



UNIVERZITET U NOVOM SADU  
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Danka Lučić

# **Stefanov problem u modelima topljenja**

**Završni rad**

**NOVI SAD, 2014.**

# Predgovor

*"Nema grane matematike, ma kako da je apstraktna, koja se jednog dana ne bi mogla primeniti na pojave stvarnog sveta"*

*Nikolay Ivanovich Lobachevsky, ruski matematičar*

Matematičko modeliranje je oblast za koju interesovanje primenjenih matematičara sve više raste. Modeliraju se različiti procesi iz oblasti fizike, hemije, biologije, inženjerstva, ekonomije, u suštini, matematički modeli se formiraju za probleme iz svih oblasti svakodnevnog života. Matematičko modeliranje je proces koji se odvija u nekoliko faza, prvo, treba postaviti matematički model fizičkog problema, zatim formirati skup jednačina koje će opisati problem, rešiti ih (ovde je dozvoljeno i sasvim logično postaviti pitanje "Kako?") i na kraju proveriti da li se dobijeno rešenje slaže sa realnošću, da li je konzistentno i stabilno (prema čemu ćemo odrediti da li je naš model prihvatljiv ili ne). Parcijalne diferencijalne jednačine jesu one koje koristimo za opisivanje većine fizičkih procesa - vibracije žica, rast i razvoj populacije, finansijski problemi na tržištu, prostiranje zvuka, optimizacija transporta, proces zagrevanja vode. Lista problema se svakako ovde ne završava, a u ovom master radu bavićemo se i modelirati jedan od problema koji se mogu naći na listi - proces promene faznog stanja, u našem slučaju prelaz iz čvrstog u tečno stanje. Motivacija za temu master rada dobijena je učešćem na 99. Studijskoj grupi (ESGI European Study Group with Industry), organizovanoj od strane Departmana za matematiku i informatiku i Evropskog Konzorcijuma za matematiku u industriji. Kompanija "Pekara Milan", koja se bavi proizvodnjom smrznutog testa, imala je učešće u ovoj Studijskoj grupi sa ciljem da poboljša i unapredi proces odmrzavanja smrznutih proizvoda prilikom pripreme za pečenje.

Rad se sastoji od četiri poglavlja. U prvom poglavlju dat je kratak osvrt na Parcijalne diferencijalne jednačine i njihovu klasifikaciju, kao i klasifikaciju fizičkih problema prilikom modeliranja. navedeni su i neki poznati rezultati Funkcionalne analize, definicije slabog rešenja i prostora Soboljeva. Zatim uvodimo pojam Furijeove transformacije i integralnih jednačina. Navedeni matematički aparat biće nam potreban za dokaz teoreme o postojanju rešenja Stefanovog problema, koji je glavna tema ovog rada.

Drugo poglavlje daje kompletnu analizu Linearnih paraboličnih jednačina. Prvo je analizirana toplotna jednačina, kao predstavnik paraboličnih jednačina, koju ćemo koristiti prilikom formiranja matematičkog modela za problem odmrzavanja testa kojim ćemo se dalje baviti. Dato je izvođenje njenog fundamentalnog rešenja, njegove osobine, a uz to i analiza Grinove funkcije. Zatim, navodimo i dokazujemo jaki princip maksimuma i neke njegove posledice, kao bitnu karakteristiku paraboličnih jednačina. Kroz ova dva poglavlja napravljena je podloga za formulaciju Stefanovog problema koja sledi u trećem poglavlju.

Treće poglavlje počinjemo uvođenjem terminologije i bitnih karakteristika za proces provođenja toplote. Fazni prelaz odvija se prilikom dovođenja određene količine toplote supstanciji (telu), i potrebna količina toplote za prelaz iz čvrstog u tečno stanje zavisi od faktora kao što su temperatura supstancije i okoline, gustina, masa i spoljni pritisak. Potrebna toplota može se provoditi na različite načine - kondukcijom, konvekcijom i radijacijom, gde će u ovom radu biti stavljen akcenat na kondukciju i konvekciju. Toplotna provodljivost materijala i specifična toplota, imaće značajnu ulogu u jednačinama koje opisuju sam proces. Dajemo nakon toga formulaciju Stefanovog problema (jaku, u jednodimenzionalnom i slabu u višedimenzionalnom slučaju), koji predstavlja problem "pomeranja slobodne granice". Naime, proces prelaska materije iz čvrstog u tečno stanje odvija se uz formiranje međufazne površi (granice između dva stanja). Kako su retki slučajevi u kojim dolazimo do analitičkog rešenja za ovaj problem, potrebne su nam i numeričke metode. Stoga, je u radu formulisana i korišćena numerička šema entalpije.

Pomenutu numeričku šemu entalpije koristimo za rešavanje problema odmrzavanja žu-žu testa. U četvrtom poglavlju formiramo matematički model Stefanovog tipa za ovaj proces. Modelira se promena temperature žu-žu testa, koje se odmrzava u jednom slučaju na sobnoj temperaturi, a zatim i u frižideru. Prikazani su (grafički) i analizirani dobijeni rezultati, koji potvrđuju da odmrzavanje testa na sobnoj temperaturi traje kraće, ali i to da površina testa tada može da dostigne znato višu temperaturu nego što je to preporučljivo prilikom odmrzavanja.

Želela bih, na kraju, da se zahvalim svom mentoru dr Marku Nedeljkovu, za podršku i savete koji su mi pomogli prilikom rešavanja datog problema i zbog kojih sam još više zavolela matematičko modeliranje i parcijalne diferencijalne jednačine. Zahvaljujem se i članovima komisije za dbranu ovog rada, dr Nataši Krejić i dr Srboljubu Simiću za svu pomoć i savete tokom dosadašnjeg studiranja.

Posebnu zahvalnost dugujem kolegama i prijateljima Mariu Vargi i Tijani Stojančević zbog kojih su studentski dani i svi matematički problemi bili mnogo, mnogo lepši i lakši. Zahvaljujem se mojim roditeljima i sestri, koji su uvek uz mene, koji su me naučili šta su prave vrednosti u životu.

# Sadržaj

|                                                                                       |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Predgovor</b>                                                                      | <b>1</b>  |
| <b>1 Matematičke osnove</b>                                                           | <b>4</b>  |
| 1.1 Klasifikacija Parcijalnih diferencijalnih jednačina i fizičkih problema . . . . . | 4         |
| 1.2 Pojam distribucija i slabog izvoda . . . . .                                      | 8         |
| 1.3 Furijeova transformacija . . . . .                                                | 11        |
| 1.4 Teorija nepokretne tačke. Integralne jednačine . . . . .                          | 13        |
| <b>2 Linearne parabolične jednačine drugog reda</b>                                   | <b>16</b> |
| 2.1 Toplotna jednačina . . . . .                                                      | 16        |
| 2.1.1 Slabi princip maksimuma . . . . .                                               | 16        |
| 2.1.2 Rešenje početnog problema . . . . .                                             | 20        |
| 2.1.3 Grinova funkcija. Interpretacija fundamentalnog rešenja. . . . .                | 24        |
| 2.2 Jaki princip maksimuma . . . . .                                                  | 29        |
| <b>3 Stefanov problem</b>                                                             | <b>38</b> |
| 3.1 Formulacija problema sa stanovišta fizike . . . . .                               | 38        |
| 3.2 Jaka (klasična) formulacija Stefanovog problema . . . . .                         | 44        |
| 3.3 Slaba formulacija Stefanovog problema . . . . .                                   | 53        |
| 3.4 Numeričke metode . . . . .                                                        | 56        |
| 3.4.1 Diskretizacija problema provođenja toplote . . . . .                            | 56        |
| 3.4.2 Metod entalpije . . . . .                                                       | 60        |
| 3.4.3 Konvergencija šeme entalpije i postojanje slabog rešenja . . . . .              | 63        |
| <b>4 Matematički model odmrzavanja zamrznutih pekarskih proizvoda</b>                 | <b>66</b> |
| 4.1 Proces odmrzavanja Žu-žu testa - matematički model . . . . .                      | 67        |
| 4.2 Prikaz numeričkih rezultata . . . . .                                             | 71        |
| <b>Zaključak</b>                                                                      | <b>78</b> |
| <b>Literatura</b>                                                                     | <b>80</b> |

# Poglavlje 1

## Matematičke osnove

### 1.1 Klasifikacija Parcijalnih diferencijalnih jednačina i fizičkih problema

Parcijalne diferencijalne jednačine (u daljem tekstu PDJ) pojavljuju se u opisanju različitih fizičkih problema u nauci i tehnici. PDJ predstavlja vezu između zavisne promenljive dve ili više nezavisnih promenljivih i njenih izvoda po nezavisnim promenljivim. Nezavisno promenljive su najčešće prostorne koordinate  $(x, y, z)$ , ili koordinate u prostoru i vremenu  $(x, y, z, t)$  [14]. Zavisna promenljiva  $f$  zavisi od fizičkog procesa koji opisujemo (to može biti temperatura, koncentracija, gustina...). Uz PDJ postavljaju se početni i/ili granični uslovi, koje rešenje jednačine treba da zadovolji. Sledeće tri jednačine predstavljaju najjednostavnije primere PDJ sa dve nezavisne promenljive:

1. Laplasova<sup>1</sup> jednačina u dve dimenzije

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

2. Toplotna jednačina u jednoj dimenziji

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

3. Talasna jednačina u jednoj dimenziji

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

---

<sup>1</sup>Pjer-Simon, Markiz de Laplas (1749-1827), francuski matematičar i astronom

Svaka od ovih jednačina predstavlja primer posebne klase PDJ - Laplasova primer eliptičnih jednačina, toplotna parabolinih i talasna hiperboličnih. Poznato nam je da PDJ možemo klasifikovati prema različitim kriterijumima - prema redu PDJ, homogenosti, linearnosti. Posmatrajmo kvazi-linearnu (linearnu po najvišim izvodima), nehomogenu jednačinu drugog reda

$$Af_{xx} + Bf_{xy} + Cf_{yy} + Df_x + Ef_y + F = G \quad (1.1)$$

Na osnovu znaka diskriminante  $B^2 - 4AC$  klasifikacija je sledeca:

| $B^2 - 4AC$ | Klasifikacija |
|-------------|---------------|
| Negativno   | Eliptične     |
| Nula        | Parabolične   |
| Pozitivno   | Hiperbolične  |

Tabela 1.1: Klasifikacija PDJ

Prirodno, postavlja se pitanje da li različite klase PDJ imaju različite osobine rešenja i različite numeričke postupke za rešavanje? Odgovor je potvrđan. Jedna od važnih osobina koja karakteriše PDJ jesu **karakteristike**. Karakteristike su  $(n - 1)$ -dimenzionalne hiper-površni u  $n$  dimenzionalnom prostoru sa određenim osobinama. Naime, u dvodimenzionalnom prostoru one predstavljaju karakteristične linije duž kojih se kroz domen definisanosti jednačine propagira informacija.

Takođe, ukoliko parcijalni izvodi zavisne promenljive  $f$  nisu neprekidni, i njihovi prekidi se prenose duž karakterističnih linija. Pitanje je kako odrediti karakteristike jedne PDJ? Potrebno je u suštini odgovoriti na pitanje: Da li postoje putanje u domenu rešenja koje prolaze kroz tačku domena  $P$  duž kojih drugi izvodi jednačine (1.1) imaju prekide ili u tački  $P$  uzimaju više vrednosti? Ako postoje, ove putanje se nazivaju karakteristike i jesu putanje prostiranja informacije. Jedna međusobna veza parcijalnih izvoda drugog reda data je samom jednačinom (1.1), a drugu dobijamo ukoliko potražimo totalne diferencijale

$$d(f_x) = f_{xx}dx + f_{xy}dy \quad (1.2)$$

$$d(f_y) = f_{yx}dx + f_{yy}dy \quad (1.3)$$

Sada obe jednačine možemo napisati u matricnoj formi

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx} \\ f_{xy} \\ f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Df_x - Ef_y - F + G \\ d(f_x) \\ d(f_y) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Konačne, jedinstvene vrednosti ovog sistema postoje, osim u slučaju kada je determinanta matrice koeficijenata jednaka nuli. U tom slučaju drugi izvodi ili imaju vrednost beskonačno (što nema smisla u fizičkoj interpretaciji problema) ili su neodređeni (uzimaju više vrednosti ili imaju prekide). Stoga, izjednačavajući determinantu matrice koeficijenata sa nulom, dobijamo **karakterističnu jednačinu**

$$A(dy)^2 - Bdx dy + C(dx)^2 = 0 \quad (1.5)$$

koja odgovara jednačini (1.1). Odavde sledi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (1.6)$$

Prethodna jednačina predstavlja diferencijalnu jednačinu za dve familije karakterističnih krivih, u zavisnosti od izbora znaka  $+$  ili  $-$ . Sada ponovo, na osnovu znaka diskriminante jednačina (1.1) zadovoljava

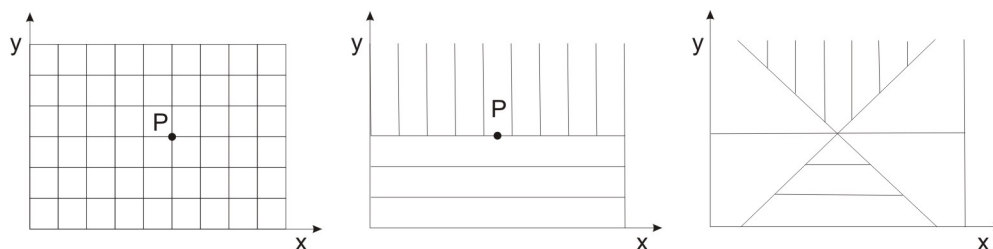
| $B^2 - 4AC$ | Karakteristične krive | Klasifikacija |
|-------------|-----------------------|---------------|
| Negativno   | Komplaksne            | Eliptične     |
| Nula        | Realne (jednake)      | Parabolične   |
| Pozitivno   | Realne (različite)    | Hiperbolične  |

Tabela 1.2: Klasifikacija PDJ

Postojanje karakteristika dovodi nas do pojmova **domena zavisnosti** i **domena uticaja** rešenja PDJ. Posmatrajmo, u dvodimenzionalnom slučaju, domen definisanosti PDJ,  $D(x, y)$  i tačku  $P \in D(x, y)$ ,  $P = (x_p, y_p)$ . Domen zavisnosti rešenja u tački  $P$  predstavlja deo domena  $D(x, y)$  tako da  $f(x_p, y_p)$  zavisi od vrednosti  $f(x, y)$  za  $(x, y)$  iz domena zavisnosti. Domen uticaja rešenja u tački  $P$  predstavlja deo domena  $D(x, y)$  tako da je vrednost  $f(x, y)$  uzrokovana vrednošću rešenja u tački  $P$ . Grafički, na Slici 1.1 predstavljeni su domen zavisnosti (horizontalne linije) i domen uticaja (vertikalne linije) za sve tri klase jednačina. Takođe, nagib karakteristika predstavlja **brzinu prostiranja informacije**, te je brzina prostiranja informacije za parabolične jednačine beskonačna, a za hiperbolične konačna. Sada možemo klasifikovati i fizičke probleme na **probleme propagacije** (prostiranja) i **ravnotežne probleme**. Probleme propagacije opisuju parabolične i hiperbolične PDJ, dok ravnotežne probleme opisuju eliptične jednačine. Klasičan primer problema propagacije predstavlja toplotna jednačina oblika

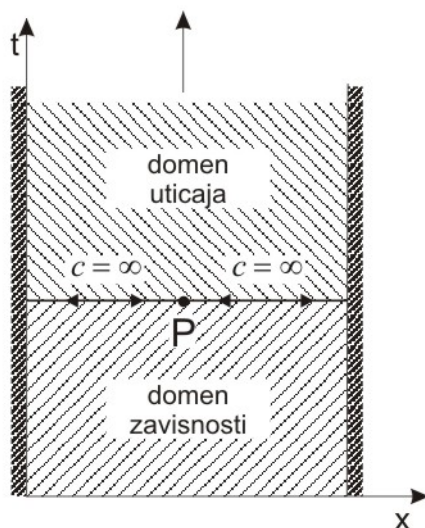
$$T_t = \alpha T_{xx}$$

data u jednodimenzionalnom slučaju, gde je  $T$  temperatura tela, a  $\alpha$  toplotna provodljivost tela. U narednim poglavljima sledi detaljna analiza ove jednačine.



Slika 1.1: Domen uticaja i domen zavisnosti za eliptične, parabolične i hiperbolične jednačine

Probleme propagacije definišemo kao početne probleme definisane na otvorenom domenu  $D(x, t)$ , gde se rešenje  $f(x, t)$  gradi od početnog  $f(x, t_0)$  modifikujući se i prateći granične date uslove na granicama domena. Na Slici 1.2 dat je šematski prikaz problema propagacije opisan paraboličnom jednačinom.



Slika 1.2: Problem propagacije opisan paraboličnim jednačinama

Još jedna veoma bitna stvar prilikom matematičkog modeliranja nekog problema, jeste da je problem dobro postavljen. Adamar<sup>2</sup> je još 1923. dao definiciju - fizički problem je dobro posavljen ukoliko rešenje postoji, jedinstveno je i neprekidno zavisi od početnih i graničnih uslova. Specijalno, za paraboličnu PDJ domen  $D(x, t)$

<sup>2</sup>Jacques Salomon Hadamard (1865-1963), francuski matematičar

mora biti otvoren u smeru vremenske nezavisne promenljive, početni uslov mora biti dat duž vremenske granice i neprekidni granični uslovi moraju biti dati na fizičkoj (prostornoj) granici domena. Granični uslovi mogu biti Dirihleovog, Nojmanovog ili mešovitog tipa.

## Granični uslovi

### 1. Dirihleov<sup>3</sup> granični uslov

Vrednost zavisne promenljive  $f$  je data na granici domena.

### 2. Nojmanov<sup>4</sup> granični uslov

Vrednost  $\frac{\partial f}{\partial n}$  je data na granici domena.

### 3. Mešoviti granični uslov

Vrednost  $a f + b \frac{\partial f}{\partial n}$  je data na granici domena.

Detaljnije o karakteristikama i osobinama različitih PDJ može se pročitati u [14] i [22].

## 1.2 Pojam distribucija i slabog izvoda

Kada govorimo o rešenju PDJ, najčešće govorimo o njemu kao o neprekidnoj funkciji sa neprekidnim izvodima sve do reda PDJ koja zadovoljava PDJ u svakoj tački domena. Ovakvo rešenje nazivamo **klasično rešenje**. Ipak, neki fizički problemi i sama njihova priroda dozvoljavaju nam da oslabimo ove uslove i dozvolimo na taj način većoj klasi funkcija da budu rešenje datog problema. David Hilbert<sup>5</sup> je, baveći se ovim problemom prvo uveo pojam **generalizovanog rešenja**, kao granica klasičnih rešenja (u odgovarajućem smislu). Ova ideja se razvijala tokom tridesetih i četrdesetih godina XX veka i vodila do pojmova **slabog izvoda** i **slabog rešenja** [1].

Od kada je Dirak<sup>6</sup> uveo njegovu "matematički besmisleni  $\delta$ -funkciju", ovakvim veličinama dat je potpun matematički smisao. Loran Švarc<sup>7</sup> je 1948. objavio "Theorie des Distributions" gde je Dirac-ova  $\delta$  definisana kao funkcionala, delovanjem na test funkcije. Čitava teorija PDJ sada je oformljena u novom, **prostoru**

<sup>3</sup>Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), nemački matematičar

<sup>4</sup>Carl Gottfried Neumann (1832-1925), nemački matematičar

<sup>5</sup>David Hilbert (1862-1943), nemački matematičar

<sup>6</sup>Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984), engleski teorijski fizičar

<sup>7</sup>Laurent Schwartz (1915-2002), francuski matematičar

**Soboljeva** sa slabim izvodima. Slede precizne definicije prethodno pomenutih i naglašenih pojmova.

Neka je  $\Omega$  otvoren, ograničen skup u  $\mathbb{R}^n$ , sa po delovima diferencijabilnom granicom  $\partial\Omega$ . *Zatvorenje* od  $\Omega$  je  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ .

Skup svih funkcija sa neprekidnim izvodima do reda  $m$  označavamo sa  $\mathbf{C}^m(\Omega)$ . Sa  $\mathbf{L}^p(\Omega)$  označavamo prostor čiji je  $p$ -i stepen integrabilna funkcija na  $\Omega$ , za  $1 \leq p \leq \infty$ . Na ovom prostoru definisana je norma

$$\|f\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Šta više, prostor  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom

$$\langle f, g \rangle := \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

**Nosač** funkcije  $\phi$  je skup  $\text{supp}(\phi) := \overline{\{x : \phi(x) \neq 0\}}$ . Sa  $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$  označavamo skup beskonačno diferencijabilnih funkcija sa kompaktnim (zatvorenim i ograničenim) nosačem u  $\Omega$ .

Prostor **test funkcija**  $\mathcal{D}(\Omega)$  na  $\Omega$  sastoji se od funkcija iz  $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$  sa konvergencijom definisanom na sledeći način: kažemo da niz funkcija  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$  u  $\mathcal{D}(\Omega)$  teži nuli, sa oznakom  $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ , ako važi

1.  $\exists K \subset \subset \text{supp}(\phi_n) \subset K$
2.  $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \quad \partial^\alpha \phi_n \Rightarrow 0$  u  $K$ .

Važi ekvivalencija [19] za  $\phi \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$

$$\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \phi \Leftrightarrow (\phi_n - \phi) \xrightarrow{\mathcal{D}} 0.$$

Jasno je da imamo sledeći poredak među navedenim skupovima funkcija

$$\mathcal{D} \subset \mathbf{C}^\infty \subset \dots \subset \mathbf{C}^1 \subset \mathbf{C} \subset \dots \subset \mathbf{L}^2 \subset \mathbf{L}^1,$$

i dodatno, skup  $\mathcal{D}$  je gust u svakom od ovih skupova, tj. svaka funkcija iz nekog od preostalih prostora je granica niza test funkcija.

Realna funkcija definisana nad nekim funkcionalnim prostorom naziva se **funkcionela**. Stoga, funkcionela  $U$  nad  $\mathcal{D}(\Omega)$  dodeljuje jedinstven realan broj  $U(\phi)$  svakoj funkciji  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Konačno, *neprekidne linearne funkcionele* nazivamo

**distribucije** na  $\Omega$ . Prostor svih distribucija nad  $\Omega$  označavamo sa  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , a vrednost distribucije  $U$  na test funkciji  $\phi$  sa  $\langle U, \phi \rangle$ . Znamo još i da svaka funkcija  $u$  koja je integrabilna na  $\Omega$  određuje distribuciju  $U$  definisanu sa

$$\langle U, \phi \rangle := \int_{\Omega} u(x)\phi(x)dx, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Ovakve distribucije se nazivaju **regularne**. Ako funkciju  $u$  poistovetimo sa  $U$ , tada možemo gledati na integrabilne funkcije kao na regularne distribucije, odnosno važi inkluzija  $\mathbf{L}^1(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ .

Pored regularnih postoje i distribucije kao Dirakova  $\delta$ , definisana sa

$$\langle \delta_a, \phi \rangle := \phi(a), \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad a \in \Omega.$$

Najbitnija osobina distribucija jeste to da imaju sve izvode. Distribucionni izvod od  $U \in \mathcal{D}'(\Omega)$  po  $x_j$  je definisan kao distribucija  $\frac{\partial U}{\partial x_j}$  tako da

$$\left\langle \frac{\partial U}{\partial x_j}, \phi \right\rangle := - \left\langle U, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

**Primer 1.2.1.** *Distribucionii izvod Heaviside<sup>8</sup>-ove funkcije  $u(x) = 1, x > 0$  i  $u(x) = 0, x < 0$  je Dirakova  $\delta$ . Za proizvoljnu  $\phi \in \mathcal{D}(-\infty, \infty)$  imamo*

$$\begin{aligned} \langle u, \phi' \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\phi'(x)dx = \int_{-\infty}^0 0 \cdot \phi' dx + \int_0^{\infty} 1 \cdot dx \\ &= \phi(\infty) - \phi(0) = -\phi(0) = -\langle \delta_0, \phi \rangle \end{aligned} \quad (1.7)$$

odakle imamo  $u' = \delta_0$

**Definicija 1.2.2.** Neka je  $u \in \mathbf{L}^1(\Omega)$ . Kažemo da je integrabilna funkcija  $\nu \in \mathbf{L}^1(\Omega)$  **slabi izvod** od  $u$  na  $\Omega$  po  $x_j$  ako

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} \nu \phi dx, \quad \text{za sve } \phi \in \mathbf{C}_0^{\infty}(\Omega).$$

Napominjemo da postoji samo jedan slabi izvod.

**Definicija 1.2.3.** Prostor Soboljeva<sup>9</sup>  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  se sastoji od svih kvadratno integrabilnih funkcija sa kvadratno integrabilnim slabim izvodima u  $\Omega$ , odnosno

$$\mathbf{H}^1(\Omega) = \{u \in \mathbf{L}^2(\Omega) : |\nabla u| \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}.$$

<sup>8</sup>Oliver Heaviside (1850-1925), engleski samouki elektro inženjer, matematičar i fizičar

<sup>9</sup>Sergei Lvovich Sobolev (1908-1989), ruski matematičar

Ovaj prostor je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom datim sa

$$\langle u, v \rangle_{\mathbf{H}^1(\Omega)} := \int_{\Omega} [uv + \nabla u \nabla v] dx \equiv \langle u, v \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$

### Aproksimacija izvoda konačnim razlikama

Za proizvoljnu funkciju  $f$  definisanu u oblasti  $G \subset \mathbb{R}^n$  diferencni količnici

$$\delta_{x_j}^h f(x) = \frac{f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_n) - f(x)}{h}$$

moгу se definisati za  $x \in G'$ , gde je  $G' \subset\subset G$  i dovoljno malo  $|h|$ . Ukoliko je funkcija  $f$  glatka u  $x$ , tada prema definiciji klasičnog izvoda  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ , imamo

$$\delta_{x_j}^h f(x) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(x), \quad h \rightarrow 0.$$

odnosno,

$$\delta_{x_j}^h f(x) = \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_j+h} \frac{\partial f(x_1, \dots, \xi, \dots, x_n)}{\partial \xi} d\xi$$

Odavde proističe da diferencni količnici u suštini aproksimiraju slabi izvod [1].

## 1.3 Furijeova transformacija

U ovom odeljku daćemo definiciju Furijeove<sup>10</sup> transformacije i neke njene najbitnije osobine, koje će nam biti veoma korisne prilikom izvođenja fundamentalnog rešenja toplotne jednačine koje sledi u narednom poglavlju, a detaljnije se može pogledati u [10] i [19].

**Definicija 1.3.1.** Neka je  $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ . **Furijeova transformacija** od  $f$  je funkcija  $\hat{f}$ , ograničena na  $\mathbb{R}^n$  i definisana sa

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx$$

Definisana na ovaj način, Furijeova transformacija predstavlja algebarski homomorfizam iz prostora  $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$  (sa konvolucijom) na prostor  $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$  (sa množenjem po tačkama), i izometriju na prostoru  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ .

---

<sup>10</sup>Joseph Fourier (1768-1830), francuski matematičar i fizičar

**Definicija 1.3.2.** Neka su  $f$  i  $g$  integrabilne funkcije na  $\mathbb{R}^n$ . **Konvolucija** funkcija  $f$  i  $g$  u oznaci  $f * g$  definisana je sa

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = g * f(x)$$

Navešćemo, bez dokaza, neke od bitnih osobina Furijeove transformacije:

(i) Za  $f$  i  $g \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$  važi  $(f * g)^\wedge = \hat{f}\hat{g}$

(ii) Furijeova transformacija je linearno preslikavanje, tj.

$$(\alpha f + \beta g)^\wedge(\xi) = \alpha \hat{f}(\xi) + \beta \hat{g}(\xi)$$

(iii) Za  $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $(f(x+a))^\wedge(\xi) = e^{-2\pi i a \cdot \xi} \hat{f}(\xi)$

(iv) Za  $f \in \mathcal{S}^{11}$  važi da je  $\hat{f} \in \mathbf{C}^\infty$  i

$$\partial^\beta \hat{f} = [(-2\pi i x)^\beta f]^\wedge$$

$$(\partial^\beta f)^\wedge = (2\pi i \xi)^\beta \hat{f}$$

gde je  $\partial^\beta$  definisano sa

$$\partial^\beta = \prod_1^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\beta_j} = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \cdots \partial x_n^{\beta_n}},$$

Sa

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n),$$

gde su  $\beta_j, j = 1, \dots, n$  nenegativni celi brojevi, je definisan multi-indeks.

$$|\beta| = \sum_{j=1}^n \beta_j$$

i za  $x \in \mathbb{R}^n$

$$x^\beta = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\beta_n}$$

(v) Može se pokazati da ako  $f \in \mathcal{S}$ , tada je i  $\hat{f} \in \mathcal{S}$

---

<sup>11</sup> Sa  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  označavamo **Švarcovu klasu**, odnosno skup svih fnkcija iz  $\mathbb{C}^\infty$  na  $\mathbb{R}^n$  za koje važi  $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta u(x)| < \infty$ .

(vi) Neka je  $f(x) = e^{-\pi a|x|^2}$ ,  $a > 0$ . Tada je

$$\hat{f}(\xi) = a^{-n/2} e^{-\pi|\xi|^2/a}$$

(vii) Za  $f$  i  $g \in \mathcal{S}$  važi  $\int f\hat{g} = \int g\hat{f}$ . Stoga, za  $f \in \mathbf{L}^1$  definišemo funkciju  $\check{f}$  na sledeći način:

$$\check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} f(\xi) d\xi = \hat{f}(-x).$$

Važi Teorema o inverzu, koja tvrdi: ako je  $f \in \mathcal{S}$  tada je  $\check{\check{f}} = f$ .

## 1.4 Teorija nepokretne tačke. Integralne jednačine

Kako je teorija integralnih jednačina razvijena mnogo pre nego teorija diferencijalnih jednačina, prirodno je pokušati problem diferencijalnih jednačina svesti na problem integralnih [23]. Sledi kratak osvrt na teoriju integralnih jednačina u cilju pripreme za dokaz postojanja rešenja jakog Stefanovog problema.

Neka je  $T$  transformacija metričkog prostora  $M$  u njega samog. Posmatrajmo jednačinu

$$u = Tu. \quad (1.8)$$

Dakle, rešenje jednačine  $u \in M$  predstavlja fiksnu (nepokretnu) tačku date transformacije, tj. element metričkog prostora  $u$  je invarijantan u odnosu na  $T$ . Popularan metod za rešavanje problema nepokretne tačke su metode sukcesivnih aproksimacija za čiju je primenu potreban neprekidnost i kontraktivnost transformacije  $T$ .

**Definicija 1.4.1.** Transformacija  $T$ ,  $T : M \rightarrow M$ , gde je  $M$  metrički prostor je *Lipšic neprekidna* ako postoji konstanta  $\rho$ , nezavisna od  $u$  i  $v$  tako da

$$d(Tu, Tv) \leq \rho d(u, v), \text{ za sve } u, v \in M.$$

Ukoliko jednačina važi za  $\rho < 1$ ,  $T$  nazivamo *kontrakcija*.

**Teorema 1.4.2.** Neka je  $T$  kontrakcija na kompletnom metričkom prostoru  $M$ . Tada jednačina (1.8) ima samo jedno rešenje koje je granica niza sukcesivnih aproksimacija za proizvoljnu početnu aproksimaciju.

### Primena na integralne jednačine

**Primer 1.4.3.** Neka je  $u \in \mathbf{C}(a, b)$ , gde je  $\mathbf{C}(a, b)$  prostor realnih neprekidnih funkcija na zatvorenom, ograničenom intervalu  $[a, b]$ . Neka je  $k(x, y, z)$  data realna neprekidna funkcija na  $a \leq x \leq b$ ,  $a \leq y \leq b$  i  $-\infty < z < \infty$  koja zadovoljava Lipšicov uslov

$$|k(x, y, z_2) - k(x, y, z_1)| \leq M|z_1 - z_2|, \quad (1.9)$$

gde je  $M$  pozitivna konstanta nezavisna od  $x, y, z_1, z_2$ . Ako posmatramo  $k$  za  $z = u(y)$ , dobijamo neprekidnu funkciju za koju je  $\int_a^b k(x, y, u(y))dy \in \mathbf{C}(a, b)$ . Nelinearna integralna jednačina Fredholmovog<sup>12</sup> tipa data je sa

$$u(x) = \int_a^b k(x, y, u(y))dy + f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (1.10)$$

gde je  $f \in \mathbf{C}(a, b)$ . Jednačina (1.10) može se zapisati u obliku  $u = Tu$ , gde je  $T : \mathbf{C}(a, b) \rightarrow \mathbf{C}(a, b)$  definisana desnom stranom jednačine (1.10). Može se pokazati da je  $T$  kontrakcija, odnosno da važi  $d_\infty(Tu, Tv) \leq M(b-a)d_\infty(u, v)$ , za dovoljno malo  $M$  ili dovoljno malo  $b-a$ . Tada niz sukcesivnih aproksimacija

$$u_n(x) = \int_a^b k(x, y, u_{n-1}(y))dy + f(x)$$

uniformno teži jedinstvenom rešenju jednačine (1.10).

**Napomena 1.4.4.** Ukoliko je  $k(x, y, z) = \mu k(x, y)z$ , gde je  $\mu \in \mathbb{R}$ , a  $k(x, y)$  neprekidno na  $a \leq x, y \leq b$ . Tada je uslov (1.9) zadovoljen za  $M = |\mu|N$ , gde je  $N$  maksimum od  $|k|$  na  $a \leq x, y \leq b$ . Jednačina (1.10) sada postaje linearna integralna jednačina

$$u = \mu Ku + f$$

gde je

$$Ku = \int_a^b k(x, y)u(y)dy.$$

Linearna integralna jednačina ima jedno i samo jedno rešenje ukoliko je zadovoljeno

$$|\mu| < \frac{1}{N(b-a)}. \quad (1.11)$$

---

<sup>12</sup>Erik Ivar Fredholm (1866-1927), švedski matematičar

$K$  je poznato kao *integralni operator* sa jezgrom  $k(x, y)$ . Ukoliko je  $f = 0$ , tada jednačina  $u = \mu Ku$  ima samo trivijalno rešenje  $u = 0$ , kada je zadovoljen uslov (1.11). Prema notaciji u teoriji operatora, možemo zapisati  $\mu = \frac{1}{\lambda}$  te dobijamo  $\lambda u = Ku$ , odakle imamo da sve karakteristične vrednosti operatora  $K$  moraju po apsolutnoj vrednosti biti manje od  $N(b - a)$ .

**Primer 1.4.5.** Posmatrajmo sada jednačinu (1.10), gde ćemo gornju granicu integrala zameniti sa  $x$ . Jednačina je sada obilka

$$u(x) = \int_a^x k(x, y, u(y))dy + f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (1.12)$$

Ova je jednačina je integralna jednačina Volterinog<sup>13</sup> tipa. Funkcija  $k(x, y, z)$  mora da bude definisana samo za  $y \leq x$ . Možemo pretpostaviti da je  $k$  neprekidna na  $G : a \leq x \leq b, a \leq y \leq b, -\infty < z < \infty$ , i da na  $G$  zadovoljava Lipšicov<sup>14</sup> uslov

$$|k(x, y, z_2) - k(x, y, z_1)| \leq M|z_1 - z_2|. \quad (1.13)$$

Ponovo, kao i u prethodnom slučaju, jednačina (1.12) je oblika  $u = Tu$  gde je

$$Tu = f(x) + \int_a^x k(x, y, u(y))dy$$

Sukcesivne aproksimacije ovog puta konvergiraju jedinstvenom rešenju, za dovoljno veliko  $n$  koje obezbeđuje da važi  $\frac{M^n(b-a)^n}{n!} < 1$ .

**Napomena 1.4.6.** Ukoliko  $k(x, y, z) = \mu k(x, y)z$  za  $k$  koje je neprekidno na  $a \leq x \leq b, a \leq y \leq x$ , jednačina (1.12) postaje *linearna Volterina jednačina* oblika

$$u(x) = \mu \int_a^x k(x, y)dy + f(x), \quad a \leq x \leq b$$

Primitimo da je Lipšicov uslov automatski zadovoljen, te je jedino rešenje ove jednačine trivijalno, odnosno, jednačina nema karakteristične vrednosti.

---

<sup>13</sup>Vito Volterra, (1860-1940), italijanski matematičar i fizičar

<sup>14</sup>Rudolf Lipschitz (1832-1903), nemački matematičar

## Poglavlje 2

# Linearne parabolične jednačine drugog reda

### 2.1 Toplotna jednačina

Kako smo već istakli u prethodnom poglavlju, najjednostavniji primer paraboličnih jednačina predstavlja toplotna (heat conduction) jednačina

$$Hu = u_t - k\Delta u = 0, \quad (2.1)$$

gde je  $\Delta$  Laplasov operator, a  $k$  pozitivna konstanta. Teoreme koje slede date su u [21].

#### 2.1.1 Slabi princip maksimuma

Posmatrajmo jednačinu (2.1) definisanu na oblasti

$$\mathfrak{D} = R \times (0, T), \quad T < \infty,$$

gde je  $R$  otvoren i ograničen podskup<sup>1</sup> u  $\mathbb{R}^n$ .

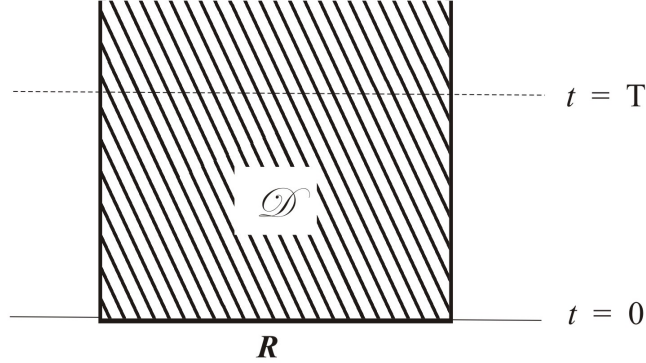
$$\mathfrak{D}' = \bar{R} \times \{t = 0\} \cup \partial R \times [0, T]$$

označava rub oblasti  $\mathfrak{D}$ . Oblast  $\mathfrak{D}$  je grafički prikazana na Slici 2.1.

**Teorema 2.1.1.** *Pretpostavimo da je  $u \in C^0(\overline{\mathfrak{D}}) \cap C^2(\mathfrak{D})$  rešenje jednačine (2.1). Tada se i maksimum i minimum rešenja  $u$  na  $\mathfrak{D}$  dostižu na rubu oblasti, odnosno na skupu  $\mathfrak{D}'$ .*

---

<sup>1</sup>Dodatan uslov može biti i povezanost skupa  $R$ . Ovaj uslov nije neophodan, jer nepovezanu oblast možemo razdeliti na više povezanih oblasti i na njima rešavati zasebne probleme sa odgovarajućim graničnim uslovima.



Slika 2.1: Oblast definisanosti toplotne jednčine

*Dokaz.* Dokazaćemo teoremu za slučaj maksimuma.

Neka je  $M = \max u$  na  $\mathfrak{D}'$ . Za  $\varepsilon > 0$  definišemo pomoćnu funkciju

$$v(x, t) = u(x, t) + \varepsilon|x|^2;$$

a zatim primenom operatora  $H$  na  $v$  dobijamo  $Hv = -2k\varepsilon < 0$ .

Sa  $\bar{t}$  označimo proizvoljan broj iz intervala  $(0, T)$ , a sa  $K = \bar{R} \times [0, \bar{t}]$ . Ako bismo pretpostavili da  $v$  dostiže maksimum u  $R \times (0, \bar{t}]$ , došli bismo u kontradikciju sa prethodnom nejednakošću, jer bismo tada imali  $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0$  za  $i = 1, \dots, n$  i  $\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \leq 0$ , što implicira  $Hv \geq 0$ . Dakle, na skupu  $K$   $v$  dostiže maksimum u tačkama skupa  $K \cap \mathfrak{D}'$  (u ovim tačkama je  $u \leq M$ ). Primetimo da na skupu  $K$  važi sledeće:  $u \leq v \leq M + c\varepsilon$ , gde smo sa  $c$  označili gornje ograničenje za  $|x^2|$  u  $\bar{R}$ . Kako je  $\varepsilon$  proizvoljno,  $u \leq M$  na  $K$ . Takođe, i  $\bar{t}$  je bilo proizvoljno pa rezultat teoreme važi.  $\square$

*Napomena 2.1.2.* Princip minimuma može biti pokazan na identičan način, primenom principa maksimuma na funkciju  $-u(x, t)$ .

*Napomena 2.1.3.* Slabi princip maksimuma nam u suštini govori da rešenje toplotne jednačine dostiže maksimum na granici oblasti  $\mathfrak{D}$  (osnosno u tačkama skupa  $\mathfrak{D}'$ ), i ne dostiže maksimum u unutrašnjosti. Videćemo u narednom odeljku da postoji i jaka verzija principa maksimuma koja tvrdi isto, sa izuzetkom za konstantno rešenje  $u$ . Jaki princip maksimuma ćemo pokazati za uopštene linearne parabolične jednačine drugog reda.

**Posledica 2.1.4.** *Granični problem*

$$Hu = f, (x, t) \in \mathfrak{D}$$

$$u = \phi, (x, t) \in \mathfrak{D}'$$

ima jedinstveno rešenje  $u \in C^0(\overline{\mathfrak{D}}) \cap C^2(\mathfrak{D})$ .

*Dokaz.* Veoma jednostavno, pretpostavimo da su  $v$  i  $w$  rešenja datog problema. Tada je  $u = v - w$  rešenje problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$$

$$u(x, t) = 0, (x, t) \in \mathfrak{D}'$$

Prema principu maksimuma imamo  $0 = \min_{\mathfrak{D}'} u \leq u \leq \max_{\mathfrak{D}'=0} u$ , odakle sledi  $u = 0$ , odnosno  $v = w$ .  $\square$

*Napomena 2.1.5.* Prethodni problem možemo zapisati i u obliku mešovitog problema datog sa

$$\begin{aligned} Hu &= f, x \in R, t > 0 \\ u|_{t=0} &= \psi(x), x \in R, \psi \in C(R) \\ u|_{\partial R} &= \phi, \phi \in C(\partial R \times \mathbb{R}_+) \end{aligned} \quad (2.2)$$

### Ocene rešenja mešovitog problema. Energijski metod.

- (i) Pomatrajmo problem (2.2), gde je  $u = 0$  na  $\partial R$ . Ovako definisan problem opisuje promenu temperature tela koje zauzima oblast  $R$  (koja sadrži toplotni izvor po jedinici zapremine  $f$ ,  $f : (\Omega \times (0, \infty)) \rightarrow \mathbb{R}$ ) u vremenu. Temperatura tela na granici se održava na nuli, a početna temperatura tela data je funkcijom  $g$ ,  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Za  $f \leq 0$  (što odgovara procesu hlađenja), na osnovu principa maksimuma imamo

$$\max_{\bar{R} \times [0, T]} u \leq \max[0, \max_{\bar{R}} g].$$

Slično, za  $f \geq 0$  važi

$$\min_{\bar{R} \times [0, T]} u \geq \min[0, \min_{\bar{R}} g].$$

što odgovara proseku zagrevanja.

- (ii) Još jednu ocenu rešenja prethodnog problema možemo dobiti integraleći jednačinu (2.1) datu na  $R \times (0, \infty)$ , množeći sa  $u$  i uzimajući u obzir uslov  $u = 0$  na  $\partial R$ . Tada dobijamo određenu vrstu *a priori* ocena.

$$\int_R uu_t dx = \int_R ku \Delta u dx.$$

Koristeći teoremu divergencije i granični uslov, dobijamo

$$\frac{d}{dt} \int_R \frac{1}{2} u^2 dx = -k \int_R u_x^2 dx \leq 0.$$

Integral sa leve strane obeležavamo sa  $E(t) = \int_R \frac{1}{2} u^2 dx$  i zovemo integral energije, koji u ovom slučaju, za dat granični uslov opada sa vremenom. Stoga, dobijamo ocenu

$$E(t) \leq E(0), \quad t > 0.$$

Korišćenjem energijskog metoda lako se može pokazati jedinstvenost rešenja za problem 2.2.

U narednoj teoremi dokazaćemo princip maksimuma na neograničenim oblastima oblika

$$\mathfrak{D} = \mathbb{R}^n \times (0, T), \quad 0 < T \leq \infty.$$

**Teorema 2.1.6.** *Neka je  $u \in C(\bar{\mathfrak{D}}) \cup C^2(\mathfrak{D})$  rešenje jednačine (2.1). Neka je  $M = \sup_{\bar{\mathfrak{D}}} u$  i  $N = \sup_{\mathbb{R}^n} u(x, 0)$ . Tada je  $M = N$  ako je  $M < \infty$ .*

*Dokaz.* Za  $\varepsilon > 0$  definišemo pomoćnu funkciju

$$v(x, t) = u(x, t) - \varepsilon(2t + |x|^2).$$

Ovako formirana funkcija  $v$  zadovoljava jednačinu (2.1), odnosno važi  $Hv = 0$ . Pretpostavimo da je  $M > N$ . Tada za svako  $x$  važi  $v(x, 0) = u(x, 0) - \varepsilon|x|^2 \leq u(x, 0) \leq N$ . Za  $x^2 \geq \frac{M-N}{\varepsilon}$  i  $0 \leq t \leq T$  važi

$$v(x, t) = u(x, t) - \varepsilon(2t + |x|^2) \leq M - \varepsilon|x|^2.$$

Kako je  $M < \infty$ , oblast  $x^2 < \frac{M-N}{\varepsilon}$  je konačna i ograničena, stoga na osnovu Teoreme 2.1.1 i toga da je  $v(x, 0) \leq N$  za  $x^2 \leq \frac{M-N}{\varepsilon}$  sledi da je  $v(x, t) \leq N$  na  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ . Dobijamo da je  $u(x, t) = v(x, t) + \varepsilon(2t + |x|^2) \leq N + \varepsilon(2t + |x|^2)$  za sve  $(x, t) \in \mathfrak{D}$ . Kako je  $\varepsilon$  proizvoljno, kada pustimo da  $\varepsilon \rightarrow 0$ , dobijamo da je  $u(x, t) \leq N$  u  $\mathfrak{D}$ . Kako je  $M = \sup_{\bar{\mathfrak{D}}} u$ , sledi da je  $M \leq N$  što je u kontradikciji sa pretpostavkom na početku dokaza.  $\square$

**Posledica 2.1.7. Početni problem**

$$Hu = f, \quad (x, t) \in \mathfrak{D}$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

ima najviše jedno rešenje  $u \in C^0(\bar{\mathfrak{D}}) \cup C^2(\mathfrak{D})$ .

## 2.1.2 Rešenje početnog problema

U ovom odeljku biće data konstrukcija fundamentalnog rešenja za jednačinu (2.1) uz početni uslov

$$u(x, 0) = \psi(x). \quad (2.3)$$

### Invarijantnost toplotne jednačine

Toplotna jednačina je invarijantna u odnosu na sledeće transformacije [22]:

- (a) *Prostorna translacija*: Ako je  $u(x, t)$  rešenje (2.1), tada je rešenje i  $u(x - y, t)$  za svako fiksno  $y$ .
- (b) *Diferenciranje*: Ako je  $u(x, t)$  rešenje (2.1) i svi izvodi  $u_t, u_x, u_{xx}, \dots$  su takođe rešenja.
- (c) *Linearne kombinacije*: Ako su  $u_1, u_2, \dots, u_n$  rešenja (2.1), tada je rešenje i  $u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n$ , za proizvoljne konstante  $c_1, c_2, \dots, c_n$ .
- (d) *Integracija*: Ako je  $G(x, t)$  rešenje (2.1) tada je rešenje i

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - y, t) \psi(y) dy,$$

za svaku funkciju  $\psi(y)$  takvu da navedeni integral konvergira.

- (e) *Skaliranje*: Ako je  $u(x, t)$  rešenje (2.1), tada je rešenje i  $v(x, t) = u(\sqrt{a}x, at)$ , za proizvoljnu konstantu  $a > 0$ .

### Konstrukcija rešenja primenom Furijeove transformacije

Zbog jednostavnosti, posmatrajmo jednačinu (2.1) u jednoj prostornoj dimenziji, odnosno  $n = 1$ , i neka je koeficijent  $k = 1$ . Primenom Furijeove transformacije po prostornoj promenljivoj  $x$  na (2.1) dobijamo jednačinu

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(y, t) = -y^2 \hat{u},$$

čije je rešenje

$$\hat{u}(y, t) = c e^{-y^2 t},$$

gde je  $c$  proizvoljna funkcija koja zavisi od  $y$ . Prirodna pretpostavka, da bismo pronašli  $c$ , jeste da

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \hat{u}(y, t) = (\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t))^\wedge.$$

Oдавде vidimo da je  $c = \hat{\psi}(y)$ , pa stoga imamo

$$u(y, t) = \hat{\psi}(y)e^{-y^2 t}. \quad (2.4)$$

Definišimo funkciju

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\xi^2} e^{-i\lambda\xi} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\xi^2} \cos \lambda\xi d\xi,$$

gde je  $a$  konstanta,  $a > 0$ . Potražimo zatim izvod  $f$  po  $\lambda$

$$\begin{aligned} f'(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\xi^2} (-\xi \sin \lambda\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\xi^2} (-2a\xi) \sin \lambda\xi d\xi = -\frac{\lambda}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\xi^2} \cos \lambda\xi d\xi. \end{aligned} \quad (2.5)$$

$f$  očigledno zadovoljava jednačinu  $f' + (\frac{\lambda}{2a})f = 0$ , pa sledi da je  $f = ke^{\frac{-\lambda^2}{4a}}$ , gde je  $k$  konstanta. Da bismo odredili  $k$ , koristimo da je  $f(0) = k$ , pa imamo

$$k = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Dakle, kako je

$$f(\lambda) = (e^{-a\xi^2})(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{-\lambda^2}{4a}}$$

imamo

$$e^{\frac{-\lambda^2}{4a}} = \sqrt{\frac{a}{\pi}} (e^{-a\xi^2}).$$

Ako za  $a$  uzmemo  $a = \frac{1}{4t}$  dobijamo

$$e^{\lambda^2 t} = \sqrt{\frac{1}{4\pi t}} (e^{\frac{-\xi^2}{4t}}).$$

Koristeći dobijeni rezultat i (2.4) dobijamo

$$\hat{u}(y, t) = \hat{\psi}(\sqrt{\frac{1}{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}) = (\psi * \sqrt{\frac{1}{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}),$$

pa konačno imamo

$$u(x, t) = \psi * \sqrt{\frac{1}{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y) \frac{e^{-(x-y)^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}} dy.$$

Sledeća teorema pokazuje da ovako konstruisana formula definiše rešenje početnog problema (2.1), (2.3) u  $n$ -dimenzionalnom prostoru  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 2.1.8.** *Ako je  $\psi(x)$  neprekidna i uniformno ograničena funkcija na  $\mathbb{R}^n$ , tada*

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} (4k\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|z-x|^2}{4kt}} \psi(z) dz \quad (2.6)$$

*je jedinstveno ograničeno rešenje problema (2.1), (2.3).*

*Dokaz.* Neka je

$$G(z - x, t) = (4\pi kt)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|z-x|^2}{4kt}}. \quad (2.7)$$

Direktnim izračunavanjem, odnosno primenom operatora  $H$  na funkciju  $G$  dobijamo  $H(G) = 0$ . Dakle,  $G$  zadovoljava jednačinu (2.1) za svako  $z \in \mathbb{R}^n$  i svako  $t > 0$ , pa važi i  $Hu = 0$  (na osnovu invarijantnosti u odnosu na integraciju, osobina (d)). Treba još pokazati da  $u$  zadovoljava i uslov (2.3). S tim ciljem, pokazaćemo prvo dve osobine koje zadovoljava funkcija  $G$ :

- (i)  $\int_{\mathbb{R}^n} G(z - x, t) dz = 1$  za sve  $x \in \mathbb{R}^n$  i  $t > 0$
- (ii)  $\lim_{t \rightarrow 0+} \int_{|z-x| > \sigma} G(z - x, t) dz = 0$  za sve  $\sigma > 0$

Lako je videti da je vrednost integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y_i^2}{4kt}} dy_i = \sqrt{4\pi kt},$$

odakle sledi

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(z - x, t) dz = \int_{\mathbb{R}^n} G(y, t) dy = \prod_{i=1}^n \int (4\pi kt)^{-\frac{1}{2}} e^{-y_i^2/4kt} dy_i = 1.$$

Da bismo pokazali osobinu (ii), obeležimo  $|z - x| = r\xi$ ,  $|\xi| = 1$ . Tada

$$\begin{aligned} \int_{|z-x| > \sigma} G(z - x, t) dz &= \int_{|\xi|=1} \left( \int_{\sigma}^{\infty} r^{n-1} G(r\xi, t) dr \right) d\omega \\ &= \int_{|\xi|=1} \left( \int_{\sigma}^{\infty} r^{n-1} (4\pi kt)^{-\frac{n}{2}} e^{-r^2/4kt} dr \right) d\omega \\ &= c \int_{\sigma/\sqrt{4kt}}^{\infty} \sigma^{n-1} e^{-\sigma^2} d\sigma, \end{aligned}$$

gde je  $c$  konstanta. Kako poslednji integral teži nuli kada  $t \rightarrow 0+$ , vazi osobina (ii).

Sada imamo sve potrebno za dokaz da je zadovoljen uslov (2.3). Ako je  $|\psi| < M$

na  $\mathbb{R}^n$  (po pretpostavci teoreme  $\psi$  je ograničena funkcija) i dato  $\varepsilon > 0$ , neka je  $\sigma = \sigma(x, t) > 0$  takvo da

$$|\psi(x) - \psi(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ako je  $r < \sigma$ ,  $r = |z - x|$  (važi zbog neprekidnosti funkcije  $\psi$ ). Dalje, iz (ii) imamo da postoji  $T = T(x, \varepsilon) > 0$  tako da

$$\int_{r>\sigma} G(z - x, t) dz < \frac{\varepsilon}{3M}, \quad 0 < t < T.$$

Koristeći osobinu (i), za  $0 < t < T$  važi

$$\begin{aligned} |u(x, t) - \psi(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} G(z - x, t)(\psi(x) - \psi(z)) dz \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} G(z - x, t) |\psi(x) - \psi(z)| dz \\ &= \int_{r<\sigma} G(z - x, t)(\psi(x) - \psi(z)) dz \\ &\quad + \int_{r>\sigma} G(z - x, t)(\psi(x) - \psi(z)) dz \\ &< \frac{\varepsilon}{3} \int_{r<\sigma} G(z - x, t) dz + 2M \int_{r>\sigma} G(z - x, t) dz \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Prethodna nejednakost pokazuje da je

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} u(x, t) = \psi(x).$$

Kako za svaki kompaktan skup  $\sigma$  možemo izabrati nezavisno od  $x$ , imamo da  $u(x, t)$  uniformno teži ka  $\psi(x)$ , odakle sledi neprekidnost  $u(x, t)$  za  $t \geq 0$ . Dakle, važi (2.3). Ograničenost  $u(x, t)$  sledi iz

$$|u(x, t)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} G(z - x, t) dz = M.$$

Na osnovu Posledice 2.1.7,  $u(x, t)$  jeste jedinstveno ograničeno rešenje problema (2.1), (2.3).  $\square$

Funkcija  $G(z - x, t)$  data sa (2.7) je poznata kao *jezgro toplotne jednačine, fundamentalno rešenje, propagator* ili *Grinova<sup>2</sup> funkcija*. Primetimo da funkcija  $G$  u stvari određuje način na koji se data vrednost temperature u početnom trenutku prenosi u vremenu. U narednom odeljku pristupićemo pronalaženju Grinove funkcije za toplotnu jednačinu.

---

<sup>2</sup>George Green (1793.-1841.), britanski matematički fizičar

### 2.1.3 Grinova funkcija. Interpretacija fundamentalnog rešenja.

#### Grinova funkcija za toplotnu jednačinu

Posmatrajmo toplotnu jednačinu

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \nabla^2 u = q(\mathbf{r}, t), \quad (2.8)$$

gde je  $\nabla$  trodimenzionalni operator gradijenta,  $\mathbf{r}$  vektor položaja,  $a^2$  koeficijent difuzije i  $q(\mathbf{r}, t)$  toplotni izvor. Uz jednačinu su nam potrebni i uslov na granici, kao i početni uslov  $u(\mathbf{r}, t = t_0)$ . Cilj je da pokažemo da se rešenje (2.8) može izraziti koristeći granični i početni uslov i Grinovu funkciju, koju nalazimo rešavanjem jednačine

$$\frac{\partial G}{\partial t} - a^2 \nabla^2 G = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - \tau), \quad (2.9)$$

gde  $\mathbf{r}_0$  predstavlja položaj toplotnog izvora. Grinova funkcija  $g(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, \tau)$  treba da zadovoljava homogene početne i granične uslove (iako sama toplotna jednačina može biti data sa homogenim ili nehomogenim uslovima). Takođe, mora da važi i  $g(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, \tau) = 0$  za  $\tau > t$ , zbog dobro poznatog principa uzročnosti po kom događaj ne može prethoditi svom uzroku. Dakle, fizička interpretacija problema je raspodela (distribucija) temperature kroz određenu oblast koju uzrokuje pojava toplotnog izvora u tački  $\mathbf{r}_0$  u trenutku  $\tau$ .

*Napomena 2.1.9.* Grinovu funkciju možemo naći i rešavanjem početnog problema<sup>3</sup>

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \nabla^2 u = 0, \quad t > \tau, \quad u(\mathbf{r}, \tau) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (2.10)$$

Važna osobina Grinove funkcije jeste da važi

$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, \tau) = G(\mathbf{r}, -\tau | \mathbf{r}_0, -t). \quad (2.11)$$

Sa stanovišta fizike, funkcija  $G(\mathbf{r}, -\tau | \mathbf{r}_0, -t)$  daje efekat izvora koji se pojavio u tački  $\mathbf{r}$  i trenutku  $-t$  na tačku  $\mathbf{r}_0$  u trenutku  $-\tau$ . Da bismo pokazali da ovaj uslov važi, posmatrajmo prvo (ajdungovanu) funkciju  $G^*(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, \tau)$ , definisanu relacijom

$$G(\mathbf{r}, -t | \mathbf{r}_0, -\tau) = G^*(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, \tau).$$

Funkcija  $G^*$  zadovoljava jednačinu

$$\frac{\partial G^*}{\partial t} + a^2 \nabla^2 G^* = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - \tau) \quad (2.12)$$

---

<sup>3</sup>Ovo se jednostavno može videti primenom Furijeove transformacije na obe jednačine (2.9) i (2.10). Dobijamo da su Furijeove transformacije rešenja  $u$  problema (2.10) i rešenja  $G$  problema (2.9) jednake, odakle, na osnovu injektivnosti Furijeove transformacije sledi jednakost rešenja.

sa uslovom  $G^*(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, \tau) = 0$  za  $t > \tau$ . Drugim rečima, funkcija  $G$  opisuje razvoj temperature tokom vremena, od početnog trenutka, dok funkcija  $G^*$  opisuje isti proces unazad, od krajnje raspodele temperature do početnog izvora. Uslov (2.11) sada ima oblik

$$G(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, \tau) = G^*(\mathbf{r}_0, \tau|\mathbf{r}, t).$$

Dokaz da uslov (2.11) važi dat je u [7].

Sada preostaje da pokažemo da se rešenje nehomogene toplotne jednačine može izraziti pomoću početnog i graničnog uslova i Grinove funkcije. Koristimo sledeće jednačine (na osnovu prethodnog razmatranja o Grinovoj funkciji i njoj adjungovanoj)

$$a^2 \nabla_0^2 u(\mathbf{r}_0, t_0) - \frac{\partial u(\mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t_0} = -q(\mathbf{r}_0, t_0) \quad (2.13)$$

i

$$a^2 \nabla^2 G(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, t_0) + \frac{\partial G(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t_0} = -\delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})\delta(t_0 - t). \quad (2.14)$$

Jednačinu (2.13) množimo sa  $g$ , jednačinu (2.14) množimo sa  $u$  i oduzimamo ih. Zatim integralimo po zapremini  $V_0$  i vremenu  $t_0$ , u intervalu od 0 do  $t^+$ . Konačno dobijamo

$$\begin{aligned} a^2 \int_0^{t^+} \iiint_{V_0} [u \nabla_0^2 - G \nabla_0^2 u] dV_0 dt_0 \\ + \int_0^{t^+} \iiint_{V_0} \left[ u \left( \frac{\partial G}{\partial t_0} \right) + G \left( \frac{\partial u}{\partial t_0} \right) \right] dV_0 dt_0 \\ = \int_0^{t^+} \iiint_{V_0} q(\mathbf{r}_0, t_0) G(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, t_0) dV_0 dt_0 - u(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Primenom druge Grinove formule na prvi integral u gornjem izrazu i integraleći po vremenu u drugom integralu, dobijamo

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}, t) = \int_0^{t^+} \iiint_{V_0} q(\mathbf{r}_0, t_0) G(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, t_0) dV_0 dt_0 \\ + a^2 \int_0^{t^+} \oint_{S_0} [G(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, t_0) \nabla_0 u(\mathbf{r}_0, t_0) - u(\mathbf{r}_0, t_0) \nabla_0 G(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, t_0)] \cdot \mathbf{n} dS_0 dt_0 \\ + \iiint_{V_0} u(\mathbf{r}_0, 0) G(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, 0) dV_0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

gde smo koristili da je  $G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t^+) = 0$ .

Primenimo sada prethodni rezultat na konkretan nehomogeni početni problem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u &= f(x, t), \quad x \in V, \quad t > 0 \\ u(x, t) &= g(x, t), \quad x \in \partial V, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in V, \end{aligned} \quad (2.17)$$

gde je  $V$  ograničena oblast u  $\mathbb{R}^n$ . Ako pretpostavimo da  $u(y, \tau)$  rešava problem (2.17) formiramo odgovarajući problem koji rešava Grinova funkcija  $G(x, t; y, \tau)$ ,  $x, y \in V, t, \tau > 0$ :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial G}{\partial \tau} - k\Delta G &= \delta(y - x)\delta(\tau - t) \\ G &= 0, \quad y \in \partial V \\ G &= 0, \quad \tau > t \end{aligned} \quad (2.18)$$

Rešenje  $u(x, t)$ , na osnovu (2.16) ima oblik

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^T \int_V G(x, t; y, \tau) f(y, \tau) dy d\tau \\ &+ \int_V G(x, t; y, 0) u_0(y) dy \\ &- \int_0^T \int_{\partial V} \frac{\partial G}{\partial n} g(y, \tau) dS(y) d\tau \end{aligned} \quad (2.19)$$

Primetimo da prethodno definisan problem rešava toplotnu jednačinu unazad (o čemu smo govorili u (2.12)). Zato, da bi problem izgledao što "prirodnije", uvodimo smenu  $\sigma = t - \tau$ , pa prethodni problem formulišemo na sledeći način:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \sigma} - k\Delta G &= \delta(y - x)\delta(\sigma) \\ G &= 0, \quad y \in \partial V \\ G &= 0, \quad \sigma < 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Pokažimo konačno da Grinova funkcija za toplotnu jednačinu definisanu na čitavom  $\mathbb{R}^n$  ima oblik (2.7) [12]. Dakle, rešavamo problem (2.20) na  $V = \mathbb{R}^n$ . Prvo, primenom Furijeove transformacije na (2.20) po promenljivoj  $y$  dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \hat{G} + k|\xi|^2 \hat{G} = (2\pi)^{-n/2} e^{-ix\xi} \delta(\sigma).$$

Za  $\sigma > 0$  problem je homogen  $\frac{\partial}{\partial \sigma} \hat{G} + k|\xi|^2 \hat{G} = 0$ , a njegovo rešenje oblika

$$\hat{G} = C e^{-k|\xi|^2 \sigma},$$

gde  $C = C(x, t, \xi)$  možemo naći iz uslova

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{0-}^{0+} \delta(\sigma) d\sigma = (2\pi)^{n/2} e^{ix\xi} \int_{0-}^{0+} [\hat{G}_\sigma + k|\xi|^2 \hat{G}] d\sigma \\ &= (2\pi)^{n/2} e^{ix\xi} \hat{G}|_{\sigma=0-}^{\sigma=0+} = (2\pi)^{n/2} e^{ix\xi} C, \end{aligned} \quad (2.21)$$

gde koristimo da je  $\hat{G}$  ograničena (pa je drugi član gornjeg integrala nula), a zatim i uslov  $\hat{G} = 0$  za  $\sigma < 0$ . Konačno dobijamo da je

$$\hat{G} = (2\pi)^{n/2} e^{ix\xi} e^{-k|\xi|^2 \sigma}.$$

Primenom osobina (iii) i (vi) Furijeove transformacije, kao i njenog inverza (vii) dobijamo traženu Grinovu funkciju za  $\sigma > 0$

$$G(x, t; y, \sigma) = (4\pi k\sigma)^{-n/2} e^{-\frac{|y-x|^2}{4k\sigma}}$$

odnosno

$$G(x, t; y, \tau) = \begin{cases} (4\pi k(t-\tau))^{-n/2} e^{-\frac{|y-x|^2}{4k(t-\tau)}}, & \tau < t. \\ 0, & \tau > t. \end{cases} \quad (2.22)$$

### Grinova funkcija za poluravan

- (i) **Dirihleov problem** Posmatraćemo problem (2.17) u jednoj prostornoj dimenziji, za  $x > 0$  i  $u(0, t) = 0$ ,  $t > 0$  Dirihleovim graničnim uslovom. Odgovarajući problem za Grinovu funkciju je (2.20), za  $y > 0$ ,  $G|_{y=0} = 0$  i  $G = 0$ ,  $\sigma < 0$ . Da bismo odredili Grinovu funkciju za poluravan, definišaćemo njenu dopunu, izvan našeg domena, za  $-x$ , koja takođe zadovoljava uslov na granici. Tada za  $\sigma > 0$

$$\begin{aligned} G(x, t; y, \sigma) &= \\ G^1(x, t; y, \sigma) - G^1(-x, t; y, \sigma) &= (4\pi k\sigma)^{-1/2} \left[ e^{-\frac{(y-x)^2}{4k\sigma}} - e^{-\frac{(y+x)^2}{4k\sigma}} \right] \end{aligned} \quad (2.23)$$

Direktno možemo proveriti da funkcija  $G$  zadovoljava jednačinu problema (2.20) kao i početni uslov.

- (ii) **Nojmanov problem** Ako umesto Dirihleovog uslova na granici iskoristimo Nojmanov uslov  $u_x(0, t) = 0$ ,  $t > 0$  tada je Grinova funkcija oblika

$$\begin{aligned} G(x, t; y, \sigma) &= \\ G^1(x, t; y, \sigma) + G^1(-x, t; y, \sigma) &= (4\pi k\sigma)^{-1/2} \left[ e^{-\frac{(y-x)^2}{4k\sigma}} + e^{-\frac{(y+x)^2}{4k\sigma}} \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

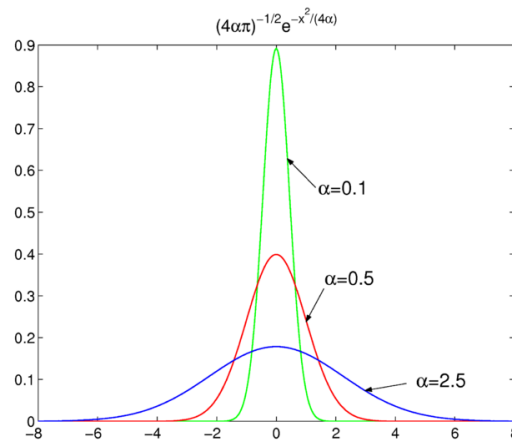
gde je  $G^1 = (4\pi k\sigma)^{-1/2} e^{-\frac{(y-x)^2}{4k\sigma}}$ .

### Interpretacija fundamentalnog rešenja i neke osobine toplotne jednačine

Analiza funkcije (2.7) pomoći će nam da što bolje razumemo kako jezgro toplotne jednačine prenosi datu vrednost u početnom trenutku,  $\psi(x)$  [22]. Funkcija

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

je dobro definisana za sve  $t > 0$ . Takođe je pozitivna i parna po promenljivoj  $x$  i za svako fiksno  $t$  ima grafik oblika zvona <sup>4</sup> dat na Slici 2.2. Za fiksno  $t$  vrh funkcije



Slika 2.2: Gausova funkcija

$G$  u  $x = 0$  je na visini  $\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}$  i opada kako  $t$  raste. Kako je prema (2.10) početni uslov za  $G(x, t)$  Dirakova delta distribucija  $\delta(x)$ ,  $G(x, t)$  se može tumačiti kao raspodela temperature u trenutku  $t$  uzrokovana raspodelom u trenutku  $t = 0$  datom delta distribucijom. Kako je u početnom trenutku temperatura jednaka nuli svuda, osim u  $x = 0$ , a  $G(x, t) > 0$ ,  $t > 0$  zaključujemo da se toplota prenosi odmah ka svim tačkama  $x \in \mathbb{R}$ , što nam govori da je brzina provodjenja toplote beskonačna. Takodje primetimo da je funkcija  $G(x, t)$  glatka, bez obzira na početni uslov dat funkcijom koja ima prekid. Za funkciju (2.7) koja je jezgro rešenja problema sa početnim uslovom  $\psi(x)$  možemo reći da meri efekat početne temperature u tački  $z$ ,  $\psi(z)$  koji se oseća u ostalim tačkama  $x$  u nekom kasnijem trenutku  $t$ . Kako je  $u(x, t)$  temperatura u tački  $x$  u trenutku  $t$  suma uticaja početnih temperatura u svim tačkama  $y$ , što u graničnom procesu daje (2.6).

U narednih nekoliko tačaka sumiraćemo bitne osobine toplotne jednačine (neke su već analizirane tokom prethodnog razmatranja, a neke će biti ovde analizirane):

<sup>4</sup>Generalno, funkcija  $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$  je poznata kao *Gausijana* ili *Gausova funkcija*.

1. *Beskonačna brzina prostiranja.*
2. *Rešenje početnog problema je glatka funkcija čak i ako je početni uslov dat po delovima neprekidnom funkcijom.*<sup>6</sup>
3. *Toplotna jednačina opisuje nepovratne procese.* Ukoliko bismo želeli da posmatramo toplotnu jednačinu za  $t < 0$ , ona se smenom  $t \mapsto -t$  menja u  $u_t + ku_{xx} = 0$ , čije je rešenje  $u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} (4k\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(z-x)^2}{4kt}} \psi(z) dz$  (u jednodimenzionalnom slučaju), što divergira za sve  $x \in \mathbb{R}$ .

## 2.2 Jaki princip maksimuma

Kao što smo i naveli u napomeni 2.1.3, u ovom odeljku dokazaćemo teoreme vezane za jaki princip maksimuma, generalno, za linearne parabolične jednačine drugog reda [21]. Videćemo da će nam dobijeni rezultati biti od velike važnosti u rešavanju Stefanovog problema u sledećem poglavlju.

Linearnu paraboličnu jednačinu drugog reda sa  $n$ -dinemzionalnom prostornom promenljivošću možemo predstaviti na sledeći način:

$$Pu = Au + au = f, \quad (2.25)$$

gde je  $u = u(x, t)$ ,  $(x, t) \in \mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ , gde je  $\mathfrak{D}$  domen definisanosti. Rešenjem jednačine (2.25) smatramo  $u \in C(\mathfrak{D}) \cup C^2(\mathfrak{D})$ . Operator  $A$  je dat sa

$$Au = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) D_i D_j u + \sum_{i=1}^n a_i(x, t) D_i u - u_t, \quad (2.26)$$

gde su svi koeficijenti  $a_{ij}$ ,  $a_i$  kao i funkcija  $a = a(x, t)$  ograničeni u  $\mathfrak{D}$ . Operator  $A$  nazivamo uniformno paraboličnim u  $\mathfrak{D}$  ako postoji konstanta  $\mu > 0$  tako da za proizvoljno  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$  važi,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \mu |\xi|^2, \quad (2.27)$$

za svako  $(x, t) \in \mathfrak{D}$ . Navedene pretpostavke za  $A$  i  $a$  će važiti tokom čitavog odeljka i možemo, bez umanjavanja opštosti, pretpostaviti  $a_{ij} = a_{ji}$ .

**Definicija 2.2.1.** Neka su date dve tačke u  $\mathfrak{D}$ ,  $(x_1, t_1)$  i  $(x_2, t_2)$ .

*Horizontalna povezanost* Kažemo da je  $(x_1, t_1)$  povezana u  $\mathfrak{D}$  sa  $(x_2, t_2)$  horizontalnim segmentom ako je  $t_1 = t_2$  i tačke mogu biti povezane linijskim segmentom

<sup>6</sup>Glatkost važi i ako oslabimo uslov na funkciju  $\psi(x)$ , što ćemo videti u nastavku rada.

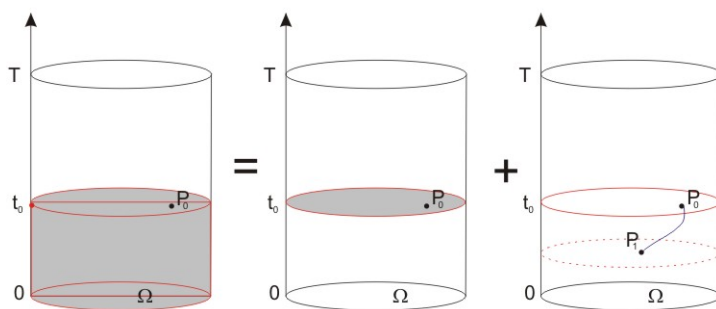
koji leži u  $(t = t_1) \cap \mathfrak{D}$ .

*Vertikalna povezanost (usmerena na gore)* Kažemo da su tačke  $(x_1, t_1)$  i  $(x_2, t_2)$  povezane vertikalnim, usmerenim na gore, segmentom ako  $x_1 = x_2$  i  $t_1 < t_2$  i linijski segment koji povezuje tačke leži u  $\mathfrak{D}$ .

**Teorema 2.2.2.** *Jaki princip maksimuma.*

*Pretpostavimo da je  $A$  uniformno paraboličan operator u  $\mathfrak{D}$ ,  $a \leq 0$  i  $f \geq 0$  (resp.  $\leq 0$ ) u  $\mathfrak{D}$ . Neka je  $\sup_{\mathfrak{D}} u = M \geq 0$  (resp.  $\inf_{\mathfrak{D}} u = M \leq 0$ ) i pretpostavimo da je  $u(\bar{x}, \bar{t}) = M$  za neko  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \mathfrak{D}$ . Tada je  $u(x, t) = M$  u svim tačkama u  $\mathfrak{D}$  koje mogu da se povežu sa  $(\bar{x}, \bar{t})$  lukom koji se sastoji iz horizontalnih i vertikalnih segmenata usmerenih na gore.*

Princip maksimuma potiče od horizontalne i vertikalne propagacije maksimuma, koje ćemo kroz leme koje slede posebno analizirati. Pre samog dokaza dajemo šematski prikaz kako bismo dobili bolju intuiciju o samom principu maksimuma. Pod horizontalnom propagacijom maksimuma podrazumevamo sledeće: ako je maksimum dostignut u tački  $P_0 = (x_0, t_0)$  tada funkcija postaje konstantna na povezanoj komponenti domena (u slučaju valjka na Slici 2.3 u ravni koja preseca valjak na visini  $t = t_0$ ). Pod vertikalnom propagacijom podrazumavamo da: ukoliko je maksimum dostignut u tački  $P_0 = (x_0, t_0)$ , onda za proizvoljno  $t < t_0$  možemo naći tačku  $P_1$  gde je maksimum takođe dostignut. Videćemo da će baš ovi argumenti implicirati propagaciju maksimuma na čitavom domenu (za primer na Slici 2.3 na  $\Omega \times (0, t_0)$ ). Dokaz Teoreme 2.2.2 sledi iz naredne propozi-



Slika 2.3: Princip maksimuma - horizontalna i vertikalna propagacija maksimuma

cije:

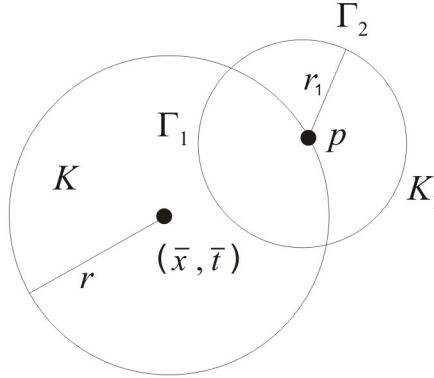
**Propozicija 2.2.3.** *Pretpostavimo da je  $Au \geq 0$  ( $\leq 0$ ),  $a \leq 0$  u  $\mathfrak{D}$  i  $\sup_{\mathfrak{D}} u = M \geq 0$  ( $\inf_{\mathfrak{D}} u = M \leq 0$ ) je dostignut u tački u  $\mathfrak{D}$ . Tada važi zaključak Teoreme 2.2.2.<sup>7</sup>*

Za dokaz Propozicije 2.2.3 biće nam potrebne tri leme. Pretpostavka da je  $Au \geq 0$  važi nadalje.

**Lema 2.2.4.** *Neka je  $K$  lopta, tako da je  $\bar{K} \in \mathfrak{D}$ . Pretpostavimo da je  $u < M$  (gde je  $M = \sup_{\mathfrak{D}} u$ ) u  $K$  i  $u(x_1, t_1) = M$ ,  $(x_1, t_1) \in \partial K$ . Tada je  $t_1$  ili najmanja ili najveća  $t$ -vrednost u  $K$ , odnosno  $(x_1, t_1)$  je ili "vrh" ili "dno" lopte  $K$ .*

*Dokaz.* Neka je  $(\bar{x}, \bar{t})$  centar lopte  $K$ , a  $r$  poluprečnik. Pretpostavićemo da je tačka  $p \equiv (x_1, t_1) \in \partial K$  takva da  $u(x_1, t_1) = M$ , ali  $x_1 \neq \bar{x}$  i doći u kontradikciju. Možemo pretpostaviti da je  $p$  jedina takva tačka (u drugom slučaju možemo zameniti loptu  $K$  manjom čiji rub leži u unutrašnjosti  $K$ , osim u  $p$ .)

Neka je  $K_1$ ,  $K_1 \in \mathfrak{D}$  lopta sa centrom u  $p$  poluprečnika  $r_1 < |x - 1 - \bar{x}|$  (Slika 2.4). Primetimo, da je  $p = (\bar{x}, \bar{t})$  ne bismo mogli pronaći takvo  $r_1$ . Posmatrajmo  $\partial K_1$  iz dva dela, kao na slici,  $\partial K_1 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , gde je  $\Gamma_1 = \partial K_1 \cap \bar{K}$ , a  $\Gamma_2$  je komplement. Kako je  $\Gamma_1$  kompaktan, a  $u < M$  na  $\Gamma_1$  sledi da postoji  $\delta > 0$  tako da je  $u \leq M - \delta$  na  $\Gamma_1$ . Kako je  $M$  supremum od  $u$ ,  $u \leq M$  i na  $\Gamma_2$ .



Slika 2.4: Grafički prikaz

Definisaćemo pomoćnu funkciju:

$$h(x, t) = e^{-\alpha[|x-\bar{x}|^2+(t-\bar{t})^2]} - e^{-\alpha r^2},$$

<sup>7</sup>Jasno je da Teorema 2.2.2 sledi iz Propozicije. Neka važe pretpostavke Teoreme. U tački u kojoj  $u$  dostiže pozitivnu vrednost  $M$  važi  $au \leq 0$ , a kako je  $f \geq 0$ , sledi da mora  $Au \geq 0$ . Tada, ako važi Propozicija, važi i tvrđenje Teoreme.

gde ćemo  $\alpha > 0$  izabrati naknadno. Primetimo,  $h > 0$  u  $K$ ,  $h = 0$  na  $\partial K$  i  $h < 0$  izvan  $\bar{K}$ . Koristeći (2.27) imamo

$$Ah = e^{-\alpha[|x-\bar{x}|^2+(t-\bar{t})^2]} \left\{ (4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) - 2\alpha \sum_{i=1}^n [a_{ii} + a_i(x_i - \bar{x}_i)] + (t - \bar{t})) \right\} =$$

$$e^{-\alpha[|x-\bar{x}|^2+(t-\bar{t})^2]} \left\{ 4\alpha^2 \mu |x - \bar{x}|^2 - 2\alpha \sum_{i=1}^n [a_{ii} + a_i(x_i - \bar{x}_i)] + (t - \bar{t}) \right\}, \quad (2.28)$$

$|x - \bar{x}| \geq |x_1 - \bar{x}| - r_1 > 0$  u  $\bar{K}_1$ , možemo izabrati  $\alpha$  dovoljno veliko da u  $\bar{K}_1$  bude  $Ah > 0$ .

Neka je sada  $v(x, t) = u(x, t) + \varepsilon h(x, t)$ , gde ćemo  $\varepsilon$  izabrati kasnije. Za ovakvo  $v$ ,  $Av > 0$  u  $K_1$ . Kako je  $u \leq M - \delta$  na  $\Gamma_1$ , možemo izabrati  $\varepsilon$  toliko malo da  $v < M$  na  $\Gamma_1$ . Kako je na  $\Gamma_2$ ,  $h < 0$  i  $u \leq M$  tu je  $v < M$ . Imamo  $v < M$  na  $\partial K_1$ . Kako je  $h = 0$  na  $\partial K_1$  i  $u(x_1, t_1) = M$ , to je i  $v(x_1, t_1) = M$ , dakle  $v$  dostiže maksimum na  $\bar{K}_1$  u unutrašnjoj tački  $\tilde{p} = p$ . Odavde sledi da u  $\tilde{p}$  svako  $u_{x_i} = 0$ ,  $u_t = 0$  i  $(D_i D_j u(\tilde{p}))$  je negativno definitna. Kako je  $(a_{ij}(p))$  je pozitivno definitna. Navodimo pomoćnu Lemu iz koje sledi sam kraj dokaza:

**Lema 2.2.5.** *Pretpostavimo da su  $A$  i  $B$  simetrične  $n \times n$  matrice takve da je  $A \geq 0$  i  $B \leq 0$ . Tada je  $\text{tr}(AB) \leq 0$ , gde sa  $\text{tr}(\cdot)$  obeležavamo trag matrice.*

Sada, konačno imamo  $(Av)(\tilde{p}) \leq 0$  što je kontradikcija sa  $Av > 0$  u  $K_1$ .  $\square$

Sledeća lema će nam dati deo zaključka Propozicije 2.2.3, koji se odnosi na horizontalne segmente.

**Lema 2.2.6.** *Neka je  $\mathfrak{D}$  domen u  $x - t$  prostoru i neka važi pretpostavka  $Av \geq 0$  u  $\mathfrak{D}$ . Neka je  $u \leq M$  u  $\mathfrak{D}$  i  $u(x_0, t - 0) < M$  za neko  $(x_0, t_0) \in \mathfrak{D}$ . Ako je  $\Gamma$  komponenta skupa  $\{t = t_0\} \cap \mathfrak{D}$  koja sadrži  $(x_0, t_0)$ , tada je  $u < M$  na  $\Gamma$*

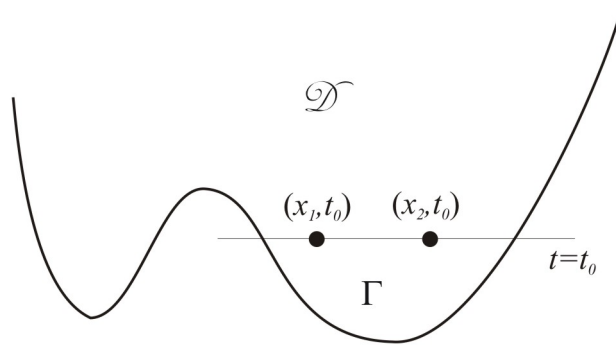
*Dokaz.* Neka je  $u(x_1, t_0) = M$ ,  $(x_1, t_0) \in \Gamma$  (Slika 2.5). Možemo pretpostaviti, zbog neprekidnosti funkcije  $u(x, t)$  da je

$$u(x) < M, \quad |x - x_1| < |x_1 - x_0|. \quad (2.29)$$

Neka je  $L$  linijski segment od  $x_0$  do  $x_1$  i neka je  $L(t_0) = \{(x_0, t_0) : x \in L\}$ . definišimo još i

$$\delta_0 = \min\{|x_0 - x_1|, \text{dist}(L(t_0), \partial \mathfrak{D})\}.$$

Za  $x$  koje zadovoljava  $0 < |x - x_1| < \delta_0$  definišemo  $d(x) = \text{dist}[(x_0, t_0), \mathfrak{D} \cap \{(x, t) : u(x, t) = M\}]$ . Kako je  $u(x_1, t_0) = M$  sledi  $d(x) \leq |x - x_1|$ . Prema prethodnoj Lemi, tačka u  $\mathfrak{D}$  najbliža  $(x, t_0)$  u kojoj je  $u = M$  je oblika  $(x, t)$  pa je



Slika 2.5: Grafički prikaz skupa  $\Gamma$

$d(x) = |t_0 - t_1|$ , tako da je ili  $u(x, t_0 + d(x)) = M$  ili  $u(x, t_0 - d(x)) = M$ . Ako je  $\epsilon > 0$  dato i  $|\eta| = 1$

$$d(x + \epsilon\eta) \leq \sqrt{\epsilon^2 + d(x)^2} < d(x) + \frac{\epsilon^2}{2d(x)}. \quad (2.30)$$

Menjajući  $x$  sa  $x + \epsilon\eta$  i  $\epsilon$  sa  $-\epsilon$  dobijamo

$$d(x) \leq \sqrt{\epsilon^2 + d(x + \epsilon\eta)^2}$$

tako da je, kvadrirajući prethodnu nejednakost

$$d(x + \epsilon\eta) \geq \sqrt{d(x)^2 - \epsilon^2}. \quad (2.31)$$

Pokazaćemo sada da je  $d(x) \equiv 0$ , a time dobiti  $u(x, t_0) \equiv M$  za  $|x - x_1| < \delta_0 \leq |x_0 - x_1|$  i doći u kontradikciju sa (2.29). Dakle, pretpostavimo da je  $d(x) > 0$  i neka je  $0 < \epsilon < d(x)$ . Ako je  $|\eta| = 1$ , podelimo segment između  $(x, t_0)$  do  $(x + \epsilon\eta, t_0)$  na  $k$  jednakih delova. Tada iz (2.30) i (2.31) imamo za  $0 \leq i \leq k - 1$

$$d(x + \frac{i+1}{k}\epsilon\eta) - d(x + \frac{i}{k}\epsilon\eta) \leq \frac{\epsilon^2}{2k^2 d(x + \frac{i}{k}\epsilon\eta)} \leq \frac{\epsilon^2}{2k^2 \sqrt{d(x)^2 - \epsilon^2}}.$$

Sabirajući od  $i = 0$  do  $i = k - 1$  dobijamo

$$d(x + \epsilon\eta) - d(x) \leq \frac{\epsilon^2}{2k \sqrt{d(x)^2 - \epsilon^2}}.$$

Puštajući da  $k \rightarrow \infty$  dobijamo da je  $d(x + \epsilon\eta) \leq d(x)$  za svako  $\epsilon > 0$  i  $|\eta| = 1$ . Dakle,  $d$  je nerastuća duž linije od  $(x, t_0)$  do  $(x + \epsilon\eta, t_0)$ . Kako je  $d(x) \leq |x - x_1|$ , a  $|x - x_1|$  može biti proizvoljno malo za  $x$  blizu  $x_1$  imamo da je  $d(x) \equiv 0$  za  $|x - x_1| \leq \delta_0$ , što je kontradikcija sa (2.29).  $\square$

Poslednja lema odnosi se na vertikalne segmente.

**Lema 2.2.7.** *Pretpostavimo da je  $Au \geq 0$  u  $\mathfrak{D}$  i da je  $u < M$  na  $\mathfrak{D} \cap \{t_0 < t < t_1\}$  za neko  $t_0 < t_1$ . Tada je  $u < M$  na  $\mathfrak{D} \cap \{t = t_1\}$ .*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je  $u(x_1, t_1) = M$  za neko  $(x_1, t_1) \in \mathfrak{D}$ . Neka je  $K$  lopta poluprečnika  $r$  sa centrom u  $(x_1, t_1)$  koja se nalazi u oblasti sa  $t > t_0$ . Definisaćemo pomoćnu funkciju

$$h(x, t) = e^{-|x-x_1|^2 - \alpha|t-t_1|} - 1, \quad \alpha > 0.$$

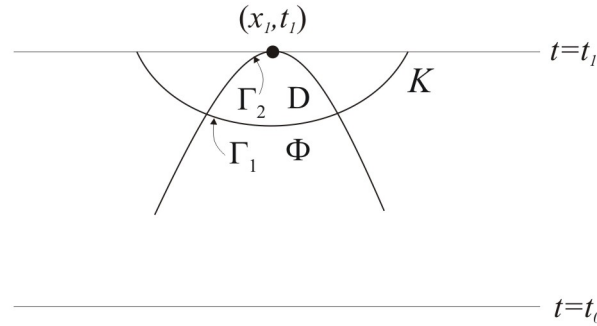
Tada je

$$Av \geq e^{-|x-x_1|^2 - \alpha|t-t_1|} \{4\mu|x-x_1|^2 - 2 \sum [a_{ii} + a_i(x_i - x_{1i})] + \alpha\}.$$

Možemo izabrati dovoljno veliko  $\alpha$  tako da  $Av > 0$  u  $K$  za  $t \geq t_1$ . Paraboloid dat jednačinom

$$|x - x_1|^2 + \alpha(t - t_1) = 0$$

je tangentan na hiperravan  $t = t_1$  u tački  $(x_1, t_1)$  (Slika 2.6).



Slika 2.6: Grafički prikaz paraboloida i hiperravni

Neka je  $\Phi$  otvorena oblast definisana ovim paraboloidom i neka su  $\Gamma_1 = \partial K \cap \Phi$  i  $\Gamma_2 = \partial \Phi \cap K$ . Neka je  $D$  otvorena oblast određena sa  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$ . Kako je  $u < M$  na kompaktnom skupu  $\Gamma_1$ , možemo naći  $\delta$  tako da  $u \leq M - \delta$  na  $\Gamma_1$ . Posmatrajmo sada  $v(x, t) = u(x, t) + \varepsilon h(x, t)$ , gde je  $\varepsilon > 0$  dovoljno malo da važi:

(i)  $Av > 0$  u  $D$

(ii)  $v \leq M$  na  $\Gamma_2$  (Ovaj uslov možemo postići jer je  $h < 0$  na  $\Gamma_2$ ).

Kako je  $v < M$  na  $\Gamma_1$ , imamo  $v \leq M$  na  $\partial D$ .  $v$  ne može dostići maksimum na  $\bar{D}$  u nekoj tački iz  $D$ , zbog uslova  $i$  (kao na kraju dokaza prethodne leme, kada bi  $v$  dostizalo maksimum u unutrašnjoj tački tada bi  $Av$  morala biti negativno definitna). Dakle,  $v$  dostiže maksimum na  $\partial D$ . Stoga,  $M$  je maksimum od  $v$  na oblasti  $\bar{D}$  i dostignut je u tački  $p = (x_1, t_1)$ . Odavde sledi da je  $v_t \geq 0$  u tački  $p$ . Primetimo da je

$$\frac{\partial h}{\partial t} = e^{-|x-x_1|^2} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{e^{-\alpha|t+k-t_1|} - e^{-\alpha|t-t_1|}}{k} = e^{-|x-x_1|^2} \lim_{k \rightarrow 0} (-\alpha) \frac{e^{-\alpha k} - 1}{-\alpha k}.$$

U tački  $p$  je  $\frac{\partial h}{\partial t} = -\alpha < 0$ , odakle je  $u_t > 0$  u  $p$ . Kako je maksimum od  $u$  na skupu  $\mathfrak{D} \cap t = t_1$  dostignut u unutrašnjoj tački  $p$ , tada je  $\nabla_x u(p) = 0$  i  $D_i D_j u(p)$  je negativno definitna. Odavde sledi da je  $Au(p) < 0$  što daje kontradikciju sa pretpostavkom na početku teoreme.  $\square$

Sada imamo sve potrebno za dokaz Propozicije 2.2.3.

Neka je  $p = (\bar{x}, \bar{t})$  tačka u  $\mathfrak{D}$  u kojoj je  $u(p) = M$ . Neka je  $q$  tačka koja se može povezati sa  $p$  u  $\mathfrak{D}$  lukom koji se sastoji iz konačnog broja vertikalnih (usmerenih na gore) i horizontalnih segmenata. Od  $p$  do  $q$  imamo tačke  $Q_0 = p, Q_1, Q_2, \dots, Q_k = q$  u  $\mathfrak{D}$ , gde je  $Q_i$  povezano sa  $Q_{i+1}$  horizontalnim ili vertikalnim segmentom sadržanim u  $\mathfrak{D}$ . Tada na osnovu Lema za horizontalne i vertikalne segmente važi  $u(q) = M$ .

Ponašanje rešenja na granici domena ( $\partial \mathfrak{D}$ ) može se posmatrati i kroz znak izvoda u pravcu od  $u$  na  $\partial \mathfrak{D}$ .

**Definicija 2.2.8.** Neka je  $\mathbf{n}$  jedinični vektor spoljašnje normale u tački  $p \in \Omega$ , gde je  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Vektor  $\nu = \mathbf{n} \cdot \nu$  nazivamo *usmeren ka spoljašnjosti* iz  $\Omega$  u  $p$  ako je  $\mathbf{n} \cdot \nu > 0$ . Za izvod od  $u$  na granici, u spoljašnjem pravcu  $\nu$  koristimo oznaku  $du/d\nu$ .

Jasno, u tački u kojoj  $u$  dostiže maksimum na granici  $du/d\nu \geq 0$ . Pokazaćemo da važi i jači rezultat, tj.  $du/d\nu > 0$  u tački maksimuma.

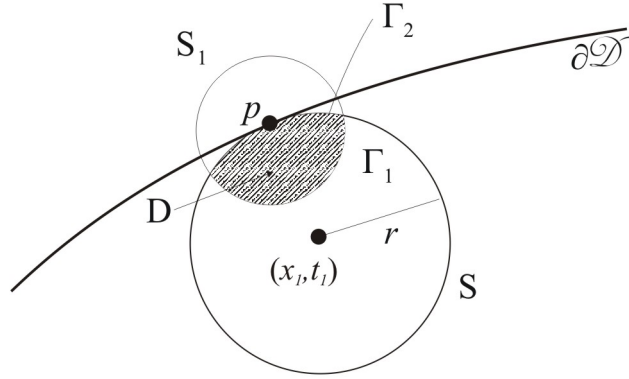
**Teorema 2.2.9.** *Pretpostavimo da je  $u$  rešenje (2.25) u  $\mathfrak{D}$  (gde je domen  $\mathfrak{D}$  dat kao na početku ovog odeljka i  $A$  uniformno paraboličan operator).  $i \leq 0$ . Pretpostavimo  $f \geq 0$  i  $\max_{\bar{\mathfrak{D}}} u = M$  je dostignut u tački  $p \in \mathfrak{D}$ . Pretpostavljamo i da je  $\partial D$  dovoljno regularan (dovoljno puta diferencijabilna) u tački  $p$ , tako da se može konstruisati lopta  $S$  kroz  $p$ , tako da  $\text{int}(S) \subset \mathfrak{D}$  i  $u < M$  u  $\text{int}(S)$ . Važi i pretpostavka da radijalni pravac od centra od  $S$  do  $p$  nije paralelan  $t$ -osi. Tada je  $du(p)/d\nu > 0$  za svaki spoljašnji pravac  $\nu$ . (Slično važi u slučaju  $f \leq 0$ ,  $M = \min_{\bar{\mathfrak{D}}} u$ , gde zaključujemo  $du(p)/d\nu < 0$ .)*

Dokaz, kao i za Teoremu o principu maksimuma sledi iz naredne propozicije.

**Propozicija 2.2.10.** *Pretpostavimo da je  $Au \geq 0$ ,  $M = \max(u)$  na  $\bar{\mathcal{D}}$  je dostignut u  $p \in \partial\mathcal{D}$ . Neka je lopta  $S$  konstruisana kroz  $p$  tako da zadovoljava uslove Teoreme 2.2.9. Tada je  $du(p)/d\nu > 0$  za svaki spoljašnji pravac  $\nu$ .*

*Dokaz.* Konstruišimo loptu  $S$  radijusa  $r$  i sa centrom u  $(x_1, t_1)$  koja je tangentna na  $\partial\mathcal{D}$  u  $p$ . Konstruišimo zatim loptu  $S_1$  sa centrom u tački  $p$  poluprečnika  $\rho < |x_1 - x_0|$  (videti Sliku 2.7). Neka je  $\Gamma_1 = \partial S_1 \cap \bar{S}$  i  $\Gamma_2 = \partial S \cap S_1$ . Sa  $D$  ćemo označiti oblast ograničenu sa  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$ . Kako je  $u < M$  na  $\Gamma_1$  (kompaktan skup), postoji  $\delta > 0$  takvo da je

- (i)  $u \leq M - \delta$  na  $\Gamma_1$ . Takođe znamo,
- (ii)  $u < M$  na  $\Gamma_2 \setminus \{p\}$  i
- (iii)  $u(p) = M$ .



Slika 2.7: Konstrukcija lopti  $S$  i  $S_1$

Neka je  $h(x, t)$  pomoćna funkcija definisana sa

$$h(x, t) = e^{-\alpha[|x-x_1|^2 - \alpha(t-t_1)^2]} - e^{-\alpha r^2}, \quad \alpha > 0.$$

$h = 0$  na  $\partial S$  i možemo izabrati  $\alpha$  dovoljno veliko da  $Ah > 0$  na  $\bar{D}$ . Neka je  $v = u + \varepsilon h$ ,  $\varepsilon > 0$ . Tada je  $Av = Au + \varepsilon Ah > 0$  u  $D$ . Pozivajući se na (i), možemo izabrati  $\varepsilon$  dovoljno malo da  $v < M$  na  $\Gamma_1$ . Iz (ii) i činjenice da je  $h = 0$  na  $\partial S$  imamo da je  $v < M$  na  $\Gamma_2 \setminus \{p\}$  i  $v(p) = M$ . Na osnovu Teoreme 2.2.2 zaključujemo da je  $p$  jedina tačka u kojoj  $u$  dostiže maksimum u  $\bar{D}$ . Imamo  $dv/d\nu = du/d\nu + \varepsilon dh/d\nu \geq 0$ .  $\frac{dh}{d\nu}|_p = -2\nu \cdot n \alpha r e^{-\alpha r^2} < 0$ , gde je  $n$  spoljašnja normala u  $p$ . Konačno, dobijamo  $du(p)/d\nu > 0$ .  $\square$

**Posledica 2.2.11.** *Teoreme 2.2.2 i 2.2.9 važe bez uslova  $a \leq 0$  ako je  $M = 0$ .*

*Dokaz.* Neka je  $w(x, t) = u(x, t)e^{-kt}$ . Tada važi

$$0 \leq (A + a)u = A(we^{kt}) + a(we^{kt}) = e^{kt}(A + a - k)w$$

Kako je  $a$  ograničeno odgore, možemo izabrati  $k$  dovoljno veliko da  $a - k \leq 0$ . Sada hipoteze obe Teoreme važe za  $w$ , pa ako je  $M = 0$  važe i za  $u$ .  $\square$

Navedene teoreme date su u [21].

## Poglavlje 3

# Stefanov problem

Danas se velika klasa problema "pomeranja granice" ili "slobodne granice" svrstavaju u probleme Stefanovog tipa [27]. Originalni Stefanov<sup>1</sup> problem odnosi se na formiranje leda u polarnim morima. Stefan je svoje teorijski dobijene rezultate poredio sa eksperimentalno dobijenim. Zainteresovanost za probleme Stefanovog tipa rasla je veoma brzo. U [27] se može naći tabela sa prosečnim brojem publikacija u toku godine na ovu temu i detaljnija priča o Stefanovom životu i radu na problemima pomeranja granice. Ovo poglavlje počinjemo uvođenjem terminologije koja se koristi za opis procesa faznih prelaza. Kao što ćemo dalje videti, Stefanov problem jeste prototip matematičkog modela za sve procese ovog tipa. U radu ćemo se posebno koncentrisati na jednu vrstu faznih prelaza, prelaz iz čvrstog u tečno stanje, odnosno proces topljenja. Literatura koja pokriva ovo poglavlje je [1],[15] i [11].

### 3.1 Formulacija problema sa stanovišta fizike

Oba stanja (faze) materije, i čvrsto i tečno okarakterisana su postojanjem kohezivnih sila koje održavaju atome u blizini. U čvrstim telima atomi osciluju oko fiksiranog položaja, dok u tečnostima oni mogu preći s jednog mesta na drugo (odnosno zameniti mesta).

Energija ovih oscilacija naziva se **toplotna energija**. **Toplota** predstavlja oblik energije koja se razmenjuje između dva sistema (kada postoji razlika u temperaturi datih sistema), a najčešće se ogleda u promeni temperature sistema (ali i nekih drugih karakteristika, npr. strukture). Jasno, atomi u tečnostima imaju veću toplotnu energiju (jer su slobodniji u kretanju) od onih u čvrstom telu, pa stoga da bi proces topljenja čvrstog tela započeo, telu se mora dovesti određena količina

---

<sup>1</sup>Jožef Stefan (1835.-1893.), slovenački matematičar i fizičar

toplote koja će uspeti da savlada privlačne sile među atomima. Ovu energiju nazivamo **latentna toplota** (energija fuzije) koja predstavlja razliku u toplotnoj energiji između čvrstog i tečnog stanja, ako su sve druge osobine jednake.

Postoje tri moguća načina provođenja toplote: **kondukcija, konvekcija i radijacija**. U ovom radu najviše ćemo obratiti pažnju na kondukciju i konvekciju. Promena faze dešava se na određenoj temperaturi  $T_m$ , na kojoj se stabilnost određene faze (u našem slučaju čvrste) narušava. Temperatura  $T_m$  naziva se **temperatura topljenja**, odnosno temperatura promene faze. Ona zavisi od pritiska, a na konstantnom pritisku može biti funkcija nekih drugih karakteristika materijala (npr. temperatura smrzavanja vode na atmosferskom pritisku iznosi  $0^\circ\text{C}$ ). Sloj u kome istovremeno postoje obe faze i čvrsta i tečna naziva se **granična (međufazna) površ između slojeva** (interfejs). Debljina ovog sloja može da zavisi od različitih osobina materijala, ali je za većinu "čistih" materijala ovaj sloj prilikom procesa topljenja (smrzavanja) uglavnom zanemarljive debljine. Takođe, prilikom procesa promene faze može doći i do promene gustine materijala, što dodatno komplikuje proces.

Matematički model procesa faznih prelaza ima za cilj da predvidi (pa čak i kontroliše) razvoj temperature u materijalu tokom vremena, kao i da odredi položaj međufaznog sloja i njegovu debljinu u određenom trenutku. Stefanov problem predstavlja matematički model procesa faznog prelaza. Karakteristika ovakvih problema jeste nepoznata temperatura i položaj međufaznog sloja tokom vremena. Stoga, ovaj problem pripada klasi problema poznatih pod nazivom "problemi pomeranja granice" ili "problemi slobodne granice". Da bi model bio realan, moramo uzeti u obzir fizičke pretpostavke.

### Fizičke pretpostavke i proces provođenja toplote

Posmatrajmo materijal  $M$  na kome će se vršiti prelaz iz čvrstog u tečno stanje. Neka je

- $\rho$  - konstantna gustina materijala ( $\rho_L = \rho_S$ )
- $L$  - latentna toplota
- $T_m$  - temperatura topljenja
- specifične toplote  $c_L$  i  $c_S$  za tečno i čvrsto stanje, respektivno.
- toplotna provodljivost materijala  $k_L$  i  $k_S$  za tečno i čvrsto stanje, respektivno.

U cilju pojednostavljivanja modela pretpostavljamo da je gustina materijala konstanta, jednaka u obe faze, konstantna latentna toplota kao i temperatura topljenja. Takođe, specifične toplote i toplotna provodljivost imaju konstantne vrednosti,  $c_L \neq c_S$  i  $k_L \neq k_S$ . Toplota se provodi kondukcijom kroz obe faze, tako

da je granica između faza zanemarljive širine na temperaturi topljenja  $T_m$  gde je apsorbirana latentna toplota. Ono što možemo zahtevati prilikom formiranja matematičkog modela je da sve funkcije koje opisuju fizičke osobine budu glatke koliko god je to potrebno u jednačinama u kojima se pojavljuju. Međutim, sam matematički model sa takvim uslovima na kraju mora da da i tako glatka rešenja, što ne možemo uvek da postignemo. Zato će se kasnije formirati "slaba formulacija" Stefanovog problema.

### Karakteristike procesa provođenja toplote kondukcijom

Veličine koje služe za opis provođenja toplote kondukcijom kroz materijal  $M$  su: **temperatura, entalpija i toplotni protok (fluks)**. Temperatura se najčešće meri u stepenima Celzijusa ( $^{\circ}\text{C}$ ), Kelvinima (K). **Entalpija** je funkcija stanja termodinamičkog sistema, koja predstavlja zbir unutrašnje energije i proizvoda pritiska i zapremine sistema. Sa  $e$  označavamo entalpiju po jediničnoj masi  $[\frac{\text{J}}{\text{kg}}]$ , a sa  $E$  entalpiju po jedinici zapremine  $[\frac{\text{J}}{\text{m}^3}]$ . Pri konstantnom pritisku, gustini, i brzini čija je vrednost  $|\vec{v}| = 0$ , entalpija predstavlja unutrašnju, odnosno ukupnu energiju sistema<sup>2</sup>. Apsorbirana toplota vezana za povećanje temperature data je sledećom relacijom

$$de = cdT.$$

Vrednost

$$c(T) = \frac{de}{dT}$$

naziva se **specifična toplota**  $[\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}]$  i predstavlja toplotu potrebnu telu mase 1kg za promenu temperature od  $1^{\circ}\text{C}$  pri konstantnom pritisku. Specifična toplota uvek ima pozitivnu vrednost, varira sa porastom temperature, a njene vrednosti su obično veće u tečnom nego u čvrstom stanju. Za led i vodu njene vrednosti su

$$c = \begin{cases} 2.0927 \text{ kJ/kg}^{\circ}\text{C}, & T \leq 0^{\circ}\text{C} \text{ (led)} \\ 4.1868 \text{ kJ/kg}^{\circ}\text{C}, & T \geq 0^{\circ}\text{C} \text{ (voda)} \end{cases} \quad (3.1)$$

Za razliku od latentne toplote potrebne za fazni prelaz, koji se odvija pri konstantnoj temperaturi  $T_m$ , količina toplote po jedinici mase koju telo prima (ili predaje) tokom procesa u kom se menja i njegova temperatura, određena je sledećom relacijom

$$\int_{T_m}^T c(\bar{T}) d\bar{T}.$$

<sup>2</sup>Ukupna (totalna) energija predstavlja sumu *unutrašnje energije*  $u$ , *kinetičke energije*  $\frac{1}{2}|\vec{v}|^2$  i *potencijalne energije*. Unutrašnja energija uključuje toplotu i izvršen rad, a njena veza sa entalpijom data je relacijom  $u = e - \frac{P}{\rho}$

Ako je materijal u tečnom stanju,  $c = c_L$  i  $T > T_m$ , a ako je u čvrstom stanju  $c = c_S$  i  $T < T_m$ . Na temperaturi  $T = T_m$  materijal može biti i u čvrstom i u tečnom stanju. Tečno stanje sadrži latentnu toplotu u ovom slučaju, dok čvrsto ne. Čvrsto odnosno tečno stanje materije možemo odrediti i na osnovu vrednosti entalpije na sledeći način:

$$e = \begin{cases} e^L(T) := L + \int_{T_m}^T c_L(\bar{T}) d\bar{T}, & T > T_m (\text{tečno}) \\ e^S(T) := \int_{T_m}^T c_S(\bar{T}) d\bar{T}, & T < T_m (\text{čvrsto}). \end{cases} \quad (3.2)$$

Sada dve faze karakterišemo na sledeći način:

$$\begin{aligned} \text{čvrsto} &\Leftrightarrow T < T_m \Leftrightarrow e < 0 \\ \text{tečno} &\Leftrightarrow T > T_m \Leftrightarrow e > L \end{aligned} \quad (3.3)$$

Na temperaturi  $T = T_m$  postoji **mešovita zona**, gde je  $0 < e < L$ . Zanimljiva debljina ovog sloja zahteva da

$$\llbracket e \rrbracket_{\text{čvrsto}}^{\text{tečno}} = e^L(T_m) - e^S(T_m) = L.$$

### Karakteristike provođenja toplote konvekcijom

Provođenje toplote koje se odvija posredstvom kretanja fluida naziva se konvekcija. Prirodna konvekcija odvija se zbog razlika u gustini fluida koje postoje kao rezultat promene temperature fluida. Prinudna konvekcija odvija se posredstvom spoljasnih uticaja na kretanje vazduha, na primer vetar. Količina toplote preneti konvekcijom data je jednačinom:

$$q = -hA[T_{\text{površina}} - T_{\infty}],$$

gde je  $h$  koeficijent konvekcije,  $A$  veličina površine koja se zagreva ili hladi, i  $T_{\text{površina}}$  i  $T_{\infty}$  temperature površine i okoline. Koeficijent konvekcije meri koliko efikasno fluid provodi toplotu ka i od površine. On zavisi od gustine, brzine i viskoznosti fluida, i generalno, fluidi veće gustine i brzine imaju veće  $h$ . Za vruće horizontalne ploče okružene vazduhom važi da je prirodna konvekcija više izražena (ima veće  $h$ ) na gornjoj strani ploče, dok je kod hladnih horizontalnih ploča više izražena sa donje strane ploče.

### Toplotni fluks i Furijeov zakon

Količina toplote koja prođe kroz jediničnu površinu u jedinici vremena naziva se

**toplotni protok (fluks)**  $[\frac{\text{kJ}}{\text{sm}^2}]$ , koji označavamo sa  $\vec{q}$ . On ima pravac nejveće promene temperature i dat **Furijeovim zakonom**

$$\vec{q} = -k\nabla T,$$

gde je  $k$  toplotna provodljivost materijala. Ako je kondukcija izotropna,  $k$  se ne menja sa temperaturom i predstavlja konstantu  $k > 0$ , koja je za čvrsta stanja veća nego za tečna.

**Stopa protoka toplote** kroz elementarnu površ površine  $dA$  sa jediničnom normalom  $\vec{n}$  je

$$(\vec{q} \cdot \vec{n})dA = -k\nabla T \cdot \vec{n}dA. \quad (3.4)$$

Fundamentalni zakon za proces provođenja toplote je **Zakon održanja energije**

$$(\rho e)_t + \text{div} \vec{q} = F \quad (3.5)$$

gde je  $F$  toplotni izvor. Odavde, koristeći 3.4 i 3.2 dobijamo **jednačinu provođenja toplote**

$$\rho c T_t = \text{div}(k\nabla T) + F.$$

Za konstantne  $k$ ,  $\rho$  i  $c$  definišemo **koeficijent difuzije**  $\alpha = \frac{k}{\rho c}$  i tada toplotna jednačina, bez toplotnog izvora, dobija oblik

$$T_t = \alpha \Delta T.$$

Kako smo već imali prilike da vidimo u prvom poglavlju, dobro postavljen problem zahteva jednačinu definisanu na određenom domenu, date početne i granične uslove. Za Stefanov problem, imamo i dodatan uslov na granici između dve faze. Doći ćemo do ovog uslova u narednih nekoliko koraka posmatrajući sledeći problem:

Posmatrajmo blok leda koji zauzima interval  $a \leq x < \infty$ . Pretpostavimo da je temperatura leda svuda jednaka  $0^\circ\text{C}$  i da se u tački  $a$  temperatura održava na  $T^\circ\text{C}$ ,  $T > 0$ . Tada led počinje da se topi i za svako vreme  $t$  voda će zauzeti interval  $a \leq x < s(t)$ . Obeležimo sa  $u$  temperaturu vode. Tada imamo:

$$\begin{aligned} \alpha^2 u_{xx} - u_t &= 0, \quad \text{za } a < x < s(t), t > 0, \alpha \neq 0 = \text{const.} \\ u(a, t) &= T, \quad \text{za } t > 0 \\ u(s(t), t) &= 0, \quad \text{za } t > 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dodatni uslov na granici  $x = s(t)$  dobijamo na osnovu sledećeg:

Količina toplote potrebna da se otopi deo leda od  $a = s(t_0)$  do  $s(t_1)$  jeste  $L \cdot$

$(s(t_1) - s(t_0))$ , gde je  $L$  latentna toplota. S druge strane imamo Furijeov zakon, prema kome je količina toplote koja protekne kroz  $s(t_1)$  jednaka

$$\int_0^t -ku_x(s(\tau), \tau) d\tau,$$

gde je  $k = \text{const.} > 0$ . Prema zakonu održanja energije važi jednakost

$$L \cdot (s(t_1) - s(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} -ku_x(s(\tau), \tau) d\tau.$$

Deleći jednakost sa  $t_1 - t_0$  i puštajući da  $t_1 \rightarrow t_0$  dobijamo

$$L \frac{ds(t)}{dt} = -ku_x(s(t), t), \quad k > 0,$$

gde smo  $t_0$  zamenili nekim proizvoljnim vremenskim trenutkom  $t$ . Jednačinom

$$L \frac{ds(t)}{dt} = -ku_x(s(t), t), \quad k > 0 \quad (3.7)$$

dat je **Stefanov uslov**. Problem (3.6), (3.7) naziva se *jednofazni Stefanov problem*. Ako temperatura leda nije svuda  $0^\circ\text{C}$ , posmatrajmo prethodni problem zajedno sa

$$\begin{aligned} \beta^2 v_{xx} - v_t &= 0, \quad \text{za } s(t) < x < \infty, \quad t > 0, \quad \beta \neq 0 = \text{const.} \\ v(x, 0) &= \psi(x), \quad \text{za } s(t) < x < \infty, \quad \psi(x) \leq 0 \\ v(s(t), t) &= 0, \quad \text{za } t > 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

gde je  $v$  temperatura leda. Uslov (3.7) sada postaje

$$L \frac{ds(t)}{dt} = -ku_x(s(t), t) + k_0 v_x(s(t), t), \quad \text{za } t > 0, \quad (3.9)$$

gde je  $k_0 = \text{const.} > 0$ . Problem (3.6), (3.8), (3.9) naziva se *dvofazni Stefanov problem*.

U narednom odeljku posmatraćemo Stefanov problem u jednoj prostornoj dimenziji i dati dokaze teorema za postojanje i jedinstvenost rešenja.

## 3.2 Jaka (klasična) formulacija Stefanovog problema

Posmatrajmo (jednofazni) Stefanov problem zapisan u bezdimenzijskom obliku: Treba pronaći  $s(t) > 0$  i  $u(x, t)$  tako da bude zadovoljeno

$$u_{xx} = u_t \quad 0 < x < s(t), t > 0 \quad (3.10)$$

$$u(0, t) = f(t) \quad f(t) \geq 0 \quad t > 0 \quad (3.11)$$

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad \phi(x) \geq 0, \quad 0 < x \leq b, \quad \phi(b) = 0, b > 0 \quad (3.12)$$

$$u(s(t), t) = 0 \quad t > 0 \quad s(0) = b \quad (3.13)$$

$$u_x(s(t), t) = -\frac{ds(t)}{dt} \quad t > 0. \quad (3.14)$$

$x = s(t)$  je slobodna granica, koju treba naći kao rešenje zajedno sa bezdimenzijskom temperaturom  $u(x, t)$ .

**Definicija 3.2.1.** Kažemo da je  $u(x, t), s(t)$  rešenje problema (3.10)-(3.14) za sve  $t < \sigma$ , ( $0 < \sigma \leq \infty$ ) ako važi

- (i)  $u_{xx}$  i  $u_t$  su neprekidne na  $0 < x < s(t), 0 < t < \sigma$
- (ii)  $u$  i  $u_x$  su neprekidne na  $0 \leq x \leq s(t), 0 < t < \sigma$
- (iii)  $u(x, t)$  je neprekidno na  $t = 0, 0 < x \leq b$  i  
 $0 \leq \liminf u(x, t) \leq \limsup u(x, t) < \infty$  (ako je  $\phi(0) = f(0)$ , onda  $u$  mora biti neprekidno i u  $x = t = 0$ )
- (iv)  $s(t)$  je neprekidno diferencijabilna na  $0 \leq t < \sigma$
- (v) (3.10) - (3.14) su zadovoljene.

Postojanje i jedinstvenost rešenja dokazaćemo svođenjem prethodnog problema na njemu ekvivalentan - problem rešavanja nelinearne integralne jednačine Volterinog tipa za  $u_x(s(t), t)$ .

**Teorema 3.2.2.** *Pretpostavimo da su  $f(t)$  ( $0 \leq t < \infty$ ) i  $\phi(x)$  ( $0 \leq x \leq b$ ) neprekidno diferencijabilne funkcije. Tada postoji jedinstveno rešenje  $u(x, t), s(t)$  sistema jednačina (3.10) - (3.14) za sve  $t < \infty$ . Šta više, funkcija  $x = s(t)$  je monotono neopadajuća.*

Dokaz teoreme sprovede se u nekoliko faza [11]. Pre samog dokaza dajemo korisnu Lemu (koja predstavlja sličnu relaciju koju možemo videti u jednačinama single i double-layer potencijala [10]).

**Lema 3.2.3.** Neka je  $\rho(t)$  ( $0 \leq t \leq \sigma$ ) neprekidna funkcija i neka  $s(t)$  ( $0 \leq t \leq \sigma$ ) zadovoljava Lipšicov uslov. Tada za sve  $0 < t \leq \sigma$  važi:

$$\lim_{x \rightarrow s(t)-0} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \rho(\tau) K(x, t, s(\tau), \tau) d\tau = \frac{1}{2} \rho(t) + \int_0^t \rho(\tau) \left[ \frac{\partial}{\partial x} K(x, t, s(\tau), \tau) \right]_{x=s(t)} d\tau \quad (3.15)$$

gde je  $K(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{2\pi^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}$ .

*Dokaz.* Prvo, pokažimo da je  $s(t)$  monotono neopadajuća. Koristićemo princip maksimuma: kako se  $\min$  i  $\max$  dostižu na granici domena, a prema (3.11) i (3.13) sledi da je  $u(x, t) \geq 0$  na  $0 < x < s(t)$  i ( $0 \leq t \leq \sigma$ ).

Kako je  $u = 0$  za  $x = s(t)$  sledi da je  $u_x \leq 0$  (jer je postignut minimum). Prema (3.14) za  $x = s(t)$  je  $0 \geq u_x(s(t), t) = -\frac{ds(t)}{dt} \Rightarrow \frac{ds(t)}{dt} \geq 0$  odnosno  $s(t)$  je monotono neopadajuća.

Ukoliko  $\phi(x) \not\equiv 0$  ili  $f(t) \not\equiv 0$  na svakom intervalu  $0 \leq t \leq \xi$ , ( $\xi > 0$ ),  $s(t)$  je strogo rastuća.

Zaista, ako pretpostavimo suprotno, da pod datim uslovima za  $\phi$  i  $f$  postoje  $t'$  i  $t''$ ,  $t' < t''$  tako da  $s(t') = s(t'')$ . Tada, kako je  $s(t)$  monotono neopadajuća,  $s(t) = s(t')$  za sve  $t' < t < t''$ , pa prema (3.14),  $u_x = 0$  u  $x = s(t)$ ,  $t' < t < t''$ . Prema jakom principu maksimuma i pretpostavkama za  $\phi$  i  $f$  sledi  $u(x, t) > 0$ ,  $0 < x < s(t)$ ,  $0 < t < \sigma$ . Kako je minimum od  $u$  postignut u  $u(s(t), t)$  i jednak je nuli, na osnovu teoreme o znaku normale (kao posledice principa maksimuma) imamo  $u_x < 0$  u  $x = s(t)$ ,  $t' < t < t''$ , što je u kontradikciji sa prethodnim zaključkom  $u_x = 0$ .

Sledeći korak je formiranje integralne jednačine.

Neka je sa

$$K(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{2\pi^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}$$

dato jezgro toplotne jednačine i neka je

$$G(x, t, \xi, \tau) = K(x, t, \xi, \tau) - K(-x, t, \xi, \tau) \quad (3.16)$$

Grinova funkcija (za Dirihleov granični problem) za poluravan  $x > 0$ . Pretpostavimo da  $u, s$  formira rešenje za (3.10)-(3.14). Integraleći Grinov identitet<sup>3</sup>

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( G \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \tau} (Gu) = 0$$

<sup>3</sup>Grinov identitet za parabolični operator  $L$  i njemu adjungovan  $L^*$  dat je sa  $vLu - uL^*v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \sum_{j=1}^n (va_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} - ua_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} - uv \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}) + b_i uv \right] - \frac{\partial}{\partial t} (uv)$ .

na domenu  $0 < x < s(\tau)$ ,  $0 < \varepsilon < \tau < t - \varepsilon$ , i puštajući da  $\varepsilon \rightarrow 0$  dobijamo

$$\int_0^t \int_0^{s(\tau)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( G \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) d\xi d\tau = \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} (Gu)$$

Obeležimo sa  $I$  levu, a sa  $II$  desnu stranu gornje jednakosti. Tada je

$$I = \int_0^t [G(x, t, s(\tau), \tau) u_\xi(s(\tau), \tau) + f(\tau) G_\xi(x, t, 0, \tau)] d\tau, \quad (3.17)$$

gde smo koristili da je  $u(s(\tau), \tau) = 0$  i  $G(x, t, 0, \tau) = 0$ . Integral na desnoj strani je prema Lajbnicovom pravilu

$$\begin{aligned} II &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \int_0^{s(\tau)} G u d\xi \right] d\tau = \\ &= \int_0^{s(t)} G(x, t, \xi, t) u(\xi, t) d\xi - \int_0^{s(0)=b} G(x, t, \xi, 0) u(\xi, 0) d\xi = \\ &= u(x, t) - \int_0^b G(x, t, \xi, 0) \phi(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (3.18)$$

gde smo koristili da je  $G(x, t, \xi, t) = \delta(x - \xi)$  i  $u(\xi, 0) = \phi(\xi)$ .

Iz  $I = II$  dobijamo

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t u_\xi(s(\tau), \tau) G(x, t, s(\tau), \tau) d\tau + \int_0^t f(\tau) G_\xi(x, t, 0, \tau) d\tau \\ &+ \int_0^b \phi(\xi) G(x, t, \xi, 0) d\xi = M_1 + M_2 + M_3 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Definišimo

$$v(t) = u_x(s(t), t). \quad (3.20)$$

Diferencirajmo nakon toga obe strane jednačine (3.19) i pustimo da  $x \rightarrow s(t) - 0$ .

Prema Lemi 3.2.3 imamo

$$\lim_{x \rightarrow s(t)-0} \frac{\partial M_1}{\partial x} = \frac{1}{2} v(t) + \int_0^t v(\tau) G_x(s(t), t, s(\tau), \tau) d\tau.$$

Za izračunavanje  $\frac{\partial M_2}{\partial x}$  i  $\frac{\partial M_3}{\partial x}$  uvodimo Nojmanovu funkciju za poluravan

$$N(x, t, \xi, \tau) = K(x, t, \xi, \tau) + K(-x, t, \xi, \tau) \quad (3.21)$$

(jezgro toplotne jednačine sa Nojmanovim graničnim uslovom). Direktnim izračunavanjem može se lako pokazati da važi  $N_x = -G_\xi$  i  $G_{\xi x} = N_\tau$ . Takođe, Nojmanova funkcija je na granici domena 0, pa primenom parcijalne integracije dobijamo

$$\frac{\partial M_2}{\partial x} = -f(0)N(x, t, 0, 0) - \int_0^t f'(\tau)N(x, t, 0, \tau) d\tau.$$

Slično

$$\frac{\partial M_3}{\partial x} = \phi(0)N(x, t, 0, 0) + \int_0^b \phi'(\xi)N(x, t, \xi, 0) d\xi,$$

gde smo koristili da je  $G_x = -N_\xi$ . Konačno dobijamo

$$\begin{aligned} v(t) = & 2[\phi(0) - f(0)]N(s(t), t, 0, 0) + 2 \int_0^b \phi'(\xi)N(s(t), t, \xi, 0) d\xi \\ & - 2 \int_0^t f'(\tau)N(s(t), t, 0, \tau) d\tau + 2 \int_0^t v(\tau)G_x(s(t), t, s(\tau), \tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.22)$$

Iz (3.14) i (3.22) dobijamo da je

$$s(t) = b - \int_0^t v(\tau) d\tau \quad (3.23)$$

Ovim smo pokazali da, ukoliko je  $u, s$  rešenje problema (3.10)-(3.14) za sve  $t < \sigma$ , tada funkcija  $v(t)$  definisana sa (3.22) zadovoljava integralnu jednačinu Volterinog tipa. Kako je  $v(t)$  neprekidna na  $0 \leq t < \sigma$  integralna jednačina je zadovoljena i u  $t = 0$ .

Preostaje još da pokažemo i obrnuto: pretpostavljamo da je za neko  $\sigma$ ,  $v(t)$  neprekidno rešenje jednačine (3.22),  $0 \leq t < \sigma$ , sa  $s(t)$  datim sa (3.23) i  $s(t) > 0$ ,  $0 \leq t < \sigma$ . Treba pokazati da tada  $u(x, t), s(t)$  formira rešenje problema (3.10)-(3.14) za sve  $t < \sigma$ , gde je  $u(x, t)$  dato sa (3.19), a  $u_\xi(s(\tau), \tau) = v(\tau)$ . Dakle, proveravamo uslove (3.10)-(3.14).

1. Uslov (3.10) važi, jer važe jednakosti  $G_{xx} = G_t$  i  $G_{\xi xx} = G_{\xi \tau}$  za Grinovu funkciju.

2. Uslov (3.11) se pokazuje tako što uzimamo u obzir da je  $G(0, t, s(\tau), \tau) = 0$ ,  $G(0, t, \xi, 0) = 0$  i  $G_\xi(0, t, 0, \tau) = \delta(t - \tau)$ . Slično i uslov (3.12) važi ukoliko iskoristimo  $G(x, 0, \xi, 0) = \delta(x - \xi)$ .
3. Diferenciranjem  $u(x, t)$  po  $x$ , puštajući da  $x \rightarrow s(t) - 0$  i uzimajući u obzir jednakosti (3.22) i (3.23) dobijamo da važi uslov (3.14).
4. Preostaje još da pokažemo da važi i uslov (3.13). Integraleći ponovo Grinov identitet i poredeći ga sa (3.19), zaključujemo da mora biti

$$\int_0^t u(s(\tau), \tau) G_\xi(x, t, s(\tau), \tau) d\tau = 0, \quad 0 < x < s(t), \quad 0 < t < \sigma.$$

Koristeći Lemu 3.2.3 dobijamo da  $\psi(t) = u(s(t), t)$  zadovoljava integralnu jednačinu

$$\psi(t) = 2 \int_0^t \psi(\tau) G_\xi(s(t), t, s(\tau), \tau) d\tau.$$

Kako je

$$|G(s(t), t, s(\tau), \tau)| \leq \frac{\text{const.}}{(t - \tau)^{1/2}},$$

jezgro integralne jednačine je integrabilno, a kao posledicu imamo  $\psi(t) \equiv 0$ , odnosno  $u(s(t), t) \equiv 0$ .

Pokazali smo sledeće

**Lema 3.2.4.** *Rešavanje problema (3.10)-(3.14) za  $t < \sigma$  ekvivalentno je pronalaganju neprekidnog rešenja  $v(t)$  integralne jednačine (3.22) na  $0 \leq t < \sigma$ , za  $s(t)$  dato sa (3.23) i  $s(t) > 0$ .*

Sada, kada smo Stefanov problem sveli na njemu ekvivalentan - problem pronalaska neprekidnog rešenja integralne jednačine, preostaje da se dokaže postojanje i jedinstvenost (za  $t < \infty$ ) rešenja problema (3.10)-(3.14).

### Postojanje i jedinstvenost rešenja

Označimo sa  $\mathbf{C}_\sigma$  skup svih neprekidnih funkcija  $v(t)$ , na  $0 \leq t \leq \sigma$  sa normom  $\|v\| = \sup_{0 \leq t \leq \sigma} |v(t)|$ . Sa  $\mathbf{C}_{\sigma, M}$  označimo podskup od  $\mathbf{C}_\sigma$  dat sa

$$\mathbf{C}_{\sigma, M} = \{v; v \in \mathbf{C}_\sigma, \|v\| \leq M\}.$$

Obeležimo desnu stranu jednačine (3.22) sa  $Tv$ , gde je  $s(t)$  dato sa (3.23). Primećimo, za  $M > 0$  i  $\sigma$  dovoljno malo:  $2\sigma M < b$ , za svako  $v \in \mathbf{C}_{\sigma, M}$  funkcija

$s(t) = b - \int_0^t v(\tau) d\tau \geq b - M\sigma > \frac{b}{2}$ , te zaključujemo da je za svako  $v \in \mathbf{C}_{\sigma, M}$   $Tv$  dobro definisano, na dovoljno malom intervalu  $0 \leq t \leq \sigma$ .  
Može se, direktnim izračunavanjem, pokazati da ukoliko je

$$M = 1 + 4 \left[ \sup_{0 \leq x \leq b} |\phi'(x)| \right] \quad (3.24)$$

i

$$AM\sigma^{1/2} \leq 1, \quad (3.25)$$

gde  $A$  zavisi samo od  $\sup_{0 \leq t \leq \sigma} f'(x)$ ,  $|f(0) - \phi(0)|$ ,  $b$ ,  $\frac{1}{b}$ , tada  $T : \mathbf{C}_{\sigma, M} \rightarrow \mathbf{C}_{\sigma, M}$  i kontrakcija je. Tada, na osnovu teoreme 1.4.2,  $T$  ima jedinstvenu nepokretnu tačku  $v$  koja rešenje jednačine (3.22), pa na osnovu leme 3.2.4 imamo postojanje rešenja problema (3.10)-(3.14) za  $t < \sigma$ , za dovoljno malo  $\sigma$ .

**Jedinstvenost** za  $(t < \sigma)$ .

Pretpostavimo da su  $u_0, s_0$  neka druga rešenja (3.10)-(3.14) za  $t < \sigma$  i neka je  $v_0$  odgovarajuće rešenje jednačine (3.22) na  $0 \leq t < \sigma$ . Pokazujemo prvo jedinstvenost za  $t \leq \sigma'$ ,  $\sigma' < \sigma$  proizvoljno. Neka je

$$\bar{M} = \max\{M, \sup_{0 \leq t \leq \sigma'} |v_0(t)|\}$$

i neka je  $\bar{\sigma}$  proizvoljno tako da zadovoljava  $A\bar{M}\bar{\sigma}^{1/2} \leq 1$ , gde je  $A$  kao i ranije definisano. Pokazujemo ponovo, da je  $T$  kontrakcija i da slika  $\mathbf{C}_{\bar{\sigma}, \bar{M}} \rightarrow \mathbf{C}_{\bar{\sigma}, \bar{M}}$ . Kako ponovo imamo postojanje jedinstvene nepokretne tačke, sledi

$$v(t) = v_0(t) \text{ na } 0 \leq t \leq \bar{\sigma} (< \sigma).$$

Tada je i  $s(t) = s_0(t)$ , na istom intervalu, te imamo  $u(x, t) = u_0(x, t)$  na  $0 \leq t \leq \bar{\sigma}$ ,  $0 \leq x \leq s(t)$ . Dalje, posmatramo dati problem (3.10)-(3.14), sada za  $t \geq \bar{\sigma}$ , i transformišemo uslov (3.12) u  $u(x, \bar{\sigma}) = u(x, \bar{\sigma})$ ,  $0 \leq x \leq s(\bar{\sigma})$ . Definišemo  $M_0 = 1 + 4 \left[ \sup_{0 \leq x \leq s(\bar{\sigma})} |u_x(x, \bar{\sigma})| \right]$ . Slično, kao u prvom koraku problem

transformišemo na problem integralne jednačine na  $\bar{\sigma} \leq t < \sigma$  i dobijamo da se rešenja  $v(t)$  i  $v_0(t)$  poklapaju na  $\bar{\sigma} \leq t \leq \tilde{\sigma}$ , za neko  $\tilde{\sigma}$  koje zadovoljava

$$A\bar{M}_0(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma})^{1/2} \leq 1, \quad (\bar{M}_0 = \max\{M_0, \sup_{0 \leq t \leq \sigma'} |v_0(t)|\}).$$

Pomerajući se na ovaj način duž vremenske ose, pokazujemo jedinstvenost rešenja za  $\forall t < \sigma$ ,  $\sigma > 0$ .

**Zaključak:** Ako posmatramo problem (3.10)-(3.14) na  $t > \lambda$ ,  $\lambda > 0$ , sa transformisanim uslovom (3.12)  $u(x, \lambda) = u(x, \lambda)$ ,  $0 \leq x \leq s(\lambda)$  i ako su

$|u_x(x, \lambda)|$ ,  $s(\lambda)$  i  $\frac{1}{s(\lambda)}$  ograničene nezavisno od  $\lambda$ , tada postoji jedinstveno rešenje na intervalu  $\lambda \leq t \leq \lambda + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , nezavisno od  $\lambda$ . Naš cilj je da pokažemo postojanje i jedinstvenost rešenja za  $0 \leq t < \infty$ , odnosno hoćemo da pokažemo: za svako  $t_0 > 0$ , postoji  $\varepsilon > 0$  tako da ako (3.10)-(3.14) ima jedinstveno rešenje za sve  $t < t_0$  onda ima jedinstveno rešenje za sve  $t < t_0 + \varepsilon$ . U smislu prethodnog zaključka: ako je  $u(x, t)$ ,  $s(t)$  rešenje (3.10)-(3.14) za  $t \leq t_0$ , onda su za sve  $\eta > 0$  dovoljno male

$$\sup_{0 < x < s(t_0 - \eta)} |u_x(x, t_0 - \eta)| \text{ i } s(t_0 - \eta)$$

su ograničene nezavisno od  $\eta$ . Ako pokažemo da je  $\sup_{0 < t < t_0} |v(t)| < \infty$ , onda iz (3.23) sledi i ograničenje za  $s(t)$ , a nakon diferenciranja (3.19) po  $x$  dobijamo i ograničenje za  $\sup_{0 < x < s(t_0 - \eta)} |u_x(x, t_0 - \eta)|$ . Ovim se završava dokaz o postojanju i jedinstvenosti rešenja Stefanovog problema (kraj dokaza i donje ograničenje za  $v(t)$  može se naći u [11]).  $\square$

Stefanov problem može se postaviti i zamenom uslova (3.11) sa  $u_x(0, t) = f(t)$ ,  $f(t) < 0$ ,  $t > 0$ .

**Teorema 3.2.5.** *Pretpostavimo da  $f(t)$ ,  $(0 \leq t < \infty)$  je neprekidna i  $\phi(x)$ ,  $(0 \leq x \leq b)$  je neprekidno diferencijabilna funkcija. Tada postoji jedinstveno rešenje problema (3.10)-(3.14), za sve  $t < \infty$ .  $s(t)$  je striktno monotono rastuća.*

Formulišimo sada i opštiji problem, u tri dimenzije [1]. Uz ovu fomulaciju uvešćemo i sve oznake i terminologiju koja će nam biti potrebna u narednom odeljku, za slabu formulaciju Stefanovog problema.

Neka je  $\Omega$  ograničena oblast u  $\mathbb{R}^3$  sa po delovima glatkom granicom. Neka čitavu oblast zauzima materijal na kome posmatramo promenu faze. Pretpostavimo takođe da je na jednom delu granice  $\partial\Omega_I$  data početna temperatura, a na drugom delu  $\partial\Omega_{II}$  početni fluks. Neka je sa

$$G = \Omega \times (0, t^*), \quad t^* > 0$$

data cilindrična oblast u  $x - t$  prostoru. Sa

$$\Sigma : \Sigma(\vec{x}, t) = 0$$

je data granica između dve faze, gde pretpostavljamo unapred da je granica glatka

površ. Dalje, neka su

$$\begin{aligned}
\Omega^+(t) &= \vec{x} \in \Omega : \Sigma(\vec{x}, t) > 0 \text{ i } u(\vec{x}, t) > 0 \\
&\quad (\text{oblast pod tečnom fazom u trenutku } t), \\
\Omega^-(t) &= \vec{x} \in \Omega : \Sigma(\vec{x}, t) < 0 \text{ i } u(\vec{x}, t) < 0 \\
&\quad (\text{oblast pod čvrstom fazom u trenutku } t), \\
\Sigma(t) &= \vec{x} \in \Omega : \Sigma(\vec{x}, t) = 0 \text{ (interfejs u trenutku } t), \Sigma = \cup_{0 < t < t^*} \cup \Sigma(t), \\
\Omega(t) &= \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \Sigma(t), \\
G^+ &= \cup_{0 < t < t^*} \Omega^+(t), \quad G^- = \cup_{0 < t < t^*} \Omega^-(t), \quad G = G^+ \cup G^- \cup \Sigma.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Formulaciju problema sada dajemo u opštem slučaju, kada specifična toplota i konduktivnost materijala zavise od temperature, tj. imamo nelinearnu jednačinu provođenja toplote. Da bi smo ovaj problem sveli na jednostavniji uvodimo tzv. "Kirhofov<sup>4</sup> temperaturu"  $u$ :

$$u = K(T) := \int_{T_m}^T k(\tau) d\tau = \begin{cases} \int_{T_m}^T k_S(\tau) d\tau, & \text{za } T < T_m \text{ (čvrsto)} \\ \int_{T_m}^T k_L(\tau) d\tau, & \text{za } T > T_m \text{ (tečno)} \end{cases} \tag{3.27}$$

Sada je  $\nabla u = k(T) \nabla T = -\vec{q}$ , pa zakon održanja energije dobija oblik

$$\rho e_t = \nabla^2 u$$

Kako je provodljivost pozitivna, Kirhofova temperatura je rastuća funkcija od  $T$ , a kako je transformacija invertibilna imamo

$$T = K^{-1}(u).$$

Entalpija kao funkcija od  $u$  sada ima oblik

$$\begin{aligned}
\rho e(K^{-1}(u)) &= \beta(u) = \\
&= \begin{cases} \int_{T_m}^T \rho c_S(\tau) d\tau = \int_{K^{-1}(0)}^{K^{-1}(u)} \rho c_S(\tau) d\tau = \int_0^u \rho \frac{c_S(K^{-1}(w))}{k_S(K^{-1}(w))} dw, & \text{za } u < 0 \\ [0, \rho L], & \text{za } u = 0 \\ \int_{T_m}^T \rho c_L(\tau) d\tau + \rho L = \int_0^u \rho \frac{c_L(K^{-1}(w))}{k_L(K^{-1}(w))} dw + \rho L, & \text{za } u > 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$\beta(u)$  je strogo rastuće, višeznačno preslikavanje, diferencijabilno svuda sem u  $u = 0$ . Stoga, važi sledeće:

$$\beta'(u) \leq \alpha_0 > 0 \text{ za } u \neq 0 \text{ i } [\beta(u)]_{0^-}^{0^+} = \rho L > 0$$

---

<sup>4</sup>Gustav Robert Kirchhoff (1824.-1887.), nemački fizičar

i postoje konstante  $\alpha_0, \alpha_1 > 0$  tako da

$$\alpha_0(r_1 - r_2) \leq \beta(r_1) - \beta(r_2) \leq \alpha_1(r_1 - r_2) + \rho L, \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.29)$$

Dakle, entalpiju možemo izraziti na sledeći način:

$$\begin{aligned} H &= \beta(u), \text{ za } u \neq 0 \\ H &\in [0, \rho L], \text{ za } u = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

U svakoj fazi sada možemo jednačinu provođenja toplote napisati kao

$$H_t = \nabla^2 u \quad (3.31)$$

**Definicija 3.2.6.** Trojka  $u(\vec{x}, t)$ ,  $H(\vec{x}, t)$  i  $\Sigma(\vec{x}, t)$  čini **klasično rešenje** Stefanovog problema ako

- (i)  $u \in C(\bar{G})$ ,  $\frac{\partial \Sigma}{\partial t} \in C(G)$  i  $\nabla u \in C(G^+ \cup \Sigma \cup \partial_{II} G) \cap C(G_- \cup \Sigma \cup \partial_{II} G)$
- (ii)  $\frac{\partial u}{\partial t}, \nabla^2 u \in C(G^+ \cup G^-)$
- (iii) 
$$H(\vec{x}, t) = \beta(u(\vec{x}, t)), \text{ za } u(\vec{x}, t) \neq 0, (\vec{x}, t) \in \bar{G} \quad (3.32)$$

- (iv)  $H, u, \Sigma$  zadovoljavaju sledeće u svakoj tački  $(\vec{x}, t)$

$$H_t = \nabla^2 u, \text{ za } (\vec{x}, t) \in G - \Sigma \quad (3.33)$$

$$u(\vec{x}, t) = 0, \text{ za } (\vec{x}, t) \in \Sigma \quad (3.34)$$

$$\rho L V_n = -\left[\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]\right]_{-}^{+} \text{ na } \Sigma, \quad (3.35)$$

$V_n$  je normalna komponenta brzine pomeranja granice  $\Sigma$ .

$$u(\vec{x}, 0) = u_0(\vec{x}) = \begin{cases} > 0 & \text{za } \vec{x} \in \Omega^+(0) \\ = 0 & \text{za } \vec{x} \in \Sigma(0) \\ < 0 & \text{za } \vec{x} \in \Omega^-(0) \end{cases} \quad (3.36)$$

$$u(\vec{x}, t) = u_I(\vec{x}, t) =: K(T_I), \text{ na } \partial_I G := \partial_I \Omega \times (0, t^*) \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -Q_{II}(\vec{x}, t), \text{ na } \partial_{II} G := \partial_{II} \Omega \times (0, t^*) \quad (3.38)$$

*Napomena 3.2.7.* Uslov (3.34) predstavlja Stefanov uslov na granici  $\Sigma$ . Neka je  $\vec{V}_n$  normalna komponenta brzine kretanja slobodne površine  $\vec{V}_n = \frac{d\vec{x}}{dt} \vec{n}$ , gde je  $\vec{n} = \frac{\nabla \Sigma}{|\nabla \Sigma|}$  jedinična normala. Kako smo već pokazali, skok entalpije na slobodnoj granici je  $[\rho e]_{\text{čvrsto}}^{\text{tečno}} = \rho L > 0$ . Primenom zakona održanja energije 3.5 dobijamo

$$[\rho e]_{-}^{+} V_n = [\vec{q} \vec{n}]_{-}^{+} = -\left[\left[\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right]\right]_{-}^{+}.$$

### 3.3 Slaba formulacija Stefanovog problema

U prethodnom odeljku pokazali smo postojanje i jedinstvenost rešenja za  $0 < t \leq \infty$  u jednodimenzionalnom slučaju. Ovaj rezultat dobijen je (prvo lokalno, za male vremenske intervale) još tokom četrdesetih i pedesetih godina XX veka. Prirodno, problem se može postaviti i u višedimenzionalnom slučaju. Međutim, problem je što u višim dimenzijama klasično rešenje ne mora da postoji (bar ne globalno). Na primer, prilikom otapanja komada leda, može da se desi da komad u određenom momentu pukne, što nije modelom predviđeno. "Mana" klasične formulacije Stefanovog problema jeste to da je oblik međufazne površi između dve faze već unapred određen, odnosno postavlja se pretpostavka da se stvara granična površ između dve faze. Prilikom fizičkog procesa topljenja ovo ne mora uvek biti tačno, i uglavnom unapred ne možemo znati kakva će granica biti (može da dođe do stvaranja mešovitih zona). Iz ovih razloga formulisan je problem u slabom smislu (Friedman, 1968. godine) koji nam dozvoljava da oslabimo zahteve na početne uslove i izbegnemo oblik granice između dve faze prilikom konstrukcije rešenja. Imajući u vidu definiciju slabog rešenja datu u prvom poglavlju, u nastavku se bavimo slabom formulacijom Stefanovog problema [1].

Jednačina (3.31) u smislu distribucija ima oblik:

$$\langle H_t - \Delta u, \phi \rangle = 0 \text{ za sve test funkcije } \phi \in C_0^\infty(G) \quad (3.39)$$

gde su  $H, u \in \mathbf{L}^2(G)$  i  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  skalarni proizvod u  $\mathbf{L}^2(G)$

Neka je trojka  $u, H, \Sigma$  klasično rešenje, koje zadovoljava (3.32)-(3.38) i neka je  $\phi$  test funkcija (čije ćemo karakteristike dati naknadno) na  $G$ . Iz (3.39) imamo

$$\begin{aligned} 0 &= \langle H_t - \nabla^2 u, \phi \rangle = \iint_G [H_t - \nabla^2 u] \phi dxdt \\ &= \iint_{G^+ \cup G^-} [(H\phi)_t - H\phi_t - \operatorname{div}(u\nabla\phi) - (u\nabla^2\phi)] dxdt \\ &= - \iint_G (H\phi_t + u\nabla^2\phi) dxdt + \iint_{G^+ \cup G^-} [(H\phi)_t + \operatorname{div}(u\nabla\phi - \phi\nabla u)] dxdt, \end{aligned} \quad (3.40)$$

odnosno

$$\iint_G (H\phi_t + u\nabla^2\phi) dxdt = \iint_{G^+ \cup G^-} [(H\phi)_t + \operatorname{div}(u\nabla\phi - \phi\nabla u)] dxdt$$

Sada, primenom teoreme o divergenciji dobijamo

$$\iint_G (H\phi_t + u\nabla^2\phi) dxdt = \iint_{G^+ \cup G^-} \left( H\phi N_t + (u\nabla\phi - \phi\nabla u) \vec{N}_x \right) dS \quad (3.41)$$

gde su  $N_t$  i  $\vec{N}_x$  vremenska i prostorna komponenta spoljašnje jedinične normale na granicama.  $\partial G^+$  sastoji se iz  $\Omega^+(t^*)$ ,  $\Omega^+(0)$ ,  $\Sigma$  i  $\cup_{0 < t < t^*} \partial\Omega^+(t)$ , pa su vrednosti za  $N_t dS = +1dx$ ,  $-1dx$ ,  $N_t^\Sigma dS$ , 0 i  $\vec{N}_x dS = 0$ , 0,  $\vec{N}_x^\Sigma$ ,  $\vec{n}_x dS$ , respektivno.  $N_t^\Sigma$  i  $\vec{N}_x^\Sigma$  označavaju komponente jedinične normale na  $\Sigma$ , usmerene ka čvrstoj fazi.  $\vec{n}_x$  označava normalu na  $\partial\Omega(t)$ . Slično važi i za  $\partial G^-$ . Integral na desnoj strani (3.41) postaje

$$\begin{aligned} \int_{\partial G^+ \cup \partial G^-} H\phi N_t dS &= \int_{\Omega^+(t^*) \cup \Omega^-(t^*)} H\phi dx - \int_{\Omega^+(0) \cup \Omega^-(0)} H\phi dx \pm \int_{\Sigma} H\phi N_t^\Sigma dS \\ &\int_{\Omega(t^*)} H(x, t^*)\phi(x, t^*)dx - \int_{\Omega(0)} H(x, 0)\phi(x, 0)dx + \int_{\Sigma} \llbracket H\phi \rrbracket_{\pm}^\pm N_t^\Sigma dS \end{aligned} \quad (3.42)$$

i

$$\begin{aligned} \iint_{\partial G^+ \cup \partial G^-} (u\nabla\phi - \phi\nabla u) \cdot \vec{N}_x dS &= \int_0^{t^*} \int_{\partial\Omega^+(t) \cup \partial\Omega^-(t)} [u\nabla\phi - \phi\nabla u] \cdot \vec{n}_x ds dt \\ &\pm \int_{\Sigma} [u\nabla\phi - \phi\nabla u] \cdot \vec{N}_x^\Sigma dS \\ &= \int_0^{t^*} \int_{\partial\Omega} \left[ u \frac{\partial\phi}{\partial \vec{n}_x} - \phi \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_x} \right] ds dt + \int_{\Sigma} \llbracket u\nabla\phi - \phi\nabla u \rrbracket_{\pm}^\pm \cdot \vec{N}_x^\Sigma dS. \end{aligned} \quad (3.43)$$

$H(x, 0) \in \beta(u(x, 0))$  je poznato iz početnog uslova, dok su  $u = u_I$  na  $\partial_I$  i  $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}_x} = -Q_{II}$  na  $\partial_{II}G$  poznati iz graničnih uslova. Nepoznate članove u gornjem integralu eliminisamo izborom test funkcije  $\phi$  tako da

1.  $\phi(x, t^*) = 0$  za  $x \in \Omega$
2.  $\phi = 0$  na  $\partial_I G$
3.  $\frac{\partial\phi}{\partial \vec{n}_x} = 0$  na  $\partial_{II}G$

Primetimo da, kako su  $u$  i  $\nabla\phi$  neprekidne na  $\Sigma$ ,  $\llbracket u\nabla\phi \rrbracket_{\pm}^\pm$  se tu poništava. Ovakvim izborom  $\phi$  prethodna jednakost se svodi na

$$\begin{aligned} \iint_G [H\phi_t + u\nabla^2\phi] dx dt &= - \int_{\Omega(0)} H(x, 0)\phi(x, 0)dx + \iint_{\partial_I G} u_I \frac{\partial\phi}{\partial \vec{n}_x} ds dt \\ &+ \iint_{\partial_{II}G} \phi Q_{II} ds dt + \int_{\Sigma} \phi (\llbracket H \rrbracket_{\pm}^\pm N_t^\Sigma - \llbracket \nabla u \rrbracket_{\pm}^\pm N_x^\Sigma) dS \end{aligned} \quad (3.44)$$

Pokazaćemo da se poslednji integral poništava. Stefanov uslov dat sa (3.35) može se napisati i u sledećem obliku

$$\rho L \Sigma_t - \llbracket \nabla u \rrbracket_-^+ \cdot \nabla \Sigma = 0 \quad (3.45)$$

Zaista, posmatrajmo jednačinu slobodne površine  $\Sigma(\vec{x}, t) = 0$ , odakle imamo  $\Sigma_t + \nabla \Sigma \cdot \frac{dx}{dt} = 0$ . Kako imamo da je brzina pomeranja slobodne površine  $V_n = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{n}^\Sigma$ , gde je  $\vec{n}^\Sigma = \frac{\nabla \Sigma}{|\nabla \Sigma|}$  jedinična normala na slobodnu površinu, dobijamo  $V_n = -\frac{\Sigma_t}{|\nabla \Sigma|}$ . Pored toga, kako na  $\Sigma$  imamo  $u = 0$ , sledi da je  $\llbracket H \rrbracket_-^+ = \rho L$ , odakle dobijamo Stefanov uslov oblika (3.45).

Konačno, klasično rešenje  $H$ ,  $u$ ,  $\Sigma$  zadovoljava relaciju

$$\begin{aligned} \iint_G [H\phi_t + u\nabla^2\phi] dxdt &= - \int_{\Omega(0)} H(x,0)\phi(x,0)dx + \iint_{\partial_I G} u_I \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}_x} dsdt \\ &+ \iint_{\partial_{II} G} \phi Q_{II} dsdt \end{aligned} \quad (3.46)$$

za proizvoljnu test funkciju  $\phi$  iz skupa

$$\Phi = \{\phi \in C^2(\bar{G}) : \phi|_{t=t^*} = 0, \phi|_{\partial_I G} = 0, \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}}|_{\partial_{II} G} = 0\}.$$

Primitimo da se sada slobodna granica  $\Sigma$  uopšte ne pojavljuje. Sledi definicija slabog rešenja Stefanovog probelma:

**Definicija 3.3.1.** Par funkcija  $u$  i  $H$  čine **slabo rešenje** Stefanovog problema (3.32)-(3.38) ako

- (i)  $u$  i  $H$  su ograničene, kvadratno integrabilne funkcije na oblasti  $G$ , tj.  $H, u \in \mathbf{L}^2(G)$
- (ii)  $H(\vec{x}, t) \in \beta(u(\vec{x}, t))$  skoro svuda u  $\bar{G}$
- (iii) relacija

$$\begin{aligned} \iint_G [H\phi_t + u\nabla^2\phi] dxdt &= - \int_{\Omega(0)} H(x,0)\phi(x,0)dx + \iint_{\partial_I G} u_I \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}_x} dsdt \\ &+ \iint_{\partial_{II} G} \phi Q_{II} dsdt \end{aligned} \quad (3.47)$$

sa  $H_0(\vec{x}) \in \beta(u_0(\vec{x}))$  važi za svaku test funkciju

$$\phi \in \Phi = \{\phi \in C^2(\bar{G}) : \phi|_{t=t^*} = 0, \phi|_{\partial_I G} = 0, \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}}|_{\partial_{II} G} = 0\}.$$

Sledeća teorema potvrđuje da slabo rešenje zaista jeste generalizovan koncept rešenja, koje može da postoji čak i kada klasično rešenje ne može. Slabo rešenje zadovoljava toplotnu jednačinu u smislu distribucija. Njegova najveća prednost je to da prilikom postavljanja samog problema ne moramo znati kakve osobine ima slobodna granica, odnosno kakva je priroda međufazne površi između dve faze (ukoliko je granica glatka površ, slabo rešenje je jako rešenje).

**Teorema 3.3.2.** (a) *Klasično rešenje je i slabo rešenje.*

(b) *Dovoljno glatko slabo rešenje je i klasično rešenje. Zapravo, ukoliko  $\{H, u\}$  čini slabo rešenje (po Definiciji 3.3.1) i ako skup tačaka  $\{(\vec{x}, t) \in G : u(\vec{x}, t) = 0\}$  čini glatku površ, odnosno grafik funkcije  $\Sigma(\vec{x}, t) = 0$ , gde  $u$  i  $\Sigma$  zadovoljavaju prva dva uslova u Definiciji 3.2.6, tada  $\{H, u, \Sigma\}$  čine klasično rešenje.*

**Teorema 3.3.3.** (Jedinstvenost slabog rešenja)

*Postoji najviše jedno slabo rešenje Stefanovog problema.*

Postojanje slabog rešenja pokazano je prvi put 1960. godine, tako što je pokazano da rešenja eksplicitne entalpijske numeričke metode (o čemu će se govoriti u narednom odeljku) konvergiraju ka slabom rešenju. Analitički dokaz dao je Friedman 1968. Teoremu o postojanju rešenja navešćemo u narednom odeljku, gde ćemo formirati i numerički metod za rešavanje datog problema.

## 3.4 Numeričke metode

Kroz nekoliko zasebnih delova ovog odeljka bavićemo se diskretizacijom problema provođenja toplote, a zatim i problema promene faznog stanja. Diskretizovaćemo problem koristeći **kontrolne zapremine**, i iskoristiti metodu **konačnih razlika** za diskretizaciju zakona održanja [1].

### 3.4.1 Diskretizacija problema provođenja toplote

U cilju uvođenja diskretnog modela i da bismo što bolje objasnili metodu kontrolnih zapremina i konačnih razlika, posmatraćemo sledeći jednostavan problem:

#### Fizički problem

Posmatrajmo blok  $0 \leq x \leq l$  sa datom početnom temperaturom  $T_p(x)$ . U trenutku  $t = 0$  blok se počeo zagrevati na granici  $x = 0$ , kondukcijom toplote iz okoline (sa koeficijentom provođenja toplote  $h$ ) koja je na temperaturi  $T_\infty(t)$ , dok je granica  $x = l$  izolovana. Cilj je predvideti temperaturu bloka u toku vremena,  $t > 0$ .

### Matematički problem

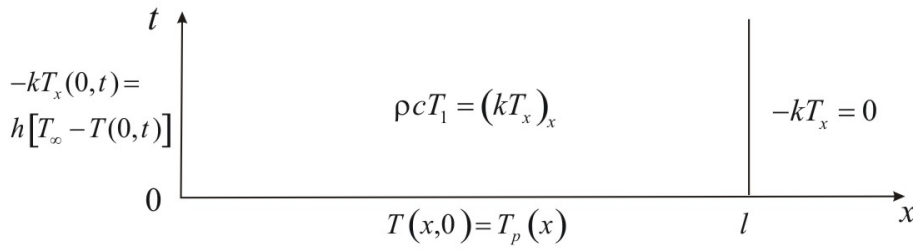
Treba pronaći  $T(x, t)$  tako da

$$\rho c T_t = (k T_x)_x, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (3.48)$$

$$T(x, 0) = T_p(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.49)$$

$$-k T_x(0, t) = h[T_\infty(t) - T(0, t)], \quad -k T_x(l, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.50)$$

U opštem slučaju,  $c, k$  i  $h$  mogu biti funkcije temperature  $T$ .



Slika 3.1: Šematski prikaz matematičkog problema

### Diskretizacija pomoću kontrolnih zapremina

Koncept kontrolnih zapremina je sledeći: Oblast na kom rešavamo dati problem, delimo na  $M$  podregiona,  $V_1, \dots, V_m$ . Svakom od podoblasti  $V_j$  dodelimo čvor  $x_j$ , tačku unutar podoblasti. Sa  $\Delta V_j$  označimo zapreminu od  $V_j$ , a sa  $A_{ij} = A_{ji}$  zajedničku površinu između  $V_i$  i  $V_j$ . Za blok dužine  $l$ , konstantnog poprečnog preseka  $A$  imamo: (Slika 3.3)

$$\Delta V_j = A \Delta x_j, \quad A_{ij} = A \quad i, j = 1, \dots, M \quad (3.51)$$

gde je  $\Delta x_j$  dužina podintervala koji sadrži čvor  $x_j$ . Ako izaberemo čvorove u sredini intervala, onda su krajnje tačke  $j$ -og intervala

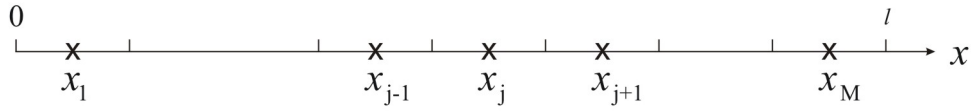
$$x_{j-1/2} = x_j - \frac{\Delta x_j}{2}, \quad x_{j+1/2} = x_j + \frac{\Delta x_j}{2}, \quad j = 1, \dots, M, \quad x_{1/2} = 0, \quad x_{M+1/2} = l \quad (3.52)$$

Ukoliko je podela uniformna, imamo

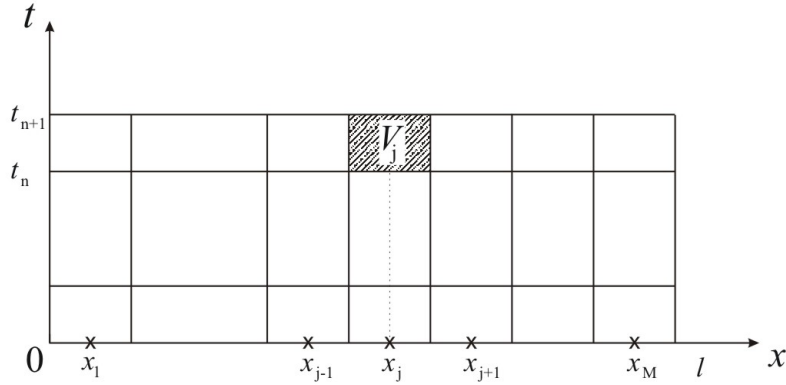
$$x_{1/2} = 0, \quad x_{j-1/2} = (j-1)\Delta x, \quad j = 1, \dots, M, \quad x_{M+1/2} = M\Delta x = l \quad (3.53)$$

Diskretizacija vremenskog intervala:

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \Delta t_0, \quad \dots, \quad t_{n+1} = t_n + \Delta t_n, \quad \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.54)$$



Slika 3.2: Diskretizacija - Čvorovi u prostornoj mreži



Slika 3.3: Kontrolne zapremine

a za uniformnu podelu  $\Delta t_n = \Delta t$ , pa je  $t_n = \Delta t$  za sve  $n = 0, 1, 2, \dots$

Ako sa  $T(x, t)$  označimo tačno rešenje prethodno datog matematičkog problema, onda  $T(x_j, t_n)$  predstavlja vrednost temperature u čvoru  $x_j$  i trenutku  $t_n$  i njenu numeričku aproksimaciju označićemo sa

$$T_j^n = T(x_j, t_n), \quad j = 1, \dots, M, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Granični i početni uslov označavamo sa

$$T_0^n = T(0, t_n) \quad i \quad T_{M+1/2}^n = T(l, t_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

i

$$T_j^0 := T_p(x_j), \quad j = 1, \dots, M,$$

respektivno. Naš cilj je da napravimo algoritam koji nam daje vrednost u narednom vremenskom trenutku  $T_j^{n+1}$ , kada je poznata vrednost  $T_j^n$ .

### Diskretizacija zakona održanja energije

Posmatrajmo zakon održanja

$$E_t + q_x = 0,$$

gde je

$E$  = toplotna energija po jediničnoj zapremini =  $\int_{T_{ref}}^T \rho c(\bar{T}) d\bar{T}$ , za neku referentnu

temperaturu  $T_{ref}$ ,

$q$  = toplotni protok =  $-kT_x$ , prema Furijeovom zakonu. Integralićemo jednačinu po  $V_j$  i u vremenskom intervalu  $[t_n, t_{n+1} = t_n + \Delta t_n]$  uz pretpostavke da je  $V_j$  dovoljno malo tako da  $E(x_j, t)$  predstavlja srednju vrednost energije unutar  $V_j$  i da su  $\Delta t_n$  dovoljno male vrednosti da fluks u vremenskom intervalu  $[t_n, t_{n+1}]$  možemo smatrati konstantnim i jednakim vrednosti u središnjoj tački datog vremeskog intervala. Stoga se

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\partial}{\partial t} \left( A \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} E(x, t) dx \right) dt = - \int_{t_n}^{t_{n+1}} A \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} q_x(x, t) dx dt \quad (3.55)$$

svodi na

$$[E(x_j, t_{n+1}) - E(x_j, t_n)] \Delta x_j = \Delta t_n [q(x_{j-1/2}, t_{n+\theta}) - q(x_{j+1/2}, t_{n+\theta})], j = 1, \dots, M,$$

gde  $t_{n+\theta}$  predstavlja središnju tačku u vremenskom intervalu. Mi ćemo nadalje koristiti **eksplicitnu šemu** sa  $\theta = 0$ , odnosno uzimati vrednost fluksa u  $t_n$ . Označimo još sa

$$E_j^n = E(x_j, t_n), \quad q_{j\pm 1/2}^n = q(x_{j\pm 1/2}, t_n),$$

pa je konačno

$$E_j^{n+1} = E_j^n + \frac{\Delta t_n}{\Delta x_j} [q_{j-1/2}^n - q_{j+1/2}^n], \quad j = 1, \dots, M, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ovu diskretizaciju korišćićemo i u narednom odeljku, prilikom formiranja numeričke aproksimacije za proces sa promenom faznog stanja, gde će se koristiti "metod entalpije".

### Diskretizacija fluksa

Dajemo aproksimaciju fluksa kroz  $x_{j-1/2}$  i  $x_{j+1/2}$ , za unutrašnje kontrolne zapremine.

$$q = -kT_x = -k \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

aproksimiramo koristeći konačne razlike prvog reda i dobijamo

$$q_{j-1/2} = -k_{j-1/2} \frac{T_j - T_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, \quad j = 1, \dots, M,$$

što predstavlja količinu toplote koja prolazi iz  $V_{j-1}$  u  $V_j$  u jedinici vremena kroz jediničnu površinu. Ukoliko  $k$  nije konstantna vrednost, i  $k_{j-1}$  i  $k_j$  predstavljaju konduktivnosti kontrolnih zapremina  $V_{j-1}$  i  $V_j$ , tada fluks definišemo na sledeći način

$$q_{j-1/2} = -\frac{T_j - T_{j-1}}{R_{j-1/2}}, \quad j = 2, \dots, M,$$

gde  $R_{j-1/2}$  predstavlja rezistentnost intervala  $[x_{j-1/2}, x_j]$  i dato je sa

$$R_{j-1/2} = \frac{1/2\Delta x_{j-1}}{k_{j-1}} + \frac{1/2\Delta x_j}{k_j}.$$

Sumirajući sve do sad dobijene aproksimacije i pretpostavljajući da su  $k, c = \text{const.}$ , a diskretizacija uniformna  $\Delta x_n = \Delta x$  i  $\Delta t_n = \Delta t$ , imamo da je

$$E_j^n = \rho c [T_j^n - T_{ref}]$$

i konačno

$$T_j^{n+1} = T_j^n + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} [T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n], \quad j = 1, \dots, M; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Da bi toplotna jednačina bila u potpunosti definisana trebaju nam i vrednosti  $T_0^n$  i  $T_{M+1/2}^n$ .

### Diskretizacija graničnih uslova

1. Temperatura:  $T(0, t) = T_0(t)$

Temperatura  $T_0^n$  poznata je u svakom trenutku  $t_n$

$$T_0^n = T_0(t_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Fluks na granici  $x = 0$  dat je sa

$$q_{1/2} = -k \frac{T_1^n - T_0^n}{\Delta x}$$

2. Fluks:  $-kT_x(0, t) = q_0(t)$

Diskretizacija daje

$$q_{1/2}^n = q_0(t_n)$$

3. Konvektivni fluks:  $-kT_x(0, t) = h[T_\infty(t) - T(0, t)]$

Diskretizacijom dobijamo

$$-k \frac{T_1^n - T_0^n}{\Delta x} = h[T_\infty^n - T_0^n]$$

### 3.4.2 Metod entalpije

U ovom odeljku opisaćemo metod entalpije za Stefanov problem u jednoj prostornoj dimenziji i dati njegovu numeričku interpretaciju koristeći eksplisitu šemu, kao i u prethodnom slučaju [1]. Pokazaćemo da metod entalpije aproksimira slabo

rešenje Stefanovog problema.

Kao što smo videli u prethodnom problemu, metod entalpije funkcioniše formiranjem kontrolnih zapremina  $V_j$ . Na svaku od ovih zapremina primenićemo zakon održanja energije, u integralnom obliku (3.55) da bismo obezbedili "skokove" koje entalpija i fluks imaju na granici između dve faze. Znamo još i da je stanje materijala u svakoj od kontrolnih zapremina okarakterisano entalpijom

$$E_j \leq 0 \Rightarrow V_j \text{ je u tečnom stanju}$$

$$E_j \geq \rho L \Rightarrow V_j \text{ je u čvrstom stanju}$$

$$0 < E_j < \rho L \Rightarrow V_j \text{ je mešovita zona}$$

Udeo tečne faze u mešovitom stanju dat je sa

$$\lambda_j = \frac{E_j}{\rho L}.$$

Dakle, možemo primetiti da su faze određene isključivo entalpijom, i da položaj međufazne površi nismo ni pomenuli. Ova šema je **šema povlačenja zapremine**, za razliku od **šeme povlačenja interfejsa**.

Neka je dat problem iz prethodnog odeljka, s tim da sada uključujemo promenu faze (topljenje) bloka u početnom trenutku  $t_p > 0$  u  $x = 0$  na temperaturi  $T_m$ , sa pretpostavkom da je  $T_p(x) \leq T_m$  i  $T_\infty \geq T_m$ .

### Matematički problem

Želimo da pronađemo  $t_p$ ,  $T(x, t)$  i  $X(t)$  tako da

$$\begin{aligned} \rho c_S T_t &= (k_S T_x)_x, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < t_p \text{ i } X(t) < x < l, \quad t > t_p \\ \rho c_L T_t &= (k_L T_x)_x, \quad 0 < x < X(t), \quad t > t_p \\ -k_S T_x(0, t) &= h[T_\infty(t) - T(0, t)], \quad t < t_p \\ -k_L T_x(0, t) &= h[T_\infty(t) - T(0, t)], \quad t > t_p \\ T_x(l, t) &= 0, \quad t > 0 \\ T(x, 0) &= T_p(x), \quad X(t_p) = 0 \\ T(X(t), t) &= T_m, \quad t > t_p \\ \rho L X'(t) &= -k_L T_x(X(t)^-, t) + k_S T_x(X(t)^+, t), \quad t > t_p \end{aligned} \tag{3.56}$$

Primenićemo zakon održanja energije (3.55) na kontrolnu zapreminu  $V_j = A \times [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ . Entalpija je u ovom slučaju, za  $T_{ref} = T_m$  data sa

$$E(x, t) = \begin{cases} \int_{T_m}^{T(x, t)} c_L(\bar{T}) d\bar{T} + \rho L, & T(x, t) > T_m \text{ (tečno)} \\ \int_{T_m}^{T_m} c_S(\bar{T}) d\bar{T}, & T(x, t) < T_m \text{ (čvrsto)}. \end{cases} \quad (3.57)$$

a za konstantne  $c_L$  i  $c_S$  možemo izraziti temperaturu

$$T = \begin{cases} T_m + \frac{E - \rho L}{\rho c_L} & E \geq \rho L \text{ (tečno)} \\ T_m & 0 < E < \rho L \text{ (interfejs)} \\ T_m + \frac{E}{\rho c_s} & E \leq 0 \text{ (čvrsto)} \end{cases} \quad (3.58)$$

Diskretizacijom fluksa, rezistencije  $R$  i graničnih uslova kao u prethodnom problemu, dobijemo diskretan problem (sa eksplisnom šemom)

$$\text{početni uslov: } T_j^0 = T_p(x_j), \quad j = 1, \dots, M \quad (3.59)$$

$$\text{granični uslov na } x=0: \quad q_{1/2}^n = \frac{T_1^n - T_\infty^n}{\frac{1}{h} + R_{1/2}}, \quad R_{1/2} = \frac{1/2 \Delta x_1}{k_1} \quad (3.60)$$

$$\text{granični uslov na } x=1: \quad q_{M+1/2}^n = 0 \quad (3.61)$$

$$\text{unutrašnje vrednosti: } E_j^{n+1} = E_j^n + \frac{\Delta t_n}{\Delta x_j} [q_{j-1/2}^n - q_{j+1/2}^n], \quad j = 1, \dots, M \quad (3.62)$$

$$T_j^n = \begin{cases} T_m + \frac{E_j^n - \rho L}{\rho c_L} & E_j^n \geq \rho L \text{ (tečno)} \\ T_m & 0 < E_j^n < \rho L \text{ (interfejs)} \\ T_m + \frac{E_j^n}{\rho c_s} & E_j^n \leq 0 \text{ (čvrsto)} \end{cases} \quad (3.63)$$

Algoritam se sastoji u sledećem:

poznavajući vrednosti entalpije, temperature i faze svake kontrolne zapremine u trenutku  $t_n$ , računamo rezistenciju i fluks u trenutku  $t_{n+1}$  koje ćemo iskoristiti da nađemo entalpiju i temperaturu u trenutku  $t_{n+1}$ . Za indikator faze u kojoj se nalazi kontrolna zapremina  $V_j$  koristimo

$$\lambda_j^n = \begin{cases} 0, & E_j^n \leq 0 \text{ (čvrsto)} \\ \frac{E_j^n}{\rho L}, & 0 < E_j^n < \rho L \text{ (mešovita zona)} \\ 1, & \rho L \leq E_j^n \text{ (tečno)} \end{cases} \quad (3.64)$$

Takođe, provodljivost ne mora biti konstantna u kontrolnim zapreminama, te je najčešće aproksimiramo sa prosečnom vrednošću  $k_L$  i  $k_S$ , tj.

$$k_j^n = 1/2(k_L + k_S).$$

Ipak, najbolje rešenje jeste zameniti temperaturu  $T$  sa Kirhofovom temperaturom  $u$  (kao u (3.27)), koja za konstantne  $k_L$  i  $k_S$  ima vrednosti

$$u = \begin{cases} k_S[T - T_m] & T < T_m \\ 0 & T = T_m \\ k_L[T - T_m] & T > T_m \end{cases}, \quad (3.65)$$

a u diskretnom slučaju (sa uniformnom diskretizacijom)

$$u_j^n = k_j^n [T_j^n - T_m]$$

i

$$q_{j-1/2} = (u_{j-1} - u_j) / \Delta x$$

Napomenimo još jednom da velika prednost metoda entalpije jeste u tome što na ovaj način možemo da izbegnemo poznavanje položaja interfejsa u toku vremena. Ipak, ukoliko je interfejs u našem modelu oštar, odnosno predstavlja glatku površ, tada metodom entalpije dobijamo tačno jedan čvor u mešovitoj zoni u svakom vremenskom koraku. Ako je u trenutku  $t_n$  čvor u mešovitoj zoni  $x_m$ , položaj interfejsa možemo aproksimirati sa

$$X(t_n) = X^n := x_{m-1/2} + \lambda_m^n \Delta x_m.$$

### 3.4.3 Konvergencija šeme entalpije i postojanje slabog rešenja

U prethodnom poglavlju predstavili smo slabu formulaciju Stefanovog problema. Sada ćemo navesti (bez dokaza) teoremu o postojanju rešenja, koja tvrdi da prethodno konstruisana entalpijska šema jeste dobra aproksimacija slabog rešenja. Prvo, dajemo slabu formulaciju prethodnog problema, koristeći Kirhofovom temperaturu i definiciju entalpije  $H$ , kao u 3.2.6 i 3.3.1, s tim da sada posmatramo jednodimenzionalni slučaj, gde je oblast  $G$  data sa  $G = (0, l) \times (0, t^*)$ .

#### Slaba formulacija

Treba pronaći  $H(x, t)$  i  $u(x, t)$  tako da

- (i)  $u$  i  $H$  su ograničene, kvadratno integrabilne funkcije na oblasti  $G$ ,  $u_x \in \mathbf{L}^2(G)$
- (ii)  $H(x, t) \in \beta(u(x, t))$  skoro svuda u  $\bar{G}$
- (iii) relacija

$$\int_0^{t^*} \int_0^l [H \phi_t + u \phi_{xx}] dx dt + \int_0^l H_p(x) \phi(x, 0) dx = \int_0^{t^*} \frac{h}{k_L} [u(0, t) - u_\infty(t)] \phi(0, t) dt \quad (3.66)$$

gde  $H_p(x) \in \beta(u_p(x))$ , važi za svaku test funkciju

$$\phi \in \Phi = \{\phi \in C^2(\bar{G}) : \phi|_{t=t^*} = 0, \phi_x(0, t) = 0, \phi_x(l, t) = 0\}.$$

$u_p(x)$  i  $u_\infty(t)$  su ograničene kvadratno integrabilne funkcije i odgovaraju datim temperatuama  $T_p(x)$  i  $T_\infty(t)$  respektivno.

Numerička aproksimacija metodom entalpije konstruisana je u prethodnom odeljku, a ovde predstavljamo diskretni model sa Kirhofovom temperaturom, uniformnom diskretizacijom  $\Delta x = \frac{l}{M}$  i  $\Delta t = \frac{t^*}{N}$  koja zadovoljava uslov za stabilnost numeričkog postupka

$$\mu := \frac{\alpha_{max} \Delta t}{\Delta x^2} \leq \mu_0 < \frac{1}{2}, \quad (3.67)$$

gde je  $\alpha_{max} = \max\{\frac{k_L}{\rho c_L}, \frac{k_S}{\rho c_S}\}$ . Drugim rečima, za svako  $M > 0$  biramo  $\Delta x := \frac{l}{M}$  i  $N > \frac{1}{2} \frac{\alpha_{max} t^*}{\Delta x^2}$ .

EksPLICITNA numerička šema entalpije je:

$$\text{početna vrednost: } u_j^0 = u_p(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, M, M+1 \quad (3.68)$$

$$\text{granična vrednost na } x = 0 : \quad u_0^n = \frac{[1 - \frac{h\Delta x}{2k_L}]u_1^n + \frac{h\Delta x}{k_L}u_\infty(n\Delta t)}{1 + \frac{h\Delta x}{2k_L}}, \quad (3.69)$$

$$n = 1, \dots, N \quad (3.70)$$

$$\text{granični uslov na } x = l : \quad u_{M+1}^n = u_M^n, \quad n = 1, \dots, N \quad (3.71)$$

$$\text{unutrašnje vrednosti: } H_j^{n+1} = H_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} [u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n], \quad (3.72)$$

$$j = 1, \dots, M, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (3.73)$$

$$u_j^n = \beta^{-1}(H_j^n) = \begin{cases} \alpha_S H_j^n, & H_j^n \leq 0 \text{ (čvrsto)} \\ 0, & 0 < H_j^n < \rho L \text{ (interfejs)} \\ \alpha_L [H_j^n - \rho L], & H_j^n \geq \rho L \text{ (tečno)} \end{cases} \quad (3.74)$$

za  $j = 1, \dots, M$  i  $n = 0, \dots, N$ . Da bi uslov (3.73) bio ispravan i za  $j = 1$  i  $j = M$  definišemo  $x_j = (j - 1/2)\Delta x$  za  $j = 0, 1, \dots, M+1$ , a temperaturi  $u_0^n$  dodelimo "lažni čvor"  $x_0 = -1/2\Delta x$ , gde je  $u(0, t)$  prosečna vrednost  $u_0^n$  i  $u_1^n$ .

Za svaku podelu veličine  $M$  dati algoritam generiše konačne nizove

$$\{H_j^n\}_{j=1, \dots, M}^{n=0, \dots, N-1}, \quad \{u_j^n\}_{j=1, \dots, M}^{n=0, \dots, N-1}$$

odakle definišemo diskretna rešenja (kao po delovima glatke konstantne funkcije):

$$\bar{u}^M(x, t) := u_j^n, \quad \bar{u}_x^M(x, t) := \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}, \quad \bar{H}^M(x, t) := H_j^n$$

za  $(j-1)\Delta x \leq x \leq j\Delta x, j = 1, \dots, M,$   
 $n\Delta t \leq t < (n+1)\Delta t, n = 0, \dots, N-1$ , ako je  $(x, t) \in \bar{G}$

$$\bar{u}^M(x, t) := 0, \quad \bar{H}^M(x, t) := 0$$

ako  $(x, t) \notin \bar{G}$ .

$M$  označava zavisnost od veličine podele. Pustajući da  $M \rightarrow \infty$ , što implicira  $N \rightarrow \infty$  i  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ , generišemo niz diskretnih rešenja  $\{\bar{u}^M, \bar{H}^M\}$  za sve finije i finije podele.

**Teorema 3.4.1.** *Egzistencija slabog rešenja*

*Ako su  $u_p(x)$  i  $u_\infty(t)$  ograničene funkcije i zadovoljavaju*

$$u_p, (u_p)_x \in \mathbf{L}^2(0, l) \quad i \quad u_\infty, (u_\infty)_t \in \mathbf{L}^2(0, t^*)$$

*onda dati problem ima jedinstveno slabo rešenje  $\{u, H\}$  i diskretna rešenja entalpijske šeme konvergiraju ka slabom rešenju kada  $M \rightarrow \infty$ .*

## Poglavlje 4

# Matematički model odmrzavanja zamrznutih pekarskih proizvoda

Postoje mnoga istraživanja na temu upotrebe smrznute hrane, čija konzumacija raste iz godine u godinu. Proizvođačima kao i potrošačima važan je kvalitet hrane. Neminovno je da se kvalitet hrane gubi prilikom njenog smrzavanja, a takodje i prilikom odmrzavanja. Specijalno, u ovom poglavlju bavićemo se odmrzavanjem smrznutih pekarskih proizvoda (Žu-žu testo pekare "Milan" iz Novog Sada). Sam proces odmrzavanja, naravno, zavisi i od načina na koji je testo zamrznuto. Jedan od bitnih saveta za zamrzavanje u kućnim frižiderima jeste da, ukoliko je temperatura na kojoj zamrzavamo viša zamrzavanje treba da traje kraće [9]. Glavni sastojci za pravljenje testa jesu brašno, voda, kvasac (postoje i kvasna i beskvasna testa) i so. Voda ima veoma važnu ulogu kako u procesu zamrzavanja, tako i u procesu odmrzavanja testa. Kristali leda prilikom zamrzavanja mogu oštetiti strukturu testa i na taj način narušiti kvalitet finalnog proizvoda koji dobijamo pečenjem. Kvalitet pekarskih proizvoda ogleda se u boji, ukusu, hrskavosti, mekoći, razlistanosti (u slučaju lisnatih testa). Prilikom odmrzavanja hrane, ek-sudacija koja je posledica različitih fizičkih fenomena koji se dešavaju prilikom zamrzavanja i odmrzavanja, zavisi od nekoliko faktora i veća je ukoliko:

- je proces zamrzavanja sporiji
- su temperaturne fluktuacije tokom zamrznutog perioda česte
- je dužina zamrznutg perioda velika
- je brza stopa odmrzavanja
- su proizvodi manji, sa većim sadržajem vode
- je period odmrzavanja duži

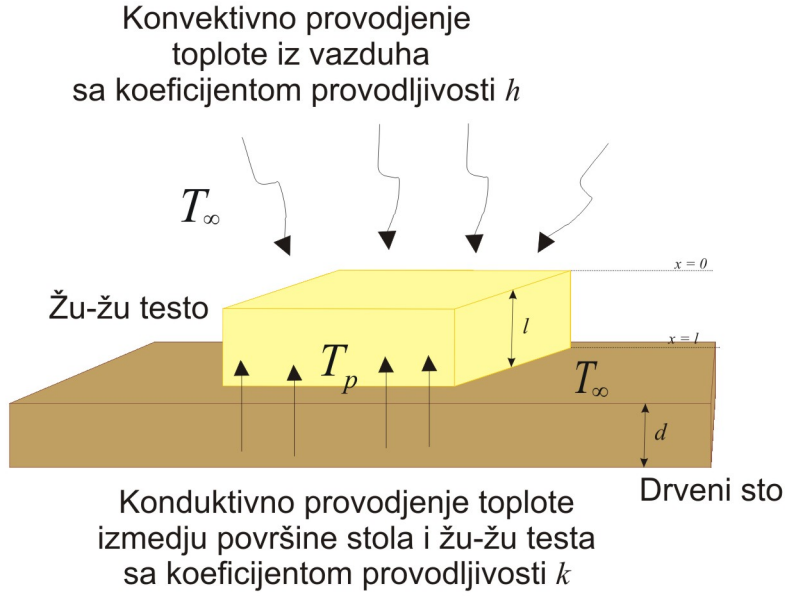
Prilikom zamrzavanja proizvodi nisu u opasnosti od razvoja velikog broja bakterija, ali ovaj problem postoji prilikom odmrzavanja i zato je bitno da proces odmrzavanja ne traje dugo i da površina i unutrašnjost proizvoda ne dostižu visoke temperature. Dakle, prema već sprovedenim istaživanjima, najbolje bi bilo odmrzavati proizvode u frižideru (ali tu nailazimo na problem dugog trajanja ovog procesa). Ukoliko odmrzavamo na sobnoj temperaturi, ovaj proces traje znatno kraće, ali moramo voditi računa da proizvod ne stoji predugo na sobnoj temperaturi (ne više od 3-4 sata, u zavisnosti od veličine testa). [9].

## 4.1 Proces odmrzavanja Žu-žu testa - matematički model

Kako je temperatura testa prilikom odmrzavanja merljiva veličina koja svakako utiče na kvalitet finalnog proizvoda, u ovom odeljku dajemo matematički model promene temperature Žu-žu testa u zavisnosti od vremena, gde se odmrzavanje vrši na sobnoj temperaturi ( $25^{\circ}\text{C}$ ) i u frižideru ( $4^{\circ}\text{C}$ ). Žu-žu je beskvasno testo, te ćemo se koncentrisati na osobine vode, leda i pšeničnog brašna koje utiču na odmrzavanje.

Žu-žu testo je zamrznuto u kućnom frižideru na  $-11^{\circ}\text{C}$ . U prvom slučaju, proces odmrzavanja vrši se na sobnoj temperaturi  $25^{\circ}\text{C}$ . Gornja površina Žu-žu testa izložena je direktno vazduhu, dok se donja nalazi na drvenom stolu (Slika 4.1). Pokazaćemo i razliku u vremenu potrebnom za odmrzavanje ukoliko testo prekrijemo najlonom (kako se i preporučuje u literaturi). Drugi slučaj će opisati isti proces koji će se odvijati u frižideru na temperaturi od  $4^{\circ}\text{C}$ .

Za matematički model prethodno izloženog problema koristićemo model sličan modelu (3.56), sa izmenjenim graničnim uslovom na granici  $x = l$ . Granica  $x = 0$  predstavljala slobodnu (gornju) površinu testa, dok granica  $x = l$  predstavlja površinu u dodiru sa stolom (donju). Kako se proces promene faze odvija sa obe strane, sa  $X_1(t)$  i  $X_2(t)$  označićemo granice između odmrznutog i zamrznutog



Slika 4.1: Zamrznuto žu-žu testo

dela testa, ukoliko posmatramo proces sa gornje, odnosno sa donje strane.

$$\begin{aligned}
 \rho c_S T_t &= (k_S T_x)_x, \\
 0 < x < l, \quad 0 < t < t_p \text{ i } X_1(t) < x < l, \quad X_2(t) < x < l \text{ i } t > t_p \\
 \rho c_L T_t &= (k_L T_x)_x, \quad 0 < x < X_1(t), \quad X_2(t) < x < l \text{ i } t > t_p \\
 -k_S T_x(0, t) &= h[T_\infty(t) - T(0, t)], \quad t < t_p \\
 -k_L T_x(0, t) &= h[T_\infty(t) - T(0, t)], \quad t > t_p \\
 T(x, 0) &= T_p(x), \quad X_1(t_p) = 0, \quad X_2(t_p) = l \\
 T(X_{1,2}(t), t) &= T_m, \quad t > t_p \\
 \rho L X_1'(t) &= -k_L T_x(X_1(t)^-, t) + k_S T_x(X_1(t)^+, t), \quad t > t_p \\
 \rho L X_2'(t) &= -k_L T_x(X_2(t)^+, t) + k_S T_x(X_2(t)^-, t), \quad t > t_p
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

gde umesto uslova  $T_x(l, t) = 0, \quad t > 0$  na granici  $x = l$  posmatramo odvijanje procesa zagrevanja, u ovom slučaju provođenja toplote kroz površine stola, kondukcijom, datog uslovima

$$\begin{aligned}
 -k_S T_x(l, t) &= k[T_\infty(t) - T(l, t)], \quad t < t_p \\
 -k_L T_x(l, t) &= k[T_\infty(t) - T(l, t)], \quad t > t_p,
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

gde je  $k = \frac{k_s}{d}$  Na ovaj način formulisali smo Stefanov problem za proces odm-

rzavanja testa koji ćemo numerički rešiti. Uvođenjem Kirhofove temperature svodimo problem na numeričku šemu entalpije (3.68) sa uslovom na granici

$$x = l : u_l^n = \frac{[1 - \frac{k\Delta x}{2k_L}]u_{l-1}^n + \frac{k\Delta x}{k_L}u_\infty(n\Delta t)}{1 + \frac{k\Delta x}{2k_L}}, \quad n = 1, \dots, N.$$

U narednoj tabeli dajemo vrednosti konstanti bitnih za proces provođenja toplote prilikom odmrzavanja Žu-žu testa, koje su korišćene za numerički algoritam. Koeficijenti nisu dobijeni eksperimentalno, već su preuzeti iz dosadašnjih istraživanja procesa zamrzavanja i odmrzavanja testa [6], [24], [25] i [29].

| Naziv konstante                      | Jedinica mere        | Oznaka     | Vrednost |
|--------------------------------------|----------------------|------------|----------|
| Gustina testa                        | [kg/m <sup>3</sup> ] | $\rho$     | 1070     |
| Latentna toplota                     | [J/kg]               | $L$        | 234000   |
| Specifična toplota smrznutog testa   | [J/kgK]              | $c_S$      | 1400     |
| Specifična toplota odmrznutog testa  | [J/kgK]              | $c_L$      | 1660     |
| Topl. provodljivost smrznutog testa  | [W/mK]               | $k_S$      | 0.66     |
| Topl. provodljivost odmrznutog testa | [W/mK]               | $k_L$      | 0.58     |
| Koef. slobodne konvekcije iz vazduha | [W/m <sup>2</sup> K] | $h$        | 4.3      |
| Provodljivost stola                  | [W/mK]               | $k_s$      | 0.17     |
| Početna temperatura testa            | [°C]                 | $T_p$      | -11      |
| Temperatura okoline (sobna/frižider) | [°C]                 | $T_\infty$ | 25/4     |
| Debljina smrznutog testa             | [m]                  | $l$        | 0.01     |
| Debljina stola                       | [m]                  | $d$        | 0.05     |

Tabela 4.1: Konstante koje karakterišu proces provođenja toplote prilikom odmrzavanja žu-žu testa

Specifična toplota smrznutog i odmrznutog testa, kao i koeficijent kondukcije istih dobijeni su kombinacijom pomenutih osobina za vodu i brašno, kao glavne sastojke testa, gde smatramo da testo sadrži 15% vode i 65% brašna. Tada je provodljivost testa procenjena koristeći jednačinu za provodljivost materijala koji se sastoje iz dve komponente [28], odakle dobijamo

$$k_S = \frac{k_b p_1 + k_l p_2 \frac{3k_b}{2k_b + k_l}}{p_1 + p_2 \frac{3k_b}{2k_b + k_l}}$$

za zamrznuto testo, gde je  $k_l = 2.18$  W/mK provodljivost leda, a  $k_b = 0.45$  W/mK provodljivost brašna,  $p_1 = 0.65$  i  $p_2 = 0.15$ . Na isti način dobijamo provodljivost odmrznutog testa, gde umesto  $k_l$  imamo  $k_v = 0.58$  W/mK - provodljivost vode. Provodljivost procenjujemo uz korekcije reda  $10^{-2}$  W/mK, čime uzimamo u obzir uticaj ostalih sastojaka testa (ulje, so, margarin, jaja, šećer i aditivi).

Specifična toplota je izračunata kao zbir pojedinačnih udela specifičnih toplota vode i brašna, odnosno leda i brašna [26]:

$$c_L = \frac{0.15\rho_v c_v + 0.65\rho_b c_b}{0.15\rho_v + 0.65\rho_b} \text{ i } c_S = \frac{0.15\rho_l c_l + 0.65\rho_b c_b}{0.15\rho_l + 0.65\rho_b},$$

uz dodatne korekcije reda  $10^{-2}$  kJ/kgK.

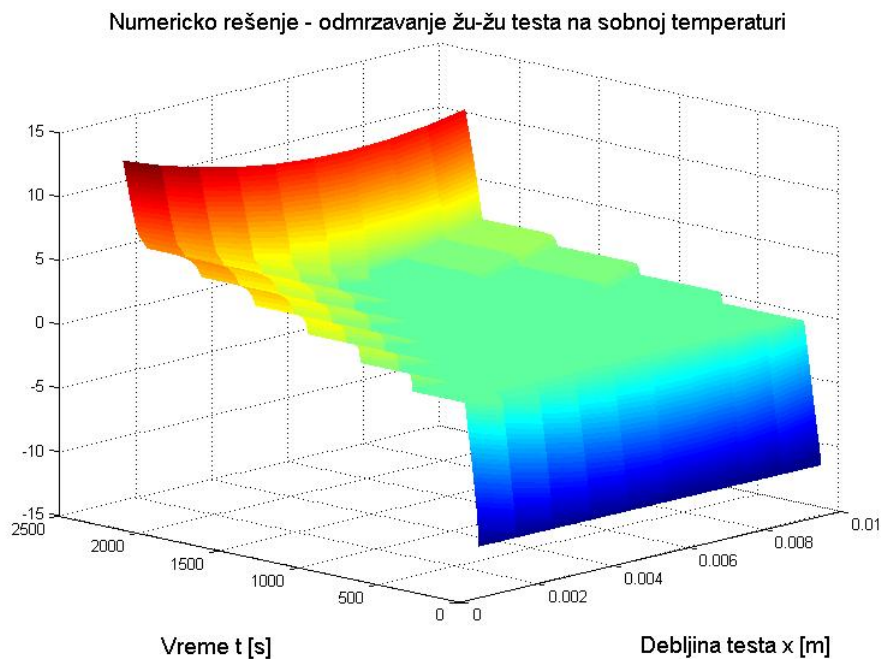
$c_l = 2.09$  kJ/kgK,  $c_v = 4.18$  kJ/kgK i  $c_b = 1.59$  kJ/kgK iznad temperature smrzavanja,  $c_b = 1.17$  kJ/kgK ispod temperature smrzavanja, a  $\rho_{v(l)} = 1000\text{kg/m}^3$  i  $\rho_b = 561\text{kg/m}^3$  gustina vode(leđa) i brašna respektivno.

Koeficijent slobodne konvekcije vazduha (koji se kreće preko ravne horizontalne ploče) generalno uzima vrednosti  $0.5 - 5$  W/m<sup>2</sup>K [29]. Dimenzije žu - žu testa su, u poređenju sa dimenzijama drvenog stola na koji je postavljeno, veoma male. Zato toplota koju žu - žu dobija sa bočnih strana, od okolnog vazduha, utiče na zagrevanje i njegove donje i gornje površine.

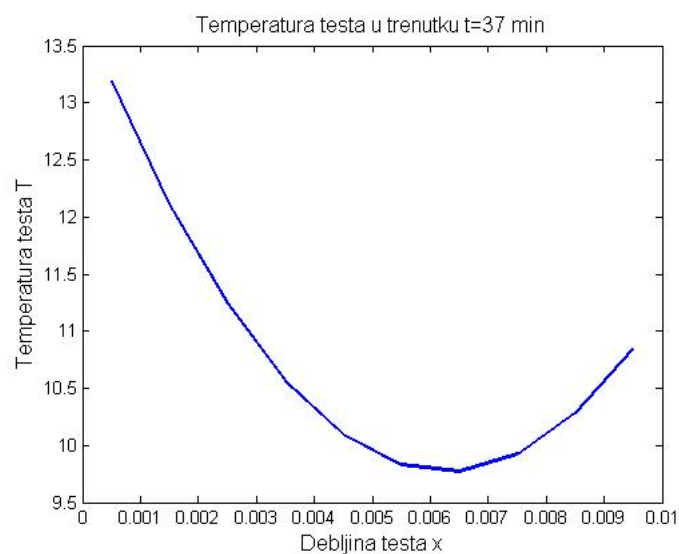
## 4.2 Prikaz numeričkih rezultata

### Numeričko rešenje za odmrzavanje žu-žu testa na sobnoj temperaturi 25°C

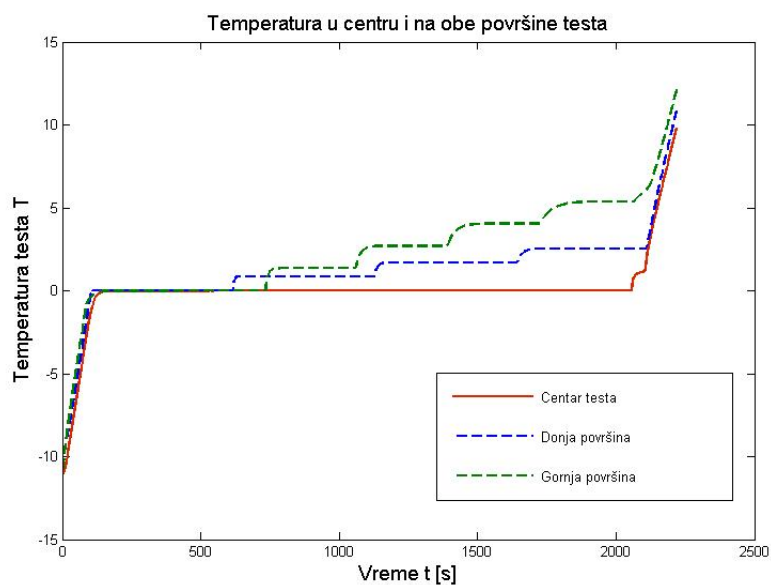
Sledeći grafici pokazuju promenu temperature testa tokom vremena (Slika 4.2), gde proces odmrzavanja posmatramo u vremenskom intervalu od 37 minuta. Domen rešavanja Stefanovog problema diskretizovali smo ekvidistantnom podelom (od gornje do donje površine žu-žu testa) u 10 tačaka podele, a vremenski interval je diskretizovan tako da zadovoljava uslov za stabilnost postupka. Slika 4.3 pokazuje temperaturu žu-žu testa na kraju posmatranog procesa, odnosno u trenutku  $t = 37$  min. Slika 4.4 pokazuje promenu temperature u centru i na obe površine žu-žu testa.



Slika 4.2: Odmrzavanje žu-žu testa na sobnoj temperaturi



Slika 4.3: Temperatura testa nakon 37 minuta



Slika 4.4: Promena temperature u centru i na obe površine žu-žu testa

*Napomena 4.2.1.* Na slici 4.4 možemo primetiti da temperatura pri zagrevanju formira krivu u obliku stepenica. Ovaj "stepenasti" oblik je karakteristika numeričke šeme entalpije [1]. Stepenice postoje jer smo, kako je već na početku ovog poglavlja naglašeno, koristili diskretizaciju prostorne promenljive u samo 10

tačkica (stoga je "stepanasti" oblik još vidljiviji). Prilikom pomeranja međufazne površi u naredni interval mreže diskretizacije, temperatura naglo raste, a zatim ostaje određeno vreme u novom stacionarnom stanju. Stoga, dužina stepenica zavisi od vremenskog intervala u kom međufazna površ ostaje na jednom mestu. Posledica jeste da, što je mreža finija, to će "stepenasti" oblik biti manje vidljiv.

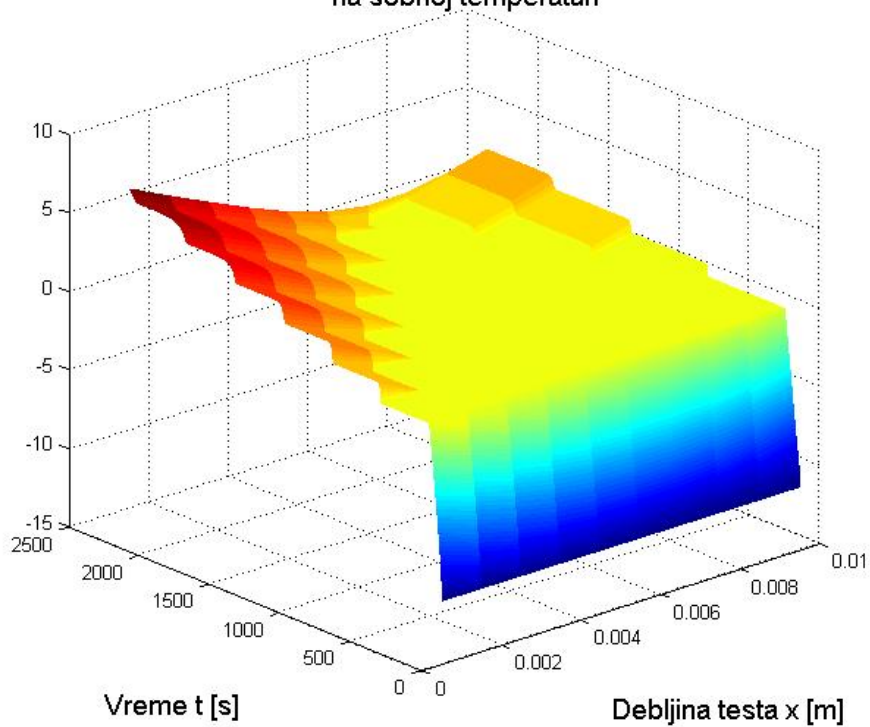
Ono što je bitno istaći je da se (zanemarujući prethodno pomenute "skokove") proces zagravanja odvija u tri faze. Prvo, testo se zagrava do  $0^{\circ}\text{C}$ , zatim je temperatura određeno vreme konstantna i jednaka nuli, a zatim nastavlja zagrevanje i postiže temperature iznad  $0^{\circ}\text{C}$ . Zagrevanje je najbrže na samom početku procesa, u prvoj fazi, jer tada postoji najveća temperaturna razlika između temperature okoline i temperature površine testa. U trećoj fazi, nagib temperaturne krive je manji, što ukazuje na sporije zagrevanje. Takođe, druga faza, gde je temperatura konstantna, traje kraće na granicama, a duže u centru testa - granice se zagravaju brže od centra testa. Gornja i donja granica zagraju se iznad  $0^{\circ}\text{C}$  već nakon 10, 15 minuta, respektivno. Centar temperaturu iznad nule postiže već nakon 35 minuta (dovoljeno je da postigne temperaturu od  $2^{\circ}\text{C}$ ), pa žu - žu možemo smatrati odmrznutim (Slika 4.4).

Ukoliko žu - žu testo prekrijemo najlonom debljine 1mm, preko gornje površine, koeficijent provođenja toplote dobija vrednost

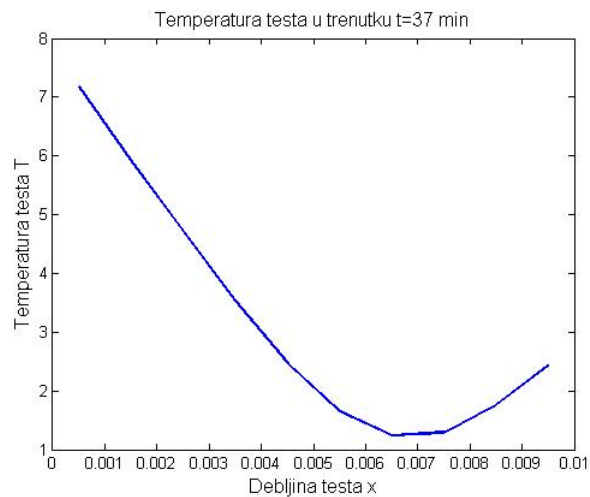
$$h_1 = \frac{1}{\frac{1}{4.3} + \frac{0.001}{0.35}},$$

gde je provodljivost najlona  $k_n = 0.35\text{W/mK}$ . Primetićemo da za isto vreme (37 min) površina i centar žu-žu testa sada dostižu znatno nižu temperaturu, ali opet dovoljnu da testo smatramo odmrznutim.

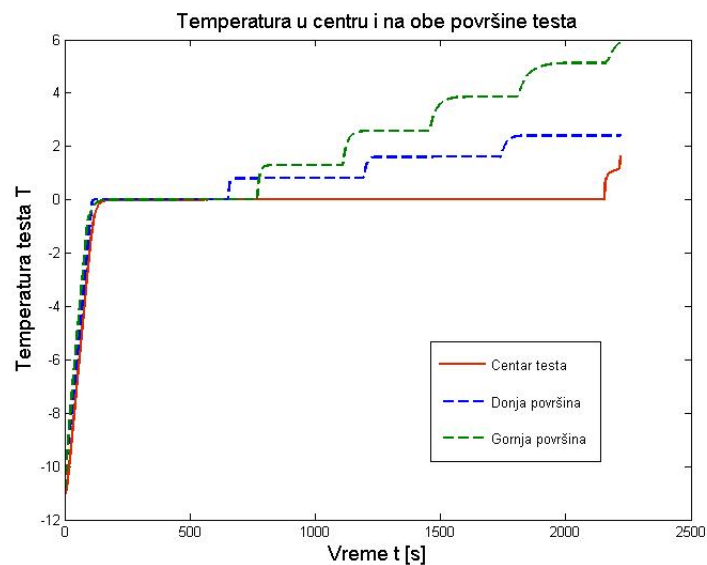
Numericko rešenje - odmrzavanje žu-žu testa (prekrivenog najlonom)  
na sobnoj temperaturi



Slika 4.5: Odmrzavanje žu-žu testa (prekrivenog najlonom) na sobnoj temperaturi



Slika 4.6: Temperatura testa nakon 37 minuta

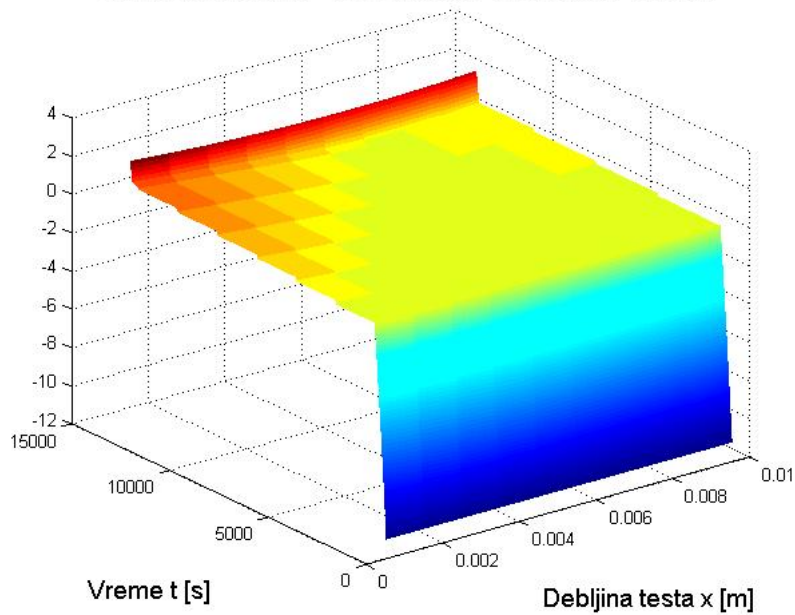


Slika 4.7: Promena temperature u centru i na obe površine žu-žu testa

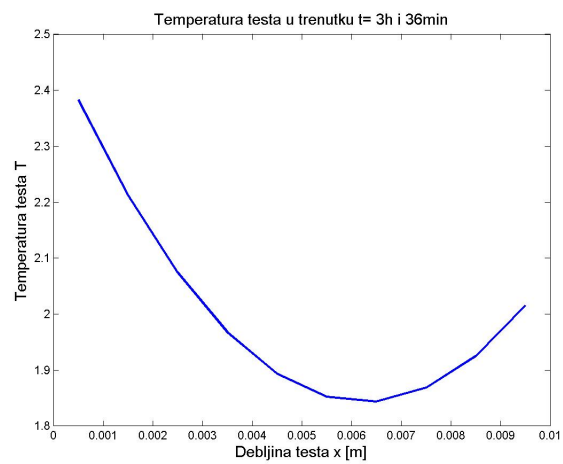
#### Numeričko rešenje za odmrzavanje Žu-žu testa u frižideru na 4°C

Posmatrajmo sada žu - žu testo, sa istim karakteristikama kao i u prvom slučaju, koje odmrzavamo na temperaturi od 4°C. Gornja površina testa izložena je direktno vazduhu, a donja se kao i ranije nalazi na drvenoj dasci. Navedeni koeficijenti u Tabeli 4.1 važe. Proces se odvija na isti način kao i ranije, ali je mnogo sporiji. Da bismo odmrznuli žu - žu testo u frižideru potrebno nam je čak tri sata više nego na sobnoj temperaturi, i pritom testo u frižideru nakon 3 sata i 36 minuta dostiže temperaturu od 2°C.

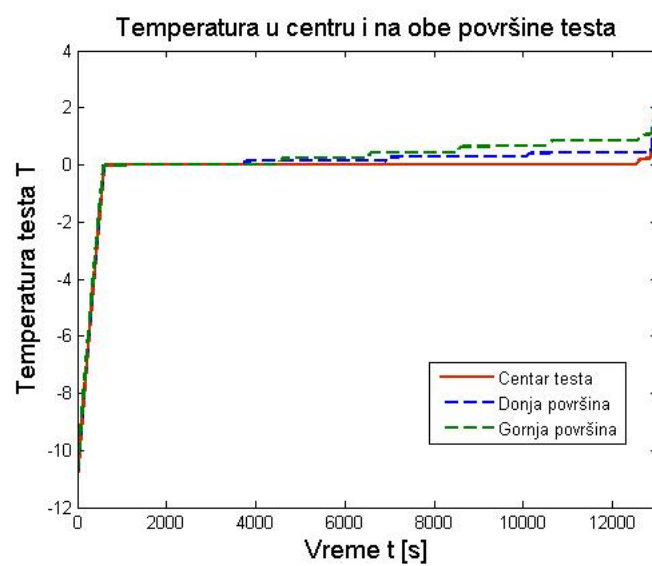
Numericko rešenje - odmrzavanje žu-žu testa u frižideru



Slika 4.8: Odmrzavanje žu-žu testa u frižideru



Slika 4.9: Temperatura testa nakon 3h i 36min



Slika 4.10: Temperatura testa nakon u centru i na obe površine žu - žu testa

# Zaključak

U cilju formiranja matematičkog modela koji opisuje proces odmrzavanja žu-žu testa, bilo je potrebno napraviti dobru teorijsku podlogu. Možemo primetiti da je toplotna jednačina pojam koji se pominje tokom celog rada, i matematički "alat" koji smo koristili prilikom modeliranja. Ona jeste predstavnik paraboličnih jednačina, i iz tog razloga je čitavo drugo poglavlje ovog rada posvećeno njima. Ono što karakteriše toplotne jednačine jeste princip maksimuma. U slabom smislu, pokazali smo da rešenje toplotne jednačine dostiže maksimum na granici date oblasti, i ne dostiže ga u unutrašnjosti. Jaki princip maksimuma ovo tvrđenje dopunjuje sa izuzetkom na konstantne funkcije. Dokaz jakog principa maksimuma dat je dokazima četiti Leme. Dokazana je i interesantna posledica, teorema o znaku izvoda rešenja u pravcu spoljašnje normale. Ova teorema, kao i princip maksimuma, koristili su nam u dokazu postojanja i jedinstvenosti rešenja za jaku formulaciju Stefanovog probelma.

Kako je navedeno u trećem poglavlju, jaka formulacija Stefanovog problema može biti data sa Dirihleovim ili Nojmanovim uslovom na granici. U ovom radu, dat je dokaz za Stefanov problem sa Dirihleovim uslovom (iako znatno duži i komplikovaniji), koji zahteva znanje iz različitih matematičkih oblasti. Stoga je celo prvo poglavlje posvećeno pripremi za ovaj dokaz. Kroz ovaj dokaz, uočili smo i koristili neke bitne osobine Grinove funkcije kao fundamentalnog rešenja toplotne jednačine u poluravni. Stefanov problem je, od kad je nastao, jedan od onih koji je matematičare počeo uvoditi u svet nelinearnosti. Tokom ovakvih procesa suočavamo se sa postojanjem granice između dva stanja. Ona je nekad oštra, nekad predstavlja mešovitu zonu, ali najčešće nam je njen oblik nepoznat. Zato je se težilo ka tome da se prilikom formiranja rešenja granica na neki način izbegne. U radu je data i slaba formulacija Stefanovog probelma i numerička šema entalpije, kojom dobijamo rešenje koje konvergira slabom rešenju. Uvođenjem Kirhofove temperature i izbegavanjem granice na ovaj način, u mnogome smo pojednostavili problem.

Model za odmrzavanje žu-žu testa formiran je po ugledu na (3.56), sa modifikacijom na granične uslove, odnosno uvođenjem fluksa i na drugoj granici. Da bi model bio realan, bilo je potrebno analizirati karakteristike provođenje toplote i

promene temperature materijala, čije smo definicije dali na početku trećeg poglavlja. Najteže je bilo napraviti dobru procenu za konduktivnost materijala (jer je testo ipak sastavljeno iz velikog broja sastojaka, koji više ili manje utiču na sam proces) i koeficijent konvekcije na gornjoj površini testa izloženoj vazduhu. Ove koeficijetne smo zbog jednostavnosti smatrali kao konstantne vrednosti, ali one svakako mogu zavisti od temperature tokom samog procesa i uneti nelinearnost u naš model. Koeficijente smo procenili, na osnovu dosadašnjih istraživanja na ovu temu, i sa njima dobili model koji odgovara realnoj situaciji, što se može videti na datim graphicima koji predstavljaju numerička rešenja dobijena u programskom paketu Matlab. Testo se na sobnoj temperaturi odmrzava u vremenskom intervalu od 35-40 min, dok odmrzavanje u frižideru traje znatno duže. Varijacijom pomenutih koeficijenata koji utiču na samo provođenje toplote, posmatranjem različitih oblika i veličina testa rad ostavlja prostora za dalje eksperimente i unapređenje samog modela.

# Literatura

- [1] Alexiades, Vasilios. *Mathematical modeling of melting and freezing processes*. CRC Press, 1992.
- [2] Andreucci, Daniele. *Lecture notes on the Stefan problem*. Quaderno del Dottorato "Metodi e Modelli Matematici per la Tecnologia e la Societ 1", Roma, 2002.
- [3] Briozzo, Adriana C., and Domingo A. Tarzia. *A Stefan problem for a non-classical heat equation with a convective condition*. *Applied Mathematics and Computation* 217.8 (2010): 4051-4060.
- [4] Cauvain, Stanley P., Linda S. Young. *Technology of Breadmaking*. New York: Springer, 2007.
- [5] Ciobanu, A., Lascu, G., Bercescu, V., Niculescu, L. *Cooling technology in the food industry*. CRC Press, 1976.
- [6] Chichester, C. O. , Stewart, George F. *Advances in food research*. Vol. 20., Academic Press, p.337, 1974.
- [7] Duffy, Dean G. *Green's functions with applications*. CRC Press, 2010.
- [8] Evans, Lawrence C. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.
- [9] Evans, Judith A., ed. *Frozen food science and technology*. Blackwell, 2008.
- [10] Folland, Gerald B. *Introduction to partial differential equations*. Princeton University Press, 1995.
- [11] Friedman, Avner. *Partial differential equations of parabolic type*. Courier Dover Publications, 2013.
- [12] Gustafson, Stephen. *Green's functions for time dependent problems*, Lecture notes, Department of Mathematics, University of British Columbia, 2012.

- [13] Haberman, Richard. *Applied partial differential equations: with Fourier series and boundary value problems*. Vol. 4. Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall, 2004.
- [14] Hoffman, Joe D., and Steven Frankel. *Numerical methods for engineers and scientists*. CRC press, 2001.
- [15] Incropera, Frank P. *Introduction to heat transfer*. John Wiley & Sons, 2011.
- [16] Kawarada, Hideo. *Stefan-type free boundary problems for heat equations*. Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences 9.3 (1973): 517-533.
- [17] Kress, Rainer, V. Maz'ya, and V. Kozlov. *Linear integral equations*. Vol. 82. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
- [18] Kuttler, Christina. *Reaction-Diffusion equations with applications*., Lecture script, Technische Universit ät München, 2011.
- [19] Nedeljkov, Marko. *Parcijalne diferencijalne jednačine*, Prirodno - matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad, 2004.
- [20] Protter, Murray H., Hans F. Weinberger. *Maximum principles in differential equations*. Springer, 1984.
- [21] Smoller, Joel. *Shock waves and reaction-diffusion equations*, Research supported by the US Air Force and National Science Foundation. New York and Heidelberg, Springer-Verlag (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Volume 258), 1983, 600 p.
- [22] Strauss, Walter A. *Partial differential equations: An introduction*. New York, 1992.
- [23] Stakgold, Ivar, and Michael J. Holst. *Green's functions and boundary value problems*. Vol. 99. John Wiley & Sons, 2011.
- [24] Sun, Da-Wen, ed. *Handbook of frozen food processing and packaging*. CRC Press, 2011.
- [25] Šeruga, Bernarda, Sandra Budžaki, and Žaneta Ugarčić-Hardi. *Individual Heat Transfer Modes During Baking of "Mlinici" Dough*. Agriculturae Conspectus Scientificus (ACS) 72.3 (2007): 257-263.

- [26] Valentas, Kenneth J., Enrique Rotstein, R. Paul Singh. *Handbook of food engineering practice*. CRC Press, 1997.
- [27] Vuik, C. *Some historical notes on the Stefan problem.*, Faculty of Electrical Engineering, Mathematics and Computer Science, Delft University of Technology
- [28] Wang, Jianfeng, et al. *A new approach to modelling the effective thermal conductivity of heterogeneous materials*. International journal of heat and mass transfer 49.17 (2006): 3075-3083.
- [29] <http://people.csail.mit.edu/jaffer/SimRoof/Convection>
- [30] <http://www.engineeringtoolbox.com/>

# Biografija



Danka Lučić je rođena 18.5.1990. u Somboru. Osnovnu školu "20. Oktobar" je završila u Sivcu, 2005. godine. Iste godine je upisala Gimnaziju "Veljko Petrović" u Somboru, prirodno - matematički smer, koju završava 2009. godine. Po završetku gimnazije, 2009. godine, upisala je osnovne studije na Prirodno - matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer primenjena matematika, modul tehnomatematika,

koje je završila 2012. godine, sa prosečnom ocenom 10,00. Potom je upisala master studije na Prirodno - matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija u junskom roku 2014. godine. Od 2010. godine član je Privrednog srpskog društva - Fondacije "Privrednik" i stipendista Fonda za mlade talente Republike Srbije - Dositeja (2012. i 2014. godine).

Novi Sad, Avgust, 2014.

Danka Lučić

UNIVERZITET U NOVOM SADU  
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET  
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

**RBR**

Identifikacioni broj:

**IBR**

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

**TD**

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

**TZ**

Vrsta rada: Završni rad

**VR**

Autor: Danka Lučić

**AU**

Mentor: dr Marko Nedeljkov

**MN**

Naslov rada: Stefanov problem u modelima topljenja

**NR**

Jezik publikacije: srpski (latinica)

**JP**

Jezik izvoda: s / e

**JI**

Zemlja publikovanja: Srbija

**ZP**

Uže geografsko područje: Vojvodina

**UGP**

Godina: 2014

**GO**

Izdavač: Autorski reprint

**IZ**

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

**MA**

Fizički opis rada: (4, 89, 30, 3, 22, 0, 0)

**FO**

Naučna oblast: Matematika

**NO**

Naučna disciplina: Parcijalne diferencijalne jednačine

**ND**

Predmetna odrednica/Ključne reči: Linearne parabolične jednačine, Princip maksimuma, Toplotna jednačina, Fundamentalno rešenje, Grinova funkcija, Stefanov problem, Slabo rešenje PDJ, Provođenje toplote, Numerička šema entalpije, Odmrzavanje pekarskih proizvoda

**PO**

**UDK:**

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

**ČU**

Važna napomena:

**VN**

Izvod:

**IZ**

U ovom master radu se bavimo matematičkim modelom koji opisuje problem topljenja, odnosno prelaska materije iz čvrstog u tečno stanje.

U prvom poglavlju dajemo kratak osvrt na teoriju Parcijalnih diferencijalnih jednačina, njihovog slabog rešenja i prostora distribucija. Drugo poglavlje odnosi se na Linearne parabolične jednačine. Prvo analiziramo toplotnu jednačinu kao reprezentativni primer paraboličnih jednačina, dajemo izvođenje fundamentalnog rešenja i njegove osobine. Radi boljeg razumevanja fundamentalnog rešenja data je i analiza Grinove funkcije. Potom slede teoreme o principu maksimuma (jakom i slabom), njihovo poređenje i posledice ovih principa.

Treće i četvrto poglavlje odnose se na formulaciju Stefanovog problema i na matematički model odmrzavanja testa kao primer Stefanovog problema. Prvo opisujemo problem sa fizičke strane, dajemo bitne termine i pojmove za sam proces provođenja toplote. Zatim proces provođenja toplote prilikom topljenja opisujemo matematičkim modelom. Za jaku formulaciju Stefanovog problema dat je i kompletan dokaz (u jednodimenzionalnom slučaju). Navodimo zatim i slabu formulaciju istog problema i numeričku metodu kontrolnih zapremina, koja nas dovodi do numeričke šeme entalpije, koja konvergira navedenom slabom rešenju. Ovaj numerički postupak primenjen je na rešavanje konkretnog problema - odmrzavanja žu-žu testa pekare "Milan" iz Novog Sada. Rezultati dobijeni implementacijom šeme entalpije u programskom paketu Matlab, prikazani su grafički na samom kraju rada.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća:

**DP** Avgust, 2014.

Datum odbrane:

**DO**

Članovi komisije:

**KO**

Predsednik: dr Nataša Krejić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Marko Nedeljkov, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

Član: dr Srboľjub Simic, redovni profesor, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD  
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS  
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

**ANO**

Identification number:

**INO**

Document type: Monograph type

**DT**

Type of record: Printed text

**TR**

Contents Code: Master's thesis

**CC**

Author: Danka Lučić

**AU**

Mentor: Marko Nedeljkov, Ph.D.

**MN**

Title: Stefan problem in modeling of thawing

**TI**

Language of text: Serbian

**LT**

Language of abstract: English

**LA**

Country of publication: Serbia

**CP**

Locality of publication: Vojvodina

**LP**

Publication year: 2014

**PY**

Publisher: Author's reprint

**PU**

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

**PP**

Physical description: (4, 89, 30, 3, 22, 0, 0)

**PD**

Scientific field: Mathematics

**SF**

Scientific discipline: Partial Differential Equations

**SD**

Subject/Key words: Linear parabolic equation, Maximum principle, The heat equation, The fundamental solution, Green function, Stefan problem, Weak solution of PDE, Heat transfer, Numerical enthalpy scheme, Defrosting of bakery products

**SKW**

**UC:**

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

**HD**

Note:

**N**

Abstract:

**AB**

This thesis explores the heat equation and describe mathematical model for process of thawing (phase-change process).

In the first chapter we provide a brief overview of the theory of partial differential equations (PDE), weak solutions and space of distributions. The second section deals with the linear parabolic equation. First, we analyze the heat equation as a representative example of parabolic equations, we give the performance of the fundamental solution and its properties. For the better understanding of the fundamental solution analysis of Green's functions is given. Then the theorem on the maximum principle (strong and weak) and some consequences of these principles follow.

The third and fourth sections deal with the formulation of Stefan problem and the mathematical model of thawing process as an example of Stefan problem. First, process is described from the physical point of view. Namely, we give the essential terms and concepts in the process of heat transfer. Then, the mathematical model of the same process is formulated. For a strong formulation of Stefan problem the complete proof (in the one-dimensional case) is given. Then we set up the weak formulation of the same problem and numerical methods of control volume, which brings us to numerical enthalpy scheme, which converges to mentioned weak solution. This numerical procedure has been applied to solve specific problem - thawing of zu-zu dough (produced by bakery "Milan" from Novi Sad). The results obtained by implementing the enthalpy scheme in the programming software Matlab are presented graphically at the end of this paper.

Accepted by the Scientific Board on: August, 2014.

**ASB**

Defended:

**DE**

Thesis defend board:

**DB**

- |            |                                                                                                       |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| President: | Dr. Nataša Krejić, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad         |
| Member:    | Dr. Marko Nedeljkov, associate professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, |
| Member:    | Dr. Srboľjub Simić, full professor, Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad             |