UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU

Aproksimacija verovatnoće propasti i procesi obnavljanja u teoriji rizika

- master rad -

Mentor:

Prof. dr Dora Seleši

Student:

Dara Batanski

Br. indeksa:

405M/14

Novi Sad, 2018.

Sadržaj

1.Uvod

Osiguranje je jedan od oblika upravljanja rizikom koji je usmeren na smanjenje finansijskih gubitaka. Osiguravajuća kompanija sklapa ugovor o osiguranju sa osiguranikom, pri čemu osiguranik plaća premiju osiguravajućoj kompaniji (jer osiguravajuća kompanija preuzima na sebe rizik osiguranika), zauzvrat ukoliko dođe do štete osiguravajuća kompanija u obavezi je da isplati naknadu štete osiguraniku. Na taj način se smanjuje finansijski teret osiguranika, treba napomenuti da osiguranje ne omogućava dobitak osiguraniku, već samo obezbeđuje finansijsku naknadu gubitka. U radu ćemo razmatrati stanje osiguravajuće kompanije, zanimaće nas verovatnoće kada će osiguravajuća kompanija da propadne odnosno, da dođe do bankrota a u kojim slučajevima da preživi.

U prvom delu rada obrazložićemo rizične rezerve, tj. finansijsko stanje kompanije u trenutku $t \geq 0$, koje zavisi od početnog kapitala $(u \geq 0)$, u trenutku $t = 0$ od početnih rezervi, od procesa premije kao i od nadolazećih naplata za štetu. Što se tiče premija pretpostavićemo da kompanija ima dovoljno osiguranika koji plaćaju premije, tj. da se premije plaćaju neprekidno tokom cele godine sa konstantnom stopom premije p po jedinici vremena. Takođe, da i u trenutku $t \geq 0$ kompanija dobija veću premiju nego što treba da isplati iznos šteta osiguraniku, odnosno da ima pozitivno opterećenje. Rizične rezerve možemo definisati kao početne rezerve uvećane za iznos premija koje dobijaju od osiguranika i umanjene za ukupan iznos koji osiguravajuća kompanija treba da isplati osiguraniku. Kada smo definisali rizične rezerve možemo pričati o verovatnoći propasti na kojoj se rad bazira, tj. o verovatnoći propasti na konačnom i beskonačnom intervalu. Takođe, o načinima na kojim možemo izračunati verovatnoću propasti, tj. o Lundbergovoj nejednakosti i Kramer−Lundbergovoj aproksimaciji koje zavise od koeficijenta prilagođavanja, koji ćemo takođe posmatrati u ovom delu rada. Prikazaćemo i eksplicitnu formulu za verovatnoću propasti, tj. integrodiferencijalnu jednačinu za verovatnoću propasti koja važi kad su početne rezerve nenegativne.

Kako se verovatnoća propasti za neke raspodele ne može eksplicitno izračunati preko navedenih formula, u drugom delu rada posmatraćemo različite aproksimacije verovatnoće propasti. Prvo ćemo posmatrati De Valderovu metodu kod koje ćemo aproksimirati verovatnoću propasti pri čemu iznosi šteta imaju eksponencijalnu raspodelu i potrebno je da postoje prva tri momenta raspodele. Pošto u nekim slučajevima ova metoda ne daje precizne rezultate posmatraćemo i prilagođenu De Valderovu aproksimaciju, tj. 4MGDV aproksimaciju. Kod pomenute raspodele iznosi pojedinačnih isplata šteta imaju Gama raspodelu i potrebno je da postoje prva četiri momenta procesa individualnih isplata šteta. Razmatraćemo i Bekman−Boversovu aproksimaciju, aproksimaciju gustog odnosno teškog saobraćaja gde premije samo malo prevazilazile očekivane zahteve kao i aproksimaciju lakog saobraćaja kod kojh su u proseku premije mnogo veće od očekivanih zahteva, kao i njihovu interpolaciju, tj. interpolaciju gustog i lakog saobraćaja. Obrazložićemo i aproksimaciju difuzije gde ćemo aproksimirati zahtev viška sa Braunovim kretanjem sa driftom podešavanjem prva dva momenta, međutim, kako aproksimacija difuzije nije veoma precizna bavićemo se i korigovanom difuznom aproksimacijom.

U trećem delu posvetićemo se modelu obnove koji se još naziva Sper Andresonov proces. Primenićemo gradivo iz prvog dela rada na model obnove. Najjednostavniji slučaj je Poasonov slučaj, gde broj dolazaka štete ima Poasonovu raspodelu, a raspodela vremena dolaska eksponencijalnu raspodelu. Razmatraćemo složen Poasonov model gde su zahtevi i stope premije negativni. Obrazložićemo promenu mera preko eksponencijalne porodice koja odgovara slučajnom hodu, takođe ćemo objasniti verzije Lundbergove nejednakosti i Kramer−Lundbergove aproksimacije, gde ćemo primetiti da je računanje Kramer−Lundbergove konstante C mnogo komplikovanije za slučaj obnove nego za složen Poasonov slučaj. Zatim, kada se proučavaju problemi koji se ne mogu svesti na ugrađeni slučajni hod prikazaćemo Markovo aditivno gledište. Takođe, ćemo predstaviti model obnove kod faza tipa raspodela gde su zahtevi faznog tipa, kao i model obnove u prisustvu teških repova, kod Gerber−Šiju funkcija kao i kod Zavisnog Sper Andresonovog modela.

2. Osnovne osobine teorije propasti

2.1.Poasonov proces i složen Poasonov proces

U radu posmatramo osnovne osobine Poasonovog procesa, preko $\{N_t; t \geq 0\}$ koje predstavljaju broj zahteva za odštetu, tj. N_t je broj zahteva za odštetu u vremenskom intervalu $[0, t]$.

Definicija 2.1: Proces $\{N_t; t \geq 0\}$ je Poasonov proces sa parametrom β, (β >0) ako važi:

- N_0=0
- Proces ima nezavisne prireštaje
- Broj zahteva u proizvoljnom vremenskom intervalu dužine t ima Poasonovu raspodelu sa srednjom vrednošću βt. Sledi,

  $P\{N_{t+s} - N_s = k\} = \frac{(\beta t)^k}{k!} e^{-\beta t}, \quad k = 0, 1, 2 \ldots, za\ sve\ s, t > 0.$

Iz trećeg uslova vidimo da je Poasonov proces stacionaran, odnosno da raspodela broja zahteva u nekom vremenskom intervalu zavisi samo od dužine tog intervala.

Bitna osobina Poasonovog procesa je vreme koje protekne između dva zahteva. Posmatramo Poasonov proces N_t, neka τ_1 bude vreme dok se ne podnese prvi zahtev, τ_2 vreme koje protekne između prvog i drugog zahteva, a sa τ_j vreme koje protekne između $j-1$ i j – tog zahteva. Niz $\{\tau_n\}_{n=1,2,\ldots}$ nazivamo vreme zadržavanja u datom stanju, tražimo raspodelu za τ_n. Događaj $\{\tau_1 > t\}$ će se desiti ako i samo ako se do trenutka t ne podnese nijedan zahtev za odštetu , odnosno $\tau_1 > t \iff N_t = 0$. Sledi

$$P\{\tau_1 > t\} = P\{N_t = 0\} = \frac{(\beta t)^0}{0!} e^{-\beta t} = e^{-\beta t}.$$

Kako je $P\{\tau_1 < t\} = 1 - e^{-\beta t}, t > 0$, sledi τ_1 ima eksponencijalnu raspodelu, tj. $\tau_1 : \varepsilon(\beta)$ sa očekivanom vrednošću $\frac{1}{\beta}$.

Teorema 2.1. $\tau_n, n = 1, 2, \ldots$ su nezavisne slučajne promenljive sve sa istom raspodelom $\varepsilon(\beta)$.

Definicija 2.2. Neka je proces prebrajanja zahteva $\{N_t; t \geq 0\}$, Poasonov proces sa parametrom β. Individualni gubici $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ su nezavisne slučajne promenljive sa identičnom raspodelom, nezavisne od N_t, svaka sa funkcijom raspodele B(u) i očekivanjem $\mu_B < \infty$, tj. $\mu_B = E(U), \mu_B{}^n = E(U^n)$. Odnosno, U_j je iznos j -tog gubitka. Neka je D_t ukupni gubitak na intervalu $(0, t]$. Važi da je $D_t = 0$, ako je $N_t = 0$ i $D_t = \sum_{j=1}^{N_t} U_j$, ako je $N_t > 0$. Onda, za fiksirano t, D_t je složen Poasonov proces. Kako $\{N_t; t \geq 0\}$ ima stacionarne i nezavisne prireštaje, onda i za $\{D_t; t \geq 0\}$ važi isto. Sledi,

$$E(D_t) = E(N_t)E(U_j) = \beta t \cdot \mu_B \tag{2.1}$$

Bitna osobina složenog Poasonovog procesa je da on ima stacionarne i nezavisne prireštaje. (Klugman, Panjer, Willmot, 2004.)

Stohastički proces $\{Y_t; t \geq 0\}$ ima stacionarne prireštaje ako za $0 < s < t$ raspodela za $Y_t - Y_s$ zavisi samo od $t - s$, tj. zavisi samo od dužine tog intervala.

Stohastički proces $\{Y_t; t \geq 0\}$ ima nezavisne prireštaje ako za sve $0 < s < t \leq u \leq v$, $Y_t - Y_s$ je nezavisno od $Y_v - Y_u$, tj. broj događaja koji se pojave u nekom vremenskom intervalu ne zavisi od broja događaja koji su se pojavili u nekom drugom vremenskom intervalu. (Dickson, 2006.)

2.2. Model procesa rezervi

Model opisuje stanje osiguravajuće kompanije pomoću procesa rizičnih rezervi$\{R_t ; t \geq 0\}$ pri čemu je R_t finansijsko stanje (mereno u novčanim jedinicama) kompanije u trenutku t. Zavisi od početnog kapitala $u \geq 0$ u trenutku $t = 0$, tj. početnih rezervi $R_0 = u$, procesa premija $P_t = pt$, kao i od nadolazećih naplata za štetu. Takođe, pretpostavimo da štete dolaze u nekom slučajnom vremenskom trenutku, te da su njihovi iznosi slučajni. Označimo sa $\{D_t ; t \geq 0\}$ proces ukupne štete, a sa $\{S_t ; t \geq 0\}$ proces zahteva viška. Neka je $\{N_t ; t \geq 0\}$ proces prebrajanja broja šteta, tako da za fiksno $t \geq 0$, slučajna promenljiva N_t predstavlja broj šteta koje su se dogodile do trenutka t, tj. $[0, t]$. Individualni iznosi šteta su modelirani kao niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih promenljivih $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$, tako da U_i predstavlja iznos i-te štete. (Dickson, 2006.)
Proces rizičnih rezervi $\{R_t ; t \geq 0\}$ je tada definisan sa

$$R_t = u + P_t - D_t\,,$$

pri čemu je

$$D_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i,$$

$$R_t = u + pt - \sum_{i=1}^{N_t} U_i,$$

$$S_t = u - R_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i - pt.$$

Kod procesa rizika se pretpostavlja da je proces prebrajanja broja šteta $\{N_t\,; t \geq 0\}$ Poasonov proces, onda broj šteta koji se dogodi do trenutka t tj. N_t ima Poasonovu raspodelu sa parametrom $\beta t.$ (Dickson, 2006.) Neka pored navedenih osobina $E(U) = \mu_B$, zaključujemo iz definicije 2.2. da D_t ima složenu Poasonovu raspodelu. Kada je broj šteta u intervalu $[0, t]$ jednak nuli onda je i ukupan iznos šteta do trenutka t nula, tj. kada je $N_t = 0$ tada je i $D_t = 0$.

U modelima koje posmatramo postoji konstanta ρ tako da

$$\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{N_t} U_k \xrightarrow{s.s} \rho, t \to \infty \quad (2.2)$$

tj. možemo tumačiti ρ kao prosečan iznos zahteva po jedinici vremena, odnosno

$\rho = \beta E(U) = \beta\mu_B$. Sigurnosno opterećenje η je definisano kao relativni iznos za koji stopa premije p prekorači ρ. tj.

$$\eta = \frac{p-\rho}{\rho}. \quad (2.3)$$

(Asmussen, Albrecher, 2010).

Pretpostavimo da kompanija ima dovoljno osiguranika koji plaćaju premije ili da je potrebno naplatiti veliki broj, tako da možemo pretpostaviti da se premije plaćaju neprekidno (tokom cele godine) sa konstantnom stopom p po jedinici vremena. Kompanija je tada u trenutku $t \geq 0$ dobila ukupnu premiju pt. Dalje pretpostavljamo $pt > E(D_t)$, odnosno da ukupna premija ima pozitivno opterećenje (premija koju kompanija dobija je veća od iznosa šteta koju isplaćuje). Iz (2.1) i $pt > E(\sum_{i=1}^{N_t} U_i)$ sledi $p > \beta\mu_B$. Prema tome, neka je $p = (1+\eta)\,\beta\mu_B$, gde je $\eta > 0$ faktor opterećenja premije.

Proces premije je dat sa:

$$P_t = (1+\eta)E(D_t)t = (1+\eta)\beta\mu_B t$$

Model procesa rezervi kada je stopa premije $p \neq 1$ je

$$R_t = u + (1+\eta)\beta\mu_B t - D_t ,$$

$$R_0 = u.$$

(Klugman, Panjer, Willmot, 2004.)

Model procesa rezervi kada je stopa premije $p = 1$ je

$$R_t = u + t - D_t ,$$

$$R_0 = u.$$

2.2.1. Definicije verovatnoće propasti

Verovatnoća da proces rezervi R_t bude manji od nule za neko vreme t koje je veće od nule, u zavisnosti od početnih rezervi u, predstavlja verovatnoću propasti na beskonačnom vremenskom intervalu, tj.

$$\psi(u) = P\{\exists\ t > 0 , R_t < 0 \mid R_0 = u\}.$$

Drugim rečima, verovatnoća da će ukupna šteta biti veća od zbira početnih rezervi i prihoda od premije. Verovatnoća preživljavanja na beskonačnom vremenskom intervalu je definisana na sledeći način:

$$\phi(u) = P\{\forall\ t > 0, R_t \geq 0 \mid R_0 = u\}.$$

Možemo definisati verovatnoću propasti na konačnom intervalu:

$$\psi(u,T) = P\{\exists\ t \in [0,T] , R_t < 0 \mid R_0 = u\},$$

kao i verovatnoću preživljavanja na konačnom intervalu

$$\phi(u,T) = P\{\forall\ t \in [0,T], R_t \geq 0 \mid R_0 = u\}.$$

$$\psi(u) = 1 - \phi(u).$$

(Klugman, Panjer, Willmot, 2004. ; Dickson, 2006.)

Neka je vreme propasti

$$\tau(u) = inf\{t \geq 0: R_t < 0\} = inf\{t \geq 0: S_t > u\},$$

i maksimum zahteva viška sa beskonačnim i konačnim vremenskim intervalom

$$M = \sup_{0 \leq t < \infty} S_{t,} \, M_T = \sup_{0 \leq t \leq T} S_t \, .$$

Verovatnoća propasti se može napisati:

$$\psi(u) = P(\tau(u) < \infty) = P(M > u)$$

$$\psi(u, T) = P(\tau(u) \leq T) = P(M_T > u).$$

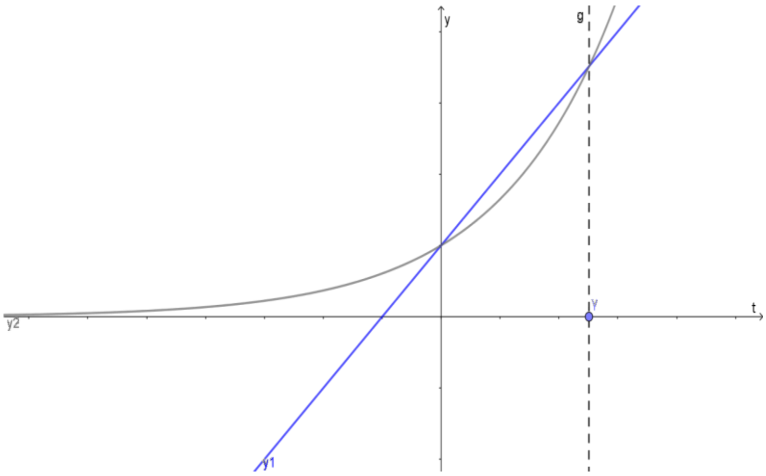
Propozicija 2.1: Pretpostavimo da važi (2.2). Ako je $\eta < 0$, onda $M = \infty$ skoro sigurno i otuda $\psi(u) = 1$, za sve u. Ako je $\eta > 0$, onda $M < \infty$ skoro sigurno i otuda $\psi(u) < 1$ za sve dovoljno velike u. (Asmussen, Albrecher, 2010.)

2.3. Koeficijent prilagođavanja

Definicija 2.3. Neka je $t = \gamma$ najmanje pozitivno rešenje jednačine:

$$\widehat{B}_U[(t)] = 1 + (1 + \eta)\mu_B t \qquad (2.4)$$

Gde je $\widehat{B}_U[(t)] = E(e^{tU})$ funkcija generatrise momenta iznosa šteta slučajne promenljive U. Ako postoji funkcija generatrise momenta, rešavanjem jednačine (2.4) dobijamo koeficijent prilagođavanja koji označavamo sa γ. (Asmussen, Albrecher, 2010.)



Grafik 2.1

Ako $\hat{B}_U[t]$ ne postoji , onda ne postoji ni koeficijent prilagođavanja γ. Možemo pokazati ako $\hat{B}_U[t]$ postoji, onda postoji i γ na sledeći način: Posmatraćemo Grafik 2.1, tj. dve krive $y_1(t) = 1 + (1+\eta)\mu_B t$ i $y_2(t) = \hat{B}_U[t] = E(e^{tU})$ u (y,t) ravni. Ako postoji $\hat{B}_U[t] = E(e^{tU})$ za sve $t \geq 0$. Diferenciranjem ove dve krive dobijamo $y_1'(t)= (1+\eta)\mu_B$, $y_2'(t)= E(Ue^{tU})$. Kako je $y_1(0) = 1$ i $y_2(0) = 1$, ove dve krive seku se u $t = 0$, dok $y_1'(0)= (1+\eta)\mu >$ $y_2'(0)= E(U) = \mu$.(Klugman, Panjer, Willmont, 2004.) Zaključujemo da kako se vrednosti za t povećavaju, tako kriva $y_2(t)$ pada ispod krive $y_1(t)$. Zanima nas da li su te dve prave jednake u nekoj tački, tj. da li se seku u nekoj tački kada je $t > 0$? Kako je $y_2'(t) > 0$ sledi da je $y_2(t)$ rastuća funkcija i $y_2''(t) > 0$ sledi $y_2(t)$ je konveksna. Dobijamo da $y_2(t)$ preseče $y_1(t)$ u tački $\gamma > 0$. Tačka u kojoj se seku je tačka γ, tj. koeficijent prilagođavanja.

Teorema 2.2: Koeficijent prilagođavanja γ postoji ako i samo ako postoji funkcija generatrise momenta $\hat{B}_U[t]$.

Postoji još jedan oblik za određivanje koeficijenta prilagođavanja

$$1 + \eta = \int_0^\infty e^{\gamma u} f_e(u) du \qquad (2.5)$$

gde je

$$f_e(u) = \frac{1 - B_U[u]}{\mu_B}, \quad u > 0$$

ekvilibrijumska funkcija gustine.(Seleši, 2016.)

Iz jednačine (2.4) sređivanjem dobijamo da je $(1+\eta) = \frac{\hat{B}_U[t]-1}{\mu_B t}$, sledi iz (2.5) da važi

$$\int_0^\infty e^{\gamma u} f_e(u)du = \frac{\hat{B}_U[t]-1}{\mu_B t}.$$

Kako je $\rho = \beta\mu_B$, dobijamo iz (2.3) da za $p = 1$ je $\rho = \frac{1}{1+\eta}$. Iz (2.4) vidimo da za

$(1+\eta)\mu_B = \frac{1}{\beta}$ dobijamo da je Lundbergova jednačina

$$\hat{B}_U[t] = 1 + \frac{t}{\beta}$$

koju ekvivalentno možemo zapisati kao

$$\beta\left(\hat{B}_U[t] - 1\right) - t = 0.$$

2.4. Lundbergova nejednakost, Kramer−Lundbergova aproksimacija i granice i aproksimacije za koeficijent prilagođavanja

2.4.1. Lundbergova nejednakost

Teorema 2.3: Neka je $\gamma > 0$ koeficijent prilagođavanja. Tada važi

$$\psi(u) \leq e^{-\gamma u}.$$

Dokaz:

Dokazujemo indukcijom. Definišemo verovatnoću propasti u periodu od n plaćanja šteta kao $\psi_n(u)$.

Dovoljno je pokazati

$$\psi_n(u) \leq e^{-\gamma u},$$

za $n = 1,2,3, \ldots$ jer je

$$\psi(u) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(u).$$

Za $n = 0$, neka je $\psi_0(u)$ verovatnoća propasti pri isplati nulte štete, odnosno nijedna šteta nije isplaćena i ne može da dođe do propasti, te je verovatnoća propasti jednaka nuli, tj.

$$\psi_0(u) = 0 \leq e^{-\gamma u}.$$

Stoga, pretpostavljamo da je za fiksirano $n \geq 1$, $\psi_n(u) \leq e^{-\gamma u}$. Zatim određujemo $\psi_{n+1}(u)$, uzimajući u obzir vreme i iznos prve štete.

Pretpostavimo da se prva šteta dogodila u vremenu t > 0 i da je iznos štete U. Ako se propast dogodila kod $n+1-$ ve štete ili pre nje, tada važi jedan od sledeća dva slučaja:

1) propast se desila u trenutku prve štete, tako da je $U > u + pt$ ili
2) propast se nije desila u trenutku prve štete, tako da je $U \leq u + pt$, propast nastaje kod nekih od sledećih n šteta.

$$\psi_{n+1}(u) = P\{U > u + pt\} + P\{U \leq u + pt\}\psi_n(u + pt - U)$$

Prvi sabirak predstavlja verovatnoću da propast nastaje pri isplati prve štete, a drugi sabirak da propast nije nastala pri isplati prve štete ali se dogodila kod nekih od sledećih n šteta. Kako se propast nije dogodila kod prve isplate, tj. preživeli smo prvu isplatu, onda su nove početne rezerve $u + pt - U$.

S obzirom da je pojava štete Poasonov proces sa parametrom β , raspodela vremena do prve štete je eksponencijalna sa parametrom β, dok je gustina za iznos štete označena sa $b(u)$. Integracijom po svim mogućim vremenima i iznosima prve štete dobijamo:

$$\psi_{n+1}(u) = \int_0^\infty \beta\, e^{-\beta t} \int_{u+pt}^\infty b(u)dudt + \int_0^\infty \beta\, e^{-\beta t} \int_0^{u+pt} b(u)\, \psi_n(u + pt - U)dudt.$$

Iz indukcijske pretpostavke $\psi_n(u) \leq e^{-\gamma u}$ sledi da je $\psi_n(u + pt - U) \leq e^{-\gamma(u+pt-U)}$

Kod prvog sabirka

$$U \geq u + pt$$

$$u + pt - U \leq 0$$

$e^{-\gamma(u+pt-U)} \geq 1$, tj. $\int_{u+pt}^\infty b(u)du \leq \int_{u+pt}^\infty b(u)\; e^{-\gamma(u+pt-U)}\, du$

$\psi_{n+1}(u) \leq$

$\int_0^\infty \beta\, e^{-\beta t} \int_{u+pt}^\infty b(u)\; e^{-\gamma(u+pt-U)}\, du\, dt + \int_0^\infty \beta\, e^{-\beta t} \int_0^{u+pt} b(u)\, e^{-\gamma(u+pt-U)} dudt$

$$\psi_{n+1}(u) \le \int_0^\infty \beta\, e^{-\beta t} \int_0^\infty b(u) e^{-\gamma(u+pt-U)}\, du dt$$

$$\le e^{-\gamma u} \int_0^\infty \beta\, e^{-(\beta+\gamma p)t} dt \int_0^\infty e^{\gamma U}\; b(u) du$$

$$\beta + \gamma p = \beta + (1+\eta)\beta\mu_B\, \gamma$$

$$= \beta(1 + (1+\eta)\mu_B\, \gamma),$$

iz (2.4) dobijamo

$$\beta + \gamma p = \beta\, \hat{B}_U[\gamma]$$

$$\psi_{n+1}(u) \le\; e^{-\gamma u} \int_0^\infty \beta e^{-\beta \hat{B}_U[\gamma] t}\; \hat{B}_U[\gamma] dt$$

Kako je $\int_0^\infty \beta e^{-\beta\, \hat{B}_U[\gamma] t}\; \hat{B}_U[\gamma] dt = 1$ dobijamo:

$$\psi_{n+1}(u) \le\; e^{-\gamma u}. \quad \blacksquare \text{ (Seleši, 2016.)}$$

Iz Teoreme možemo pokazati da je $\psi(\infty) = 0$. Kako je $\psi(\infty) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(u)$, i verovatnoća propasti je nenegativna sledi

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \psi_n(u) \le \lim_{n\to\infty} e^{-\gamma u} = 0.$$

Kako je $\phi(u) = 1 - \psi(u)$ sledi $\phi(\infty) = 1$.

2.4.2. Kramer−Lundbergova aproksimacija

Teorema 2.4: Neka $\gamma > 0$ zadovoljava (2.4). Onda je verovatnoća propasti

$$\psi(u) \sim C e^{-\gamma u}, \qquad u \to \infty$$

gde za $p \neq 1$,

$$C = \frac{\mu_B \eta}{\hat{B}_U'[\gamma] - \mu_B(1+\eta)}.$$

(Klugman, Panjer, Willmont, 2004.)

Za $p = 1$, znamo da je $\eta = \frac{1-\rho}{\rho}$ i $\mu_B(1+\eta) = \frac{1}{\beta}$ sređivanjem dobijamo

$$C = \frac{1-\rho}{\beta \hat{B}_U'[\gamma] - 1}$$

i

$$\hat{B}_U'[\gamma] = E(Ue^{\gamma U}) = \int_0^{\infty} Ue^{\gamma U} b(u)du.$$

Notacija $a(x) \sim b(x),\ x \to \infty\ znači\ \lim_{x\to\infty} \frac{a(x)}{b(x)} = 1.$

Napomena: Neka $\hat{\psi}[s] = \int_0^{\infty} e^{-su}\,\psi(u)du$ označava Laplasovu transformaciju verovatnoće propasti.

Primer 2.1: Odrediti verovatnoće propasti Kramer−Lundbergovom aproksimacijom za mešovitu eksponencijalnu raspodelu sa parametrima $\alpha = \frac{1}{190744933{,}98}$ i $\nu = \frac{1}{84535691{,}61}$, težinom $\omega = 0{,}78$ i opterećenjem $\eta = 30\%$.

Tabela 2.1 : Kramer−Lundbergova aproksimacija

u	0	10^7	10^8	10^9	10^{10}
$\psi(u)$	0.76139296	0.75172213	0.67002910	0.21205910	0.00000214

(Burnecki, Mista, 2005.)

2.4.3. Granice i aproksimacije za koeficijent prilagođavanja γ

Propozicija 2.2: Ako postoji koeficijent prilagođavanja, može biti ograničen sa

$$\gamma < \frac{2(1-\beta\mu_B)}{\beta\mu_B^{(2)}} = \frac{2\eta\mu_B}{\mu_B^{(2)}}$$

Dokaz: Iz $U \geq 0$ sledi da $\hat{B}_U[\alpha] = E(e^{\alpha U}) > 1 + \mu_B\alpha + \mu_B^{(2)}\alpha^2/2$. Otuda

$$1 = \frac{\beta(\hat{B}_U[\gamma]-1)}{\gamma} > \frac{\beta(\gamma\mu_B+\gamma^2\mu_B^{(2)}/2)}{\gamma} = \beta\mu_B + \frac{\beta\gamma\mu_B^{(2)}}{2}, \quad (2.6)$$

odakle odmah sledi rezultat. ∎

Propozicija 2.3:

Neka B bude fiksno, ali pretpostavimo da $\beta = \beta(\eta)$ varira sa sigurnim opterećenjem tako da $\beta = \frac{1}{\mu_B(1+\eta)}$. Zatim kad η↓ 0,

$$\gamma = \gamma(\eta) \sim \frac{2\eta\mu_B}{\mu_B^{(2)}}$$

Nadalje, Kramer−Lundbergova konstanta zadovoljava $C = C(\eta) \sim 1$.

Dokaz: Pošto $\psi(u) \to 1$ kada η↓ 0, sledi iz Lundbergove nejednakosti da $\gamma \to 0$. Otuda Tejlorovom ekspanzijom, nejednakost u (2.6) je takođe aproksimacija tako da

$$1 = \frac{\beta(\hat{B}_U[\gamma] - 1)}{\gamma} \approx \frac{\beta\left(\gamma\mu_B + \gamma^2 \mu_B^{(2)}/2\right)}{\gamma} = \rho + \frac{\beta\gamma\mu_B^{(2)}}{2},$$

$$\gamma \sim \frac{2(1-\rho)}{\beta\mu_B^{(2)}} = \frac{2\eta\mu_B}{\mu_B^{(2)}}.$$

Da $C \to 1$ lako sledi iz $\gamma \to 0$ i $C = E_L\left(e^{-\gamma\xi(\infty)}\right)$ (u granici $\xi(\infty)$ je raspodeljen kao prekoračenje koje odgovara $\eta = 0$). Za alternativni analitički dokaz, zabeležite da

$$C = \frac{1-\rho}{\beta\hat{B}'_U[\gamma] - 1} = \frac{\eta\mu_B}{\hat{B}'_U[\gamma] - 1/\beta}$$

$$\approx \frac{\eta\mu_B}{\mu_B + \gamma\mu_B^{(2)} - \mu_B(1+\eta)} = \frac{\eta}{\gamma\mu_B^{(2)}/\mu_B - \eta}$$

$$\approx \frac{\eta}{2\eta-\eta} = 1.$$ ■ (Asmussen, Albrecher, 2010.)

2.5. Integrodiferencijalna jednačina

Integrodiferencijalna jednačina je eksplicitna formula za verovatnoću propasti $\psi(u)$ ili verovatnoću preživljavanja $\phi(u)$. Kao i do sad sa u označavamo početne rezerve, a sa U iznos (zahteva) štete.

Definišemo verovatnoću preživljavanja $\phi(u)$ kao verovatnoću da se propast nije dogodila uz početne rezerve u, tj. $\phi(u) = 1 - \psi(u)$. Iz dokaza Lundbergove nejednakosti sledi

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}(u) &= P\{U > u + pt\} + P\{U \leq u + pt\}\psi_n(u + pt - U) \\ &= 1 - P\{U \leq u + pt\} + P\{U \leq u + pt\}\psi_n(u + pt - U) \\ &= 1 - P\{U \leq u + pt\}(1 - \psi_n(u + pt - U))\end{aligned}$$

Kako važi $\phi_m(u) = 1 - \psi_m(u),\ m = 1,2,3\,..$, sledi

$$\phi_{n+1}(u) = P(U \leq u + pt)\phi_n(u + pt - U), \qquad \forall\, n$$

Verovatnoća preživljavanja pri isplati $n+1-$ ve štete je verovatnoća da propast nije nastala pri isplati prve štete, tj. preživeli smo prvu isplatu, početne rezerve posle prve isplate su nam $u+pt-U$ i verovatnoća preživljavanja pri isplati ostalih n šteta. Kako vreme ima istu raspodelu kao i kod Lundbergove nejednakosti $T: \varepsilon(\beta)$. Važi

$$\phi(u) = \int_0^{\infty} \beta\, e^{-\beta t} \int_0^{u+pt} b(u)\, \phi(u+pt-U) du dt$$

Uvodimo smenu s = $u+pt$

$$\phi(u) = \frac{1}{p} \int_u^{\infty} \beta e^{-\beta\frac{(s-u)}{p}} \int_0^{s} b(u)\phi(s-U) du ds$$

$$\phi(u) = \frac{\beta}{p}\, e^{\frac{\beta u}{p}} \int_u^{\infty} e^{\frac{-\beta s}{p}} \int_0^{s} b(u)\phi(s-U) du ds.$$

Diferenciranjem po početnim rezervama tj. u, dobijamo integrodiferncijalnu j-nu za verovatnoću preživljavanja (2.7) iz koje se izračunavanjem dobija verovatnoća preživljavanja $\phi(u)$.

$\frac{d}{du}\, \phi(u) = \frac{\beta^2}{p^2} e^{\frac{\beta u}{p}} \int_u^{\infty} e^{\frac{-\beta s}{p}} \int_0^{s} b(u)\phi(s-U) du ds$ - $\frac{\beta}{p}\, e^{\frac{\beta u}{p}} e^{\frac{-\beta u}{p}} \int_0^{u} b(u)\, \phi(u-U) du$

= $\frac{\beta^2}{p^2} e^{\frac{\beta u}{p}} \int_u^{\infty} e^{\frac{-\beta s}{p}} \int_0^{s} b(u)\phi(s-U) du ds - \frac{\beta}{p} \int_0^{u} b(u)\, \phi(u-U) du$

$\frac{d}{du}\, \phi(u)$ = $\frac{\beta}{p}\, \phi(u) - \frac{\beta}{p} \int_0^{u} b(u)\, \phi(u-U) du.$ (2.7)

Važe početni uslovi:

Iz Lundbergove nejednakosti imamo $\lim_{u\to\infty} \phi(u) = 1$, uslov $\phi(0) = \frac{\eta}{1+\eta}$ dokazujemo kasnije.

Možemo videti da je integrodiferencijalna jednačina za verovatnoću propasti

$$\frac{d}{du}\psi(u) = \frac{\beta}{p}\, \psi(u) - \frac{\beta}{p} \int_0^{u} b(u)\, \psi(u-U) du - \frac{\beta}{p}\, \big(1 - B(u)\big). \qquad (2.8)$$

Početni uslovi su:

$\psi(0) = 1 - \phi(0),\ tj. \psi(0) = \frac{1}{1+\eta}$ kao i $\lim_{u\to\infty} \psi(u) = 0$. (Seleši, 2016.)

Pokazaćemo kako možemo izračunati verovatnoću propasti $\psi(u)$ pomoću (2.8)

Primer 2.2: Posmatraćemo situaciju kada iznos štete U: $\varepsilon(\frac{1}{\mu_B})$, tj. $B(u) = 1 - e^{-\frac{u}{\mu_B}}$,

$b(u) = \frac{1}{\mu_B} e^{-\frac{u}{\mu_B}}.$

$$\frac{d}{du}\psi(u) = \frac{\beta}{p}\ \psi(u) - \frac{\beta}{p}\int_0^u b(u)\,\psi(u-U)du - \frac{\beta}{p}\ \big(1 - B(u)\big)$$

$$= \frac{\beta}{p}\ \psi(u) - \frac{\beta}{p}\int_0^u \frac{1}{\mu_B} e^{-\frac{u}{\mu_B}}\ \psi(u-U)du - \frac{\beta}{p}(1 - 1 + e^{-\frac{u}{\mu_B}})$$

Uvodimo smenu: $y = u - U$

$$= \frac{\beta}{p}\ \psi(u) - \frac{\beta}{p\mu_B}\left(-\int_u^0 e^{-\frac{(u-y)}{\mu_B}}\ \ \psi(y)dy\right) - \frac{\beta}{p} e^{-\frac{u}{\mu_B}}$$

$\frac{d}{du}\psi(u) = \frac{\beta}{p}\ \psi(u) - \frac{\beta}{p\mu_B} e^{-\frac{u}{\mu_B}} \int_0^u e^{\frac{y}{\mu_B}}\,\psi(y)dy - \frac{\beta}{p} e^{-\frac{u}{\mu_B}}$ (2.9)

$\boldsymbol{\frac{d^2}{du^2}}\psi(u) = \frac{\beta}{p}\frac{d}{du}\psi(u) - \frac{\beta}{p\mu_B} e^{-\frac{u}{\mu_B}}\left(-\frac{1}{\mu_B}\right)\int_0^u e^{\frac{y}{\mu_B}}\,\psi(y)dy - \frac{\beta}{p\mu_B} e^{-\frac{u}{\mu_B}} e^{\frac{u}{\mu_B}}\,\psi(u) - \frac{\beta}{p} e^{-\frac{u}{\mu_B}} \left(-\frac{1}{\mu_B}\right)$

$$= \frac{\beta}{p}\frac{d}{du}\psi(u) + \frac{1}{\mu_B}\frac{\beta}{p\mu_B} e^{-\frac{u}{\mu_B}} \int_0^u e^{\frac{y}{\mu_B}}\,\psi(y)dy - \frac{\beta}{p\mu_B}\ \psi(u) + \frac{\beta}{p\mu_B}\ e^{-\frac{u}{\mu_B}}$$

Iz (2.9) sledi

$$\frac{\beta}{p\mu_B} e^{-\frac{u}{\mu_B}} \int_0^u e^{\frac{y}{\mu_B}}\,\psi(y)dy = \frac{\beta}{p}\ \psi(u) - \frac{\beta}{p} e^{-\frac{u}{\mu_B}} - \frac{d}{du}\psi(u)$$

$$= \frac{\beta}{p}\frac{d}{du}\psi(u) + \frac{\beta}{p\mu_B}\ \psi(u) - \frac{\beta}{p\mu_B} e^{-\frac{u}{\mu_B}} - \frac{1}{\mu_B}\frac{d}{du}\psi(u) - \frac{\beta}{p\mu_B}\ \psi(u) + \frac{\beta}{p\mu_B}\ e^{-\frac{u}{\mu_B}}$$

$$= \frac{\beta}{p}\frac{d}{du}\psi(u) - \frac{1}{\mu_B}\frac{d}{du}\psi(u)$$

$$\boldsymbol{\frac{d^2}{du^2}}\psi(u) = (\frac{\beta}{p} - \frac{1}{\mu_B})\frac{d}{du}\psi(u)$$

Kako je $p = \beta\mu_B(1+\eta)$

$$\boldsymbol{\frac{d^2}{du^2}}\psi(u) = -\frac{\eta}{\mu_B(1+\eta)}\ \frac{d}{du}\psi(u)$$

Ovo je obična diferencijalna jednačina drugog reda koju rešavamo

$$r^2 + \frac{\eta}{\mu_B(1+\eta)} r = 0$$

$$r\left(r+\frac{\eta}{\mu_B(1+\eta)}\right)=0$$

$$r_1=0\,,r_2=-\frac{\eta}{\mu_B(1+\eta)}$$

$$\psi(u)=c_1e^{r_1u}+c_2e^{r_2u}\ \ ,$$

Opšte rešenje diferencijalne jednačine verovatnoće propasti

$$\psi(u)=c_1+c_2e^{-\frac{\eta}{\mu_B(1+\eta)}u}$$

gde su c_1, c_2 konstante koje dobijamo iz početnih uslova

$$\psi(0)=\frac{1}{1+\eta}\,,\ \lim_{u\to\infty}\psi(u)=0$$

$$\lim_{u\to\infty}\psi(u)=\lim_{u\to\infty}c_1+c_2e^{-\frac{\eta}{\mu_B(1+\eta)}u}=c_1\,,\ \text{sledi } c_1=0$$

$$\psi(0)=c_2e^{-\frac{\eta}{\mu_B(1+\eta)}0}=c_2e^0=c_2\,,\ \text{sledi } c_2=\frac{1}{1+\eta}$$

Dobijamo verovatnoću propasti

$$\psi(u)=\frac{1}{1+\eta}e^{-\frac{\eta}{\mu_B(1+\eta)}u}.$$

Odavde možemo izraziti i verovatnoću preživljavanja $\phi(u)=1-\ \psi(u)$

$$\phi(u)=1-\frac{1}{1+\eta}e^{-\frac{\eta}{\mu_B(1+\eta)}u}.\blacksquare$$

Ostalo je još da dokažemo početni uslov koji smo koristili $\psi(0)=\frac{1}{1+\eta}$

$$\frac{d}{du}\psi(u)=\frac{\beta}{p}\ \psi(u)-\frac{\beta}{p}\int_0^u b(u)\,\psi(u-U)du-\frac{\beta}{p}\ \big(1-B(u)\big)$$

Jednačinu integralimo u granicama (0,∞), dobijamo

$$\psi(\infty)-\psi(0)=\frac{\beta}{p}\int_0^\infty\psi(u)du-\frac{\beta}{p}\int_0^\infty\int_0^u b(u)\,\psi(u-U)dudu-\frac{\beta}{p}\int_0^\infty\big(1-B(u)\big)du$$

Promenimo redosled integracije u dvostrukom integralu

$$\int_0^\infty\int_0^u b(u)\,\psi(u-U)dudu=\int_0^\infty\int_U^\infty b(u)\,\psi(u-U)dudu$$

Uvodimo smenu $y=u-U$

$= \int_0^\infty \int_0^\infty b(u)\, \psi(y) dy du = \int_0^\infty b(u) du \int_0^\infty \psi(y)\, dy = \int_0^\infty \psi(y)\, dy.$

$$-\psi(0) = \frac{\beta}{p}\int_0^\infty \psi(u)du - \frac{\beta}{p}\int_0^\infty \psi(y)\, dy - \frac{\beta}{p}\int_0^\infty \big(1 - B(u)\big)du$$

$$\psi(0) = \frac{\beta}{p}\int_0^\infty \big(1 - B(u)\big)du$$

Kako je $\int_0^\infty \big(1 - B(u)\big)du = E(U) = \mu_B$

$$\psi(0) = \frac{\beta\mu_B}{p} = \frac{1}{1+\eta}. \blacksquare$$

Samim tim pokazali smo da je $\phi(0) = 1 - \frac{1}{1+\eta} = \frac{\eta}{1+\eta}.$

Zaključujemo da su integrodiferencijalne jednačine dobre zato što važe za $u \geq 0$, dok Lundbergova nejednakost i Kramer−Lundbergova aproksimacija važe samo kad $u \to \infty$. Takođe, kod integrodiferencijalnih jednačina se ne posmatra γ pa ne moramo da razmišljamo o njegovoj egzistenciji, dok kod Lundbergove nejednakosti i Kramer−Lundbergove aproksimacije vodimo računa o egzistenciji koeficijenta prilagođavanja γ.

2.6. Maksimalni ukupni gubitak

Neka sa τ_1 , τ_2 , . . . označavamo trenutke u kojima se isplaćuje šteta. Onda je trenutak propasti $\tau(u)$ definisan sa:

$$\tau(u) = \ inf\{t \geq 0 :\ R_t < 0\} \quad (2.10)$$

gde je (2.10) prvi trenutak kada dolazi do propasti.

Sledi,

$\tau(u) < \infty$, došlo je do propasti

$\tau(u) = \infty$, nije došlo do propasti.

Verovatnoću propasti i preživljavanja možemo napisati na sledeći način

$$\psi(u) = P\{\tau(u) < \infty \mid R_0 = u \}$$

$$\phi(u) = P\{\tau(u) = \infty \mid R_0 = u\}$$

Zanima nas koliki je deficit u trenutku propasti.

Neka je verovatnoća da je došlo do propasti i da je maksimalni deficit najviše y novčanih jedinica:

$$G(u,y) = P\{\tau(u) < \infty \ i \ R_{\tau(u)} \in [-y,0]\}, u,y \geq 0$$

Sledi,

$$\lim_{y\to\infty} G(u,y) = P\{\tau(u) < \infty\} = \psi(u), \qquad u \geq 0$$

Teorema 2.5: Funkcija $G(u,y)$ zadovoljava integrodiferencijalnu jednačinu

$$\frac{d}{du} G(u,y) = \frac{\beta}{p} G(u,y) - \frac{\beta}{p}\int_0^u G(u-U,y)\, b(u)du - \frac{\beta}{p}(B(u+y) - B(u)) \ ,\forall\, u,y \geq 0$$

(Seleši 2016. ; Asmussen, Albrecher 2010.)

Dokaz:

Slično kao u dokazu Teoreme 2.3. Posmatramo šta se dešava sa prvim zahtevom. Može da se dogodi:

1) propast se dogodila u trenutku prve štete tako da je $U > u + pt$, ali gubitak može biti najviše y, što znači da je $U \leq u + pt + y$, u suprotnom kada je $U \geq u + pt + y$ gubitak će biti veći od y.

2) propast se nije dogodila u trenutku prve štete, tako da je $U \leq u + pt$, propast sa gubitkom najviše y nastaje kod nekih od sledećih n šteta.

$$G(u,y) = P\{u + pt < U \leq u + pt + y\} + P\{U \leq u + pt\}G(u + pt - U, y)$$

$$= \int_0^\infty \beta\, e^{-\beta t} \left(B(u + pt + y) - B(u + pt)\right) dt +$$

$$+ \int_0^\infty \beta\, e^{-\beta t} \int_0^{u+pt} b(u)\; G(u + pt - U, y) du dt$$

Uvodimo smenu

$$s = u + pt$$

$$= \int_u^{\infty} \beta\, e^{-\beta\left(\frac{s-u}{p}\right)}(B(s+y)-B(s))\,\frac{ds}{p} + \int_u^{\infty} \beta\, e^{-\beta\left(\frac{s-u}{p}\right)} \int_0^s b(u)G(s-U,y)du\,\frac{ds}{p}$$

$$G(u,y) = \frac{\beta}{p} e^{\frac{\beta u}{p}} \int_u^{\infty} e^{-\frac{\beta s}{p}} (\int_0^s b(u)G(s-U,y)du + (B(s+y)-B(s)))\,ds \qquad (2.11)$$

Diferenciranjem dobijamo

$$\frac{d}{du}G(u,y) = \frac{\beta}{p} e^{\frac{\beta u}{p}} \frac{\beta}{p} \int_u^{\infty} e^{-\frac{\beta s}{p}} \left(\int_0^s b(u)G(s-U,y)du + B(s+y)-B(s)\right) ds - \frac{\beta}{p} e^{\frac{\beta u}{p}} e^{-\frac{\beta u}{p}} \left(\int_0^u b(u)G(u-U,y)\,du + B(u+y)-B(u)\right)$$

Iz (2.11) vidimo

$$\frac{\beta}{p} \int_u^{\infty} e^{-\frac{\beta s}{p}} \left(\int_0^s b(u)G(s-U,y)du + B(s+y)-B(s)\right) ds = G(u,y) e^{\frac{-\beta u}{p}}$$

$$\frac{d}{du}G(u,y) = \frac{\beta}{p} e^{\frac{\beta u}{p}}\, G(u,y) e^{\frac{-\beta u}{p}} - \frac{\beta}{p}\left(\int_0^u b(u)G(u-U,y)\,du + B(u+y)-B(u)\right)$$

$$\frac{d}{du}G(u,y) = \frac{\beta}{p}\, G(u,y) - \frac{\beta}{p}\int_0^u b(u)G(u-U,y)\,du - \frac{\beta}{p}(B(u+y)-B(u)).\blacksquare$$

Teorema 2.6: Funkcija $G(0,y)$ je data sa

$$G(0,y) = \frac{\beta}{p}\int_0^y \left(1-B(u)\right)du, \;\; y \geq 0$$

Nećemo dokazivati.

Posmatraćemo sada koliko smo puta pali ispod određenog nivoa. Verovatnoća da će rizične rezerve pasti ispod početnog nivoa u je jednaka verovatnoći propasti sa početnim rezervama nula tj. $\psi(0)$. Imamo nove početne rezerve, verovatnoća pada ispod novih početnih rezervi je takođe $\psi(0)$, $itd.$ Zaključujemo, kako proces rizičnih rezervi ima stacionarne i nezavisne prireštaje, verovatnoća pada ispod početnih rezervi će uvek iznositi $\psi(0)$.

Slučajna promenljiva Y predstavlja iznos padova ispod početnog nivoa u, zaključujemo da kada postoje padovi ispod početnog nivoa, Y ima ekvilibrijumsku funkciju gustine.

Teorema 2.7: Ako postoji pad ispod početnog nivoa u, tada slučajna promenljiva Y koja predstavlja iznos ovog početnog pada ima funkciju gustine

$$b_e(y) = \frac{1 - B_U(y)}{\mu_B}.$$

Dokaz:

Pošto proces rizičnih rezervi ima stacionarne i nezavisne prireštaje, funkcija $G(0, y)$ takođe predstavlja verovatnoću da rizične rezerve padnu ispod svog početnog nivoa, i da je iznos tog pada najviše y. Stoga, ako iskoristimo Teoremu 2.6, Y ima funkciju raspodele

$$P\{Y \leq y\} = \frac{G(0,y)}{\psi(0)} = \frac{\beta}{p\psi(0)} \int_0^y \big(1 - B(u)\big) du = \frac{1}{\mu_B} \int_0^y \big(1 - B(u)\big) du$$

Diferenciranjem, dobijamo

$$b_e(y) = \frac{1}{\mu_B}(1 - B(y)). \qquad \blacksquare$$

Ako je pad jednak sa y, rizične rezerve će odmah posle pada biti $u - y$ i kako proces rizičnih rezervi ima stacionarne i nezavisne prireštaje, propast će se dogoditi posle toga sa verovatnoćom $\psi(u - y)$, pod uslovom da je nenegativno $u - y$, inače se propast već dogodila.Verovatnoća drugog pada je $\psi(0)$. Drugi pad ima istu gustinu kao prvi, tj. $b_e(y)$ nezavisan je od prvog pada. Zbog osobine Poasonovog procesa posle svakog pada proces ″počinje iznova″. Prema tome, ukupan broj padova K ima geometrijsku raspodelu. Odnosno,

$$P\{K = 0\} = \phi(0) = 1 - \psi(0) = \frac{\eta}{1 + \eta}$$

$P\{K = 1\} = \psi(0)(1 - \psi(0))$, vidimo da

$$P\{K = k\} = \psi(0)^k \big(1 - \psi(0)\big) = (\frac{1}{1 + \eta})^k \frac{\eta}{1 + \eta}, \quad k = 0, 1, 2. ..$$

Dobijamo geometrijsku raspodelu sa parametrom $\frac{1}{\eta}$.

Označimo sa L maksimalni ukupni gubitak, tj. L je zbir svih iznosa padova.

Kako rizične rezerve počinju odmah posle pada ponovo da rastu, najniži nivo viška je $u - L$.

Ako označimo sa Y_i iznos isplate za koliko samo pali ispod početnog nivoa pri isplati i-tog zahteva, kako proces rizičnih rezervi ima stacionarne i nezavisne prireštaje, važi da je $\{Y_1, Y_2, \dots\}$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih sve sa istom raspodelom (svaka sa gustinom $b_e(y)$). Sledi

$$L = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots + Y_K\ ,$$

gde je $L = 0$, ako je $K = 0$. Maksimalan ukupan gubitak L ima složenu geometrijsku raspodelu gde je primarna raspodela geometrijska, a sekundarna raspodela je data sa gustinom $b_e(y)$.

Verovatnoća preživljavanja je verovatnoća da ukupni gubitak bude manji ili jednak početnim rezervama

$$\phi(u) = P\{L \leq u\} = B_L(u),$$

(Klugman, Panjer, Willmot, 2004.)

dok verovatnoću propasti možemo dobiti

$$\psi(u) = 1 - \phi(u).$$

U daljem nastavku rada pretpostavljamo da je stopa premije $p = 1$.

3. Različite aproksimacije verovatnoće propasti

3.1. De Valderova metoda

Pretpostavljamo da je dat proces rizika $\{R_t, t > 0\}$ sa raspodelom B i stopom premije p=1, za koji hoćemo da odredimo verovatnoću propasti. Ideja je da aproksimiramo verovatnoću propasti jednim različitim procesom sa eksponencijalnim zahtevom sa parametrom $\tilde{\delta}$, tj. $\widetilde{U}: \varepsilon(\tilde{\delta}\,)$, brojem dolazaka intenziteta $\widetilde{\beta}$, tj. $\widetilde{N_t}: \mathcal{P}(\widetilde{\beta})$ i stopom premije $\tilde{p}$. Iz primera 2.2 kod integrodiferencijalnih jednačina gde smo imali iznos zahteva sa eksponencijalnom raspodelom sa parametrom $\frac{1}{\mu_B}$ dobili smo verovatnoću propasti $\psi(u) = \frac{1}{1+\eta} e^{-\frac{\eta}{\mu_B(1+\eta)}u}$. Kako je za proces rizika koji aproksimiramo raspodela individualnih iznosa zahteva eksponencijalna sa parametrom $\tilde{\delta}$, tj. $E(\widetilde{U}) = \frac{1}{\tilde{\delta}}, \tilde{\eta} = \frac{\tilde{p}-\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}}$, $\tilde{\rho} = \frac{\widetilde{\beta}}{\tilde{\delta}}$ (Rajter-Ćirić, 2009.) iz integrodiferencijalne j-ne dobili smo verovatnoću propasti za proces rizika $\{\tilde{R}_t, t > 0\}$

$$\psi(u) = \frac{\widetilde{\beta}}{\tilde{\delta}\tilde{p}} e^{-(\tilde{\delta} - \frac{\widetilde{\beta}}{\tilde{p}})u}.$$

Ovo je De Valderova aproksimacija verovatnoće propasti za dati proces rizika $\{R_t, t > 0\}$. Za De Valderovu aproksimaciju je potrebno da postoje prva tri momenta raspodele. Parametri

$\tilde{\beta}, \tilde{p}, \tilde{\delta}$ su izabrani tako da momenti procesa $\{R_t, t > 0\}$ i$\{\tilde{R}_t, t > 0\}$ budu jednaki. Prvo izjednačimo prve momente

$$E(R_t) = E(\widetilde{R_t})$$

$$E(R_t) = E\left(u + pt - \sum_{i=1}^{N_t} U_i\right) = u + pt - E(N_t)E(U)$$

$$= u + pt - \beta t \mu_B$$

$$E(\widetilde{R_t}) = u + \tilde{p}t - \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\delta}}t$$

$$u + pt - \beta t \mu_B = u + \tilde{p}t - \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\delta}}t$$

$$\tilde{p} = p - \beta \mu_B + \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\delta}},$$

Na početku smo pretpostavili da je $p = 1$, znamo da je $\rho = \beta \mu_B$, sledi

$$\tilde{p} = \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\delta}} - \rho + 1 \qquad (3.1)$$

Zatim izjednačimo centralne momente drugog reda, tj. disperzije

$$E[(R_t - E(R_t))^2] = E\left[(\widetilde{R_t} - E(\widetilde{R_t}))^2\right]$$

$$R_t - E(R_t) = -\sum_{i=1}^{N_t} U_i + \rho t.$$

Neka je $D_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i$, izjednačimo druge momente

$$E(D_t^2) = \beta t \mu_B^{(2)}, \; E(\widetilde{U^2}) = \int_0^\infty \widetilde{U^2} \; \tilde{\delta} e^{-u\tilde{\delta}} \, d\tilde{u} = \frac{2}{\tilde{\delta}^2}$$

$$E\left(\widetilde{D_t^2}\right) = \tilde{\beta}\, t\, \frac{2}{\widetilde{\delta^2}}$$

$$\beta t \mu_B^{(2)} = \tilde{\beta}\, t\, \frac{2}{\widetilde{\delta^2}}$$

$$\frac{2\tilde{\beta}}{\tilde{\delta}^2} = \beta \mu_B^{(2)} \qquad \text{tj. dobijamo} \qquad \tilde{\beta} = \frac{\tilde{\delta}^2}{2} \beta \mu_B^{(2)} \qquad (3.2)$$

$$\mathrm{E}(\widetilde{\mathrm{D}}_\mathrm{t}^3) = \mathrm{E}(\widetilde{\mathrm{N}_\mathrm{t}})\mathrm{E}(\widetilde{\mathrm{U}^3}) = \frac{6t\,\tilde{\beta}}{\tilde{\delta}^3}$$

$\beta t \mu_B^{(3)} = \frac{6t\,\tilde{\beta}}{\tilde{\delta}^3}$, podelimo sa t dobijamo

$\beta \mu_B^{(3)} = \frac{6\,\tilde{\beta}}{\tilde{\delta}^3}$ (3.3)

Zamenimo $\tilde{\beta}$ koje smo dobili u (3.2) u jednačini (3.3), sledi

$$\beta\mu_B^{(3)} = \frac{3\beta\mu_B^{(2)}}{\tilde{\delta}}$$

$\tilde{\delta} = \frac{3\mu_B^{(2)}}{\mu_B^{(3)}}$, odavde dobijamo da je $\widetilde{\beta} = \frac{9{\mu_B^{(2)}}^3}{2{\mu_B^{(3)}}^2}\,\beta,\quad \widetilde{p} = \frac{3\beta{\mu_B^{(2)}}^2}{2\mu_B^{(3)}} - \rho + 1$.

Kada postoji koeficijent prilagođavanja procesa rizika koji aproksimiramo, aproksimacija daje dobre rezultate kada je verovatnoća propasti mala, npr. manja od 5%, međutim metoda nije precizna kada ne postoji koeficijent prilagođavanja. Takođe, aproksimacija nije dobra za male vrednosti od u, npr. kada je u = 0, jer je za male vrednosti početnih rezervi verovatnoća propasti velika. (Asmussen, Albrecher, 2010. ; Dickson, 2006.)

Primer 3.1: Posmatramo klasični proces rizika sa individualnim iznosima šteta U_i čija je gustina $b(u) = \frac{1}{2}(2\,e^{-2u} + \frac{2}{3}e^{-\frac{2u}{3}})$ za $u > 0$. Pretpostavimo da je $\beta = 1$ i $p = 1.1\,\beta$. Izračunaćemo De Valderovu aproksimaciju za $u = 10,\ 20\,, 30,\ 40,\ 50$?

Rešavamo:

Izračunavamo momente individualnih iznosa šteta. Neka je Y_1 slučajna promenljiva sa funkcijom gustine $y_1 = 2e^{-2u},\ i\ Y_2$ slučajna promenljiva sa funkcijom gustine $y_2 = \frac{2}{3}e^{-\frac{2u}{3}}$ tada zbog linearnosti matematičkog očekivanja važi

$$E(U) = \frac{1}{2}\big(E(Y_1) + E(\ Y_2)\big) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = 1$$

$$\mu_B = 1$$

$$E(U^k) = \int_0^\infty u^k \frac{1}{2}(2\,e^{-2u} + \frac{2}{3}e^{-\frac{2u}{3}})du$$

$$E(U^k) = \frac{1}{2}\int_0^\infty u^k (2\,e^{-2u} + \frac{2}{3}e^{-\frac{2u}{3}})du$$

$$E(U^k) = \tfrac{1}{2}(E\big(Y_1^k\big) + E\big(Y_2^k\big)).$$

$$\mu_B^2 = E(U^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{9}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

$$\mu_B^3 = E(U^3) = \frac{21}{2}$$

Kako važi pretpostavka $\beta = 1$ i $p = 1.1\,\beta$, dobijamo sledeće:

$\tilde{\delta} = \frac{3(\frac{5}{2})}{\frac{21}{2}} = \frac{5}{7}$, $\tilde{\beta} = \frac{9(\frac{5}{2})^3}{2(\frac{21}{2})^2}\ \beta = \frac{125}{196}\ \beta = \frac{125}{196}$, $\tilde{p} = p - \ \beta\mu_B + \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\delta}} = 1.1 - 1 + \frac{25}{28} = 0.1 + \frac{25}{28}$

Iz

$$\psi(u) = \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\delta}\tilde{p}} e^{-(\tilde{\delta} - \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{p}})u}$$

$$\psi(0) = \frac{\frac{125}{196}}{\frac{5}{7}\ (0.1 + \frac{25}{28})} 1 = 0{,}8994$$

$$\psi(10) = \frac{\frac{125}{196}}{\frac{5}{7}\left(0.1 + \frac{25}{28}\right)}\ e^{-\left(\frac{5}{7} - \frac{\frac{125}{196}}{\left(0.1 + \frac{25}{28}\right)}\right)10} = 0.4380$$

$$\psi(20) = \ 0.2133$$

$$\psi(30) = 0.1039$$

$$\psi(40) = 0.0506$$

$$\psi(50) = \ 0.0246.$$

Da bismo mogli da uporedimo koliko je dobra ova aproksimacija potrebna nam je eksplicitna formula za verovatnoću propasti. Možemo je dobiti korišćenjem inverzne Laplasove transformacije

$$\psi(u) = \frac{1}{(1+\eta)(r_2 - r_1)}\{(\rho - r_1) \cdot e^{-r_1 u} + (r_2 - \rho) \cdot e^{-r_2 u}\}$$

$$r_1 = \frac{\rho + \eta(\alpha+\nu) - \left[\{\rho + \eta(\alpha+\nu)\}^2 - 4\alpha\nu\eta(1+\eta)\right]^{1/2}}{2(1+\eta)};$$

$$r_2 = \frac{\rho + \eta(\alpha+\nu) + \left[\{\rho + \eta(\alpha+\nu)\}^2 - 4\alpha\nu\eta(1+\eta)\right]^{1/2}}{2(1+\eta)};$$

$$p = \frac{\omega\alpha^{-1}}{\omega\alpha^{-1} + (1-\omega)\nu^{-1}}, \ \rho = \alpha(1-p) + \nu p.$$

(Panjer, Willmot, 1992.)

Iz gornjeg primera vidimo da imamo mešovitu eksponencijalnu raspodelu sa parametrima $\alpha = 2$ i $\nu = \frac{2}{3}$, težinom $\omega = \frac{1}{2}$ i $\eta = 0{,}1$. Rešavanjem dobijamo

$$p = \frac{1}{4} = 0{,}25,$$

$$\rho = \frac{5}{3} = 1{,}666667,$$

$$r_1 = 0{,}071906,$$

$$r_2 = 1{,}685668,$$

i verovatnoća propasti sa početnim rezervama iznosi

$$\psi(u) = \frac{1}{1{,}7751382} \cdot (1{,}5947607 \cdot e^{-0{,}071906 \cdot u} + 0{,}019001 \cdot e^{-1{,}685668 \cdot u}).$$

Tačne vrednosti v-će propasti

u	0	10	20	30	40	50
$\psi(u)$	0,9091	0,4377	0, 2139	0,1039	0,0506	0,02466

De Valderova aproksimacija

u	0	10	20	30	40	50
$\psi(u)$	0,8994	0.4380	0.2133	0.1039	0.0506	0.0246

Možemo primetiti da De Valderova aproksimacija daje dobre rezultate za mešovitu eksponencijalnu raspodelu, što su nam početne rezerve veće De Valderova aproksimacija daje sve približnije rezultate.

3.2. 4MGDV aproksimacija

Kako De Valderova aproksimacija u nekim slučajevima ne daje precizne rezultate, Burnecki, Mista i Veron su predložili novu aproksimaciju 4MGDV (4-moment gamma De Vylder) koja je zapravo prilagođena De Valderova aproksimacija. Kod ove aproksimacije se zahteva da postoje prva četiri momenta procesa individualnih isplata šteta, pa se pretpostavlja da je raspodela individualnih isplata šteta gama. Proces rizika sa gama individualnim štetama je

određen sa četiri parametra $(\widetilde{\beta}, \widetilde{\eta}, \tilde{\mu}, \tilde{\mu}^{(2)})$, gde je $\widetilde{\beta}$ parametar Poasonovog procesa, a $\tilde{\mu}$ i $\tilde{\mu}^{(2)}$ momenti procesa koji aproksimiramo. Koeficijente dobijamo izjednačavanjem momenata odgovarajućeg procesa gubitka $L_t = D_t - pt$ (ukupan gubitak u trenutku t je razlika isplaćenog iznosa i uplaćenog iznosa), pri čemu ćemo koristiti $m_i = E(U^i)$, p stopa premije.
Može se pokazati da je

$$\hat{B}_{D_t}[u] = e^{\beta t(\hat{B}_{U_1}[u]-1)},$$

$$E(D_t^r) = \frac{d^r}{du^r}\hat{B}_{D_t}[u]\Big|_{u=0},$$

$$E(D_t) = \frac{d}{du}\hat{B}_{D_t}[u]\Big|_{u=0} = e^{\beta t(\hat{B}_{U_1}[u]-1)}\beta t\hat{B}'_{U_1}[u] = \beta t\,\hat{B}'_{U_1}[u]\hat{B}_{D_t}[u]\Big|_{u=0} = \beta t m_1$$

Jer je $\hat{B}_{U_1}[0] = E(e^{U_1 0}) = 1$, $pa\ \hat{B}_{D_t}[u]\Big|_{u=0} = e^{\beta t(1-1)} = 1$, $\hat{B}'_{U_1}[u] = E(U_1 e^{U_1 u})$ pa je

$$\hat{B}'_{U_1}[u]\Big|_{u=0} = E(U_1) = m_1$$

Kako je $p = \beta(1+\eta)\, m_1$ važi

$$\mu_1 = E(D_t - pt) = \beta t m_1 - \beta(1+\eta)m_1 t = -\eta\beta m_1 t.$$

Dalje $E(L_t^2) = E(D_t^2) - 2\,E(D_t)pt + (pt)^2$

$$E\left(D_t{}^2\right) = \frac{d}{du}\left(\beta t\,\hat{B}'_{U_1}[u]\hat{B}_{D_t}[u]\Big|_{u=0}\right) = \beta t(\hat{B}''_{U_1}[u]\hat{B}_{D_t}[u] + \hat{B}'_{U_1}[u]\hat{B}'_{D_t}[u])$$

Kako je $\hat{B}''_{U_1}[0] = E(U_1^2) = m_2$ i $\hat{B}'_{D_t}[u]\Big|_{u=0} = \beta t m_1$ sledi

$$E\left(D_t{}^2\right) = \beta t(m_2 + m_1\beta t m_1) = \beta t m_2 + (\beta t m_1)^2$$

Uz $p = \beta(1+\eta)\, m_1$ dobijamo:

$$\mu_2 = E(L_t^2) = \beta t m_2 + (\beta t m_1)^2 - 2\,\beta t m_1 p t + (pt)^2$$

$$\mu_2 = \beta t m_2 + (\eta t\beta m_1)^2$$

Analogno dalje sledi

$\mu_3 = E(L_t^3) = \beta m_3 t - 3(\beta m_2 t)(\eta\beta m_1 t) - (\eta\beta m_1 t)^2$ i

$$\mu_4 = E(L_t^4) = \beta m_4 t - 4(\beta m_3 t)(\eta\beta m_1 t) + 3(\beta m_2 t)^2 + 6(\beta m_2 t)(\eta\beta m_1 t)^2 + (\eta\beta m_1 t)^4$$

Izjednačavanje odgovarajućih momenta procesa gubitka je ekvivalentno izjednačavanju odgovarajućih momenata procesa ukupnih šteta. Za gama raspodelu važi da se treći i četvrti momenti mogu izraziti pomoću prethodnih na sledeći način:

$\widetilde{\mu_3} = \frac{\widetilde{\mu_2}}{\widetilde{\mu^2}}(2\widetilde{\mu_2} - \tilde{\mu})$ i $\widetilde{\mu_4} = \frac{\widetilde{\mu_2}}{\widetilde{\mu^2}}(2\widetilde{\mu_2} - \widetilde{\mu^2})(3\widetilde{\mu_2} - 2\widetilde{\mu^2})$.

Dakle, parametri $(\tilde{\beta}, \tilde{\eta}, \tilde{\mu},\ \tilde{\mu}_2)$ moraju zadovoljiti sledeće j-ne

$$\eta\beta\mu = \tilde{\eta}\tilde{\beta}\tilde{\mu}$$

$$\beta\mu_2 = \tilde{\beta}\widetilde{\mu_2}$$

$$\beta\mu_3 = \tilde{\beta}\frac{\widetilde{\mu_2}}{\widetilde{\mu^2}}(2\widetilde{\mu_2} - \tilde{\mu})$$

$$\beta\mu_4 = \tilde{\beta}\frac{\widetilde{\mu_2}}{\widetilde{\mu^2}}(2\widetilde{\mu_2} - \widetilde{\mu^2})(3\widetilde{\mu_2} - 2\widetilde{\mu^2}).$$

Rešavanje ovog sistema jednačina dobijamo parametre

$$\tilde{\beta} = \frac{\beta(\mu_3)^2(\mu_2)^3}{(\mu_2\mu_4 - 2(\mu_3)^2)(2\mu_2\mu_4 - 3(\mu_3)^2)}$$

$$\tilde{\eta} = \frac{\eta\mu(2(\mu_3)^2 - \mu_2\mu_4)}{(\mu_2)^2\mu_3}$$

$$\tilde{\mu} = \frac{3(\mu_3)^2 - 2\mu_2\mu_4}{\mu_2\mu_3}$$

$$\tilde{\mu}_2 = \frac{(\mu_2\mu_4 - 2(\mu_3)^2)(2\mu_2\mu_4 - 3(\mu_3)^2)}{(\mu_2\mu_3)^2}$$

Pretpostavljamo $\mu_2\mu_4 \leq \frac{3}{2}(\mu_3)^2$ da bismo osigurali da je $\tilde{\mu},\ \tilde{\mu}_2 \geq 0$ i $\tilde{\mu}_2 \geq \tilde{\mu}^2$. U slučaju da pretpostavka nije ispunjena, stavljamo $\tilde{\mu} = \mu$ i ne računamo četvrti momenat. Ovo dovodi do

$$\tilde{\beta} = \frac{2\beta\mu_2^2}{\mu(\mu_3 + \mu_2\mu)},$$

$$\tilde{\eta} = \frac{\eta\mu(\mu_3 + \mu_2\mu)}{2\mu_2^2},$$

$$\tilde{\mu} = \mu,$$

$$\tilde{\mu}_2 = \frac{\mu(\mu_3 + \mu_2\mu)}{2\mu_2}.$$

Dobijamo aproksimaciju

$$\psi_{4MGDV}(u) = \frac{\tilde{\eta}(1 - \frac{\gamma}{\tilde{\alpha}})e^{-\frac{\tilde{\delta}\gamma\, u}{\tilde{\alpha}}}}{1 + (1 + \tilde{\eta})\gamma - (1 + \tilde{\eta})(1 - \frac{\gamma}{\tilde{\alpha}})} + \frac{\tilde{\alpha}\tilde{\eta}\sin(\tilde{\alpha}\pi)}{\pi} I$$

Gde je

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{\tilde{\alpha}}e^{-u(x+1)\tilde{\delta}}}{\left[x^{\tilde{\alpha}}\big(1 + \tilde{\alpha}(1 + \tilde{\eta})(x + 1)\big) - \cos(\tilde{\alpha}\pi)\right]^2 + (\sin(\tilde{\alpha}\pi))^2}\, dx$$

Uz $\tilde{\alpha} = \frac{\tilde{\mu}^2}{\tilde{\mu}_2 - \tilde{\mu}^2}, \tilde{\delta} = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_2 - \tilde{\mu}^2}$.

(Burnecki, Mišta, 2005).

Kada individualni iznosi šteta (zahteva) imaju eksponencijalnu ili gama raspodelu, ova aproksimacija daje tačne rezultate. U slučaju kada individualni iznosi šteta imaju mešovitu eksponencijalnu raspodelu, može se pokazati da 4MGDV daje bolje rezultate od De Valderove aproksimacije.

Primer 3.2: Izračunati verovatnoću propasti za mešovitu eksponencijalnu raspodelu sa parametrima $\alpha = \frac{1}{190744933{,}98}$ i $\nu = \frac{1}{84535691{,}61}$, težinom $\omega = 0{,}78$ i opterećenjem $\eta = 30$ %.

Prvo računamo eksplicitnu formulu za verovatnoću propasti kao i u Primeru 3.1. Dobijamo:

$$p = 0{,}888887714\,;$$

$$\rho = 1{,}109745749 \cdot 10^{-8}\,;$$

$$r_1 = 1{,}2780214 \cdot 10^{-9}\,;$$

$$r_2 = 1{,}119815963 \cdot 10^{-8}.$$

Kada zamenimo dobijene podatke u

$$\psi(u) = \frac{1}{(1+\eta)(r_2 - r_1)}\{(\rho - r_1) \cdot e^{-r_1 u} + (r_2 - \rho) \cdot e^{-r_2 u}\}$$

Dobijamo eksplicitnu verovatnoću propasti

$$\psi(u) = \frac{1}{1{,}28961797 \cdot 10^{-8}}\left(9{,}81943609 \cdot 10^{-9} \cdot e^{-1{,}2780214 \cdot 10^{-9} u} + 1{,}0070214 \cdot 10^{-10} \cdot e^{-1{,}119815963 \cdot 10^{-8} u}\right).$$

Tabela 3.1: Tabela tačnih vrednosti verovatnoće propasti.

u	0	10^7	10^8	10^9	10^{10}
$\psi(u)$	0.76923077	0.75872977	0.67258748	0.21205921	0.00000214

Tabela 3.2: Tabela aproksimiranih vrednosti verovatnoće propasti dobijenih De Valderovom aproksimacijom.

u	0	10^7	10^8	10^9	10^{10}
$\psi(u)$	0.76308137	0.75337907	0.67142556	0.21224673	0.00000211

Tabela 3.3: Tabela aproksimiranih vrednosti verovatnoće propasti dobijenih 4MGDV aproksimacijom.

u	0	10^7	10^8	10^9	10^{10}
$\psi(u)$	0.76746161	0.75702255	0.67221498	0.21209805	0.00000213

(Tabele preuzete iz: K. Burnecki P. Místa. Ruin probabilities in infinite time. Hugo Steinhaus Center, Wroclaw University of Technology-Poland, 2005. Burnecki and Mišta).

Kada imamo mešovitu eksponencijalnu raspodelu upoređivanjem aproksimacija sa tačnim vrednostima verovatnoće propasti dobijamo da De Valderova aproksimacija daje dobre rezultate, ali 4MGDV aproksimacija daje bolje rezultate od De Valderove aproksimacije.

3.3. Bekman−Boversova aproksimacija (Bekkman−Bowers approximation)

Ideja ove aproksimacije je da se napiše verovatnoća propasti $\psi(u)$ kao $P(M > u)$. Pogodna je gama raspodela sa parametrima λ,δ za raspodelu od M, koje treba da odredimo tako što uklapamo prva dva momenta i koristimo aproksimaciju nekompletne gama funkcije.

$$\psi(u) \approx \int_u^\infty \frac{\delta^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\delta x} dx$$

Potrebna nam je posledica: Prva dva momenta M su

$$E(M) = \int_0^\infty \psi(u)\, du = \frac{\rho\mu_B^{(2)}}{2(1-\rho)\mu_B},\ E(M^2) = \frac{\rho\mu_B^{(3)}}{3(1-\rho)\mu_B} + \frac{\beta^2 {\mu_B^{(2)}}^2}{2(1-\rho)^2}$$

Prema tome, kako M ima gama raspodelu sa parametrima λ, δ sledi $E(M) = \frac{\lambda}{\delta}$ i $E(M^2) = \frac{2\lambda}{\delta^2}$ uzimamo da je $\frac{\lambda}{\delta} = a_1,\ \frac{2\lambda}{\delta^2} = a_2$. Dobijamo

$$a_1 = \frac{\rho\mu_B^{(2)}}{2(1-\rho)\mu_B}\ , a_2 = \frac{\rho\mu_B^{(2)}}{3(1-\rho)\mu_B} + \frac{\beta^2 {\mu_B^{(2)}}^2}{2(1-\rho)^2},$$

tj.

$$\delta = \frac{2a_1}{a_2},\ \lambda = \frac{2{a_1}^2}{a_2}.$$

(Asmussen, Albracher, 2010.)

Tabela 3.4: Tabela aproksimiranih vrednosti verovatnoće propasti dobijenih Bekman−Boversovom aproksimacijom.

u	0	10^7	10^8	10^9	10^{10}
$\psi(u)$	0.76923077	0.75876182	0.67379297	0.21161637	0.00000224

(Tabela preuzeta iz: K. Burnecki P. Místa. Ruin probabilities in infinite time. Hugo Steinhaus Center, Wroclaw University of Technology-Poland, 2005. Burnecki and Mišta).

Upoređivanjem Bekman−Boversove aproksimacije sa tačnim vrednostima, aproksimacija daje dobre rezultate. Zaključujemo: kad su početne rezerve nula aproksimacija je jednaka tačnoj vrednosti, kad su početne rezerve $\mathbf{10^7}$ aproksimacija je približna tačnoj vrednosti, ali i dalje je velika verovatnoća da osiguravajuća kuća propadne. Kako se početne rezerve povećavaju vidimo da 4MGDV aproksimacija daje bolje rezultate od Bekman−Boversove aproksmacije.

3.4. Aproksimacija „gustog (teškog) saobraćaja“(the heavy traffic approximation)

U proseku, premije prevazilaze samo malo očekivane zahteve, odnosno teški saobraćajni uslovi znače da je sigurnosno opterećenje η pozitivno, ali ima malu vrednost ili je ekvivalentno da β je samo neznatno manje od $\beta_{max} = \frac{1}{\mu_B}$. Matematički ćemo predstaviti ovu situaciju sa granicom gde $\beta \uparrow \beta_{max}$, pri čemu je B fiksirano.

Propozicija 3.1

Kad $\beta \uparrow \beta_{max}$, $(\beta_{max} - \beta)M$ konvergira u raspodeli do eksponencijalne raspodele sa stopom $\delta = \frac{2\mu_B^2}{\mu_B^{(2)}}$.

Dokaz:

Prvo zabeležimo da $1 - \rho = (\beta_{max} - \beta)\mu_B$. Dozvolimo da je B_0 raspodela stacionarnog viška, prema Polaček− Hinčinovoj formuli oblika $E(e^{rM}) = \frac{1-\rho}{1-\rho\hat{B}_{0[r]}}$ sledi

$$E\left(e^{s(\beta_{max}-\beta)M}\right) = \frac{1-\rho}{1-\rho\hat{B}_0[s(\beta_{max}-\beta)]}$$

$$= \frac{1-\rho}{1-\rho+\rho\{1-\hat{B}_0[s(\beta_{max}-\beta)]\}}$$

$$\approx \frac{1-\rho}{1-\rho-\rho s(\beta_{max}-\beta)\mu_{B_0}} \approx \frac{1-\rho}{1-\rho-s(\beta_{max}-\beta)\mu_{B_0}} \qquad (3.4)$$

Iz uslova dokaza vidimo $\mu_B = \frac{1-\rho}{\beta_{max}-\beta}$, kad (3.4) pomnožimo i podelimo sa $\beta_{max} - \beta$ dobijamo

$$= \frac{\mu_B}{\mu_B - s\mu_{B_0}} = \frac{\delta}{\delta - s},$$

gde je

$$\delta = \frac{\mu_B}{\mu_{B_0}} = \frac{2{\mu_B}^2}{\mu_B^{(2)}}. \qquad \blacksquare$$

Posledica 3.1: Ako $\beta \uparrow \beta_{max}, u \to \infty$ na takav način $(\beta_{max} - \beta)u \to \vartheta$, onda $\psi(u) \to e^{-\delta\vartheta}$.

Dokaz: Pišemo $\psi(u)$ kao $P\big((\beta_{max} - \beta\,)M > (\beta_{max} - \beta\,)u\big)$

$$\to P(X > \vartheta) = 1 - B_X(\vartheta) = e^{-\delta\vartheta}\,,$$

pri čemu $(\beta_{max} - \beta\,)M$ konvergira ka $X: \varepsilon(\delta)$ onda je funkcija raspodele

$$B_X(\vartheta) = 1 - e^{-\delta\vartheta}\,. \qquad \blacksquare$$

Ovi rezultati ukazuju na aproksimaciju

$$\psi(u) \approx e^{-\delta(\beta_{max}-\beta)u}.$$

Važno je primetiti da je ovo isto kao i Kramer–Lundbergova aproksimacija, pri čemu smo koeficijent prilagođavanja definisali u Propoziciji 2.3 kao $\gamma = \gamma(\eta) \sim \frac{2\eta\mu_B}{\mu_B^2}$, a konstantu $C = C(\eta) \sim 1$, tj.

$$\psi(u) \approx Ce^{-\gamma u} \approx e^{-\frac{2\eta\mu_B u}{\mu_B^{(2)}}}$$

Ovo sledi jer $(\beta_{max} - \beta) = \frac{1-\rho}{\mu_B}$ i $\delta = \frac{2\mu_B^2}{\mu_B^{(2)}}$, a $\eta = \frac{1-\rho}{\rho} \approx 1 - \rho$ otuda

$$\delta(\beta_{max} - \beta) = \frac{2\mu_B^2}{\mu_B^{(2)}}\frac{1-\rho}{\mu_B} \approx \frac{2\eta\mu_B}{\mu_B^{(2)}}\,.$$

Međutim, Posledica 3.1 daje bolju matematičku osnovu.

Ova metoda zahteva postojanje prva dva momenta raspodele veličine zahteva. Numerički dokazi pokazuju da je aproksimacija razumna za relativno sigurnosno opterećenje koje je 10-20 % i za malo ili umereno u, dok aproksimacija može biti netačna za veliko u. (Asmussen, Albracher, 2010.)

Tabela 3.5: Tabela aproksimiranih vrednosti verovatnoće propasti dobijenih pomoću aproksimacije gustog saobraćaja.

u	0	10^7	10^8	10^9	10^{10}
$\psi(u)$	1.00000000	0.98337076	0.84561548	0.18695163	0.00000005

(Tabela preuzeta iz: K. Burnecki P. Místa. Ruin probabilities in infinite time. Hugo Steinhaus Center, Wroclaw University of Technology-Poland, 2005. Burnecki and Mišta).

Aproksimacija nam ne daje dobre rezultate.

3.5. Aproksimacija lakog saobraćaja (the light traffic approximation)

Izraz lak saobraćaj dolazi takođe iz teorije redova kao i težak, odnosno gust saobraćaj, ali ima primenu i u teoriji rizika. U ovom slučaju u proseku su premije mnogo veće nego očekivani zahtevi. Uslovi su da je sigurnosno opterećenje η pozitivno i veliko, ili ekvivalentno da je β malo u poređenju sa μ_B. Matematički, ovu situaciju predstavićemo uzimajući u obzir granice gde $\beta \downarrow 0$, ali je B fiksirano.

Naravno, u teoriji rizika gust, odnosno težak saobraćaj je češći od lakog. Međutim, lak promet (saobraćaj) je interesantan kao dopuna teškom saobraćaju i zato što je potreban za interpolaciju aproksimacije koja se proučava u sledećem stavu.

Propozicija 3.2: Kako $\beta \downarrow 0$,

$$\psi(u) = \beta \int_u^\infty \bar{B}\,(x)dx = \beta E[U-u; U>u] = \beta E(U-u)^+. \quad (3.5)$$

Dokaz:

Za dokazivanje ove Propozicije potrebna nam je sledeća Polaček−Hinčin formula $\psi(u) = P(M>u) = (1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \bar{B}_0^{*n}(u)$. Prema njoj, dobijamo

$$\psi(u) = (1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n {\mu_B}^n \bar{B}_0^{*n}(u) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n {\mu_B}^n \bar{B}_0^{*n}(u)\,.$$

Asimtotično, $\sum_{n=2}^{\infty} \ldots = O(\beta^2)$ tako da je samo prvi izraz $n=1$ bitan, i otuda

$$\psi(u) \approx \beta \mu_B \bar{B}_0(u) = \beta \int_u^\infty \bar{B}\,(x)dx.$$

Alternativni izraz u (3.5) sledi integracijom po delovima. ■

Napomenimo da je aproksimacija heurističkog lakog saobraćaja data u Propoziciji 3.2 ista kao da se propast može dogoditi samo u vremenu T prvog zahteva, tj. $\psi(u) \approx P(U-T>u)$. Zaista, monotona konvergencija

$$P(U-T>u)=\int_0^\infty \bar{B}\,(x+u)\beta e^{-\beta x}dx \approx \beta\int_u^\infty \bar{B}\,(x)dx.$$

(Asmussen, Albracher, 2010.)

Tabela 3.6: Tabela aproksimiranih vrednosti verovatnoće propasti dobijenih pomoću aproksimacije lakog saobraćaja.

u	0	10^7	10^8	10^9	10^{10}
$\psi(u)$	0.76923077	0.72475312	0.43087903	0.00361367	0.00000000

(Tabela preuzeta iz: K. Burnecki P. Místa. Ruin probabilities in infinite time. Hugo Steinhaus Center, Wroclaw University of Technology-Poland, 2005. Burnecki and Miśta).

Možemo primetiti da kad su nam početne rezerve nula, aproksimacija je jednaka tačnoj vrednosti. Zaključujemo da aproksimacija lakog saobraćaja daje bolje rezultate kad su nam početne rezerve manje, tj. 0 i 10^7 od aproksimacije teškog saobraćaja.

3.6. Interpolacija između lakog i teškog saobraćaja

Navešćemo ideju kako se aproksimacije pomenutih saobraćaja mogu kombinovati. Neobrađena (gruba) ideja interpolacije između lakog i teškog prometa dovodi do

$$\psi(u) \approx (1-\frac{\beta}{\beta_{max}})\lim_{\beta\downarrow 0}\psi(u)+\frac{\beta}{\beta_{max}}\lim_{\beta\uparrow\beta_{max}}\psi(u)$$

$$=\left(1-\frac{\beta}{\beta_{max}}\right)\cdot 0+\frac{\beta}{\beta_{max}}\cdot\ 1=\frac{\beta}{\beta_{max}}=\rho,$$

što je beskorisno. Umesto toga, da bismo dobili nedegenerativne granice, kombinujemo sa našim eksplicitnim znanjem o $\psi(u)$ za raspodele eksponencijalnih zahteva E sa stopom $\frac{1}{\mu_B}=\beta_{max}$ sa istom sredinom μ_B, kao i sa datim B. Neka $\tilde{\psi}_{LT}^{(B)}(u)$ označava aproksimaciju lakog saobraćaja koja je data u Propoziciji 3.2, koristimo slične oznake za $\psi^{(B)}(u)=\psi(u)$, $\psi^{(E)}(u)=\rho e^{-(\beta_{max}-\beta)u}$, $\tilde{\psi}_{LT}^{(E)}(u)$, $\tilde{\psi}_{HT}^{(B)}(u)$, $\tilde{\psi}_{HT}^{(E)}(u)$. Zamenom $\vartheta=(\beta_{max}-\beta)u$, postoje sledeća ograničenja:

$$\lim_{\beta\uparrow\beta_{max}} \frac{\tilde{\psi}_{HT}^{(B)}(\frac{\vartheta}{\beta_{max}-\beta})}{\tilde{\psi}_{HT}^{(E)}(\frac{\vartheta}{\beta_{max}-\beta})} = \frac{e^{-\delta\vartheta}}{e^{-2\mu_E^2/\mu_E^{(2)}\vartheta}} = e^{(1-\delta)\vartheta} = c_{HT}(\vartheta),$$

Jer je $\psi^{(E)}\left(\frac{\vartheta}{\beta_{max}-\beta}\right) = \rho e^{-(\beta_{max}-\beta)\frac{\vartheta}{\beta_{max}-\beta}} = e^{-\vartheta}$, $\rho = \mu_B\,\beta$ kako $\beta \uparrow \beta_{max}$ dobijamo $\rho = 1$.

Pošto imamo eksponencijalnu raspodelu sa parametrom $\frac{1}{\mu_B}$, dobijamo rep raspodele

$$\bar{B}^{(E)}(x) = e^{-\frac{1}{\mu_B}x} = e^{-\beta_{max}\,x}$$

$$\lim_{\beta\downarrow 0} \frac{\tilde{\psi}_{LT}^{(B)}(\frac{\vartheta}{\beta_{max}-\beta})}{\tilde{\psi}_{LT}^{(E)}(\frac{\vartheta}{\beta_{max}-\beta})} = \frac{\int_{\vartheta/\beta_{max}}^{\infty} \bar{B}\,(x)dx}{\int_{\vartheta/\beta_{max}}^{\infty} e^{-\beta_{max}\,x}dx}$$

$$= \beta_{max}\,e^{\vartheta} \int_{\vartheta/\beta_{max}}^{\infty} \bar{B}\,(x)dx = c_{LT}(\vartheta)$$

i aproksimacija je

$$\psi(u) \approx \psi^{(E)}(u)(\left[1-\frac{\beta}{\beta_{max}}\right] c_{LT}\big(u(\beta_{max}-\beta)\big) + \frac{\beta}{\beta_{max}} c_{HT}\big(u(\beta_{max}-\beta)\big))$$

$$= \rho(1-\rho)\beta_{max}\int_{u(1-\rho)}^{\infty} \bar{B}\,(x)dx + \rho^2 e^{-\delta(\beta_{max}-\beta)u}.$$

Karakteristike ove aproksimacije su da je tačna za eksponencijalnu raspodelu i asimptotski ispravna i u lakom i u teškom saobraćaju. Prema tome, iako sigurnosno opterećenje nije veoma malo, možemo se nadati da su dobijene korekcije aproksimacije teškog saobraćaja. (Asmussen, Albracher, 2010.)

Tabela 3.7: Tabela aproksimiranih vrednosti verovatnoće propasti dobijenih pomoću aproksimacije interpolacije između lakog i teškog saobraćaja.

u	0	10^7	10^8	10^9	10^{10}
$\psi(u)$	0.76923077	0.75696126	0.65517763	0.15895288	0.00000091

(Tabela preuzete iz: K. Burnecki P. Místa. Ruin probabilities in infinite time. Hugo Steinhaus Center, Wroclaw University of Technology-Poland, 2005. Burnecki and Mišta).

Zaključujemo da interpolacija daje bolje rezultate od lakog i teškog saobraćaja.

3.7. Aproksimacija difuzije

Ideja aproksimacije difuzije jeste da aproksimiramo proces zahteva viška sa Braunovim kretanjem sa driftom podešavanjem prva dva momenta i treba napomenuti da takva aproksimacija podrazumeva da je prvi prolaz verovatnoće zatvoren.
Matematički rezultat iza je teorema Donkers za jednostavan slučajan hod $\{S_n^*\}_{n=0,1,}$ u diskretnom vremenu: Ako je drift $\mu = E(S_1^*)$ i varijansa $\sigma^2 = Var(S_1^*)$, onda

$$\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{c}}(S_{\lfloor tc\rfloor}^* - tc\mu)\right\}_{t\geq 0} \overset{\mathcal{D}}{\to} \{W_0(t)\}_{t\geq 0}\, , c \to \infty, \quad (3.6)$$

gde $\{W_\zeta(t)\}$ je Braunovo kretanje sa driftom ζ i varijansom 1(ovde $\overset{\mathcal{D}}{\to}$ se odnosi na slabu konvergenciju u D = D$[0,\infty)$). Za cilj aproksimacije verovatnoće propasti centriranje oko sredine (izraz $tc\mu$ u (3.6)) je nezgodno. Želimo aproksimaciju samog zahteva procesa viška i to možemo dobiti pod pretpostavkom da je sigurnosno opterećenje η malo i pozitivno. Ovo je režim difuzne aproksimacije (napomenimo da je ovo isto kao i za aproksimaciju teškog saobraćaja koji smo posmatrali iznad).

Predstavićemo ovu pretpostavku o η sa procesom zahteva viška $\left\{S_t^{(p)}\right\}_{t\geq 0}$ koji je indeksiran sa stopom premije p, tako da zahtev raspodele B i Poasonova stopa β su isti za sve p (tj. $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i - tp$) i sadrži ograničenje p$\downarrow \rho$, gde je ρ kritična stopa premije $\beta\mu_B$.

Teorema 3.1: Kad p $\downarrow \rho$, imamo

$$\left\{\frac{|\mu|}{\sigma^2} S_{t\sigma^2/\mu^2}^{(p)}\right\}_{t\geq 0} \overset{\mathcal{D}}{\to} \{W_{-1}(t)\}_{t\geq 0}\text{ , gde } \mu = \mu_p = \rho - p, \sigma^2 = \beta\mu_B^{(2)}.$$

Dokaz:
Prvi korak je da napomenemo

$$\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{c}}(S_{tc}^{(p)} - tc\mu_p)\right\} = \left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{c}}(S_{ct}^{(\rho)} - \rho ct)\right\} \overset{\mathcal{D}}{\to} \{W_0(t)\} \quad (3.7)$$

svaki put kad $c = c_p \uparrow \infty$ dok p $\downarrow \rho$. Zaista, ovo je posledica od (3.6) sa S_n^*=$S_n^{(p)}$i nejednakosti $S_{n/c}^{(\rho)} - \rho/c \le S_t^{(\rho)} \le S_{(n+1)/c}^{(\rho)} + \rho\, p/c$, $\quad n/c \le t \le (n+1)/c$.

Dozvolimo $c = \sigma^2/{\mu_p}^2$, (3.7) ima oblik

$$\left\{\frac{|\mu|}{\sigma^2} S_{t\sigma^2/\mu^2}^{(p)} + t\right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W_0(t)\},$$

$$\left\{\frac{|\mu|}{\sigma^2} S_{t\sigma^2/\mu^2}^{(p)}\right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W_0(t) - t\} = \{W_{-1}(t)\}.$$

Ostalo je da pokažemo još da je $\mu = \mu_p = \rho - p, \sigma^2 = \beta\mu_B^{(2)}$. Dobijamo tako što izjednačimo očekivanje i disperziju zahteva viška i Braunovog kretanja sa driftom. Posmatramo prvo zahtev viška $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i - tp$

$$E(S_t) = E(\textstyle\sum_{i=1}^{N_t} U_i) - tp = E(N_t)E(U) - tp = \beta t\mu_B - tp = \rho t - tp \ .$$

$$D(S_t) = D\left(\textstyle\sum_{i=1}^{N_t} U_i - tp\right) = D\left(\textstyle\sum_{i=1}^{N_t} U_i\right) = E(N_t)D(U) + D(N_t)E(U)^2 = \beta t E(U^2) = \beta t\mu_B^{(2)}.$$

Zatim posmatramo Braunovo kretanje:

$${S_t}^*: \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$$

$$E({S_t}^*) = \mu t, D({S_t}^*) = \sigma^2 t$$

Kako aproksimiramo zahtev viška sa Braunovim kretanjem, sledi

$$S_t \approx {S_t}^*$$

$$E(S_t) = E({S_t}^*)\ tj.\ \rho t - tp = \mu t \quad \text{dobijamo } \mu = \rho - p \ .$$

$$D(S_t) = D({S_t}^*)\ tj.\ \beta t\mu_B^{(2)} = \sigma^2 t \text{ i } \sigma^2 = \beta\mu_B^{(2)} \ . \qquad \blacksquare$$

Sada dozvolimo

$$\tau_p(u) = inf\left\{t \ge 0: S_t^{(p)} > u\right\}, \tau_\zeta(u) = inf\left\{t \ge 0: W_\zeta(t) > u\right\}.$$

Raspodela $IG(\cdot;\zeta\,;u)$ od $\tau_\zeta(u)$ (funkcija raspodele vremena propasti Braunovog kretanja, često se naziva inverzna Gausova raspodela) je data sa

$$IG(x;\zeta\,;u) = P\left(\tau_\zeta(u) \le x\right) = 1 - \phi\left(\frac{u}{\sqrt{x}} - \zeta\sqrt{x}\right) + e^{2\zeta u}\phi(-\frac{u}{\sqrt{x}} - \zeta\sqrt{x}).$$

Napomenimo da $IG(\cdot;\zeta\,;u)$ je neispravna kada $\zeta < 0$.

Posledica 3.2: Kada p $\downarrow \rho$,

$$\psi_p\left(\frac{u\sigma^2}{|\mu|}, \frac{T\sigma^2}{\mu^2}\right) \rightarrow IG(T; -1\,; u).$$

Iz praktičnih razloga Posledica 3.2 predlaže aproksimaciju

$$\psi(u, T) \approx IG\left(\frac{T\mu^2}{\sigma^2};\ \frac{u|\mu|}{\sigma^2}\right) \qquad (3.8)$$

Puštajući $T \rightarrow \infty$ u (3.8), dobijamo formalnu aproksimaciju

$$\psi(u) \approx IG\left(\infty;\ \frac{u|\mu|}{\sigma^2}\right) = e^{-2\frac{u|\mu|}{\sigma^2}}. \qquad (3.9)$$

Možemo primetiti da je to isto kao i kod aproksimacije teškog saobraćaja. Pošto $\psi(u)$ ima beskonačan vremenski interval, kontinuitet argumenta iznad ne treba odmah generalizovati, potrebni su dodatni argumenti da opravdaju (3.9) iz Teoreme 3.1.
(Asmussen, Albracher, 2010.)

Tabela 3.8: Tabela aproksimiranih vrednosti verovatnoće propasti dobijenih pomoću aproksimacije difuzije.

u	0	10^7	10^8	10^9	10^{10}
$\psi(u)$	1.00000000	0.981207007	0.827192165	0.149990628	0.000000005

(Tabela preuzete iz: K. Burnecki P. Místa. Ruin probabilities in infinite time. Hugo Steinhaus Center, Wroclaw University of Technology-Poland, 2005. Burnecki and Mišta).

Aproksimacija difuzije nije veoma precizna, te ćemo uključivanjem korigovane aproksimacije u sledećem poglavlju pokazati poboljšanje (3.8) za složen Poasonov model koji ne zahteva mnogo više proračuna, a koji je mnogo precizniji.

3.8. Korigovana difuzna aproksimacija

Ideja iza jednostavne aproksimacije difuzije je da zameni proces rizika sa Braunovim kretanjem (podešavanjem prva dva momenta) i koristi Braunov prvi pasus (passage) verovatnoća kao aproksimaciju za verovatnoću propasti. Kako je Braunovo kretanje skakutavo, ova ideja zanemaruje (između ostalog) prisustvo preskoka $\xi(u)$.Cilj korigovane difuzne aproksimacije je da uzme ove i druge deficite u razmatranje.

Uređena je eksponencijalna familija složenog procesa rizika sa parametrima β_θ, B_θ. Međutim, pošto pustimo da dati proces rizika sa sigurnosnim opterećenjem $\eta > 0$ odgovara $\theta = 0$, mnogo je zgodnije da ovde koristitimo vrednosti $\theta_0 < 0$ i neka $\theta = 0$ odgovara za $\eta = 0$ (nula drift), ovo je zato što u režimu difuzne aproksimacije η je blizu nule, želimo da razmotrimo ograničenje koje odgovara kada $\theta_0 \uparrow 0$.

U smislu datog procesa rizika sa Poasonovim intenzitetom β, zahtevom raspodele B, $k(\alpha) = \beta(\widehat{B}(\alpha) - 1) - \alpha$ [1] i $\rho = \beta\mu_B < 1, \eta = \frac{1}{\rho - 1} > 0$, ovo znači sledeće:

1. Odredimo $\gamma_m > 0$ za $k^{'}(\gamma_m) = 0$ i neka $\theta_0 = -\gamma_m$.

2. Neka se P_0 odnosi na proces rizika sa parametrima

$$\beta_0 = \beta\widehat{B}\,[-\theta_0], \qquad B_0(dx) = \frac{e^{-\theta_0 x}}{\widehat{B}\,[-\theta_0]}\, B\,(dx)$$

Onda $E_0(U^k) = \widehat{B}_0^k[0] = \widehat{B}^k[-\theta_0]/\widehat{B}\,[-\theta_0]$ i $k_0(s) = k(s - \theta_0) - k(-\theta_0)$, $k_0^{'}(0) = 0$.

3. Za svako θ, neka se P_θ odnosi na proces rizika sa parametrima

$$\beta_\theta = \beta_0\widehat{B}_0[\theta] = \beta\widehat{B}\,[\theta - \theta_0]\,, \quad B_\theta(dx) = \frac{e^{\theta x}}{\widehat{B}_0[\theta]}\, B_0(dx) = \frac{e^{(\theta - \theta_0)x}}{\widehat{B}\,[\theta - \theta_0]}\, B\,(dx).$$

Onda

$$k_\theta(s) = k_0(s + \theta) - k_0(\theta) = k(s + \theta - \theta_0) - k(\theta - \theta_0),$$

jer

$$k_0(s + \theta) = k(s + \theta - \theta_0) - k(-\theta_0),$$
$$k_0(\theta) = k(\theta - \theta_0) - k(-\theta_0),$$

i dati proces rizika odgovara P_{θ_0}, gde je $\theta_0 = -\gamma_m$.

U ovom uređenju , $P_\theta(\tau(u) < \infty) = 1$ za $\theta \geq 0$, $P_\theta(\tau(u) < \infty) < 1$ za $\theta < 0$, i mi proučavamo $\psi(u, T) = P_{\theta_0}(\tau(u) \leq T)$ za $\theta_0 < 0$, $\theta_0 \uparrow 0$.

[1] Jednačina $k(\alpha) = \beta(\widehat{B}(\alpha) - 1) - \alpha = 0$ poznata je kao Lundbergova jednačina.

Podsetimo se $IG(x;\zeta\,;u)$ označava funkciju raspodele vremena pasusa (prolaza-eng.passage) Braunovog kretanja $\{W_\zeta(t)\}$ sa jedinicom varijanse i driftom ζ od nivoa 0 do nivoa $u > 0$. Imamo

$$IG(x;\zeta\,;u) = IG(x/u^2\,;\zeta u\,;1).$$

Izvedena korigovana difuzna aproksimacija je

$$\psi(u,T) \approx IG(\frac{T\nu_1}{u^2} + \frac{\nu_2}{u};\ -\frac{\gamma u}{2}\,;1 + \frac{\nu_2}{u}) \qquad (3.10)$$

gde je $\gamma > 0$ koeficijent prilagođavanja za dati proces rizika, tj. rešenje od $k(\gamma) = 0$, i

$$\nu_1 = \beta_0 E_0(U^2) = \beta\,\hat{B}''[\gamma_m], \nu_2 = \frac{E_0U^3}{3E_0U^2} = \frac{\hat{B}'''[\gamma_m]}{3\hat{B}''[\gamma_m]}.$$

Napišimo početne rezerve u za dati proces rizika kao $u = \frac{\zeta}{\theta_0}$ $(\zeta < 0)$, zatim $\tau = \tau(u),\ \ \xi(u) = S_\tau - u.$ Prvi korak u izvođenju je

$$\mu = k'(0) = k_0'(\theta_0) \sim \theta_0 k_0''(0) = \theta_0\,\nu_1 = \frac{\zeta\nu_1}{u}\,,$$

$$Var_{\theta_0}S_1 \sim Var_0 S_1 = \beta_0\,E_0(U^2) = \nu_1,\ \ \theta_0 \uparrow 0.$$

Sada primenjujemo teoremu: Razmatramo porodicu procesa zahteva viška $\{S_t^\theta\}$ indeksiranu parametrom θ, tako da Poasonova stopa β_θ , zahtev veličine raspodele B_θ i stopa premije p_θ zavise od θ. Pretpostavimo dalje da $\beta_\theta\mu_{B_\theta} < p_\theta$, da

$$\beta_\theta \to \beta_{\theta_0}, B_\theta \xrightarrow{\mathcal{D}} B_{\theta_0}, p_\theta \to p_{\theta_0}\,,\ p_\theta - \beta_\theta\mu_{B_\theta} \to 0,$$

kada $\theta \to \theta_0$ i da U^2 su ravnomerno integrabilne u odnosu na B_θ. Zatim kad $\theta \to \theta_0$, imamo

$$\left\{\frac{|\mu|}{\sigma^2} S^{(\theta)}_{t\sigma^2/\mu^2}\right\}_{t\geq 0} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W_{-1}(t)\}_{t\geq 0}$$

gde $\mu = \mu_\theta = \rho_\theta - p_\theta = \beta_\theta\mu_{B_\theta} - p_\theta,\ \sigma^2 = \ \sigma^2{}_\theta = \beta_\theta\mu_{B_\theta}{}^{(2)}$.

Iz navedene teoreme važi

$$\left\{\frac{|\zeta|\nu_1}{u\nu_1}\ S_{t\nu_1 u^2/\zeta^2{\nu_1}^2}\right\}_{t\geq 0} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W_{-1}(t)\}_{t\geq 0}\ ;$$

koja dovodi do

$$\left\{\frac{1}{u\sqrt{\nu_1}} S_{tu^2}\right\}_{t\geq 0} \xrightarrow{\mathcal{D}} \left\{W_{\zeta\sqrt{\nu_1}}(t)\right\}_{t\geq 0},$$

$$\psi(u, tu^2) \to IG\left(t;\ \zeta\sqrt{\nu_1}\,; \frac{1}{\sqrt{\nu_1}}\right) = IG(t\nu_1;\ \zeta; 1).$$

Kako

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} IG(dt;\ \zeta; u) = \ e^{-uh(\lambda,\zeta)},\ \text{gde } h(\lambda,\zeta) = \sqrt{2\lambda + \zeta^2 - \zeta}, \qquad (3.11)$$

to podrazumeva (za $u = 1$)

$$E_{\theta_0} e^{-\lambda\nu_1\tau(u)/u^2} \to e^{-h(\lambda,\zeta)}. \qquad (3.12)$$

Propozicija 3.3: Kad $u \to \infty, \theta_0 \uparrow 0$ na takav način da $\zeta = \theta_0 u$ je fiksirano i važi za bilo koje fiksno $\lambda > 0$, onda je

$$E_{\theta_0} \exp\{-\lambda\nu_1\tau(u)/u^2\} \approx exp\{-h(\lambda, -\gamma u/2)(1 + \nu_2/u)\}[1 + \lambda\nu_2/u]. \quad (3.13)$$

Kako je to određeno, dobijamo formalnu inverznu Laplasovu transformaciju takvu

$$\psi\left(u, \frac{tu^2}{\nu_1}\right) \approx IG(t + \frac{\nu_2}{u};\ -\frac{\gamma u}{2}\ ; 1 + \frac{\nu_2}{u}).$$

Desna strana jednačine je funkcija raspodele od defektne slučajne promenljive raspodeljene kao $Z - \nu_2/u$, gde Z ima raspodelu $IG(\cdot; -\frac{\gamma u}{2}; 1 + \frac{\nu_2}{u})$. Laplasova transformacija od takve slučajne promenljive je

$$Ee^{-\lambda Z} e^{\lambda\nu_2/u} \approx Ee^{-\lambda Z}[1 + \lambda\nu_2/u]$$

gde se poslednji izraz podudara sa desnom stranom od (3.13) prema tome do (3.11). Da bi došli do (3.10) samo zamenimo t sa $\frac{T\nu_1}{u^2}$. Dokaz Propozicije 3.3. možete pogledati u knjizi[2].

[2] Søren Asmussen i Hansjörg Albrecher, Ruin probabilities

4. Model obnove

4.1. Dolasci obnove – Uvod

Osnovna pretpostavka u ovom delu je da dolasci vremena $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ procesa rizika formiraju proces obnove: puštajući $T_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$, $(T_1 = \sigma_1)$, T_n su nezavisne sa istom raspodelom A za $T_2, T_3, \ldots$ U nula - odloženom slučaju raspodela A_1 od T_1 je takođe A. Važna mogućnost A_1 je da bude stacionarna odložena raspodela A_0 sa gustinom $\overline{A}(x)/\mu_A$. Tada je proces dolaska stacionaran, što bi moglo da bude razumna pretpostavka u mnogim slučajevima.
Koristimo slične oznake kao i pre: stopa premije je 1, zahtev veličine $U_1, U_2, \ldots$ su nezavisno identički raspodeljeni, sa zajedničkom raspodelom B, $\{S_t\}$ je proces zahteva viška, broj dolazaka pre t je $N_t = \{n: \sigma_n \le t\}$, M je maksimum od $\{S_t\}$, $\tau(u)$ je vreme propasti. Verovatnoća propasti koja odgovara nula odloženom slučaju označavamo sa $\psi(u)$, koja odgovara stacionarnom slučaju sa $\psi^{(s)}(u)$, i koja odgovara $T_1 = s$ sa $\psi_s(u)$.

Propozicija 4.1 Definišemo $\rho = \frac{\mu_B}{\mu_A}$. Tada bez obzira na raspodelu A_1 od T_1,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_t}{t} = \lim_{t\to\infty} E\left(\frac{S_t}{t}\right) = \rho - 1 \qquad (4.1)$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Var(S_t)}{t} = \frac{{\mu_B}^2{\sigma_A}^2 + {\mu_A}^2{\sigma_B}^2}{{\mu_A}^3} \qquad (4.2)$$

Nadalje, za svako $a > 0$,

$$\lim_{t\to\infty} E(S_{t+a} - S_t) = a(\rho - 1\ ). \qquad (4.3)$$

Dokaz: Očigledno,

$$E(S_t) = E\left(\sum_{i=1}^{N_t} U_i \,\middle|\, N_t\right) - t = E(N_t \cdot \mu_B) - t$$

Međutim, iz teorije obnove imamo $E\left(\frac{N_t}{t}\right) \to \frac{1}{\mu_A}$. Odavde sledi (4.1), a (4.3) sledi iz Blekvelsove teoreme obnove, navodeći da je $E(N_{t+a} - N_t) \to \frac{a}{\mu_A}$.

Za (4.2), dobijamo na isti način korišćenjem poznatih činjenica o $E(N_t)$ i $Var(N_t)$ da

$$Var(S_t) = Var\left[E\left(\sum_{i=1}^{N_t} U_i \middle| N_t\right)\right] + E\left[Var\left(\sum_{i=1}^{N_t} U_i \middle| N_t\right)\right]$$

$$= Var(\mu_B N_t) + E(\sigma_B^2 N_t)$$

$$= t\mu_B^2 \frac{\sigma_A^2}{\mu_A^3} + t\frac{\sigma_B^2}{\mu_A} + o(t). \ \blacksquare$$

Propozicija daje željenu interpretaciju konstante ρ kao očekivani zahtev po jedinici vremena. Dakle definicija sigurnosnog (bezbednog) opterećenja $\eta = \frac{1}{\rho - 1}$ se i ovde koristi. Model obnove se često naziva Sper Andersonov proces, po E. Sparre Andersonu koji je bio prvi koji je razmatrao u teoriji rizika pretpostavke obnove mnogo dublje. Najjednostavniji slučaj je Poasonov slučaj, gde $\{N_t\}$ ima Poasonovu, a A i A_1 eksponencijalnu raspodelu sa stopom β. Razlog je delimično matematički jer je najlakše da se analizira, ali takođe ima i prirodnu interpretaciju (veliki portfolio sa zahtevima koji proističu sa malim stopama i nezavisni su, baš na isti način kao Poasonov proces dolaska u telefonskom saobraćaju (veliki broj pretplatnika svaki zove sa malom stopom)). Međutim, generalno mehanizam generisanja procesa obnove dolaska pojavljuje se mnogo teže u interpretaciji u kontekstu teorije rizika i zbog toga se značajnost modela dovodila više puta u pitanje. Predstavićemo neke osnovne karakteristike modela obnove.

Propozicija 4.2 Verovatnoća propasti za nula odložen slučaj može biti predstavljena kao $\psi(u) = P(M^{(d)} > u)$ gde $M^{(d)} = max\left\{S_n^{(d)}: n = 0, 1, \dots\right\}$, a $\left\{S_n^{(d)}\right\}$ diskretni vremenski slučajni hod sa prireštajima raspodeljenim kao nezavisna razlika $U - T$ između zahteva U i vremena T.

Dokaz: Suština argumenta je da se propast može dogoditi samo u zahtevima vremena. Vrednost procesa zahteva viška odmah posle zahteva ima istu raspodelu kao $\left\{S_n^{(d)}\right\}$. Kako se proces zahteva viška $\{S_t\}$ smanjuje, između vremena dolaska imamo

$$\max_{0 \le t < \infty} S_t = \max_{n=0,1,\dots} S_n^{(d)}.$$

Iz ovoga odmah sledi rezultat. ■

Za kasniju upotrebu, možemo zabeležiti da verovatnoća propasti za odložen slučaj $T_1 = s$, može se izraziti u smislu nula odloženog slučaja kao

$$\psi_s(u) = \bar{B}(u+s) + \int_0^{u+s} \psi(u+s-y)B(dy). \quad (4.4)$$

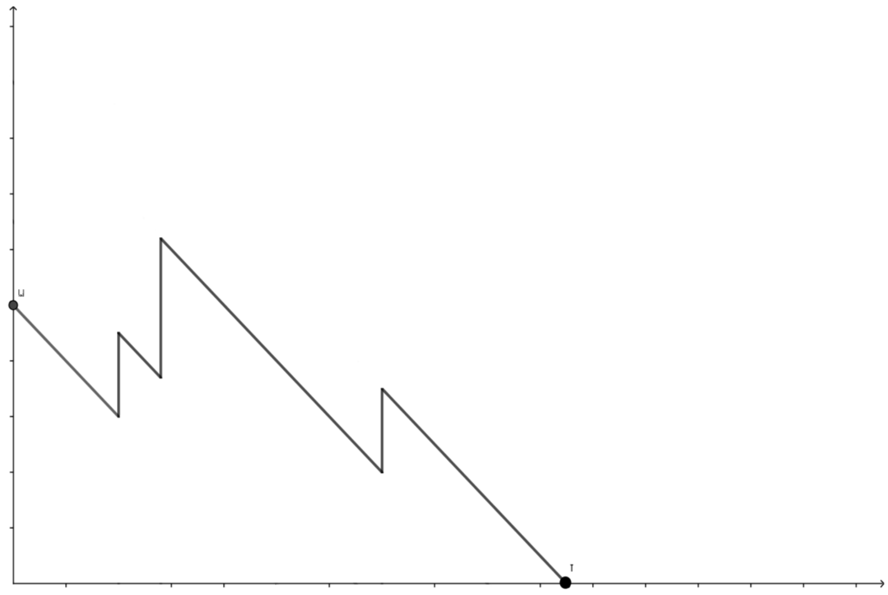
Zaista, prvi izraz predstavlja verovatnoću da smo odmah propali $P(U_1 - s > u)$ pri isplati prvog zahteva vremena s, dok drugi izraz da nismo propali kod isplate prvog zahteva $U_1 - s < u$, ali propadamo pri isplati ostalih zahteva, tj. $P(\tau(u) < \infty, U_1 - s < u)$. Možemo primetiti da je slično kao kod dokaza Lundbergove nejednakosti. Za stacionarni slučaj, integralimo (4.4) u odnosu na A_0.

4.2. Eksponencijalni zahtevi, složen Poasonov model sa negativnim zahtevima

Posmatramo varijantu složenog Poasonovog modela, gde su zahtevi (U_i) i stope premije negativni, tj.$p = -1$, tako da proces rizika rezervi i proces zahteva viška su dati

$$R_t^* = u + \sum_{i=1}^{N_t^*} U_i^* - t, \quad S_t^* = t - \sum_{i=1}^{N_t^*} U_i^*,$$

gde $\{N_t^*\}$ je Poasonov proces sa stopom β^* i U_i^* su nezavisni od $\{N_t^*\}$ i nezavisno identički raspodeljeni sa zajedničkom raspodelom B^* koncentrisani u (0, ∞). Ovaj model se ponekad zove model dualnog rizika. Tipičan primer putanje $\{R_t^*\}$ je ilustrovan na grafiku (4.1)



Grafik 4.1 Ilustracija putanje procesa rizika $\{R_t^*\}$

Jedno tumačenje ovog modela je da imaju kontinuirane troškove i događaje prema Poasonovom procesu (npr. inovacija) koji povećavaju vrednost portfolia ili kompanije. Drugo tumačenje je naravno opterećenje u redu $M/G/1$ u njegovom prvom prometnom periodu.
Definišemo vreme propasti $\tau^*(u) = inf\{t > 0: R_t^* < 0\}$. Koristeći Lundbergovu konjugaciju možemo izračunati verovatnoću propasti $\psi^*(u) = P(\tau^*(u) < \infty)$. Jednostavno poređenje primera putanje će onda obezbediti verovatnoću propasti za model obnove sa eksponencijalnim zahtevima raspodele.

Teorema 4.1. Ako $\beta^*\mu_{B^*} \leq 1$, onda $\psi^*(u) = 1$, $\forall\, u \geq 0$. Ako $\beta^*\mu_{B^*} > 1$, onda $\psi^*(u) = e^{-\gamma u}$ gde $\gamma > 0$ je jedinstveno rešenje od

$$0 = k^*(-\gamma) = \beta^*\big(\widehat{B^*}[-\gamma] - 1\big) + \gamma. \quad (4.5)$$

Napomenimo da $k^*(\alpha) = \log E(e^{-\alpha S_1})$

Dokaz: Definišemo

$$S_t^* = u - R_t^*,\ \ \widetilde{S_t} = R_t^* - u = -S_t^*.$$

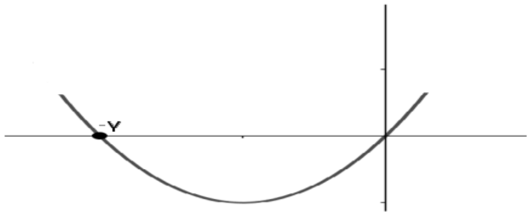
Onda $\{\widetilde{S_t}\}$ je zahtev procesa viška standardnog složenog Poasonovog procesa rizika sa parametrima β^*, B^*. Ako $\beta^*\mu_{B^*} \leq 1$, potrebna nam je sledeća Propozicija (drift i oscilacije):
(a)Bez obzira na vrednost od η, $S_t/t \xrightarrow{s.s} \rho - 1$ kada $t \to \infty$;
(b) Ako $\eta < 0$, onda $S_t \xrightarrow{s.s} \infty$;
(c) Ako $\eta > 0$, onda $S_t \xrightarrow{s.s} -\infty$;
(d)) Ako $\eta = 0$, onda $\lim_{t\to\infty} inf\ S_t = -\infty, \lim_{t\to\infty} sup\ S_t = \infty$.
Gde s.s je oznaka za skoro sigurno.

sledi

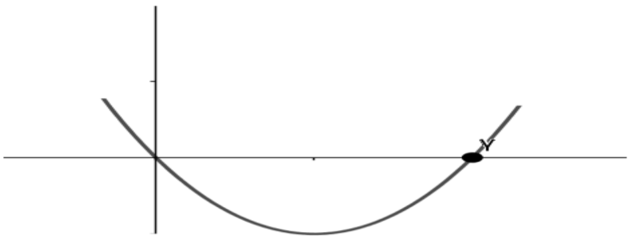
$$\sup_{t\geq 0} S_t^* = -\inf_{t\geq 0} \widetilde{S_t} = \infty$$

i otuda $\psi^*(u) = 1$ sledi

a) $k^*(\alpha)$



b) $k(\alpha)$



Grafik 4.2

Pretpostavimo sada $\beta^*\mu_{B^*} \geq 1$. Onda funkcija k^* je definisana na celom $(-\infty, 0)$ i obično ima oblik kao na grafiku 4.2 (a). Stoga γ postoji i jedinstven je. Neka

$$\beta = \beta^*\widehat{B^*}[-\gamma], \quad B(dx) = \frac{e^{-\gamma x}}{\widehat{B^*}[-\gamma]} B^*(dx),$$

i neka $\{S_t\}$ bude složen Poasonov proces rizika sa parametrima $\beta, B.$ Onda funkcija kumulativnog generisanja od $\{S_t\}$ je $k(\alpha) = k^*(\alpha - \gamma)$, pogledati Grafik 4.2 (b), Lundbergova konjugacija od $\{S_t\}$ je $\{\widetilde{S_t}\}$ i obrnuto. Definišemo

$$\tau_-(u) = inf\{t \geq 0: S_t = -u\}, \widetilde{\tau_-}(u) = inf\{t \geq 0: \widetilde{S_t} = -u\}.$$

Kako je $k'(0) < 0$, sigurnosno opterećenje od $\{S_t\}$ je veće od nule. Stoga $\tau_-(u) < \infty$ skoro sigurno, i prema tome

$$\begin{aligned} 1 = P(\tau_-(u) < \infty) &= \tilde{E}\left[e^{-\gamma \tilde{S}_{\widetilde{\tau_-}(u)}}; \widetilde{\tau_-}(u) < \infty\right] \\ &= e^{\gamma u} P(\widetilde{\tau_-}(u) < \infty) = e^{\gamma u}\, \psi^*(u). \end{aligned}$$ ■

Vraćamo se na model obnove.

Teorema 4.2 Ako je B eksponencijalno, sa stopom δ, i $\delta\mu_A > 1$ onda $\psi(u) = \pi_+ e^{-\gamma u}$ gde $\gamma > 0$ je jedinstveno rešenje od

$$1 = E\left(e^{\gamma(U-T)}\right) = \frac{\delta}{\delta - \gamma}\hat{A}[-\gamma] \quad (4.6)$$

$$\text{i } \pi_+ = 1 - \frac{\gamma}{\delta}.$$

Dokaz:

Možemo uporediti model obnove $\{S_t\}$ i složen Poasonov model sa negativnim zahtevima $\{S_t^*\}$ na takav način da vremena između dolaska $\{S_t^*\}$ su $T_0^*, T_1^* = U_1, T_2^* = U_2, \ldots$ Onda $B^* = A$, $\beta^* = \delta$ i iz (4.5) znači da $\delta\left(\hat{A}[-\gamma] - 1\right) + \gamma = 0$ koje se lako vidi da je isto kao (4.6).

Sada vrednost $\{S_t^*\}$ upravo pre n-tog zahteva je

$$T_0^* + T_1^* + \ldots + T_n^* - U_1^* - \ldots - U_n^*,$$

sa grafika 4.1 se vidi da je propast ekvivalentna sa jednom od ovih vrednosti većih od u. Otuda je

$M^* = \max_{t \geq 0} S_t^* = \max_{n=0,1,\ldots}\{T_0^* + T_1^* + \ldots + T_n^* - U_1^* - \ldots - U_n^*\}$

$\underset{=}{\mathcal{D}}\, T_0^* + \max_{n=0,1,\ldots}\{U_1 + \ldots + U_n - T_1 - \ldots - T_n\}$

$\underset{=}{\mathcal{D}}\, T_0^* + M^{(d)}$

znamo iz Propozicije 4.2.

Uzimajući funkciju generatrise momenta i napomenimo da $\psi^*(u) = P(M^* > u)$ tako da Teorema 4.1 znači da je M^* eksponencijalno raspodeljeno sa stopom γ, dobijamo

$$E\left(e^{\alpha M^{(d)}}\right) = \frac{E\left(e^{\alpha M^*}\right)}{E\left(e^{\alpha T_0^*}\right)} = \frac{\gamma/(\gamma-\alpha)}{\delta/(\delta-\alpha)} = 1 - \pi_+ + \pi_+ \frac{\gamma}{\gamma-\alpha}.$$

Tj. raspodela od $M^{(d)}$ je mešavina nule i eksponencijalne raspodele sa parametrom stope γ sa težinama$1-\pi_+ \; i \; \pi_+$, respektivno.

Otuda $P\left(M^{(d)} > u\right) = P\left(M^{(d)} > 0\right)e^{-\gamma u} = \pi_+ e^{-\gamma u}$. ■

4.3. Promena mera preko eksponencijalnih porodica

4.3.1. Ugrađeni slučajni hod

Diskretno vreme slučajnog hoda ima primenu u teoriji rizika kao model za rezerve ili zahtev viška u diskretnom nizu trenutaka. Recimo, početak svakog meseca ili godine treba uklopiti u kontinuirano vreme procesa, beleženjem rezervi ili zahteva viška upravo pre ili posle zahteva. Posmatramo slučajni hod $X_n = X_0 + Y_1 + \ldots + Y_n$ u diskretnom vremenu gde su Y_i nezavisno identički raspodeljeni sa zajedničkom raspodelom F.
Za sledeću propoziciju potrebna nam je Teorema: Neka $\{X_t\}$ bude Markov u odnosu na prirodnu filtraciju $\{\mathcal{F}_t\}$ na D_E, neka $\{L_t\}$ bude nenegativni martingal sa $E_x L_t = 1$ za sve x, t i neka $\tilde{P}_x$ bude verovatnoća mera data sa $\tilde{P}_x(A) = E_x[L_t;\, A]$. Onda porodica $\{\tilde{P}_x\}_{x\in E}$ definisana vremenskim homogenim Markovim procesom ako i samo ako $\{L_t\}$ je multiplikativno funkcionalna.
Propozicija 4.3: Neka $\{L_n\}$ bude multiplikativna funkcija slučajnog hoda sa $E_x L_n = 1$ za sve $n \; i \; x$. Onda promena mera u pomenutoj Teoremi odgovara novom slučajnom hodu ako i samo ako

$$L_n = h(Y_1) \cdots h(Y_n)$$

$P_x -$ skoro sigurno za neku funkciju h sa $Eh(Y) = 1$. U tom slučaju, promenjeni priraštaj raspodele je $\tilde{F}(x) = E[h(Y);\, Y \le x]$.

Važan primer je eksponencijalna promena mera pri čemu je $h(y) = e^{\alpha y - k(\alpha)}$ gde je $k(\alpha) = \log \hat{F}\,[\alpha]$ kumulativna funkcija generisanja za F. Odgovarajući faktor rizika je

$$L_n = e^{\alpha Y_1 - k(\alpha)} \cdot e^{\alpha Y_2 - k(\alpha)} \cdots e^{\alpha Y_n - k(\alpha)}$$

$$L_n = e^{\alpha(Y_1 + \ldots + Y_n) - n\, k(\alpha)} \quad . \qquad (4.7)$$

Posledica 4.1: Razmatramo slučajan hod i α tako da

$$k(\alpha) = \log \widehat{F}\,[\alpha] = \log E(e^{\alpha Y})$$

je konačno i definišemo L_n kao u (4.7), tj. $L_n = exp\{\alpha(Y_1 + \ldots + Y_n) - n\, k(\alpha)\}$. Onda promena mera odgovara slučajnom hodu sa promenjenim priraštajem raspodele

$$\widetilde{F}(x) = e^{-k(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} e^{\alpha y}\, F(dy).$$

Ključni koraci su sprovedeni u Posledici 4.1, koja kaže da za dato α, eksponencijalna promena mera odgovara promeni raspodele $F^{(d)}$ od $Y = U - T$ do

$$F_\alpha^{(d)}(x) = e^{-k^{(d)}\alpha} \int_{-\infty}^{x} e^{\alpha y}\, F^{(d)}(dy)$$

gde

$$k^{(d)}\alpha = \log \widehat{F}^{(d)}\,[\alpha] = \log \widehat{B}\,[\alpha] + \log \widehat{A}\,[-\alpha].$$

Treba napomenuti da ova promena mera može biti postignuta promenom između dolaska (interarrival) raspodele A i zahteva raspodele B do $A_\alpha^{(d)}$, tj. $B_\alpha^{(d)}$, gde

$$A_\alpha^{(d)}(dt) = \frac{e^{-\alpha t}}{\widehat{A}[-\alpha]}\, A(dt), \qquad B_\alpha^{(d)}(dx) = \frac{e^{-\alpha x}}{\widehat{B}[\alpha]}\, B(dx).$$

Neka $P_\alpha^{(d)}$se odnosi na model rizika obnove sa ovim promenjenim parametrima, imamo

$$E_\alpha^{(d)} e^{\beta Y} = \widehat{B}_\alpha^{(d)}[\beta]\, \widehat{A}_\alpha^{(d)}[-\beta] = \frac{\widehat{B}[\alpha+\beta]}{\widehat{B}[\alpha]} \cdot \frac{\widehat{A}[-\alpha-\beta]}{\widehat{A}[-\alpha]}$$

$$= \frac{\widehat{F}^{(d)}[\alpha + \beta]}{\widehat{F}^{(d)}[\alpha]} = \widehat{F}_{\alpha}^{(d)}[\beta].$$

Neka je

$$M(u) = inf\left\{n = 1,2,\dots : \ S_n^{(d)} > u\right\}$$

broj zahteva koji vode u propast i

$$\xi(u) = \ S_{\tau(u)} - u = S_{M(u)}^{(d)} - u$$

je preskok, onda dobijamo:

Propozicija 4.4 : $\forall\, \alpha$ tako da $k^{(d)'}(\alpha) \geq 0$,

$$\psi(u) = \ e^{-\alpha u} E_{\alpha}^{(d)} e^{-\alpha\xi(u) + M(u) k_{\alpha}^{(d)}}.$$

Razmotrimo sada Lundbergov slučaj, tj. , neka je $\gamma > 0$ rešenje $k^{(d)}(\gamma) = 0$. Imamo sledeću verziju Lundbergove nejednakosti i Kramer−Lundbergove aproksimacije.

Teorema 4.3: U nula odloženom slučaju

1) $\psi(u) \leq \ e^{-\gamma u}$;

2) $\psi(u) \sim \ Ce^{-\gamma u}$ gde $C = \lim_{u\to\infty} E_{\gamma}^{(d)} \ e^{-\gamma\xi(u)}$, pod pretpostavkom da F od $U - T$ je bez rešetki (lattice).

Dokaz: Propozicija 4.4 podrazumeva

$$\psi(u) = \ e^{-\alpha u} E_{\gamma}^{(d)} e^{-\alpha\xi(u)},$$

zahtev (1) odmah sledi iz ovoga i $\xi(u) > 0$ skoro sigurno, za zahtev (2) samo primetimo da $F_{\gamma}^{(d)}$ je bez rešetki kada je F takođe. Ovo se zna da je dovoljno za $\xi(0)$da bude bez rešetki u odnosu na $P_\gamma^{(d)}$, i na taj način $\xi(u)$ konvergira u raspodeli, pošto $P_\gamma^{(d)}(\tau(u) < \infty) = 1$ zbog $k^{(d)\prime}(\gamma) > 0.$ ■

Možemo primetiti i napomenuti da je računanje Kramer−Lundbergove konstante C mnogo komplikovanije za slučaj obnove nego za složen Poasonov slučaj gde je $C = \frac{1-\rho}{(\beta\, \hat{B}'[\gamma]-1)}$ koje smo ranije već pokazali.

Posledica 4.2: Za odložen slučaj $T_1 = s,\ \psi_s(u) \sim C_s \cdot e^{-\gamma u}$ gde $C_s = Ce^{-\gamma s}\hat{B}[\gamma]$. Za stacionarni slučaj, $\psi^{(s)}(u) \sim C^{(s)}e^{-\gamma u}$ gde

$$C^{(s)} = \frac{C(\hat{B}[\gamma]-1)}{\gamma\mu_A}.$$

4.3.2. Markovo aditivno predstavljanje

Osnovni Markov proces $\{J_t\}$ za Markov aditivni (dodatni) proces $\{X_t\} = \{(J_t, S_t)\}$ možemo definisati uzimanjem J_t kao ostatka vremena do sledećeg dolaska. Koristićemo napomenu koja kaže, uslov da je $\left\{\frac{h(J_t)}{h(J_0)}\ e^{\alpha S_t - tk(\alpha)}\right\}_{t\geq 0}$ martingal može biti izražen preko generatora $\mathcal{A}$ od $\{X_t\} = \{(J_t, S_t)\}$ kao što sledi. Sa obzirom na funkciju h na E, neka $h_\alpha(i,s) = e^{\alpha s}h(i)$. Onda želimo da odredimo h i $k(\alpha)$ tako da $E_i(e^{\alpha S_t}h(J_t)) = e^{t\,k(\alpha)}h(i)$. Za malo t, ovo dovodi do

$$h(i) + t\mathcal{A}h_\alpha(i,0) = h(i)\big(1 + tk(\alpha)\big), \text{ tj.}$$
$$\mathcal{A}h_\alpha(i,0) = k(\alpha)h(i)\ .$$

Tražimo funkciju $h(s)$ i $k(\alpha)$ (obe zavise od α) tako da $\mathcal{G}h_\alpha(s,0) = k(\alpha)h(s)$, gde je $\mathcal{G}$ generator od $\{X_t\} = \{(J_t, S_t)\}$ i $h_\alpha(s,y) = e^{\alpha y}h(s)$. Neka se $P_s,\ E_s$ odnose na slučaj $J_0 = s$. Za $s > 0$,

$$E_s[h_\alpha(J_{dt}, S_{dt})] = h(s-dt)e^{-\alpha dt} = h(s) - dt(\alpha h(s) + h'(s))$$

tako da je $\mathcal{G}h_\alpha(s,0) = -\alpha h(s) - h'(s)$. Izjednačavanjem sa $k(\alpha)h(s)$ i deljenjem sa $h(s)$ tj.

$$-\alpha h(s) - h'(s) = k(\alpha)h(s)\ /\!: h(s),$$

$$-\alpha - \frac{h'(s)}{h(s)} = k(\alpha)$$

dobijamo

$$\frac{h'(s)}{h(s)} = -\alpha - k(\alpha)$$

Rešavanjem diferencijalne jednačine metodom koja razdvaja promenljive

$$\frac{dh}{ds}\frac{1}{h(s)} = -\alpha - k(\alpha)$$

$$\frac{dh}{h(s)} = -(\alpha + k(\alpha))ds$$

i integraljenjem leve i desne strane, sledi

$$\ln h(s) = -(\alpha + k(\alpha))\, s$$

dobijamo

$$h(s) = e^{-(\alpha+k(\alpha))s}$$

(normalizujemo sa $h(0) = 1$). Da bi odredili k, pozivamo se na ponašanje u granici 0.Ovde

$$1 = h_\alpha(0{,}0) = E_0[h_\alpha(J_{dt}, S_{dt})] = E(e^{\alpha U}h(T))$$

Znači

$$1 = \int_0^\infty e^{\alpha y}B(dy)\int_0^\infty h(s)A(ds),$$

tj.

$$\hat{B}[\alpha]\hat{A}[-\alpha - k(\alpha)] = 1. \qquad (4.8)$$

Možemo za svako α da definišemo novu verovatnoću mera $P_{\alpha;s}$ upravljajući $\{(J_t,\, S_t)\}_{t\geq 0}$ puštajući faktor rizika L_t ograničen sa $\mathcal{F}_t = \sigma((J_v, S_v : 0 \leq v \leq t))$ da je

$$L_t = e^{\alpha S_t - tk(\alpha)}\frac{h(J_t)}{h(s)} = e^{\alpha S_t - tk(\alpha)}e^{-(\alpha+k(\alpha))(J_t - s)}$$

gde je $k(\alpha)$ rešenje (4.8).

Propozicija 4.5:Verovatnoća mera $P_{\alpha;s}$ je mera verovatnoća upravljajući procesom rizika obnove sa $J_0 = s$ i između dolazaka raspodele A i uslužnog vremena raspodele B promenjene u A_α, tj. B_α gde

$$A_\alpha(dt) = \frac{e^{-(\alpha+k(\alpha))t}}{\hat{A}[-\alpha-k(\alpha)]} A(dt), \qquad B_\alpha(dx) = \frac{e^{-\alpha x}}{\hat{B}[\alpha]} B(dx).$$

Dokaz: $P_{\alpha;s}(J_0 = s) = 1$ sledi trivijalno iz $L_0 = 1$. Dalje, kako $J_{T_1} = J_s = T_2$,

$$E_{\alpha;s}e^{\beta U_1+\delta T_2} = E_s\left[e^{\beta U_1+\delta T_2} L_{T_1}\right]$$
$$= E_s\left[e^{\beta U_1+\delta T_2} e^{\alpha S_{T_1}-T_1 k(\alpha)} e^{-(\alpha+k(\alpha))(J_{T_1}-s)}\right]$$

Kako je $S = U - T$, $S_{T_1} = U_1 - T_1$, a $T_1 = s$ sledi $S_{T_1} = U_1 - s$

$$= E_s\left[e^{\beta U_1+\delta T_2} e^{\alpha(U_1-s)-sk(\alpha)} e^{-(\alpha+k(\alpha))(T_2-s)}\right]$$

$$= E_s\left[e^{(\beta+\alpha)U_1} e^{(\delta-\alpha-k(\alpha))T_2} e^{\left(-\alpha-k(\alpha)+\alpha+k(\alpha)\right)s}\right]$$

$$= \hat{B}[\alpha+\beta]\hat{A}[\delta-\alpha-k(\alpha)] = \frac{\hat{B}[\alpha+\beta]}{\hat{B}[\alpha]}\frac{\hat{A}[\delta-\alpha-k(\alpha)]}{\hat{A}[-\alpha-k(\alpha)]}$$
$$= \hat{B}_\alpha[\beta]\,\hat{A}_\alpha[\delta],$$

koje pokazuje da U_1, T_2 su nezavisni sa raspodelama , B_α, tj. A_α kao što tvrdi. Jednostavno proširenje argumenta pokazuje da $U_1, \dots, U_n, T_2, \dots, T_{n+1}$ su nezavisni sa raspodelom A_α za T_k i B_α za U_k. ■

Možemo primetiti za složen Poasonov slučaj kod kog A ima eksponencijalnu raspodelu sa stopom β, (4.8) znači $\hat{B}[\alpha]\frac{\beta}{\beta+\alpha+k(\alpha)} = 1$ i sređivanjem dobijamo $k(\alpha) = \beta\left(\hat{B}[\alpha] - 1\right) - \alpha$, tj. Lundbergovu jednačinu koju smo već pokazali kod koeficijenta prilagođavanja.

Imajmo na umu da promenjene raspodele A i B generalno nisu iste za $P_{\alpha;s}$ i $P_\alpha^{(d)}$. Važan izuzetak je, međutim, određivanje koeficijenta prilagođavanja γ gde su definisane jednačine $k^{(d)}(\gamma) = 0$ i $k(\gamma) = 0$ iste.

Markovo aditivno gledište je bitno kada se proučavaju problemi koji se ne mogu svesti na ugrađeni slučajan hod, recimo verovatnoća propasti konačnog vremenskog intervala gde pristup preko ugrađenog slučajnog hoda daje rezultate verovatnoće propasti posle N zahteva, a ne posle vremena T.

Propozicija 4.6 : Neka $y < \frac{1}{k'(\gamma)}$, neka $\alpha_y > 0$ rešenje od $k'\left(\alpha_y\right) = \frac{1}{y}$, i definišemo $\gamma_y = \alpha_y - yk(\alpha_y)$. Onda

$$\psi_s(u, yu) \leq \frac{e^{-\left(\alpha_y + k(\alpha_y)\right)s}}{\hat{A}\left[-\alpha_y - k\left(\alpha_y\right)\right]} e^{-\gamma_y u} = e^{-\left(\alpha_y + k(\alpha_y)\right)s}\, \hat{B}\left[\alpha_y\right] e^{-\gamma_y u}$$

Posebno, za nula odložen slučaj $\psi_s(u, yu) \leq e^{-\gamma_y u}$.

Dokaz: Kako je $y < \frac{1}{k'(\gamma)}$ vidimo da je $k\left(\alpha_y\right) > 0$. Neka je $M(u)$ broj zahteva koji dovode do propasti. Onda je $J\left(\tau(u)\right) = T_{M(u)+1}$ i stoga

$$\psi_s(u, yu) = E_{\alpha_y;s}\left[e^{-\alpha_y S_{\tau(u)} + \tau(u) k(\alpha_y)} \frac{h(s)}{h\left(J_{\tau(u)}\right)} ;\ \tau(u) \leq yu\right]$$

$$\leq e^{-\alpha_y u + yuk(\alpha_y)} E_{\alpha_y;s}\left[\frac{e^{-\left(\alpha_y + k(\alpha_y)\right)s}}{e^{-(\alpha_y + k(\alpha_y)) T_{M(u)+1}}}\right]$$

$$= e^{-\left(\alpha_y + k(\alpha_y)\right)s} e^{-\gamma_y u} \hat{A}_{\alpha_y}\left[\alpha_y + k(\alpha_y)\right],$$

što je isto kao i potvrđena nejednakost za $\psi_s(u, yu)$. Zahtev za nula odloženi slučaj sledi integracijom u odnosu na A(ds). ∎

Napomena: Tumačenje slučajnog hoda takođe omogućava da se prevedu uopšteni (generalni) asimptotski rezultati verovatnoće propasti konačnog vremenskog intervala slučajnog hoda do odgovarajućeg modela obnove.

4.4. Model obnove kod faza- tipa raspodela

Neka je $U_1, U_2, \ . \ . \ .$ nezavisno identički raspodeljeno, sa zajedničkom raspodelom. Definišemo:

$$\mathscr{U}(A) = E \ \# \{n = 0, 1, \dots : U_1 + \ \cdots + U_n \epsilon A\}$$
$$= E \sum_{n=0}^{\infty} I(U_1 + \ \cdots + U_n \epsilon A).$$

Možemo misliti o U_i kao vremenu (roku) trajanja predmeta (npr. elektične sijalice) koje su zamenjene nakon propasti, onda je $\mathscr{U}(A)$ očekivani broj obnova (zamena) u A. Iz tog razloga mislimo na $\mathscr{U}(A)$ kao na meru obnove; ako je $\mathscr{U}$ apsolutno neprekidno u (0, ∞) u odnosu na Lebegovu meru, označavamo gustinu sa $u(x)$ i odnosi se na u kao gustina obnove. Ako je raspodela B eksponencijalna sa stopom β oblik obnove Poasonovog procesa, imamo $u(x) = \beta$. Eksplicitno računanje gustine obnove (ili mere obnove) se često misli kao o neizvodljivom za ostale raspodele, ali ipak problem ima algoritamsko prilagodljivo rešenje ako je B faza tip.

Raspodela B u (0, ∞) je fazni tip ako je B raspodela vremena (roka) trajanja (lifetime) završenog Markovog procesa $\{J_t\}_{t\geq 0}$ sa konačno mnogo stanja i vremenskim homogenim stopama promene. Raspodele faznog tipa sa $p = 1$ su upravo eksponencijalne raspodele.

Ponekad je potrebno razmotriti fazni tip raspodele, gde je početni vektor α definisan

$\|\alpha\| = \sum_{i\in E} \alpha_i < 1$. Postoje dva načina za tumačenje:

1) Fazni tip raspodele B je *neispravan (defektan)*, tj. $\|B\| = \|\alpha\| < 1$. Slučajna promenljiva U koja ima neispravnu raspodelu faznog tipa sa prikazom (α, T) je definisana da je ∞ na skupu verovatnoće $1 - \|\alpha\|$, ili samo dozvoljava U da bude nedefinisana na ovom dodatnom skupu.
2) Fazni tip raspodele B je *nula- modifikovan*, tj. mešavina faznog tipa raspodele sa prikazom$(\alpha/\|\alpha\|, T)$ sa težinom $\|\alpha\|$ i atom u nuli sa težinom $1 - \|\alpha\|$.

4.4.1. Zahtevi faznog tipa kod složenog Poasonovog modela

Posmatramo složen Poasonov (Kramer−Lundbergov) model, pri čemu sa β označavamo Poasonov intenzitet, B je raspodela zahteva, $\tau(u)$ je vreme propasti sa početnom rezervom u,

$\{S_t\}$ zahtev procesa viška, $G_+(\cdot) = P(S_{\tau(0)} \epsilon \cdot, \tau(0) < \infty)$ raspodela visina merdevina (lestvica) i $M = \sup_{t \geq 0} S_t$. Pretpostavljamo da je B fazni tip sa prikazom $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T})$.

Posledica 4.3: Pretpostavimo da raspodela zahteva veličine B je faznog tipa sa prikazom $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T})$. Onda:

a) G_+ je neispravan fazni tip sa prikazom$(\boldsymbol{\alpha}_+, \boldsymbol{T})$ gde je $\boldsymbol{\alpha}_+$ data sa $\boldsymbol{\alpha}_+ = -\beta \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{T}^{-\mathbf{1}}$, i M je nula-modifikovan fazni – tip sa prikazom$(\boldsymbol{\alpha}_+, \boldsymbol{T} + \boldsymbol{t}\boldsymbol{\alpha}_+)$.

b) $\psi(u) = \boldsymbol{\alpha}_+ e^{(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{t}\boldsymbol{\alpha}_+)u} \boldsymbol{e}$.

Imajte na umu posebno da $\rho = \|G_+\| = \boldsymbol{\alpha}_+ \boldsymbol{e}$.

Za dokaz nam je potrebna sledeća Posledica 4.4: Razmotrimo proces obnove između dolazaka koji su faznog tipa sa prikazom $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T})$, i neka je $\mu_B = -\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{T}^{-\mathbf{1}} e$ sredina od B. Onda:
a)Višak trajanja $\xi(t)$ u trenutku t je faznog tipa sa prikazom $(\boldsymbol{\nu}_t, \boldsymbol{T})$ gde $\boldsymbol{\nu}_t = \boldsymbol{\alpha} \cdot e^{(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{t}\boldsymbol{\alpha})t}$;
b)$\xi(t)$ ima ograničenu raspodelu kad $t \to \infty$, koja je faznog tipa sa prikazom $(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{T})$ gde $\boldsymbol{\nu} = -\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{T}^{-\mathbf{1}} / \mu_B$. Ekvivalentno, gustina je $\boldsymbol{\nu} e^{x} t = \bar{B}(x)/\mu_B$.

Dokaz: Rezultat odmah dobijamo kombinujući Polaček-Hinčinovu formulu sa opštim rezultatom raspodele faznog tipa: za (a) koristimo prikaz B_0 iz Posledice 4.4. Za (b), predstavljamo maksimum M kao vreme trajanja završenog procesa obnove i koristimo sledeću Posledicu: Razmotrimo završni proces obnove za između dolaske koji su neispravni faza-tip sa prikazom $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T})$, tj. $\|\boldsymbol{\alpha}\| < 1$. Onda vreme trajanja je nula modifikovan fazni tip sa prikazom ($\boldsymbol{\alpha}$, T+t $\boldsymbol{\alpha}$). ■

Za sledeći primer potrebna nam je dijagonalizacija kod faza tipa: Ako je $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$, i λ_1 najveći realni deo (recimo u uslovima Peron−Frobenijusove teoreme), otuda λ_2 je takvo zbog $\lambda_2 = tr(Q)$. Dobijamo $\lambda_1 = \frac{q_{11} + q_{22} + \sqrt{D}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{q_{11} + q_{22} - \sqrt{D}}{2}$, gde je $D = (q_{11} - q_{22})^2 + 4 q_{12} q_{21}$. Onda

$$\pi = (\pi_1 \quad \pi_2) = a(q_{21} \quad \lambda_1 - q_{11})$$

$$k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} q_{12} \\ \lambda_1 - q_{11} \end{pmatrix}$$

Gde su a, b konstante takve da $\pi k = 1$, tj. $ab(q_{12}q_{21} + (\lambda_1 - q_{11})^2) = 1$. Stoga

$$e^{Qt} = e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} \pi_1 k_1 & \pi_2 k_1 \\ \pi_1 k_2 & \pi_2 k_2 \end{pmatrix} + e^{\lambda_2 t}\begin{pmatrix} \pi_2 k_2 & -\pi_2 k_1 \\ -\pi_1 k_2 & \pi_1 k_1 \end{pmatrix}.$$

Primer 4.1

Pretpostavimo da je $\beta = 3$ i $b(x) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot\ e^{-3x} + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot\ e^{-7x}$.

Takvo b je hipereksponencijalno (mešovita eksponencijalna raspodela) sa $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ tako da

$$\boldsymbol{T^{-1}} = \frac{1}{\det T} adjT = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha}_+ = -\beta\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{T^{-1}} = -3\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{14} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{T} + \boldsymbol{t}\boldsymbol{\alpha}_+ = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{9}{14} \\ \frac{7}{2} & -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

Posmatramo $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{t}\boldsymbol{\alpha}_+$**,** dobijamo

$$D = 5,$$

$$\lambda_1 = -1,$$

$$\lambda_2 = -6,\ ab = \frac{2}{5}$$

$$\pi = a(\begin{matrix} \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix}),$$

$$k = b\begin{pmatrix} \frac{9}{14} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \pi_1 k_1 & \pi_2 k_1 \\ \pi_1 k_2 & \pi_2 k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{9}{70} \\ \frac{7}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{9}{14} \\ \frac{7}{2} & -\frac{11}{2} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{9}{70} \\ \frac{7}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{9}{70} \\ -\frac{7}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

$$e^{(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{t}\boldsymbol{\alpha}_+)u} = e^{-u}\begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{9}{70} \\ \frac{7}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} + e^{-6u}\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{9}{70} \\ -\frac{7}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

$$\psi(u) = \alpha_+ e^{(T+t\alpha_+)u} e = e^{-u} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{9}{70} \\ \frac{7}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-6u} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{9}{70} \\ -\frac{7}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= e^{-u} \begin{pmatrix} \frac{84}{140} & \frac{12}{140} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-6u} \begin{pmatrix} \frac{-14}{140} & \frac{18}{140} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{24}{35} e^{-u} + \frac{1}{35} e^{-6u}.$$

Tabela 4.1: Tabela verovatnoće propasti kod raspodele sa faznim tipom.

u	0	10	10^2	10^3	10^7
$\psi(u)$	0.714275713	$3{,}11318041 \cdot 10^{-5}$	$2{,}550909241 \cdot 10^{-44}$	0	0

Možemo primetiti kad su početne rezereve 10^3 sigurno ne dolazi do propasti.

Tabela 4.2: Tabela verovatnoće propasti kod mešovite raspodele sa parametrima $\alpha = 3, \nu = 7, \eta = 30\%$.

u	0	10	10^2	10^3	10^7
$\psi(u)$	0.769230769	0,018890091	$1{,}594803173 \cdot 10^{-16}$	0	0

Primer 4.2: Posmatraćemo primer iz treće glave, koji je glasio: Izračunati verovatnoću propasti za mešovitu eksponencijalnu raspodelu sa $b(x) = 0{,}78 \cdot (\frac{1}{190744933{,}98} \cdot e^{-\frac{1}{190744933{,}98}x} + \frac{1}{84535691{,}61} \cdot e^{-\frac{1}{84535691{,}61}x})$, opterećenjem $\eta = 30\ \%$. Pretpostavićemo da je $\beta = 3$ kao i u prethodnom primeru.

$$\boldsymbol{T^{-1}} = \frac{1}{\det T} adjT = \begin{pmatrix} -7{,}336125762 \cdot 10^{-25} & 0 \\ 0 & -3{,}251276205\ 10^{-25} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_+ = (1{,}716653428 \cdot 10^{-24} \quad 7{,}60798632 \cdot 10^{-25})$$

$$\boldsymbol{T} + \boldsymbol{t\alpha}_+ = \begin{pmatrix} -5{,}242603196 \cdot 10^{-9} & 3{,}988565339 \cdot 10^{-33} \\ 2{,}080684786 \cdot 10^{-32} & -1{,}182932299 \cdot 10^{-8} \end{pmatrix}$$

$$D = 4{,}33848780 \cdot 10^{-17},$$

$$\lambda_1 = -\,0{,}0000000052\ ,$$

$$\lambda_2 = -\,0{,}0000000118,$$

$$ab = 5,50954382 \cdot 10^{20},$$

$$\begin{pmatrix} \pi_1 k_1 & \pi_2 k_1 \\ \pi_1 k_2 & \pi_2 k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}57232764 \cdot 10^{-44} & 9{,}36212797 \cdot 10^{-23} \\ 4{,}88387066 \cdot 10^{-22} & 1{,}0000001921 \end{pmatrix}$$

$$e^{(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{t\alpha}_+)\boldsymbol{u}} = e^{-0{,}0000000052 \cdot u} \begin{pmatrix} 4{,}57232764 \cdot 10^{-44} & 9{,}36212797 \cdot 10^{-23} \\ 4{,}88387066 \cdot 10^{-22} & 1{,}0000001921 \end{pmatrix} + e^{-0{,}0000000118 \cdot u} \begin{pmatrix} 1{,}0000001921 & -9{,}36212797 \cdot 10^{-23} \\ -4{,}88387066 \cdot 10^{-22} & 4{,}57232764 \cdot 10^{-44} \end{pmatrix}$$

$\psi(u) = \alpha_+ e^{(T+t\alpha_+)u} e == 7,607988 \cdot\ 10^{-25} \cdot e^{-0{,}0000000052 \cdot u} + 1,71665376 \cdot 10^{-24} e^{-0{,}0000000118 \cdot u}$.

Tabela 4.3: Tabela verovatnoće propasti kod raspodele sa faznim tipom

u	0	10^7	10^8	10^9	10^{12}
$\psi(u)$	2,47745260$\cdot 10^{-24}$	2,24783168$\cdot 10^{-24}$	9,79801720$\cdot 10^{-25}$	4,20987832$\cdot 10^{-27}$	0

Možemo primetiti kako je veoma mala verovatnoća propasti kada su nam početne rezerve jednake nuli, zaključujemo da nema velike razlike kad su početne rezerve jednake nuli kao i kad su 10^7, dok kad su rezerve 10^{12} sledi da sigurno neće doći do propasti. Ako bi poredili ove verovatnoće sa verovatnoćama koje smo dobili kod aproksimacija (glava 3), vidimo da je, kod modela obnove kad je raspodela faznog tipom dosta manja verovatnoća propasti.

4.4.2. Model obnove

Posmatramo model obnove koji smo definisali u prethodnom poglavlju, sa A označavamo raspodelu između dolaska i B raspodelu vremena usluga. Pretpostavimo $\rho = \mu_B/\mu_A < 1$ i B je fazni tip sa prikazom $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T})$. Hoćemo da izvedemo prikaz faznog tipa verovatnoće propasti $\psi(u)$ i $\psi^{(s)}(u)$ (kao što smo već rekli $\psi(u)$ se odnosi na nula odložen slučaj,a $\psi^{(s)}(u)$ na stacionaran slučaj). Za složen Poasonov slučaj, ovo smo naveli u Potpoglavlju 4.4.1, napomenimo da je raspodela G_+ na rastuću visinu merdevina S_{τ_+} obavezno (neispravni) fazni tip sa prikazom $(\boldsymbol{\alpha}_+, \boldsymbol{T})$ za neki vektor $\boldsymbol{\alpha}_+ = (\alpha_+;\ j)$. To jest, ako definišemo $\{m_x\}$ kao i za Poasonov slučaj:

Propozicija 4.7: U nula odloženom slučaju

a) G_+ je fazni tip sa prikazom $(\boldsymbol{\alpha}_+, \boldsymbol{T})$, gde $\boldsymbol{\alpha}_+$ je (neispravna) raspodela od m_0 ;

b) maksimum zahteva viška M je vreme(rok) trajanja(lifetime) od $\{m_x\}$;

c) $\{m_x\}$ je (završni) Markov proces na E, sa matricom intenziteta $\boldsymbol{Q}$ koja je data sa $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{t}\boldsymbol{\alpha}_+$.

Ključna razlika u odnosu na Poasonov slučaj je da je mnogo teže proceniti $\boldsymbol{\alpha}_+$. Zapravo, oblik u kom izvodimo $\boldsymbol{\alpha}_+$ za model obnove je jedinstveno rešenje problema fiksne tačke $\boldsymbol{\alpha}_+ = \varphi(\boldsymbol{\alpha}_+)$, koja se za numeričke svrhe može rešiti iteracijom. Ipak, računanje prve visine merdevina u stacionarnom slučaju je jednostavno:

Propozicija 4.8: Raspodela $G_+^{(s)}$ prve visine merdevina zahteva viška procesa $\left\{S_t^{(s)}\right\}$ za stacionarni slučaj je faznog tipa sa prikazom $(\boldsymbol{\alpha}^{(s)}, \boldsymbol{T})$, gde $\boldsymbol{\alpha}^{(s)} = -\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{T}^{-1}/\mu_A$.

Dokaz: Očigledno, Palm raspodela zahteva viška je upravo B. Zbog toga, iz Teoreme: Razmatramo opšti stacionarni zahtev viška procesa $\{S_t^*\}_{t\geq 0}$, neka U_0 bude slučajna promenljiva koja ima Palm raspodelu zahteva veličine i $F(x) = P(U_0 \leq x)$ njegova raspodela. Pretpostavimo da $S_t^* \to -\infty$ skoro sigurno i da $\rho = \beta E(U_0) < 1$. Onda raspodela visina merdevina G_+^* je data sa (neispravnom) gustinom $g_+^*(x) = \beta\, \bar{F}(x)$.
Dobijamo $G_+^{(s)} = \rho B_0$, gde B_0 je stacionarna raspodela viška koja odgovara B. Ali, prema Posledici 4.4, B_0 je fazni tip sa prikazom $(-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{T}^{-1}/\mu_B\, , \boldsymbol{T})$. ■

Propozicija 4.9: $\boldsymbol{\alpha}_+$ zadovoljava $\boldsymbol{\alpha}_+ = \varphi(\boldsymbol{\alpha}_+)$, gde

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha}_+) = \boldsymbol{\alpha}\hat{A}[\boldsymbol{T} + \boldsymbol{t}\boldsymbol{\alpha}_+] = \boldsymbol{\alpha}\int_0^\infty e^{(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{t}\boldsymbol{\alpha}_+)y} A(dy). \quad (4.9)$$

Dokaz:
Uslovljavamo $T_1 = y$ i definišemo $\{m_x^*\}$ iz $\left\{S_{t+y} - S_{y-}\right\}$ na isti način kao što je $\{m_x\}$ definisan iz $\{S_t\}$. Onda $\{m_x^*\}$ je Markov sa istim intenzitetom promena kao $\{m_x\}$, ali sa

početnom raspodelom $\boldsymbol{\alpha}$ umesto $\boldsymbol{\alpha}_+$. Takođe, očigledno je $m_0 = m_y^*$. Pošto uslovna raspodela od m_y^* data sa $T_1 = y$ je $\boldsymbol{\alpha} e^{\boldsymbol{Q}y}$, sledi integracijom y iz te raspodele $\boldsymbol{\alpha}_+$ od m_0 je data konačnim izrazom (4.9). ■

Sada smo skoro skupili sve delove od glavnog rezultata i dobijamo:

Teorema 4.4: Razmotrimo model obnove sa raspodelom između dolaska A i zahtev veličine raspodele B faznog tipa sa prikazom $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T})$. Onda

$$\psi(u) = \boldsymbol{\alpha}_+ e^{(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{t}\boldsymbol{\alpha}_+)u}\boldsymbol{e}, \quad \psi^{(s)}(u) = \boldsymbol{\alpha}^{(s)} e^{(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{t}\boldsymbol{\alpha}_+)u}\boldsymbol{e}, \tag{4.10}$$

gde $\boldsymbol{\alpha}_+$ zadovoljava (4.9) i $\boldsymbol{\alpha}^{(s)} = -\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{T}^{-1}/\mu_A$. Osim toga, $\boldsymbol{\alpha}_+$ možemo izračunati iteracijom (4.9), tj. sa

$$\boldsymbol{\alpha}_+ = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\alpha}_+^{(n)} \text{ gde } \boldsymbol{\alpha}_+^{(0)} = 0, \boldsymbol{\alpha}_+^{(1)} = \varphi\left(\boldsymbol{\alpha}_+^{(0)}\right), \boldsymbol{\alpha}_+^{(2)} = \varphi\left(\boldsymbol{\alpha}_+^{(1)}\right), \ldots \tag{4.11}$$

Dokaz:

Prvi izraz u (4.10) sledi iz Propozicije 4.7, napominjemo da raspodela od m_0 je $\boldsymbol{\alpha}_+$. Drugi, sledi na sličan način, uz napomenu da samo prvi stepenik merdevina u stacionarnom slučaju ima različitu raspodelu, i to je dato u Propoziciji 4.8; stoga, maksimum zahteva viška za stacionarni slučaj ima sličan prikaz kao u Propoziciji 4.7 (b), samo sa početnom raspodelom $\alpha^{(s)}$ za m_0.

Ostaje da dokažemo iteracijsku šemu (4.11). Izraz $\boldsymbol{t}\boldsymbol{\beta}$ u $\varphi(\boldsymbol{\beta})$ predstavlja povratnu informaciju sa stopom vektora $\boldsymbol{t}$ (vektorskom brzinom t) i povratnu informaciju verovatnoće vektora $\boldsymbol{\beta}$. Otuda $\varphi(\boldsymbol{\beta})$ (definisan na domenu verovatnoće(subprobability) vektora $\boldsymbol{\beta}$) je rastuća funkcija od $\boldsymbol{\beta}$. Posebno, $\boldsymbol{\alpha}_+^{(1)} \geq 0 = \boldsymbol{\alpha}_+^{(0)}$, podrazumeva

$$\boldsymbol{\alpha}_+^{(2)} = \varphi\left(\boldsymbol{\alpha}_+^{(1)}\right) \geq \varphi\left(\boldsymbol{\alpha}_+^{(0)}\right) = \boldsymbol{\alpha}_+^{(1)}$$

i (indukcijom) $\left\{\boldsymbol{\alpha}_+^{(n)}\right\}$ je rastući niz takav da $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\alpha}_+^{(n)}$ postoji. Slično, $0 = \boldsymbol{\alpha}_+^{(0)} \leq \boldsymbol{\alpha}_+$ daje

$$\boldsymbol{\alpha}_+^{(1)} = \varphi\left(\boldsymbol{\alpha}_+^{(0)}\right) \leq \varphi(\boldsymbol{\alpha}_+) = \boldsymbol{\alpha}_+$$

i indukcijom dobijamo $\boldsymbol{\alpha}_+^{(n)} \leq \boldsymbol{\alpha}_+$ za sve n. Prema tome $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\alpha}_+^{(n)} \leq \boldsymbol{\alpha}_+$.

Za dokazivanje suprotne nejednakosti, neka je $F_n = \{T_1 + \ldots + T_{n+1} > \tau_+\}$ događaj da $\{m_x^*\}$ ima najviše n dolazaka u $[T_1, \tau_+]$, i neka je $\tilde{\alpha}_{+;i}^{(n)} = P\left(m_{T_1}^* = i;\ F_n\right)$. Očigledno, $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_+^{(n)} \uparrow \boldsymbol{\alpha}_+$, tako da bi završili dokaz dovoljno je pokazati da $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_+^{(n)} \leq \boldsymbol{\alpha}_+^{(n)}$ za sve n. Za $n = 0$, obe veličine su samo 0. Pretpostavimo da je tvrdnja prikazana za $n-1$ .Tada svako potezanje $\{S_{t+T_1} - S_{T_1-}\}$ može sadržati najviše $n-1$ dolazaka (n dolaska su isključeni zbog početnog dolaska u vremenu T_1). Sledi da iz F_n povratne informacije za $\{m_x^*\}$ posle svakog stepenika merdevina ne može preći $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_+^{(n-1)}$ tako da

$$\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_+^{(n)} \leq \alpha \int_0^\infty e^{(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{t}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_+^{(n-1)})y} A(dy)$$

$$\leq \alpha \int_0^\infty e^{\left(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{t}\boldsymbol{\alpha}_+^{(n-1)}\right)y} A(dy) = \varphi\left(\boldsymbol{\alpha}_+^{(n-1)}\right) = \boldsymbol{\alpha}_+^{(n)}. \qquad \blacksquare$$

Sledeće navodimo alternativni algoritam, koji povezuje podešavanja faznog tipa i klasičnu kompleksnu oblast pristupa modela obnove. U tom slučaju, neka F bude raspodela od

$U_1 - T_1$. Onda

$$\widehat{F}[r] = \boldsymbol{\alpha}(-r\boldsymbol{I} - \boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{t}\,\hat{A}[-r] \qquad (4.12)$$

kad god $Ee^{\Re(r)U} < \infty$. Međutim, (4.12) ima smisla i daje analitički nastavak od $\widehat{F}[\cdot]$ sve dok $-r \notin sp(\boldsymbol{T})$.[3]

Teorema 4.5: Neka je r neki kompleksan broj sa $\Re(r) > 0, -r \notin sp(\boldsymbol{T})$. Onda $-r$ je sopstvena vrednost od $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{t}\boldsymbol{\alpha}_+$ ako i samo ako $1 = \widehat{F}[r] = \hat{A}[-r]\widehat{B}[r]$, sa $\widehat{B}[r], \widehat{F}[r]$ se tumači u smislu od analitičkog nastavka funkcije generatrise momenta. U tom slučaju, odgovarajući pravi sopstveni vektor može se uzeti kao $(-r\boldsymbol{I} - \boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{t}$.

Dokaz: Pretpostavimo prvo $\boldsymbol{Qh} = -r\boldsymbol{h}$. Onda $e^{\boldsymbol{Q}x}\boldsymbol{h} = e^{-rx}\boldsymbol{h}$ i otuda

$$-r\boldsymbol{h} = \boldsymbol{Qh} = \left(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{t\alpha}\hat{A}[\boldsymbol{Q}]\right)\boldsymbol{h} = \boldsymbol{Th} + \hat{A}[-r]\boldsymbol{t\alpha h}. \quad (4.13)$$

Kako $-r \notin sp(\boldsymbol{T})$, ovo podrazumeva da $\boldsymbol{\alpha h}\hat{A}[-r] \neq 0$, i otuda možemo da pretpostavimo da je $\boldsymbol{h}$ normalizovano tako da je $\boldsymbol{\alpha h}\hat{A}[-r] = 1$. Zatim (4.13) daje $\boldsymbol{h} = (-r\boldsymbol{I} - \boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{t}$. Prema tome normalizacija (4.12) je ekvivaletna sa $\widehat{F}[r] = 1$.

Pretpostavimo sledeće $\widehat{F}[r] = 1$. Pošto $\Re(r) > 0$ i G_- je koncentrisan na $(-\infty, 0)$, imamo $\left|\widehat{G}_-[r]\right| < 1$, i otuda sa identitetom Viner–Hopf faktorizacije imamo $\widehat{G}_+[r] = 1$ koja prema Teoremi: Neka je B faza – tip sa prikazom (E, α, T). Onda: funkcija generatrise momenta $\widehat{B}[r] = \int_0^\infty e^{rx} B(dx)$ je $\boldsymbol{\alpha}(-r\boldsymbol{I} - \boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{t}$.

[3] sp(T) je skup svih sopstvenih vrednosti T(spektra)

Znači da $\boldsymbol{\alpha}_+(-r\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{t}=1$. Stoga sa $\boldsymbol{h}=(-r\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{t}$ dobijamo

$$\boldsymbol{Qh}=(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{t\alpha}_+)\boldsymbol{h}=\boldsymbol{Th}+\boldsymbol{t\alpha}_+\boldsymbol{h}=\boldsymbol{T}(-r\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{t}+\boldsymbol{t},$$

Kako važi $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{T}+\boldsymbol{t\alpha}_+\,,\boldsymbol{T}=\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{t\alpha}_+=-\boldsymbol{r}-\boldsymbol{t\alpha}_+$

$$=(-\boldsymbol{r}-\boldsymbol{t\alpha}_+)(-r\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{t}+\boldsymbol{t}=-r(-r\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t\alpha}_+(-r\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{t}+\boldsymbol{t}$$

$$=-r(-r\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}+\boldsymbol{t}=-r(-r\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{t}=-r\boldsymbol{h}. \quad \blacksquare$$

4.5. Model obnove u prisustvu teških repova

Gruba razlika između lakih i teških repova je: funkcija generatrise momenta $\hat{B}[r]=\int e^{rx}\ B\ (dx)$ je konačna za neko $r>0$ u slučaju lakih repova i beskonačna za sve $r>0$ u slučaju teških repova. Eksponencijalna promena mera u brojnim slučajevima zahteva lake repove. Osnovni slučajevi gde su kriterijumi lakih repova narušeni:

1) Raspodele sa regularnim varirajućim repom, $\overline{B}(x)=L(x)/x^{\alpha}$ gde $\alpha>0$ i $L(x)$ sporo varira, $L(tx)/L(x)\to 1, x\to\infty$ za sve $t>0$;
2) Lognormalna raspodela (raspodela od e^{U} gde $U\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$)
3) Vejbulova raspodela sa smanjenom stopom propasti, $\bar{B}(x)=e^{-x^{\beta}}$ sa $0<\beta<1$.

Definicija za teške repove $\hat{B}[r]=\infty$ za sve $r>0$ je suviše opšta da omogući opšte netrivijalne rezultate v-će propasti, i umesto toga radićemo u klasi $\mathscr{S}$ subeksponencijalne raspodele. Zahtevamo da je B koncentrisano u (0, ∞) i onda kažemo da je B subeksponencijalna (B∈ $\mathscr{S}$) ako

$$\frac{\overline{B^{*2}}\ (x)}{\bar{B}(x)}\to 2, x\to\infty. \quad (4.14)$$

Ovde B^{*2} je kvadrat konvolucije, to je raspodela zbira nezavisnih slučajnih promenljivih $X_1\ i\ X_2$ sa raspodelom B. U smislu slučajnih promenljivih (4.14) znači

$$P(X_1+\ X_2>x)\sim 2P(X_1>x).$$

Dobijamo da Lognormalna i Vejbulova raspodela su subeksponencijalne i svaka raspodela B sa regularno varirajućim repom je subeksponencijalna.

Posmatramo model obnove sa zahtevom veličine raspodele B i raspodelom između dolaska A kao u prethodnim poglavljima. Neka je U_i $i-ti$ zahtev, T_i $i-to$ vreme između dolaska i

$$X_i = U_i - T_i$$

$$S_n^{(d)} = X_1 + \cdots + X_n,\ M = \sup_{\{n=0,1,\cdots\}} S_n^{(d)},\ \vartheta(u) = inf\left\{n: S_n^{(d)} > u\right\}.$$

Onda $\psi(u) = P(M > u) = P(\vartheta(u) < \infty)$. Pretpostavimo pozitivno sigurno opterećenje, tj. $\rho = \mu_B/\mu_A < 1$. Glavni rezultat je:

Teorema 4.6: Pretpostavimo da a) stacionarni višak raspodele [4]B_0 od B je subeksponencijalan i da b) B sebe zadovoljava $\bar{B}(x-y)/\bar{B}(x) \to 1$ uniformno na kompaktnom y intervalu. Onda

$$\psi(u) \sim \frac{\rho}{1-\rho} \overline{B_0}(u),\ \ u \to \infty \qquad (4.15)$$

(Imajte na umu b) posebno važi ako $B \in \mathscr{S}$.)

Dokaz je zasnovan na zapažanju da takođe u postavljanju obnove, postoji prikaz od M sličan Polaček−Hinčinovoj formuli. Da privedemo kraju, neka je $\vartheta_+ = \vartheta(0)$ vreme prve u usponu merdevine od $\left\{S_n^{(d)}\right\}$,

$$G_+(A) = P\left(S_{\vartheta_+} \in A, \vartheta_+ < \infty\right) = P(S_{\tau_+} \in A,\ \tau_+ < \infty)$$

Gde $\tau_+ = T_1 + \cdots + T_{\vartheta_+}$ označava vreme prve ulazne(u usponu) merdevine od neprekidnog vremenskog zahteva viška procesa $\{S_t\}$. Stoga G_+ je raspodela visine merdevina (lestvica) u usponu (koja je neispravna zbog $\mu_B < \mu_A$). Dalje definišemo $\theta = \|G_+\| = P(\vartheta_+ < \infty)$. Onda

$$M \underset{=}{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{K} Y_i \qquad (4.16)$$

gde K ima geometrijsku raspodelu sa parametrom θ, $P(K = k) = (1-\theta)\theta^k$ i $Y_1, Y_2, \ldots$ su nezavisni od K i nezavisno identički raspodeljeni sa raspodelom G_+/θ (raspodela S_{ϑ_+} je određena $\tau_+ < \infty$). Kao i za složen Poasonov model, ovaj prikaz će biti naše osnovno vozilo da se izvede asimptotski rep od M, ali se suočavamo sa dodatnim teškoćama da ni konstanta θ

---

[4] $B_0(x) = \int_0^x \bar{B}\,(y)dy/\mu_B$ označava stacionarni višak raspodele

i raspodela od Y_i nisu eksplicitne. Neka F označava raspodelu od X_i i $\bar{F}_I$ rep integracije, $\bar{F}_I(x) = \int_x^\infty \bar{F}(y)\,dy, x > 0$.

Lema 4.1: $\bar{F}(x) \sim \bar{B}(x),\ x \to \infty$ i otuda $\bar{F}_I(x) \sim \mu_B \bar{B}_0(x)$.

Dokaz: Prema dominirajućoj konvergenciji i b)

$$\frac{\bar{F}(x)}{\bar{B}(x)} = \int_0^\infty \frac{\bar{B}(x+y)}{\bar{B}(x)} A(dy) \to \int_0^\infty 1\, A(dy) = 1. \blacksquare$$

Ova lema implicira da je (4.15) ekvivaletno sa

$$P(M > u) \sim \frac{1}{|\mu_F|} \bar{F}_I(u), u \to \infty, \qquad (4.17)$$

i mi ćemo to dokazati u ovom obliku. Pišemo $\overline{G_+}(x) = G_+(x, \infty) = P(S_{\vartheta_+} > x, \vartheta_+ < \infty)$. Neka je dalje $\vartheta_- = inf\left\{n > 0 \colon S_n^{(d)} \le 0\right\}$ vreme(epoch) prve opadajuće merdevine, $G_-(A) = P(S_{\vartheta_-} \in A)$ raspodela visine opadajuće (silazne) merdevine ($\|G_-\| = 1$ zbog $\mu_B < \mu_A$) i neka je μ_{G_-} sredina G_-.

Lema 4.2: $\overline{G_+}(x) \sim \bar{F}_I(x)/\left|\mu_{G_-}\right|, x \to \infty$

Dokaz Teoreme 4.6: Iz leme 4.2, $P(Y_i > x) \sim \bar{F}_I(x)/(\theta\left|\mu_{G_-}\right|)$. Stoga, koristeći dominantnu konvergenciju upravo kao i za složen Poasonov model, (4.16) daje

$$P(M > u) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (1-\theta)\theta^k\, k \frac{\bar{F}_I(u)}{\theta\left|\mu_{G_-}\right|} = \frac{\bar{F}_I(u)}{(1-\theta)\left|\mu_{G_-}\right|}.$$

Diferenciranjem identiteta Viner−Hopf faktorizacije

$$1 - \hat{F}[s] = (1 - \hat{G}_-[s])(1 - \hat{G}_+[s]),$$

i neka $s = 0$ daje

$$-\mu_F = -(1-1)\hat{G}_+'[0] - (1 - \|G_+\|)\mu_{G_-} = -(1-\theta)\mu_{G_-}.$$

$$\frac{\bar{F}_I(x)}{(1-\theta)\left|\mu_{G_-}\right|} \sim \frac{\mu_B \bar{B}_0(u)}{\mu_A - \mu_B} = \frac{\rho \bar{B}_0(u)}{1-\rho}. \quad \blacksquare$$

4.6. Model obnove kod Gerber−Šiju funkcije

Kombinacija vremena propasti $\tau(u)$, deficita pri propasti $\xi(u) = \left|R_{\tau(u)}\right|$ i viška pre propasti $R_{\tau(u)-}$ je oblika očekivane snižene takse kod propasti

$$m(u) = E\left[e^{-\delta\tau(u)}\omega\left(R_{\tau(u)-},\ \xi(u);\ \tau(u) < \infty\right)\right], \quad (4.18)$$

gde je taksa ω nenegativna funkcija viška pre propasti i deficita pri propasti. Izraz $m(u)$ obično nazivamo Gerber−Šiju funkcija. Za $\omega \equiv 1$ i $\delta = 0$ izraz (4.18) svodimo na verovatnoću propasti $\psi(u)$, i za $\omega \equiv 1$ i $\delta > 0$ dolazimo (sa malom zloupotrebom terminologije) do Laplasove transformacije vremena propasti $\tau(u)$.

Posmatramo nula odložen model obnove sa raspodelom vremena između dolaska $A(t)$ i gustinom $a(t)$. Ako je T_1 vreme prvog zahteva, standardna diskusija obnove daje

$m(u) = E\left(e^{-\delta T_1}m(u + T_1 - U_1)\right)$. Tj. $m(u)$ je dato sa

$$\int_0^\infty e^{-\delta t}\ a(t)\left(\int_0^{u+t} m(u+t-y)B(dy) + \int_{u+t}^\infty \omega(u+t, y-u-t)B(dy)\right)dt. \quad (4.19)$$

4.6.1. Promena mera

Podsetimo se iz Odeljka 4.3.1 ugrađenog slučajnog hoda modela obnove, tj. ako samo razmatramo diskretno vreme tačke u kom se zahtev desio, rezultat diskretnog vremenskog procesa je slučajan hod, a posebno Markov. Međutim, ovde želimo da zadržimo informacije o vremenu propasti i viška pre propasti (koje se obe gube samo u pogledu ugrađenog slučajnog hoda) ovaj tip Markovizacije procesa je suviše grub za predstavljene namere. Alternativni i elegantan način da se Markovizuje proces je da razmatramo slučajnu promenljivu $V_t = T_{N_t+1} - t$ kao dodatno stanje promenljive, koje je vreme preostalo do sledećeg zahteva. Definišemo $k(r)$ kao rešenje od

$$\hat{B}[r]\hat{A}[-r - k(r)] = 1, \quad (4.20)$$

Za svako r sa $\hat{B}[r] < \infty$. Lako se može pokazati osobinama funkcije momenta generatrise da za $r \geq 0$ ovo rešenje $k(r)$ postoji, jedinstveno je, i da $k(r)$ je strogo konveksna funkcija na skupu gde ona postoji. Takođe, $k(0) = 0$ i $k'(0) = 0$ pod uslovima neto profita. Dalje, uz malo truda, može se pokazati da

$$L_t = \widehat{B}[r]e^{-(r+k(r))V_t}e^{rS_t}e^{-k(r)t}$$

je martingal u odnosu na filtraciju generisanu sa $\{(R_t,\ V_t)\}$. L_t se može sada koristiti kao proces faktora rizika (likelihood ratio). Pod merom $P_r[\cdot] = E[L_t\,;\cdot]$, proces rizika R_t ostaje Sper Andersonov proces rizika sa zahtevom raspodele $B_r(dy) = \hat{A}[-r - k(r)]e^{ry}B(dy)$ i raspodelom vremena između zahteva promenjene $A_r(dt) = \widehat{B}[r]e^{-(r+k(r))t}\,Adt$. Ako $r > argmin\,k(r)$, onda drift pod novom merom je negativan $(-k'(r) < 0)$ i zbog toga $P_r(\tau(u) < \infty) = 1$.

Pod merom P_r, Gerber−Šiju funkcija $m(u)$ se može izraziti kao

$$\hat{A}[-r - k(r)]E_r\left[e^{(r+k(r))V_{\tau(u)} - rS_{\tau(u)} + (k(r)-\delta)\tau(u)}\,\omega\left(R_{\tau(u)-},\,\xi(u)\right); \tau(u) < \infty\right]$$

Kako $V_{\tau(u)}$ je vreme do sledećeg zahteva posle propasti i stoga nezavisno od $\mathcal{F}_{\tau(u)}$ i $R_{\tau(u)}$, ovaj identitet se pojednostavljuje

$$m(u) = E_r\left[e^{-r\xi(u)}\,e^{(k(r)-\delta)\tau(u)}\,\omega\left(R_{\tau(u)-},\,\xi(u)\right); \tau(u) < \infty\right]e^{-ru}.$$

Kao i u složenom Poasonovom slučaju, vremenska zavisinost nestaje ako $k(r) = \delta$.

Propozicija 4.10: Pretpostavimo da jednačina $k(r) - \delta = 0$ sa $k(r)$ definisana u (4.20) ima pozitivno rešenje $\gamma_\delta > argmin\,k(r)$. Onda

$$m(u) = E_{\gamma_\delta}\left[e^{-\gamma_\delta \xi(u)}\omega(R_{\tau(u)-},\,\xi(u))\right]e^{-\gamma_\delta u} \quad (4.21)$$

i za kontinuiranu funkciju taksi ω

$$\lim_{u\to\infty} e^{\gamma_\delta u}\,m(u) = C_\delta$$

za neku konstantu $C_\delta > 0$.

Formula (4.21) može biti korisna u mnogim situacijama. Dajemo jedan poseban primer:

Posledica 4.5: U modelu obnove, za eksponencijalni(ν) zahtev veličine Laplasova transformacija vremena propasti je data

$$E\left[e^{-\delta\tau(u)};\ \tau(u) < \infty\right] = \frac{\nu - \gamma_\delta}{\nu} e^{-\gamma_\delta u}.$$

Dokaz: U ovom slučaju očigledno postoji $\gamma_\delta > 0$ i rešenje je od $\hat{A}[-\gamma_\delta - \delta] = 1 - \gamma_\delta/\nu$. Nedostatak osobine memorije implicira $P(\xi(u) > x|\tau(u) < \infty) = e^{-\nu x}$, i odgovarajuće $P_{\gamma_\delta}(\xi(u) > x) = e^{-(\nu-\gamma_\delta)x}$. Rezultat onda sledi iz (4.20) za $\omega \equiv 1$. ■

Napomenimo da Posledica 4.5 proširuje Teoremu 4.2 sa prilično drugačijim dokazom.

4.6.2. Modifikovani slučajni hod

Drugi način da uklonimo diskontovanje je da interpretiramo $a_\delta(t) = e^{-\delta t}a(t)$ u (4.19) kao novu (sada defektnu) gustinu vremena između zahteva za ne-diskontovani proces rizika. Ovo dovodi do modifikovanog ugrađenog slučajnog hoda $S_{\delta,k} = \sum_{i=1}^{k}\left(U_i - T_{\delta,i}\right), k \geq 1$ gde $T_{\delta,i}$ ima defektnu gustinu $a_\delta(t)$ i tačku mase veličine $1 - \int_0^\infty a_\delta(t)\,dt = 1 - \hat{A}[-\delta]$ u beskonačnosti. Zbog toga, $\sup_k S_{\delta,k}$ je konačan sa verovatnoćom 1.

Po definiciji, verovatnoća propasti od ovog modifikovanog slučajnog hoda je Laplasova transformacija vremena propasti originalnog procesa rizika R_t,

$$E\left[e^{-\delta\tau(u)};\ \tau(u) < \infty\right] = P\left(\sup_k S_{\delta,k} > u\right),$$

a diskontovana raspodela od deficita pri propasti od R_t je

$$E\left[e^{-\delta\tau(u)};\ \xi(u) \leq y,\ \tau(u) < \infty\right] = P(N_{\delta,\tau} < \infty,\ S_{\delta,N_{\delta,\tau}} \leq u + y),$$

gde $N_{\delta,\tau} = inf\{k: S_{\delta,k} > u\}$. Otuda za ove funkcije taksi računanja se svode na tehnike slučajnog hoda sa defektnom raspodelom povećanja (za koje na primer Viner−Hopf faktorizacija se još uvek može uraditi na isti način). Ako je zahtev veličina faznog tipa, to dovodi do sledeće generalizacije Posledice 4.4 i takođe Teoreme 4.4:

Teorema 4.7: Razmatramo model obnove sa proizvoljnom raspodelom između dolaska A i raspodelu faznog tipa zahteva veličine B sa prikazom $(\alpha,\ T)$. Označimo sa $\alpha_{\delta+}$ minimalno ne-negativno rešenje od

$$\boldsymbol{\alpha}_{\delta+} = \boldsymbol{\alpha}\int_0^\infty e^{(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{t}\boldsymbol{\alpha}_{\delta+})t}\, a_\delta(t)dt.$$

Onda Laplasova transformacija vremena propasti je

$$E\left[e^{-\delta\tau(u)};\ \tau(u) < \infty\right] = \boldsymbol{\alpha}_{\delta+}e^{(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{t}\boldsymbol{\alpha}_{\delta+})u}\boldsymbol{e},$$

i diskontovana raspodela deficita pri propasti je data sa

$$E\left[e^{-\delta\tau(u)};\ \xi(u) \geq y,\ \tau(u) < \infty\right] = \boldsymbol{\alpha}_{\delta+}e^{(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{t}\boldsymbol{\alpha}_{\delta+})u}\, e^{\boldsymbol{T}y}e.$$

Dokaz: Dokaz je jednostavno proširenje onog iz Teoreme 4.4.■

4.7. Zavisni Sper Andresonov model

Kao što smo diskutovali u Odeljku 4.3.1, u Sper Andresonovom modelu prikaz

$$R_n = u + \sum_{k=1}^{n}(T_k - U_k)\,, n \geq 0$$

pokazuje ugrađenu strukturu slučajnog hoda procesa rizika sa nezavisnim prireštajima $T_k - U_k$ (predstavlja razliku između vremena događaja (pojavljivanja) i zahteva veličine). Ovaj opis slučajnog hoda omogućava primenu brojnih klasičnih tehnika slučajnog hoda za proučavanje (sudy) verovatnoće propasti i povezanih količina. Pretpostavimo sada da T_k i U_k nisu nezavisne, ali imaju neku zajedničku raspodelu. Onda, struktura slučajnog hoda je još uvek sačuvana sve dok $(T_k,\ U_k),\ k \geq 1$ je nezavisno identički raspodeljen niz sa dve vrednosti (bivariate) slučajne promenljive. Drugim rečima, možemo dozvoliti da vreme između događaja i sledećeg zahteva bude zavisno (koje će promeniti raspodelu prireštaja $T_k - U_k$) i još koristimo poredak slučajnog hoda. Podsetimo se da je A raspodela funkcije slučajne promenljive T_k, a B raspodela slučajne promenljive U_k. Neka $k(s)$ označava funkciju kumulativnog generisanja prireštaja slučajne promenljive $T_k - U_k$, tj. $e^{k(s)} = E(e^{s(T_k - U_k)})$. Ako je zavisnost između T_k i U_k opisana vezom funkcije $C(a,\ b)$ tada jednostavna računica daje $k(s)$ (u njegovom domenu konvergencije)

$$\hat{B}[-s]\hat{A}[s] - s^2\int_0^1 e^{-sB^{-1}(a)}\int_0^1 e^{sA^{-1}(b)}\,(C(a,\ b) - ab)dA^{-1}(b)dB^{-1}(a).\quad (4.22)$$

Ova formula pokazuje sasvim eksplicitno kako zavisna struktura (izražena preko veza) i marginalne raspodelele A i B utiču na oblik $k(s)$. Posebno, za nezavisno vreme između događaja i zahteva imamo $C(a,\ b) = ab$, pa drugi izraz u (4.22) predstavlja korekciju (ispravku) za uvedenu zavisnost. Pošto broj oblika asimptotskog slučajnog hoda možemo odsada čitati iz oblika $k(s)$, možemo proučavati efekat zavisnosti istraživanjem rezultujućeg $k(s)$. Na primer, jasno je iz (4.22) da pozitivna kvadratna zavisnost između T i U (tj. $C(a,b) \geq ab$ za sve $0 \leq a,b \leq 1$) implicira da $k(s)$ je za sve s manji od jedan za nezavisnost. U slučaju koeficijenta prilagođavanja, γ postoji, to je rešenje od $k(s) = 0$ i takvo γ će biti veće za ovu vrstu pozitivne zavisnosti. Opštije, kad god postoji podudarnost redosleda za dve veze (tj. $C_1(a,\ b) \geq C_2(a,\ b)$ za sve $0 \leq a,b \leq 1$), onda $\gamma_1 \geq\ \gamma_2$. Takođe, minimum od $k(s)$ (koji je modifikovan kroz zavisnost) otkriva konvergenciju stope konačnog vremena verovatnoće propasti.

(Asmussen, Albracher, 2010.)

5. Zaključak

U Srbiji je u prvom tromesečju ove godine, tj. od 1.1. do 31.3. 2018. poslovalo 21 društvo za osiguranje, što je za dva društva manje nego u istom periodu prethodne godine prema Narodnoj banci Srbije. Iz tog razloga u radu smo se upravo bavili verovatnoćama propasti, tj. kada osiguravajuća kompanija može da bankrotira, kao i kada će preživeti, odnosno neće doći do bankrota osiguravajuće kompanije.

Pokazali smo u radu Lundbergovu nejednačinu i Kramer−Lundbergovu aproksimaciju kod kojih vodimo računa o postojanju koeficijenta prilagođavanja, kao i integrodiferencijalnu jednačinu. Integrodiferencijalna jednačina je dobra zato što važi za $u \geq 0$, dok Lundbergova nejednakost i Kramer−Lundbergova aproksimacija važe samo kad $u \to \infty$. Takođe kod integrodiferencijalnih jednačina se ne posmatra koeficijent prilagođavanja γ, pa ne moramo da razmišljamo o njegovoj egzistenciji.

Međutim, kako se verovatnoća propasti u nekim slučajevima ne može eksplicitno izračunati, bavili smo se aproksimacijama verovatnoće propasti. Konkretnim primerom, gde imamo mešovitu eksponencijalnu raspodelu prošli smo kroz sve aproksimacije i model obnove i zaključili:

- De Valderova, 4MGDV i Bekman−Boversova aproksimacija daju dobre rezulate, ali 4MGDV daje bolje rezultate od De Valderove aproksimacije, kao i kad se početne rezerve povećavaju ($u \geq 10^8$) 4MGDV aproksimacija daje bolje rezultate od Bekman− Boversove aproksimacije.
- Aproksimacija gustog (teškog) saobraćaja je dobra za malo η, tj. (10-20 %), u našem primeru $\eta = 30\%$ i aproksimacija nam ne daje dobre rezultate. Dok aproksimacija lakog saobraćaja daje dobre rezultate kad su nam početne rezerve manje, tj. $0\ i\ 10^7$, takođe tada daje bolje rezultate i od aproksimacije gustog saobraćaja. Njihova interpolacija daje bolje rezultate od aproksimacije lakog i aproksimacije gustog saobraćaja.
- Kako za aproksimaciju difuzije želimo aproksimaciju zahteva viška koju dobijamo pod pretpostavkom da je sigurnosno opterećenje η malo i pozitivno, možemo primetiti da pretpostavka važi i kod aproksimacije gustog saobraćaja. Dobijamo u našem

primeru slične rezultate kao i kod aproksimacije gustog saobraćaja, pri čemu sledi da aproksimacija difuzije nije veoma precizna, pa ćemo korigovati difuznu aproksimaciju koja uzima deficite u razmatranje.

- Kod modela obnove za složen Poasonov slučaj kad je raspodela faznog tipa, verovatnoće da dođe do propasti su dosta manje od verovatnoća kod pomenutih aproksimacija.

Literatura

[1] Søren Asmussen, Hansjörg Albrecher, Advanced series on statistical science & applied probability - Ruin probabilities, Singapore 2010.

[2] K. Burnecki, P. Místa, Ruin probabilities in infinite time. Hugo Steinhaus Center,Wroclaw University of technology-Poland, 2005.

[3] K. Burnecki, P. Miśta, A. Weron, A new gamma type approximation of the ruin probability, Poland, 2005.

[4] David C. M. Dickson, Insurance risk and ruin, Cambridge University Press, 2006.

[5] Stuart A. Klugman, Harry H. Panjer, Gordon E. Willmot, Loss models from data to decisions, second edition, John Wiley & Sons Inc., 2004.

[6] D. Rajter-Ćirić, Verovatnoća, Novi Sad, 2009.

[7] Dora Seleši, predavanja iz Aktuarske matematike, Novi Sad 2016.

[8] Geogebra Classic 5

[9] http://www.nbs.rs/internet/latinica/60/60_6/izvestaji/izv_I_2018.pdf

[10] http://sfb649.wiwi.hu-berlin.de/fedc_homepage/xplore/tutorials/stfhtmlnode95.html

Biografija

Rođena sam 4. novembra 1991. godine u Kikindi. Završila sam Osnovnu školu „Žarko Zrenjanin“ u Kikindi, a zatim Srednju stručnu školu „Miloš Crnjanski“ smer tehničar za zaštitu životne sredine u Kikindi. 2010. godine sam upisala osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer primenjena matematika. Osnovne studije sam završila u septembru 2014. godine. Iste godine na istom fakultetu upisujem master studije primenjene matematike. Zaključno sa januarskim rokom 2017. godine, položila sam sve ispite predviđene planom i programom i stekla uslov za odbranu master rada. Tokom master studija radila sam kao nastavnik matematike u Osnovnoj školi „ Isidora Sekulić“ u Šajkašu, gde i dalje radim.

Novi Sad, 2018. Dara Batanski

UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:	
RBR	
Identifikacioni broj:	
IBR	
Tip dokumentacije:	Monografska dokumentacija
TD	
Tip zapisa:	Tekstualni štampani materijal
TZ	
Vrsta rada:	Master rad
VR	
Autor:	Dara Batanski
AU	
Mentor:	dr Dora Seleši
MN	
Naslov rada:	Aproksimacija verovatnoće propasti i procesi obnavljanja u teoriji rizika
NR	
Jezik publikacije:	srpski (latinica)
JP	
Jezik izvoda:	srpski/engleski
JI	
Zemlja publikovanja:	Republika Srbija
ZP	
Uže geografsko područje:	Vojvodina

UGP

Godina: 2018.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (5/76/10/14/3/0)
(broj poglavlja/strana/lit./tabela/grafika/priloga)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Aktuarska matematika

ND

Predmetna odrednica/
/Ključne reči: Poasonov proces, eksponencijalna raspodela, verovatnoća propasti, verovatnoća preživljavanja, Lundbergova nejednakost, Kramer−Lundbergova aproksimacija, koeficijent prilagođavanja, De Valderova aproksimacija, 4MGDV aproksimacija, Bekman−Boversova aproksimacija, aproksimacija gustog i lakog saobraćaja, aproksimacija difuzije, modeli obnove, Markov proces

PO,UKR

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno -matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

ČU

Važna napomena: Nema

VN

Izvod: U prvom delu rada obrazložili smo rizične rezerve, tj. finansijsko stanje kompanije, zatim verovatnoću propasti kao i verovatnoću preživljavanja na konačnom i beskonačnom intervalu. Zatim, načine na koje možemo izračunati verovatnoću propasti, tj. Lundbergovu nejednakost i Kramer–Lundbergovu aproksimaciju koju pratimo kroz ceo rad.
Kako se verovatnoća propasti ne može eksplicitno izračunati preko navedenih formula u drugom delu rada posmatrali smo različite aproksimacije verovatnoće propasti, dok se u trećem delu rada bavimo modelima obnove.

IZ

Datum prihvatanja teme

od strane NN veća: 09.03.2018.

DP

Datum odbrane: 2018.

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Sanja Rapajić, vandredni profesor, Prirodno--matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Nataša Krklec Jerinkić, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Mentor: dr Dora Seleši, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD

FACULTY OF NATURAL SCIENCE AND MATHEMATICS

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:	
ANO	
Identification number:	
INO	
Dokument type:	Monograph documentation
DT	
Type of record:	Textual printed material
TR	
Contents code:	Master thesis
CC	
Author:	Dara Batanski
AU	
Mentor:	dr Dora Seleši
MN	
Title:	Approximation of ruin probabilities and renewal processes in risk theory
TI	
Language of text:	Serbian (latin)
LT	
Language of abstract:	Serbian/ English
LA	
Country of publication:	Republic of Serbia
CP	

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2018.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Faculty of Natural Science and Mathematics, Novi Sad,

Trg Dositeja Obradovića 4

PP
Physical deskription: (5/76/10/14/3/0)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Actuarial mathematics
SD
Subject Key words: Poisson process, exponential distribution, ruin probability, survival probability, Lundberg's inequality, Cramèr−Lundberg approximation, adjustment coefficient, De Vylder's approximation, 4MGDV approximation, Beekman−Bowers approximation, approximations of heavy and light traffic, Diffusion approximation, model renewal, Markov process
SKW, UC

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Computer

Sciences

HD

Note: None

N

Abstract: In first part of our work we explained the risk reserves, i.e. financial state of the company, then the probability of ruination as well as the probability of survival in infinite and finite interval. Furthermore, we elaborated the ways in which we can calculate the probability of ruination, i.e. Lundberg's inequality and Cramèr–Lundberg approximation which we follow throughout our work. As the probability of ruination can not be explicitly calculated through the above formulas, in the second part of the work we observed different approximation probability of ruination, while in the third part of the work we dealt with models of renewal.

AB

Accepted on the Scientific board on: 09.03.2018.

AS

Defended: 2018.

DE

Thesis Defend board:

D

President: dr Sanja Rapajić, associate professor , Faculty of Natural Science , University of Novi Sad

Member:	dr Nataša Krklec Jerinkić, assistant professor, Faculty of Natural Science, University of Novi Sad
Mentor:	dr Dora Seleši, full professor, Faculty of Natural Science, University of Novi Sad