UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Danka Višnjić

Riman Stiltjesov integral

-master rad-

Mentor: Prof. dr Stevan Pilipović

Novi Sad, 2012

Sadržaj

Uvod

Rad se sastoji iz šest glava. Cilj rada je da se proizvoljan element iz prostora $C^*(\Delta)$ tj. proizvoljan neprekidan linearan funkcional na realnom (kompleksnom) prostoru $C(\Delta)$ prikaže u opštem obliku. Da bismo postigli taj cilj potrebno je uvesti pojam funkcije ograničene varijacije i pojam Riman Stiltjesovog integrala koji imaju ključnu ulogu u rešavanju ovog problema.
U prvoj glavi dat je pregled osnovnih definicija i stavova neophodnih za ovaj rad.
Druga glava je posvećena neprekidnom linearnom operatoru i prostoru $L(X,Y)$ svih neprekidnih linearnih operatora sa normiranog prostora X u normiran prostor Y. Takođe je i uvedena norma operatora na prostoru $L(X,Y)$.
U trećoj glavi dati su primeri neprekidnih funkcionala i operatora na Banahovom prostoru $C(\Delta)$. Tako je za funkciju $x_0 \in C(\Delta)$ *sa* $f(x) = \int_\Delta x_0(t)x(t)\,dt,\ x \in C(\Delta)$ (*) definisan neprekidan linearan funkcional na $C(\Delta)$. Ali u istoj glavi pokazujemo da postoji neprekidan linearan funkcional na $C(\Delta)$ koji nema reprezentaciju u obliku (*) pomoću neke funkcije $x_0 \in C(\Delta)$. Za analitičko opisivanje prostora $C^*(\Delta)$ potrebno je proširenje pojma Rimanovog integrala, što će biti učinjeno u glavi 5.
U četvrtoj glavi je dat pojam vektorske funkcije ograničene jake varijacije a samim tim i prostor $BV(\Delta; X)$ svih funkcija ograničene jake varijacije na segmentu Δ. Uvedeni su i pojmovi ograničene varijacije i ograničene slabe varijacije vektorske funkcije i date su veze između njih.Posmatrali smo i slučaj skalarne funkcije i tada su ta tri pojma ekvivalentna.
Riman Stiltjesov integral (RS-integral) vektorske funkcije u odnosu na skalarnu definisan je u petoj glavi. Posmatramo i RS- integral skalarne funkciju u odnosu na vektorsku funkciju. Takođe izlažemo i neke osobine ovog integrala.
Šesta glava daje odgovor na naš zadatak kroz Risovu teoremu, a to je da za svaki neprekidan linearan funkcional F na realnom (kompleksnom) prostoru $C(\Delta)$ postoji realna (kompleksna) funkcija α ograničene varijacije na Δ tako da $F(f) = \int_a^b f\,d\alpha \quad (f \in C(\Delta))$.

(* * *)

Ovom prilikom se zahvaljujem mojoj sestri koja je uvek moja velika podrška i oslonac.
Veliku zahvalnost dugujem svom mentoru prof. Stevanu Pilipoviću na nesebičnoj pomoći i velikom strpljenju.

Novi Sad, decembar 2012. Danka Višnjić

Lista oznaka

Φ	0polje skalara R ili C
X , Y	vektorski prostori
λ, μ	skalari
dim X	dimenzija prostora X
$\lvert x\rvert, \lVert x\rVert$	norma vektora x
X^{+}	dual (algebarski) prostora X
Y^{T}	funkcije sa skupa T u skup Y
X^{*}	dual (topološki) prostora X
$C\,(\,\Delta\,)$	neprekidne funkcije na intervalu $\Delta \subset R^{n}$
$\lvert A\rvert$	norma operatora A
$\lVert f\rVert$	norma funkcije iz prostora $C\,(\,\Delta\,)$
$(X \to Y)$	skup svih linearnih operatora sa prostora X u prostor Y
$L(X,Y)$	skup ograničenih linearnih operatora sa prostora X u prostor Y
$L(X)$	skup ograničenih linearnih operatora sa prostora X u prostor X
$V(f;\Delta)$	jaka totalna varijacija funkcije f
$BV(\Delta; X\,)$	funkcije ograničene jake varijacije

1. Osnovne definicije i stavovi

Definicija 1.1: Struktura vektorskog prostora $X = \{ x, y, \dots \}$ nad poljem $\Phi = \{ \alpha, \beta, \dots \}$ definiše se pomoću dve funkcije :

(1) $(x, y) \to x + y$ sa $X \times X$ u X
(2) $(\lambda, x) \to \lambda x$ sa $\Phi \times X$ u X
Funkcija (1) , sabiranje na X , ima sledeća svojstva :

(VP1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ asocijativnost
(VP2) Postoji jedinstven element $0 \in X$ takav da je $x + 0 = 0 + x = x$ za svako $x \in X$
(VP3) Za svako $x \in X$ postoji jedinstven element $-x \in X$ tako da je $x + (-x) = (-x) + x = 0$
(VP4) $x + y = y + x$ komutativnost

Funkcija (2), množenje skalarom, ima sledeća svojstva :

(VP5) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (distributivnost množenja prema sabiranju u X)
(VP6) $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$ (distributivnost množenja prema sabiranju u Φ)
(VP7) $(\lambda \mu) x = \lambda (\mu x)$
(VP8) $1 \cdot x = x$
Elemente skupa X nazivamo vektorima, a elemente polja Φ skalarima.

U daljem izlaganju za Φ uzimamo polje R realnih brojeva,odnosno polje C kompleksnih brojeva . Prostor X je realan ako je $\Phi = R$, a kompleksan ako je $\Phi = C$. Lako je uočiti da je Φ vektorski prostor nad Φ.

Primer 1.2: Za skupove T i Y sa Y^T označavamo skup svih funkcija $x : T \to Y$. Neka je Y vektorski prostor nad poljem Φ.Za dve funkcije $x, y : T \to Y$ sa $t \to x(t) + y(t)$ definisana je funkcija sa T u Y koju označavamo sa $x + y$.Za skalar $\lambda \in \Phi$ i funkciju $x : T \to Y$ sa $t \to \lambda x(t)$ definisana je funkcija sa T u Y koju označavamo sa λx.Tada je Y^T vektorski prostor nad Φ u odnosu na ove dve funkcije.

Definicija 1.3: Skup W vektora iz vektorskog prostora X nad poljem Φ je potprostor vektorskog prostora X ako i samo ako je W u odnosu na operacije definisane na X vektorski prostor nad poljem Φ.

Stav 1.4: Neprazan podskup W vektorskog prostora X nad poljem Φ je njegov potprostor ako i samo ako za svaka dva vektora $a, b \in W$ i za svaka dva skalara $a, b \in X$ je $\alpha a + \beta b \in W$.

Teorema 1.5: Vektorski prostor je n-dimenzionalan, $n \in N$, ako postoje vektori $e_1,...,e_n$ u X takvi da svaki vektor $x \in X$ ima jedinstven prikaz u obliku $x = \xi_1 \cdot e_1 + ... + \xi_n \cdot e_n$.
Tada kažemo da je $e_1,...,e_n$ baza u X .

Definicija 1.6: Neka su X i Y vektorski prostori nad poljem Φ.Funkcija $A: X \to Y$ je:

a) aditivna ako je $A(x+y) = Ax + Ay$ $\quad (x, y \in X)$

b) homogena ako je $A(\lambda x) = \lambda A x$ $\quad (\lambda \in \Phi, x \in X)$

c) linearna ako je aditivna i homogena tj. ako vredi $A(\lambda x + \mu y) = \lambda A x + \mu A y$

Definicija 1.7: Funkciju koja ima domen u vektorskom prostoru X nad poljem Φ i kodomen u vektorskom prostoru Y nad istim poljem nazivamo operator. Ako je $Y = \Phi$ takav operator nazivamo funkcional.

Primer 1.8: Skup $(X \to Y)$ svih linearnih operatora sa vektorskog prostora X u vektorski prostor Y je potprostor vektorskog prostora Y^X.Vektorski prostor $(X \to \Phi)$ naziva se algebarski dual prostora X i označava se X^+.Elementi prostora X^+ su linearni funkcionali na X .

Stav 1.9: Ako je $e_1,...,e_n$ baza u X , onda je $\dim X^+ = n$ i postoji jedinstvena baza $e_1^+,...,e_n^+$ u X^+ takva da je $e_i^+(e_j) = \delta_{ij}$ $\quad (i, j = 1,...,n)$. Takva baza $e_1^+,...,e_n^+$ naziva se dualna baza baze $e_1,...,e_n$.

Primer 1.10: Neka je $\Delta \subset R^n$ zatvoren interval. Skup $C(\Delta)$ svih funkcija $f: \Delta \to \Phi$ koje su neprekidne na Δ je potprostor vektorskog prostora Φ^Δ svih funkcija sa Δ u Φ .

Definicija 1.11: Funkcija $x \to |x|$ sa vektorskog prostora X u skup realnih brojeva je norma na X ako ima sledeća svojstva :

1) $|x| \geq 0$ za svako $x \in X$

2) $|x| = 0$ ako i samo ako je $x = 0$

3) $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$ za svako $\lambda \in \Phi$ i za svako $x \in X$

4) $|x+y| \leq |x| + |y|$ za sve $x, y \in X$

Uređen par $(X, |\cdot|)$ vektorskog prostora X i norme $x \to |x|$ definisane na X naziva se normiran vektorski prostor .

Primer 1.12: Sa $|x| = \max\left\{ |x(t)| : \ t \in \Delta \right\}$ ja data norma na $C(\Delta)$.

Primer 1.13: Sa $|x|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|$, $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$ je data norma na vektorskom prostoru Φ^n.

Primer 1.14: Sa $|x|_\infty = \max\{|\xi_1|, ..., |\xi_n|\}$, $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$ je data norma na vektorskom prostoru Φ^n.

Definicija 1.15: Niz $(x_n, n \in N)$ vektora normiranog prostora X konvergira po normi ili jako konvergira ka vektoru $x_0 \in X$ ako niz brojeva $n \to |x_n - x_0|$ konvergira nuli. Kažemo još i da je x_0 limes niza $(x_n, n \in N)$ i zapisujemo $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ili $x_0 = \lim x_n$.

Stav 1.16: Konvergentan niz u X ima jedinstven limes.

Definicija 1.17: Niz $(x_k, k \in N)$ normiranog prostora X je Košijev niz ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj $n(\varepsilon)$ tako da važi

$$p, q \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |x_p - x_q| \leq \varepsilon .$$

Stav 1.18: Svaki konvergentan niz normiranog prostora je i Košijev niz.

Stav 1.19: Ako je $(x_k, k \in N)$ Košijev niz u normiranom prostoru X onda je skup $\{x_k, k \in N\}$ ograničen.

Definicija 1.20: Normiran prostor X je potpun ili Banahov prostor ako svaki Košijev niz elemenata iz X konvergira u X .

Definicija 1.21: Neka su X i Y normirani prostori i funkcija f iz X u Y s domenom $D(f)$.Funkcija $f : D(f) \to Y$ je neprekidna u tački $x_0 \in D(f)$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da

$$x \in D(f) \wedge |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon .$$

Definicija 1.22: Funkcija f je neprekidna na skupu $S \subseteq D(f)$ ako je ona neprekidna u svakoj tački skupa S.

Definicija 1.23: Funkcija f je uniformno neprekidna na skupu $S \subseteq D(f)$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da

$$x_1, x_2 \in S \wedge |\, x_1 - x_2 \,| \leq \delta \Rightarrow |\, f(x_1) - f(x_2) \,| \leq \varepsilon$$

Stav 1.24: Funkcija $f : D(f) \to Y$ je neprekidna u tački $x_0 \in D(f)$ ako i samo ako za svaki niz (x_k) iz $D(f)$ koji konvergira ka x_0 i niz $f(x_k)$ iz Y konvergira ka $f(x_0)$.

Definicija 1.25: Norme $x \to |\, x \,|$ i $x \to \|\, x \,\|$ na X su ekvivalentne ako postoje brojevi $m, M > 0$ takvi da je za svako $x \in X$

$$m |\, x \,| \leq \|\, x \,\| \leq M |\, x \,|$$

Stav 1.26: Ako je X normiran prostor, onda su funkcije $x \to |\, x \,|$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda\, x$, $(x, y) \mapsto x + y$ neprekidne na $X, \Phi \times X$ odnosno na $X \times X$. Norma $x \to |\, x \,|$ i sabiranje $(x, y) \mapsto x + y$ su uniformno neprekidne na X odnosno na $X \times X$.

Stav 1.27: Bilo koje dve norme na konačno dimenzionalnom prostoru X su ekvivalentne.

Stav 1.28: Neka je funkcija $f : A \to R$ monotona na skupu $A \subset R$.Tada ona može imati samo prekide prve vrste i to njih najviše prebrojivo mnogo.

Stav 1.29: Neka je $f : A \to R$ monotona funkcija realne promenljive i neka je a tačka nagomilavanja skupa $\{x \in A \,|\, x < a\}$(odnosno $\{x \in A \,|\, x > a\}$).Tada postoji $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, odnosno $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$.

2. **Ograničeni linearni operatori**

Ako su X i Y normirani prostori na prirodan način se pojavljuje skup svih neprekidnih linearnih operatora sa X u Y koji označavamo sa $L(X,Y)$. Ako je $X=Y$ onda skup $L(X,X)$ označavamo sa $L(X)$.

Stav 2.1: *Prostor svih neprekidnih linearnih operatora* $L(X,Y)$ *je potprostor vektorskog prostora* $\left(X \to Y \right)$.

Dokaz: Neka su A i B linearni neprekidni operatori, treba pokazati da je i linearna kombinacija tj. $\alpha\, A+\beta\, B$ linearan neprekidan operator. Linearnost je jednostavno uočiti. Pokažimo neprekidnost u proizvoljnoj tački $x_0 \in X$

Kako je A neprekidan operator to za $\dfrac{\varepsilon}{2|\alpha|}>0$ postoji $\delta_1>0$ tako da važi

$$\left| x-x_0 \right| \le \delta_1 \Rightarrow \left| A(x)-A(x_0) \right| \le \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}$$ na isti način dobijamo za operator B

$$\left| x-x_0 \right| \le \delta_2 \Rightarrow \left| B(x)-B(x_0) \right| \le \frac{\varepsilon}{2|\beta|}$$

Sada za $\varepsilon>0$ i $\delta=\min\left\{ \delta_1,\delta_2 \right\}>0$ i $\left| x-x_0 \right| \le \delta$ važi

$$\left| \alpha\, A(x)+\beta\, B(x)-\alpha\, A(x_0)-\beta\, B(x_0) \right| \le \left| \alpha\, A(x)-\alpha\, A(x_0) \right| + \left| \beta\, B(x)-\beta\, B(x_0) \right|$$

$$\le \left| \alpha \right| \left| A(x)-A(x_0) \right| + \left| \beta \right| \left| B(x)-B(x_0) \right| \le \left| \alpha \right| \frac{\varepsilon}{2\left| \alpha \right|} + \left| \beta \right| \frac{\varepsilon}{2\left| \beta \right|} = \varepsilon$$

Time je pokazana neprekidnost linearne kombinacije neprekidnih operatora na normiranom prostoru X.

∎

Stav 2.2: *Neprekidnost linearnog operatora* $A: X \to Y$ *u jednoj tački* $x_0 \in X$ *povlači neprekidnost tog operatora na* X.

Dokaz: Posmatrajmo $x \in X$ i niz $(x_n) \subset X$ takav da $x_n \to x$. Za niz $x_n - x + x_0$ važi

$x_n - x + x_0 \to x_0$. Tada je $A x_n - A x + A x_0 \to Ax_0$, odnosno $A x_n \to A x$, pa na osnovu stava 1.24. sledi da je operator A neprekidan u tački x. Kako smo pokazali neprekidnost u proizvoljnoj tački $x \in X$ zaključujemo da je operator A neprekidan na celom X. ▪

Definicija 2.3: *Linearan operator* $A : X \to Y$ *je ograničen ako postoji realan broj* $M > 0$ *takav da je*

$$|Ax| \leq M\ |x| \qquad x \in X .$$

Stav 2.4 : *Linearan operator* A *s normiranog prostora* X *u normiran prostor* Y *je ograničen ako i samo ako je on neprekidan na* X .

Dokaz:

($\Leftarrow$) Uzmimo prvo da je funkcija A neprekidna tj. $A \in L(X, Y)$.

$A(0) = A(\alpha \cdot 0) = \alpha \cdot A(0)$ odavde je

$(1-\alpha) A(0) = 0$ za svako $\alpha \in \Phi \quad \Rightarrow \quad A(0) = 0$

Kako je funkcija neprekidna na X, neprekidna je i u 0.

Tada za $\varepsilon = 1$ postoji $\delta > 0$ takvo da za svako $x \in X$

$$|x - 0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |Ax - A(0)| < 1 \qquad \text{tj.}$$

$$|x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |Ax| < 1$$

Neka je $x \neq 0$, tada je $\left| \delta \dfrac{x}{|x|} \right| = \delta \leq \delta$, a odatle $\left| A\delta \dfrac{x}{|x|} \right| \leq 1.$

Kako je A homogen operator tada je

$$\frac{\delta}{|x|} |Ax| \leq 1$$

$$| A x | \le \frac{1}{\delta} | x |$$

Odavde dobijamo da je $M = \dfrac{1}{\delta}$ i da je A ograničen operator.

($\Rightarrow$) Neka je A ograničen operator, tada je

$$| A x - A y | = | A (x - y) | \le M | x - y | .$$

Ovo pokazuje da je A uniformno neprekidan na X, a otuda sledi i neprekidnost. ▪

Posledica 2.5: *Ako je linearni operator $A : X \to Y$ neprekidan na normiranom prostoru X, onda je on i uniformno neprekidan na X.*

Dokaz : Direktno sledi iz prethodnog stava, jer smo iz neprekidnosti pokazali ograničenost operatora A, a iz ograničenosti smo pokazali uniformnu neprekidnost. ▪

Stav 2.6 : *Neka su $\tilde{X}, X, Y$ normirani prostori i $A : X \to Y$ neprekidan linearan operator. Ako je X gust potprostor prostora $\tilde{X}$ i Y Banahov prostor, onda postoji jedinstven linearan operator $\tilde{A} : \tilde{X} \to Y$ koji je neprekidan na $\tilde{X}$ i $\tilde{A} x = Ax$ za $x \in X$.*

Dokaz : Kako je A neprekidan operator važi $| A x | \le M | x |$, $x \in X$. Neka $x \in \tilde{X}$, tada postoje nizovi $(u_n) \subset X$, $(v_n) \subset X$ koji konvergiraju ka x jer je X gust potprostor prostora $\tilde{X}$. Iz nejednakosti

$$\left| A u_n - A u_m \right| = | A(u_n - u_m) | \le M \left| u_n - u_m \right|$$

$$\left| A v_n - A v_m \right| \le M \left| v_n - v_m \right|$$

i činjenice da su $(u_n),(v_n)$ konvergentni nizovi a samim tim i Košijevi nizovi uočavamo da su (Au_n) i (Av_n) Košijevi nizovi u Y. Kako je Y Banahov prostor ti nizovi konvergiraju u Y. Iz

$$\left| Au_n - Av_n \right| \leq M \left| u_n - v_n \right|$$

i puštanjem limesa dobijamo

$$\left| \lim Au_n - \lim Av_n \right| = \lim \left| Au_n - Av_n \right| \leq M \left| \lim u_n - \lim v_n \right| = 0$$

$$\lim Au_n = \lim Av_n$$

Definišimo sada funkciju $\tilde{A}: \tilde{X} \to Y$ na sledeći način

$$\tilde{A}\, x = \lim Au_n$$

gde je (u_n) bilo koji niz iz X koji konvergira ka x. $\tilde{A}$ je linearan operator zbog

$$\tilde{A}(\alpha x + \beta y) = \lim (A\alpha u_n + A\beta v_n) = \alpha \lim Au_n + \beta \lim Av_n = \alpha \tilde{A} x + \beta \tilde{A} y$$

gde su $(u_n),(v_n)$ nizovi takvi da $(u_n) \to x, (v_n) \to y$.

$$\left| Au_n \right| \leq M \left| u_n \right| \qquad \text{za} \quad n \to \infty \qquad \text{dobijamo}$$

$$\left| \tilde{A} x \right| \leq M \left| x \right|,$$ što znači da je $\tilde{A}$ ograničen odnosno neprekidan operator na $\tilde{X}$. Pokazimo jedinstvenost operatora $\tilde{A}$. Pretpostavimo da postoji još jedan linearan neprekidan operator na $\tilde{X}$, $A' \neq \tilde{A}$, $A' : \tilde{X} \to Y$ tako da važi $A' x = Ax$ za $x \in X$. Tada postoji $x_0 \in \tilde{X}/X$ tako da je $A' x_0 \neq \tilde{A} x_0$. Kako je A' neprekidan operator na $\tilde{X}$ onda za svaki niz pa i niz $(x_n) \subset X$, takav da $x_n \to x_0$ sledi $A' x_n \to A' x_0$. Međutim kako je $(x_n) \subset X$, onda $A' x_0 = \lim A' x_n = \lim A x_n = \tilde{A} x_0$ i dolazimo do $A' x_0 = \tilde{A} x_0$ a to je kontradikcija. Znači postoji jedinstven linearan neprekidan operator sa datom osobinom. ▪

Stav 2.7 : *Ako je* $\dim X < \infty$, *onda je svaki linearni operator sa* X *u* Y *neprekidan odnosno* $L(X,Y) = (X \to Y)$.

Dokaz: Neka je $e_1, e_2, ...e_n$ baza u X. Tada je na osnovu stava 1.9. i $e_1^+, e_2^+, ...e_n^+ \in X^+$ baza prostora X^+ gde je $X^+ = (X \to \Phi)$ sa osobinom da je $e_i^+(e_j) = \delta_{ij}$, $(i, j = 1,...,n)$.Na osnovu stava 1.27. sve norme na X su ekvivalentne, tj. postoje brojevi $m > 0, M > 0$ takvi da je za sve $\xi_i \in \Phi$:

$$m \left| \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \right| \le \sum_{i=1}^{n} | \xi_i | \le M \left| \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \right|$$

Za $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ imamo :

$$| e_j^+(x) | = | \xi_j | \le \sum_{i=1}^{n} | \xi_i | \le M | x |$$

Iz

$| e_j^+(x) | \le M | x |$ $(x \in X)$ zaključujemo da je e_j^+ neprekidan linearan funkcional.

$$x = \sum_{j=1}^{n} e_j^+(x) e_j \quad \Rightarrow \quad A x = \sum_{j=1}^{n} e_j^+(x) A e_j$$

$$| A x | = \left| \sum_{j=1}^{n} e_j^+(x) A e_j \right| \le \sum_{j=1}^{n} | e_j^+(x) A e_j | \le \left(M \sum_{j=1}^{n} | A e_j | \right) | x |$$

Odavde je operator A ograničen tj. neprekidan. ▪

Sa $L(X, Y)$ smo označili vektorski prostor svih neprekidnih linearnih operatora sa X u Y. Na osnovu stava 2.4 svaki operator A iz tog prostora je i ograničen tj. postoji realan broj $M > 0$ tako da je

$$| A x | \le M | x | \qquad x \in X . \qquad (1)$$

Definicija 2.8: *Neka su* X *i* Y *normirani prostori*. *Za operator* $A \in L(X, Y)$ *broj*

$$|A| = \sup\{|Ax| : x \in X, |x| \le 1\} \qquad (2)$$

nazivamo norma operatora A .

Kako je $\left|\frac{x}{|x|}\right| = 1$, iz definicije norme operatora sledi da je

$$\left|A \frac{x}{|x|}\right| \le |A| \qquad \text{za svako } x \ne 0$$

$$\frac{1}{|x|}|Ax| \le |A|$$

$$|Ax| \le |A||x| \qquad (x \in X)$$

Kako je $|A|$ supremum, onda za svako $\varepsilon > 0$ postoji vektor $x_\varepsilon \in X$, $x_\varepsilon \ne 0$ $|x_\varepsilon| \le 1$ takav da je

$$|Ax_\varepsilon| \ge (|A| - \varepsilon), \text{ tim pre}$$

$$|Ax_\varepsilon| \cdot \frac{1}{|x_\varepsilon|} \ge (|A| - \varepsilon) \qquad \text{tj.}$$

$$|Ax_\varepsilon| \ge (|A| - \varepsilon)|x_\varepsilon|$$

Ovo pokazuje da je norma $|A|$ operatora A najmanji realan broj $M > 0$ za koje važi (1).

Teorema 2.9 : *Neka su* X *i* Y *normirani prostori nad poljem* Φ *i* $L(X, Y)$ *je vektorski prostor svih neprekidnih linearnih operatora sa* X *u* Y.

1) *Sa*

$$A \to \| A \| = \sup \left\{ \| A x \| : x \in X , \| x \| \le 1 \right\}$$

je data norma na prostoru $L(X, Y)$.

2) *Ako je* Y *Banahov prostor, onda je* $L(X, Y)$ *Banahov prostor*.

Dokaz:
1) Prva tri svojstva norme za funkciju $A \to \| A \|$ su očigledna, pokažimo i četvrto svojstvo. Neka su $A, B \in L(X, Y)$ i proizvoljno $x \in X$ tada je:

$$\| (A + B) x \| = \| A x + B x \| \le \| A x \| + \| B x \| \le \| A \| \cdot \| x \| + \| B \| \cdot \| x \| \Rightarrow$$

$$\| (A + B) x \| \le (\| A \| + \| B \|) \| x \| \Rightarrow$$

$$\| A + B \| \le \| A \| + \| B \|$$

Time smo pokazali da je sa $A \to \| A \|$ data norma na prostoru $L(X, Y)$.

2) Neka je (A_k) Košijev niz u $L(X, Y)$, tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n(\varepsilon) \in N$ tako da je

$$n, m \ge n(\varepsilon) \Rightarrow \| A_n - A_m \| \le \varepsilon .$$

Tada za $x \in X$ imamo

$$n, m \ge n(\varepsilon) \Rightarrow \| A_n x - A_m x \| = \| (A_n - A_m) x \| \le \| A_n - A_m \| \cdot \| x \| \le \varepsilon \cdot \| x \|$$

Znači,

$$n, m \ge n(\varepsilon) \Rightarrow \| A_n x - A_m x \| \le \varepsilon \cdot \| x \| \qquad (3)$$

a to pokazuje da je $(A_n x)$ Košijev niz u prostoru Y. Kako je Y potpun prostor, tada postoji jedinstven vektor u Y koji ćemo označiti sa $A_0 x$ i $A_n x \to A_0 x$.
Budući da su zbir i množenje skalarom neprekidni dobijamo:

$$A_0 (\lambda x) = \lim A_n (\lambda x) = \lim \lambda A_n x = \lambda \lim A_n x = \lambda A_0 x$$

$$A_0(x+y)=\lim A_n(x+y)=\lim(A_n x+A_n y)=\lim A_n x+\lim A_n y$$

$$=A_0 x+A_0 y$$

Ovim smo pokazali da je A_0 linearan operator sa X u Y.
Ako u (3) uzmemo da $m\to\infty$ dobijamo

$$n\geq n(\varepsilon)\Rightarrow \left|A_n x-A_0 x\right|\leq \varepsilon\cdot|x| \qquad (4)$$

$$\left|A_0 x\right|-\left|A_n x\right|\leq \left|A_n x-A_0 x\right|\leq \varepsilon\cdot|x| \quad \text{dobijamo}$$

$$\left|A_0 x\right|-\left|A_n x\right|\leq \varepsilon\cdot|x| \quad \text{tj.}$$

$$\left|A_0 x\right|\leq \left|A_n x\right|+\varepsilon|x|\leq (\left|A_n\right|+\varepsilon)|x| \quad \text{za } n\geq n(\varepsilon)$$

Iz prethodne nejednakosti i činjenice da je Košijev niz A_n ograničen sledi da je A_0 ograničen operator tj. neprekidan. Ostalo je još da pokažemo da $A_n\to A_0$. Iz (4) sledi da je

$$\left|A_n-A_0\right|\leq \varepsilon,\quad n\geq n(\varepsilon)$$

Kako za svako $\varepsilon>0$ postoji $n(\varepsilon)\in N$ tako da je $\left|A_n-A_0\right|\leq\varepsilon$, $n\geq n(\varepsilon)$ onda A_n konvergira operatoru $A_0\in L(X,Y)$. Zaključujemo da je prostor $L(X,Y)$ Banahov. ▪

Ako u prethodnoj teoremi uzmemo da je $Y=\Phi$ dobijamo sledeću posledicu.

Posledica 2.10: *Ako je X normiran prostor nad poljem Φ, onda je prostor $X^*=L(X,\Phi)$ svih neprekidnih linearnih funkcionala na X Banahov prostor.* ▪

3. Primeri ograničenih funkcionala i operatora na prostoru $C(\Delta)$

Stav 3.1: *$C(\Delta)$ je Banahov prostor svih neprekidnih funkcija $f:\Delta\to\Phi$ definisanih na $\Delta=[\,a\,,b\,]$ u odnosu na normu*

$$|\,x\,|=\max\left\{\,|\,x(t)\,|:\ t\in\Delta\,\right\} \qquad (1)$$

Dokaz: Neka je (x_k) Košijev niz funkcija u prostoru $C(\Delta)$. Tada za svako $\varepsilon>0$ postoji $n(\varepsilon)\in N$ tako da

$$p,q\ge n(\varepsilon)\ \Rightarrow |\,x_p-x_q\,|\le\frac{\varepsilon}{3}\ ,\ \text{tada je}$$

$$p,q\ge n(\varepsilon)\ \Rightarrow |\,x_p(t)-x_q(t)\,|\le\frac{\varepsilon}{3}\quad \text{za svako } t\in\Delta. \qquad (2)$$

Ovo pokazuje da je $(x_k(t),\ k\in N)$ Košijev niz u Φ za svako $t\in\Delta$, a odatle sledi da taj niz konvergira. Neka je $\lim x_k(t)=x_0(t)$. Pokažimo da je funkcija x_0 neprekidna. Neka je $t_0\in\Delta$ i $j\ge n(\varepsilon)$. Funkcija x_j je neprekidna što povlači da postoji $\delta>0$ tako da

$$(t\in\Delta,|\,t-t_0\,|\le\delta)\ \Rightarrow |\,x_j(t)-x_j(t_0)\,|\le\frac{\varepsilon}{3}$$

Za $t\in\Delta,|\,t-t_0\,|\le\delta$ i (2) za $q\to\infty,\ p=j$ dobijamo

$$|\,x_0(t)-x_0(t_0)\,|\le$$

$$|\,x_0(t)-x_j(t)\,|+|\,x_j(t)-x_j(t_0)\,|+|\,x_j(t_0)-x_0(t_0)\,|\le\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

Dakle $x_0\in C(\Delta)$. Potrebno je još pokazati da $x_p\to x_0$. Ako u (2) pustimo da $q\to\infty$, dobijamo

$$p\ge n(\varepsilon)\ \Rightarrow |\,x_p(t)-x_0(t)\,|\le\frac{\varepsilon}{3}\quad \text{za svako } t\in\Delta,\ \text{pa je}$$

$$|\,x_p-x_0\,|\le\frac{\varepsilon}{3}\qquad \text{za}\quad p\ge n(\varepsilon).$$

Time je pokazano da $x_p \to x_0$ po normi (1). ▪

U naredna dva stava posmatraćemo samo neprekidne realne funkcije prostora $C(\Delta)$.

Stav 3.2: *Ako* $x_0 \in C(\Delta)$, *onda je*

$$f(x) = \int_\Delta x_0(t)\,x(t)\,dt, \qquad x \in C(\Delta) \qquad (3)$$

neprekidan linearan funkcional na Banahovom prostoru $C(\Delta)$ *i važi*

$$|f| = \int_\Delta |x_0(t)|\,dt$$

Da bismo dokazali ovaj stav potrebno je da dokažemo sledeću lemu.

Lema 3.3: *Ako* $x_0 \in C(\Delta)$, $x_0 \neq 0$ *onda je sa (3) dat neprekidan linearan funkcional na* $C(\Delta)$.

Za svako $\varepsilon > 0$ *postoji funkcija* $x_\varepsilon \in C(\Delta)$ *takva da je*:

(a) $$f(x_\varepsilon) > \int_\Delta |x_0(t)|\,dt - \varepsilon$$

(b) $$|x_\varepsilon| = 1$$

(c) $$x_\varepsilon(a) = x_\varepsilon(b) = 0$$

Dokaz:

$$|f(x)| = \left| \int_\Delta x_0(t)\,x(t)\,dt \right|$$

$$\leq \int_\Delta |x_0(t)\,x(t)|\,dt$$

$$\leq \int_\Delta |x_0(t)|\,|x(t)|\,dt \qquad (\text{kako je } |x(t)| \leq |x|)$$

$$\leq \left(\int_{\Delta} |\, x_0(t)\,|\; dt\right) \cdot |\, x\,| .$$

Odavde uočavamo da je f neprekidan funkcional i da važi

$$|\, f\,| \leq \int_{\Delta} |\, x_0(t)\,|\; dt \;.$$

Funkcija x_0 je uniformno neprekidna na Δ pa postoji podela segmenta $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ tako da je

$$t^{'}, t^{''} \in [\, t_i \,, t_{i+1}\,] \;\Rightarrow\; |\, x_0(t^{'}) - x_0(t^{''})\,| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \qquad \text{i}$$

$$(\, t_1 - a + b - t_{n-1}) \cdot |\, x_0 \,| < \frac{\varepsilon}{4} .$$

Poslednja nejednakost važi jer $t_1 - a$ i $b - t_{n-1}$ možemo učiniti proizvoljno malim. Segmente $[\, t_i \,, t_{i+1}\,]$ ćemo podeliti u dva skupa. U prvi skup ćemo staviti segmente $\Delta^{'}_1, \Delta^{'}_2, \ldots \Delta^{'}_r$ takve da x_0 na $\Delta^{'}_i$ ima isti znak i da $a \notin \Delta^{'}_i$ i $b \notin \Delta^{'}_i$. Sa $\Delta^{''}_1, \Delta^{''}_2, \ldots \Delta^{''}_s$ označimo preostale segmente tj. $\Delta^{''}_j$ sadrži a ili b ili funkcija x_0 na $\Delta^{''}_j$ menja znak.
Neka $t \in \Delta^{''}_j$ i $a, b \notin \Delta^{''}_j$ tada postoji $t^{'} \in \Delta^{''}_j$ tako da su $x_0(t)$ i $x_0(t^{'})$ različitog znaka, tada je

$$|\, x_0(t)\,| < |\, x_0(t) - x_0(t^{'})\,| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad ,$$

$$|\, x_0(t)\,| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \qquad t \in \Delta^{''}_j \;,\quad a, b \notin \Delta^{''}_j$$

Definišimo funkciju $\tilde{x} : \Delta \to R$ na sledeći način :

$$\tilde{x}\,(t) = \operatorname{sgn} x_0(t) \quad \text{ako} \quad t \in \Delta^{'}_i \quad (i = 1, \ldots r),$$

a na $\Delta^{''}_j = [\, t_k \,, t_{k+1}]$ funkciju ćemo definisati kao deo pravca kroz tačke $(\, t_k, \operatorname{sgn} x_0(t_k))$, $(\, t_{k+1}, \operatorname{sgn} x_0(t_{k+1}))$, ako $a, b \notin \Delta^{''}_j$. Ako je $t_k = a$, onda je to duž između tačaka $(\, a, 0\,)$,

$\left(t_1, \operatorname{sgn} x_0(t_1)\right)$, ako je $t_{k+1}=b$ uzećemo deo pravca kroz tačke $\left(t_k, \operatorname{sgn} x_0(t_k)\right)$, $(b, 0)$. Funkcija $\tilde{x}$ je neprekidna na Δ i pri tom važi $\tilde{x}(t) \le 1$ a kako je u nekim tačkama $\tilde{x}(t)=1$ onda je $|\tilde{x}|=1$. Dalje važi

$$f(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{r} \int_{\Delta'_i} \tilde{x}(t) x_0(t)\, dt + \sum_{j=1}^{s} \int_{\Delta''_j} \tilde{x}(t) x_0(t)\, dt$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \int_{\Delta'_i} |x_0(t)|\, dt + \sum_{j=1}^{s} \int_{\Delta''_j} \tilde{x}(t) x_0(t)\, dt.$$

Kako je za $t \in \Delta''_j$, $(a, b \notin \Delta''_j)$

$$|\tilde{x}(t) x_0(t)| \le |x_0(t)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

$$\left(-|x_0(t)| < \tilde{x}(t) x_0(t) \le |x_0(t)| \right) \quad \text{dobijamo}$$

$$f(\tilde{x}) \ge \sum_{i=1}^{r} \int_{\Delta'_i} |x_0(t)|\, dt - \sum_{j=1}^{s} \int_{\Delta''_i} |x_0(t)|\, dt$$

$$= \int_{\Delta} |x_0(t)|\, dt - 2 \sum_{\substack{j=1 \\ a, b \notin \Delta''_j}}^{s} \int_{\Delta''_i} |x_0(t)|\, dt - 2 \cdot \int_{[t_0, t_1] \cup [t_{n-1}, t_n]} |x_0(t)|\, dt$$

$$\ge \int_{\Delta} |x_0(t)|\, dt - 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \cdot (b-a) - 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{1}{t_1 - a + b - t_{n-1}} \cdot (t_1 - a + b - t_{n-1})$$

$$= \int_{\Delta} |x_0(t)|\, dt - \varepsilon.$$

Odavde zaključujemo da $x_\varepsilon = \tilde{x}$ ima tražena svojstva. ▪

Dokaz stava: Na početku prethodne leme smo pokazali da je $\| f \| \leq \int_{\Delta} | x_0(t) | \, dt$, a na kraju smo dobili $f(\tilde{x}) \geq \int_{\Delta} | x_0(t) | \, dt - \varepsilon$, što zbog proizvoljnosti broja ε daje

$f(\tilde{x}) \geq \int_{\Delta} | x_0(t) | \, dt$. Obzirom da je

$\| f \| = \sup \{ | f x | : x \in C(\Delta), \| x \| \leq 1 \}$ dobijamo

$\| f \| \geq \int_{\Delta} | x_0(t) | \, dt$. Znači $\| f \| = \int_{\Delta} | x_0(t) | \, dt$. ▪

Napomena: Možemo pokazati da na $C(\Delta)$ postoje neprekidni linearni funkcionali koje ne možemo prikazati u obliku (3). Naime posmatrajmo $t_0 \in \Delta$ i $x \in C(\Delta)$, tada je sa $x \to x(t_0)$ definisan neprekidan linearan funkcional na $C(\Delta)$. Pokazaćemo da ovakav funkcional ne može da se prikaže u obliku (3).

Pretpostavimo suprotno tj. da postoji $x_0 \in C(\Delta)$ tako da važi (3). Tada postoji tačka $s \in \Delta, s \neq t_0$ tako da je $x_0(s) \neq 0$ (ako takva tačka ne bi postojala onda bi integral u (3) imao vrednost 0 za svaku funkciju $C(\Delta)$, a kako je $f(x) = \int_{\Delta} x_0(t) x(t) \, dt = x(t_0)$ to bi značilo da bi svaka funkcija $x \in C(\Delta)$ u tački t_0 imala vrednost 0, što nije tačno).

Iz neprekidnosti funkcije x_0 u tački s sledi da za $\varepsilon = \frac{1}{2} | x_0(s) |$ postoji $\delta > 0$ tako da je

$| x_0(t) - x_0(s) | \leq \frac{1}{2} | x_0(s) |, \; t \in [s - \delta, s + \delta]$.

Odavde sledi da je $| x_0(t) | \geq \frac{1}{2} | x_0(s) |, t \in [s - \delta, s + \delta]$ i lako možemo proveriti da je x_0 istog znaka na intervalu $[s - \delta, s + \delta]$. Pri tom posmatraćemo takav interval $[s - \delta, s + \delta]$ koji ne sadrži t_0 (u suprotnom uvek možemo " suziti " interval tako da $t_0 \notin [s - \delta, s + \delta]$). Posmatrajmo funkciju $x \in C(\Delta)$ takvu da izvan intervala $[s - \delta, s + \delta]$ ima vrednost 0, a na intervalu $(s - \delta, s + \delta)$ ima isti znak i da je $x(s) \neq 0$. Tada $\int_{s-\delta}^{s+\delta} x_0(t) x(t) \, dt = x(t_0) = 0$, a kako je $x_0(t) x(t)$ istog znaka, odavde sledi da je $x_0(t) x(t) = 0$ za svako $t \in [s - \delta, s + \delta]$. Odnosno $x_0(s) = 0$, pa dobijamo kontradikciju.

Znači funkcija f se ne može prikazati u obliku (3). ▪

Stav 3.4: *Ako je* $k:\Delta\times\Delta\to R$ *neprekidna funkcija, onda je sa*

$$y(s)=\int_{\Delta} k(s,t)\,x(t)\,dt,\qquad x\in C(\Delta)$$

dat neprekidan linearan operator K *Banahovog prostora* $C(\Delta)$ *u* $C(\Delta)$. *Norma operatora* K *data je sa*

$$|K|=\max_{s\in\Delta}\int_{\Delta}|k(s,t)|\,dt.$$

Dokaz: Kako je $y=Kx$ dobijamo

$$|y(s)|=\left|\int_{\Delta} k(s,t)\,x(t)\,dt\right|\le\int_{\Delta}|k(s,t)|\,|x(t)|\,dt$$

$$\le|x|\int_{\Delta}|k(s,t)|\,dt\le M|x|$$

gde je $M=\sup_{s\in\Delta}\int_{\Delta}|k(s,t)|\,dt$.

Odnosno,

$|Kx|\le M\,|x|$, pa sledi da je $|K|\le M$.

Funkcija $s\to\int_{\Delta}|k(s,t)|\,dt$ je neprekidna jer važi

$$\left|\int_{\Delta}|k(s,t)|\,dt-\int_{\Delta}|k(s_0,t)|\,dt\right|=\left|\int_{\Delta}(|k(s,t)|-|k(s_0,t)|)\,dt\right|$$

$$\le\left|\int_{\Delta}|k(s,t)-k(s_0,t)|\,dt\right|\qquad\text{(kako je funkcija } k \text{ neprekidna)}$$

$$=\int_{\Delta}\frac{\varepsilon}{a-b}\,dt=\varepsilon.$$

Tada postoji broj $s_0 \in \Delta$ takav da je

$$M = \int_{\Delta} | k(s_0, t) | \, dt.$$

Posmatrajmo funkcional

$$f(x) = \int_{\Delta} k(s_0, t) \, x(t) \, dt, \qquad x \in C(\Delta)$$

Prema lemi, za $\varepsilon > 0$ postoji funkcija $x_\varepsilon \in C(\Delta)$ tako da je $|x_\varepsilon| = 1$ i

$$f(x_\varepsilon) > \int_{\Delta} |k(s_0, t)| \, dt - \varepsilon.$$

Tada

$$|K| \geq |K x_\varepsilon| = \max \{ |K x_\varepsilon(s)|, s \in \Delta \}$$

$$= \max_{s \in \Delta} \left| \int_{\Delta} k(s, t) \, x_\varepsilon(t) \, dt \right|$$

$$\geq \left| \int_{\Delta} k(s_0, t) \, x_\varepsilon(t) \, dt \right| = | f(x_\varepsilon) | > \int_{\Delta} |k(s_0, t)| \, dt - \varepsilon.$$

Odavde je $|K| \geq M$, pa kako važi $|K| \leq M$ zaključujemo da je $|K| = M$. ▪

4. Prostor $BV(\Delta; X)$

Prostor C(Δ) svih neprekidnih kompleksnih(realnih) funkcija na segmentu $\Delta = [a,b]$ je Banahov prostor sa normom

$$\|f\| = \max\{\,|f(t)| : t \in \Delta\,\}$$

Ako $f_0 \in C(\Delta)$ onda je sa

$$F(f) = \int_a^b f_0(t) f(t) dt,\ f \in C(\Delta) \qquad (*)$$

definisan neprekidan linearan funkcional na prostoru C(Δ).Važno je primetiti da sa (*) nije dat opšti oblik neprekidnog linearnog funkcionala na prostoru C(Δ), a to smo pokazali na primeru neprekidnog linearnog funkcionala $f \to f(c)$ *gde je* $f \in C(\Delta), c \in \Delta$.

Naš cilj je da pokušamo da pronađemo opšti oblik za proizvoljan element iz prostora $C^*(\Delta)$.Da bismo to postigli uvešćemo pojam Riman –Stiltjesovog integrala kao i pojam funkcije ograničene varijacije.

Uočimo segment $\Delta = [a,b] \subset R$. Konačan skup tačaka $P = \{t_0, t_1, ... t_n\} \subset \Delta$ takav da je

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b \qquad (1)$$

nazvaćemo subdivizijom(podelom) segmenta Δ.

Najveći od brojeva $t_1 - t_0, t_2 - t_1, ... t_n - t_{n-1}$ je dijametar podele P i označavamo ga $\delta(P)$.
Ako za podelu P' važi $P' \subset P$ kazaćemo da je podela P finija od podele P' odnosno da je podela P' grublja od podele P.

Neka je X normiran prostor i $f : \Delta \to X$ data funkcija. Za podelu (1) posmatrajmo zbir

$$V_P(f; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$

Jaka totalna varijacija funkcije f na segmentu Δ je

$$V(f; \Delta) = \sup V_P(f; \Delta)$$

gde se supremum uzima po svim mogućim podelama segmenta Δ.

Ako je $V(f;\Delta)<\infty$ onda kažemo da funkcija f ima konačnu jaku totalnu varijaciju, odnosno da je f ograničene jake varijacije na segmentu Δ.

Sa $BV(\Delta;X)$ označićemo skup svih funkcija $f:\Delta\to X$ ograničene jake varijacije.

Teorema 4.1.*Skup* $BV(\Delta;X)\subseteq X^{\Delta}$ *svih funkcija ograničene jake varijacije je normiran prostor u odnosu na normu*

$$\|f\|=|f(a)|+V(f;\Delta) \qquad (2)$$

Ako je X Banahov prostor, onda je i $BV(\Delta;X)$ *Banahov prostor.*

Dokaz:

Prvo ćemo pokazati da je $BV(\Delta;X)$ vektorski prostor. Za skalar λ i funkcije $f,g\in BV(\Delta;X)$ i podelu (1) imamo:

$$V_P(\lambda f+g)=\sum_{k=1}^{n}|\lambda f(t_k)+g(t_k)-\lambda f(t_{k-1})-g(t_{k-1})|<|\lambda|\sum_{k=1}^{n}|f(t_k)-f(t_{k-1})|+\sum_{k=1}^{n}|g(t_k)-g(t_{k-1})|$$

Kako je

$V_P(\lambda\ f+g\ ;\Delta)\le|\ \lambda\ |\ V_P(f;\Delta)+V_P(g;\Delta)$ za bilo koju podelu segmenta Δ onda važi:

$V(\lambda\ f+g;\Delta)\le|\ \lambda\ |\ V(f;\Delta)+V(g;\Delta)\quad\Rightarrow\quad\lambda\ f+g\in\ BV(\Delta;X)$ i zaključujemo da je $BV(\Delta;X)$ vektorski prostor.

Lako je pokazati da (2) ima prva tri svojstva norme. Pokazaćemo da važi i četvrto svojstvo.

$$\begin{aligned}\|\lambda\ f+g\|&=|\ \lambda\ f(a)+g(a)\ |+V(\lambda\ f+g\ ;\Delta)\\&\le|\ \lambda\ ||\ f(a)\ |+|\ g(a)\ |+|\lambda|V(f;\Delta)+V(g;\Delta)\\&=|\lambda|\ \|\ f\ \|+\|\ g\ \|\end{aligned}$$

Za $\lambda=1$ dobijamo $\|\ f+g\ \|\le\|\ f\ \|+\|\ g\ \|$
Znači sa (2) je definisana norma na prostoru $BV(\Delta;X)$.

Pokažimo da ako je X Banahov prostor onda je i $BV(\Delta;X)$ Banahov prostor.
Neka je (f_n) Košijev niz u $BV(\Delta;X)$ i $t\in\Delta$.

$$\left|f_m(t)-f_n(t)\right| \le \left|f_m(t)-f_n(t)-\left[f_m(a)-f_n(a)\right]\right| + \left|f_m(a)-f_n(a)\right|$$
$$\le \left|f_m(a)-f_n(a)\right| + V(f_m - f_n;\Delta)$$
$$= \|f_m - f_n\|$$

Ovo pokazuje da je $(f_n(t), n \in N)$ Košijev niz u prostoru X. Kako je X potpun prostor onda niz $(f_n(t), n \in N)$ konvergira u X tj. $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f_0(t)$.

Za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n(\varepsilon) \in N$ takvo da je

$$m, p \ge n(\varepsilon) \Rightarrow \|f_m - f_p\| \le \varepsilon \qquad (3)$$

Za podelu (1) iz (3) dobijamo:

$$\left|f_m(a)-f_p(a)\right| + \sum_{k=1}^{n}\left|f_m(t_k)-f_p(t_k)-\left[f_m(t_{k-1})-f_p(t_{k-1})\right]\right| \le \varepsilon$$

Odavde uz fiksnu podelu P i za $m \to \infty$ dobijamo:

$$\left|f_0(a)-f_P(a)\right| + \sum_{k=1}^{n}\left|\left[f_0(t_k)-f_p(t_k)\right]-\left[f_0(t_{k-1})-f_p(t_{k-1})\right]\right| \le \varepsilon$$

ali zbog proizvoljnosti podele P dobijamo

$$\left|f_0(a)-f_p(a)\right| + V(f_0 - f_p;\Delta) \le \varepsilon .$$

Znači za $p \ge n(\varepsilon) \Rightarrow \|f_0 - f_p\| \le \varepsilon$ i zaključujemo da niz (f_n) konvergira ka f_0.
Kako je $V(f_0 - f_p;\Delta)$ konačno, onda $f_0 - f_p \in BV(\Delta; X)$ pa sledi da $f_0 \in BV(\Delta; X)$. ▪

Stav 4.2: *Ako je* $f \in BV(\Delta, X)$ *onda je* $|f(t)| \le \|f\|$ *za* $t \in \Delta$.

Dokaz: Posmatrajmo podelu segmenta $\Delta:\ a < t < b,$ tada je

$$\left|f(t)-f(a)\right| + \left|f(b)-f(t)\right| \le V(f;\Delta)$$

$$\left|f(t)\right| - \left|f(a)\right| + \left|f(b)-f(t)\right| \le V(f;\Delta)$$ tim pre važi i

$$\left|f(t)\right|-\left|f(a)\right|\leq V(f;\Delta)$$

$$\left|f(t)\right|\leq\left|f(a)\right|+V(f;\Delta)$$

$$|\ f(t)\ |\leq\|\ f\ \|$$

▪

Stav 4.3: *Ako* $f,g\in BV(\Delta;C)$ *,onda je funkcija*

$$t\to(fg)(t)=f(t)g(t)$$

element iz $BV(\Delta;C)$. *Sa*

$$f\to\|f\|_0=\left|f(a)\right|+2V(f;\Delta)$$

je data norma na $BV(\Delta;C)$ *i pri tom važi*

$$\|f\,g\|_0\leq\|f\|_0\cdot\|g\|_0,\ \|1\|_0=1$$

gde je 1 jedinična funkcija na Δ *tj.* $1(x)=1,\ x\in\Delta$

Dokaz: Za podelu (1) imamo:

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f(t_k)g(t_k)-f(t_{k-1})g(t_{k-1})\right|\leq$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}\left|f(t_k)g(t_k)-f(t_k)g(t_{k-1})+f(t_k)g(t_{k-1})-f(t_{k-1})g(t_{k-1})\right|$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}\left|f(t_k)\right|\left|g(t_k)-g(t_{k-1})\right|+\sum_{k=1}^{n}\left|g(t_{k-1})\right|\left|f(t_k)-f(t_{k-1})\right|$$

$$\leq\sup_{t\in\Delta}\left|f(t)\right|\ \sum_{k=1}^{n}\left|g(t_k)-g(t_{k-1})\right|+\sup_{t\in\Delta}\left|g(t)\right|\ \sum_{k=1}^{n}\left|f(t_k)-f(t_{k-1})\right|$$

$$\leq\sup_{t\in\Delta}\left|f(t)\right|\ V(g;\Delta)+\sup_{t\in\Delta}\left|g(t)\right|\ V(f;\Delta)$$

$$\leq\|f\|V(g;\Delta)+\|g\|V(f;\Delta)$$

$$\leq (|f(a)| + V(f;\Delta)) \cdot V(g;\Delta) + \ (|g(a)| + V(g;\Delta)) \cdot V(f;\Delta)$$

Kako ovo važi za bilo koju podelu P onda je

$$V(f\,g;\Delta) \leq |f(a)|\, V(g;\Delta) + |g(a)|\, V(f;\Delta) + 2\, V(f;\Delta)\, V(g;\Delta) \quad (\,*\,)$$

Odavde zaključujemo da $fg \in BV(\Delta;C)$.

Pokažimo da je $f \to \|f\|_0$ norma na $BV(\Delta;C)$.Lako je primetiti da važe prva tri svojstva norme. Koristićemo rezultat dobijen u teoremi 4.1, a to je da važi $V(\lambda f + g;\Delta) \leq |\lambda|\, V(f;\Delta) + V(g;\Delta)$, za $\lambda = 1$ dobijamo $V(f + g;\Delta) \leq V(f;\Delta) + V(g;\Delta)$. Tada imamo

$$\|f + g\|_0 = |f(a) + g(a)| + 2V(f + g;\Delta) \leq |f(a)| + |g(a)| + 2\, V(f;\Delta) + 2\, V(g;\Delta)$$
$$\leq \|f\|_0 + \|g\|_0$$

$$\|f\|_0 \|g\|_0 = (|f(a)| + 2 \cdot V(f;\Delta)) \cdot (|g(a)| + 2 \cdot V(g;\Delta))$$

$$= |f(a)\, g(a)| + 2 \cdot (|f(a)|\, V(g;\Delta) + |g(a)|\, V(f;\Delta) + 2\, V(f;\Delta)\, V(g;\Delta))$$

$$\overset{(*)}{\geq} |fg(a)| + 2V(fg;\Delta) = \|fg\|_0 \qquad \blacksquare$$

Stav 4.4: *Ako je* $f \in BV(\Delta;C)$, *onda je*

$$V(f;\Delta) \leq \ 4 \cdot \sup \left| \sum_j ((f(b_j) - f(a_j)) \right| \qquad (4)$$

gde se supremum uzima po svim konačnim familijama disjunktnih intervala $(a_j, b_j) \subset \Delta$.

Dokaz: Prvo ćemo posmatrati slučaj ako je funkcija f realna. Za podelu (1) imamo:

$$\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| = \sum\nolimits_1 [f(t_k) - f(t_{k-1})] - \sum\nolimits_2 [f(t_k) - f(t_{k-1})]$$

gde se u $\sum_1$ sumira po svim k, za koje je $f(t_k) - f(t_{k-1}) \geq 0$ a u $\sum_2$ po preostalim k.

Prva suma je vezana za disjunktne intervale (t_{k-1}, t_k) *iz* $[a,b]$ pa $4\sum_1$ ne prelazi desnu stranu od (4) koju ćemo privremeno označiti sa M. Na isti način zaključujemo da $-4\sum_2$ nije veće od M. Odnosno:

$$4\sum_1 \leq M$$
$$-4\sum_2 \leq M$$
$$2\cdot\left(\sum_1 - \sum_2\right) \leq M$$
$$2\sum_{k=1}^{n} \left| f(t_k) - f(t_{k-1}) \right| \leq M$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left| f(t_k) - f(t_{k-1}) \right| \leq 2\sup \left| \sum_j (f(b_j) - f(a_j)) \right| \qquad (*)$$

Ako je f kompleksna funkcija, tada je:

$$\sum \left| f(t_k) - f(t_{k-1}) \right| \leq \sum \left| \mathrm{Re}\, f(t_k) - \mathrm{Re}\, f(t_{k-1}) \right| + \sum \left| \mathrm{Im}\, f(t_k) - \mathrm{Im}\, f(t_{k-1}) \right|$$
$$(\left| a+ib \right| \leq |a| + |b|)$$

$$\overset{(*)}{\leq} 2\cdot\sup \left| \sum_j (\mathrm{Re}\, f(b_j) - \mathrm{Re}\, f(a_j)) \right| + 2\cdot\sup \left| \sum_j (\mathrm{Im}\, f(b_j) - \mathrm{Im}\, f(a_j)) \right|$$

$$= 2\cdot\sup \left| \mathrm{Re} \sum_j ((f(b_j) - f(a_j)) \right| + 2\cdot\sup \left| \mathrm{Im} \sum_j ((f(b_j) - f(a_j)) \right|$$

$$= 4\cdot\sup \left| \sum_j ((f(b_j) - f(a_j)) \right|$$

Može se primetiti da u dokazu nije korišteno da je funkcija $f : \Delta \to C$ ograničene jake varijacije pa ovaj rezultat važi i za funkcije koje nisu ograničene jake varijacije. ▪

Definicija 4.5: *Funkcija* $f : \Delta \to X$ *je ograničene varijacije ako je*

$$\sup \left| \sum \left[f(b_j) - f(a_j) \right] \right| < \infty$$

gde se supremum uzima po svim konačnim familijama disjunktnih intervala $\left(a_j, b_j\right) \subset \Delta$.

Stav 4.6:

i) *Ako* $f \in BV(\Delta; X)$ *onda je* f *ograničene varijacije.*

ii) *Funkcija* $f : \Delta \to C$ *je ograničene varijacije ako i samo ako je* $f \in BV(\Delta; C)$.

Dokaz:

i) Neka $f \in BV(\Delta; X)$. Konačnu familiju disjunktnih intervala (a_j, b_j) možemo vezati za neku podelu segmenta Δ.Tada je

$$\left| \sum_j ((f(b_j) - f(a_j)) \right| \leq \sum_j \left| f(b_j) - f(a_j) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left| f(t_k) - f(t_{k-1}) \right| \leq V(f; \Delta)$$

Odavde sledi da je funkcija f ograničene varijacije.

ii) Ako je $f : \Delta \to C$ ograničene varijacije, tada korišćenjem stava 4.4 dobijamo da je $f \in BV(\Delta; C)$.

Definicija 4.7: *Funkcija* $f : \Delta \to X$ *je ograničene slabe varijacije ako je za svako* $x^* \in X^*$ *funkcija* $x^* \circ f : \Delta \to C$ *ograničene varijacije.*

Stav 4.8: *Ako je funkcija* $f : \Delta \to X$ *ograničene varijacije onda je i slabe ograničene varijacije.*

Dokaz: Za proizvoljno $x^* \in X^*$ imamo

$$V(x^* \circ f; \Delta) \overset{stav4}{\leq} 4 \cdot \sup \left| \sum_j ((x^* \circ f)(b_j) - (x^* \circ f)(a_j)) \right|$$

$$= 4 \cdot \sup \left| x^* \sum_j ((f(b_j) - f(a_j)) \right|$$

$$= 4 \cdot \sup \left| \sum_j ((f(b_j) - f(a_j)) \right| \cdot \left| x^* \right|.$$

Odavde sledi da je f slabe ograničene varijacije. ▪

Veza funkcija ograničene varijacije s monotonim funkcijama

Stav 4.9: *Monotona funkcija* $f:\Delta \to R,\ \Delta = [a,b]$ *je funkcija ograničene varijacije.*

Dokaz: Neka je funkcija f rastuća na $\Delta = [a,b]$.Za proizvoljnu podelu P segmenta $\Delta = [a,b]$ važi

$$V_P(f;\Delta) = \sum_{k=1}^{n} \left| f(t_k) - f(t_{k-1}) \right| = \sum_{k=1}^{n} (f(t_k) - f(t_{k-1})) = f(b) - f(a).$$

Ako je funkcija f opadajuća, slično dobijamo $V_P(f;\Delta) = f(a) - f(b)$.
Znači

$$V(f;\Delta) = \left| f(a) - f(b) \right|. \quad \blacksquare$$

Stav 4.10: *Ako za funkcije* $f:\Delta \to X,\quad g:\Delta' \to X$ *postoji strogo monotona funkcija* $w:\Delta \to \Delta'$ gde *je* $\Delta = [a,b], \Delta' = [c,d]$ *,takva da je* $f = g \circ w$ *onda je*

$$V(f;\Delta) = V(g;\Delta')$$

Dokaz: Posmatrajmo slučaj da w strogo raste. Neka je

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

podela P segmenta Δ, onda je

$$c = u_0 < u_1 < \ldots < u_n = d$$

podela P' segmenta Δ', gde je $u_k = w(t_k)$. Kako važi

$$g(u_k) - g(u_{k-1}) = g(w(t_k)) - g(w(t_{k-1})) = f(t_k) - f(t_{k-1}),$$

zaključujemo da je $V_P(f;\Delta) = V_{P'}(g;\Delta)$. (*)
Analogno podeli P' segmenta Δ' odgovara podela P segmenta Δ gde je $t_k = w^{-1}(u_k)$, i takođe važi (*).
Kako ovo važi za proizvoljnu podelu zaključujemo da $V(f;\Delta) = V(g;\Delta')$.
Analogno bi se pokazalo da funkcija w strogo monotono opada. $\blacksquare$

Stav 4.11: *Ako $h \in BV(\Delta; X)$ i ako je segment Δ unija segmenata Δ_1, Δ_2 koji imaju samo jednu zajedničku tačku, onda je*

$$V(f;\Delta_1)+V(g;\Delta_2)=V(h;\Delta)$$

gde je $f = h|\Delta_1$ i $g = h|\Delta_2$.

Dokaz: Neka je $\Delta_1 = [a,b]$, $\Delta_2 = [c,d]$, $b = c$ .Ako je podela P segmenta Δ_1 a $\overline{P}$ podela segmenta Δ_2 onda je $Q = P \cup \overline{P}$ podela segmenta Δ i pri tom važi

$$V_Q(h;\Delta) = V_P(f;\Delta_1) + V_{\overline{P}}(g;\Delta_2) \qquad (5)$$

Budući da je $V_Q(h;\Delta) \le V(h;\Delta)$ iz (5) dobijamo

$$V\ (h;\Delta) \ge V_P(f;\Delta_1) + V_{\overline{P}}(g;\Delta_2) \quad \Rightarrow$$

$$V(h;\Delta) \ge V(f;\Delta_1) + V\ (g;\Delta_2) \qquad (6)$$

Posmatrajmo podelu $\overline{Q}$ segmenta Δ

$$a = s_0 < s_1 < ... < s_m = d\ .$$

Ovoj podeli dodajmo tačku b ako ne pripada skupu $\overline{Q}$, dobijamo podelu Q segmenta Δ koja je finija od podele $\overline{Q}$. Tačke podele Q koje su na $[a,b]$ daju podelu P tog segmenta a tačke od Q koje su na $[c,d]$ daju podelu $\overline{P}$ tog segmenta .Tada važi (5)

$$V_Q(h;\Delta) = V_P(f;\Delta_1) + V_{\overline{P}}(g;\Delta_2)$$

$$V_{\overline{Q}}(h;\Delta) \le V_Q(h;\Delta)$$

$$V_{\overline{Q}}(h;\Delta) \le V_P(f;\Delta_1) + V_{\overline{P}}(g;\Delta_2) \quad \Rightarrow$$

$$V(h;\Delta) \le V(f;\Delta_1) + V(g;\Delta_2) \qquad (7)$$

(6) i (7) daju traženi rezultat. ▪

Stav 4.12: *Neka je X Banahov prostor ,* $f \in BV(\Delta, X)$*, i* $V(s)$ *jaka varijacija funkcije* f *na segmentu* $[a,s]$*,* $a < s < b$*.Tada važi:*
a) Skup prekida funkcije f *je prebrojiv*
b) f *je zdesna (sleva) neprekidna u tački* $c \in \Delta$ *ako i samo ako je V zdesna (sleva) neprekidna u tački c.*
c) f *ima jednostran jaki limes u svakoj tački intervala* Δ*.*

Dokaz : a) Kako je funkcija V pozitivna i raste na Δ ona može imati samo prekide prve vrste i to njih najviše prebrojivo mnogo. Obzirom da je funkcija V monotona ona ima levi i desni limes za svako $s \in \Delta, s \neq a,b$, u tački a V ima desni, a u tački b levi limes.

Neka je $a \le t \le s \le b$ i $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$ bilo koja subdivizija segmenta $[a,t]$ onda je

$$\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| + |f(s) - f(t)| \le V(s) \Rightarrow$$
$$V(t) + |f(s) - f(t)| \le V(s) \Rightarrow$$
$$|f(s) - f(t)| \le V(s) - V(t), t < s \qquad (8)$$

Iz (8) zaključujemo da neprekidnost sleva(zdesna) funkcije V u tački c povlači jaku neprekidnost sleva(zdesna) funkcije f u tački c, što znači da je skup prekida funkcije f prebrojiv. I time je pokazano tvrđenje pod a).

b) Pokažimo da, ako je funkcija f neprekidna zdesna u tački $c < b$ onda je i V neprekidna zdesna u tački c. Pod a) smo već pokazali da iz neprekidnosti sleva (zdesna) funkcije V u c sledi neprekidnost sleva (zdesna) funkcije f .

Za $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da $0 \le t - c < \delta \Rightarrow |f(t) - f(c)| < \varepsilon$

Na osnovu stava 4.11 važi $V(c) + V(f;[c,b]) = V(b)$. Za ovo ε postoji subdivizija $c = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ takva da je

$$V(b) - \varepsilon \le V(c) + \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$

Svakako možemo uzeti subdiviziju s tim svojstvom za koju važi $c < t_1 < c + \delta$

$$V(b) - \varepsilon \le V(c) + \varepsilon + \sum_{k=2}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \le V(c) + \varepsilon + V(f;[t_1, b\ ])$$
$$\le V(c) + \varepsilon + V(b) - V(t_1)$$

Dobijamo $V(t_1) - V(c) \leq 2\varepsilon$

Kako iz $0 < t_1 - c < \delta \Rightarrow V(t_1) - V(c) \leq 2\varepsilon,$ zaključujemo da je funkcija V neprekidna zdesna u tački c.

c) Ostalo je još da pokažemo da funkcija f ima jednostrane limese u svakoj tački. Neka je $c < b$ tačka prekida funkcije V. Zbog određenosti uzmimo da je $V(c) < V(c+0)$. Neka su (s_n) i $(s_n{}')$ nizovi koji konvergiraju ka c sa desne strane. Tada važi $V(s_n) \to V(c+0)$, pa na osnovu (8) za m<n

imamo

$$\left| f(s_m) - f(s_n) \right| \leq V(s_m) - V(s_n)$$

a odavde sledi da je $(f(s_n), n \in N)$ Košijev niz u X. Neka je

$$x = \lim f(s_n) \qquad x' = \lim f(s_n{}')$$

Pokažimo da je $x = x'$. U suprotnom postojao bi n_0 takav da za svako $n \geq n_0$ važi

$$\left| f(s_n) - x \right| \leq \frac{1}{3} \left| x - x' \right| \qquad \left| f(s_n{}') - x \right| \leq \frac{1}{3} \left| x - x' \right|$$

Tada je

$$\left| V(s_n) - V(s_n{}') \right| \geq \left| f(s_n) - f(s_n{}') \right| = \left| f(s_n) - x + x - x' + x' - f(s_n{}') \right|$$

$$\geq \left| x - x' \right| - \left| f(s_n) - x \right| - \left| f(s_n{}') - x' \right| \geq \frac{1}{3} \left| x - x' \right|.$$

Dobijamo

$$\left| V(s_n) - V(s_n{}') \right| \geq \frac{1}{3} \left| x - x' \right|$$

a tu je kontradikcija jer $V(s_n)-V(s_n^{'})\to 0,\ n\to\infty$. Znači $x=x^{'}$ i f ima jaki limes zdesna u tački $c\neq b$. ▪

Stav 4.13: *Funkcija* $f:\Delta\to R$ *je ograničene varijacije na* Δ *ako i samo ako postoje monotone funkcije* $f_1, f_2:\Delta\to R$ *takve da je* $f=f_1-f_2$.

Ako $f\in BV(\Delta;R)$ *funkcije*

$$f_1(t)=\frac{V(t)+f(t)}{2},\qquad f_2(t)=\frac{V(t)-f(t)}{2}$$

rastu na Δ *i* $f=f_1-f_2$.

Ako funkcije $g_1,g_2:\Delta\to R$ rastu na Δ i ako je $f=g_1-g_2$ onda je

$$f_i(t^{'})-f_i(t)<g_i(t^{'})-g_i(t)\qquad (9)$$

za $t<t^{'}$ i $i=1,2$.

Dokaz:

Iz stava 4.12 zaključujemo da su funkcije f_1, f_2 neprekidne u onim tačkama u kojima je funkcija f neprekidna . Neka je $t^{'}>t$ tada je

$$\begin{aligned} f_1(t^{'})-f_1(t) &= \frac{1}{2}(V(t^{'})-V(t)+f(t^{'})-f(t)) \\ &\geq \frac{1}{2}(\left|f(t)-f(t^{'})\right|+f(t^{'})-f(t))\geq 0 \end{aligned}$$

$$f_2(t^{'})-f_2(t)=\frac{1}{2}(V(t^{'})-V(t)-f(t^{'})+f(t))$$

$$\geq \frac{1}{2}(\left|f(t)-f(t^{'})\right|-f(t^{'})+f(t))\geq 0$$

Time smo pokazali da funkcije f_1, f_2 rastu na Δ. Znači funkcija ograničene varijacije može da se prikaže kao razlika dve monotone funkcije.

($\Leftarrow$) Ako je funkcija razlika dve monotone funkcije, tj. razlika dve funkcije ograničene varijacije (jer je svaka monotona funkcija ograničene varijacije), onda je ta funkcija ograničene varijacije.

Pokažimo da važi (9). Ako bismo pretpostavili suprotno, tada bi postojali brojevi $c, d (c < d)$ takvi da važi

$$f_1(d) - f_1(c) > g_1(d) - g_1(c)$$
$$\frac{1}{2}(V(d) - V(c) + f(d) - f(c)) > g_1(d) - g_1(c)$$

Neka je $c = t_0 < t_1 < ... < t_n = d$ podela takva da je

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left|f(t_k) - f(t_{k-1})\right| + \frac{f(d) - f(c)}{2} > g_1(d) - g_1(c)$$

Kako je

$$f(d) - f(c) = \sum_{k=1}^{n}(f(t_k) - f(t_{k-1})) \text{ onda}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\left|f(t_k) - f(t_{k-1})\right| + f(t_k) - f(t_{k-1})) > \sum_{k=1}^{n}(g_1(t_k) - g_1(t_{k-1}))$$

Odavde primećujemo da postoji bar jedan indeks k takav da je

$$\frac{1}{2}(\left|f(t_k) - f(t_{k-1})\right| + f(t_k) - f(t_{k-1})) > g_1(t_k) - g_1(t_{k-1})$$

Ako je $f(t_k) \le f(t_{k-1})$ onda je leva strana nejednakosti jednaka nuli a to nije moguće jer je funkcija g_1 rastuća. Ako je $f(t_k) > f(t_{k-1})$ onda nejednakost postaje $f(t_k) - f(t_{k-1}) > g_1(t_k) - g_1(t_{k-1})$.

Kako je $f = g_1 - g_2$ nejednakost prelazi u $-(g_2(t_k) - g_2(t_{k-1})) > 0$, a ni to nije moguće jer je funkcija g_2 rastuća. Znači važi (9). ▪

Stav 4.14 : *Neka je* (f_n) *niz kompleksnih funkcija definisanih na skupu T. Ako postoji realan broj* $M > 0$ *takav da je*

$$\left|f_n(t)\right| < M \quad (t \in T, n \in N)$$

onda za svaki prebrojiv podskup $T_0 \subseteq T$ postoji podniz $(f_{p(n)})$ niza (f_n) koji konvergira na T_0.

Dokaz: Neka je $T_0 = \{t_1, t_{2,} ...\}$, tada važi

$$|f_n(t_1)| < M \quad (n \in N)$$

pa postoji podniz

$$(f_{p_1(n)}, \quad n \in N) \qquad (10)$$

niza (f_n) koji konvergira u tački t_1. Ako posmatramo niz (10) u tački t_2 dobijamo ograničen niz $(f_{p_1(n)}(t_2), \quad n \in N)$ pa postoji podniz

$$(f_{p_2[p_1(n)]}, \quad n \in N) \qquad (11)$$

niza (10) koji konvergira u tački t_2. Tada niz (11) konvergira na skupu $\{t_1, t_2\}$. Ako bi produžili na isti način dalje došli bismo do podniza $(f_{(p_m \circ ... \circ p_1)(n)}, n \in N)$ niza (f_n) koji konvergira na skupu $\{t_1, ... t_m\}$. Lako je uočiti da je

$$p(k) = (p_k \circ ... \circ p_1)(k) \qquad k \in N$$

strogo rastući niz sa N u N. Tada je $(f_{p(n)}, n \in N)$ podniz niza (f_n). Ako niz $(f_{p(n)}, n \in N)$ posmatramo u tački t_m, dobijamo niz $(f_{p(n)}(t_m), n \in N)$ takav da je $(f_{p(n)}(t_m), n \geq m)$ podniz niza

$$(f_{(p_m \circ ... \circ p_1)(n)}(t_m), n \geq m)$$

Odatle zaključujemo da niz $(f_{p(n)}(t_m), n \in N)$ konvergira. Znači niz konvergira $(f_{p(n)}, n \in N)$ na skupu T_0. ▪

Stav 4.15: *Neka je $BV(\Delta)$ skup svih funkcija $f : \Delta \to C$ ograničene varijacije na segmentu $\Delta = [a, b]$. Ako za niz (f_n) iz $BV(\Delta)$ postoji realan broj $M > 0$ takav da je*

$$|f_n(t)| \leq M, \quad V(f_n, \Delta) \leq M$$

za svako $t \in \Delta$ *i svako* $n \in N$, *onda postoji podniz* $(f_{p(n)})$ *niza* (f_n) *koji na* Δ *konvergira funkciji* $f \in BV(\Delta)$.

Da bismo dokazali ovaj stav potrebna nam je sledeća lema.

Lema 4.16: *Ako svaka funkcija* $g_n : \Delta \to R$ *niza* (g_n) *raste na segmentu* Δ *i ako postoji realan broj* $M > 0$ *takav da je* $|g_n(t)| \le M$ *za svako* $t \in \Delta$ *i svako* $n \in N$, *onda niz* (g_n) *ima na* Δ *konvergentan podniz.*

Dokaz: Neka je $T_0 = \{t_1, t_2, ...\}$ skup sastavljen od tačke a i svih racionalnih brojeva iz Δ. Prema stavu 4.14 postoji podniz $(g_{p(n)})$ niza (g_n) koji na T_0 konvergira. Definišimo funkciju g na segmentu Δ na sledeći način

$$g(t_i) = \lim_{n\to\infty} g_{p(n)}(t_i)$$

$$g(t) = \sup_{t_i < t} g(t_i), \quad t \notin T_0$$

Funkcija g raste pa je skup prekida prebrojiv. Neka su $s_1, s_2, ...$ svi prekidi funkcije g.
Ako je g neprekidna u tački $s_0 \in \Delta$, onda za $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ da za

$$|\, t - s_0 \,| < \delta \Rightarrow |\, g(t) - g(s_0) \,| < \varepsilon .$$

Neka su r_1, r_2 racionalni brojevi takvi da je $s_0 - \delta < r_1 < s_0 < r_2 < s_0 + \delta$.
Uzmimo $n(\varepsilon) \in N$ takav da je

$$n \ge n(\varepsilon) \Rightarrow \left|g_{p(n)}(r_1) - g(r_1)\right| < \varepsilon, \qquad \left|g_{p(n)}(r_2) - g(r_2)\right| < \varepsilon.$$

Tada za

$$n \ge n(\varepsilon) \Rightarrow \left|g_{p(n)}(r_1) - g_{p(n)}(r_2)\right| = \left|g_{p(n)}(r_1) - g(r_1) + g(r_1) - g(r_2) + g(r_2) - g_{p(n)}(r_2)\right|$$

$$< 3\,\varepsilon$$

Funkcija g raste, to je $g(r_1) \le g(s_0) \le g(r_2)$, tada imamo

$$|\, g(s_0) - g_{p(n)}(s_0) \,| \le |\, g(s_0) - g(r_1) \,| + |\, g(r_1) - g_{p(n)}(r_1) \,| + |\, g_{p(n)}(r_1) - g_{p(n)}(s_0) |$$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon + \left| \, g_{p(n)}(r_1) - g_{p(n)}(r_2) \, \right| < 5\,\varepsilon$$

Zaključujemo da je $g(s_0) = \lim g_{p(n)}(s_0)$.
Znači niz $(g_{p(n)})$ konvergira funkciji g u svakoj tački $s \in \Delta$, osim možda u prekidnim tačkama. Kako je skup prekida prebrojiv, primena stava 4.14 daje podniz $(g_{r(p(n))}, n \in N)$ niza $(g_{p(n)})$ koji konvergira na skupu $s_1, s_2 \ldots$ Tada niz $(g_{r(p(n))}, n \in N)$ konvergira na celom Δ. ▪

Dokaz stava 4.15: Posmatrajmo prvo slučaj da su sve funkcije f_n realne, tada

$$g_n(t) = \frac{V_n(t) + f_n(t)}{2}, \quad h_n(t) = \frac{V_n(t) - f_n(t)}{2} \qquad t \in \Delta$$

su ove funkcije rastuće na osnovu stava 4.13 i zadovoljavaju uslove predhodne leme. Primenjujući lemu 4.16. na niz (g_n) dobijamo rastući niz $p : N \to N$ takav da niz $(g_{p(n)}))$ konvergira funkciji g koja na Δ raste. Niz funkcija

$$h_{p(n)}(t) = \frac{V_{p(n)}(t) - f_{p(n)}(t)}{2}, \qquad t \in \Delta$$

takođe zadovoljava uslove prethodne leme pa postoji podniz $s(p(n))$, niza $p(n)$ tako da $h_{s(p(n))}$ konvergira funkciji h. Tada niz $n \to f_{s(p(n))} = g_{s(p(n))} - h_{s(p(n))}$ konvergira funkciji $f = g - h$. Kako su funkcije g i h monotone , onda je f kao razlika dve monotone funkcije funkcija ograničene varijacije na Δ.

Ostaje slučaj kada su (f_n) kompleksne funkcije.
Tada za realne funkcije $\operatorname{Re} f_n(t)$ i $\operatorname{Im} f_n(t)$ važi:

$$\left| \operatorname{Re} f_n(t) \right| \leq \left| f_n(t) \right| \leq M \qquad\qquad \left| \operatorname{Im} f_n(t) \right| \leq \left| f_n(t) \right| \leq M$$

$$V(\operatorname{Re} f_n(t);\Delta) \leq V(f_n(t)) \leq M \qquad\qquad V(\operatorname{Im} f_n(t);\Delta) \leq V(f_n(t)) \leq M$$

Sada postupamo kao u prethodnom realnom slučaju. Tada postoji niz $p(n)$ tako da $\operatorname{Re} f_{p(n)}(t)$ konvergira funkciji $\operatorname{Re} f(t)$ koja je funkcija ograničene varijacije. Ista lema daje da postoji podniz $s(p(n))$ tako da $\operatorname{Im} f_{p(n)}(t)$ konvergira funkciji $\operatorname{Im} f(t)$ koja je takođe funkcija ograničene varijacije. Tada niz $f_{s(p(n))} = \operatorname{Re} f_{s(p(n))} + \operatorname{Im} f_{s(p(n))}$ konvergira funkciji $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ koja je funkcija ograničene varijacije. ▪

5.Riman Stiltjesov integral

U ovom poglavlju uvodimo pojam Riman Stiltjesovog integrala funkcije f u odnosu na funkciju α. Ovaj integral predstavlja generalizaciju Rimanovog integrala a zapisujemo ga u obliku

$$\int_a^b f(t)d\alpha(t). \qquad (1)$$

Sa P ćemo označiti podelu

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b \qquad (2)$$

segmenta $\Delta = [a,b]$ i sa $\delta(P)$ dijametar subdivizije P, odnosno najveći od brojeva $t_k - t_{k-1}$ $(k = 1,...n)$.

RS-integral vektorske funkcije u odnosu na skalarnu funkciju

Neka je $f : \Delta \to X$ vektorska funkcija i $\alpha : \Delta \to C$ skalarna funkcija i s_k proizvoljne tačke tako da važi $s_k \in [t_{k-1}, t_k]$, onda Riman Stiltjesovu sumu (RS –sumu) definišemo sa

$$\sigma(f,\alpha;P) = \sum_{k=1}^{n} f(s_k)\,[\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})]. \qquad (3)$$

Primećujemo da je $\sigma(f,\alpha;P)$ vektor prostora X.

Definicija 5.1: *Ako postoji vektor x_0 Banahovog prostora X sa osobinom da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da za svaku podelu P i za svaki izbor tačaka $s_1, s_2,...s_n$* važi

$$\delta(P) < \delta \Rightarrow |\sigma(f,\alpha;P) - x_0| < \varepsilon \qquad (4)$$

tada kažemo da je funkcija f RS-integrabilna u odnosu na funkciju α i vektor x_0 nazivamo RS-integralom funkcije f u odnosu na funkciju α. Vektor x_0 označavamo sa (1) i kažemo da je integral (1) uzet u smislu jake konvergencije.

Iz (4) uočavamo da je x_0 *limes Riman Stiltjesove sume*

$$\int_a^b f d\alpha = \lim_{\delta(P)\to 0} \sigma(f,\alpha;P)$$

Stav 5.2: *Ako je* $f:\Delta \to X$ *na* $\Delta = [a,b]$ *jako neprekidna funkcija i* $\alpha:\Delta \to C$ *funkcija ograničene varijacije, onda postoji integral (1) u smislu jake konvergencije i pri tom važi*

$$\left| \int_a^b f d\alpha \right| \le V(\alpha,\Delta) \sup\{ \, |f(t)| : t \in \Delta \} \qquad (5)$$

$$\int_a^b f \; d\alpha = \int_a^c f \; d\alpha + \int_c^b f \; d\alpha \qquad (6)$$

za svaki broj $c \in (a,b)$.

Dokaz: Kako je funkcija f neprekidna na Δ onda je i ograničena i uniformno neprekidna na Δ. Prema tome za $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da

$$|t' - t''| < \delta \Rightarrow |f(t') - f(t'')| < \varepsilon$$

Posmatrajmo podelu P segmenta $\Delta = [a,b]$ sa osobinom da je $\delta(P) < \frac{\delta}{2}$ i neka je P' finija podela od P tako da $t' \in (t_{j-1}, t_j)$, $s' \in (t_{j-1}, t')$ i $s'' \in (t', t_j)$. Tada je svakako $\delta(P') < \frac{\delta}{2}$ i važi:

$$|\sigma(f,\alpha;P') - \sigma(f,\alpha,P)| = \Big| \sum_{k \ne j} (f(s_k) - f(s_k')) (\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})) + f(s_j) (\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}))$$

$$- f(s') (\alpha(t') - \alpha(t_{j-1})) - f(s'') (\alpha(t_j) - \alpha(t')) \Big|$$

$$\le \Big| \sum_{k \ne j} (f(s_k) - f(s_k')) (\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})) + f(s_j) (\alpha(t_j) - \alpha(t') + \alpha(t') - \alpha(t_{j-1}))$$

$$- f(s') (\alpha(t') - \alpha(t_{j-1})) - f(s'') (\alpha(t_j) - \alpha(t')) \Big|$$

$$\le \sum_{k \ne j} \Big| (f(s_k) - f(s_k')) (\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})) \Big| + \Big| (\alpha(t') - \alpha(t_{j-1})) (f(s_j) - f(s')) \Big| +$$

$$+\left|\,(\alpha(t_j)-\alpha(t^{'}))\,(f(s_j)-f(s^{''}))\,\right|$$

$$\leq \varepsilon\left[\sum_{k\neq j}\left|\alpha(t_k)-\alpha(t_{k-1})\right|+\left|\alpha(t_j)-\alpha(t^{'})\right|+\left|\alpha(t^{'})-\alpha(t_{j-1})\right|\right]\leq \varepsilon\, V(\alpha;\Delta)$$

Analogno zaključujemo da za svaku finiju podelu $P^{'}$ podele P važi

$\left|\sigma(f,\alpha;P^{'})-\sigma(f,\alpha;P)\right|\leq \varepsilon\ V(\alpha;\Delta)$ bez obzira na izbor tačaka $s_j^{'}$.

Neka su P_1 i P_2 podele od Δ i neka je $\delta(P_1)<\dfrac{\delta}{2}$ i $\delta(P_2)<\dfrac{\delta}{2}$ i P podela takva da je $P=P_1\cup P_2$. Tada je podela P finija od podela P_1 i P_2.

$$\begin{aligned}\left|\sigma(f,\alpha;P_1)-\sigma(f,\alpha;P_2)\right| &\leq \left|\sigma(f,\alpha;P_1)-\sigma(f,\alpha;P)+\sigma(f,\alpha;P)-\sigma(f,\alpha;P_2)\right|\\ &\leq \left|\sigma(f,\alpha;P_1)-\sigma(f,\alpha;P)\right|+\left|\sigma(f,\alpha;P)-\sigma(f,\alpha;P_2)\right|\\ &\leq \varepsilon\ V(\alpha;\Delta)+\ \varepsilon\ V(\alpha;\Delta)\\ &\leq 2\varepsilon\ V(\alpha;\Delta) \qquad\qquad (7)\end{aligned}$$

Kako je prostor X potpun i važi (7) sledi egzistencija vektora $x_0\in X$ takvog da važi (4). Iz (4) sledi

$$\left|x_0\right|<\varepsilon+\left|\sigma(f,\alpha;P)\right|=\varepsilon+\left|\sum_{k=1}^{n}f(s_k)\left[\alpha(t_k)-\alpha(t_{k-1})\right]\right|$$

$$\leq \varepsilon+\left|f\right|\sum_{k=1}^{n}\left|\alpha(t_k)-\alpha(t_{k-1})\right|\leq\varepsilon+\left|f\right|\ V(\alpha,\Delta)$$

gde je $\left|f\right|=\sup\left\{\left|f(t)\right|:t\in\Delta\right\}$. Zbog proizvoljnosti broja ε zaključujemo da je

$\left|x_0\right|\leq\left|f\right|\ V(\alpha;\Delta)$ .Dakle vredi (5).

Pokažimo da važi (6).

Posmatrajmo proizvoljnu podelu P segmenta $\Delta=\left[a,b\right]$ koji sadrži tačku c i neka je S proizvoljan skup istaknutih tačaka te podele. Dalje neka je $P\cap\left[a,c\right]=P^{'}$, $P\cap\left[c,b\right]=P^{''}$, $S\cap\left[a,c\right]=S^{'}$, $S\cap\left[c,b\right]=S^{''}$, tada su $S^{'}$ i $S^{''}$ istaknute tačke podela $P^{'}$ i $P^{''}$. Tada važi

$$\sigma(f,\alpha;P) = \sigma(f,\alpha;P^{'}) + \sigma(f,\alpha;P^{''}) \quad \text{i pri tom je} \quad \delta(P^{'}) \le \delta(P) \ \text{ i } \ \delta(P^{''}) \le \delta(P)$$

Prelaskom na limes tj. $\delta(P) \to 0$ a samim tim i $\delta(P^{'}) \to 0$, $\delta(P^{''}) \to 0$ dobijamo

$$\int_a^b f\, d\alpha = \int_a^c f\, d\alpha + \int_c^b f\, d\alpha . \quad \blacksquare$$

Stav 5.3: *Neka su X i Y Banahovi prostori i $f : \Delta \to X$ jako neprekidna funkcija i $\alpha : \Delta \to C$ funkcija ograničene varijacije. Ako je $T \in L(X,Y)$ onda*

$$T\left(\int_a^b f\, d\alpha\right) = \int_a^b (T\, f(t))\, d\alpha(t) \qquad (8)$$

Dokaz: Iz (3) lako uočavamo da je $T\,\sigma(f,\alpha;P) = \sigma(T\,f,\alpha;P)$

Kako je

$$\lim_{\delta(P)\to 0} \sigma(f,\alpha;P) = \int_a^b f\, d\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{\delta(P)\to 0} T\,\sigma(f,\alpha;P) = \lim_{\delta(P)\to 0} \sigma(T\,f,\alpha;P) = \int_a^b (T\,f)\, d\alpha ,$$

to važi jer je funkcija $T \circ f$ neprekidna. Takođe važi i

$\lim\limits_{\delta(P)\to 0} T\,\sigma(f,\alpha;P) = T \lim\limits_{\delta(P)\to 0} \sigma(f,\alpha;P)$ jer je operator T neprekidan.

Znači

$$\int_a^b T\, f\, d\alpha = T\left(\int_a^b f\, d\alpha\right). \quad \blacksquare$$

Stav 5.4: *Preslikavanje*

$$f \to \int_a^b f\, d\alpha \qquad (9)$$

s Banahovog prostora $C(\Delta, X)$ u Banahov prostor X je linearno i neprekidno ako je $\alpha : \Delta \to C$ funkcija ograničene varijacije na Δ.

Dokaz: Prostor $C(\Delta, X)$ je prostor jako neprekidnih funkcija $f : \Delta \to X$ i na tom prostoru je data norma $|f| = \sup \{ |f(t)| : t \in \Delta \}$.Linearnost preslikavanja (9) je lako uočiti a neprekidnost sledi iz (5). ▪

Stav 5.5: *Neka je $\alpha_n : \Delta \to C, n \in N$ niz funkcija ograničene varijacije i $\alpha_n \to \alpha_0$ po tačkama na Δ. Ako postoji realan broj $M_0 > 0$ takav da je*

$$V(\alpha_n; \Delta) \le M_0 \qquad (n \in N) \qquad (10)$$

onda je funkcija α_0 funkcija ograničene varijacije na Δ i za svaku jako neprekidnu funkciju $f : \Delta \to X$ vredi

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f \, d\alpha_n = \int_a^b f \, d\alpha_0 \qquad (11)$$

Dokaz: Pokažimo da je α_0 funkcija ograničene varijacije. Kako važi (10) onda za proizvoljnu podelu segmenta Δ je

$\sum_{k=1}^{s} | \alpha_n(t_k) - \alpha_n(t_{k-1}) | \le M_0$, za $n \to \infty$ nejednakost postaje

$$\sum_{k=1}^{s} | \alpha_0(t_k) - \alpha_0(t_{k-1}) | \le M_0 \quad \Rightarrow \quad V(\alpha_0; \Delta) \le M_0$$

Posmatrajmo podelu $P \quad a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ interavala Δ i neka je $M = \sup \{ |f(t)| : t \in \Delta \}$. Tada je

$$\int_a^b f \, d\alpha_i = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f \, d\alpha_i$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [f(t) - f(t_k)] \, d\alpha_i + \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \int_{t_{k-1}}^{t_k} d\alpha_i$$

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} d\alpha_i = \lim_{p\to\infty} \sum_{j=1}^{p} 1\cdot(\alpha_i(d_j)-\alpha_i(d_{j-1}))$$

$$= \lim_{p\to\infty}(\alpha_i(d_1)-\alpha_i\,(d_o)+\alpha_i\,(d_2)-\alpha_i(d_1)+...+\alpha_i\,(d_p)-\alpha_i(d_{p-1}))$$

$$= \lim_{p\to\infty}(\alpha_i(t_k)-\alpha_i(t_{k-1}))$$

$$= \alpha_i(t_k)-\alpha_i(t_{k-1})$$

gde je $t_{k-1}=d_0<d_1<...<d_p=t_k$ podela intervala $[t_{k-1},t_k]$

Znači $$\int_a^b f\,d\,\alpha_i = \sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}[f(t)-f(t_k)]\,d\,\alpha_i + \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\;(\,\alpha_i(t_k)-\alpha_i(t_{k-1})\,)$$

Koristeći ovu jednakost dobijamo

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha_0 - \int_a^b f\,d\,\alpha_i\right| \le \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{t_{k-1}}^{t_k}[f(t)-f(t_k)]\,d\alpha_0\right| + \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{t_{k-1}}^{t_k}[f(t)-f(t_k)]\,d\,\alpha_i\right|$$

$$+M\sum_{k=1}^{n}\left|\;(\,\alpha_0(t_k)-\alpha_0(t_{k-1})\,)\;-(\,\alpha_i(t_k)-\alpha_i(t_{k-1})\,)\;\right| \qquad (12)$$

Za dato $\varepsilon>0$ uzmimo $n\in N$ i podelu takvu da za $t\in[t_{k-1},t_k]\Rightarrow|f(t)-f(t_k)|\le\varepsilon$
Na osnovu stava 5.2 je

$$\left|\int_{t_{k-1}}^{t_k}[\;f(t)-f(t_k)\;]\,d\,\alpha_i\right| \le \varepsilon V(\alpha_i,[t_{k-1},t_k])$$

pa druga suma u (12) nije veća od

$$\varepsilon\sum_{k=1}^{n} V(\alpha_i,[t_{k-1},t_k]) \le \varepsilon\,V(\alpha_i,\Delta) \le \varepsilon\,M_0\,.$$

Isto to važi i za prvu sumu u (12) jer je $V(\alpha_0;\Delta)\le M_0$.

Znači prve dve sume u (12) nisu veće od $2\varepsilon M_0$.Kako $\alpha_i(t)\to\alpha_0(t), t\in\Delta, i\to\infty$ onda treća suma u (12) teži nuli. Sada je

$$\limsup_{i\to\infty}\left|\int_a^b f\,d\alpha_0-\int_a^b f\,d\alpha_i\right|\le 2\,\varepsilon\, M_0 .$$

Kako je ε proizvoljan sledi (11). ▪

Stav 5.6: *Neka je $\alpha\in BV(\Delta;R)$ i $s_1<s_2<\ldots<s_m$ sve tačke prekida koje funkcija α ima u intervalu (a,b). Ako je α konstantna na svakom od intervala $(a,s_1),\ldots,(s_m,b)$ onda za $f\in C(\Delta,X)$ vredi*

$$\int_a^b f\,d\alpha=\sum_{k=1}^{n} f(s_k)\,[\alpha(s_k+0)-\alpha(s_k-0)]+f(a)\,[\,\alpha(a+0)-\alpha(a)\,]+f(b)\,[\,\alpha(b)-\alpha(b-0)\,]\quad(13)$$

Iz (13) uočavamo da na vrednost RS-integrala ne utiču vrednosti funkcije α u tačkama prekida ali utiču vrednosti te funkcije na rubovima segmenta $[a,b]$.

Dokaz: Posmatrajmo prvo slučaj kada funkcija α ima samo jednu tačku prekida $s\in(a,b)$. Neka je (2) podela segmenta Δ takva da je $t_{j-1}<s<t_j$. Tada RS-suma postaje

$$\sigma(f,\alpha;P)=f(s_1)\,[\alpha(t_1)-\alpha(t_0)]+\underbrace{\ldots}_{0}+f(s_j)\,[\,\alpha(t_j)-\alpha(t_{j-1})\,]+\underbrace{\ldots}_{0}+f(s_n)\,[\,\alpha(t_n)-\alpha(t_{n-1})\,]$$

Za $\delta(P)\to 0$ dobijamo $t_1\downarrow a,\, t_{n-1}\uparrow b$ tada je

$$\int_a^b f\,d\alpha=f(a)\,[\alpha(a+0)-\alpha(a)]+f(s)\,[\alpha(s+0)-\alpha(s-0)]+f(b)\,[\alpha(b)-\alpha(b-0)].\quad(14)$$

Posmatrajmo sada slučaj kad funkcija ima m tačaka prekida. Neka je $r>0$ dovoljno mali broj

$$\int_a^b f\,d\alpha=\int_a^{s_1+r} f\,d\alpha+\int_{s_1+r}^{s_2+r} f\,d\alpha+\ldots+\int_{s_n+r}^{b} f\,d\alpha\overset{(14)}{=}$$

$$=f(a)\,[\alpha(a+0)-\alpha(a)]+f(s_1)\,[\alpha(s_1+0)-\alpha(s_1-0)]+f(s_1+r)\,[\alpha(s_1+r)-\alpha(s_1+r-0)]+$$

$$f(s_1+r)\,[\alpha(s_1+r+0)-\alpha(s_1+r)]+f(s_2)\,[\alpha(s_2+0)-\alpha(s_2-0)]+f(s_2+r)\,[\alpha(s_2+r)-\alpha(s_2+r-0)]$$

$$+ f(s_m + r)\left[\alpha(s_m + r + 0) - \alpha(s_m + r)\right] + f(b)\left[\alpha(b) - \alpha(b-0)\right]$$

$$= f(a)\left[\ \alpha(a+0) - \alpha(a)\ \right] + f(s_1)\left[\ \alpha(s_1+0) - \alpha(s_1-0)\ \right] + \ldots + f(b)\left[\alpha(b) - \alpha(b-0)\right]$$

jer je $\alpha(s_i + r + 0) = \alpha(s_i + r - 0)$ obzirom da je funkcija α neprekidna u tačkama $s_i + r,\ i = 1,\ldots m$.■

Primedba: *Neka je $a < c < b$ i α funkcija koja je jednaka nuli levo od c i jednaka jedan desno od c. Tada za svaku neprekidnu funkciju $f : \Delta \to R$ iz stava 5.6 dobijamo*

$$\int_a^b f\, d\,\alpha = f(c)$$

Zaista kako je α prekidna u tački c jer je $\alpha(c+0) \neq \alpha(c-0)$ tada stav 5.6 daje

$$\int_a^b f\ d\,\alpha = f(a)\left[\alpha(a+0) - \alpha(a)\right] + f(c)\left[\ \alpha(c+0) - \alpha(c-0)\ \right] + f(b)\left[\ \alpha(b) - \alpha(b-0)\ \right]$$

$$= f(a)\left[0-0\right] + f(c)\left[1-0\ \right] + f(b)\left[1-1\right] = f(c) \quad ■$$

Odnosno neprekidan linearan funkcional $f \to f(c)$ na prostoru $C(\Delta)$ može se prikazati preko RS-integrala. Kasnije ćemo pokazati da za svaki $F \in C^*(\Delta)$ postoji funkcija $\alpha \in BV(\Delta; C)$ tako da važi

$$F(f) = \int_a^b f\ d\,\alpha \qquad (f \in C(\Delta))$$

Znači dat je opšti oblik neprekidnog linearnog funkcionala na Banahovom prostoru $C(\Delta)$.

RS-integral skalarne funkcije u odnosu na vektorsku funkciju

RS-integral skalarne funkcije u odnosu na vektorsku funkciju definišemo na isti način kao i RS-integral vektorske funkcije u odnosu na skalarnu funkciju.

Neka je $f:\Delta \to C$ skalarna funkcija i $\alpha:\Delta \to X$ vektorska funkcija, onda (3) ima smisla a takođe i (4) pa u ovom slučaju x_0 nazivamo RS-integral skalarne funkcije u odnosu na vektorsku funkciju i označavamo sa

$$\int_a^b f\, d\alpha\,. \qquad (15)$$

Stav 5.7: *Neka je* $f:\Delta \to X$ *vektorska funkcija i* $\alpha:\Delta \to C$ *skalarna funkcija. Ako postoji jedan od RS-integrala*

$$\int_a^b f\, d\alpha \qquad\qquad \int_a^b \alpha\, d\, f$$

onda postoji i drugi i važi

$$\int_a^b f\, d\alpha = f(b)\,\alpha(b) - f(a)\,\alpha(a) - \int_a^b \alpha\, d\, f\,. \qquad (16)$$

Dokaz: Uz podelu (2) i tačke $s_1, s_2, \ldots s_n$ vezana je podela $P^{'}$ tako da je $a = s_0 \le s_1 \le \ldots \le s_{n+1} = b$ i $\delta(P^{'}) \le 2\delta(P)$

$$\sum_{k=1}^{n} f(s_k)\,\left[\alpha(t_k)-\alpha(t_{k-1})\right] = f(s_1)\,(\alpha(t_1)-\alpha(t_0)) + f(s_2)\,(\alpha(t_2)-\alpha(t_1)) + \ldots f(s_{n-1})\,(\alpha(t_{n-1})-\alpha(t_{n-2})) +$$

$$+ f(s_n)\,(\alpha(t_n)-\alpha(t_{n-1})) = -\alpha(t_1)\,(f(s_2)-f(s_1)) - \alpha(t_2)\,(f(s_3)-f(s_2)) - \ldots$$

$$-\alpha(t_{n-1})\,(f(s_n)-f(s_{n-1})) - f(s_1)\,\alpha(t_0) + f(s_n)\,\alpha(t_n) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n-1} \alpha(t_i)\,(f(s_{i+1})-f(s_i)) - f(s_1)\,\alpha(t_0) + f(s_0)\,\alpha(t_0) - f(s_0)\,\alpha(t_0) + f(s_n)\,\alpha(t_n)$$

$$- f(s_{n+1})\,\alpha(t_n) + f(s_{n+1})\,\alpha(t_n)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n-1} \alpha(t_i)\,(f(s_{i+1}) - f(s_i)) - \alpha(t_0)\,(f(s_1) - f(s_0)) - \alpha(t_n)\,(f(s_{n+1}) - f(s_n)) - f(a)\alpha(a) + f(b)\alpha(b)$$

$$= -\sum_{i=0}^{n} \alpha(t_i)\,(f(s_{i+1}) - f(s_i)) - f(a)\alpha(a) + f(b)\alpha(b)$$

Znači dobijamo jednakost

$$\sum_{k=1}^{n} f(s_k)\,[\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})] = -\sum_{i=0}^{n} \alpha(t_i)\,(f(s_{i+1}) - f(s_i)) - f(a)\alpha(a) + f(b)\alpha(b)$$

Odavde za $\delta(P) \to 0$, a samim tim i $\delta(P^{'}) \to 0$ (jer je $\delta(P^{'}) \leq 2\delta(P)$) dobijamo (16). ▪

Stav 5.8: *Ako je* $f : \Delta \to C$ *neprekidna skalarna funkcija i* $\alpha : \Delta \to X$ *vektorska funkcija ograničene jake varijacije, onda postoji integral* (15) *i važi* (5) i (6).

Dokaz: Kako je funkcija f uniformno neprekidna na Δ tada kao i u dokazu stava 5.2 za $\delta(P_1) < \frac{\delta}{2}$, $\delta(P_2) < \frac{\delta}{2}$ sledi

$$\left| x^* [\ \sigma(f,\alpha;P_1) - \sigma(f,\alpha;P_2)\ ] \right| \leq 2\ \varepsilon\ V(x^* \circ \alpha;\Delta) \quad \text{za svako } x^* \in X^*$$

Kako važi stav 4.4 imamo

$$V(x^* \circ \alpha;\Delta) \leq 4 \cdot \sup \left| \sum_j ((x^* \circ \alpha)(b_j) - (x^* \circ \alpha)(a_j)) \right|$$

$$= 4 \cdot \sup \left| x^* \sum_j ((\alpha(b_j) - \alpha(a_j)) \right|$$

$$\leq 4 \cdot \sup \left| \sum_j ((\alpha(b_j) - \alpha(a_j)) \right| \cdot \left| x^* \right|$$

$$\leq M \cdot \left| x^* \right| \qquad \text{(jer je funkcija } \alpha \text{ funkcija ograničene varijacije)}$$

$$V(x^* \circ \alpha; \Delta) \le M \cdot \left| x^* \right| \quad (x^\bullet \in X^*)$$

Znači $\left| x^* \left[\sigma(f,\alpha;P_1) - \sigma(f,\alpha;P_2) \right] \right| \le 2\, M\, \varepsilon \left| \, x^* \, \right|$, a odatle je

$\left| \; \sigma(f,\alpha;P_1) - \sigma(f,\alpha;P_2) \right| \le 2\, M\, \varepsilon$.

Prema tome funkcija f je RS- integrabilna u odnosu na vektorsku funkciju α . ▪

Stav 5.9: *Neka su X i Y Banahovi prostori i* $f : \Delta \to C$ *neprekidna funkcija i* $\alpha : \Delta \to X$ *funkcija ograničene varijacije. Ako je* $T \in L(X,Y)$ *onda je*

$$T\left(\int_a^b f\, d\, \alpha\right) = \int_a^b f(t)\, d\, (T \circ \alpha)\,(t) \qquad (17)$$

Dokaz: Funkcije α , $T \circ \alpha$ su ograničene varijacije pa na osnovu stava 5.8 postoje inegrali u (17). Prema stavu 5.7 je

$$\int_a^b f\, d\,(T \circ \alpha) = f(b) \cdot (T \circ \alpha)\,(b) - f(a) \cdot (T \circ \alpha)(a) - \int_a^b (T \circ \alpha)\, d\, f$$

$$= T \left[f(b)\alpha(b) - f(a)\, \alpha(a) - \int_a^b \alpha\, d\, f \right] = T \left(\int_a^b f\, d\, \alpha \right). \qquad ▪$$

Stav 5.10: *Ako su funkcije* $\alpha_1, \alpha_2 : \Delta \to X$ *ograničene varijacije i* $f : \Delta \to C$ *neprekidna funkcija onda je*

$$\int_a^b f\, d(\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2) = \lambda_1 \int_a^b f\, d\, \alpha_1 + \lambda_2 \int_a^b f\, d\, \alpha_2 \qquad za\ sve\ \lambda_1, \lambda_2 \in C$$

Dokaz: Na osnovu stava 5.7. dobijamo

$$\int_a^b f\, d\,(\lambda_1\,\alpha_1+\lambda_2\,\alpha_2)= f(b)\,(\lambda_1\,\alpha_1+\lambda_2\,\alpha_2)(b)- f(a)\,(\lambda_1\;\alpha_1+\lambda_2\;\alpha_2)(a)-\int_a^b(\lambda_1\alpha_1\;+\lambda_2\alpha_2)\;d\;f$$

$$= f(b)\;\lambda_1\;\alpha_1(b)+ f(b)\;\lambda_2\;\alpha_2(b)- f(a)\lambda_1\;\alpha_1(a)- f(a)\;\lambda_2\;\alpha_2\,(a)-\lambda_1\int_a^b\alpha_1\,df-\lambda_2\int_a^b\alpha_2\,df$$

$$= f(b)\;\lambda_1\;\alpha_1(b)+ f(b)\;\lambda_2\;\alpha_2(b)- f(a)\lambda_1\;\alpha_1(a)- f(a)\;\lambda_2\;\alpha_2\,(a)-\lambda_1\left(\alpha_1(b)\cdot f(b)-\alpha_1(a)\,f(a)-\int_a^b fd\alpha_1\right)$$

$$-\lambda_2\cdot\left(f(b)\,\alpha_2(b)- f(a)\,\alpha_2(a)-\int_a^b f\;d\alpha_2\right)=\lambda_1\int_a^b f\;d\alpha_1+\lambda_2\int_a^b f\;d\alpha_2\;. \qquad ■$$

6. Risova teorema o reprezentaciji prostora $C^*[a,b]$

Podsetimo se da je $C(\Delta)$ realan (kompleksan) Banahov prostor realnih (kompleksnih) neprekidnih funkcija na $\Delta = [a,b]$ sa normom

$$\|f\| = \max\{|f(t)| : t \in \Delta\}$$

Ako je $\alpha : \Delta \to C$ funkcija ograničene varijacije na Δ, onda za svaku funkciju $f \in C(\Delta)$ postoji RS-integral $\int_a^b f\, d\alpha$ i pri tom vredi

$$\left| \int_a^b f\, d\alpha \right| \le V(\alpha;\Delta)\cdot \|f\| \quad (f \in C(\Delta)) \qquad (1)$$

Iz prethodne nejednakosti sledi da je $f \to \int_a^b f\, d\alpha$ neprekidan funkcional na $C(\Delta)$ i da norma tog funkcionala ne prelazi varijaciju funkcije α.

Jedan od značajnih rezultata funkcionalne analize je da za svaki neprekidan linearan funkcional $F \in C^*(\Delta)$ postoji funkcija ograničene varijacije α tako da

$$F(f) = \int_a^b f\, d\alpha \quad (f \in C(\Delta)). \qquad (2)$$

Sledi Risova teorema koja to upravo dokazuje.

Teorema: *Ako je* F *neprekidan linearan funkcional na realnom (kompleksnom) prostoru* $C(\Delta)$, *onda postoji jedinstvena realna (kompleksna) funkcija* α *ograničene varijacije na* $\Delta = [a,b]$ *sa sledećim svojstvima* :

i) $F(f) = \int_a^b f\, d\alpha \quad (f \in C(\Delta))$

ii) $\alpha(a) = 0$

iii) $\alpha(t+0) = \alpha(t) \quad (a < t < b)$

iv) $\mid F \mid = V\ (\alpha\ ;\Delta)$

v) F *je pozitivan funkcional ako i samo ako* α *raste na* $[\,a,b\,)$.

Dokaz : U dokazu ove teoreme koristićemo činjenicu da niz Bernštajnovih polinoma

$$B_n\ (f\ ;x) = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} f\ (a + \frac{k}{n} h\ ) \binom{n}{k} (x-a)^k\ (b-x)^{n-k}, \qquad h = b-a$$

funkcije $f \in C(\Delta)$ uniformno na Δ konvergira funkciji f .

i) Posmatraćemo prvo slučaj da je $C(\Delta)$ realan prostor i F neprekidan linearan realan funkcional. Fiksirajmo n i stavimo da je

$$e_k\ (x) = h^{-n} \binom{n}{k} (x-a)^k\ (b-x)^{n-k} \quad (x \in \Delta)\,. \qquad (3)$$

Neka je ε_k takav realan broj da važi $\varepsilon_k^2 = 1,\ \varepsilon_k\ F\ (e_k) \geq 0$. Tada je

$$\sum_{k=0}^{n} \mid F(e_k) \mid = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k\ F(\,e_k\,) = F\ (\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k\ e_k\ ) \leq \mid F \mid \cdot \left\| \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k\ e_k \right\| \leq \mid F \mid$$

jer za $t \in \Delta$ važi

$$e_k\ (t) \geq 0\,, \qquad \left| \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k\ e_k\ (t) \right| \leq \sum_{k=0}^{n} \mid \varepsilon_k\ e_k(t) \mid = \sum_{k=0}^{n} e_k\ (t) = \sum_{k=0}^{n} h^{-n}\ \binom{n}{k}\ (x-a)^k\ (b-x)^{n-k}$$

$$= h^{-n} \cdot (x-a+b-x)^n = h^{-n} \cdot (b-a)^n = 1.$$

Znači $$\sum_{k=0}^{n} \mid F(e_k) \mid\ \leq \mid F \mid \qquad (4)$$

Sada ćemo definisati funkciju α_n na sledeći način :

$\alpha_n(a) = 0$

$\alpha_n\ (t) = F\ (e_0),\quad$ *ako je* $\quad a < t \leq a + \dfrac{h}{n}$

$$\alpha_n(t) = F(e_0) + F(e_1), \quad ako \;\; je \quad a + \frac{h}{n} < t \le a + \frac{2h}{n}$$

. . . .

$$\alpha_n(t) = F(e_0) + F(e_1) + ... + F(e_{n-1}), \quad ako \quad je \quad a + \frac{(n-1)\,h}{n} < t < b$$

$$\alpha_n(b) = F(e_0) + F(e_1) + ... + F(e_{n-1}) + F(e_n)$$

Uočavamo da je funkcija α_n konstantna na intervalima $\left(a + \frac{k\,h}{n}, a + \frac{(k+1)\,h}{n} \right)$, a prekide može imati samo u tačkama $a, a + \frac{h}{n}, a + \frac{2h}{n}, ...b$.

Lako je uočiti da je

$$V(\alpha_n; \Delta) \le | \; F(e_0) \; | + | \; F(e_1) \; | + ... + | \; F(e_{n-1}) \; | + | \; F(e_n) \; |$$

Odavde i iz (4) dobijamo

$$V(\alpha_n; \Delta) \le | \; F \; | \qquad | \; \alpha_n(t) \; | \le | \; F \; | \qquad (t \in \Delta) \qquad (5)$$

Stav 5. 6 za $f \in C(\Delta)$ daje

$$\int_a^b f \; d\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(a + \frac{k}{n} h\right) F(e_k) = F\left(\sum_{k=0}^{n} f\left(a + \frac{k}{n} h\right) e_k \right), \qquad \text{odavde sledi}$$

$$\int_a^b f \; d\alpha_n = F(B_n(f)) \qquad (6)$$

Kako vredi (5) za svako $n \in N$, prema stavu 4.15 postoji podniz $(\alpha_{p(n)})$ niza (α_n), koji na Δ konvergira funkciji α_0 ograničene varijacije na Δ. Takođe važi

$$\int_a^b f \; d\alpha_{p(n)} = F(B_{p(n)}(f)) \qquad (f \in C(\Delta)) \qquad (7)$$

Kako je $V(\alpha_n;\Delta) \le |F|$, iz stava 5.5 leva strana formule (7) teži ka $\int_a^b f\,d\alpha_0$, a desna strana zbog neprekidnosti funkcionala i uniformne konvergencije polinoma $B_n(f)$ ka f teži ka $F(f)$. Tada za $n \to \infty$ formula (7) postaje

$$\int_a^b f\,d\alpha_0 = F(f) \qquad (f \in C(\Delta)) \qquad (8)$$

Kako iz (5) i $\alpha_{p(n)} \to \alpha_0$ dobijamo da je $V(\alpha_0;\Delta) \le |F|$, a iz (8) da je $|F| \le V(\alpha_0;\Delta)$ zaključujemo da $V(\alpha_0;\Delta) = |F|$.

Posmatrajmo sada slučaj kada je $C(\Delta)$ kompleksan prostor i F neprekidan kompleksan funkcional. Skup svih realnih funkcija iz $C(\Delta)$ označićemo sa $C_r(\Delta)$. Lako je uočiti da su funkcije

$$F_1(f) = \operatorname{Re} F(f) \qquad F_2(f) = \operatorname{Im} F(f) \qquad (f \in C_r(\Delta))$$

linearni funkcionali na $C_r(\Delta)$. Iz

$$|F_i(f)| \le \left[F_1(f)^2 + F_2(f)^2\right]^{1/2} = |F(f)| \le |F| \cdot \| f \| \qquad (i = 1, 2)$$

sledi da su F_1 i F_2 neprekidni linearni funkcionali na $C_r(\Delta)$. Na osnovu već dokazanog sledi da za realne funkcije F_1 i F_2 postoje funkcije α_1 i α_2 iz $BV(\Delta; R)$ tako da važi

$$\int_a^b f\,d\alpha_i = F_i(f) \qquad (f \in C_r(\Delta))$$

i pri tom je $\alpha_i(a) = 0 \quad i = 1,2$. Za $\alpha_0 = \alpha_1 + i\,\alpha_2 \in BV(\Delta; C)$ dobijamo $\alpha_0(a) = 0$ i

$$F(f) = F_1(f) + i\,F_2(f) = \int_a^b f\,d\alpha + i\int_a^b f\,d\alpha_2 = \int_a^b f\,d\alpha_0$$

za $\quad f \in C_r(\Delta)$.

I poslednji slučaj za $f \in C(\Delta)$:

$F(f) = F(\mathrm{Re}\, f + i\, \mathrm{Im}\, f) = F(\mathrm{Re}\, f) + i\, F(\mathrm{Im}\, f)$

$$= \int_a^b \mathrm{Re}\, f\, d\alpha_0 + i \int_a^b \mathrm{Im}\, f\, d\alpha_0 = \int_a^b f\, d\alpha_0$$

Zaključujemo da imamo reprezentaciju

$$F(f) = \int_a^b f\, d\alpha_0 \qquad (f \in C(\Delta)) \qquad (9)$$

i da je pri tom $\alpha_0(a) = 0$ i $\alpha_0 \in BV(\Delta; C)$

iii) Definišimo funkciju α pomoću funkcije α_0, koja zadovoljava (9) i $\alpha_0(a) = 0$ na sledeći način:

$$\alpha(a) = 0 \qquad \alpha(t) = \alpha_0(t+0) \text{ ako je } a < t < b \qquad \alpha(b) = \alpha_0(b)$$

Pokažimo da je funkcija α neprekidna zdesne strane na (a, b). Posmatrajmo slučaj da α_0 raste, onda za $t \le s$ sledi :

$$\alpha_0(t) \le \alpha_0(s) \Rightarrow \alpha(t) \le \alpha_0(s) \le \alpha(s) \quad (*)$$

Za $t_k \downarrow t_0$ imamo $\alpha_0(t_k) \downarrow \alpha_0(t_0 + 0)$, odavde i $(*)$ dobijamo $\alpha(t_0) = \lim \alpha(t_k)$.U opštem slučaju tvrđenje proizilazi iz stava 4.13.

Pokažimo da je funkcija α ograničene varijacije na segmentu Δ. Uzećemo proizvoljnu podelu segmenta Δ

$$a = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = b. \qquad (10)$$

Kako je funkcija α neprekidna zdesna na (a,b), to za dato $\varepsilon > 0$ postoji podela

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} = b$$

segmenta Δ, $t_k \in (s_{k-1}, s_k)$, $(k = 1, \ldots, n)$ tako da

$$\left| \alpha(s_k) - \alpha(t_{k+1}) \right| < \frac{\varepsilon}{2n} \quad (k = 1, \ldots n)$$

i da je tačka t_k tačka neprekidnosti funkcije α_0.

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha(s_k)-\alpha(s_{k-1})| \le$$

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha(s_k)-\alpha(t_{k+1})| + \sum_{k=1}^{n} |\alpha(t_{k+1})-\alpha(t_k)| + \sum_{k=2}^{n} |\alpha(t_k)-\alpha(s_{k-1})| + |\alpha(t_1)-\alpha(s_0)|$$

$$\le n\frac{\varepsilon}{2n}+(n-1)\frac{\varepsilon}{2n}+\sum_{k=0}^{n} |\alpha_0(t_{k+1})-\alpha_0(t_k)| \le \varepsilon+\sum_{k=0}^{n} |\alpha_0(t_{k+1})-\alpha_0(t_k)|$$

$$(\alpha_0(t_k)=\alpha_0(t_k+0)=\alpha(t_k))$$

Dobijamo :

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha(s_k)-\alpha(s_{k-1})| \le \varepsilon+\sum_{k=1}^{n} |\alpha_0(t_{k+1})-\alpha_0(t_k)|$$

$$V(\alpha;\Delta)\le\varepsilon+V(\alpha_0;\Delta) \quad\Rightarrow\quad V(\alpha;\Delta)\le V(\alpha_0;\Delta)$$

Time smo pokazali da je funkcija α funkcija ograničene varijacije.

Za realnu funkciju $f\in C(\Delta)$ i $\varepsilon>0$ postoji podela (10) tako da je

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha-\sum_{k=1}^{n} M_k\left[\alpha(s_k)-\alpha(s_{k-1})\right]\right|<\varepsilon$$

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha_0-\sum_{k=1}^{n} M_k\left[\alpha_0(s_k)-\alpha_0(s_{k-1})\right]\right|<\varepsilon$$

gde je $M_k=\max f(t), t\in[s_{k-1},s_k]$ i funkcije α,α_0 su neprekidne u tačkama $s_1,s_2,\dots s_{n-1}$.
Tada za $\sum_{k=1}^{n} M_k\left[\alpha(s_k)-\alpha(s_{k-1})\right]=x$, $\sum_{k=1}^{n} M_k\left[\alpha_0(s_k)-\alpha_0(s_{k-1})\right]=y$ važi

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha-\int_a^b f\,d\alpha_0\right|\le\left|\int_a^b f\,d\alpha-x+x-y+y-\int_a^b f\,d\alpha_0\right|$$

$$\leq \left| \int_a^b f \, d\alpha - x \right| + \left| \int_a^b f \, d\alpha_0 - y \right| + |x-y|$$

$$\leq 2\varepsilon + |x-y| = 2\varepsilon \quad (\text{ jer je } \ \alpha(s_k) = \alpha_o(s_k+0) = \alpha_0(s_k) \ )$$

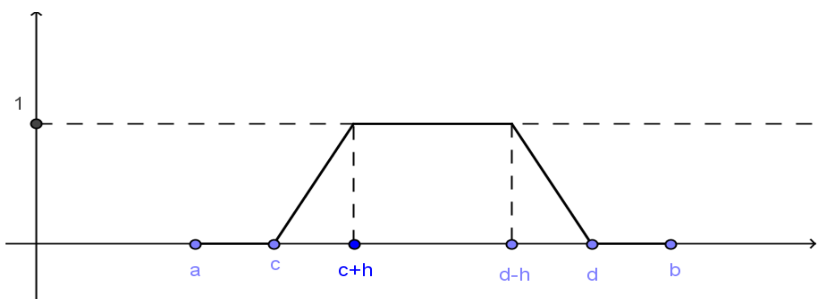
Obzirom da je ε proizvoljno malo zaključujemo da je

$$\int_a^b f \, d\alpha = \int_a^b f \, d\alpha_0 . \qquad (11)$$

(11) važi za svaku realnu funkciju, pokažimo da to važi i za proizvoljnu kompleksnu funkciju h. Neka je $h = f + i\,g$

$$\int_a^b (f + i\,g)\, d\alpha = \int_a^b f \, d\alpha + i \int_a^b g \, d\alpha = \int_a^b f \, d\alpha_0 + i \int_a^b g \, d\alpha_0 = \int_a^b (f + i\,g)\, d\alpha_0$$

iv) Pokažimo da je $|F| = V(\alpha;\Delta)$. Posmatrajmo funkciju f_h na slici 1, gde je h dovoljno malo.



Slika 1.

$$F(f_h) = \int_a^b f_h \, d\alpha = \int_c^{c+h} f_h \, d\alpha + \int_{c+h}^{d-h} d\alpha + \int_{d-h}^{d} f_h \, d\alpha \qquad (\text{stav } 5.7)$$

$$= \left[f_h(c+h)\,\alpha(c+h) - f_h(c)\,\alpha(c) - \frac{1}{h} \int_c^{c+h} \alpha \, dt \right] + \left[\alpha(d-h) - \alpha(c+h) \right] +$$

$$+\left[\, f_h(d)\,\alpha(d) - f_h(d-h)\,\alpha(d-h) + \frac{1}{h}\int_{d-h}^{d} \alpha\, dt \,\right] = \frac{1}{h}\int_{d-h}^{d} \alpha\, dt \; - \; \frac{1}{h}\int_{c}^{c+h} \alpha\, dt$$

Pokažimo da je $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{d-h}^{d} \alpha\, dt = \alpha(d)$, ako je α neprekidna u tački d .

Prema teoremi o srednjoj vrednosti imamo:

$$\int_{d-h}^{d} \alpha\, dt = \mu_h \cdot \int_{d-h}^{d} 1\cdot dt$$

$$\int_{d-h}^{d} \alpha\, dt = \mu_h \cdot h, \text{ gde je } m_h \le \mu_h \le M_h,\; m_h = \inf_{t\in[d-h,d]} \alpha(t),\; M_h = \sup_{t\in[d-h,d]} \alpha(t)$$

Tada je $\frac{1}{h}\int_{d-h}^{d} \alpha\, dt = \mu_h$

$$m_h \le \frac{1}{h}\int_{d-h}^{d} \alpha\, dt \le M_h$$

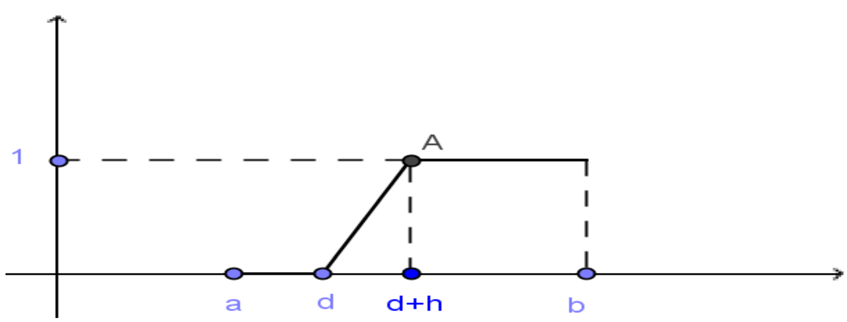
Ako je α neprekidna u tački d onda $m_h \to \alpha(d)$ i $M_h \to \alpha(d)$, za $h \to 0^+$, pa sledi da je

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{d-h}^{d} \alpha\, dt = \alpha(d). \qquad (12)$$

Sada dolazimo do

$$\lim_{h\to 0^+} F(f_h) = \alpha(d) - \alpha(c) \qquad \| f_h \| = 1,$$

ako su c i d tačke u kojima je funkcija α neprekidna. Na isti način dobijamo za funkciju f_h sa slike 2.



Slika 2.

$$F(f_h) = \int_a^b f_h \, d\alpha = \alpha(b) - \frac{1}{h}\int_d^{d+h} \alpha \, dt,$$ tada je

$\lim_{h\to 0^+} F(f_h) = \alpha(b) - \alpha(d)$, $\quad \| f_h \| = 1$, ako je α neprekidna u tački d .

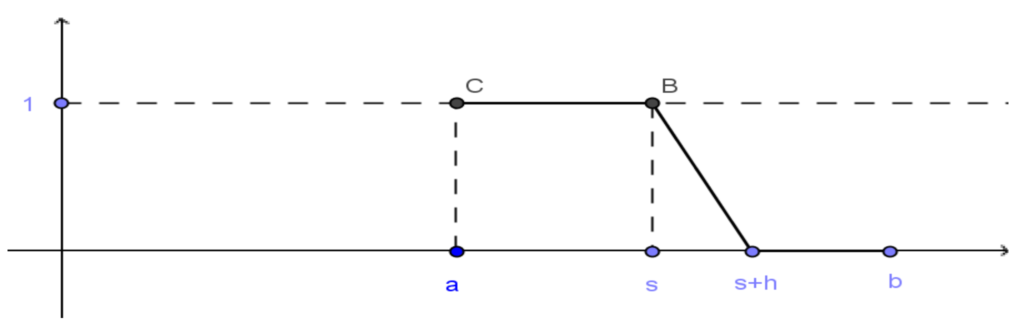
Analogno kao u iii) postoji podela (10) tako da je α neprekidna u tačkama $s_1, s_2, \ldots s_{n-1}$ i pri tom važi

$$V(\alpha; \Delta) - \varepsilon < \sum_{k=1}^{n} |\alpha(s_k) - \alpha(s_{k-1})|$$

Neka su ε_k kompleksni brojevi takvi da je

$$\varepsilon_k(\alpha(s_k) - \alpha(s_{k-1})) = |\alpha(s_k) - \alpha(s_{k-1})|$$

Označimo sa f_{kh} funkciju koja za $k = 2, \ldots, n-1$ ima oblik kao funkcija na slici 1. $(c = s_{k-1},\ d = s_k)$, f_{1h} izgleda kao na slici 3. $(s = s_1 - h)$, f_{nh} kao na slici 2. $(d = s_{n-1})$.



Slika 3.

Za funkciju

$g_h = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k f_{kh}$ važi da pripada $C(\Delta)$ i da je $\| g_h \| = 1$.

$$F(g_h) = \int_a^b g_h \, d\alpha = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k F(f_{kh})$$

$$\lim_{h\to 0^+} F(g_h) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(\alpha(s_k)-\alpha(s_{k-1}))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left|\alpha(s_k)-\alpha(s_{k-1})\right| \geq V(\alpha;\Delta)-\varepsilon$$

Kako postoje jedinični vektori $g_h \in C(\Delta)$ tako da je

$\lim F(g_h) \geq V(\alpha;\Delta)-\varepsilon$, onda sledi

$|F| \geq V(\alpha;\Delta)-\varepsilon$.

Obzirom da je $\varepsilon > 0$ proizvoljno zaključujemo da je $|F| \geq V(\alpha;\Delta)$. Ali iz (11) sledi

$|F| \leq V(\alpha;\Delta)$, pa obe nejednakosti daju $|F| = V(\alpha;\Delta)$.

iv) Pokažimo jedinstvenost funkcije α.

Pretpostavimo suprotno tj. da postoji još jedna funkcija $\beta \in BV(\Delta, C)$ koja zadovoljava uslove

$$F(f) = \int_a^b f\,d\beta \quad (f \in C(\Delta))$$

$\beta(a) = 0 \quad \beta(t+0) = \beta(t) \quad a < t < b$

Neka je $\gamma = \beta - \alpha$, tada

$$\int_a^b f\,d\beta - \int_a^b f\,d\alpha = 0$$

$$\int_a^b f\,d(\beta-\alpha) = 0$$

$$\int_a^b f\,d\gamma = 0, \quad f \in C(\Delta) \qquad (13)$$

i pri tom važi $\gamma(a) = 0, \gamma(t+0) = \gamma(t), \quad a < t < b$.

Kako (13) važi za svaku neprekidnu funkciju na segmentu Δ, za konstantnu funkciju

$f(t)=1\ (t\in\Delta)$ iz (13) dobijamo da je $\gamma(b)-\gamma(a)=0$ tj. $\gamma(b)=\gamma(a)=0$.

Ako je $s\in(a,b)$ onda za funkciju f_h sa slike 3. dobijamo

$$0 = \int_a^b f_h\, d\gamma = \int_a^s 1\ d\gamma + \int_s^{s+h} f_h\, d\gamma = \gamma(s)-\gamma(a)+\int_s^{s+h} f_h\, d\gamma$$

$$0=\gamma(s)-\gamma(a)+\gamma(s+h)\ f_h\ (s+h)-\gamma(s)\ f_h\ (s)-\frac{1}{h}\int_s^{s+h}\gamma\, dt$$

$$\frac{1}{h}\int_s^{s+h}\gamma\, dt=0.$$

Analogno kao i (12) iz $\frac{1}{h}\int_s^{s+h}\gamma\, dt=0 \quad\Rightarrow\quad \gamma(s+0)=0$.

Kako je $\gamma(s)=\gamma(s+0)=0$ i $\gamma(b)=\gamma(a)=0$, sledi da je $\gamma=0$ tj.
$\alpha(t)=\beta(t),\, t\in\Delta$. Time smo pokazali jedinstvenost funkcije α .

iv) Podsetimo se da je funkcional $F: C(\Delta)\to C$ pozitivan ako je $F(f)\geq 0$ za svaku pozitivnu funkciju $f\in C(\Delta)$.
Neka je F pozitivan funkcional, pokažimo da α raste na intervalu $[a,b)$.

Funkcija f_h prikazana na slici 3. je pozitivna, pa sledi da je

$$0 \leq F(f_h) = \int_a^s d\alpha + \int_s^{s+h} f_h\, d\alpha$$

$$=\alpha(s)-\alpha(a)+f_h\,(s+h)\cdot\ \alpha(s+h)-f_h\,(s)\cdot\alpha(s)-\frac{1}{h}\int_s^{s+h}\alpha\ dt$$

$$=\frac{1}{h}\int_s^{s+h}\alpha(t)\ dt$$

Odavde za $h\to 0^+$ dobijamo slično kao i ranije da je $\alpha(s+0)\geq 0,\ a\leq s<b$.

Neka je $a \le s_1 < s_2 < b$, tada za funkcije f_{1h}, f_{2h} definisane prema slici 3. važi $f_{1h}(t) \le f_{2h}(t)$.

$$0 \le F(f_{2h} - f_{1h}) = F(f_{2h}) - F(f_{1h}) = \frac{1}{h}\int_{s_2}^{s_2+h} \alpha \, dt - \frac{1}{h}\int_{s_1}^{s_1+h} \alpha \, dt$$

Za $h \to 0^+$ dobijamo $\alpha\left(s_2+0\right) - \alpha(s_1+0) \ge 0$ tj. $\alpha\left(s_2\right) \ge \alpha(s_1)$
Znači funkcija α raste na intervalu $\left[a, b\right)$.

Pokažimo sad obrnuto tj. ako funkcija α raste na intervalu $\left[a, b\right)$ da je funkcional F pozitivan. Kako je $F(f) = \int_a^b f \, d\alpha$, integral, limes RS – sume koja je pozitivna jer je α rastuća funkcija, lako uočavamo da je funkcional pozitivan. ▪

Literatura:

1.S.Kurepa: Funkcionalna analiza, elementi teorije operatora, Školska knjiga, Zagreb 1990

2. O. Hadžić, S.Pilipović: Uvod u funkcionalnu analizu, Stylos, Novi Sad 1996

3. D.Adnađević, Z.Kadelburg: Matematička analiza I, Matematički fakultet, Krug, Beograd 2010

4. S.Kurepa : Matematička analiza, Tehnička knjiga, Zagreb 1980

5. D.Adnađević, Z.Kadelburg : Matematička analiza II, Nauka, Beograd 1994

Biografija

Danka Višnjić je rođena 25.10.1979. u Banja Luci. Osnovnu školu „Mladost“ i gimnaziju „Borislav Petrov Braca “ je završila u Vršcu. Na Prirodno matematičkom fakultetu u Novom Sadu stiče zvanje diplomirani matematičar sa prosečnom ocenom 9,71. Master studije primenjene matematike upisuje 2009. godine. Trenutno radi kao nastavnik matematike u Osnovnoj školi “Mladost“ i Hemijsko-medicinskoj školi u Vršcu.