(1)$.

Detalji za Slučaj 2. Sada nam je potrebno ξ^2 za koje je $m_k(\xi^2) = (2k)!$. Uzmemo $X_0 \sim f$, gde je $f(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} e^{-x^{1/2}}$, $x > 0$ gustina za ξ^2. Koristimo ovo f da izračunamo ν, napišemo eksplicitno SDJ i tako dobijemo jedinstveno slabo rešenje sa željenim svojstvima. Razlika iz Slučaja 1 i Slučaja 2 je što ovde X_t nije eksponencijalno integrabilno. To je iz razloga što ξ^2 ima težak rep, pa ne zadovoljava Kramerov uslov.

Detalji za Slučaj 3. Ovde sada radimo sa kubom, ξ^3. K-ti momenat je $m_k(\xi^3) = (3k)!$ i gustina koje će se koristiti je $f(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}e^{-x^{1/3}}$, $x > 0$. Uzećemo ovu funkciju f kao gustinu od X_0 i izračunati ν, napisati SDJ i dobiti stacionaran difuzan proces Markova X sa svim željenim svojstvima.
Međutim, kao što znamo, ξ^3 je M-nejedinstvena. Stoga, možemo konstruisati Stiltjesovu klasu $S(f,h) = \{f_\epsilon = f[1+\epsilon h], \epsilon \in [-1,1]\}$ na osnovu gustine f za ξ^3 i perturbacije $h(x) = \sin(\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}x^{1/3})$, $x > 0$. Za svako fiksirano $\epsilon \in [-1,1]$, koristimo gustinu f_ϵ i računamo ν_ϵ. Na taj način dobijamo $SDJ^{(\epsilon)}$ čije je jedinstveno slabo rešenje stacionaran difuzan proces Markova $X^{(\epsilon)}$. Uzmimo sada $\epsilon \in [-1,1]$, i dobijamo željenu beskonačnu familiju procesa. Koeficijenti drift i volatilnost su različiti za različite ϵ. Međutim, za svako $t \geq 0$, rešenje bilo koje od ovih SDJ ima momente $\{(3k)!\}$. Raspodela nije eksponencijalno integrabilna jer ξ^3 ima "suviše težak rep".

$\square$

Napomena: Izabrali smo momente $k!$, $(2k)!$, $(3k)!$, $k = 1, 2, ...$ ne samo iz radoznalosti. S jedne strane, bilo je pogodno koristiti rezultate iz prethodnih poglavlja. S druge strane, ovi brojevi pokazuju tačno gde su granice između sledeće tri grupe SDJ:
SDJ sa M-jedinstvenošću i eksponencijalnom integrabilnošću;
SDJ sa M-jedinstvenošću ali eksponencijalnom neintegrabilnošću;
SDJ sa M-nejedinstvenošću i otuda eksponencijalnom neintegrabilnošću.

Glava 5

Zaključak

Problem momenta povezan je sa velikim brojem osnovnih teorijskih i primenjenih tema, uključujući teoriju funkcija, spektralnu dekompoziciju operatora, pozitivnu definitnost, verovatnoću i statistiku, ekonomiju, teoriju aproksimacije, električne i mehaničke inverzne probleme, dizajn algoritma za obradu signala VLSI čipova... Može se primetiti da iako je urađeno nekoliko primera, akcenat je ipak bio na teorijskom pristupu. U ovom radu smo diskutovali o nekoliko popularnih raspodela, gde se svaka od njih koristi na jedan ili drugi način u stohastičkim finansijskim modelima. Pitanja o kojima se raspravljalo i predstavljeni rezultati otkrivaju ulogu koju momenti igraju u analizi raspodela. Među rezultatima koji su uključeni u radu su stroge donje i gornje granice za cene opcija u smislu konačnog broja momenata. Međutim, glavna pažnja je posvećena određivanju raspodele preko njenih momenata. Uključili smo najvažnije ideje, stare i veoma nove rezultate, tehnike i ilustracije. Korisni komentari dati su na mnogim mestima u radu. Lista refernci, radova i knjiga je obimna. Čitaoci koji se žele bolje upoznati sa ovom temom mogu koristiti ovaj rad kao blag uvod.

Literatura

[1] Akhiezer N. I., *The classical moment problem*, Edinburgh: Oliver and Boyd, 1965

[2] Barnett N. S., Cerone P., Dragomir S. S., Roumeliotis J., *Some inequalities for the dispersion of a random variable whose pdf is defined on a finite interval*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 2001

[3] Berg C., *Indeterminate moment problems for measures on a geometric progression*, J. Comput. Appl. Math, 1995

[4] Berg C., *From discrete to absolutely continuous solutions of indeterminate moment problems*, Arab. J. Math. Sci., 1998

[5] Berg C., *The cube of a normal distribution is indeterminate*, Ann. Probab., 1988

[6] Berg C., Christensen J. P. R., *Density questions in the classical theory of moments*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 1981

[7] Bingham N., Goldie C., Teugels J., *Regular variation*, Cambridge: Cambridge University Presss, 1989

[8] Feller F., *An introduction to probability theory and its applications*, New York: Wiley, 1971

[9] Frechet M., Shohat J., *A proof of the generalized second limit theorem in the theory of probability*, Trans. Amer. Math. Soc. 33, 1931

[10] Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M., *Tables of integrals, series and products*, Academic Press, New York, 1980

[11] Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M., *Tables of integrals, series and products*, 6th. edn. Academic Press, San Diego, CA, 2000

[12] Grundy B. D., *Option prices and the underlying asset's return distribution*, Journal of Finance, 1991

[13] Gut A., *On the problem moment*, Bernoulli, 2002

[14] Heyde C. C., *Some remarks on the moment problem*, Quart. J. Math (2) 14, 1963

[15] Heyde C. C., *On a property of the lognormal distribution*, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, 1963

[16] Ibragimov R., Jordan S. S., De la Pena V. H., *Option bounds*, Journal of Applied Probability, 2003

[17] Jansen K., Haezendonck J., Goovarets M. J., *Upper bounds on stop-loss premiums in case of known moments up to the fourth order*, Insurance: Mathematics and Economics, 1986

[18] Johnson N. L., Kozz S., Balakrishnan N., *Continuous univariate distributions*, 2nd edn. Vol. 2, New York: Wiley, 1995

[19] Jovanović M., Milošević M., *Finansijska matematika*, Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet, Niš, 2016

[20] Kijima M., Muromachi Y., Shibata T., *Recent advances in financial engineering*, Tokyo Metropolitan University, Tokyo, 2014

[21] Lawrence M. J., *Inequalities of s-ordered distributions*, Ann. Statist. 3, 1975

[22] Lin G. D., *Recent developments on the moment problem*, Academia Sinica, Taiwan, 2017

[23] Lin G. D., *On the moment problem*, Statistic & Probability Letters, 1997

[24] Lin G. D., Stoyanov J., *Moment determinacy of powers and products of nonnegative random variables*, Journal of Theoretical Probability, 2014

[25] Lin G. D., Stoyanov J., DasGupta A., *Hamburger moment problem for powers and products of random variables*, Journal of Statistical Planning an Inference, 2014

[26] Lin G. D., Huang J. S., *The cube of a logistic distribution is indeterminate*, Australian & New Zeland of Statistics, 2008

[27] Lo A. W., *Semi-parametric upper bounds for option prices and expected payoffs*, journal of Financial Economics, 1987

[28] Lukacs E., *Characteristic functions*, 2nd ed. Griffin, London, 1970

[29] Mališić J., *Slučajni procesi*, IRO "Građevinska knjiga", Beograd, 1989

[30] Merkle M. J., Vasić P. M., *Verovatoća i Statistika*, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1998

[31] Mitrinovič D. C., Pečarič J. E., Fink A. M., *Classical and new inequalities in analysis*, Kluwer Academic Publishers, 1993

[32] Ostrovska S., Stoyanov J., *Stieltjes classes for M-indeterminate powers of inverse Gaussian distributions*, Statistics & Probability Letterss 71, 2005

[33] Ostrovska S., *Constructing Stieltjes classes for M-indeterminate absolutely continuous probability distribution*, Department of Mathematics Atilim University, Ankara, Turkey, 2014

[34] Pakes A. G., *Structure of Stieltjes classes of moment-equivalent probability laws*, J. Math. Anal. Appl. 326, 2007

[35] Pakes A. G., Hung W.-L., Wu J.-W., *Criteria for the unique determination of probability distributions by moments*, Australian and New Zeland Journal of Statistics, 2001

[36] Pakes A. G., *Remarks on converse Carleman and Krein criteria for the classical moment problem*, Journal of the Australian Mathematical Society, 2001

[37] Pakes A. G., Khattree R., *Length-biasing, sharacterizations of laws and the moment problem*, Austral. J. Statist. 34, 1992

[38] Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I., *Integrals and series*, New York: Gordon & Breach, 1992

[39] Putinar M., Schmudgen K., *Multivariate determinatess*, Indiana Univ. Math. J., 2008

[40] Rajter-Ćirić D., *Verovatnoća*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 2009

[41] Sapatinas T., *Identifiability of mixtures of power-series distributions and related characterizations*, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 1995

[42] Seshadri V., *The inverse Gaussian distribution*, Clarendon Press, Oxford (UK), 1993

[43] Stoyanov J., *Counterexamples in probability*, 2nd edn. Chichester, Wiley, 1997

[44] Stoyanov J., *Counterexamples in probability*, 3rd edn. Dover, New York, 2013

[45] Stoyanov J., *Krein condition in probabilistic moment problems*, Bernoulli 6, 2000

[46] Stoyanov J., Lin G. D., *Hardy's condition in the moment problem for probability distributions*, Theory of Probability and Its Applications, 2012

[47] Stoyanov J., *Stieltjes classes for moment indeterminate probability distributions*, University of Newcastle upon Tyne, 2004

[48] Stoyanov J., *Determinacy of distributions by their moments*, International Conference on Mathematical and Statistical Modeling in Honor of Enrique Castillo, 2006

[49] Stoyanov J., *Inverse Gaussian distribution and the moment problem*, Journal of Applied Statistical Science, 1999

[50] Stoyanov J., Tolmatz L., *Method for constructing Stieltjes classes for M-indeterminate distributions*, App. Math. Computation, 2005

[51] Stoyanov J., Kleiber C., *Multivariate distributions and the moment problem*, J. Multivar. Analysis, 2013

[52] Stoyanov J., Lin G. D., *Mixtures of power series distributions: identifiability via uniqueness in problems of moments*, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo, 2009

[53] Tešnjak I., *Ocenjivanje volatilnosti Itoovih slučajnih procesa*, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 2010

[54] Titchmarsh E. C., *Introduction to the theory of Fourier integrals*, Oxford: Clarendon Press, 1948

[55] Vukadinović S., *Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike*, Privredni pregled, Beograd, 1970

Biografija

Diana Popić je rođena 17. aprila 1991. godine u Splitu, Republika Hrvatska. Završila je Osnovnu školu "Dositej Obradović" u Somboru kao vukovac i iste godine upisala "Srednju ekonomsku školu" u Somboru. Srednju školu je završila 2010. godine, kada je proglašena za najuspešniju učenicu u svom odeljenju. Odmah po završetku srednje škole, zbog velikog interesovanja za matematiku i njenu primenu, upisala je osnovne studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer matematika finansija. Osnovne studije je završila 2014. godine i iste godine je upisala master studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer primenjena matematika. Zaključno sa januarskim rokom 2017. godine, položila je sve ispite predviđene planom i programom i stekla uslov za odbranu master rada. Tokom master studija bila je angažovana kao analitičar podataka u agenciji za istraživanje tržišta i javnog mnjenja Ninamedia Research u Novom Sadu, kao nastavnik matematike u Osnovnim školama "Jožef Atila" i "Prva vojvođanska brigada" u Novom Sadu, i kao profesor matematike i diskretne matematike u Računarskoj gimnaziji "Smart" u Novom Sadu.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Accession number: **IBR**	
Identifikacioni broj: **IBR**	
Tip dokumentacije: **TD**	Monografska dokumentacija
Tip zapisa: **TZ**	Tekstualni štampani materijal
Vrsta rada: **VR**	Master rad
Autor: **AU**	Diana Popić
Mentor: **MN**	dr Dora Seleši
Naslov rada: **NR**	Problem momenta i njegova primena u stohastičkim finansijskim modelima
Jezik publikacije: **JP**	srpski (latinica)
Jezik izvoda: **JI**	srpski/engleski
Zemlja publikovanja: **ZP**	Republika Srbija
Uže geografsko područje: **UG**	Vojvodina
Godina: **GO**	2018.
Izdavač: **IZ**	Autorski reprint

Mesto i adresa (**MA**):	Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4.
Fizički opis rada: **FO**	(5 / 93 / 54 / 1 / 3 / 3 / 0) (br. pogl./str./lit./tabela/slika/grafika/priloga)
Naučna oblast: **NO**	Matematika
Naučna disciplina: **ND**	Analiza i verovatnoća
Predmetne odrednice (**PO**,**UKR**):	Momenti, M-jedinstvenost, M-nejedinstvenost, Kramerov uslov, Karlemanov uslov, Kreinov uslov, Hardijev uslov, Linov uslov, Stiltjesova klasa, stopa rasta momenata, problem identifikacije, granice za cene opcija, stohastičke diferencijalne jednačine
Čuva se (**ČU**):	Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno -matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
Važna napomena: **VN**	Nema
Izvod (**IZ**):	U radu je opisan problem momenta, odnosno razmatrano je kada je neka raspodela jedinstveno određena preko svojih momenata proizvoljnog reda. Ako je funkcija raspodele F jedina sa nizom momenata $\{m_k\}$, onda za raspodelu F kažemo da je M-jedinstvena, odnosno F je jedinstveno određena preko svojih momenata, i obrnuto, F je M-nejedinstvena, odnosno nije jedinstvena u smislu momenata. U radu je razmatrana i primena problema momenta u stohastičkim finansijskim modelima. Date su granice za cene opcija zasnovane na momentima, a takođe je analizirana i M-jedinstvenost u rešenjima stohastičkih diferencijalnih jednačina.
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: **DP**	22.09.2017.
Datum odbrane: **DO**	**2018.

Članovi komisije :

KO

Predsednik:	dr Danijela Rajter-Ćirić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Mentor:	dr Dora Seleši, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Milica Žigić, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number: **ANO**	
Identification number: **INO**	
Dokument type: **DT**	Monograph documentation
Contents code: **CC**	Master thesis
Author: **AU**	Diana Popić
Mentor: **MN**	dr Dora Seleši
Title (**TI**):	The moment problem and its application in stochastic financial models
Language of text: **LT**	Serbian (latin)
Language of abstract: **LA**	Serbian/ English
Country of publication: **CP**	Republic of Serbia
Locality of publication: **LP**	Vojvodina
Publication year: **PY**	2018.
Publisher: **PU**	Author's reprint

Publ. place (**PP**):	Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4.
Physical description: **PD**	(5 / 93 / 54 / 1 / 3 / 3 / 0)
Scientific field: **SF**	Mathematics
Scientific discipline: **SD**	Analysis and Probability theory
Subject Key words (**SKW**):	Moments, M-determinacy, M-indeterminacy, Cramer's condition, Carleman's condition, Krein's condition, Hardy's condition, Lin's condition, Stieltjes class, rate of growth of moments, problem identifiability, option prices bounds, stochastic differential equations
Holding data (**HD**):	Library of the Department of Mathematics and Computer Sciences
Note: **N**	None
Abstract (**AB**):	The aim of this thesis is to describe the moment problem, i.e. we consider when a distribution is uniquely determined by its moments of arbitary order. If F is the only distribution function with a moment sequence $\{m_k\}$, then we say that F is M-determinate, i.e. F is uniquely determined in terms of the moments, and vice versa, F is M-indeterminate, i.e. it isn't uniquely defined in terms of its moments. In this paper we also consider applications of the moment problem in stochastic financial models. Among the results included in the paper are bounds for option prices based on the moments. As a conclusion, the M-determinacy of the solutions of stochastic differential equations is analyzed.
Accepted on the Scientific board on: **AS**:	22.09.2017.
Defended: **DE**	**2018.

Thesis Defend board:

D

President:	dr Danijela Rajter-Ćirić, full professor, Faculty of Natural Science, University of Novi Sad
Mentor:	dr Dora Seleši, full professor, Faculty of Natural Science, University of Novi Sad
Member:	dr Milica Žigić, assistant professor, Faculty of Natural Science, University of Novi Sad