



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU



Dejana Vukić

- MASTER RAD -
**MONTE KARLO METODE U AKTUARSKOM
MODELIRANJU**

Novi Sad, septembar 2012.

Sadržaj

Uvod	3
1. Osnove Monte Karlo metode	4
1.1. Generisanje slučajnih brojeva	4
1.2. Grub Monte Karlo metod	6
1.3. Monte Karlo metod: Prve primene	7
2. Principi premije i mere rizika	12
2.1. Svojstva i primeri principa premije	12
2.2. Monte Karlo simulacija principa premije	16
2.3. Osobine i primeri mera rizika	17
2.4. Veza između principa premije i mera rizika	19
2.5. Monte Karlo simulacija mera rizika	20
3. Neke primene Monte Karlo metode u životnom osiguranju	29
3.1. Mortalitet: Definicija i klasični modeli	29
3.2. Dinamički modeli mortaliteta	31
3.3. Polise životnog osiguranja i računanje premije	34
3.4. Određivanje cena ugovora na duži vremenski period Monte Karlo simulacijom	36
3.5. Rezerve na premije i Thiele-ova diferencijalna jednačina	38
4. Simuliranje zavisnosti rizika uz pomoć kopula	41
4.1. Definicija i osnovne osobine	41
4.2. Primeri i simuliranje kopula	44
4.3. Primena u aktuarskim modelima	52
5. Neživotno osiguranje	54
5.1. Pojedinačni model	54
5.2. Zbirni model	55
5.3. Simuliranje retkih događaja i raspodele sa teškim repom	59
5.4. Zavisni zahtevi: Primer sa kopulama	62
6. Markov lanac Monte Karlo i Bayes-ova ocena	64
6.1. Osnovne karakteristike lanca Markova	64
6.2. Modeliranje lanca Markova	68
6.3. Markov lanac i Monte Karlo metod	68
6.4. MCMC metode i Bayes-ova ocena	74
6.5. Primeri MCMC metode i Bayes-ove ocene u aktuarskoj matematici ...	76

7. Upravljanje aktivom i obavezama i solventnost II	80
7.1. Solventnost II	80
7.2. Upravljanje aktivom i obavezama (ALM)	80
Zaključak	82
Implementacija na računaru	83
Literatura	85
Biografija	86

Uvod

Naziv „Monte Karlo metod“ se odnosi na širok spektar matematičkih modela i algoritama čija je glavna karakteristika stohastički pristup, odnosno upotreba slučajnih brojeva u rešavanju različitih problema. Najčešće se radi o matematičkim problemima čija se rešenja ne mogu odrediti analitički ili za to ne postoje efikasni numerički algoritmi. Pored toga, često se koriste i za proveru rezultata dobijenih analitičkim ili drugim metodama. Zbog velikog broja matematičkih operacija i ponavljanja, Monte Karlo metode ulaze u široku upotrebu tek s naglim razvojem računara u poslednjim desetinama dvadesetog veka.

Samo ime Monte Karlo uveli su Stanislaw Ulam¹, John von Neumann² i Nicholas Metropolis³ 1946. godine, iako je sama ideja bila poznata i ranije. Enrico Fermi⁴ upotrebio je slične metode 1930. godine kako bi odredio svojstva tada tek otkrivenog neutrona. Američka vojska koristila ih je intenzivno 40-ih i 50-ih godina prilikom razvoja nuklearne i hidrogenske bombe, uprkos vrlo ograničenoj snazi tadašnjih računara. Tek nakon pojave elektronskih računara počinje detaljno proučavanje Monte Karlo metoda. Danas su u upotrebi u različitim područjima nauke: od numeričke matematike, fizičke hemije i statističke fizike, sve do razvoja poluprovodnika, računarske grafike i finansija.

Osnovna ideja Monte Karlo metode je aproksimacija očekivane vrednosti $E(X)$ aritmetičkom sredinom rezultata velikog broja nezavisnih ogleda koji svi imaju istu raspodelu kao X . Osnova ovog metoda je jak zakon velikih brojeva. Monte Karlo metod ima veliku primenu, jer očekivana vrednost igra centralnu ulogu u različitim oblastima primene modela verovatnoće. Primeri takvih oblasti primene su analiziranje i dizajniranje redova čekanja (npr. u supermarketima), dizajniranje planova evakuacije za zgrade, analiziranje pouzdanosti tehničkih sistema, dizajniranje telekomunikacionih mreža, procenjivanje rizika investiranja ili osiguravajućih portfolia, i mnogi drugi.

U teoriji osiguranja, interesuje nas rizik zastupljen kod polisa osiguranja (kao što su, npr. životno osiguranje ili osiguranje automobila). Polisama osiguranja se ne može trgovati i arbitraža često ne igra nikakvu ulogu u njihovim ocenama. Kako se ovakvi ugovori prodaju u velikom količinama, pogodne varijante zakona velikih brojeva sugerišu da očekivane vrednosti budućih isplata treba da odigraju ulogu u određivanju vrednosti ugovora. Takođe, faktor opterećenja premije koji povećava bezbednost je uključen u izračunavanje premija. Zavisnosti mogu odigrati veoma važnu ulogu u oceni rizika čitavog portfolija prodane polise. Iz tih razloga razmotrićemo dve važne teme: principe premije i modeliranje zavisnosti uz pomoć kopula. Sledeći važni tipovi rizika koje ćemo eksplicitno posmatrati su rizik retkih događaja u neživotnom osiguranju i dugoročnost rizika u životnom. U oba slučaja Monte Karlo metode su odgovarajuće oruđe.

¹ Stanislaw Marcin Ulam, 1909-1984, poljski matematičar

² John von Neumann, 1903-1957, mađarsko-američki matematičar i naučnik

³ Nicholas Metropolis, 1915-1999, grčko-američki fizičar

⁴ Enrico Fermi, 1901-1954, italijanski fizičar

1. Osnove Monte Karlo metode

1.1 Generisanje slučajnih brojeva

Stohastičke simulacije i posebno Monte Karlo metode koriste slučajne promenljive. Stoga je neophodno generisanje slučajnih brojeva (SB) sa određenom raspodelom. Najveći problem ovde je pronaći brojeve koji su zaista slučajni i nepredvidivi. Slučajni brojevi za Monte Karlo simulacije obično su generisani putem numeričkih algoritama. Oni deterministički stvaraju niz brojeva, pa ih zato često zovemo pseudoslučajni brojevi. Međutim, ako ih posmatramo bez uvida u algoritam koji ih stvara, imamo utisak da su slučajni.

Loši generatori mogu prouzrokovati besmislene rezultate simulacije koji kasnije mogu dovesti do pogrešnih zaključaka. Zato, pre upotrebe, softver za generisanje slučajnih brojeva treba proveriti. Postoje različiti kriterijumi za kvalitet generatora slučajnih brojeva:

- Uniformno distribuirani slučajni brojevi treba da budu jednako raspoređeni po čitavom intervalu, ali struktura ne treba da bude previše regularna, jer u suprotnom brojeve nećemo smatrati slučajnim. U nekim slučajevima, ipak, dajemo prednost regularnim strukturama, posebno kada imamo posla sa glatkim funkcijama.
- Važne osobine niza slučajnih brojeva su svakako brzina i zahtevana memorija.
- Slučajni brojevi koriste konačan skup podataka zbog ograničenih mogućnosti algoritma i kompjutera. Iz tog razloga generator slučajnih brojeva u jednom trenutku počinje da ponavlja nizove brojeva. Maksimalna dužina tog niza pre nego što počne da se ponavlja naziva se period generatora slučajnih brojeva. Kako je za simulacije koje danas koristimo potrebno mnogo slučajnih brojeva, period generatora mora biti dovoljno dugačak da bismo izbegli ponovno korišćenje istih slučajnih brojeva.
- Nepredvidivost slučajnih brojeva nije osobina koja je od esencijalne važnosti za Monte Karlo metode. Bitnije je da oni izgledaju kao da su slučajni i nezavisni i da statistički testovi pokažu da su oni nezavisni i jednako distribuirani $SB \sim U[0,1]$.
- Za Monte Karlo simulacije potrebno je da niz slučajnih brojeva bude reproduktivan, pre svega zbog mogućnosti otklanjanja grešaka.
- Algoritam treba da bude programiran tako da daje iste slučajne brojeve na bilo kom kompjuteru.
- Struktura slučajnih tačaka je takođe veoma važna. Tipično svojstvo nekih generatora je da, ako su d -dimenzionalni vektori konstruisani od uzastopnih SB, onda te tačke leže u hiperravni.
- Takođe, treba tražiti generatore koji se lako implementiraju, tj. kod je kratak i jednostavan.

Slede neki primeri generatora slučajnih brojeva. Kongruentan linearni metod (LCG) jedan je od prvih generatora SB.

Algoritam 1. LCG

Neka je $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ modul, $a \in \mathbb{N}$ množitelj, $a < m$, $c \in \mathbb{N}$ uvećanje, $c < m$ i $s_0 \in \mathbb{N}$ seme (početna vrednost), $s_0 < m$. Neka je

$$s_{n+1} = (as_n + c) \bmod m, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tada brojeve iz intervala $[0,1)$ dobijamo iz:

$$u_n = \frac{s_n}{m}.$$

Višestruki rekursivni generatori (MRG) su generalizacija LCG-a i laki su za implementaciju. Imaju dosta duži period sa istim modulom, a i bolju strukturu, jer za izračunavanje sledećeg broja koriste više prethodnih. Razmatraćemo samo homogene rekurencije sa $c = 0$ jer se svaka nehomogena može zameniti homogenom višeg reda sa pogodnom početnom vrednošću.

Algoritam 2. MRG

Neka je $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ modul, $a_i \in \mathbb{N}$ množitelji, $i = 1, \dots, k$, $a_i < m$, k je red rekurzije, $a_k \neq 0$, $k \geq 2$ i $s_0 = (s_0, s_1, \dots, s_{k-1}) \in \mathbb{N}^k$ seme, $s_i < m$, $i = 0, \dots, k-1$. Neka je i

$$s_n = (a_1 s_{n-1} + \dots + a_k s_{n-k}) \bmod m, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq k,$$

Tada brojeve iz $[0,1)$ dobijamo iz

$$u_n = \frac{s_{n+k-1}}{m}, \quad n > 0.$$

Sledi teorema koja predstavlja jedan od osnovnih zakona u oblasti teorije verovatnoće i statistike.

Teorema 1. Jak zakon velikih brojeva

Neka je $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz integrabilnih, realnih slučajnih promenljivih koje su nezavisne, jednako distribuirane i definisane na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Neka je sada $\mu = E(X_1)$. Tada za skoro sve $\omega \in \Omega$ važi:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu,$$

tj. aritmetička sredina od (realizacija) X_i teži teoretskoj srednjoj vrednosti za svako X_i , očekivanju μ .

1.2 Grub Monte Karlo metod

Neka je X realna slučajna promeljiva sa konačnim očekivanjem $E(X)$. Popularan metod za izračunavanje očekivanja (naravno približno) dat je u sledećem algoritmu.

Algoritam 3. Grub Monte Karlo metod

Aproksimiramo $E(X)$ artimetričkom sredinom $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i(\omega)$ za neko $N \in \mathbf{N}$. $X_i(\omega)$ su rezultati N nezavisnih ogleda koji imaju istu raspodelu kao X .

Primer 1. Aproksimacija očekivanja grubim Monte Karlo metodom

Genrišimo sada slučajne brojeve sa $\mathcal{E}(5)$ raspodelom. Znamo da je očekivanje eksponencijalne raspodele sa parametrom 5 iznosi $\frac{1}{5} = 0.2$. Ako generišemo 1,000 slučajnih brojeva dobijamo rezultat $\bar{X}_{1,000} = 0.217589$. Ako količinu brojeva povećamo na 10,000 dobijamo $\bar{X}_{10,000} = 0.199982$, što je dosta dobra aproksimacija.

Da bismo razmatrali tačnost ove metode, treba istaći da različita pokretanja Monte Karlo metode daju različite rezultate pri aproksimaciji određenog izraza. Zbog toga se ovde susrećemo sa stohastičkom greškom.

Teorema 2. Nepristrasnost Monte Karlo metode

Neka je $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ niz integrabilnih, realnih slučajnih promenljivih koje su nezavisne i imaju istu raspodelu kao X i definisane su na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tada je Monte Karlo ocena

$$\bar{X}_N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i, \quad N \in \mathbf{N},$$

nepristrasna ocena za $\mu = E(X)$, tj. $E(\bar{X}_N) = \mu$.

Da bismo stekli utisak o apsolutnoj vrednosti greške, posmatračemo varijansu razlike između $\bar{X}_N$ i μ . Kako važi:

$$\text{Var}(\bar{X}_N - \mu) = \text{Var}(\bar{X}_N) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \text{Var}(X_i) := \frac{\sigma^2}{N}, \quad (1.1)$$

standardna devijacija greške je reda $O(1/\sqrt{N})$. Standardna devijacija je mera tačnosti grube Monte Karlo metode, što ima za posledicu sledeće:

Povećanje (srednje) tačnosti grube Monte Karlo ocene za jednu cifru (tj. smanjenje njene standardne devijacije za faktor 0.1) zahteva povećanje broja Monte Karlo simulacija 100 puta.

Teorema 3. Centralna granična teorema

Neka je $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz integrabilnih, realnih slučajnih promenljivih koje su nezavisne i imaju istu raspodelu kao X i definisane su na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Pretpostavimo još da imamo konačnu varijansu $\text{Var}(X) = \sigma^2$. Tada, normirana i centrirana suma tih slučajnih promenljivih konvergira u distribuciji ka standardnoj normalnoj raspodeli, tj. važi:

$$\frac{\sum_{i=1}^N X_i - N\mu}{\sqrt{N}\sigma} \xrightarrow{D} N(0,1) \text{ kada } N \rightarrow \infty.$$

Iz prethodne teoreme možemo izvesti zaključak da za velike vrednosti N gruba Monte Karlo ocena ima približno $N(\mu, \sigma^2/N)$ raspodelu. Kako znamo da je asimptotska distribucija MK ocene skoro normalna, dobijamo:

Aproksimacija $1 - \alpha$ intervala poverenja za očekivanje μ :

$$\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right]. \quad (1.2)$$

Ovde, $z_{1-\alpha/2}$ je $1-\alpha/2$ kvantil standardizovane normalne raspodele. Pošto 97.5% kvantil standardizovane normalne raspodele oznosi 1.96, popularan izbor za 95% kvantil za očekivanje ocene MK metodom u primenama je dat sa:

$$\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i - 2 \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i + 2 \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right].$$

1.3 Monte Karlo metod: Prve primene

Osnove Monte Karlo metode su izračunavanje ili aproksimiranje određenih izraza putem predviđanja uz pomoć crtanja velikih količina odgovarajućih slučajnih brojeva. Jedan od osnovnih primera primene Monte Karlo metode svakako je izračunavanje broja π .

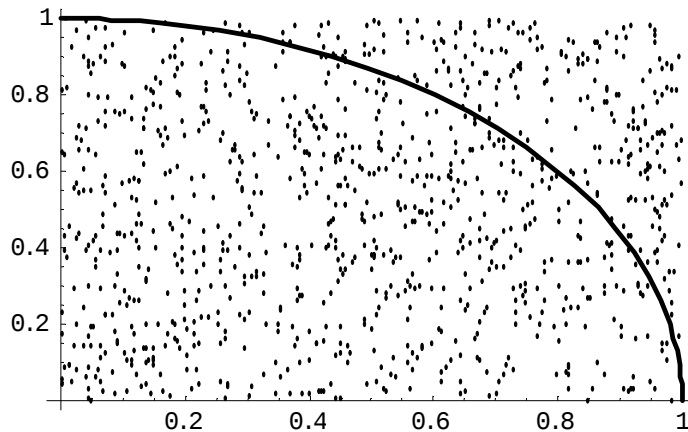
Primer 2. Izračunavanje broja π

Ako nasumice izaberemo tačku u ravni unutar kvadrata $[0,1] \times [0,1]$, verovatnoća da će se ona naći unutar jedinične kružnice je razmera površine četvrtine kruga i ukupne površine kvadarta:

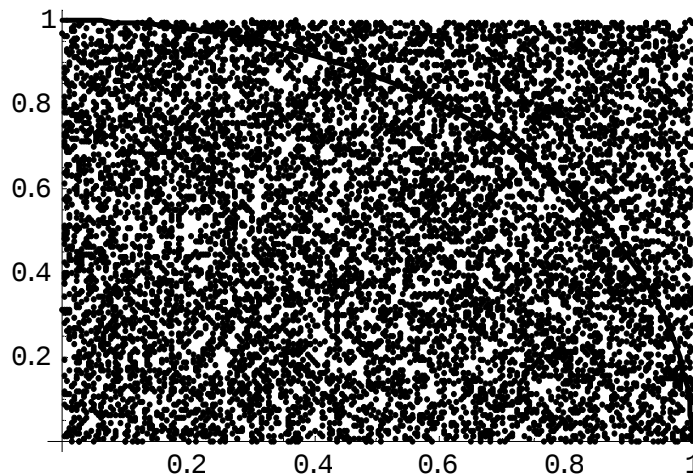
$$P = \frac{A_{kr}}{A_{kv}} = \frac{r^2 \pi / 4}{d^2} = \frac{1^2 \pi}{4 \cdot 1^2} = \frac{\pi}{4}$$

Tu verovatnoću možemo i proceniti. Zakon velikih brojeva nam govori da će razmera broja tačaka koje su završile unutar jedinične kružnice i ukupnog broja tačaka biti približno jednaka traženoj verovatnoći, naravno, ako izaberemo dovoljno veliki broj tačaka. Što je veći broj odabranih tačaka, to će i naš rezultat biti bliže tačnoj vrednosti. Naša jedina nepoznata u gore navedenoj relaciji je broj π . Možemo napisati $\pi = 4P \approx 4 \frac{n}{i}$, gde je n broj tačaka koje se nađu unutar jedinične kružnice, a i ukupan broj odabranih tačaka.

Na Slici 1. prikazan je ishod jedne simulacije sa 1,000 odabranih tačaka. Dobijeni rezultat, $\pi = 3.128$, govori nam da ovakav način ocene nije naročito precizan. Algoritam možemo poboljšati ako odaberemo npr. 10,000 tačaka, sačuvamo rezultat, zatim to ponovimo sto puta i nađemo srednju vrednost svih ponavljanja. Tako dobijamo $\pi = 3.142286$, što je dosta bolji rezultat. Kako te tačke sada izgledaju možemo videti na Slici 2.



Slika 1. Određivanje broja π slučajnim odabirom 1,000 tačaka.



Slika 2. Određivanje broja π slučajnim odabirom 10,000 tačaka

Primer 3. Ocena verovatnoće događaja

Neka je A određeni događaj. Želimo da procenimo verovatnoću da će se taj događaj desiti, $P(A)$. Korišćenjem relacije

$$1_{A(\omega)} = \begin{cases} 1, \omega \in A \\ 0, \omega \notin A \end{cases} \quad (1.3)$$

i verovatnoće događaja A ,

$$E(1_A) = P(A), \quad (1.4)$$

Monte Karlo ocena za $P(A)$ jednostavno je relativna frekvencija pojavljivanja događaja A u N nezavisnih eksperimenata.

Neka je sada A_i pojavljivanje događaja A u eksperimentu i . Tada definišemo Monte Karlo ocenu za $P(A)$ kao

$$rf_N(A) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1_{A_i}. \quad (1.5)$$

Kako važi i

$$Var(1_A) = P(A)(1 - P(A)),$$

Uvodimo

$$\hat{\sigma}_N^2 = rf_N(A)(1 - rf_N(A))$$

i dobijamo aproksimaciju 95% intervala poverenja za $P(A)$:

$$\left[rf_N(A) - \frac{1.96}{\sqrt{N}} \hat{\sigma}_N, rf_N(A) + \frac{1.96}{\sqrt{N}} \hat{\sigma}_N \right]. \quad (1.6)$$

Primer 4. Monte Karlo integracija

Veoma jednostavna, ali efikasna primena Monte Karlo pristupa je izračunavanje vrednosti determinističkog integrala oblika:

$$\int_{[0,1]^d} g(x) dx \quad (1.7)$$

gde je g realna, ograničena funkcija. Ako sa $f(x)$ obeležimo funkciju gustine d -dimenzionalne uniformne raspodele na $[0,1]^d$ kao

$$f(x) = 1_{[0,1]^d}(x), \quad x \in \mathbf{R}^d, \quad (1.8)$$

gornji integral možemo napisati kao očekivanu vrednost od $g(X)$ gde je X slučajna promenljiva sa uniformnom raspodelom na $[0,1]^d$, tj.

$$I = \int_{[0,1]^d} g(x) dx = \int g(x) f(x) dx = E(g(X)). \quad (1.9)$$

To nam sada dozvoljava da izračunamo Monte Karlo ocenu $\hat{I}$ gornjeg integrala simuliranjem N slučajnih promenljivih $X_1, \dots, X_N$ koje su nezavisne i uniformno distribuirane na $[0,1]^d$. Tada dobijamo:

$$\hat{I}_n(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(X_i(\omega)). \quad (1.10)$$

Uzmimo jednu jednostavnu funkciju $g(x, y) = x^2 + 6xy + y^2$ i izračunajmo približno njen integral uz pomoć Monte Karlo metode. X, Y su uniformno raspoređene na intervalu $[0, 1]$. Za 100 simulacija dobijamo rezultat $I = 2.12722$. Stvarna vrednost ovog integrala iznosi $\frac{13}{6} \approx 2.16667$. Ako povećamo broj simulacija na 1,000, dobijamo rezultat koji je bliži stvarnom i iznosi $I = 2.17685$.

Napomena 1.

a) Pošto integral treba izračunati nad podskupom od $\mathbf{R}^d$, realne slučajne promenljive $Z_i = g(X_i)$ dozvoljavaju primenu jakog zakona velikih brojeva.

b) Primena Monte Karlo metode integracije nije ograničena samo na jedinični interval. Isti metod se može primeniti i za ograničen d -dimenzionalni pravougaonik. Naravno, tada slučajne promenljive X_i moraju imati uniformnu raspodelu na odgovarajućem pravougaoniku. U slučaju neograničenog domena, potrebna nam je pogodna transformacija h^{-1} koja treba da svede domen na jedinični interval. Tada integral iznosi $E(g(h(X))h'(X))$ gde X ima uniformnu raspodelu na jediničnom intervalu.

c) Metod Monte Karlo integracije se može prilagoditi i koristiti za izračunavanje diskretnih suma funkcije $g(x)$ nad prebrojivim skupom A . Svaka diskretna suma se može predstaviti preko očekivanja uz pomoć:

$$\sum_{x \in A} g(x) = \sum_{x \in A} \frac{g(x)}{p(x)} p(x) = E\left(\frac{g(X)}{p(X)}\right) \quad (1.11)$$

gde je P diskretna raspodela verovatnoća na A sa

$$P(X = x) = p(x) > 0 \quad \forall x \in A. \quad (1.12)$$

Monte Karlo metod se može primeniti na uzorak od N slučajnih promenljivih iz raspodele P i onda izračunati gruba Monte Karlo ocena za sumu

$$\hat{S}_{N,P} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{g(X_i)}{p(X_i)}, \quad (1.13)$$

koja se koristi za aproksimaciju očekivanja u jednačini (1.11). Međutim, izbor odgovarajuće raspodele verovatnoća kod beskonačne sume nije tako jednostavan jer uniformna raspodela nad beskonačnim skupom ne postoji. $\square$

Pre nego što nastavimo, bilo bi korisno objasniti još neke pojmove:

- Metod uzorkovanja po važnosti (IS) je tehnika za smanjivanje varijanse koja se može koristiti kod Monte Karlo metode. Osnovna ideja ove metode je da određene vrednosti ulaznih slučajnih promenljivih u simulaciji imaju veći uticaj na parametar koji se ocenjuje od nekih drugih vrednosti. Ako se te „važne“ vrednosti

u uzorku češće pojavljuju, tada se ocena varijanse može smanjiti. Zbog toga je osnovna metodologija uzorkovanja po važnosti zapravo odabir raspodele koja na neki način „podržava“ te važne vrednosti.

▪ Za raspodelu sa gustinom f nad $\mathbf{R}^d$ metoda eksponencijalne transformacije sa parametrom $\theta \in \mathbf{R}^d$ data je jednačinom:

$$f_{\theta}(x) = \frac{\exp(\theta'x)}{E(\exp(\theta'X))} f(x)$$

gde je X distribuirano prema P . Funkcija $M(\theta) = E(\exp(\theta'X))$ naziva se funkcija generatriše momenata od X . Definisanjem funkcije generatriše kumulanata kao $C(\theta) = \ln(M(\theta))$, direktno se može proveriti da važi:

$$C'(\theta) = E(X \exp(\theta'X - C(\theta))) = E_{\theta}(X)$$

gde je $E_{\theta}(X)$ očekivanje pod transformisanom gustinom f_{θ} . Dakle eksponencijalna transformacija sa parametrom θ transformiše srednju vrednost od X u vrednost $C'(\theta)$.

▪ Za dekompoziciju matrice Σ postoji više načina, ona nije jedinstveno određena. Jedan od metoda, koji će u ovom radu biti korišćen jeste Cholesky faktorizacija, koja nam daje donju trougaonu matricu. Prednost ovako dobijene, polu popunjene matrice je da se transformacija standardnog normalnog vektora obavlja duplo brže.

Algoritam 4. Cholesky faktorizacija

Neka je pozitivno definitna matrica Σ data. Nalazimo donju trougaonu matricu A gde je $A^T A = \Sigma$, $a_{i,j} = 0$ za $j > i$ putem:

1. $a_{11} = \sqrt{\sigma_{11}}$,
2. $a_{ij} = \left(\sigma_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik} a_{jk} \right) / a_{jj}$ za $1 \leq j < i \leq d$,
3. $a_{ii} = \sqrt{\sigma_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}^2}$, $1 < i \leq d$.

2. Principi premije i mere rizika

Premija polise osiguranja je deo cene ugovora koji bi trebalo da bude dovoljan da pokrije rizik koji osiguravajuća kompanija preuzima sklapanjem istog. Stvarna cena ugovora sadrži i delove koji su potrebni za pokrivanje administrativnih i drugih troškova. Ovakva premija nosi naziv gros premija. Za računanje premije bez administrativnih troškova (kojima ćemo se ovde i baviti) koriste se takozvani **principi premije**.

Pošto se principi premije koriste za ocenjivanje rizika prisutnog u polisama osiguranja, predstavimo i takozvane **mere** (finansijskog) **rizika** koje se koriste pri ocenjivanju i upravljanju finansijskim rizikom. Biće predstavljena oba koncepta, aspekti njihove Monte Karlo simulacije kao i veza između mera rizika i principa premije.

2.1 Svojstva i primeri principa premije

Da bismo uveli pojam principa premije, potrebno je prvo uvesti pojam rizika X kao slučajne promenljive za koju ćemo pretpostavljati određena integrabilna svojstva kad god to bude potrebno. Ono što takođe pretpostavljamo je da posmatrane polise osiguranja počinju odmah, što znači da je rizik već prisutan. Razmotrićemo i jedan drugačiji slučaj životnog osiguranja kod kog ugovori počinju negde u budućnosti. Stoga ćemo uvesti i odgovarajuće diskontovanje.

Definicija 1.

*Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća, a **rizik** X nenegativna slučajna promenljiva na tom prostoru. Funkcija $p(\cdot)$ na prostoru rizika X naziva se **princip premije**.*

Postoji mnogo različitih principa premije koji se mogu koristiti. Ovde će biti predstavljena osnovna četiri.

Definicija 2.

Neka su X, Y rizici. Tada je za princip premije $p(\cdot)$ poželjno da ima sledeće osobine:

- | | |
|---|--------------------------------|
| 1. $p(X + Y) \leq p(X) + p(Y)$ | aditivnost |
| 2. $p(X) \leq p(X + Y)$ | monotonost |
| 3. $p(X) \geq E(X)$ | nenegativno opterećenje |
| 4. $p(X) \leq \sup_{\omega \in \Omega} X(\omega)$ | no rip-off |

Napomena 2.

Interpretacije gore navedenih osobina:

- a) Aditivnost kaže da ne bi trebalo da se isplati podeliti rizik $X + Y$ i sklopiti dva ugovora, jedan sa rizikom X drugi sa Y . Međutim, ova osobina nema smisla bez pretpostavke o zavisnosti između X i Y .
- b) Ova osobina govori o tome da dodatni rizik zahteva veću premiju, što je veoma razumno.
- c) Treća osobina je motivisana zakonom velikih brojeva: Ako osiguravajuća kompanija naplati premije koje iznose manje od očekivanog gubitka $E(X)$ (tzv. fer premija), sigurno će bankrotirati ukoliko je broj prodatih polisa veliki.
- d) No rip-off osobina je takođe logična, jer osiguranik neće sklopiti ugovor čija je cena veća od najvećeg mogućeg iznosa njegove štete. $\square$

Slede četiri popularna principa premije kao i provere koje od pomenutih osobina zadovoljavaju.

Definicija 3.

Princip očekivane štete $p_{\text{exp}}(X)$ za zahtev X i konstantu $\mu > 0$ glasi:

$$p_{\text{exp}}(X) = (1 + \mu)E(X). \quad (2.1)$$

Dati princip zadovoljava osobine 1, 2 i 3 iz prethodne definicije. Ali, ne zadovoljava osobinu 4 za konstantne zahteve ili zahteve čiji je maksimum manji od $(1 + \mu)E(X)$. Međutim, kako u oba slučaja takva polisa neće biti prodana, jasno je da se takva vrednost za μ neće koristiti u praksi. Još jedna mana ovog principa je to što promene samog rizika X ne utiču na premiju.

Principi na koje promene veličina zahteva utiču su princip varijanse (disperzije) i princip standardnog odstupanja.

Definicija 4.

Neka je $\mu > 0$ data konstanta.

1. **Princip varijanse (disperzije)** $p_{\text{var}}(X)$ za zahtev X dat je sa

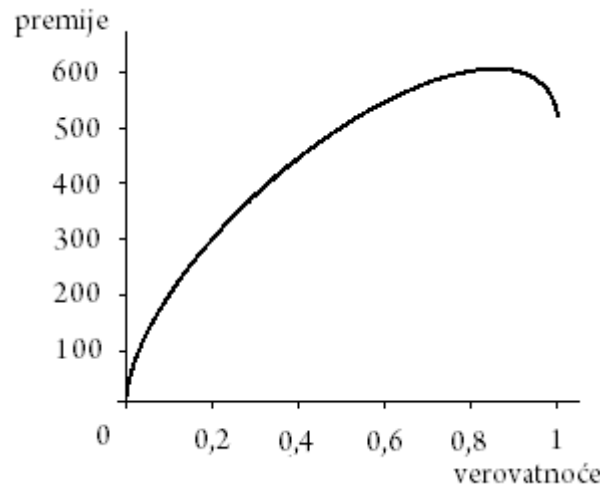
$$p_{\text{var}} = E(X) + \mu \cdot \text{Var}(X). \quad (2.2)$$

2. **Princip standardnog odstupanja** $p_{\text{sd}}(X)$ za zahtev X glasi

$$p_{\text{sd}}(X) = E(X) + \mu \cdot \sqrt{\text{Var}(X)}. \quad (2.3)$$

Što se osobina tiče, oba ova principa ne zadovoljavaju osobinu monotonosti, što je ozbiljna mana. Razlog za to je što je veza između očekivanja i varijanse odnosno standardnog odstupanja nelinearna i nemonotona. Da bismo to pokazali, pretpostavićemo da imamo verovatnoću q da se zahtev X pojavi u narednom periodu i da iznos zahteva ima raspodelu $\Gamma(1, 500)$. Premija je sa

ovakvim pretpostavkama za princip standardnog odstupanja sa $\mu = 1$ prikazana na Slici 3.



Slika 3. Premije za princip standardnog odstupanja

Možemo videti da je premija za $q = 1$, tj. kad se zahtev sigurno pojavljuje, niža od premije za koju je verovatnoća pojavljivanja $q = 0.856$. To je u suprotnosti sa osobinom monotonosti i neprihvatljivo je. Zato treba obratiti pažnju prilikom korišćenja ovih principa. Napomenimo još i da aditivnost nije zadovoljena kad je u pitanju princip varijanse.

Princip premije koji eliminiše pomenute probleme je princip semistandardnog odstupanja koji se sastoji od odstupanja od srednje vrednosti samo kod visokih zahteva.

Definicija 5.

Princip semistandardne devijacije $p_{ssd}(X)$ za zahtev X i konstantu $0 \leq \mu \leq 1$ glasi

$$p_{ssd}(X) = E(X) + \mu \cdot \sqrt{E\left\{\left[\max(0, X - E(X))\right]^2\right\}}. \quad (2.4)$$

Svi pomenuti principi premije su blisko povezani sa jakim zakonom velikih brojeva i centralnom graničnom teoremom i eksplicitno dodaju opterećenje. To nam daje motivaciju za korišćenje standardnog odstupanja i varijanse kao mera za ocenu rizika odstupanja zahteva od njegove očekivane vrednosti. Naredni princip, poznat kao princip očekivane korisnosti, uključuje osiguranikov stav prema riziku uvodeći funkciju korisnosti.

Definicija 6.

Neka je $U(x)$ funkcija korisnosti koja je konkavna, strogo rastuća funkcija. Premija $p_{eu}(X)$ za zahtev X se računa putem **principa očekivane korisnosti** ako važi:

$$U(c) = E(U(c - X + p_{eu}(X))) \quad (2.5)$$

gde je c (pozitivna) konstanta, npr. zdravstveno stanje osiguranika.

Napomena 3

- a) Premija je takva da je korisnost zaključivanja ugovora jednaka korisnosti nezaključivanja istog.
- b) Prva osobina principa premije nije zadovoljena. Međutim, ona je poželjna jer veći rizik može dovesti do prevelike premije. Obrazloženje malopredašnje konstatacije može se videti kroz poređenje rizika koji se javlja kod n osoba istih godina koje imaju isto životno osiguranje sa rizikom jedne osobe osigurane n puta gde imamo iznos koji se isplaćuje nakon smrti osiguranika i anutete. U drugom slučaju, dugoročni i rizik od rane smrti su mnogo veći nego kad se n puta pomnoži rizik u prvom slučaju, jer se u prvom slučaju rizik deli na n klijenata.
- c) Umesto konstante c treba koristiti slučajnu promenljivu C koja predstavlja čitav portfolio zahteva i zameniti levu stranu jednačine sa $E(U(C))$. Ova promena daje visoke premije za zahteve koji su veoma povezani sa C , a niske premije kod zahteva koji dovode do diverzifikacije portfolija.
- d) Za specijalno odabranu funkciju korisnosti

$$U(x) = \frac{1}{\alpha}(1 - \exp(-\alpha x)) \text{ za fiksirano } \alpha > 0 \quad (2.6)$$

premija koja se računa putem principa očekivane korisnosti je nezavisna od c i eksplicitno je data sa

$$p_{eu}(X) = \frac{1}{\alpha} \ln(E(e^{\alpha X})) \quad (2.7)$$

Ovaj princip daje konačne premije samo za eksponencijalno ograničene rizike.

2.2 Monte Karlo simulacija principa premije

Nakon odabira principa premije, ostaje da se premija polise osiguranja eksplicitno izračuna. Ako je nije moguće eksplicitno izračunati, Monte Karlo simulacija može biti od koristi. Ona je jednostavna za princip očekivane štete i za princip očekivane korisnosti u slučaju eksponencijalne funkcije korisnosti kad se koristi jednačina (2.7).

Međutim, postoji drugi aspekt uveden od strane principa premije koji sadrži varijansu u bilo kom obliku. Da bismo izračunali varijansu potrebno nam je očekivanje. Naravno, za velike vrednosti N (broj Monte Karlo simulacija) možemo koristiti Monte Karlo ocenu očekivanja, aritmetičku sredinu. Kako se varijansa može izračunati kao

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2, \quad (2.8)$$

Monte Karlo ocene za $E(X)$ i za $E(X^2)$ mogu se uraditi istovremeno. Ipak, za ocenu semivarijanse $E([\max(0, X - E(X))]^2)$ takva dekompozicija nije moguća, pa ćemo koristiti sledeću proceduru:

1. Oceniti srednju vrednost $E(X)$ sa $\bar{X}_{N_1}$ uz pomoć N_1 simulacija.
2. Oceniti semivarijansu $E([\max(0, X - E(X))]^2)$ uz pomoć N_2 novih simulacija

$$\text{preko } \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} (\max(0, X - \bar{X}_{N_1}))^2.$$

Primer 5. Ocena semivarijanse

Uzmimo opet raspodelu $\mathcal{E}(5)$. Sledimo korake prethodno navedene procedure:

1. Dobijamo: $\bar{X}_{N_1} = 0.199982$, za $N_1 = 10,000$ (iz Pimera 1).
2. Za ocenu semivarijanse dobijamo $\frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} (\max(0, X - \bar{X}_{N_1}))^2 = 0.0280174$, za $N_2 = 5,000$.

2.3 Osobine i primeri mera rizika

Mera rizika je povezana sa finansijskim stanjem $\tilde{X}$ i vremenskim intervalom T , gde $\tilde{X}$ može biti i negativno i pozitivno. Za razliku od polisa osiguranja, $\tilde{X} > 0$ predstavlja profit.

Definicija 7.

Mera rizika ρ je realno preslikavanje definisano na prostoru slučajnih promenljivih.

Pošto je ova definicija prilično slaba, uvešćemo neke osobine koje mera rizika treba da poseduje.

Definicija 8.

Neka su $\tilde{X}, \tilde{Y}$ dva finansijska stanja. Svojstva koja mera rizika $\rho(\cdot)$ treba da ima su:

1. $\rho(\tilde{X} + m) = \rho(\tilde{X}) - m \quad \forall m \in \mathbf{R}$ **translatorna invarijantnost**
2. $\tilde{X} \geq \tilde{Y} \text{ s.s.} \Rightarrow \rho(\tilde{X}) \leq \rho(\tilde{Y})$ **monotonost**
3. $\rho[\lambda \tilde{X} + (1-\lambda)\tilde{Y}] \leq \lambda \rho(\tilde{X}) + (1-\lambda)\rho(\tilde{Y})$ za $\lambda \in [0,1]$ **konveksnost**
4. $\rho(\lambda \tilde{X}) = \lambda \rho(\tilde{X})$ za $\lambda \geq 0$ **pozitivna homogenost**

Napomena 4.

Značenja svojstava iz prethodne definicije:

- a) Translatorna invarijantnost znači da bezrizičan novac menja rizik stanja za tačno isti iznos. Posmatrajmo $\rho(\tilde{X} + \rho(\tilde{X})) = 0$, što znači da ako investiramo premiju rizika $\rho(\tilde{X})$ na bezrizičan način rizik nestaje.
- b) Monotonost jednostavno govori da manje rizika zahteva manje novca u rezervi.
- c) Konveksnost mere rizika je povoljna za diverzifikaciju.
- d) Pozitivna homogenost povlači da rizik linearno raste u jedinicama određenog rizičnog dobra koje posedujemo. O ovom svojstvu se u literaturi dosta diskutuje da potpuno ignoriše rizik likvidnosti. Sa osiguravajuće tačke gledišta, to bi značilo da osiguravanje protiv zemljotresa deset visokih kula u, na primer, San Francisku nosi istu količinu rizika kao i osiguravanje deset kula na deset različitih mesta. U pogledu ekstremnog rizika, to nema smisla, jer zemljotres u San Francisku bi najverovatnije uništio sve kule, dok je zemljotres na deset različitih mesta u isto vreme skoro neverovatan.

Da bismo normalizovali opseg mere rizika možemo zahtevati da važi $\rho(0) = 0$ **normalnost**

što potpuno ima smisla jer finansijsko stanje jednako nuli nije nimalo rizično. $\square$

U literaturi se javljaju dva osnovna tipa mere rizika.

Definicija 9.

Mera rizika je **konveksna** ako zadovoljava osobine od 1 do 3, a **koherentna** ako zadovoljava osobine od 1 do 4 iz Definicije 8.

Osobine 3 i 4 impliciraju da koherentna mera rizika takođe poseduje i svojstvo aditivnosti. Ako dostiže konačnu vrednost $\rho(0)$ onda ima i svojstvo normalnosti $\rho(0) = 0$.

Predstavićemo neke popularne mere rizika, a ona koja se uglavnom koristi u bankama i koja je postala standard u industriji je takozvana VaR (value-at-risk).

Definicija 10.

VaR na nivou α (VaR_α) je α -kvantil gubitka finansijskog stanja $\tilde{X}$ u trenutku T :

$$VaR_\alpha(\tilde{X}) = -\inf \left\{ u \in \mathbf{R} \mid P(\tilde{X} \geq u) \geq 1 - \alpha \right\} \quad (2.9)$$

Gde je α veliko, kao na primer 95% ili 99%.

Kao kvantil, VaR_α je lak za razumevanje i veoma popularan u praksi. Međutim, ne daje nam saznanje o veličini stvarnog gubitka iznad tog kvantila (odnosno VaR-a). VaR nije konveksna mera rizika i ne mora nužno da podržava diverzifikaciju. Kako bismo to i videli, razmotrimo stanja X, Y sa:

$$\tilde{X} = \tilde{Y} = \begin{cases} 100 & \text{sa verovatnoćom } 0.901 \\ 0 & \text{sa verovatnoćom } 0.009 \\ -200 & \text{sa verovatnoćom } 0.09, \end{cases}$$

Tada za $\alpha = 90\%$ dobijamo

$$\begin{aligned} VaR\left(\frac{1}{2}\tilde{X} + \frac{1}{2}\tilde{Y}\right) &= 50, \\ \frac{1}{2}VaR(\tilde{X}) + \frac{1}{2}VaR(\tilde{Y}) &= -100. \end{aligned}$$

Definicija 11.

Uslovni VaR (ili prosečna vrednost VaR -a) definiše se kao

$$CVaR_{\alpha}(\tilde{X}) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 VaR_{\gamma}(\tilde{X}) d\gamma. \quad (2.10)$$

$CVaR_{\alpha}$ se podudara sa **očekivanim manjkom** ili **uslovnim očekivanjem repa raspodele** definisanim kao

$$TCE_{\alpha}(\tilde{X}) = -E\left(\tilde{X} \mid \tilde{X} \leq VaR_{\alpha}\right) \quad (2.11)$$

ako je raspodela verovatnoća od $\tilde{X}$ bezatomarna. $CVaR_{\alpha}$ je koherentna mera rizika.

Kao i kod principa premije postoji mera rizika koja se zasniva na očekivanoj korisnosti:

Definicija 12.

Neka je $U : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ funkcija korisnosti (strogo rastuća i konkavna). Tada je mera rizika koja se zasniva na korisnosti finansijskog stanja $\tilde{X}$ data sa

$$\rho_{\text{utility}}(\tilde{X}) = \inf \left\{ m \in \mathbf{R} \mid E[U(\tilde{X} + m)] \geq U(0) \right\}. \quad (2.12)$$

Može se pokazati da je prethodno definisana mera rizika konveksna.

2.4. Veza između principa premije i mera rizika

Iz razloga što se oba koncepta koriste za ocenu rizika, trebalo bi da imaju mnogo toga zajedničkog. Ali, pre nego što ih uporedimo treba imati na umu da je princip premije bliži principu određivanja cena pošto je usredsređen na jednu polisu. Međutim, osnovni koncept koji se krije iza principa određivanja cena je jak zakon velikih brojeva, a ne arbitražni princip. Stoga, klasični principi premije kao što su princip očekivane štete ili princip varijanse nisu direktno povezani sa idejom o merama rizika koje imaju sklonost da se usredsređuju na ocenjivanje ekstremnih rizika. Klasični primeri su VaR i $CVaR$. Ipak, semistandardni princip standardnog odstupanja obraća pažnju i na visoke zahteve.

Pristup koji povezuje oba koncepta je princip očekivane korisnosti za principe premije i mere rizika.

Sada možemo definisati princip premije p iz date mere rizika ρ putem sledeće jednačine:

$$\rho(p(X) - X) = 0 \quad (2.13)$$

za svaki zahtev X . Kako je $p(X)$ bezrizično, to daje jednakost:

$$p(X) = \rho(-X) \quad (2.14)$$

što nam dozvoljava da proširimo definiciju principa premije na princip slučajnih promenljivih.

Ono što sada možemo je da uporedimo uslove nametnute na principe premije i one nametnute na mere rizika. S obzirom da je mera rizika konveksna i normalizovana, sledi da gore navedeni princip premije ima osobinu monotonosti kao i osobinu pozitivne homogenosti. Dalje, iz aditivnosti mere rizika sledi aditivnost principa premije. Pošto je mera rizika a priori definisana bez upućivanja na meru verovatnoća, treća osobina principa premije se ne može direktno proveriti.

Za konveksne mere rizika koje nisu i koherentne, gore navedeni princip premije neće zadovoljavati osobinu aditivnosti.

Monte Karlo simulacije mera rizika

Ocene kvantila i VaR

Prvi korak u oceni mere rizika jeste ocena kvantila. Monte Karlo ocena jednog α -kvantila $q_\alpha = F^{-1}(\alpha)$ slučajne promenljive X sa funkcijom raspodele F se dobija generisanjem N realizacija promenljive X , a onda korišćenjem α -kvantila $\hat{q}_{\alpha,N}$ empirijske funkcije raspodele $F_N(x)$.

Algoritam 5. Gruba Monte Karlo simulacija α -kvantila

Neka je F data funkcija raspodele, a $\alpha \in [0,1]$.

1. Simulirati N nezavisnih slučajnih brojeva $X_1, \dots, X_N$, $X_i \sim F$
2. Izračunati empirijsku funkciju raspodele

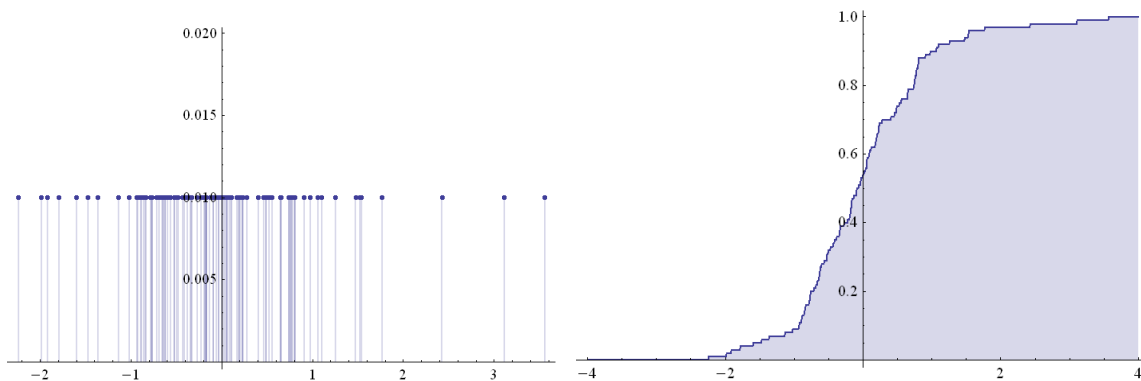
$$F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1_{\{X_i \leq x\}}.$$

3. Oceniti kvantil q_α uz pomoć $\hat{q}_{\alpha,N} = F_N^{-1}(\alpha)$.

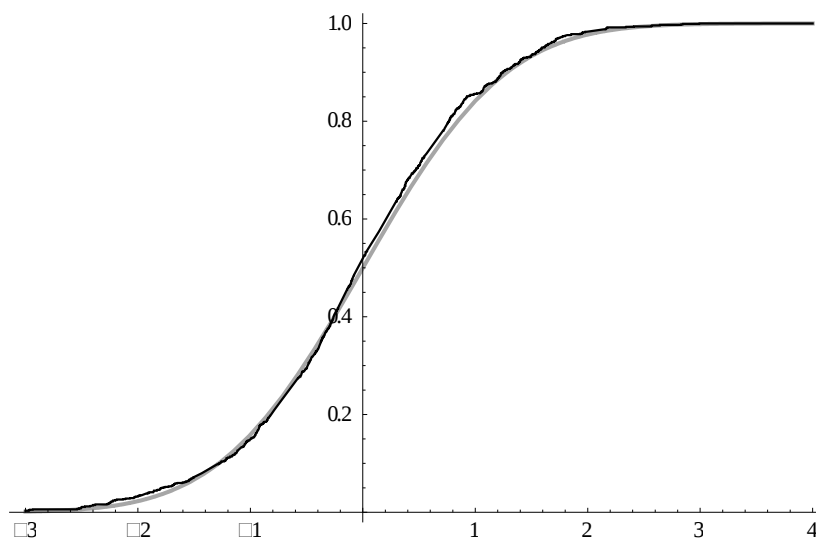
Primer 6. Gruba Monte Karlo ocena kvantila za $N(0,1)$

Korišćenjem prethodnog algoritma i simuliranjem u programu Mathematica 8 dobijamo sledeće rezultate. Za $\alpha = 0.95$ i $n=100$ dobijamo $\hat{q}_{0.95} = 1.50305$, za $n=1,000$ $\hat{q}_{0.95} = 1.67628$, a za $n=10,000$ $\hat{q}_{0.95} = 1.66221$ dok je stvarna vredost kvantila 1.65. Ako uzmemo da je $\alpha = 0.99$ dobijamo ocene kvantila: pri 100 simulacija $\hat{q}_{0.99} = 1.90422$, pri 1,000 simulacija $\hat{q}_{0.99} = 2.21551$, a za 10,000 $\hat{q}_{0.99} = 2.33892$, dok stvarni kvantil iznosi 2.33. Kao što je i logično, vidimo da sa većim brojem simulacija dobijamo preciznije rezultate.

Na Slici 4. možemo videti kako u slučaju 100 SB izgledaju empirijska funkcija raspodele i njena gustina, dok nam Slika 5. dočarava razliku između stvarne i empirijske funkcije raspodele kada imamo 1,000 SB.



Slika 4. Gustina (levo) i empirijska funkcija raspodele (desno) za 100 slučajnih brojeva sa $N(0,1)$ raspodelom



Slika 5. Stvarna funkcija raspodele $N(0,1)$ (siva) i empirijska funkcija raspodele (crna) za $n = 1,000$.

Napomena 5.

a) Naravno, ako je F eksplicitno poznata, tada kvantil računamo numerički rešavajući $F(x) = \alpha$. Tako da se Monte Karlo metod iz Algoritma 5. koristi samo kada nam F nije dostupno ili kad je komplikovano za izračunavanje. Inverzna funkcija empirijske funkcije raspodele se nalazi na jednostavan način: modelirane vrednosti se poređaju po njihovoj veličini i uzima se ona na k -tom mestu, $k = \min\{n \in \{1, \dots, N\} \mid \frac{n}{N} \geq \alpha\}$.

b) Da bismo dobili interval poverenja za q_α , možemo koristiti centralnu graničnu teoremu za kvantile koja glasi:

$$\sqrt{N}(\hat{q}_{\alpha,N} - q_\alpha) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2) \text{ kad } N \rightarrow \infty, \quad \sigma^2 = \frac{\alpha(1-\alpha)}{f(q_\alpha)} \quad (2.15)$$

gde je $f(\cdot)$ gustina za funkciju raspodele F . Ona nam direktno daje 95%-interval poverenja za q_α :

$$\left[\hat{q}_{\alpha,N} - 1.96 \frac{\alpha(1-\alpha)}{f(q_\alpha)\sqrt{N}}, \hat{q}_{\alpha,N} + 1.96 \frac{\alpha(1-\alpha)}{f(q_\alpha)\sqrt{N}} \right]. \quad (2.16)$$

Ovde imamo uobičajenu $1/\sqrt{N}$ konvergenciju. Ipak, vrednost $f(q_\alpha)$ se ne nalazi pod našom kontrolom i obično je veoma teška za ocenu, posebno za velike ili male vrednosti α . Kao primer ćemo uzeti 0.995-kvantil slučajne promenljive sa standardnom normalnom raspodelom koji je dat sa $q_{0.995} = 3.2905$. Da bismo dobili 95%-interval poverenja dužine 0.001 treba nam otprilike $N = 1,215,500$ ako je vrednost gustine u $q_{0.995}$ poznata. $\square$

Za preciznu ocenu željenog kvantila potrebno da imamo dosta vrednosti koje su mu blizu. Međutim, kako su kvantili kao što je VaR obično ekstremni, gruba Monte Karlo simulacija nas dovodi u obrnutu situaciju. Dobijamo mnogo vrednosti koje su daleko od kvantila, a samo nekoliko blizu. Tada koristimo **princip uzorkovanja po važnosti** kako bismo smanjili disperziju kvantila, a samim tim i veličinu intervala poverenja.

Sada se susrećemo sa jednim drugačijim problemom. Kako ne znamo vrednost kvantila, a obično ni oblik funkcije raspodele F , trebaju nam bar ocene za F i f u okolini kvantila. Ako imamo veliku disperziju tada

$$P(X > x) \approx \exp(-x\theta_x + C(\theta_x)), \quad x \gg E(X), \quad (2.17)$$

gde je $C(\cdot)$ funkcija generatriše kumulanata od X , a θ_x je dato sa $C'(\theta_x) = x$. Ako želimo da ocenimo velike kvantile q_α , $\alpha \approx 1$, tada (u slučaju neprekidne raspodele) jednostavno rešimo jednačinu:

$$1 - \alpha = P(X > q_\alpha) = \exp\left(-q_\alpha(C')^{-1}(q_\alpha) + C\left((C')^{-1}(q_\alpha)\right)\right). \quad (2.18)$$

Možemo se naći u situaciji kada je funkciju generatriše kumulanata $C(\cdot)$ lakše izračunati nego funkciju raspodele. Tada se može dogoditi da je koren prethodne jednačine moguće izračunati, dok je rešavanje jednačine $F(q_\alpha) = \alpha$, gotovo nemoguće, i to je jedini slučaj gde je Monte Karlo simulacija zaista korisna.

Ako bi ishod sa velikim disperzijama bio tačan tada bi rešenje jednačine bilo jednako kvantilu q_α . Ipak, to je samo gruba ocena $\tilde{q}_\alpha$. Međutim, daje nam ideju gde bismo trebali „pomeriti“ funkciju raspodele F da bismo dobili novu funkciju raspodele $\tilde{F}$ koja je (više) koncentrisana u okolini kvantila.

Da bismo izveli ovakvo jedno „pomeranje“ funkcije raspodele možemo da koristimo metod eksponencijalne transformacije. Činimo to uz pomoć sledeće jednačine:

$$\tilde{F}(dx) = \exp(-x\theta_{\tilde{q}_\alpha} + C(\theta_{\tilde{q}_\alpha}))F(dx). \quad (2.19)$$

Nova funkcija raspodele ima srednju vrednost kvantila $\hat{q}_\alpha$ koja je blizu vrednosti q_α , pa stoga možemo koristiti modifikovanu ocenu kvantila:

$$\hat{q}_{\alpha,N}^{imp,1} = F_{N,imp,1}^{-1}(\alpha), \quad (2.20)$$

$$F_{N,imp,1}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L(X_i) 1_{X_i \leq x}, \quad (2.21)$$

$$L(x) = \exp(x\theta_{\hat{q}_\alpha} - C(\theta_{\hat{q}_\alpha})) \quad (2.22)$$

gde su sve slučajne promenljive X_i generisane uz pomoć funkcije raspodele $\tilde{F}$ iz jednačine (2.19).

Ono što možemo koristiti kao alternativu za prethodno navedenu ocenu je ocena koja u obzir uzima samo velike vrednosti:

$$\hat{q}_{\alpha,N}^{imp,2} = F_{N,imp,2}^{-1}(\alpha), \quad (2.23)$$

$$F_{N,imp,2}(x) = 1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L(X_i) 1_{X_i > x}. \quad (2.24)$$

Ne možemo da ne primetimo da su jednačine ove dve ocene kvantila u osnovi jednake. $\hat{q}_{\alpha,N}^{imp,1}$ treba koristiti za ocene malih (za male vrednosti α), dok je $\hat{q}_{\alpha,N}^{imp,2}$ dobar izbor pri oceni velikih kvantila.

Algoritam 6. Princip uzorkovanja po važnosti za kvantile

Neka su F funkcija raspodele, nivo $\alpha \in (0,1)$ i $N \in \mathbf{N}$ dati.

1. Izračunati aproksimaciju kvantila $\tilde{q}_\alpha$ rešavanjem jednačine (2.18).
2. Generisati slučajne brojeve X_i prema funkciji raspodele $\tilde{F}$ kao u jednačini (2.19).
3. Ako je $\alpha < 0.5$ koristiti ocenu $\hat{q}_{\alpha,N}^{imp,1}$ prema jednačini (2.20).
4. Ako je $\alpha \geq 0.5$ koristiti ocenu $\hat{q}_{\alpha,N}^{imp,2}$ prema jednačini (2.23).

Primer 7.

Pretpostavimo da je $X \sim N(0,1)$ i da želimo da izračunamo $Var_{0.999}(X) \approx 3.0902$ uz pomoć dve pomenute varijante Monte Karlo simulacije. Želimo da ih uporedimo, pa ćemo prvo uočiti razliku između vrednosti koje su za 5 pozicija više i niže od naše ocene kvantila. Za eksplicitno izračunavanje koristićemo

$$C(\theta) = \frac{1}{2} \theta^2 \quad (2.25)$$

za funkciju generatriše kumulanata koja će dati približnu vrednost

$$\tilde{q}_{0.999} = \sqrt{-2 \ln(1 - 0.999)} = 3.716922 \quad (2.26)$$

Ako izaberemo $N=1,000$ i $10,000$ dobijamo rezultate date u Tabeli 1.

Metod / N	1,000	10,000
grub MK kvantil	3.03815	3.03146
uzorkovanje po važnosti	3.09744	3.09044

Tabela 1. $VaR_{0,999}$ ocena za $N(0,1)$ (stvarna vrednost iznosi 3.0902)

Ovakvi izbori su veoma rizični za korišćenje grube metode, jer je VaR određen svojim tačnim oblikom sa samo nekoliko brojeva, dok se u slučaju uzorkovanja po važnosti VaR nalazi blizu sredine oblasti raspodele i mnogo je stabilniji u pogledu autlajera. Ovaj argument kao i numerički rezultati pokazuju prednosti metode uzorkovanja.

Napomena 6.

- a) Ako zaista možemo da izračunamo sve njene delove, posebno funkciju generatriše kumulanata C (što je često ne baš tako lak zadatak), metoda uzorkovanja za izračunavanje kvantila daje veoma dobre rezultate. Isto važi i za izračunavanje funkcije raspodele F . Uostalom, ako je F dato, onda nam Monte Karlo metod nije ni potreban. Zbog toga je prilično ograničena direktna primena ove metode za izračunavanja mera rizika.
- b) Još jedna mana se ogleda u tome što izračunavanje (asimptotskog) intervala poverenja zahteva izračunavanje funkcije gustine f i samog kvantila q_α . Kvantil možemo zameniti njegovom ocenom $\hat{q}_{\alpha,N}^{imp,i}$, $i=1,2$ pri čemu biramo pogodniju. Ipak, ostaje problem ocene funkcije gustine što je vrlo delikatan zadatak kada je reč o tačnosti. □

VaR uz pomoć uzorkovanja po važnosti i delta-gamma aproksimacije

Metodu uzorkovanja po važnosti za izračunavanje kvantila nije moguće izvesti ako funkcija generatriše kumulanata i funkcija raspodele nisu poznate. To se često događa kad je u pitanju portfolio banke ili osiguravajuće kompanije koji sadrži složene proizvode kao npr. izvedene hartije od vrednosti (finansijske derivate).

Sa druge strane, banke i osiguravajuće kuće moraju (nekada) svakodnevno da računaju mere rizika (npr. VaR) za svoj portfolio. Rešenje ovakvog problema se sastoji od sledećih koraka:

1. Umesto izračunavanja VaR_α izračunati verovatnoću gubitka preko date vrednosti x .
2. Koristiti metod uzorkovanja da bismo smanjili računski posao.
3. Ponavljati korak 1. sa različitim nivoima dok ne dobijemo verovatnoću gubitka blisku α .

Pretpostavimo sada da je gubitak L tokom datog vremenskog intervala t funkcija od vektora datih **faktora rizika** $(W_1, \dots, W_n)$,

$$L = f(0, \dots, 0) - f(t, W_1, \dots, W_n). \quad (2.27)$$

Ovakva jedna funkcija je suma drugih funkcija $h^{(i)}(t, W_1, \dots, W_n)$ koje opisuju cene različitih hartija od vrednosti (akcija, finansijskih derivata, itd.) koje čine portfolio jednog investitora, banke ili osiguravajuće kuće u periodu od 0-tog do trenutka t . Sada nas interesuje ocena verovatnoće gubitka preko date vrednosti x ,

$$P(L > x) = E(1_{L > x}). \quad (2.28)$$

Pošto u definiciji imamo očekivanje, upotrebićemo Monte Karlo simulaciju. Suočavamo se prvo sa problemom jer smatramo da je x veliko, što znači da sa grubim Monte Karlo pristupom nećemo dobiti mnogo observacija koje bi nam pomogle da tačno ocenimo verovatnoću. Ocena gubitka L može trajati prilično dugo ako je dati portfolio veliki i sadrži mnogo funkcija $h^{(i)}$ koje su nelinearne u faktorima rizika, što predstavlja naš drugi problem. Takođe, te funkcije mogu biti cene egzotičnih opcija i mogu zahtevati odvojenu MK simulaciju.

Aproksimacije gubitka L su veoma popularne, upravo jer banke i osiguravajuće kompanije moraju da izračunavaju verovatnoće gubitka svakodnevno. Aproksimacije počivaju na pretpostavkama da W ima višedimenzionalnu normalnu raspodelu i da je funkcija gubitka $f(\cdot)$ aproksimirana Tejlorovim polinomom.

Delta aproksimacija počiva na linearnoj aproksimaciji i previše je gruba za tipične portfolije koji sadrže finansijske derivate. **Delta-gamma aproksimacija** koristi Tejlorov polinom drugog reda

$$L = f(0, \dots, 0) - f(t, W) \approx -f_t(0)t - \nabla f(0)W - \frac{1}{2}W'Hess_f(0)W, \quad (2.29)$$

i veoma je popularna u praksi. Gradijent ∇f sadrži sve parcijalne izvode $\partial f / \partial W_i$ (delte), a Hesejeva matrica $Hess_f$ sadrži parcijalne izvode drugog reda $\partial^2 f / (\partial W_i \partial W_j)$ (game). Pošto su i delte i game sume delta i gama delova portfolia, obično ih trgovci već izračunaju, pa za njih nije potreban dodatni trud. Isto važi i za izvod po vremenu, tzv. teta.

Sada je osnovna ideja da zamenimo L delta-gamma aproksimacijom (2.29). Pretpostavimo da je $W \sim N(0, \Sigma)$, a onda upotrebimo metod uzorkovanja uz pomoć eksponencijalne transformacije koji se zasniva na jednačini (2.29). Uvešćemo sada matricu B sa

$$\Sigma = BB' \text{ i } -\frac{1}{2}B'Hess_f(0)B = D \quad (2.30)$$

gde je D dijagonalna matrica koja sadrži sve sopstvene vrednosti matrice $-1/2B'Hess_f(0)B$. Takva matrica postoji jer možemo koristiti dekompoziciju $\Sigma = AA'$, a zatim napraviti diagonalnu matricu $-1/2AHess_f(0)A' = UDU'$. Onda, koristeći činjenicu da je U ortogonalna, definišemo $B = A'U$, a

$D = -1/2 B' \text{Hess}_f(0) B$. Dalje možemo pretpostaviti (permutovanjem indeksa u W_i ako je potrebno) da sopstvene vrednosti zadovoljavaju:

$$d_1 \geq \dots \geq d_n. \quad (2.31)$$

Ako definišemo $W = BX$ za neko $X \sim N(0, I)$ možemo reći da je

$$\begin{aligned} L &\approx -f_t(0)t - (B' \nabla f(0))' X - \frac{1}{2} X' B' \text{Hess}_f(0) B X \\ &=: f^{(0)} + b' X + X' D X = f^{(0)} + \sum_{i=1}^n (b_i X_i + d_i X_i^2) =: f^{(0)} + Q(X). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Sada transformišemo distribuciju od $Q(X)$ tako da njena aritmetička sredina pod novom raspodelom dobijenom principom uzorkovanja iznosi $x - f^{(0)}$. Ovo se može postići na više načina. Ovde ćemo koristiti metod eksponencijalne transformacije kao u slučaju kvantila. Tačnije korišćemo gustinu dobijenu uzorkovanjem

$$l(X) = \exp(-\theta Q(X) + C(\theta)) \quad (2.33)$$

gde je $C(\cdot)$ funkcija generatriše kumulanata od $Q(X)$.

$Q(X)$ je kvadratna forma po nezavisnim standardizovanim slučajnim promenljivama X_i sa normalnom raspodelom. Zato je $C(\cdot)$ eksplicitno poznata, i data sa:

$$C(\theta) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(\theta b_i)^2}{1 - 2\theta d_i} - \ln(1 - 2\theta d_i) \right) = \sum_{i=1}^n C^{(i)}(\theta). \quad (2.34)$$

Pod raspodelom dobijenom uzorkovanjem X_i ostaje nezavisna, normalno distribuirana, ali sa sredinom $\mu_i(\theta)$ i varijansom $\sigma_i^2(\theta)$ koje izgledaju ovako:

$$\sigma_i^2(\theta) = \frac{1}{1 - 2\theta d_i}, \quad \mu_i(\theta) = \theta b_i \sigma_i^2(\theta). \quad (2.35)$$

Dobijamo povećanje (smanjenje) varijanse za one X_i kod koji je $d_i > 0$ ($d_i < 0$). Za μ_i možemo doneti sličan zaključak kada je reč o znaku b_i . Ostaje još da se izabere parametar θ kao u slučaju kvantila, kao (jedinствeno) rešenje jednačine

$$C'(\theta_x) = x - f^{(0)} \quad (2.36)$$

koja se mora numerički rešiti i koja osigurava da važi:

$$E(l(X; \theta_x) Q(X)) = C'(\theta_x) = x - f^{(0)}. \quad (2.37)$$

Algoritam 7. VaR preko metode uzorkovanja po važnosti i delta-gamma aproksimacija

Neka su $L = f(W)$ funkcija gubitka, $W \sim N(0, \Sigma)$ i nivo gubitka x dati. Ako pretpostavimo da su i $f(0), \nabla f(0)$ i $Hess_f(0)$ dati zajedno sa delta-gamma aproksimacijom (2.29).

1. Priprema:

a) Odrediti B, D, b i $Q(X)$ iz jednačina (2.30) i (2.32)

b) Odrediti θ_x rešavanjem jednačine (2.36)

2. Simulacija: od $j=1$ do N

a) Simulirati $X^{(j)} = (X_1^{(j)}, \dots, X_n^{(j)})$ gde su $X_i^{(j)}$ nezavisne sa raspodelom $X_i^{(j)} \sim N(\mu_i(\theta_x), \sigma_i^2(\theta_x))$ kao što je dato jednačinom (2.35)

b) Odrediti $L^{(j)} = f(0) - f(t, BX^{(j)})$ i $l(X^{(j)})$ prema jednačini (2.33)

Odrediti ocenu verovatnoće gubitka: $\hat{p}_N^{\theta_x} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N l(X^{(j)}) 1_{\{L > x\}}$.

Napomena 7.

a) Aproksimacija 95% intervala poverenja za $P(L > x)$ može se dobiti korišćenjem formule $\hat{p}_N^{\theta_x} \pm \frac{s_N}{\sqrt{N}}$, gde s_N^2 predstavlja disperziju od $l(X^{(j)}) 1_{\{L > x\}}$. Naravno, aproksimaciju uvek treba uporediti sa 95% intervalom poverenja koji odgovara Monte Karlo oceni $\hat{p}_N^0$ datoj sa:

$$\left[\hat{p}_N^0 - 1.96 \frac{\sqrt{\hat{p}_N^0(1 - \hat{p}_N^0)}}{\sqrt{N}}, \hat{p}_N^0 + 1.96 \frac{\sqrt{\hat{p}_N^0(1 - \hat{p}_N^0)}}{\sqrt{N}} \right]. \quad (2.38)$$

Da bismo ilustrovali veličinu broja N koja nam je obično potrebna, pretpostavićemo da tačno znamo da je $p = 0.001$. Interval poverenja treba da je manjeg reda nego sama ocena. Zato, da bismo dobili interval poverenja dužine 0,0001, treba nam $N \approx 10^6$. To je prilično veliki broj, pa je svaka ocena funkcije gubitka portfolia veoma skupa u smislu vremena koje nam je potrebno za njeno izračunavanje.

b) Vratimo se na naš prvobitni problem, a to je izračunavanje mera rizika kao što je VaR_α . Za njegovo rešavanje potrebna nam je dobra početna vrednost za x , tj. trebalo bi da važi $P(L > x) \approx \alpha$. Onda treba iterativno menjati x sve dok ne bude dovoljno blizu α .

Treba obratiti pažnju da ostanemo uvek u tzv. „bezbednoj zoni“, tj. da nam 95% interval poverenja za $\hat{p}_N^{\theta_x}$ uvek bude iznad α . Da bismo započeli postupak iteracije, možemo iskoristiti naše znanje o delta-gamma aproksimaciji. Kako

znamo funkciju generatriše kumulanata $C(\theta)$, dobijamo eksplicitan oblik za njenu srednju vrednost i disperziju:

$$E(Q(X)) = C'(0) = \sum_{i=1}^n d_i, \quad \text{Var}(Q(X)) = C''(0) = \sum_{i=1}^n (b_i + 2d_i^2). \quad (2.39)$$

Za početnu vrednost možemo uzeti

$$x = E(Q(X)) + y\sqrt{\text{Var}(Q(X))} \quad (2.40)$$

i onda povećavati ili smanjivati vrednost y u zavisnosti od rezultujuće ocene za verovatnoću gubitka. Veoma jednostavan izbor početne vrednosti za y može biti α -kvantil standardne normalne raspodele $q_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$. $\square$

Pojedini aspekti praktične primene

U okviru ove teme, istaćićemo neke važne aspekte na koje treba obratiti pažnju pre upotrebe metode:

- **Izračunavanje mera rizika ili vrednovanje finansijskih dervata.** Kada nas zanima izračunavanje mera rizika za evoluciju portfolia hartija od vrednosti u fiksiranom budućem trenutku T , treba da modeliramo trajektorije datih faktora (npr. kamatne stope, cene akcija,...) sa stvarnom merom verovatnoća, jer želimo da steknemo stvaran utisak o visini mogućih gubitaka koji se ne događaju u rizik-neutralnom već u realnom okruženju.

- **Vremenski interval i normalna aproksimacija.** Pošto je kod izračunavanja mera rizika vremenski interval obično mali (npr. dan ili nedelja), uobičajena je praksa da se uticaj drifta na cene akcija zanemari. Tada pretpostavljamo da važi:

$$\Delta S := S(t + \Delta t) - S(t) \approx S(t)\sigma(W(t + \Delta t) - W(t)), \quad (2.41)$$

aproksimacija dobijena zanemarivanjem determinističkih delova u eksponentu cene akcije (što je opravdano činjenicom da je Δt malo u poređenju sa $\sqrt{\Delta t}$ što je red veličine standardne devijacije slučajne promene) i korišćenjem prvog reda aproksimacije eksponencijalne funkcije.

- **Tačnost delta-gamma aproksimacije i njene posledice.** Veoma je važno razumeti da se delta-gamma aproksimacija ne koristi kao procedura u našoj metodi. Više se koristi kao orijentacija u traganju za dobrom pozicijom za metod uzorkovanja. Pa čak i ako je aproksimacija loša, metod bi još uvek mogao da funkcioniše. Sa druge strane, kako aproksimiramo samo (uglavnom nepoznatu) raspodelu evolucije vrednosti portfolia, ne možemo da očekujemo da će metod uzorkovanja raditi isto kao da je rasodela poznata.

3. Neke primene Monte Karlo metode u životnom osiguranju

Životno osiguranje je klasična matematička tema, možda jedna od najstarijih primenjenih matematičkih tema sa ekonomskom pozadinom. Skoro svako od nas je nekad imao neki kontakt sa proizvodima životnog osiguranja. Postoji mnogo vrsta životnog osiguranja, čak previše da bismo se svima njima bavili.

Osiguranje života je osmišljeno kao zaštita od ozbiljnih finansijskih gubitaka koji mogu biti posledica uplitanja neizvesnih događaja u naš život. Kada se govori o životnom osiguranju, na umu treba imati dve stvari. Prvo, ono je ograničeno na ublažavanje samo onih posledica koje se mogu meriti u novčanim iznosima. Drugo ograničenje je što životno osiguranje ne umanjuje verovatnost gubitka.

Osnovni izvori neizvesnosti u životnom osiguranju su dužina života osiguranika i rizik kamatne stope. Rizik kamatne stope je prisutan, jer se skoro svaki proizvod životnog osiguranja sastoji od neizvesnih naplata u budućnosti pošto vreme i/ili visina buduće naplate nisu unapred poznati. Iz tih razloga, pogodno diskontovanje je suštinski deo računanja premije koju osiguranik treba da plati. Da ne bismo otišli van okvira teme, koncentrisaćemo se na modeliranje evolucije (trenutne) stope mortaliteta tokom vremena.

3.1 Mortalitet: Definicija i klasični modeli

Uzmimo osiguranike koji danas imaju x godina (u trenutku $t = 0$). Označimo sa D_x trenutak smrti izražen u godinama računajući od danas. Bavićemo se raspodelom vremena smrti, jer se ona događa slučajno.

Definicija 13.

Neka je $G_x : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ funkcija raspodele za D_x , vreme smrti osiguranika koji danas ima x godina

$$G_x(t) = P(D_x \leq t). \quad (3.1)$$

Njegova **verovatnoća preživljavanja** u narednih t godina data je sa:

$${}_t p_x := 1 - G_x(t). \quad (3.2)$$

Stopu mortaliteta u oznaci $\mu_x(t)$ definišemo:

$$\mu_x(t) := -\frac{d}{dt} \ln[1 - G_x(t)] = -\frac{d}{dt} \ln({}_t p_x). \quad (3.3)$$

Napomena 8.

Kod malih vremenskih intervala $[t, t + \Delta t]$ za osiguranika sa x godina uslovna verovatnoća za smrt tokom tog perioda zadovoljava:

$$P(t < D_x \leq t + \Delta t | D_x \geq t) \approx \mu_x(t) \Delta t. \quad (3.4)$$

Može se pokazati da su raspodela G_x i njena gustina $g_x(t)$ određene stopom mortaliteta:

$$g_x(t) = \mu_x(t)[1 - G_x(t)], \quad (3.5)$$

$$G_x(t) = 1 - {}_t p_x = 1 - \exp\left(\int_0^t -\mu_x(s) ds\right). \quad (3.6)$$

Zbog toga se čini pogodnim odrediti oblik stope mortaliteta da bismo odredili raspodelu osiguranikovog ostatka života. $\square$

De Moivre⁵ je još 1724.godine uveo maksimalan broj godina koje čovek može da doživi i označio ga kao $A_{\max}$. Pretpostavimo da vreme smrti ima uniformnu raspodelu na $[0, A_{\max}]$, pa je stopa mortaliteta oblika:

$$\mu_x^{\text{De Moivre}}(t) = \frac{1}{A_{\max} - x - t}, \quad 0 < t \leq A_{\max} - x. \quad (3.7)$$

Kako stopa mortaliteta obično raste sa godinama, **Gompertz**⁶ je 1824. godine napravio svoju pretpostavku o maksimalnom broju godina i predložio eksponencijalnu stopu mortaliteta:

$$\mu_x^{\text{Gompertz}}(t) = b \cdot \exp(c \cdot (x + t)), \quad b, c \text{ su pozitivne konstante} \quad (3.8)$$

Gompertz-ov model je 1860. proširio **Makeham**⁷ dodajući pozitivnu konstantu a (tzv. mladi mortalitet) postojećoj stopi mortaliteta:

$$\mu_x^{\text{Makeham}}(t) = a + b \cdot \exp(c \cdot (x + t)). \quad (3.9)$$

Ovaj model je još uvek popularan kod životnog osiguranja.

Model koji je popularan u čitavoj nauci definisao je 1929. godine **Weibull**⁸, predloživši polinomni rast stope mortaliteta:

$$\mu_x^{\text{weibull}}(t) = a \cdot (x + t)^b, \quad a, b \text{ pozitivne konstante.} \quad (3.10)$$

⁵ Abraham de Moivre, 1667-1754, francuski matematičar

⁶ Benjamin Gompertz, 1779-1865, britanski samouki matematičar i aktuar

⁷ William Makeham, engleski aktuar iz 19tog veka

⁸ Ernst Hjalmar Waloddi Weibull, 1887-1979, švedski inženjer, naučnik i matematičar

3.2 Dinamički modeli mortaliteta

Činjenica da životni vek osiguranika neprestano raste je jedan od glavnih problema danas koji se javlja i kod životnog osiguranja i kod penzionih fondova. Potcenjivanje srednje vrednosti životnog veka dovodi do veoma skupih ugovora u poređenju sa premijom za koju su nekada prodati.

Ono što je stvoreno prilikom pokušaja pronalaženja rešenja ovog problema jesu tzv. tabele mortaliteta koje su različite za različite generacije. To znači da 60-ogodišnjak ima drugačiju verovatnoću preživljavanja naredne godine u odnosu na čoveka istog životnog doba pre 20 godina. Ovakve promene dovele su do velikog interesovanja za stvaranje tzv. **dinamičkih modela mortaliteta**.

Ekstrapolacijom možemo na jednostavan način da uvedemo kalendarsko vreme u model. Ona se zasniva na pretpostavci da je verovatnoća preživljavanja ${}_t p_x(t)$ funkcija kalendarskog vremena za fiksiran broj godina x . Osnovna ideja principa ekstrapolacije je korišćenje realizovanih verovatnoća preživljavanja (relativna frekvencija preživelih članova populacije osiguranika godina x) tokom prethodnih godina kao ulaznih podataka za interpolacionu funkciju (kao što su splajn ili polinomna funkcija). Predviđanja za buduće verovatnoće preživljavanja se tada jednostavno dobijaju ekstrapolacijom tako dobijenih funkcija.

Algoritam 8. Modeliranje dinamičkog mortaliteta ekstrapolacijom

1. Izračunati realizovane verovatnoće preživljavanja osiguranika starosti x u trenutku t

$${}_t p_x(t) = \frac{\text{Broj } (x+i)\text{-godišnjaka osiguranih u trenutku } t+i}{\text{Broj } x\text{-godišnjaka osiguranih u trenutku } t},$$

$t \in \{-(i+1), -(i+2), \dots, -N_i\}$, $N_i < x$ kao funkcije od kalendarskog vremena t (t -ovi su neki prošli trenuci u odnosu na x).

2. Koristiti realizovane verovatnoće preživljavanja za aproksimiranje ove funkcije interpolacionom funkcijom kao što su polinomna ili splajn.
3. Koristiti tek dobijene interpolacione funkcije $f_x^{(i)}(\cdot)$ za dobijanje ocene ${}_i \hat{p}_x(0)$ za trenutne verovatnoće preživljavanja ${}_i p_x(0)$ uz pomoć

$${}_i \hat{p}_x(0) = f_x^{(i)}(0), \quad i = 1, \dots, N.$$

Osnovna ideja sledećeg algoritma jeste uzimanje parametarskog modela za mortalitet (npr. Gompertz-Makeham) i uvođenje neizvesnosti modeliranjem nekih njegovih komponenti kao stohastičkih procesa.

Algoritam 9. Stohastički dinamički model mortaliteta

1. Izabrati parametarski stohastički oblik za izabrani model mortaliteta.
2. Odrediti realizovane stope mortaliteta iz prošlosti.
3. Prilagoditi parametre stohastičkog procesa koji su osnova stohastičkog modela mortaliteta iz koraka 1. vremenskim serijama realizovanih stopa mortaliteta iz koraka 2.
4. Izabrati dobijeni stohastički proces za modeliranje budućih stopa mortaliteta (ili za izračunavanje premija).

Ako ovaj pristup uporedimo sa ekstrapolacionom metodom videćemo da su njegove glavne prednosti mogućnost dobijanja ograničenih grešaka pokretanjem velikog broja simulacija budućih stopa mortaliteta i to da sada možemo koristiti Monte Karlo metode za ocenjivanje svih vrsta ugovora na duži vremenski period. Naravno, postoji mogućnost modeliranja verovatnoća preživljavanja umesto stopa mortaliteta.

Primer 8. Stohastički Gompertz-ov model

Predloženi dinamički model mortaliteta glasi:

$$\mu_x^{SG}(t) = \alpha(t)e^{\beta(t)x} \quad (3.11)$$

$$d\alpha(t) = -k\alpha(t)dt, \quad k > 0, \alpha(0) = \alpha_0 > 0 \quad (3.12)$$

$$d\beta(t) = \nu dt + \sigma dW(t), \quad \beta(0) = \beta_0 > 0, \quad (3.13)$$

a $W(t)$ je jednodimenzionalno Brown-ovo kretanje. Primetimo da je t sada povezano sa kalendarskim vremenom (ne mora nužno da mu bude jednako).

Ono što objašnjava oblik prethodnih jednačina za $\alpha(t)$, $\beta(t)$ su tražena pozitivnost za $\alpha(t)$, smanjenje nivoa mortaliteta tokom kalendarskog vremena, i naizgled linearno ponašnje $\beta(t)$ kao funkcije od vremena kada je prilagođena podacima. Empirijske činjenice u podacima nam govore da jednofaktorski model može biti dovoljan da objasni slučajnost u promenama stopa mortaliteta tokom vremena.

Da bismo mogli da postavimo simulaciju algoritma u trenutku $\bar{t}$ još treba da popravimo parametre k , ν , σ , $\alpha(0)$ i $\beta(0)$. Popravljanje parametara se izvodi na sledeći način:

1. Izračunati $\alpha(0)$, k i $\beta(0)$ fitovanjem standardnog Gompertz-ovog modela sa tim parametrima do realizovanih stopa mortaliteta u prošlim trenucima $t = 0, 1, \dots, \bar{t} - 1$.
2. Oceniti ν i σ iz vremenskih serija $\beta(0), \dots, \beta(\bar{t} - 1)$.

Sa ovako dobijenim parametrima, simulacija stopa mortaliteta je sada jednostavna kao što je opisano u Algoritmu 10.

Algoritam 10. Simuliranje dinamičkih stopa mortaliteta u Gompertz-ovom stohastičkom modelu

Neka su $\alpha(\bar{t})$, $\beta(\bar{t})$ dati. Za buduće vremenske trenutke $t = \bar{t} + 1, \bar{t} + 2, \dots, \hat{t}$ i posmatrane godine starosti x :

1. $\alpha(t) = \alpha(t-1)e^{-k}$.
2. Simulirati slučajne brojeve $Z \sim N(0,1)$.
3. $\beta(t) = \beta(t-1) + \nu + \sigma Z$.
4. $\mu_x(t) = \alpha(t) \exp(\beta(t)\bar{x})$.
5. Za $x = \bar{x} + 1, \dots, \hat{x}$ postaviti $\mu_x(t) = \mu_{x-1}(t) \exp(\beta(t))$.

Napomena 9.

a) Stope mortaliteta smo modelirali na godišnjem nivou. Pa, pošto je naš model neprekidan, može biti modeliran na finijoj skali. Predlažemo prilagođavanje skale vremenu sa kojim je model povezan. Lako to možemo primeniti na prethodni algoritam.

b) Pošto imamo verovatnoće preživljavanja obika:

$${}_1p_x(t) = E \left(\exp \left\{ - \int_0^1 \mu_{x+s}(t+s) ds \right\} \right) \quad (3.14)$$

može se polemisati o potrebi neprekidne simulacije stopa mortaliteta. Međutim, to bi zahtevalo i neprekidnu simulaciju duž promenljive x . Iz tog razloga preuzećemo Korn-ovu metodu (iz 2006.) da bismo aproksimirali gore navedeni integral. Simuliranje ove vrednost N puta dovodi do sledeće ocene za jednogodišnju verovatnoću preživljavanja:

$${}_1\hat{p}_x(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mu_x^{(j)}(t) \quad (3.15)$$

gde gornji indeks (j) označava modeliranu stopu mortaliteta iz j -te simulacije. Verovatnoća preživljavanja i -te godine se može jednostavno dobiti iz jednogodišnje:

$${}_i\hat{p}_x(t) = \prod_{j=1}^i {}_1\hat{p}_{x+j-1}(t+j-1) \quad (3.16)$$

c) Prirodno je pretpostaviti da u dinamički model mortaliteta treba da budu uključene informacije o budućim životnim okolnostima kao što su klima, zdravstveno i socijalno stanje osiguranika, i sl. □

Polise životnog osiguranja i računanje premije

Postoji veliki broj proizvoda vezanih za životno osiguranje. Razmotrićemo neke osnovne i dati nagoveštaj za ocenu nekih komplikovanijih.

Primeri jednostavnih polisa osiguranja

Razmotrićemo osnovne slučajeve, **isplatu nakon smrti** i **isplate tokom života**. Primeri osiguranja prvopomenute vrste su:

- Doživotno osiguranje za slučaj smrti: isplaćuje se u celosti nakon smrti osiguranika.
- Osiguranje za slučaj smrti sa određenim trajanjem: isplaćuje se u celosti nakon smrti ako se ona dogodi u prvih n godina.
- n godina odloženo doživotno osiguranje: isplaćuje se u celosti nakon smrti osiguranika, ako preživi prvih n godina od sklapanja ugovora.

Primeri drugog tipa:

- Osiguranje za slučaj doživljenja: isplaćuje se u celosti ako je osiguranik živ nakon n godina.
- Anuitetno: osiguranik dobija anuitete dok god je živ.
- Životno osiguranje sa određenim trajanjem: osiguranik dobija anuitetne rate dok god je živ, ali maksimalno n godina.
- n godina odloženo osiguranje sa anuitetima: ukoliko je osiguranik živ nakon n godina, tada počinje da dobija anuitete doživotno.

Naravno, dozvoljene su bilo kakve kombinacije prethodnih primera.

Računanje premije

Ubuduće ćemo sa $C(t)$ obeležavati sumu koja se isplaćuje u trenutku smrti osiguranika, a sa $c(t)$ anuitete (koji mogu zavisiti od t) koji se isplaćuju dok god je osiguranik živ. Sa druge strane, sa $\Pi(t)$ ćemo označiti premiju koja se plaća u trenutku t , a sa $\pi(t)$ rate premije u trenutku t . Ako to nije drugačije naglašeno, pretpostavljamo sledeće.

Pretpostavka 1.

Stopa mortaliteta i kamatna stopa su deterministički određene.

Neka su sve buduće kamatne stope poznate i pretpostavimo da je funkcija mortaliteta $\mu_x(t)$ deterministička. Uvedimo $r_0(t)$, $t \geq 0$ kao današnju krivu prinosa koja je određena relacijom

$$P(0, t) = e^{-r_0(t)t} \quad (3.17)$$

gde je $P(0, t)$ sadašnja cena nula-kupon obveznice koja dospeva u trenutku t .

Arbitražni princip cena u finansijama, koji se zasniva na replikaciji ili bar na hedžingu relevantnih isplata, u opštem slučaju ne bi trebalo koristiti za vrednovanje polisa osiguranja. Razlog tome je što se datim rizikom ne može trgovati. Zato se koristi princip premija. Predstavimo tzv. **princip neto premije** u obliku koji će biti pogodan za sastavne delove osiguranja.

Definicija 14.

*Neka važi Pretopostavka 1. Posmatramo polisu osiguranja za osiguranika koji danas ima x godina (u trenutku 0) koja se sastoji od isplate $C(D_x)$ u trenutku smrti i anuiteta $c(t)$ koji se isplaćuju tokom života osiguranika. Neka su definisane i premija $\Pi(t)$ koja se plaća u trenutku $t \geq 0$ i rata premije $\pi(s)$ za $s \geq 0$ koja se plaća sve do smrti osiguranika. Tada kažemo da je polisa vrednovana uz pomoć **principa neto premije** ako važi:*

$$\begin{aligned} \Pi(t) \cdot e^{-r_0(t)t} \cdot (1 - G_x(t)) + \int_0^\infty \pi(s) e^{-r_0(s)s} \cdot (1 - G_x(s)) ds \\ = \int_0^\infty C(s) e^{-r_0(s)s} dG_x(s) + \int_0^\infty c(s) e^{-r_0(s)s} (1 - G_x(s)) ds. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Napomena 10.

a) Princip neto premije jednak je principu očekivane štete iz Definicije 3. sa faktorom rizika $\mu = 0$.

b) Ako pod Pretpostavkom 1. imamo, na primer:

$$E \left(e^{-r_0(D_x)D_x} C(D_x) \right) = \int_0^\infty C(s) e^{-r_0(s)s} dG_x(s) \quad (3.19)$$

gore naveden princip neto premije jednostavno govori da neto sadašnja vrednost isplata treba da je jednaka tim premijama. Stoga to možemo da uopštimo za slučaj dinamičkih (stohastičkih) stopa mortaliteta i stohastičkih kamatnih stopa.

c) I ostali pomenuti principi premije mogu biti upotrebljeni za vrednovanje sastavnih delova životnog osiguranja.

Da bismo dobili jedinstvene premije treba prvo da donesemo odluke o kao npr. trenutku kada premija treba da bude plaćena, da li treba da bude plaćena unapred, i da li po konstantnoj ili promenljivoj stopi. Ovakvi detalji su obično već fiksirani kao sastavni deo polise osiguranja. Sada je vrednovanje polisa pod Pretpostavkom 1. jednostavno. U slučaju da ta pretpostavka ne važi na scenu stupa Monte Karlo metod. □

3.4 Određivanje cena ugovora na duži vremenski period Monte Karlo simulacijom

Ugovori na duži vremenski period su bilo koja vrsta finansijskih ugovora koji imaju isplate koje su prilagođene proceni preživljavanja određenog skupa osiguranika. Možemo razmišljati o populaciji kao o npr. svim osiguranim 65-ogodišnjim muškarcima u Nemačkoj. Dva poznata primera su EIB/BNP dugoročna obveznica iz 2004. i uvođenje LifeMetrics sistema iz 2007. godine.

Ovde ćemo se baviti samo određivanjem cena dugoročnih obveznica. Za vrednovanje dugoročne obveznice ovakvog tipa možemo pretpostaviti da je grupa osiguranika fiksirana i uvesti:

$$S(i) = \frac{\text{Broj preživelih u grupi u trenutku } i}{\text{Veličina grupe u trenutku } 0}, \quad (3.20)$$

količnik preživelih nakon i godina od početka dugoročne obveznice. Neka je z godišnja kuponska isplata dugoročne obveznice ako čitava grupa preživi. Ako sada pogledamo iz ugla finansijske matematike, pod pogodnom merom određivanja cena Q , dobijamo cenu dugoročne obveznice kao diskontovano očekivanje. Iz tog razloga pretpostavićemo nezavisnost promena stope mortaliteta od kamatne stope (pod Q). Cena dugoročne obveznice sa N kupona koji se isplaćuju u trenucima $1, 2, \dots, i$ (0 je početno vreme) data je sa:

$$\begin{aligned} P^{(L)}(t) &= E_Q \left(\sum_{i=1}^N \exp \left(- \int_t^i r(s) ds \right) S(i) 1_{\{t \leq i\}} \mid f_t \right) \\ &= \sum_{i=1}^N P(t, i) E_Q (S(i) \mid f_t) 1_{\{t \leq i\}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

gde je $P(t, s)$ tržišna cena nula-obveznice u trenutku t koja dospeva u trenutku $s \geq t$. Dakle, u principu, treba samo da vrednujemo rizik mortaliteta, jer je cena dugoročne obveznice već poznata.

Kao moguć izbor za komponente mortaliteta mere Q na osnovu koje se određuje cena, možemo koristiti meru P koja je osnova za modeliranje dinamičkog procesa mortaliteta, što daje:

$$P^{(L)}(t) = \sum_{i=1}^N P(t, i) E_P (S(i) \mid f_t) 1_{\{t \leq i\}}. \quad (3.22)$$

Kako, međutim, još uvek ne postoji tržište na kom se može trgovati rizikom mortaliteta, postavlja se pitanje da li primena finansijskog principa vrednovanja koji se zasniva na arbitraži uopšte može biti opravdana. Ono što može nagovestiti odgovor je činjenica da je stvarna cena $\underline{P}(t)$ posmatrane dugoročne obveznice veća od one izračunate pomoću gore opisane ocene. Za to postoje (najmanje) dva moguća objašnjenja:

▪ Osiguravajuća kompanija koristi aktuarski princip ocene. Zaista, princip očekivane vrednosti bi trebalo da uključuje faktor rizika premije $\mu > 0$ što dovodi do:

$$P_M^{(L)}(t) = (1 + \mu)P^{(L)}(t). \quad (3.23)$$

▪ Drugo moguće objašnjenje je da se stopom smrtnosti ne može trgovati, tržište gde se dugoročna obveznica nalazi nije kompletno. Zbog toga se može polemisati o prelasku sa mere mortaliteta P na meru $P(\mu)$ koja je ekvivalentna sa P i objašnjava posmatrane tržišne cene, tj. u našem slučaju zadovoljava jednačinu:

$$P_M^{(L)}(t) = \sum_{i=1}^N P(t, i) E_{P(\mu)}(S(i) | f_t) 1_{(t \leq i)}. \quad (3.24)$$

Određivanje parametra μ iz ove jednačine je zapravo obično prilagođavanje principa finansijske ocene nepotpunom tržištu.

Ako bismo prešli na novu meru $P(\mu)$, to bi dovelo do promene prvobitnog drifta λ datog Brown-ovog kretanja na $\lambda - \mu\sigma$. Kroz Algoritam 11. ćemo opisati kako možemo doći do pogodnog parametra μ^* .

Algoritam 11. Prilagođavanje mere Gompertz-ovog stohastičkog modela sa dugoročnim obveznicama kojima se trguje

Neka je $P_M^{(L)}(0)$ tržišna cena dugoročne obveznice kojom se trguje.

1. Prilagoditi nepoznati parametar Gompertz-ovog stohastičkog modela relizovanim stopama mortaliteta.
2. Odrediti parametar μ^* tako da važi:

$$P_M^{(L)}(0) = \sum_{i=1}^N P(0, i) E_{P(\mu^*)}(S(i)) = \sum_{i=1}^N P(0, i) p_x^{\mu^*}.$$

Napomena 11.

Da bismo dobili bar približne verovatnoće ${}_i p_x^{\lambda}$ u prethodnom algoritmu, treba da pokrenemo Monte Karlo simulaciju. Radi toga, generišemo veliki broj trajektorija procesa mortaliteta μ_x^t koristeći Algoritam 11. Zatim, ocenimo verovatnoće preživljavanja uz pomoć Napomene 9. i nađemo srednju vrednost svih njih da bismo dobili Monte Karlo ocene (za različite trenutke i). Kako promena parametra μ znači se drift u procesu mortaliteta menja za konstantu, treba samo jednom da generišemo trajektorije procesa mortaliteta i da ih jednostavno promenimo korigovanjem razlike u driftu. □

Napomena 12.

Složeniji proizvodi kao što su promenljivi anuiteti ili hartije od vrednosti bazirane na indeksnim portfolijima mogu biti vrednovani uz pomoć, na odgovarajući način modifikovanih algoritama. □

3.5. Rezerve na premije i Thiele-ova diferencijalna jednačina

Jednakost između neto sadašnje vrednosti isplata osiguraniku i premija koje on plaća osiguravajućoj kompaniji ne mora obavezno da važi i nakon prodaje ugovora. Zbog toga nam je potrebno da znamo kako se ta razlika menja tokom vremena. Za osiguravajuće kompanije je potrebno da znaju rezerve na premije, tj. količinu novca koja mora biti investirana da bi se mogle isplatiti sve očekivane buduće obaveze prema osiguraniku. To je zapravo uslovno očekivanje budućih isplata, uslovljeno preživljavanjem osiguranika sve do trenutka u . Nazivamo ih prospektivne rezerve na premije, jer uzimaju u obzir samo buduće isplate.

Definicija 15.

Prospektivne rezerve na premije $V_x(u)$ u trenutku $u \geq 0$ jedne polise osiguranja, gde je osiguranik star x godina u trenutku početka ugovora (u trenutku 0) i još uvek je živ u trenutku u , definisana je kao razlika uslovnog očekivanja budućih isplata osiguraniku i uslovnog očekivanja budućih premija (uslovljenih događajem da je osiguranik živ u trenutku u).

Primer 9. Prospektivne rezerve riziko osiguranja

Da bismo izračunali reprezentaciju riziko osiguranja za n godina, pretpostavljamo da važi Pretpostavka 1. i da se polisa sastoji od sledećih isplata:

- $C(D_x)$, suma koja se isplaćuje nakon smrti osiguranika ukoliko se smrt dogodi pre isteka n godina.
- C^a , ukupan iznos koji se isplaćuje ukoliko osiguranik preživi n godina.
- $\pi(t) = \pi$, konstantna, neprekidna rata premije koja se isplaćuje dok god je osiguranik živ.

Ono što ćemo još pretpostaviti je da su kamatna stopa r i stope mortaliteta $\mu_x(t)$ determinističke. Pod ovim pretpostavkama dobijamo rezerve na premije kao:

$$V_x(t) = C^a \cdot e^{-r(n-t)} \cdot {}_{n-t}p_{x+t} + \int_t^n e^{-r(s-t)} \cdot {}_{s-t}p_{x+t} (\mu_{x+s} C(s) - \pi) ds. \quad (3.25)$$

Dodatne isplate dovode do dodatnih uslova u ovoj jednačini.

Važan rezultat u matematici živonog osiguranja jeste Thiele-ova diferencijalna jednačina koja opisuje promene mogućih rezervi tokom vremena ukoliko je osiguranik još uvek živ. Diferenciranjem jednačine (3.25) po t dobijamo narednu teoremu.

Teorema 4. Thiele-ova diferencijalna jednačina

Posmatraćemo polisu riziko osiguranja kao u prethodnom primeru i pretpostaviti da je kriva prinosa glatka, tj. da je $r_0(t) = r$ za sve $t > 0$. Takođe, pretpostavljamo da raspodela $G_x(t)$ ima gustinu i da je zato i proces mortaliteta $\mu_x(t)$ definisan. Tada, su prospektivne rezerve na premije $V_x(t)$ rešenje:

$$\frac{d}{dt}V_x(t) = r \cdot V_x(t) + \pi(t) + [V_x(t) - C(t)]\mu_x(t) \quad \forall t \in [0, n], \quad (3.26)$$

$$V_x(n) = C^a. \quad (3.27)$$

Upotreba Thiele-ove diferencijalne jednačine, generalizacije i Monte Karlo simulacija

Osnovna prednost Thiele-ove diferencijalne jednačine je da je, s obzirom na buduće isplate, možemo koristiti za izračunavanje početne premije $\Pi(0)$ izjednačavajući je sa $V_x(0)$ uz pomoć principa neto premije. Takođe je možemo koristiti da (re)dizajniramo ugovor biranjem ili rate premije, ukupnog iznosa isplata ili sume koja se isplaćuje u slučaju smrti. Pošto, međutim, Thiele-ova diferencijalna jednačina ustvari opisuje dinamičku evoluciju očekivanja, ta očekivanja možemo direktno izračunati koristeći Monte Karlo simulaciju. Tačnije možemo simulirati životni vek osiguranika, izračunati bitne tokove plaćanja, učiniti to N puta, naći prosečnu vrednost rezultata, dobiti aproksimaciju prospektivnih rezervi $\hat{V}_x(0)$ i tek onda (re)dizajnirati ugovor. Važna stvar kod ovog pristupa je što nam nije potrebno da Pretpostavka 1. važi. U ovom, opštijem slučaju, i u situacijama kada imamo ugovore povezane sa akcijama (equity-linked), postoje generalizacije Thiele-ove diferencijalne jednačine koje se izvode uz pomoć ocenjivanja na bazi finansijske matematike.

U generalizovanom slučaju tzv. vrednost prospektivnih rezervi se ne može opravdati zakonom velikih brojeva. Pod Pretpostavkom 1. jedino ostaje neizvesnost u pogledu životnog veka osiguranika, pa se zbog zakona velikih brojeva može reći da se iznosi isplata u proseku podjednako dele na više različitih klijenata. Ako, sa druge strane, neizvesnost kamatnih stopa i možda čak cena akcija ulaze u buduće isplate, onda uzimanje očekivane vrednosti kao predloga za vrednost rezervi može biti opravdano samo ako se isplate mogu reprodukovati na finansijskom tržištu. Iz tog razloga bolje je govoriti o srednjoj vrednosti prospektivnih rezervi.

Algoritam 12. Simulacija (srednje vrednosti) prospektivnih rezervi polise osiguranja

Za $i=1$ do N

1. Simulirati životni vek osiguranika $l_x^{(i)}$.
2. Simulirati trajektoriju $r^{(i)}(t)$, $t \in [0, \min\{n, l_x^{(i)}\}]$.
3. Izračunati sve isplate ugovora koje su zasnovane na životnom veku $l_x^{(i)}$, diskontovati ih odgovarajućim diskontnim faktorom $\exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)$ i dodati ih da bismo dobili $\hat{V}_x^{(i)}(0)$.

Nakon toga izračunati aproksimaciju (srednje vrednosti) prospektivnih rezervi:

$$\hat{V}_x(0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{V}_x^{(i)}(0).$$

Kada je reč o polisama osiguranja postoje mnoge primene Monte Karlo simulacija. Ipak, dali smo samo okvir koji se može lako primeniti na sve vrste ugovora bez potrebe da se rešava Thiele-ova diferencijalna jednačina. Naravno, treba uvek dobro razmisiti da li je rizik odstupanja od (aproksimirane) srednje vrednosti koji je nasleđen od tih proračuna automatski hedžiran vrednostima zakona velikih brojeva (zbog izračunavanja proseka npr. dužine života osiguranika).

4. Simuliranje zavisnosti rizika uz pomoć kopula

Nezavisno od familije normalnih raspodela, čini se da ne postoje druge popularne familije raspodela koje dopuštaju prirodnu višedimenzionalnu generalizaciju tako da zavisne slučajne promenljive mogu lako biti modelirane. Često se pridružena raspodela slučajnih promenljivih može eksplicitno izračunati samo ako su slučajne promenljive nezavisne. Za rešavanje ovakve vrste problema veoma je koristan koncept kopula koji je poslednjih godina postao popularan u oblasti modeliranja kreditnog rizika i u neživotnom osiguranju. U ovom drugom slučaju, zavisnosti među različitim polisama osiguranja ne mogu biti zanemarene (na primer, grad može na isti način uticati na mnoge polise osiguranja automobila u datom regionu).

4.1 Definicija i osnovne osobine

Definicija 16.

Kopula C je funkcija raspodele na $[0,1]^n$ za $n \in \mathbf{N}$ sa uniformnim marginalnim raspodelama, tj.

$$C(1, \dots, 1, x_i, 1, \dots, 1) = x_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (4.1)$$

Najvažniji rezultat u teoriji kopula je Sklar-ova teorema iz 1960.

Teorema 5. Sklar-ova teorema

Neka su $X_1, \dots, X_n$ realne slučajne promenljive sa marginalnim raspodelama $F_1, \dots, F_n$ i pridruženom funkcijom raspodele F . Tada postoji kopula C koja zadovoljava

$$F(x_1, \dots, x_n) = C[F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)]. \quad (4.2)$$

Ova kopula je jedinstveno određena ako su marginalne raspodele neprekidne. U suprotnom je jedinstvena samo u oblasti $(F_1, \dots, F_n)$.

*I obrnuto, neka je C kopula i neka su $X_1, \dots, X_n$ realne slučajne promenljive sa marginalnim raspodelama $F_1, \dots, F_n$. Tada je funkcija F definisana jednačinom (4.2) n -dimenzionalna funkcija raspodele sa marginalnim raspodelama datim sa $F_1, \dots, F_n$. Funkciju F tada zovemo **pridružena funkcija raspodele** F od $X_1, \dots, X_n$ **generisana kopulom** C .*

Sklar-ova teorema šalje jasnu poruku: Marginalne distribucije i struktura zavisnosti n -dimenzionalnog realnog slučajnog vektora mogu biti strogo

razdvojene. Dok je marginalna raspodela određena jednodimenzionalnom funkcijom raspodele, struktura zavisnosti je određena kopulama.

Sa uopštenom inverznom funkcijom H^{-1} jednodimenzionalne funkcije H ,

$$H^{-1}(y) = \inf \{x \in \mathbf{R} \mid H(x) \geq y\}, \quad (4.3)$$

takođe možemo direktno konstruisati kopulu iz pridružene funkcije raspodele.

Predlog 1.

Neka je F n -dimenzionalna funkcija raspodele sa neprekidnim marginalnim raspodelama $F_1, \dots, F_n$ i neka je kopula C data Sklar-ovom teoremom.

Tada važi:

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)) \text{ za } u \in [0, 1]^n \quad (4.4)$$

Predlog 2.

Neka su $X_1, \dots, X_n$ realne slučajne promenljive.

a) Ako su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne, tada je kopula generisana njihovom pridruženom funkcijom raspodele data sa

$$C(z_1, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^n z_i, \quad \text{„kopula nezavisnosti“} \quad (4.5)$$

b) **Invarijantnost transformacije:** Neka su $h_1, \dots, h_n$ strogo monotono rastuće (opadajuće) funkcije i neka je $Y_i = h_i(X_i)$ transformacija slučajne promenljive. Tada se kopula koja odgovara pridruženoj funkciji raspodele od $X_1, \dots, X_n$ data Sklar-ovom teoremom podudara sa onom koja odgovara pridruženoj funkciji raspodele od $Y_1, \dots, Y_n$.

c) Za svaku n -dimenzionalnu kopulu $C(u)$ važi:

$$W^n(u) = \max(u_1 + \dots + u_n - n + 1, 0) \leq C(u) \leq \min(u_1, \dots, u_n) = M^n(u). \quad (4.6)$$

$M^n(u)$ zovemo **gornja Frechet kopula**. Za $n = 2$, $W^n(u)$ zovemo **donja Frechet kopula**. Za opšte n , $W^n(u)$ nije kopula.

Napomena 13.

a) Jasno je da je jedina 1-dimenzionalna kopula $C(x) = x$ za $x \in [0, 1]$.

b) Zbog translatorne invarijantnosti kopula možemo se koncentrisati na standardizovane slučajne promenljive (tj. slučajne promenljive sa očekivanjem 0 i disperzijom 1) koje su povezane sa kopulama. $\square$

Ono što sledi su dva koncepta zavisnosti koji su drugačiji od uobičajenih, linearnih kocepata korelacije. Prvi među njima je koncept lokalne zavisnosti, tzv. zavisnost na repu raspodele.

Definicija 17.

Neka je (X_1, X_2) slučajni vektor sa marginalnim funkcijama raspodele F_1, F_2 .

a) **Koeficijent gornje zavisnosti na repu raspodele** od (X_1, X_2) definisan je

$$\text{kao} \quad \lambda_U(X_1, X_2) = \lim_{u \rightarrow 1} P(X_2 > F_2^{-1}(u) \mid X_1 > F_1^{-1}(u)) \quad (4.7)$$

ako dati limes postoji.

b) **Koeficijent donje zavisnosti na repu raspodele** od (X_1, X_2) definisan je

$$\text{kao} \quad \lambda_L(X_1, X_2) = \lim_{u \rightarrow 0} P(X_2 \leq F_2^{-1}(u) \mid X_1 \leq F_1^{-1}(u)) \quad (4.8)$$

naravno, opet ako dati limes postoji.

c) Kada je $\lambda_U > 0$ ($\lambda_L > 0$) kažemo da (X_1, X_2) priznaje gornju (donju) zavisnosti na repu raspodele.

Napomena 14.

Moguće je da postoje obe, i gornja i donja zavisnosti na repu. Za razliku od uobičajene korelacije koja meri linearnu zavisnost među slučajnim promenljivama, zavisnost na repu se koncentriše samo na ekstremne vrednosti slučajnih promenljivih. Zbog toga je ona lokalna mera. Pozitivna zavisnosti na repu znači da je verovatnoća da obe slučajne promenljive istovremeno dostignu velike vrednosti istog reda kao i za svaku promenljivu ponaosob. Isto važi za ekstremno male vrednosti u slučaju negativne zavisnosti na repu. $\square$

Da bismo merili globalnu zavisnost između dve slučajne promenljive uvodimo sledeću definiciju.

Definicija 18.

Za par slučajnih promenljivih (X, Y) iz prostora $\mathbf{R}^2$ **Kendall-ovo tau** $\tau(X, Y)$ je

$$\tau(X, Y) = P((X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0) - P((X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) < 0) \quad (4.9)$$

gde je $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ nezavisna kopija para (X, Y) .

Napomena 15.

Kendall-ovo tau se koncentriše na monotone zavisnosti X i Y . Ono proverava kako je očuvan red između X i Y . Pozitivno je (u graničnoj vrednosti) ako, za slučajno izvučene parove $(x, y), (x', y')$ iz raspodele (X, Y) , iz $x > x'$ dobijemo da je y veće od y' . U Kendall-ovo tau nisu uključene apsolutne veličine vrednosti. Važi sledeća jednakost:

$$\tau(X, Y) = 1 \Leftrightarrow C = M^2; \quad \tau(X, Y) = -1 \Leftrightarrow C = W^2 \quad (4.10)$$

gde je C kopula koja odgovara (X, Y) , a M^2, W^2 Frechet-ove kopule. I Kendall-ovo tau može biti direktno izraženo uz pomoć kopule C

$$\tau(X, Y) = 4 \iint_{[0,1]^2} C(x, y) dC(x, y) - 1. \quad (4.11)$$

$\square$

Primer 10. Kendall-ovo tau i korelacija

Neka je $X \sim N(0,1)$ i $Y = \exp(X)$, tada je

$$\begin{aligned} \text{Corr}(X, Y) &= \frac{E(X \cdot \exp(X))}{1 \cdot \sqrt{\text{Var}(Y)}} = \frac{\exp(1/2)}{\sqrt{\exp(2) - \exp(1)}} \approx 0.763 \neq 1 \\ &= P((X - \tilde{X}) \cdot (\exp(X) - \exp(\tilde{X})) > 0) = \tau(X, Y). \end{aligned}$$

Ovaj primer objašnjava osnovnu razliku između Kendall-ovog tau i obične korelacije. Kendall-ovo tau je monotona, nelinearna zavisnost, i samo njegov linearni deo sadrži koeficijent korelacije.

4.2. Primeri i simuliranje kopula**Gauss-ova kopula**

Ime ove kopule proističe iz činjenice da je izvedena iz višedimenzionalne normalne (Gauss-ove) raspodele. Da bismo je uveli, dovoljno je razmotriti standardizovane slučajne promenljive (Napomena 13.)

Definicija 19.

Neka niz $X_1, \dots, X_n$ ima raspodelu $N(0, \Sigma)$ sa disperzijom $\text{Var}(X_i) = 1$. Neka je Φ_{Σ}^n odgovarajuća pridružena n -dimenzionalna normalna raspodela, a Φ standardna normalna marginalna raspodela. Tada je Gauss-ova kopula

$$C_{\text{Gauss}}(x_1, \dots, x_n) = \Phi_{\Sigma}^n \left[\Phi^{-1}(x_1), \dots, \Phi^{-1}(x_n) \right]. \quad (4.12)$$

Teorema 6.

Gustina n -dimenzionalne Gauss-ove kopule data je jednakošću:

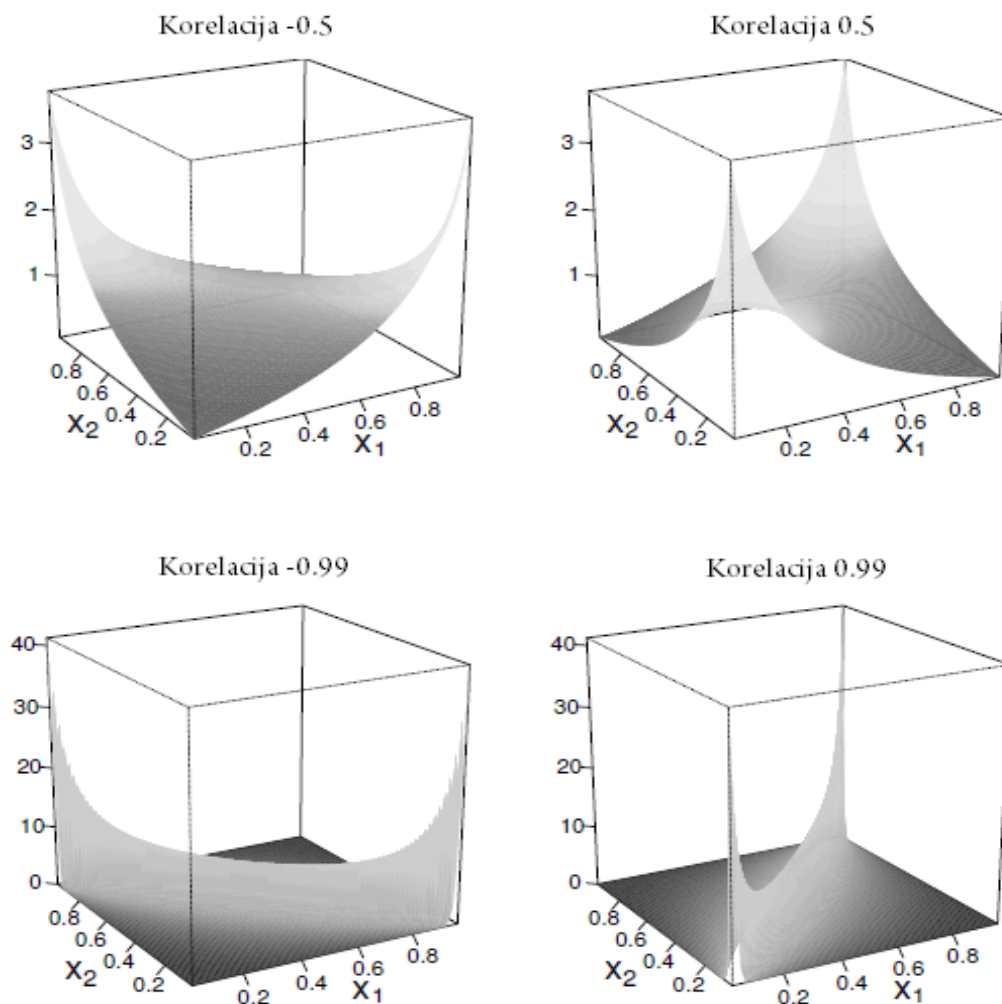
$$\frac{\partial^n C_{\text{Gauss}}}{\partial x_1 \dots \partial x_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\tilde{\varphi} \left[\Phi^{-1}(x_1), \dots, \Phi^{-1}(x_n) \right]}{\varphi \left[\Phi^{-1}(x_1) \right] \dots \varphi \left[\Phi^{-1}(x_n) \right]} \quad (4.13)$$

gde je $\tilde{\varphi}$ gustina n -dimenzionalne normalne raspodele Φ_{Σ}^n , a φ gustina standardne normalne raspodele.

Napomena 16.

Ako je Σ jednako identičkoj matrici, tj. slučajne promenljive su nezavisne, tada je Gauss-ova kopula nezavisna kopula iz Predloga 2, a gustina se podudara sa indikator funkcijom nad $[0,1]^n$, što se poklapa sa malopredašnjim rezultatima. $\square$

Gustina 2-dimenzionalne Gauss-ove kopule za različite korelacije ρ prikazana je na Slici 6. Važno je primetiti simetriju na svakoj funkciji gustine i njihove različite visine. Gustina za korelaciju koja je blizu -1 ili 1 je manje spljoštenosti. Ne možemo nacrtati gustinu za čitavu oblast, jer teoretske vrednosti u uglovima pri vrhovima iznose $+\infty$.



Slika 6. Gustina Gauss-ove kopule sa različitim korelacijama ρ

Algoritam 13. Simuliranje Gauss-ovom kopulom

Neka su $F_1, \dots, F_n$ željene marginalne raspodele i Σ $n \times n$ korelaciona matrica željene Gauss-ove kopule.

1. Izračunati Cholesky dekompoziciju matrice Σ kao $\Sigma_{Chol} \cdot \Sigma_{Chol}^t = \Sigma$.
2. Simulirati n nezavisnih slučajnih promenljivih $Y_i \sim N(0,1)$.

3. Postaviti
$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \Sigma_{Chol} \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}.$$

4. Slučajne promenljive X_i sa željenom raspodelom dobijamo iz:

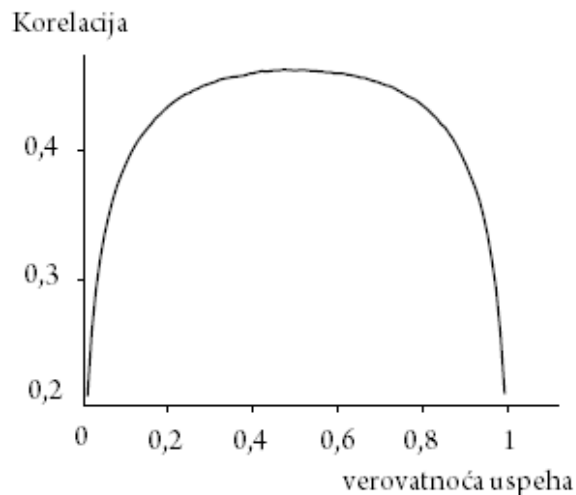
$$X_i = F_i^{-1}[\Phi(Z_i)],$$

Φ je standardna normalna funkcija raspodele, a F_i^{-1} inverz željene marginalne funkcije raspodele.

Napomena 17.

Umesto dekompozicije Cholesky u prethodnom algoritmu može se koristiti i kvadratni koren matrice Σ dobijen dekompozicijom singularne vrednosti. $\square$

Ako koristimo normalno distribuirane marginalne raspodele, tada je rezultujuća matrica korelacije novo-dobijenih slučajnih promenljivih matrica Σ . Međutim, za recimo binomnu raspodelu dobijamo drugačije korelacije. Na primer, imamo 500,000 Monte Karlo simulacija i u svakoj smo simulirali dve slučajne promenljive sa binomnom raspodelom u pet ogleda sa istom verovatnoćom uspeha. Za 2-dimenzionalnu Gauss-ovu kopulu koristimo korelaciju 0.5. Broj ogleda binomne slučajne promenljive je sveden na pet da bismo izbegli važenje asimptotskog ponašanja centralne granične teoreme. Dobijamo krivu korelacije za različite verovatnoće uspeha koja je prikazana na Slici 7.



Slika 7. Korelacija između X_1, X_2 sa $X_1, X_2 \sim B(5, p)$ i Gauss-ova kopula sa korelacijom 0.5

t – kopula

t-kopula je usko povezana sa Gauss-ovom.

Definicija 20.

Neka su $Y_1, \dots, Y_n$ promenljive sa standardnom normalnom raspodelom sa odgovarajućom matricom korelacije Σ . Neka je Z slučajna promenljiva sa χ^2 raspodelom sa m stepeni slobode. Sa t_m označimo funkciju studentove raspodele sa m stepeni slobode. Tada se pridružena funkcija raspodele $C_t(x_1, \dots, x_n)$ slučajne promenljive

$$X_i = t_m \left(\sqrt{m} \cdot \frac{Y_i}{\sqrt{Z}} \right) \quad (4.14)$$

naziva t – kopula sa m stepeni slobode i matricom korelacije Σ .

Da bismo opravdali to što matricu Σ zovemo matricom korelacije, treba da primetimo da ako za marginalne raspodele koje koristimo važi $F_i = t_m$. Onda se može pokazati da su korelacije između slučajnih promenljivih date sa Σ .

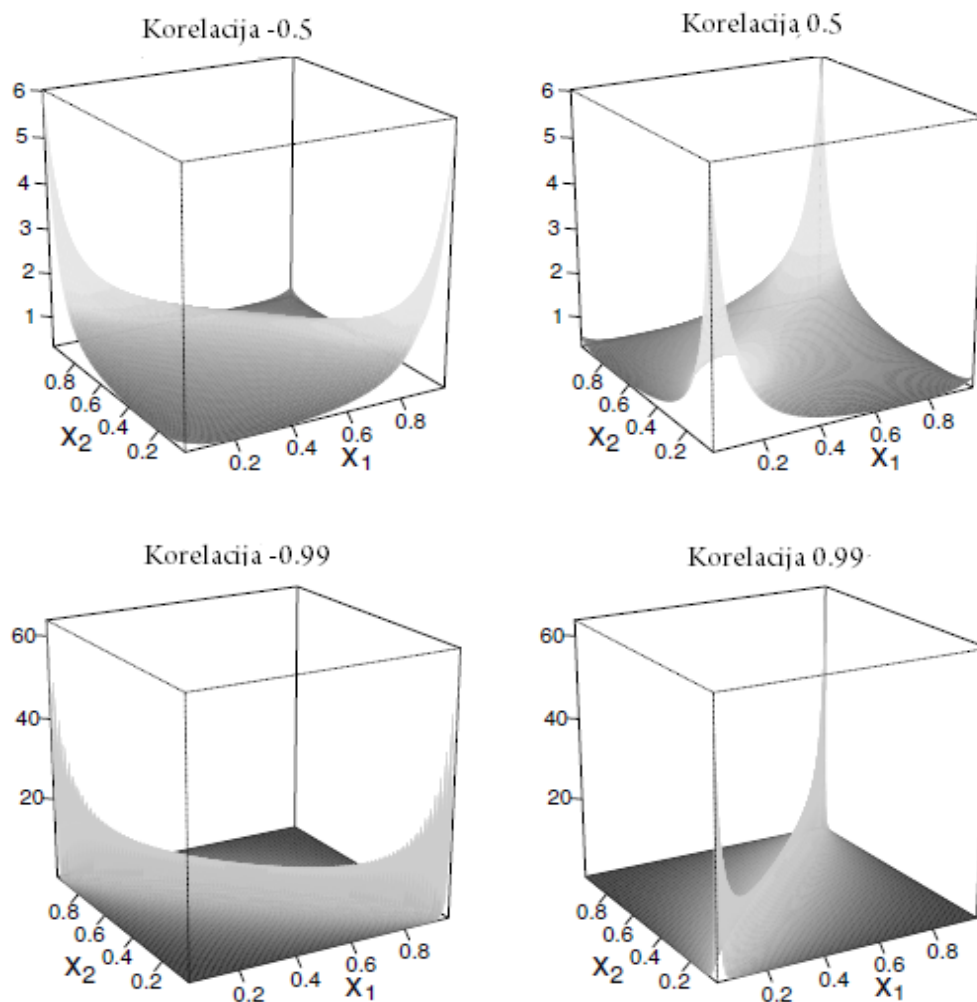
Teorema 7.

Funkcija gustina t-kopule sa $m \in \mathbf{N}$ stepeni slobode i nesingularnom matricom korelacije Σ je data sa:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^n C_t}{\partial x_1 \dots \partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) \cdot \left[\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\right]^{n-1}}{\sqrt{\det(\Sigma)} \cdot \left[\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\right]^n} \cdot \frac{\sqrt{\left[\frac{[t_m^{-1}(x_1)]^2}{m} + 1\right] \dots \left[\frac{[t_m^{-1}(x_n)]^2}{m} + 1\right]^{m+1}}}{\sqrt{\frac{1}{m} \cdot (t_m^{-1}(x_1); \dots; t_m^{-1}(x_n)) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \begin{pmatrix} t_m^{-1}(x_1) \\ \vdots \\ t_m^{-1}(x_n) \end{pmatrix} + 1}} \quad (4.15) \end{aligned}$$

gde je sa t_m^{-1} označena inverzna funkcija studentove raspodele sa m stepeni slobode. Oznaka za determinantu matrice Σ je $\det(\Sigma)$.

Grafička prezentacija funkcije gustine 2-dimenzionalne t-kopule za različite korelacije prikazana je na Slici 8. Važe ista ograničenja kao kod Gauss-ove kopule, tj. vrednost u dva od četiri ugla grafika je $+\infty$, pa crtamo u oblasti $[0.03, 0.97]$. Potrebno je još primetiti da gustina izgleda isto kao ona za Gauss-ovu kopulu. Osnovna razlika je ta što je ova gustina još manje spljoštena, ali još uvek simetrična.



Slika 8. Gustina t-kopule sa 3 stepena slobode za različite korelacije ρ

Napomena 18.

- Ako broj stepeni slobode m dostiže beskonačnost, tada t-kopula teži ka Gauss-ovoj. Iz formule za gustinu možemo zaključiti da za identičku matricu Σ , gustina ne postaje gustina nezavisne kopule. U stvari, nezavisnu kopulu nikada ne možemo dobiti kad god da koristimo t-kopulu.
- Obe ove kopule su simetrične i veoma se brzo simuliraju. Postoji jedna upečatljiva razlika među njima. Dok Gauss-ova kopula nema zavisnost na repu

raspodele, t-kopula ima obe, i gornju i donju. Kako je kopula simetrična formulisaćemo samo gornju. Za $\sigma_{12} = \text{Corr}(X, Y)$ imamo:

$$\lambda_U = 2 \cdot \left(1 - t_{m+1} \left(\frac{\sqrt{(m+1)(1-\sigma_{12})}}{\sqrt{1+\sigma_{12}}} \right) \right) \quad (4.16)$$

gde je $t_m(x)$ opet funkcija raspodele za studentovu raspodelu sa m stepeni slobode. $\square$

Iz definicije t-kopule lako je modelirati slučajne promenljive sa datim marginalnim raspodelama (Algoritam 14).

Algoritam 14. Simuliranje sa t-kopulom

Neka su $F_1, \dots, F_n$ željene marginalne raspodele i Σ željena $n \times n$ korelaciona matrica t-kopule sa m stepeni slobode.

1. Izračunati Cholesky dekompoziciju od Σ sa $\Sigma_{Chol} \cdot \Sigma_{Chol}^t = \Sigma$.
2. Simulirati n nezavisnih slučajnih promenljivih $\tilde{Y}_i \sim N(0,1)$.

3. Postaviti
$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \Sigma_{Chol} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{Y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{Y}_n \end{pmatrix}.$$

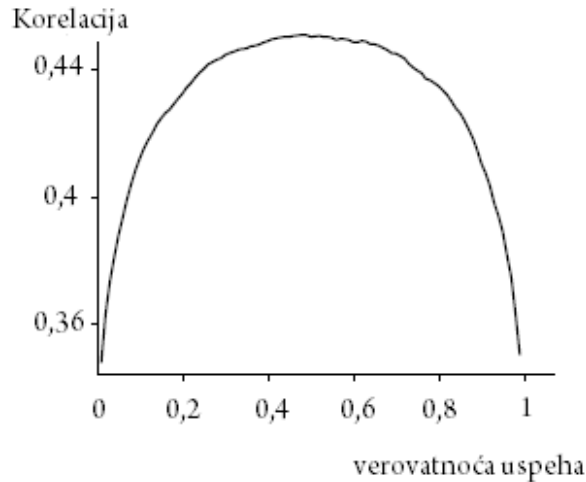
4. Simulirati m nezavisnih slučajnih promenljivih $\tilde{Z}_i \sim N(0,1)$ i postaviti
$$Z = \tilde{Z}_1^2 + \dots + \tilde{Z}_m^2.$$

5. Slučajne promenljive X_i sa željenom raspodelom dobijamo uz pomoć:

$$X_i = F_i^{-1} \left[t_m \left(\sqrt{m} \cdot \frac{Y_i}{\sqrt{Z}} \right) \right]$$

gde je t_m studentova raspodela sa m stepeni slobode.

Da bismo ilustrovali razliku između t i Gauss-ove kopule, kao na Slici 7, ponovo ćemo modelirati dve slučajne promenljive sa binomnom raspodelom. Kao rezultat dobijamo krivu prikazanu na Slici 9.



Slika 9. Korelacija između X_1, X_2 sa $X_1, X_2 \sim B(5, p)$ i t- kopula sa korelacijom 0.5 i 3 stepena slobode

Archimed-ove kopule

Archimed-ovu kopulu karakteriše jedna 1-dimenzionalna funkcija raspodele. Da bismo je uveli, podsetićemo se definicije Laplace-ove transformacije na način koji nama odgovara.

Definicija 21.

Neka je $Z: \Omega \rightarrow \mathbf{R}_+$ nenegativna realna slučajna promenljiva sa funkcijom raspodele F gde je $F(0) = 0$. **Laplasova transformacija** $L_Z: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ od Z data je sa:

$$L_Z(x) = E[\exp(-x \cdot Z)] = \int_{\square} \exp(-xz) dF(z) \quad (4.17)$$

Ako još slučajna promenljiva Z ima gustinu f , onda je možemo rekonstruisati uz pomoć tzv. inverzne Laplace-ove transformacije.

Definicija 22.

Laplace-ova transformacija L_Z može biti proširena tako da ima kompleksne argumenate sa pozitivnim realnim delovima. Inverzna Laplace-ova transformacija data je sa:

$$L_Z^{-1}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \exp(sx) L_Z(s) ds. \quad (4.18)$$

Sada se možemo vratiti definisanju Archimed-ove kopule.

Definicija 23.

Neka je F funkcija raspodele 1-dimenzionalne slučajne promenljive Z sa $F(0)=0$. Neka je sada L_Z Laplace-ova transformacija od Z . Definišemo $\varphi(u) = \inf \{v | L_Z(v) \geq u\}$ i nazivamo je **generator** Archimed-ove kopule.

Odgovarajuću **Archimed-ovu kopulu** $C_{Archimed}$ definišemo na sledeći način:

$$C_{Archimed}(x_1, \dots, x_n) := \varphi^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \right) \quad (4.19)$$

gde je φ^{-1} inverzna funkcija generatora i podudara se sa Laplace-ovom transformacijom od Z .

Napomena 19.

Archimed-ova kopula ima nekoliko prednosti i nekoliko mana u poređenju sa kopulama t i Gauss-ovom.

Prednosti: Moguće je dobiti nesimetrične zavisnosti na repu. Kod Gauss-ove i t -kopule to nije bio slučaj, jer su im gustine simetrične u okolini tačke $(0.5, \dots, 0.5)$.

Mane: Osnovne mane Archimed-ove kopule mogu se videti direktno iz njenog oblika. Prvo, broj slobodnih parametara je strogo ograničen, jer se najčešće za F bira funkcija sa najviše dva ili tri parametra. Drugo, zbog toga što slučajne komponente unosimo putem (transformisane) sume važi:

$$C_{Archimed}(x_1, \dots, x_n) = C_{Archimed}(x_{\Pi(1)}, \dots, x_{\Pi(n)}) \quad (4.20)$$

za permutaciju $\Pi: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Iz ove jednačine vidimo da su strukture zavisnosti između bilo kojih konačnih podnizova slučajne promenljive jednake. To Archimed-ovu čini različitom od Gauss-ove i t -kopule gde korelaciona matrica omogućava različite zavisnosti među komponentama. $\square$

Sledi algoritam koji predstavlja opšti okvir za modeliranje sa Archimed-ovom kopulom.

Algoritam 15. Modeliranje sa Archimed-ovom kopulom

Neka su $F_1, \dots, F_n$ željene marginalne raspodele, φ generator Archimed-ove kopule, a φ^{-1} njegov inverz.

1. Simulirati n nezavisnih slučajnih promenljivih $Y_i \sim U[0,1]$
2. Simulirati još jednu slučajnu promenljivu Z nezavisnu od $Y_1, \dots, Y_n$ sa Laplace-ovom transformacijom jednakom sa φ^{-1} .
3. Definišemo $Z_i = \varphi^{-1} \left[-\frac{1}{Z} \cdot \ln(Y_i) \right]$.
4. Slučajnu promenljivu sa željenom raspodelom dobijamo uz pomoć $X_i = F_i^{-1}(Z_i)$.

Sada reč dajemo nekim specifičnim primerima Archimed-ove kopule.

Gumbel kopula:

Data je za $\alpha \geq 1$ preko sopstvenog generatora:

$$\varphi(t) = [-\ln(t)]^\alpha, \quad \varphi^{-1}(u) = \exp(-u^{1/\alpha}). \quad (4.21)$$

Za $n = 2$, Gumbel-ova kopula ima gornju zavisnost na repu datu sa

$$\lambda_U = 2 - 2^{1/\alpha}, \quad \text{za } \alpha > 1 \quad (4.22)$$

i Kendall-ovo tau dato sa:

$$\tau_\alpha(X, Y) = 1 - 1/\alpha. \quad (4.23)$$

Clayton kopula:

Definisana je za $\alpha > 0$ preko svog generatora:

$$\varphi(t) = 1/\alpha \cdot (t^{-\alpha} - 1), \quad \varphi^{-1}(u) = (\alpha \cdot u + 1)^{-1/\alpha}. \quad (4.24)$$

Za $n = 2$, ova kopula ima donju zavisnost na repu datu sa:

$$\lambda_L = 2^{-1/\alpha}, \quad \text{za } \alpha > 1 \quad (4.25)$$

i Kendall-ovo tau:

$$\tau_\alpha(X, Y) = \frac{\alpha}{\alpha + 2}. \quad (4.26)$$

Frank kopula:

Kada je $\alpha > 0$, generator Frank-ove kopule izgleda ovako:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= -\ln \left(\frac{\exp(-\alpha \cdot t) - 1}{\exp(-\alpha) - 1} \right), \\ \varphi^{-1}(u) &= -1/\alpha \cdot \ln \{ \exp(-u) \cdot [\exp(-\alpha) - 1] + 1 \}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Frank-ova kopula nema ni gornju ni donju zavisnost na repu raspodele.

4.3 Primena u aktuarskim modelima

Pretpostavimo da osiguravajuća kompanija razmatra niz mogućih zavisnih poslovanja $X_1, \dots, X_n$ i želi da računa očekivane vrednosti njihovih funkcija gubitka, tj.

$$E(f(X_1, \dots, X_n)) \quad (4.28)$$

Očigledan način da se to izvede bila bi Monte Karlo ocena, tačnije napraviti N realizacija slučajnog vektora $(X_1, \dots, X_N)$ i uzeti srednju vrednost ishoda $f(X_1, \dots, X_N)$ kao ocenu. Međutim, da bismo to uradili, potrebna nam je pridružena raspodela za posmatrana poslovanja. Ako je ne znamo, onda koristimo Algoritam 16. koji se zasniva na familiji kopula.

Algoritam 16. Kopula za zavisne rizike

1. Oceniti marginalne raspodele $F_1, \dots, F_n$ od $X_1, \dots, X_n$ pomoću podataka iz prošlosti.
2. Odlučiti se za familiju kopula C_θ , $\theta \in \Theta$ vodeći se posmatranim fenomenom.
3. Odrediti parametar θ^* koji odgovara najboljoj kopuli iz parametarske familije ocenjivanjem karakteristika izabrane familije kopula (kao što su Kendall-ovo tau, gornja/donja zavisnost na repu ili korelacija).
4. Koristiti marginalne raspodele i kopulu C_{θ^*} za generisanje N nezavisnih slučajnih uzoraka $(X_1^{(i)}, \dots, X_n^{(i)})$ prema odgovarajućim algoritmima za modeliranje kopula iz prethodnog odeljka.
5. Izračunati Monte Karlo ocenu iz prethodno generisanog uzorka za $E(f(X_1, \dots, X_n))$ na uobičajen način.

Sada nam se nameću pitanja tipa: Koju kopulu koristiti u određenoj primeni? Ili Kako fitovati kopulu datim podacima?

Odgovor na prvo pitanje nije tako očigledan. Osim upotrebljivosti (koja prednost daje Gauss-ovoj kopuli) važna osobina je svakako i moć objašnjavanja empirijski posmatranog fenomena odgovarajućih podataka. Zbog toga bi trebalo proveriti podatke, da li poseduju recimo:

- simetriju
- zavisnost na repu
- ekstremne vrednosti.

To treba da nam pomogne pri odabiru familije kopula. Sledeći korak je fitovanje familije kopula postojećim podacima. Preporučuje se sledeća procedura.

1. Fitovanje marginalne raspodele F_i sa X_i . Fitovanje se može postići uz pomoć podataka iz prošlosti korišćenjem dobro uspostavljenih jednodimenzijskih modela za poslovanja koja posmatramo. Često su pretpostavke o tim jednodimenzijskim raspodelama u prošlosti već postavljene.

2. Fitovanje kopule višedimenzijskim podacima. Ono zavisi od odabrane familije. U slučaju Gauss-ove ili t-kopule treba oceniti matricu korelacije, dok u slučaju Archimed-ove možemo koristiti metod najmanjih kvadrata ocenom, recimo, Kendall-ovog tau za sve parove (X_i, X_j) i izborom parametra θ koji dovodi do najmanje sume kvadratnih odstupanja između teoretskih i ocenjenih vrednosti Kendall-ovog tau. I donja i/ili gornja zavisnost na repu raspodele mogu doći u obzir.

5. Neživotno osiguranje

Kod neživotnog osiguranja variranje zahteva može biti mnogo veće nego kod životnog. Posledice katastrofa kao što su zemljotresi ili uragani često dovode do ogromnih šteta. Ovi veoma retki događaji uglavnom imaju vrlo veliki uticaj na rizik osiguranog portfolija, a zbog toga i na rezultat čitavog poslovanja osiguravajuće kuće. Ono što će nam kod ovakvih situacija biti od pomoći jesu tzv. raspodele sa teškim repom.

Pomenuti retki događaji kao i finansijske posledice koje sa sobom nose ne mogu se tako lako predvideti kao kod životnog osiguranja, iz razloga što zakon velikih brojeva ovde u globalu ne važi. Stoga je ocena verovatnoće propasti suštinski problem matematike kod neživotnog osiguranja. Sa ovim je blisko povezano određivanje ukupnog iznosa zahteva u toku prethodno definisanog vremenskog intervala. Obično je taj vremenski interval jedna godina. Modeliranje iznosa zahteva i proces pristizanja tih zahteva su ovde centralne teme. Ono što je stvarno žiža našeg interesovanja jeste modeliranje uticaja veza između različitih zahteva sa akcentom na uvođenje kopula u simuliranje.

5.1 Pojedinačni model

U pojedinačnom modelu, kolektivni skup svih polisa osiguranja ispitujemo modeliranjem svake polise ponaosob.

Definicija 24.

Indivudualni model rizika polise i , osiguranikovog portfolija se poistovećuje sa slučajnom promenljivom X_i , iznosom zahteva u datom vremenskom intervalu. Ukupan iznos zahteva S_n portfolija dat je preko:

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i. \quad (5.1)$$

Osiguravajuće kompanije uglavnom interesuje raspodela ukupnog iznosa zahteva S_n . Da bismo je odredili, potrebno je pretpostaviti sledeće:

Pretpostavka 3.

1. Zahtevi $X_1, \dots, X_n$ pojedinačnih polisa su nezavisni.
2. $X_1, \dots, X_n$ imaju istu raspodelu koja je beskonačno deljiva.

Prva pretpostavka čini da raspodela ukupnog iznosa zahteva bude konvolucija raspodela pojedinačnih polisa. Drugi deo pretpostavke osigurava da je raspodela ukupnog iznosa zahteva ista, do na parametre, kao raspodela pojedinačnih polisa.

Ove pretpostavke su veoma restriktivne, jer pojedinačne polise obično imaju različite karakteristike. Takođe, moramo imati u vidu da iznos zahteva pojedinačne polise može biti nula. Zato, ako ukupan iznos zahteva treba da se modelira, moramo precizirati masu verovatnoće za iznose zahteva koji iznose nula tokom nekog perioda.

Monte Karlo simulacija ukupnog iznosa zahteva zapravo je modeliranje fiksirane sume slučajnih promenljivih.

5.2 Zbirni model

Kod zbirnog modela, često nazivanog i **Cramér-Lundberg-ov model**, prelazimo sa posmatranja pojedinačnih polisa na posmatranje svakog pojedinačnog zahteva. Sa X_i obeležavamo i -ti zahtev koji, u opštem slučaju, nije povezan sa i -tom polisom osiguranja.

Definicija 25.

***Zbirni model rizika** sadrži stohastički proces N_t koji predstavlja broj zahteva koji se pojavljuju do trenutka t . Nenegativna slučajna promenljiva X_i , $i = 1, \dots, N_t$ predstavlja iznose tih pojedinačnih zahteva.*

Na zbirni model nametnućemo sledeće pretpostavke.

Pretpostavka 4.

1. *Broj zahteva je nezavisan od samih zahteva.*
2. *Individualni zahtevi su nezavisni i jednako raspodeljeni.*

Ove pretpostavke dozvoljavaju rastavljanje nekih svojstava raspodele ukupne veličine zahteva. kao npr. očekivanja i disperzije ako su poznate raspodele broja zahteva i pojedinačnih zahteva. Šta to zapravo znači, videćemo u narednoj teoremi.

Teorema 8.

Ako individualni zahtev X_i ima očekivanje c i disperziju σ_c^2 , a broj zahteva N_t ima očekivanje n i disperziju σ_n^2 , tada ukupni iznos zahteva S_t do trenutka t ima očekivanje $n \cdot c$ i disperziju $n \cdot \sigma_c^2 + c^2 \cdot \sigma_n^2$.

U klasičnom Cramér-Lundberg-ovom modelu pojavljivanje zahteva se modelira Poisson-ovim procesom sa parametrom $\lambda > 0$.

Fokusiraćemo se sada na izračunavanje verovatnoće propasti. Zato uvodimo pojmove početnih rezervi h i rate premije $\pi(t)$ koja se plaća u trenutku t .

Definicija 26.

Neka su h početne rezerve, $\pi(t)$ rata premije koja se plaća u trenutku t i $X_1, X_2, \dots$ zahtevi koji se pojavljuju u trenucima $t_1, t_2, \dots$. Tada **verovatnoću propasti** definišemo kao

$$p_{ruin} = P\left(\exists t : h + \int_0^t \pi(s)ds - \sum_{i=1}^{\infty} 1_{\{t_i \leq t\}} \cdot X_i < 0\right). \quad (5.2)$$

Verovatnoću $1 - p_{ruin}$ nazivamo **verovatnoća preživljavanja**.

Teorema 9.

a) Ako ratu premije $\pi(t)$ izračunamo po principu očekivane štete (iz Definicije 3), tada verovatnoću propasti dobijamo ako izaberemo da faktor opterećenja bude $\mu = 0$, jer je pozitivan faktor opterećenja potreban da osiguravajuća kompanija preživi.

b) Pretpostavimo da je $\pi(t) = c \cdot t$ i da je W_i niz nezavisnih, jednako distribuiranih vremena između pristizanja zahteva sa $t_i = W_1 + \dots + W_i$ koja zadovoljavaju $E(X_1) - c \cdot E(W_1) < 0$. Još pretpostavljamo da za $Z_1 = X_1 - cW_1$ generatrisa momenata $m_{Z_1}(h)$ postoji $\forall h \in (-h_0, h_0)$ za neko $h_0 > 0$. Ako tada postoji jedinstveno pozitivno rešenje r sledeće jednačine

$$m_{Z_1}(r) = E(\exp(R(X_1 - cW_1))) = 1, \quad (5.3)$$

dobijamo **Lundberg-ovo ograničenje** za verovatnoću propasti sa početnom rezervom h :

$$p_{ruin} \leq e^{-Rh} \quad (5.4)$$

Broj R tada zovemo **koeficijent prilagođavanja**.

U opštem slučaju za raspodele iznosa zahteva X_i , određivanje verovatnoće propasti je skoro nemoguće. Tada je jedno od mogućih rešenja upotreba Monte Karlo metode.

Simuliranje i verovatnoća propasti u Cramér-Lundberg-ovom modelu

Da bismo u klasičnom Cramér-Lundberg-ovom modelu izračunali verovatnoću propasti do fiksiranog momenta T , možemo jednostavno upotrebiti algoritme za simuliranje trajektorija Poisson-ovog procesa. Nije komplikovano uključiti deterministički drift $\int_0^t \pi(s)ds$ i tako dobiti trajektorije rezervi procesa:

$$R(t) = h + \int_0^t \pi(s)ds - \sum_{i=1}^{\infty} 1_{\{t_i \leq t\}} X_i \quad \text{za } t \in [0, T].$$

Verovatnoća propasti do trenutka T tada može biti ocenjena uz pomoć:

$$\hat{p}_{ruin}(T) := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M 1_{\{R^{(i)}(t) < 0 \text{ za neke } t \in [0, T]\}} \quad (5.5)$$

gde je $R^{(i)}(t)$, $t \in [0, T]$ i -ta simulirana trajektorija procesa rezervi.

Primena finije Monte Karlo metode zavisi od osobina raspodele, procesa pristizanja zahteva N_t i iznosa zahteva X_i .

Simuliranje trajektorija u Cramér-Lundberg-ovom modelu: opštiji slučaj

Postoje mnogi dobri razlozi zašto homogeni Poisson-ov proces može biti prilično gruba aproksimacija za stvarne procese pristizanja zahteva. Obično su populacije osiguranika podeljene u grupe koje se mogu razlikovati, ali koje su homogene unutar sebe. Jednostavan primer bile bi grupe ženskih i muških vozača. Složen Poisson-ov proces se čini kao pogodna generalizacija homogenog Poisson-ovog procesa:

Definicija 28.

Neka je Λ nenegativna slučajna promenljiva sa konačna prva dva momenta. Tada se stohastički proces N_t naziva složen Poisson-ov proces sa promenljivim parametrom Λ , ako je, pod uslovom da je $\Lambda = \lambda$, N_t homogen Poisson-ov proces sa parametrom λ .

Uvođenjem uslova na Λ i integraljenjem mogućih vrednosti dobijamo:

$$E(N_t) = t \cdot E(\Lambda), \quad \text{Var}(N_t) = t \cdot (E(\Lambda) + \text{Var}(\Lambda)). \quad (5.6)$$

Ova činjenica dopušta da varijansa procesa pristizanja zahteva bude veća od njegovog očekivanja.

Algoritam 17. Simuliranje trajektorije složenog Poisson-ovog procesa

1. Simulirati realizaciju λ slučajne promenljive Λ .
2. Simulirati trajektoriju homogenog Poisson-ovog procesa N_t , $t \in [0, T]$ sa parametrom λ .

Ako proces intenziteta varira u toku vremena na slučajan način, onda je Cox-ov proces odgovarajući koncept.

Definicija 29.

Neka je Λ nenegativan stohastički proces za koji važi:

$$\int_0^T \Lambda_t dt < \infty \quad \forall T > 0. \quad (5.7)$$

Tada, stohastički proces N_t (koji je prilagođen istoj filtraciji kao Λ_t) zovemo **Cox-ov proces** ili dvostruki stohastički proces sa procesom intenziteta Λ_t ako je N_t sa $\Lambda_t = \lambda_t$ nehomogeni Poisson-ov proces sa funkcijom intenziteta λ_t .

Pre nego što se vratimo specijalno izabranom procesu intenziteta Λ_t , prodiskutovaćemo način simuliranja trajektorija iz njega. Cox-ov proces je povezan sa nehomogenim Poisson-ovim procesom na isti način na koji je složen Poisson-ov proces povezan sa homogenim. Zato ćemo prvo objasniti načine simuliranja trajektorije nehomogenog Poisson-ovog procesa. Jedan način se oslanja na poznavanje tačne raspodele vremena čekanja između dva skoka. Pošto je ona u slučaju netrivialne funkcije stope intenziteta retko poznata, drugi način, koji se zasniva na metodi prihvatanja/odbijanja, je bolji:

Algoritam 18. Simuliranje trajektorije nehomogenog Poisson-ovog procesa

1. Postaviti $t_0 = 0 = \hat{t}_0$, $\bar{\lambda} = \max\{\lambda_t | 0 \leq t \leq T\}$
2. Dok god je $t_i < T$ pratiti sledeće korake:
 - a) Generisati $Z \sim \mathcal{E}(\bar{\lambda})$, $U \sim U(0,1)$.
 - b) Postaviti $\hat{t} = \hat{t} + Z$.
 - c) Ako je $U \leq \frac{\lambda(\hat{t})}{\bar{\lambda}}$ tada $t_i = \hat{t}, i = i + 1$, inače se vratiti na korak 2a).

Sada možemo modelirati i trajektoriju Cox-ovog procesa.

Algoritam 19. Simuliranje trajektorije Cox-ovog procesa

1. Simulirati realizaciju λ_t procesa stope intenziteta $\Lambda_t, t \in [0, T]$.
2. Simulirati trajektoriju nehomogenog Poisson-ovog procesa $N_t, t \in [0, T]$ sa funkcijom stope intenziteta $\lambda_t, t \in [0, T]$ uz pomoć Algoritma 18.

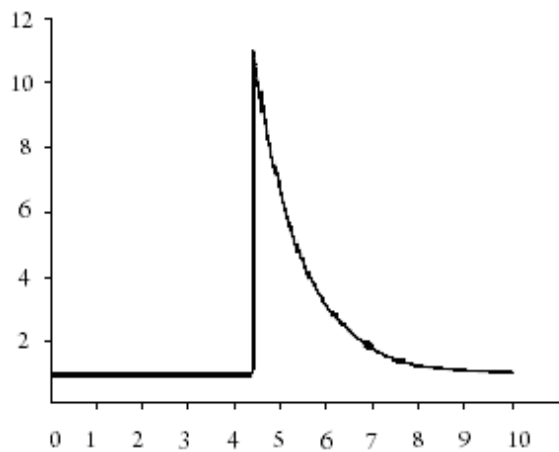
Mnoge vrste procesa intenziteta mogu doći u obzir u Cox-ovom procesu. Jedan od njih bio bi proces koji se stabilizuje oko očekivane vrednosti (mean-reverting process) koji može da modelira intenzitet koji se na slučajan način menja u okolini tipične vrednosti koja ga privlači.

Proces koji je takođe popularan u teoriji je **Poisson-ov proces udarnog šuma** (Poisson shot noise). Ono što se krije iza ovog koncepta je kombinacija normalnog radnog vremena i vanrednog radnog vremena (vremena kada se dešavaju neke katastrofe) osiguravajuće kompanije. Nakon katastrofe potrebno je da prođe određeno vreme pre nego što svi zahtevi pristignu i onda se njihov

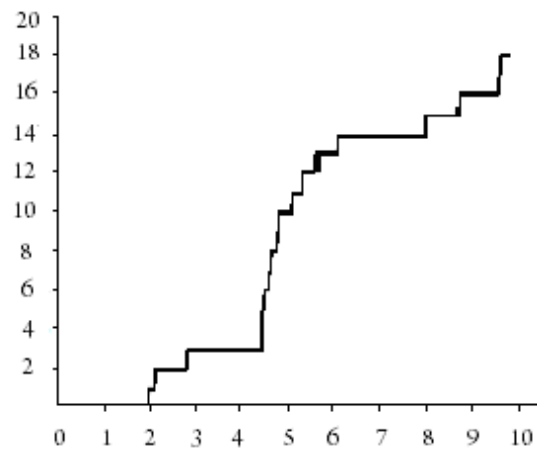
nivo intenziteta vraća u normalu. To se ponavlja nakon svake katastrofe. Kao poseban primer, uvodimo oblik procesa udarnog šuma kao:

$$\lambda_t = \lambda_0 e^{-\delta t} + \sum_{i=1}^{K_t} y_i e^{-\delta(t-s_i)}. \quad (5.8)$$

λ_0, δ su pozitivni brojevi. Slučajna promeljiva y_i je skok u intenzitetu prouzrokovan katastrofom i u trenutku s_i , koja predstavlja vreme i -tog skoka homogenog Poisson-ovog procesa K_t sa intenzitetom ρ . Na Slikama 10 i 11 možemo videti ponašanje Poisson-ovog procesa udarnog šuma. Slika 10. ilustruje proces intenziteta (sa visinom skoka 10), dok Slika 11. prikazuje broj zahteva. Možemo primetiti veliko povećanje u frekvenciji zahteva nakon skoka u intenzitetu.



Slika 10. Proces udarnog šuma λ_t



Slika 11. Proces pristizanja zahteva

5.3 Simuliranje retkih događaja i raspodele sa teškim repom

Simuliranje retkih događaja je oblast koja je usko povezana sa izračunavanjem verovatnoće propasti ili merama rizika. Međutim, kako se ovi događaji veoma retko dešavaju, gruba Monte Karlo simulacija ne može biti efikasan metod. Jasno je da je ponašanje repa date raspodele presudna osobina pojavljivanja tako retkih događaja. Zato dajemo sledeću klasifikaciju raspodele.

Definicija 30.

Neka je X realna slučajna promeljiva sa funkcijom raspodele F . Rep ove raspodele je $\bar{F}(x) := 1 - F(x)$.

a) Kažemo da (jednodimenzionalna) raspodela ima **lak rep** ako taj rep zadovoljava:

$$\bar{F}(x) \leq C \cdot \exp(-\alpha x) \text{ za } x > x_0 \quad (5.9)$$

za neko x_0 i pozitivne konstante C, α .

b) Kažemo da (jednodimenzionalna) raspodela ima **težak rep** ako njena funkcija generatriše momenata $M(u) = E(\exp(uX))$ ne postoji ni za jedno $u > 0$.

Napomena 20.

a) Uslov (5.9) nagoveštava da funkcija generatriše momenata raspodele sa lakim repom $M(u) = E(\exp(uX))$ postoji za neko $u > 0$. Takođe, nepostojanje funkcije generatriše momenata za svako $u > 0$ za raspodele sa teškim repom implicira da rep mora biti teži od svake eksponencijalne raspodele.

b) Popularni primeri raspodela sa lakim repom su eksponencijalna, gama i normalna raspodela.

c) Primeri raspodela sa teškim repom su:

- Pareto-va raspodela sa $\bar{F}(x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{-\alpha}$ za $\alpha, b > 0$ i $x \geq b$,
- Log-normalna raspodela
- Weibull-ova raspodela sa $\bar{F}(x) = \exp(-\gamma x^a)$ za $a, \gamma > 0$.

d) Poznata klasa raspodela sa teškim repom se subekspnencijalne raspodele. Raspodela F je subekspnencijalna ako za svaki niz nezavisnih, jednako distribuiranih, nenegativnih promenljivih $X_1, \dots, X_n$ (sve distribuirane na osnovu F) važi:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\max(X_1, \dots, X_n) > x)}{P(X_1 + \dots + X_n > x)} = 1 \quad (5.10)$$

Ono što možemo saznati tumačenjem ove osobine je da je jedna veoma velika vrednost obično dominantna u odnosu na vrednost sume subekspnencijalno distribuiranih slučajnih promenljivih. Na ovako nešto se ponekad može naići u osiguranim portfolijima neživotnog osiguranja. $\square$

U ovom odeljku bavićemo se samo simuliranjem retkih događaja, preciznije izračunavanjem verovatnoća za njihovo dešavanje u slučajevima kad imamo raspodele sa teškim repom.

Da bismo sudili o učinku Monte Karlo ocene za male verovatnoće, uvešćemo prvo dva kriterijuma koja se zasnivaju na relativnoj dužini odgovarajućih intervala poverenja. Oba kriterijuma zahtevaju da za niz malih verovatnoća, disperzija ocene treba da konvergira ka nuli brže od samog niza.

Definicija 31.

Posmatramo niz događaja $A(u)$ koji zavisi od parametra u sa verovatnoćama:

$$P(A(u)) =: z(u) \rightarrow 0 \text{ za } u \rightarrow \infty \quad (5.11)$$

Za nepristrasnu ocenu $Z(u)$ od $z(u)$ se kaže da ima **ograničenu relativnu grešku** ako važi:

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(Z(u))}{Z(u)^2} < \infty. \quad (5.12)$$

Za nepristrasnu ocena $Z(u)$ od $z(u)$ se kaže da ima **logaritamski efikasnu (ili asimptotski efikasnu) grešku** ako važi:

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(Z(u))}{Z(u)^{2-\varepsilon}} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (5.13)$$

Gore navedena ocena zapravo ocenjuje verovatnoću na repu sume nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih promenljivih $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Asmussen-Kroese ocena se zasniva na jednakosti:

$$P(S_n > u) = n \cdot P(S_n > u, M_n = X_n) \quad (5.14)$$

za neprekidne raspodele gde je $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. U cilju smanjenja disperzije Monte Karlo ocene desne strane jednakosti ove jednačine, pozivamo uslovni Monte Karlo uvođenjem Asmussen-Kroese ocene kao:

$$n \cdot P(S_n > u, M_n = X_n | X_1, \dots, X_{n-1}) = n \cdot \bar{F}(\max\{M_{n-1}, u - S_{n-1}\}). \quad (5.15)$$

Ovde je $\bar{F} = 1 - F$, a F je raspodela od X_i .

Uzmimo sada jednu osiguravajuću kompaniju sa početnim rezervama u na početku perioda. Pretpostavimo da ne postoje nikakve premije pre kraja tog perioda. Tada je:

$$z(u) := P(S_N > u) \quad (5.16)$$

zaista jednako njenoj verovatnoći propasti na kraju perioda ako je N slučajan broj zahteva tokom datog perioda. Zamenom fiksiranog n u jednačini (5.15) sa slučajnom promenljivom N , dobijamo Asmussen-Kroese ocenu za sumu:

$$Z(u) = N \bar{F}(\max\{M_{N-1}, u - S_{N-1}\}). \quad (5.17)$$

Pojedini teoretski rezultati pokazuju da je ocena asimptotski efikasna za Weibull-ovu raspodelu sa parametrom a koji zadovoljava $2^{1+a} < 3$. Ocena pokazuje superiorni učinak u poređenju sa drugim predloženim ocenama u ovoj oblasti. Njeno simuliranje opisano je kroz naredni algoritam.

Algoritam 20. Simuliranje Asmussen-Kroese ocene

Neka su: N slučajna promenljiva sa datom raspodelom, $X_1, X_2, \dots$ nezavisne, isto distribuirane slučajne promenljive sa funkcijom raspodele F , $u > 0$.

Za $i = 1$ do K :

1. Simulirati realizaciju $N^{(i)}$ slučajne promenljive N .
2. Simulirati $X_1^{(i)}, \dots, X_{N-1}^{(i)}$ nezavisno prema raspodeli F .
3. Izračunati $M_{N-1}^{(i)} = \max\{X_1^{(i)}, \dots, X_{N-1}^{(i)}\}$, $S_{N-1}^{(i)} = \sum_{j=1}^{N-1} X_j^{(i)}$.
4. Postaviti $Z^{(i)}(u) = N^{(i)} \bar{F}(\max\{M_{N-1}^{(i)}, u - S_{N-1}^{(i)}\})$.

Izračunati $Z_K(u) := \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K Z^{(i)}(u)$.

Da bismo još više poboljšali učinak ocene predlaže se korišćenje kontrolne promenljive. Pošto kod subekspencijalne raspodele gde je suma verovatnoća repa asimptotski jednaka n puta verovatnoća repa pojedinačne slučajne promenljive, $N \cdot \bar{F}(u)$, predlažemo kontrolnu promenljivu. Tako dolazimo do Asmussen-Kroese ocene sa kontrolnom promenljivom oblika:

$$Z_{con}(u) = N \cdot \left(\bar{F}(\max\{M_{N-1}, u - S_{N-1}\}) - \bar{F}(u) \right) + E(N) \cdot \bar{F}(u). \quad (5.18)$$

5.4 Zavisni zahtevi: Primer sa kopulama

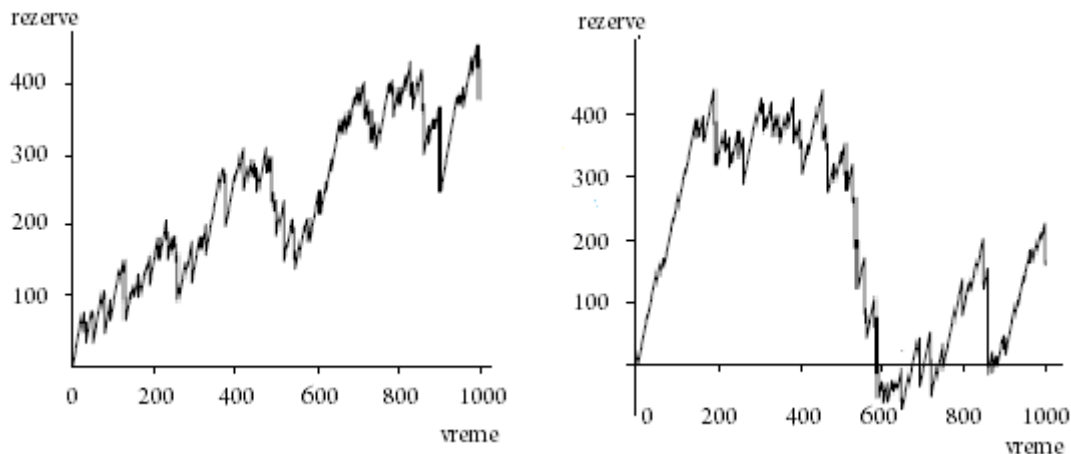
Pojedinačni kao i zbirni model se zasnivaju na pretpostavci nezavisnosti. Za zemljotrese gde se sila i intenzitet menjaju tokom vremena, ova pretpostavka je nerealna, jer je veliki obično praćen mnogim malim zemljotresima. Sa ovim izlazimo na kraj pre svega definisanjem pojedinačnog zahteva. Takođe, zapazimo da je veliki zemljotres u nekoj oblasti u budućnosti praćen malim dok opet jačina ne bude dovoljna za veliki. Pošto smo već uveli pojam Poisson-ovog shot noise modela kao mogućeg rešenja, ovde ćemo se usredsrediti na modeliranje zavisne strukture između zahteva.

Primer 11. Verovatnoća propasti usled zemljotresa

Pođimo od pretpostavke da je svaki deseti zemljotres onaj veliki, a da su ovi između mali. Modeliramo zahtev X_i Gamma raspodelom sa parametrima 0.9 i 30. Zavisnost između različitih zahteva modeliramo Gauss-ovom kopulom sa korelacionom matricom koja ima Toeplitz strukturu sa -0.1, -0.005 na prvoj dijagonali i 0.3 na desetoj dijagonali.

Vreme čekanja između zemljotresa modeliramo eksponencijalnom raspodelom sa parametrom 0.1, što znači da se zemljotres dešava svake desete godine ($\frac{1}{0.1} = 10$). Uvodimo zavisnost između iznosa zahteva usled zemljotresa i vremena čekanja sledećeg zemljotresa Gauss-ovom kopulom sa korelacijom 0.7, tj. veliki zemljotres povećava vreme čekanja do sledećeg.

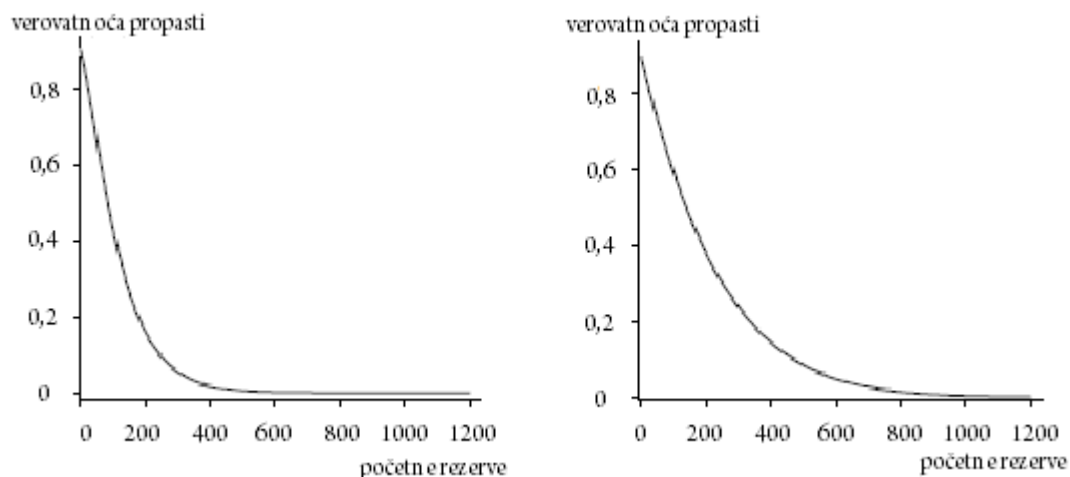
Simuliramo pomenuto za narednih 1,000 godina. Uzimamo da je rata premije $\pi(t) = 1.1 \cdot \frac{E(X_i)}{10} = 2.97$. Radi upoređivanja, simuliraćemo i slučaj kada imamo nezavisnost. Rezultati su prikazani na slikama koje slede.



Slika 12. Trajektorije rezervi, sa kopulama (levo) i u slučaju nezavisnosti (desno) kada nemamo početnih rezervi

Na Slici 12, možemo videti evoluciju rezervi kada su početne rezerve nula. Između dva zemljotresa, premije vode povećanju rezervi i kada se zemljotres dogodi, rezerve padaju za iznos zahteva. Ako uporedimo trajektorije, onda u zavisnom slučaju vidimo da je vreme čekanja nakon velikog zemljotresa veće. Takođe je veličina zahteva kod sledećeg zemljotresa manja, što je upravo ono što smo želeli za naš model.

Možda najinteresantniji rezultat jeste razlika u početnim rezervama koje su potrebne da bi se izbegla propast ili, suprotno, razlika u verovatnoćama propasti za fiksirane početne rezerve. Zavisni slučaj dovodi do mnogo manjih potrebnih početnih rezervi ili do mnogo manje verovatnoće propasti, što ilustruje slika 13.



Slika 13. Verovatnoća propasti u zavisnosti od početnih rezervi, sa kopulom (levo) i u slučaju nezavisnosti (desno)

6. Markov lanac Monte Karlo i Bayes-ova ocena

U ovom odeljku uvešćemo dva koncepta, Markov lanac Monte Karlo metod (MCMC) i Bayes-ovu ocenu. Kada je modeliranje slučajnih brojeva neefikasno ili iz nekog razloga nemoguće, tada je MCMC osnovno oruđe za izvođenje metoda Bayes-ove ocene i Monte Karlo metode. U obe situacije, postoje brojne primene u aktuarskoj i finansijskoj matematici.

6.1 Osnovne karakteristike lanca Markova

Pojam lanca Markova se u literaturi koristi na različite načine, od jednostavne definicije procesa Markova i lanca Markova do restrikcije da je Markov lanac diskretni Markov proces sa prebrojivim skupom stanja.

Definicija 32.

Neka je $\{X(n), n \in \mathbf{N}\}$ diskretni stohastički proces takav da $X(n)$ dostiže samo vrednosti iz prebrojivog skupa S , koji nazivamo skup stanja. Skup S ćemo zbog pogodnosti poistovetiti sa (podskupom od) $\mathbf{N}$. Ovaj proces zovemo (diskretni) **lanac Markova** ako važi:

$$\begin{aligned} P(X(n+1) = j | X(n) = i, X(n-1) = i_{n-1}, \dots, X(0) = i_0) \\ = P(X(n+1) = j | X(n) = i) =: p_{ij}(n) \quad \forall i, j, i_k \in S. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Matricu verovatnoća $(p_{ij}(n))$ zovemo **matrica prelaza** od trenutka n do $n+1$.

Napomena 21.

- a) Kupcu životnog osiguranja se često dodeljuje „stanje“. Može biti „zdrav“, „bolestan“ ili „mrtav“. Tada je lanac Markova model procesa promene stanja tokom vremena.
- b) Za osobine diskretnih stanja možemo formulisati osobinu Markova (6.1) po komponentama. Naravno, tumačenje ostaje isto: buduće promene procesa zavise isključivo od sadašnjeg stanja, ali ne i od prošlosti. Biramo $F(n)$ za filtraciju generisanu elementima lanca Markova do trenutka n .
- c) **Neprekidan skup stanja.** Teorija za diskretne lance Markova sa opštim skupom stanja je takođe dosta razvijena. Trebalo ba da bude prirodno da Markov lanac može preći iz jednog u drugi trenutak regulisan, recimo, normalnom raspodelom. Tada ulogu matrice prelaza $(p_{ij}(n))$ preuzima jezgro prelaza u oznaci $p(x, A)$ takvo da je za fiksirano $x \in S$, $p(x, \cdot)$ raspodela verovatnoća sa nosačem u S . Nećemo detaljno ulaziti u ovaj slučaj, samo ćemo predstaviti neke primere sa neprebrojivim skupom stanja kao što je $\mathbf{R}^d$.

Pošto se sve simulacije izvode na kompjuteru sa konačnim skupom brojeva, može se steći utisak da restrikcija na konačan skup S uopšte ne bi ni bila restrikcija. □

Ne-Markovi diskretni stohastički procesi koji zavise samo od fiksiranog dela prošlosti mogu se povećavanjem skupa stanja pretvoriti u procese Markova. Tako se mogu uključiti ostali delovi prošlosti koji određuju buduće promene vremenskih serija. Da budemo precizniji, uvodimo sledeću lemu.

Lema 1.

Neka je $\{X(n), n \in \mathbf{N}\}$ stohastički proces kod kog se $X(n+1)$ može izraziti preko $X(n), \dots, X(n-k)$ putem formule:

$$X(n+1) = f_{n+1}(X(n), \dots, X(n-k), \varepsilon(n+1)) \quad (6.2)$$

gde je $\varepsilon(n+1)$ slučajna promenljiva koja je nezavisna od $X(l)$ za bilo koje $l \leq n$ i f_{n+1} , niz determinističkih funkcija.

Tada je stohastički proces $Y(n) = (X(n), \dots, X(n-k))'$ lanac Markova.

Specijalan slučaj lanca Markova, koji je često i praktično važan, je takav lanac kod kog se njegove verovatnoće prelaza ne menjaju tokom vremena.

Definicija 33.

Lanac Markova $\{X(n)\}_{n \in \mathbf{N}}$ sa skupom stanja S je **homogen** ako za bilo koje $i, j \in S$ i bilo koje $n \in \mathbf{N}$ važi:

$$P(X(n+1) = j | X(n) = i) = P(X(1) = j | X(0) = i) = p_{i,j}. \quad (6.3)$$

Napomena 22.

Direktno se može proveriti da je matrica prelaza u n koraka $p^{(n)}$ od trenutka 0 do trenutka n definisana preko:

$$p_{i,j}^{(n)} := P(X(n) = j | X(0) = i)$$

zapravo jednaka matrici prelaza na n -ti stepen, tj.

$$p^{(n)} = p^n. \quad (6.4)$$

□

Postoje različite vrste stanja kod životnog osiguranja. Neka stanja su povratna kao na primer „bolestan“, dok se iz nekih pak nikada ne može izaći kao što je „mrtav“. Definišimo ih.

Definicija 34.

Neka je $i \in S$ neko stanje homogenog lanca Markova $\{X(n)\}_{n \in \mathbf{N}}$ i neka je $X(0) = i$. Obeležimo sa

$$\tau_i = \min\{n > 0 | X(n) = i\} \quad (6.5)$$

prvi trenutak kada se X ponovo nađe u stanju i . Stanje i zovemo **prelazno** ako važi

$$P(\tau_i < \infty) < 1, \quad (6.6)$$

a **povratno** ako zadovoljava

$$P(\tau_i < \infty) = 1. \quad (6.7)$$

Ako povratno stanje zadovoljava $E(\tau_i) < \infty$ tada je ono **pozitivno povratno**.

Definicija 35.

Dva stanja $i, j \in S$ homogenog lanca Markova $\{X(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ su povezana ako za neke $n_{12}, n_{21} \in \mathbb{N}$ važi:

$$P(X(n + n_{12}) = j | X(n) = i) \cdot P(X(n + n_{21}) = i | X(n) = j) > 0 \quad (6.8)$$

Za Markov lanac kažemo da je **aperiodičan** ako za sva stanja $i \in S$ važi:

$$1 = \text{NZD} \{n \in \mathbb{N} | P(X(n) = i | X(0) = i) > 0\}, \quad (6.9)$$

gde NZD predstavlja najveći zajednički delilac.

Napomena 23.

a) Može se desiti da je $n_{12} = n_{21} = 0$, tj. da je svako stanje povezano sa samim sobom. Lako se može proveriti da povezanost definiše relaciju ekvivalencije nad skupom stanja. Čak, dobijamo razbijanje skupa stanja na različite podskupove od kojih svaki sadrži ili povatno ili prelazno stanje.

b) Ako smo u povratnom stanju, tada je u budućnosti nemoguće dostići stanje bilo koje druge ekvivalentne klase. Da bismo mogli da dostignemo bilo koje stanje u simulaciji, homogen Markov lanac treba da se sastoji od jedne klase ekvivalencije. Ako to nije slučaj, moramo pažljivo izabrati raspodelu $X(0)$ tako da dođemo do željene klase. $\square$

Definicija 36.

Homogen lanac Markova $\{X(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sa skupom stanja S se zove **nesvodljiv** ako ima samo jednu klasu ekvivalencije povezanih stanja. U suprotnom je **svodljiv**.

Ako želimo da simuliramo trajektoriju lanca Markova i ako želimo da znamo njenu početnu vrednost, potrebna nam je raspodela verovatnoća $\mu(\cdot)$ nad skupom stanja iz koje možemo izvući početno stanje $X(0)$. Jedna takva početna raspodela koja je istrajna tokom vremena data je narednom definicijom.

Definicija 37.

Raspodela $\pi(\cdot)$ nad skupom stanja S se zove **stacionarna raspodela** homogenog lanca Markova $\{X(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ako su sve $X(n)$ distribuirane prema $\pi(\cdot)$ onda kada je početna vrednost distribuirana prema $\pi(\cdot)$.

Napomena 24.

Obično je stacionarna raspodela π lanca Markova definisana kao nenegativno rešenje jednačine:

$$\pi p = \pi, \quad \sum \pi(i) = 1. \quad (6.10)$$

Videćemo u nastavku da su te dve definicije ekvivalentne. Premda nema baš svaki homogen Markov lanac stacionarnu raspodelu, postoje mnogi rezultati koji garantuju postojanje (jedinstvene) stacionarne raspodele. Skup standardnih rezultata dat je u nastavku. $\square$

Teorema 10.

a) Neka je $\{X(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ homogen, nesvodljiv i aperiodičan lanac Markova sa pozitivnim povratnim stanjima. Tada ima jedinstvenu stacionarnu raspodelu π koja zadovoljava:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,j}^{(n)} = \pi(j) \quad \forall i, j \in S \quad (6.11)$$

i ona je jedinstveno rešenje jednačine (6.10).

b) Ako je S konačno i Markov lanac $\{X(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ je homogen, nesvodljiv i aperiodičan, tada raspodela od $X(n)$ konvergira eksponencijalnom brzinom ka svojoj jedinstvenoj stacionarnoj raspodeli π u sledećem smislu:

$$\max_{1 \leq i \leq N} \max_{1 \leq j \leq N} |p_{i,j}^{(n)} - \pi(j)| \leq C \cdot e^{-nc} \quad (6.12)$$

za neke $c, C > 0$ i N veličinu skupa stanja.

Pored rezultata o konvergenciji raspodele lanca Markova, postoji jedna klasa teorema o konvergenciji za lanac Markova koja ih povezuje sa Monte Karlo simulacijom.

Teorema 11. Jak zakon lanca Markova

Neka je $\{X(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ homogen, nesvodljiv lanac Markova sa jedinstvenom stacionarnom raspodelom π . Neka je f realna funkcija takva da je $E(f(X))$ definisano i konačno za X koje je distribuirano na osnovu π . Tada imamo

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X(k)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(f(X)) \text{ s.s.} \quad (6.13)$$

Primetimo da nam nije potrebna nezavisnost između $X(k)$ -ova da bi konvergencija važila. Ova činjenica je veoma važna za konvergenciju Monte Karlo ocene dobijene uz pomoć MCMC metode.

6.2 Modeliranje lanaca Markova

Poznavanje verovatnoća prelaza čini modeliranje trajektorije lanca Markova $\{X(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ prilično lakim. Da bismo imali jedinstvenost uvek ćemo izvlačiti početno stanje $X(0)$ iz neke raspodele D . Ako već znamo početnu vrednost, tada je D raspodela koja postavlja svu masu u tu posebnu vrednost. Pretpostavljamo da znamo čitavu matricu prelaza i da možemo izvući slučajan broj iz svake diskretne raspodele koja je indukovana vrstama matrice prelaza.

Algoritam 21. Modeliranje trajektorije homogenog lanca Markova sa preračunatom matricom prelaza

1. Postaviti $n = 0$. Izvući slučajan broj $X(0)$ iz raspodele D .
2. Za $n = 1$ do N izvući slučajan broj $X(n)$ iz diskretne raspodele date preko $\{p_{X(n-1),j}, j \in \mathbb{N}\}$.

Ovaj algoritam može biti neefikasan ako je skup stanja beskonačan i/ili ako verovatnoće prelaza treba uzračunati od samog početka u svakoj fazi. Tada može biti efikasnije koristiti inverzni metod generisanja brojeva iz relevantne raspodele na iterativan način, kao što je prikazano u narednom algoritmu.

Algoritam 22. Simuliranje lanca Markova

1. Postaviti $n = 0$. Izvući slučajan broj $X(0)$ iz raspodele D .
2. Za $n = 1$ do N
 - a) Izvući slučajan broj $u \sim U(0,1]$ i postaviti $j = 0$, $suma = 0$.
 - b) Izračunati $p_{X(n-1),j}$.
 - c) Postaviti $suma = suma + p_{X(n-1),j}$.
 - d) Ako je $suma \geq u$ onda $X(n) = j$, inače pomeriti $j = j + 1$ i vratiti se na korak b).

6.3 Markov lanac i Monte Karlo metod

Osnovna ideja MCMC metode je da možemo dobiti slučajan broj koji je distribuiran, bar približno, prema datoj raspodeli π , simuliranjem lanca Markova čija je ona jedinstvena stacionarna raspodela. Ovde, π može biti diskretna, data preko svoje funkcije verovatnoća $\pi(\cdot)$ ili neprekidna, data preko svoje funkcije gustine $g(\cdot)$.

Metropolis-Hastings algoritam

Ovo je najpopularniji MCMC algoritam. Konstruiše lanac Markova koji počinje u proizvoljnom stanju i ima verovatnoću prelaska $p_{i,j}$ takvu da je lanac Markova reverzibilan, tj. da zadovoljava jednačinu ravnoteže:

$$\pi(i)p_{i,j} = \pi(j)p_{j,i}. \quad (6.14)$$

Stoga, s početnom raspodelom π , verovatnoća prelaska iz stanja i u stanje j jednaka je verovatnoći prelaska iz stanja j u stanje i . Sumiranje obe strane prethodne jednačine po j , pokazuje da je π zaista stacionarna raspodela lanca.

Algoritam 23. Metropolis-Hastings (MH) algoritam

Neka je π data raspodela verovatnoća. Neka je $q(x,y)$ data matrica prelaza. Dalje, neka je $X(0) = \bar{x}$ za neko $\bar{x}$ sa $\pi(\bar{x}) > 0$.

Za $k = 0$ do $N - 1$

1. Izvući slučajan broj Y prema verovatnoći prelaza $q(X(k), \cdot)$ i slučajan broj $U \sim U[0,1]$.
2. Izračunati $\alpha(X(k), Y) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(Y)q(Y, X(k))}{\pi(X(k))q(X(k), Y)} \right\}$.
3. Ako je $\alpha(X(k), Y) > U$, tada postaviti $X(k+1) = Y$, $k = k+1$, i vratiti se na korak 1. U suprotnom se samo vratiti na korak 1.

Napomena 25. Osobine i modifikacije MH algoritma

a) Verovatnoće prelaza u MH algoritmu su date sa:

$$p_{i,j} = \begin{cases} q(i, j)\alpha(i, j), & i \neq j, \\ q(i, i)\alpha(i, i) + \sum_{j \in S} q(i, j)(1 - \alpha(i, j)), & i = j. \end{cases} \quad (6.15)$$

b) Na sličan način možemo doći do algoritma za raspodelu π sa gustinom. Sa mogućnošću da deluje malo zbunjujuće, obeležićemo ovu funkciju gustine isto sa $\pi(x)$. U tom slučaju verovatnoću prelaza $q(x, y)$ zamenjujemo sa gustinom prelaza $q(x, y)$, tj. za svako fiksirano x , $q(x, \cdot)$ je funkcija gustine. Ponovo dobijamo da je jednačina (6.14) zadovoljena, ali su sada verovatnoće prelaza zamenjene jezgrom prelaza $p(x, y)$:

$$\pi(x)p(x, y) = \pi(y)p(y, x). \quad (6.16)$$

Integraljenjem po y dobijamo stacionarni uslov u slučaju gustine:

$$\pi(x) = \int \pi(y)p(y, x)dy. \quad (6.17)$$

Dakle, slučaj sa gustinom dobijamo jednostavnom zamenom verovatnoća gustinom. Ipak ćemo se zbog jednostavnijih oznaka uglavnom ograničiti na slučaj diskretnog skupa stanja.

c) **Kako izabrati funkciju $q(x, y)$?** Postoje dva popularna izbora za verovatnoće prelaza $q(x, y)$. Jedan je simetrična funkcija, tj. funkcija za koju važi:

$$q(x, y) = q(y, x) \quad \forall x, y \in S \quad (6.18)$$

gde je S nosač raspodele Π . Ovakav izbor pojednostavljuje računanje funkcije prihvatanja, pa onda imamo:

$$\alpha(x, y) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(y)}{\pi(x)} \right\}. \quad (6.19)$$

Za ovakvo q , modelirano stanje Y se uvek prihvata ako njegova verovatnoća $\pi(Y)$ prelazi $\pi(X(k))$. Sa druge strane, ako uzmemo funkciju q koja dostiže svoju najveću vrednost u $X(k)$ (kao što je normalna raspodela centrirana oko $X(k)$) tada je verovatnoća prihvatanja uvek ispod 1.

Drugi omiljen izbor je uzorak dobijen na osnovu IS metode, tačnije izbor

$$q(x, y) = g(y) \quad \forall x, y \in S \quad (6.20)$$

za neku funkciju verovatnoće (ili gustinu) $g(\cdot)$.

Međutim, ako $q(x, y)$ ima sklonost da drži previše mase verovatnoće u bliskoj okolini od x , tada lanac može ostajati uvek previše blizu početnog stanja. Ako, pak, $q(x, y)$ ima sklonost da drži previše mase verovatnoće u velikim skokovima daleko od x , tada se susrećemo sa opasnošću da završimo na repu raspodele, što dovodi do nereprezentativnih vrednosti MH lanca.

d) **Konvergenција i stacionarno ponašanje.** Da bismo osigurali konvergenciju MH lanca ka željenoj stacionarnoj raspodeli, treba da se pobrinemo da bitne konvergenције delova lanca Markova mogu biti iskorišćene. Kada imamo diskretan skup stanja, MH lanac je nesvodljiv i aperiodičan ako važi:

$$q(i, j) > 0 \quad \forall i, j \in S \quad (6.21)$$

$$p(i, i) > 0 \text{ za bar jedno } i \in S. \quad (6.22)$$

U slučaju da imamo gustinu, umesto uslova (6.22) treba da važi $p(x, x) > 0$ za skoro svako $x \in S$. Ove uslove možemo držati pod kontrolom našim izborom funkcije $q(i, j)$.

Kako je posmatrani lanac još i homogen, time smo proverili pretpostavke o obe konvergencije, konvergenциji raspodele iz Teoreme 10. i jak zakon za lanac Markova. Tako smo dobili željene, konvergenciju ka stacionarnoj raspodeli i konvergenciju Monte Karlo ocene zasnovanoj na MH algoritmu.

U specijalnom slučaju, imamo brzu konvergenciju za izbor uzoka (iz IS metode) ako važi:

$$A := \sup_x \frac{\pi(y)g(x)}{\pi(x)g(y)} < \infty. \quad (6.23)$$

Tako da je, da bismo dobili dobre rezultate, potrebno da $g(\cdot)$ i $\pi(\cdot)$ budu veoma slične.

e) **Burn-in period** (period testiranja). Kako se tražena konvergenција Monte Karlo ocene zasnovane na MH lancu može obezbediti za upotrebu čitavog lanca, ova konvergenција je obično brža ako uključuje samo one članove lanca koji su

već blizu stanja stacionarne raspodele. Stoga se dopušta da se lanac izvršava za burn-in period, pa kasnije koristimo samo članove MH lanca.

Empirijski opravdan kriterijum koji ukazuje na konvergenciju lanca ka stacionarnom stanju je sličnost generisanih podataka. Drugačije rečeno, treba da odlučimo, na osnovu grafičkog prikaza, od kog podatka pa nadalje verujemo da se MCMC lanac ponaša stacionarno. Ovo može biti dokaz samo u slučaju nestacionarnosti, ako simulirane vrednosti MCMC lanca izgledaju drugačije od onih koje očekujemo za željenu stacionarnu raspodelu.

f) **Dužina čitavog lanca.** Da bismo doneli odluku o dužini čitavog lanca, treba da razmotrimo disperziju odgovarajuće Monte Karlo ocene zasnovane na MCMC lancu. Uzećemo da je $\text{Var}(f(X)) = \sigma^2$ i da je X distribuirana prema π . Neka je ρ_k autokorelacija reda k elemenata MCMC niza. Tada važi:

$$\text{Var}\left(\sum_{k=1}^N f(X(k))\right) = \sigma^2 \cdot \left(1 + 2 \sum_{k=1}^N \frac{N-k}{N} \rho_k\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma^2 \cdot \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k\right). \quad (6.24)$$

Zato, od autokorelacione funkcije između generisanih vrednosti uzorka zavisi da li je potrebno da generišemo više vrednosti od uobičajenog N uz pomoć MCMC lanca, da bismo dobili tačnost $O(1/\sqrt{N})$. Pa je traženje autokorelacije takođe deo izvođenja MCMC simulacije.

g) **Modifikacije.** Naravno, postoje različite modifikacije MH algoritma za poboljšanje kvaliteta generisanih slučajnih brojeva. Na primer, možemo koristiti samo svaki k -ti član MH lanca da bismo imali bar približno nezavisne slučajne brojeve. Međutim, ako je k preveliko metod postaje prilično neefikasan.

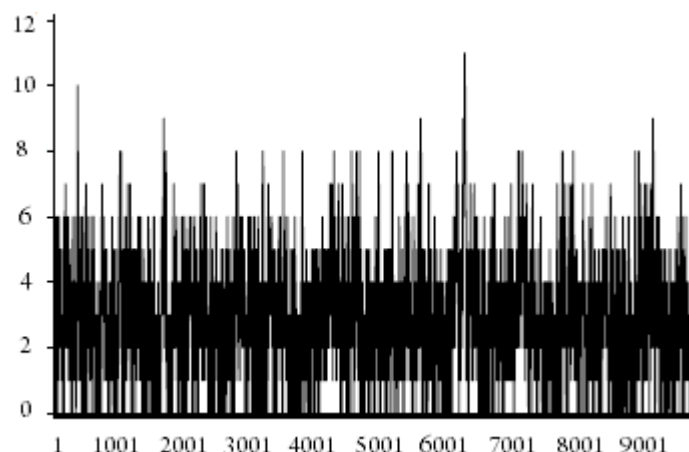
h) Da bismo konstruisali MH algoritam, potrebno je samo da znamo stacionarnu raspodelu $\pi(\cdot)$ do na normiranu konstantu, pošto samo razlomak $\pi(x)/\pi(y)$ ulazi u računicu. Ova činjenica biće posebno važna za primenu MCMC metode u Bayes-ovoj oceni. $\square$

Primer 12.

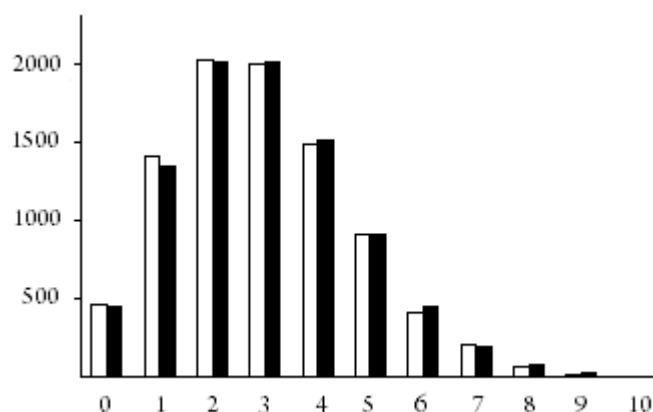
Da bismo ilustrovali ponašanje MCMC lanca posmatraćemo jedan primer za generisanje Poisson-ove raspodele sa parametrom $\lambda = 3$ i korišćenje matrice prelaza proste slučajne šetnje u $x = 0$. Dakle, korišćemo:

$$q(x, y) = \begin{cases} 1/2 & y \in \{x-1, x+1\}, x > 0 \\ 1 & \text{za } y=1, x=0 \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Simuliramo MCMC lanac dužine 10,000 sa početkom u $X(0)=1$ i koristimo prvih 1,000 članova za burn-in period. Slika 14. prikazuje kako lanac vrlo brzo postaje stacionaran. To je istaknuto na Slici 15, gde se simulirane frekvencije različitih vrednosti među 9,000 članova lanca porede sa njihovim teoretskim duplikatima. Pošto modeliramo direktno iz Poisson-ove raspodele razlike su male. Ovo zapažanje je nezavisno od početne vrednosti, čak i za veoma velike početne vrednosti kao što je $X(0) = 20$.



Slika 14. MCMC lanac za Poisson-ovu raspodelu sa $\lambda = 3$.



Slika 15. Stvarne frekvencije (beli stubići) vrednosti MCMC lanca nakon burn-in perioda za Poisson-ovu raspodelu sa $\lambda = 3$ i očekivane teoretske frekvencije (crni stubići)

Gibbs-ov sempler

Ako želimo višedimenzionalnu ograničenu raspodelu MCMC lanca, često se suočavamo sa situacijama gde je marginalna raspodela komponenti, datih preko ostalih komponenti promenljive stanja, lako dostupna. Tada ažuriramo Markov lanac kreiran MCMC metodom, komponentu po komponentu. Za to koristimo već dostupne novo generisane komponente i ostale stare komponente. Ovaj metod poznat je pod nazivom **Gibbs-ov sempler**.

Algoritam 24. Gibbs-ov sampler

Neka je $\pi(\cdot)$ data raspodela verovatnoća (funkcija gustine). Neka je, dalje, $X(0) = (x_1, \dots, x_d)$ za neko x za koje je $\pi(x) > 0$.

Za $k = 0$ do $N - 1$

1. Generisati $X(k+1) = (X_1(k+1), \dots, X_d(k+1))$ generisanjem slučajnih brojeva jednog po jednog:

$$X_1(k+1) \sim \pi(x_1 | X_2(k), \dots, X_d(k)),$$

$$X_2(k+1) \sim \pi(x_2 | X_1(k+1), X_3(k), \dots, X_d(k)),$$

...

$$X_d(k+1) \sim \pi(x_d | X_1(k+1), X_2(k+1), \dots, X_{d-1}(k+1)).$$

2. Postaviti $k = k + 1$, pa se vratiti na korak 1.

Napomena 26.

a) Gore navedena varijanta Gibbs-ovog samplera se zove **sistematik-sken** Gibbs-ov sampler. Pojedini autori smatraju da ažuriranje slučajno izabrane komponente i u k -toj iteraciji i ostavljanje ostalih komponenti nepromenjenih (rendom-sken Gibbs-ov sampler) može da nadmaši sistematik-sken kad je brzina konvergencije u pitanju.

b) **Gibbs-ovo uzorkovanje kao specijalan slučaj Metropolis-Hastings-ovog algoritma.** Kod konstruisanja Gibbs-ovog samplera π je stacionarna raspodela odgovarajućeg MCMC lanca. Marginalne raspodele $\pi(\cdot|\cdot)$ ipak se moraju tačno znati da bi se Gibbs-ov sampler izveo. Ovaj postupak je pod ovim uslovima zaista specijalan slučaj Metropolis-Hastings-ovog algoritma, ako izaberemo $q(x_{-m}, z) = \pi(z | x_{-m})$ za verovatnoće prelaza kod ažuriranja lanca. Ono što x_{-m} predstavlja jeste vektor x bez svoje m -te komponente. Neka je sada $y = (x_1, \dots, x_{m-1}, y_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$. Tada dobijamo:

$$\alpha(x, y) = \frac{\pi(y)q(y, x_m)}{\pi(x)q(x, y_m)} = \frac{\pi(y_m | x_{-m})\pi(x_{-m})\pi(x_m | x_{-m})}{\pi(x_m | x_{-m})\pi(x_{-m})\pi(y_m | x_{-m})} = 1, \quad (6.25)$$

tj. verovatnoća prihvatanja za predloženu vredost y koja se od x razlikuje samo u m -toj komponenti uvek iznosi 1. Takođe, razmatranja o konvergenciji MH algoritma važe i za Gibbs-ov sampler.

c) Upotreba Gibbs-ovog samplera je veoma popularna pošto se često u mnogim primenama može desiti da su uslovne raspodele date, dok su bezuslovne nepoznate.

Primer 13.

Ovo je jednostavan primer primene gde je 2-dimenzionalna normalna raspodela

$$X \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right), \quad -1 < \rho < 1,$$

naša ciljana raspodela. Što se toga tiče, možemo predstaviti dve komponente X_1, X_2 ove normalne raspodele kao:

$$X_1 = \sqrt{1-\rho^2}Y_1 + \rho X_2, \quad X_2 = \sqrt{1-\rho^2}Y_2 + \rho X_1$$

za dve nezavisne promenljive sa standardizovanom normalnom raspodelom Y_1, Y_2 . Konstrukcija Gibbs-ovog semplera implicira

$$X_1(k+1)|X_2(k) \sim N(\rho X_2(k), (1-\rho^2)),$$

$$X_2(k+1)|X_1(k+1) \sim N(\rho X_1(k+1), (1-\rho^2)).$$

Iz tog razloga, su sa početkom u $(X_1(0), X_2(0))$, безусловne raspodele u k -toj iteraciji date sa:

$$X(k) \sim \left(\begin{pmatrix} \rho^{2k-1} X_2(0) \\ \rho^{2k} X_2(0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\rho^{4k-2} & \rho-\rho^{4k-1} \\ \rho-\rho^{4k-1} & 1-\rho^{4k} \end{pmatrix} \right)$$

koje očigledno konvergiraju ka ciljanoj raspodeli.

6.4 MCMC metode i Bayes-ova ocena

Osnovni princip Bayes-ove ocene parametra $\theta (\in \mathbf{R}^d)$ se sastoji iz tri dela:

1. **Predznanje** izraženo kroz pretpostavku da je θ realizacija raspodele (**priorna raspodela**): $\theta \sim G(\theta)$.
2. **Kombinovanje opažanja** $X = (X_1, \dots, X_n)$ **sa predznanjem** preko ažuriranja naše ocene raspodele od θ , kako bismo dobili uslovnu raspodelu (**posteriorna raspodela**):

$$\theta | X_1, \dots, X_n \sim G(\theta | X_1, \dots, X_n).$$

3. **Tačkasta ocena od θ** kao srednja vrednost ili modus posteriorne raspodele.

Umesto samo tačkaste ocene za nepoznati parametar θ , Bayes-ova ocena daje čitavu njegovu posteriornu raspodelu. Ako izaberemo priornu raspodelu koja ne nosi nikakve informacije (kao što je uniformna nad mogućim vrednostima za θ) tada se modus posteriorne raspodele podudara sa ocenom maksimalne verodostojnosti. Stoga su osnovni zadaci kod Bayes-ove ocene:

- Izračunavanje posteriorne raspodele
- Izračunavanje njenog modusa ili srednje vrednosti.

Kada se suočavamo sa diskretnom ili neprekidnom raspodelom imamo da je

$$G(\theta|x) = \begin{cases} \frac{f(x|\theta)g(\theta)}{\int_y f(x|y)g(y)dy}, & \text{neprekidan slučaj} \\ \frac{p(x|\theta)g(\theta)}{\sum_y p(x|y)g(y)}, & \text{diskretan slučaj} \end{cases} \quad (6.26)$$

gde se za funkcije verodostojnosti $f(x|y)$ i $p(x|y)$ pretpostavlja da su poznate.

U oba slučaja sa izračunavanjem brojioca ne bi trebalo da bude problema, dok imenilac može biti težak, ili čak nemoguć za izračunavanje (za višedimenzionalne raspodele to zahteva izračunavanje višestrukih integrala). Zato nam u opštem slučaju treba efikasniji numerički metod za nalaženje posteriorne raspodele.

U cilju izbegavanja ovog problema, Bayes-ova statistika se fokusira na nalaženje tzv. konjugovanih priora. To su priorne raspodele $G(\theta)$ takve da za datu funkciju verodostojnosti, posteriorne raspodele $G(\theta|x)$ pripadaju istoj familiji raspodela kao i priorna. Kao primer, možemo direktnim izračunavanjem proveriti da je beta raspodela konjugovani prior za Bernoulli-jevu raspodelu. U nastavku dajemo primer koji objašnjava rast efiksnosti MCMC metode za konjugovane priore.

Primer 14. MCMC sa konjugovanim priorima

MCMC modeliranje posteriorne raspodele može biti zaista sporo iz dva razloga. Prvi je ogroman zadatak numeričkog izračunavanja imenioca, a drugi je ocena funkcije verodostojnosti u brojiocu. Pravim izborom konjugovane prior raspodele oba ova problema mogu biti eliminisana.

Razmotrićemo problem ocene aritmetičke sredine od θ za normalnu raspodelu sa poznatom disperzijom σ^2 . Uvodimo pretpostavku da imamo niz podataka $x_1, \dots, x_n$ koji dovodi do funkcije verodostojnosti:

$$f(x|\theta) = \prod_{i=1}^n (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2\right).$$

Ako sada iskoristimo gustinu normalne raspodele sa sredinom ν i varijansom τ^2 kao priornu raspodelu $g(\cdot)$ za θ , tada ćemo dobiti posteriornu raspodelu proporcionalnu sa

$$f(x|\theta)g(\theta) = \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2\tilde{\sigma}^2} (\theta - \tilde{\mu})^2\right)$$

gde su

$$\tilde{\mu} = \tilde{\sigma}^2 \cdot \left(\frac{\nu}{\tau^2} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sigma^2} \right), \quad \tilde{\sigma}^2 = \left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{n}{\sigma^2} \right)^{-1}. \quad (6.27)$$

Vidimo da je posteriorna raspodela opet normalna raspodela, ali sa novim parametrima $\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2$ koje smo naveli iznad. Slede posledice.

1. Znamo imenilac posteriorne raspodele, a da ga nismo eksplicitno izračunali.
2. Ako pokrenemo MCMC lanac za nepoznati parametar θ , tada je u svakom koraku potrebno jedino simulirati sledeći element $\theta^{(i)}$. Nije potrebno oceniti funkciju verodostojnosti, samo treba ažurirati ocene parametara priorne raspodele.

Prednosti konjugovanih priora su još više naglašene kod ocena višedimenzionalnih parametara kad su dostupne sve uslovne raspodele zajedno

sa odgovarajućim konjugovanim priorima. U tom slučaju Bayes-ova ocena i Gibbs-ov sempler mogu biti vema efikasni. Svaki korak, u kom ažuriramo podatke, sastoji se samo od kompletnih uslovnih raspodela i on je praćen ažuriranjem parametara koji određuju familiju raspodela za relevantni parametar. Zato nije potrebno oceniti funkciju verodostojnosti, što nam štedi vreme.

6.5 Primeri MCMC metode i Bayes-ove ocene u aktuarskoj matematici

Prilagođavanje parametara i predviđanje u modelima ukupnih zahteva

Pretpostavimo da je ukupan iznos zahteva u godini t dat sa

$$S_t = Y_{t,1} + \dots + Y_{t,N_t} \quad (6.28)$$

gde su svi pojedinačni iznosi zahteva $Y_{t,i}$ nezavisni i imaju istu raspodelu, a N_t je broj zahteva u godini $t \in \{t_1, \dots, t_n\}$. Pretpostavljamo još i da su pojedinačni iznosi zahteva $Y_{t,i}$ nezavisni od N_t i da važi:

$$Y_{t,i} \sim \text{Pareto}(a, 20), \quad (6.29)$$

$$N_t | \lambda \sim P(\lambda). \quad (6.30)$$

Korišćenje raspodela kao što su Pareto-va i Poisson-ova za iznose (pojedinačnih) zahteva i učestalost zahteva je veoma uobičajeno u aktuarskoj matematici.

Posmatrajmo sada sledeća dva problema:

1. Bayes-ova ocena parametara a i λ koji određuju veličinu zahteva i učestalost zahteva.
2. Predviđanje frekvencije zahteva i raspodele visine zahteva u godini t_{n+1} pomoću datih podataka.

Da bismo se nosili sa rešavanjem ovih problema, potrebno je da uočimo da je posteriorna raspodela od λ datih relevantnih podataka

$$G(\lambda | N_{t_1}, \dots, N_{t_n}) = \text{const} \cdot p(N_{t_1}, \dots, N_{t_n} | \lambda) g(\lambda). \quad (6.31)$$

Pošto Poisson-ova funkcija verodostojnosti $p(N_{t_1}, \dots, N_{t_n} | \lambda)$ ima konjugovani prior sa Gamma raspodelom, biramo Gamma(0.001, 0.001) raspodelu kao (približnu) prior raspodelu koja ne nosi nikakve informacije za parametar λ .

Uslovna nezavisnost promenljivih N i Y daje posteriornu gustinu:

$$G(a | Y_{t_1,1}, \dots, Y_{t_n, N_{t_n}}) = \text{const} \cdot f(Y_{t_1,1}, \dots, Y_{t_n, N_{t_n}} | a) g(a). \quad (6.32)$$

Izbor Gamma(0.001,0.001) raspodele kao (približne) prior raspodele koja ne nosi nikakve informacije za parametar λ je opet konjugovani prior.

Uz pomoć oba odgovarajuća lanca generišemo 10,000 iteracija. Rezultati ocene se tada zasnivaju na bar 9,500 observacija, što znači da za burn-in period treba odabrati 500. Dobijeni rezultati predstavljeni su u Tabeli 2.

	Sr. vrednost	St. devijacija	2.5%	Sr. vrednst	97.5%
a	1.810	0.298	1.270	1.796	2.422
λ	3.305	0.577	2.273	3.267	4.550

Tabela 2. Bayes-ova ocena parametara za ukupan iznos zahteva

Da bismo predvideli karakteristike ukupnog iznosa zahteva za t_{n+1} godinu uz pomoć Bayes-a, računamo obe prediktivne raspodele i za broj zahteva i za ukupan iznos zahteva. Za broj zahteva možemo koristiti tek generisani MCMC lanac $\lambda^{(i)}, i = 501, \dots, 10,000$ da dobijemo približne prediktivne verovatnoće date posteriorne raspodele od λ :

$$P(N_{t_{n+1}} = n) \approx \frac{1}{9,500} \sum_{i=501}^{10,000} P(N_{t_{n+1}} = n | \lambda^{(i)}) = \frac{1}{9,500} \sum_{i=501}^{10,000} e^{-\lambda^{(i)}} \frac{(\lambda^{(i)})^n}{n!}. \quad (6.33)$$

Pošto za predviđanje ukupnog iznosa zahteva treba da izračunamo dvostruki integral:

$$f(S_{t_{n+1}} | \text{podaci}) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(S_{t_{n+1}} | \lambda, a) f(\lambda, a | \text{podaci}) d\lambda da \quad (6.34)$$

koji sadrži gustinu $f(S_{t_{n+1}} | \lambda, a)$ koja se bazira na konvoluciji, opet ćemo se odlučiti za MCMC simulaciju. Tako, biramo dužinu burn-in perioda od 500 i ukupnu dužinu lanca od 10,000 i pratimo sledeće korake:

Za $i = 500$ do 10,000

1. Generisati $N_{t_{n+1}}^{(i)} \sim \text{Poisson}(\lambda^{(i)})$.
2. Ako je $N_{t_{n+1}}^{(i)} = 0$ postaviti $S_{t_{n+1}}^{(i)} = 0$.
3. Ako je $N_{t_{n+1}}^{(i)} > 0$ tada
 - a) Generisati $Y_{t_{n+1},k}^{(i)} \sim \text{Pareto}(a, 20), k = 1, \dots, N_{t_{n+1}}^{(i)}$,
 - b) Postaviti $S_{t_{n+1}}^{(i)} = \sum_{k=1}^{N_{t_{n+1}}^{(i)}} Y_{t_{n+1},k}^{(i)}$.

Na kraju, ocenimo prediktivnu gustinu pomoću empirijskih duplikata dobijenih iz upravo simuliranih podataka.

Kredibilitet i ocena na osnovu iskustva

Primena koja sledi sadrži samo Bayes-ove komponente, ne i MCMC. Bavi se teoretskom pozadinom tehnike izračunavanja premije zvane ocena na osnovu iskustva. Potreba za ovakvom vrstom ocene proizilazi iz činjenice da se čitav portfolio određene polise osiguranja sastoji od različitih homogenih podpopulacija. Tipični primeri se pojavljuju u zdravstvenom osiguranju

(muškarci/žene, mladi/stari,...) i u osiguranju automobila (vrsta automobila, vrsta vozača).

Ako bismo u takvoj situaciji sklopili svaki ugovor sa istom premijom, tada bi „dobar” rizik prešao u ruke druge osiguravajuće kompanije, a onaj „loš” bi ostao („dobar” rizik predstavljaju ugovori sa onim osiguranicima kojima ne bi odgovarali zahtevi iznad proseka). Stoga je logično upotrebiti ponderisanu prosečnu vrednost aritmetičke sredine portfolia i individualne aritmetičke sredine visine zahteva kao osnove za konstituisanje premije. Pošto je individualna komponenta zasnovana na iskustvu iz prošlosti koje je osiguravajuća kompanija imala sa određenim osiguranikom, ova vrsta ocene premije se naziva **ocena na osnovu iskustva**.

Ako želimo da objasnimo zahteve koji se pojavljuju iz jedne polise osiguranja kao realizacije $m(\Theta)$ funkcije slučajne promenljive Θ (=riziko klasa) i ako imamo vektor podataka X (istoriju) za Θ , tada je tzv. **kredibilitet visoke preciznosti** za postulate ocene na osnovu iskustva, korišćenje funkcije $\hat{m}(X)$ kao premije zasnovane na pojedinačnoj istoriji osiguranika koja minimizira

$$MSE(\hat{m}(X)) := E((m(\Theta) - \hat{m}(X))^2). \quad (6.35)$$

To direktno sledi iz

$$\begin{aligned} E((m(\Theta) - E(m(\Theta)|X)) + E(m(\Theta)|X) - \hat{m}(X))^2) = \\ = E((m(\Theta) - E(m(\Theta)|X))^2) + E((E(m(\Theta)|X) - \hat{m}(X))^2) \end{aligned} \quad (6.36)$$

gde je optimalna ocena u smislu gore navedene srednje kvadratne greške (MSE):

$$\hat{m}(X) = E(m(\Theta)|X), \quad (6.37)$$

uslovna sredina od $m(\Theta)$ data istorijom X . Ostaje da se izračuna uslovno očekivanje za određenog osiguranika θ (uslovljeno sa $\Theta = \theta$) dato njegovom istorijom. Da bismo to učinili, potrebna nam je posteriorna raspodela od Θ data sa X , koja se može dobiti pokretanjem odgovarajućeg MCMC lanca. Kao što smo videli, to se može učiniti biranjem efikasne pogodne konjugovane prior raspodele za Θ .

Međutim, takav izbor priorne raspodele uglavnom zbog pogodne računice je ovde pod znakom pitanja, jer predznanje igra glavnu ulogu pri oceni na osnovu iskustva. Kao alternativu moguće je uzeti restrikciju skupa Bayes-ovih ocena na specifičnu linearnu klasu oblika:

$$\hat{m}_{lin}(X) = (1-z)a + z\bar{X}_n \quad (6.38)$$

za podatke $X = (X_1, \dots, X_n)$, gde je $\bar{X}_n$ obeležje za aritmetičku sredinu observacija. Pretpostavljamo da su godišnji zahtevi $X_1, \dots, X_n$ nezavisni, jednako distribuirani sa sredinom $m(\Theta)$ i disperzijom $s^2(\Theta)$. MSE-optimalna premija u ovoj linearnoj klasi je data sa:

$$a = E(m(\Theta)), z = \frac{\lambda n}{\lambda n + h}, \lambda = \text{Var}(m(\Theta)), h = E(s^2(\Theta)). \quad (6.39)$$

Koeficijent z zovemo **faktor kredibiliteta**. Kada broj observacija n teži ka beskonačnosti, z teži ka 1. Tako da, ako imamo mnogo informacija o pojedinom osiguraniku, naša ocena će biti skoro cela zasnovana na našoj proceni osiguranika, a ne toliko na ponašanju čitavog portfolia.

Da bismo mogli periodima da dodelimo različite težine prema obimu osiguranika p_j u periodu j , pretpostavljamo da uslovne disperzije imaju oblik $\text{Var}(X_j | \Theta) = s^2(\Theta) / p_j$. To dovodi do optimalne linearne ocene i faktora kredibiliteta oblika:

$$\hat{m}_{lin}(X) = (1 - z)E(m(\Theta)) + z \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\sum_{j=1}^n p_j} X_j, \quad (6.40)$$

$$z = \frac{\sum_{j=1}^n p_j \lambda}{\sum_{j=1}^n p_j \lambda + h}, \lambda = \text{Var}(m(\Theta)), h = E(s^2(\Theta)). \quad (6.41)$$

7. Upravljenje aktivom i obavezama i solventnost II

7.1 Solventnost II

Solventnost II je naziv za revidirani sistem upravljanja adekvatnošću kapitala koji su uspostavila regulatorna tela Evropske unije. Njime su utvrđene minimalna stopa adekvatnosti i solventnosti za osiguravajuće kompanije. Zasniva se na trostubnom sistemu, koji se primenjuje na svaku kategoriju rizika, a osmišljen je tako da odražava rizike preciznije od postojećih normi koje se odnose na kapital.

Posledice izračunavanja

Čim kapital kompanije ne ispunjava zahtev za solventnošću, nadzorni organ reaguje tako što od osiguravajuće kompanije zahteva plan sa ciljem da se zahtev za solventnošću što pre ispuni. Taj plan mora da uključuje nekoliko prekretnica i treba da bude prihvaćen od strane nadležnog organa koji može da natera osiguravajuću kompaniju da smanji rizik, da prestane da isplaćuje dividende ili da uzme kredit.

Ako kapital padne ispod nivoa minimalnog zahtevanog, tada osiguravajuća kuća mora u roku od jedne nedelje da predstavi plan restrukturiranja kojim će u roku od tri meseca da ispuni zahtev za solventnost kapitala.

Svi ovi propisi zahtevaju veliki broj izračunavanja koji se često mogu izvesti samo uz pomoć obimnih Monte Karlo simulacija. Sa teoretske tačke gledišta, mogu se smatrati kao specijalan slučaj upravljanja aktivom i obavezama.

7.2 Upravljanje aktivom i obavezama (ALM)

ALM je glavni izazov Monte Karlo simulacije u finansijama i osiguranju jer se može oslanjati na sve vrste metoda i modela koje smo predstavili do sad.

Svrha ALM-a

Svrha ALM-a je određivanje optimalne dugoročne strategije investicija za aktivu u cilju maksimiziranja bonusa za osiguranike (u slučaju životnog osiguranja) ili u cilju maksimiziranja premija (u slučaju neživotnog osiguranja). Obično razmatramo samo portfolio strategije kao što su investicije npr. 30% kapitala u akcije, 60% u obveznice i ostalih 10% u nekretnine. Da bismo ove proporcije bar približno održavali tokom vremena treba to da radimo prilično često, teoretski čak u svakom vremenskom trenutku.

Povezanost aktive i obaveza

Pošto ALM razmatra evolucije i aktive i obaveza, trebalo bi ih modelirati zajedno kada se koriste za određivanje optimalne strategije investiranja. Posebno jer evolucija obaveza takođe utiče na kapitalne rezerve osiguravajućeg društva. Isto tako obaveze se kreću paralelno sa faktorima koji utiču na aktivu (kao što su kamatna stopa, inflacija i kursevi).

Mada je veza između aktive i obaveza očigledna, strategija investiranja je još uvek često determinisana samo od strane fond menadžera osiguravajuće kompanije. Aktuari jedino zahtevaju određenu zaradu bez uzimanja u obzir odnos učinaka strategije investiranja i obaveza na opšti uspeh kompanije.

Kod penzionog osiguranja premije su često spojene sa prihodom od osiguranika. U tom slučaju, modeliramo krivu prinosa i inflaciju kao delove aktive koji upravljaju vrednošću obveznica i nekretnina i koji utiču na prihode, jer sindikati obično traže da realni prihodi rastu. Pošto su premije direktno pripojene prihodima, modeliramo vezu između aktive i obaveza.

Kod životnog osiguranja ta veza je nešto slabija, jer evolucije obveznica i obaveza direktno zavise od krive prinosa. Stoga, životno-osiguravajuće kompanije obično prate nešto konzervativnije strategije investiranja sa visokim procentom kapitala investiranog u obveznice. Vreme dospevanja tih obveznica se poklapa sa tzv. trajanjem obaveza, tj. srednje vreme jedinice premije ostaje unutar osiguravajuće kompanije. Ovakva strategija omogućava životno-osiguravajućoj kompaniji da ispuni svoje obaveze bez rizika od neispunjavanja zahteva solventnosti dok god je prinos relevantne obveznice veći od zagarantovane kamatne stope polise osiguranja. Ipak, ova strategija propada čim je kriva prinosa ispod zagarantovane kamatne stope.

Kod neživotnih-osiguravajućih društava štete su obično nezavisne od evolucije aktive, ali je njihova apsolutna visina povezana sa inflacijom, što je opet moguća veza između aktive i obaveza.

ALM studija predstavlja ogroman posao. Nije ga moguće staviti u nekoliko redova. Treba toliko toga razmotriti. Potreban je čitav, dobro organizovan, tim stručnjaka kako bi se svi detalji uklopili i onda postavio koncept simulacije.

Zaključak

Monte Karlo metode su veoma široka oblast matematike. One nam putem simulacija i korišćenjem slučajnih brojeva daju dosta dobre aproksimacije nekih, veoma teških problema. Neke veoma korisne primene koje mogu biti interesantne za nas su prikazane u naučnim radovima poput onih navedenih u literaturi pod rednim brojevima [7]-[10]. Npr, u radu [7] se govori o naprednim algoritmima za simulaciju retkih događaja, rad [8] govori o oceni obaveza kod životnog osiguranja sa sistematskim rizikom mortaliteta. Rad [9] se fokusira na raspodelu rizičnog kapitala koherentnim merama rizika, dok rad [10] predstavlja modeliranje sa MCMC u akatuarstvu.

U ovom radu data je uvodna priča o generisanju slučajnih brojeva, kao i o nekim zakonima teorije verovatnoće. Prikazan je grub Monte Karlo metod kroz jednostavne primere aproksimacije očekivanja slučajnih promenljivih, aproksimacije nekih jednostavnih integrala, do približnog izračunavanja broja π . Kasnije su uvedeni osnovni principi premije i mere rizika zajedno sa njihovim osobinama i simulacijama Monte Karlo metodom.

Takođe smo videli na koji način i gde se Monte Karlo metode koriste kada je u pitanju životno osiguranje. Definisali smo različite stope mortaliteta, klasične, ali i dinamičke modele, naveli osnovne primere polisa osiguranja i računanje njihovih premija. Napravili smo pregled algoritama koji se koriste za simuliranje cena ugovora na duži vremenski period, kao i rezervi koje su osiguravajućim kućama neophodne kako bi izmirile svoje buduće obaveze.

U slučaju kada nemamo nezavisnost slučajnih promenljivih, videli smo da kopule mogu biti od velike koristi. Definisali smo nekoliko kopula, kao što su Gauss-ova, t-kopula i druge i objasnili simuliranje slučajnih promenljivih uz pomoć istih.

Kada je u pitanju neživotno osiguranje, definisali smo Cramér-Lundberg-ov model i uz pomoć njega simulirali verovatnoću propasti. Opisali smo simuliranje trajektorija Poisson-ovog i Cox-ovog procesa i objasnili Poisson-ov proces udarnog šuma.

Ono što nas je takođe interesovalo je simuliranje retkih događaja, pa stoga i raspodele sa teškim repom. Dali smo definicije Markovog lanca zajedno sa njegovim osobinama, algoritme za njegovo simuliranje i definisali princip Bayes-ove ocene parametara. Predstavili smo i neke primere MCMC metode i Bayes-ove ocene u aktuarstvu. Na kraju smo dali kratak pregled upravljanja aktivom i obavezama i definisali pojam solventnosti II.

Implementacija koja uključuje generisanje slučajnih brojeva, pronalaženje empirijskih raspodela, crtanje grafikona i slično je izvedena u programu Mathematica 8.

Implementacija na računaru

Ocena očekivanja

```
p=RandomVariate[ExponentialDistribution[5],1000]
{0.173711,0.0646943,0.215297,0.650106,0.0517005,0.0294012,
0.0234101,0.136149,0.0227159,0.051657,0.597952,0.144915,
0.0164173,0.0773152,0.101525,0.164782,0.261179,0.170674,...}
Mean[p]
0.217589
```

```
p=RandomVariate[ExponentialDistribution[5],10000]
{0.233652,0.232393,0.0303211,0.503608,0.842909,0.133068,
0.338605,0.130289,0.0269589,0.227549,0.186945,0.0340314,...}
Mean[p]
0.199982
```

Ocena semivarijanse

```
x=RandomVariate[ExponentialDistribution[5],5000];

$$s=1/5000 * \sum_{i=1}^{5000} (\max\{0, x[i] - 0.199982\})^2$$

0.0280174
```

Ocena integrala

```
f[x_,y_]:=x^2+6*x*y+y^2
a=RandomArray[UniformDistribution[0,1],n];
b=RandomArray[UniformDistribution[0,1],n];
c=Table[f[a[[i]],b[[i]]],{i,1,n}];
integral= $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c[i]$ 
2.12722
NIntegrate[f[x,y],{x,0,1},{y,0,1}]
2.16667
```

Ocena broja Pi

```
n=1000;
Do[x[i]=Random[Real,{0,1}];y[i]=Random[Real,{0,1}],{i,1,n}]
a=ParametricPlot[{Cos[t],Sin[t]},{t,0,Pi/2},PlotStyle→
Thickness[0.01],DisplayFunction→Identity];
b=ListPlot[Table[{x[i],y[i]},{i,1,n}],DisplayFunction→
Identity];
Show[a,b,DisplayFunction→$DisplayFunction]
Do[z[i]=If[x[i]^2+y[i]^2≤1,1,0],{i,1,n}];
povoljni=Sum[z[i],{i,1,n}];
relfrek=N[povoljni/n];
aprx=N[4*relfrek]
3.132
```

Ocena kvantila

```
data=RandomVariate[NormalDistribution[0,1],100]
{1.74286,1.18419,-1.45334,0.830953,-0.968173, 1.00292,
0.251949,-2.21194,-0.58368,1.50305,-1.07154, 0.785393,...}
d=EmpiricalDistribution[data];
Quantile[d,0.95]
1.50305
Quantile[d,0.99]
1.90422
{DiscretePlot[PDF[d,x],{x,data}],DiscretePlot[CDF[d,x],
{x,-4,4,.01}]}
```

Empirijska vs stvarna raspodela

```
data=RandomVariate[NormalDistribution[0,1],1000];
d:=EmpiricalDistribution[data];
Show[Plot[CDF[NormalDistribution[0,1],x],{x,-
3,4},PlotStyle→{GrayLevel[.7],Thickness[0.005]}],
Plot[CDF[d,x],{x,-3,4},Exclusions→None,PlotStyle→Black]]
```

Literatura

- [1] Ralf Korn, Elke Korn, Gerald Kroisandt, *Monte Carlo Methods and Models in Finance and Insurance*, CHAPMAN & HALL/CRC Financial Mathematic Series, 2010.
- [2] Thomas N. Herzog, Graham Lord, *Applications of Simulation Models in Finance and Insurance*, Proceeding of the 2003 Winter Simulation Conference.
- [3] T. Herzog, G. Lord, *Applications of Monte Carlo Methods to Finance and Insurance*, Actex Publications, 2002.
- [4] Marin Bikić, Ivan Franulović, Marko Kitić, Matej Salković, *Projekt kolegija slučajni procesi u sustavima: Monte Carlo metoda i njena primjena u financijama*, Zagreb 2007.
- [5] Dr. sc. Nikola Mašić, *Životno osiguranje-Osnovni principi*, Zagreb, 2008.
- [6] Jonathan Pengelly, *Monte Carlo methods*, February, 2002.
- [7] S. Asmussen and D. P. Kroese, *Improved algorithms for rare event simulation with heavy tails*, Advances in Applied Probability, 38:545–558, 2006.
- [8] M. Dahl and T. Møller, *Valuation and hedging of life insurance liabilities with systematic mortality risk*, Insurance Mathematics & Economics, 39 (2): 193–217, 2006.
- [9] T. Fischer, *Risk capital allocation by coherent risk measures based on onesided moments*, Insurance: Mathematics and Economics, 32(1): 135–146, 2003.
- [10] D. Scollnik, *Actuarial modelling with MCMC and BUGS*, North American, Actuarial Journal, 5:96–124, 2001.
- [11] www.zivotnoosiguranje.com
- [12] www.reference.wolfram.com/mathematica/ref
- [13] www.deloitte.com
- [14] www.casact.org

Biografija



Rođena sam 17. novembra 1988. u Zrenjaninu. Završila sam osnovnu školu „Sveti Sava“ u Žitištu sa odličnim uspehom, a zatim i „Zrenjaninsku gimnaziju“ u Zrenjaninu, prirodno-matematički smer, takođe sa odličnim uspehom. Po završetku srednje škole, upisala sam Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer matematika finansija, 2007. godine. Osnovne studije sam završila 2011. godine, kada sam upisala master studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer primenjena matematika-matematika finansija. Do septembra 2012. godine položila sam sve ispite predviđene nastavnim planom i programom.

U Novom Sadu, 03.09.2012.

Dejana Vukić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije:

TD

Monografska dokumentacija

Tip zapisa:

TZ

Tekstualni štampani materijal

Vrsta rada:

VR

Master rad

Autor:

AU

Dejana Vukić

Mentor:

MN

dr Dora Seleši

Naslov rada:

NR

Monte Karlo metode u aktuarskom modeliranju

Jezik publikacije:

JP

srpski (latinica)

Jezik izvoda:

JI

s/en

Zamlja publikovanja:

ZP

R Srbija

Uže geografsko područje:

UGP

Vojvodina

Godina:

GO

2012.

Izdavač:

IZ

Autorski reprint

Mesto i adresa:

MA

Novi Sad, Trg D. Obradovića 4

Fizički opis rada: (7/86/0/2/15/0/0)
FO (broj poglavlja, strana, lit.citata, tabela, slika, grafika, priloga)

Naučna oblast
NO Matematika

Naučna disciplina:
ND Aktuarska matematika

Predmetne odrednice, ključne reči: *Monte Karlo metod, slučajni brojevi, principi premije, mere rizika, simulacija, životno i neživotno osiguranje, računanje premija, polise osiguranja, kopula, retki događaji, raspodele sa teškim repom, Markov lanac, Bayes-ova ocena, aktuarski modeli.*

PO
UDK

Čuva se:
ČU U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku

Važna napomena:
VN

Izvod: *Tema ovog rada su Monte Karlo simulacije koje uz pomoć generisanja slučajnih brojeva daju aproksimacije raznih problema u aktuarskoj matematici. Ti problemi mogu biti najprostiji, kao ocena očekivane vrednosti, do onih najkomplikovanijih kao ocena verovatnoće propasti. Dati su osnovni aktuarski pojmovi, kao što su principi premije i mere rizika kao i njihove osobine. Kroz različite algoritme prikazane su primene MK metode kako u životnom tako i u neživotnom osiguranju. U slučaju zavisnih rizika simulacije su izvođene uz pomoć kopula. Na kraju, u 6. poglavlju dati su definicije lanca Markova i Bayes-ove ocene, Markov lanac Monte Karlo metod, kao i njihove primene u aktuarskoj matematici.*

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 15.05.2012.
DP

Datum odbrane: septembar, 2012.
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik: dr Zorana Lužanin, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Sanja Rapajić, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Dora Seleši, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES & MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type:

DT

Monograph documentation

Type of record:

TR

Textual printed material

Contents code:

CC

Master thesis

Author:

AU

Dejana Vukić

Mentor:

MN

Dr Dora Seleši

Title:

TI

Monte Carlo methods in actuarial modelling

Language of text:

LT

Serbian (Latin)

Language of abstract:

LT

en/s

Country of publication:

CP

R Serbia

Locality of publication:

LP

Vojvodina

Publication year:

PY

2012

Publisher:

PU

Author's reprint

Publ. place:

PP

Novi Sad, Trd D. Obradovića 4

Physical description:

(7/86/0/2/15/0/0)

PD

Scientific field: *Mathematics*
SF

Scientific discipline: *Actuarial mathematics*
SD

Subject Key words: *Monte Carlo method, random numbers, premium principles, risk measures, simulation, life and nonlife insurance, premium calculations, copula, rare events, heavy tailed distributions, Markov chain, Bayes estimation, actuarial models.*

SKW
UC

Holding data:
HD

Note:
N

Abstract: Main subject of this paper are Monte Carlo simulations. By generating random numbers they give us approximation of some problems in actuarial mathematics. Problems could be very simple like estimating of expectation or very complicated like estimating ruin probability. There are given basic actuarial concepts like premium principles and risk measures. Applications of MC methods in life and nonlife insurance are given through different algorithms. When we have dependent risks we used copulas as appropriate method. In the end, in chapter 6. we gave definitions of Markov chain and Bayesian estimate, Markov chain Monte Carlo, as well as their applications in actuarial mathematics.

AB

Accepted on Scientific board on: *15.05.2012*
AS

Defended: *September 2012*
DE

Thesis Defend board:
DB

President: *Dr Zorana Lužanin, full profesor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Novi Sad*

Member: *Dr Sanja Rapajić, associate professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Novi Sad*

Member: *Dr Dora Seleši, assistant professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Novi Sad*