UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Danilo Rapaić

Spektralna teorija operatora

- master rad -

Mentor: Prof. dr Stevan Pilipović

Novi Sad, 2010.

Sadržaj

Uvod

Ovaj rad predstavlja moj završni rad na master studijama Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu. Odlučio sam da rad pišem iz funkcionalne analize iz razloga što je ona područje savremene matematike, čije se metode i rezultati primenjuju u gotovo svim matematičkim disciplinama. Funkcionalnoj analizi se pripisuje ključna uloga kod afirmacije skupovnog i strukturalnog pristupa u izgradnji matematike. U funkcionalnoj analizi razmatra se skup funkcija koje imaju određeno svojstvo, a ne pojedinačna funkcija kako je to rađeno pre razvoja funkcionalne analize. Kraj devetnaestog i početak dvadesetog veka vezuje se za nastanak funkcionalne analize kao nadgradnja linearne algebre i oblasti klasične analize kao što su integralne i diferencijalne jednačine, razvijanje funkcija u redove itd.

Prvi deo rada sadrži osnovne pojmove i teoreme funkcionalne analize, u vezi sa Banahovim i Hilbertovim prostorima kao i fundamentalne teoreme kao što su teorema o otvorenom preslikavanju, o zatvorenom grafiku, Banah-Štajnhausova teorema, Han-Banahova teorema itd. Takođe je moguće videti i nekoliko interesantnih posledica navedenih teorema. Ovaj deo rada bi trabao da pomogne čitaocu prilikom praćenja drugog dela rada po kojem je i ceo rad dobio ime. Dakle, u drugom delu rada možemo videti šta je spektar operatora i klasifikaciju spektra, pregled najvažnijih rezultata u vezi sa spektrom kompaktnih operatora, spektralnu teoriju samoadjungovanih i unitarnih operatora kao i njihovu spektralnu dekompoziciju i definiciju odgovarajućih spektralnih integrala. Pored toga u radu se može videti kratak pregled najvažnijih rezultata u vezi sa neograničenim operatorima ali njihova detaljna analiza izlazi iz okvira ovog rada.

Rad je podeljen na dve glave, a svaka glava na nekoliko poglavlja. Naslovi tih glava i poglavlja ukazuju na sadržaj rada. Definicije, teoreme i primeri numerisani su po glavama i poglavljima. Na primer, pozivanje na teoremu 2.5.4 odnosi se na teoremu 4 poglavlja 5 glave 2.

Zahvalio bih se, ovom prilikom, svima koji su na bilo koji način doprineli izradi ovog rada. Posebnu zahvalnost dugujem svom mentoru Dr Stevanu Pilipoviću, čija su predavanja, pre svega, probudila moje interesovanje za funkcionalnu analizu. Takođe bih želeo da se zahvalim svom prijatelju Ivanu Pavkovu na logističkoj podršci koju je nesebično pružio.

Autor je svestan da je i pored svih uloženih napora u radu ostao niz propusta. Biću zahvalan svakome ko ima bilo kakvu sugestiju ili upozori na grešku.

1. Fundamentalne teoreme i osnovni pojmovi

1.1. Banahov prostor, Hilbertov prostor, prostor $\mathcal{L}(X, Y)$

Potsetićemo se nekih poznatih definicija i teorema u vezi sa normiranim prostorima kao i prostorima sa skalarnim proizvodom, koji će nam olakšati praćenje ovog rada. Dokazi ovih tvrđenja izlaze iz okvira ovog rada, pa će zbog toga biti izostavljeni.

Neka je X vektorski prostor nad poljem $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definicija 1.1.1 : Neka je $d : X^2 \to [0, \infty)$ takvo da za sve $x, y, z \in X$ važi:

1. $d(x, y) = 0$ ako i samo ako $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Tada kažemo da je preslikavanje d metrika na skupu X, a uređen par (X, d) metrički prostor.

Definicija 1.1.2 : Neka je $\nu : X \to [0, \infty)$ takvo da važe sledeći uslovi:

1. $\nu(x) = 0$ ako i samo ako $x = 0$,
2. $\nu(\lambda x) = |\lambda| \, \nu(x)$ za sve $\lambda \in F$ i sve $x, y \in X$,
3. $\nu(x + y) \leq \nu(x) + \nu(y)$ za sve $x, y \in X$.

Tada kažemo da je preslikavanje ν norma na X, a uređen par (X, ν) normiran prostor.

Normu nad X ćemo označavati sa $\|\cdot\|$ ili sa $\|\cdot\|_X$. Svaki normiran prostor je i metrički prostor sa metrikom d definisanom na sledeći način: $d(x, y) = \|x - y\|$ za sve $x, y \in X$. Ako je normiran prostor $(X, \|\cdot\|)$ kompletan metrički prostor onda, kažemo da je to Banahov prostor.

Definicija 1.1.3 : Preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : X^2 \to F$ za koje važi:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ za sve $x \in X$,
2. $\langle x, x \rangle = 0$ ako i samo ako $x = 0$,
3. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ za sve $x, y, z \in X$,
4. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ za sve $x, y \in X$ i sve $\lambda \in F$,
5. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ za sve $x, y \in X$

zovemo skalarni proizvod, a uređen par $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ prostor sa skalarnim proizvodom.

Prostor sa skalarnim proizvodom još zovemo pred-Hilbertov prostor. Važi da ako je $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ pred-Hilbertov prostor, onda je prostor $(X, \|\cdot\|)$ gde je $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ za svako $x \in X$, normiran prostor. Kompletan pred-Hilbertov prostor zovemo Hilbertov prostor.

Teorema 1.1.4 : Potreban i dovoljan uslov za postojanje skalarnog proizvoda $\langle \cdot, \cdot \rangle$ koji generiše normu $\|\cdot\|$ nad normiranim prostorom $(X, \|\cdot\|)$ je da važi

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\,(\|x\|^2 + \|y\|^2) \text{ za sve } x,\ y \in X.$$

Poslednja jednakost je poznata kao zakon paralelograma. Ako je zakon paralelograma ispunjen tada je navedeni skalarni proizvod dat relacijom

(1.1.5) $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\,(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i(\|x + i\,y\|^2 - \|x - i\,y\|^2))$ za sve $x,\ y \in X$ ako je $F = \mathbb{C}$

odnosno

(1.1.6) $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\,(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$ za sve $x,\ y \in X$ ako je $F = \mathbb{R}$.

Definicija 1.1.7 : Neka su $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normirani prostori nad istim poljem $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Preslikavanje $f : X \to Y$ je linearno ako je za sve $\alpha, \beta \in F$ i sve $x, y \in X$ $f(\alpha\,x + \beta\,y) = \alpha\,f(x) + \beta\,f(y)$. Ako je $Y = \mathbb{R}(\mathbb{C})$ za linearnu funkciju kažemo da je linearna funkcionela. Skup svih linearnih i neprekidnih preslikavanja iz X u Y označava se sa $\mathcal{L}(X, Y)$.

Definicija 1.1.8 : Neka su $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normirani prostori. Linearno preslikavanje $f : X \to Y$ je ograničeno ako postoji $M > 0$ tako da je $\|f(x)\|_Y \leq M\,\|x\|_X$ za sve $x \in X$.

Teorema 1.1.9 : Neka su $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normirani prostori i $f : X \to Y$ je linearno preslikavanje. Tada su sledeći uslovi ekvivalantni:

1. f je neprekidno,
2. f je neprekidno u tački $0 \in X$,
3. f je ograničeno.

Teorema 1.1.10 : Neka je $\mathcal{L}(X, Y)$ prostor linearnih ograničenih operatora. Tada je sa $\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X}$ definisana norma na $\mathcal{L}(X, Y)$ i važi $\|f\| = \sup_{\|x\|_X = 1} \|f(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|f(x)\|_Y$.

Teorema 1.1.11 : Neka je $(X, \|\cdot\|_X)$ normiran prostor i neka je $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banahov prostor. Tada je $\mathcal{L}(X, Y)$ takođe Banahov prostor.

Ubuduće ćemo prostor $\mathcal{L}(X, X)$ označavati sa $\mathcal{L}(X)$, skup svih linearnih funkcionela $X \to F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ označavaćemo sa $X^{\#}$, a podskup od $X^{\#}$ ograničenih linearnih funkcionela, koji još zovemo dualni prostor, sa X^*. Na osnovu prethodne teoreme lako vidimo da je X^* Banahov prostor.

U daljem radu uvek ćemo pretpostavljati da je X Banahov prostor osim kada se ne naglasi drugačije. Takođe nećemo isticati normu ili skalarni proizvod osim u slučajevima kada je to neophodno da bi se izbegla zabuna.

1.2 Tipovi konvergencije u prostoru $\mathcal{L}(X)$ ograničenih operatora

U prostoru $\mathcal{L}(X)$ mogu se definisati različiti tipovi konvergencije.

Definicija 1.2.1 : Za niz operatora $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ kažemo da konvergira po normi ka operatoru A, u oznaci $A_n \to A$ ako $\|A_n - A\| \to 0$ kad $n \to \infty$.

Prostor $\mathcal{L}(X)$ je kompletan, zato ako je $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Košijev niz u odnosu na normu, tada taj niz uvek konvergira ka nekom ograničenom operatoru.

Definišimo sada drugi važan tip konvergencije.

Definicija 1.2.2 : Za niz $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ operatora iz $\mathcal{L}(X)$ kažemo da jako konvergira ka operatoru A, u oznaci $A_n \xrightarrow{s} A$, ako za svako $x \in X$ $A_n x \to A x$.

Primetimo ovde, ako je niz $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Košijev u smislu jake konvergencije tj. da za svako $x \in X$ niz $\{A_n x\}_{n \in \mathbb{N}}$ je Košijev u X, tada postoji $A \in \mathcal{L}(X)$ tako da $A_n \xrightarrow{s} A$. Ova činjenica je direktna posledica Banah-Štajnhausove teoreme o kojoj će biti reči kasnije.

Lako se može pokazati da je jaka konvergencija "slabija" od konvergencije po normi. Zaista, iz $A_n \to A$ (po normi) sledi da za svako $x \in X$ $A_n x \to A x$ jer

$$\|A_n x - A x\| \leq \|x\| \, \|A_n - A\| \to 0.$$

Obrnuto ne važi, što pokazuje sledeći primer.

Posmatrajmo projekcije u prostoru $L_2[0, 1]$ definisane za $\varepsilon_n > 0$ sa

$$P_{\varepsilon_n} f = \begin{cases} f(t), & \text{za } t < \varepsilon_n \\ 0, & \text{za } t \geq \varepsilon_n \end{cases}.$$

Lako je videti da $P_{\varepsilon_n} f \to 0$ kad $\varepsilon_n \to 0$ za svako $f \in L_2[0, 1]$ tj. $\{P_{\varepsilon_n}\}$ konvergira jako ka nuli. Međutim $\|P_{\varepsilon_n}\| = 1$ i prema tome $\{P_{\varepsilon_n}\}$ ne konvergira ka nuli po normi.

Definisaćemo sada još jedan tip konvergencije.

Definicija 1.2.3 : Za niz $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ operatora iz $\mathcal{L}(X)$ kažemo da slabo konvergira ka operatoru A, u oznaci $A_n \overset{w}{\to} A$ ako za svako $x \in X$ i za svako $f \in X^*$ važi $f(A_n x) \to f(A x)$.

Da bismo uočili razliku između jake i slabe konvergencije posmatrajmo primer operatora "pomeranja" (desni operator) A u l_2, definisan sa

$$A x = (0, a_1, \ldots, a_n, \ldots), \text{ gde je } x = (a_1, \ldots, a_n, \ldots).$$

Za ovaj operator se lako može videti da $f(A^n x) \to 0$ za svako $f = \sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i$ i $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$. Zaista,

$$f(A^n x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} b_i a_{i-n} \text{ i zbog toga važi}$$
$$|f(A^n x)| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |b_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \text{ kad } n \to \infty.$$

Dakle, imamo $A_n \overset{w}{\to} 0$, ali $\|A x\| = \|x\|$ za svako $x \in l_2$ pa je $\|A^n x\| = \|x\|$. Zbog toga $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ne konvergira jako ka nuli.

1.3 Fundamentalne teoreme

U ovom poglavlju imaćemo priliku upoznati se sa nekoliko fundamentalnih teorema funkcionalne analize kao i sa nekim od njihovih važnijih posledica. Neke od njih se oslanjaju na pojam kategorije (Berove kategorije).

Neka je M kompletan metrički prostor (ne nužno linearan). Za skup $A \subseteq M$ kažemo da je nigde gust ako njegovo zatvaranje $\overline{A}$ nema unutrašnjih tačaka. Ako je skup A nigde gust, tada za svaku otvorenu loptu $B \subseteq M$ postoji otvorena lopta $B_1 \subseteq B$ takva da je $B_1 \cap A = \emptyset$. Zaista, ako je B otvorena lopta, tada skup $B \setminus \overline{A}$ nije prazan jer bi u suprotnom bilo $B \subseteq \overline{A}$ i zato bi $\overline{A}$ sadržao unutrašnje tačke. Skup $B \setminus \overline{A}$ je otvoren, odatle postoji otvorena lopta $B_1 \subseteq B \setminus \overline{A}$ i za ovu loptu imamo $B_1 \bigcap A = \emptyset$. Takođe važi i obrnuto tvrđenje.

Kažemo da je $A \subseteq M$ skup prve kategorije ako je A unija prebrojivo mnogo skupova $A = \bigcup_i B_i$ gde su B_i nigde gusti za svako i. Ako skup nije prve kategorije onda ga zovemo skupom druge kategorije.

Teorema 1.3.1 :(Ber-Hausdorf) Svaki kompletan metrički prostor M je skup druge kategorije.

Dokaz: Pretpostavimo da tvrđenje teoreme nije tačno tj. $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, gde je svaki A_n nigde gust za $n \geq 1$. Neka je $B_0 = D(x_0, 1)$ zatvorena lopta poluprečnika 1 sa centrom u x_0. Kako je skup A_1 nigde gust, postoji $\varepsilon_1 > 0$ i lopta $B_1 = D(x_1, \varepsilon_1)$, takva da je $B_1 \subseteq B_0$ i $B_1 \bigcap A_1 = \emptyset$. Možemo uzeti da je B_1 zatvorena lopta i $\varepsilon_1 < \frac{1}{2}$. Slično, kako je A_2 nigde gust, postoji zatvorena lopta $B_2 = D(x_2, \varepsilon_2)$ poluprečnika $0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{3}$ takva da je $B_2 \subseteq B_1$ i $B_2 \bigcap A_2 = \emptyset$. Nastavljajući u ovom stilu dobijamo niz $B_n = D(x_n, \varepsilon_n)$ zatvorenih lopti takvih da je $B_{n+1} \subseteq B_n$, $0 < \varepsilon_n < \frac{1}{n+1}$ i $B_n \bigcap A_n = \emptyset$. Niz centara $\{x_n\}$ je Košijev niz jer za svako $m > n$, $x_m \in B_n$ i zato $d(x_m, x_n) < \frac{1}{n+1} \to 0$ kad $n \to \infty$. Kako je M kompletan, postoji granica $y_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$. Pokažimo da je $y_0 \in \bigcap_n B_n$. Zaista, svaka lopta B_n sadrži sve tačke niza $\{x_n\}$ osim možda tačaka $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, što znači da je y_0 granična tačka za svaku zatvorenu loptu B_n. Odatle $y_0 \in B_n$ za svako n. Zato $y_0 \notin A_j$ za sve $j = 1, 2, \ldots$ odakle sledi $M \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ što je kontradikcija. ■

Dalje nastavljamo sa pretpostavkom da je X Banahov prostor.

Definicija 1.3.2 : Za skup $K \subseteq X$ kažemo da je savršeno konveksan ako i samo ako za svaki ograničen niz $x_i \in K$ i za svaki niz realnih brojeva $\alpha_i \geq 0$ takvih da je $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1$ važi $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in K$.

Definišimo još jezgro od K na sledeći način:

$$\overset{c}{K} = \{x \in K : \text{za svako } y \in X \text{ postoji } \alpha > 0 \text{ tako da je } \lambda y + (1-\lambda) x \in K, \ \text{za sve } 0 \leq \lambda \leq \alpha\}$$

Nekada jezgro zovemo i centar od K.

Primetimo da za svako $x \in X$, ako stavimo $K_x = K - x$ važi:

$$\overline{(K_x)} = \overline{K} - x, \ (\overset{\circ}{K_x}) = \overset{\circ}{K} - x, \ (\overset{c}{K_x}) = \overset{c}{K} - x. \tag{1.3.3}$$

Takođe se jasno vidi da je $K - x$ savršeno konveksan ako i samo ako je K savršeno konveksan.

Sledeća teorema omogućiće nam da dokažemo glavne teoreme oslanjajući se na pojam kategorije.

Teorema 1.3.4 : Ako je K savršeno konveksan u Banahovom prostoru X, tada

$$\overset{\circ}{K} = \overset{c}{K} = \overset{c}{\overline{K}} = \overset{\circ}{(\overline{K})}. \qquad (1.3.5)$$

Dokaz: Pokazaćemo da važi:

$$\overset{\circ}{(\overline{K})} \subseteq \overset{\circ}{K} \subseteq \overset{c}{K} \subseteq \overset{c}{\overline{K}} \subseteq \overset{\circ}{(\overline{K})}.$$

Jasno je da su srednje dve inkluzije trivijalno tačne. Pokazaćemo prvu i poslednju. Da bismo pokazali prvu inkluziju, imajući u vidu (1.3.3), dovoljno je pokazati da $0 \in \overset{\circ}{(\overline{K})}$ implicira $0 \in \overset{\circ}{K}$. Neka je D_ε otvorena lopta poluprečnika $\varepsilon > 0$ sa centrom u nuli, takva da je $D_\varepsilon \subseteq \overline{K}$. Odavde sledi

$$D_\varepsilon \subseteq \overline{K \bigcap D_\varepsilon} \subseteq K \bigcap D_\varepsilon + \frac{1}{2} D_\varepsilon.$$

Tada, za svako $\alpha > 0$

$$\alpha D_\varepsilon \subseteq \alpha(K \bigcap D_\varepsilon) + \frac{\alpha}{2} D_\varepsilon.$$

Sledi da za svako $y \in \frac{1}{2} D_\varepsilon$, možemo zapisati $y = \frac{1}{2} x_1 + y_1$ gde $x_1 \in K \bigcap D_\varepsilon$ i $y_1 \in \frac{1}{4} D_\varepsilon$. Sada ponovimo ovo za y_1, tj. $y_1 = \frac{1}{4} x_2 + y_2$ gde $x_2 \in K \bigcap D_\varepsilon$ i $y_2 \in \frac{1}{8} D_\varepsilon$. Nastavljajući ovaj postupak dobijamo: $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n \in K$, jer je niz $\{x_n\}$ ograničen i skup K je savršeno konveksan. Ovako smo pokazali prvu inkluziju.

Da bismo pokazali poslednju inkluziju, opet zbog (1.3.3), bavićemo se samo slučajem $0 \in \overset{c}{\overline{K}}$. Iz definicije jezgra skupa K sledi

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} n(\overline{K} \bigcap (-\overline{K})).$$

Na osnovu Ber-Hausdorfove teoreme, X je druge kategorije, što znači da bar jedan skup iz ove unije nije nigde gust. Dakle za neko n skup $n(\overline{K} \bigcap (-\overline{K}))$ je zatvoren i nije nigde gust, zaključujemo da ima unutrašnjih tačaka. To znači da skup $\overline{K} \bigcap (-\overline{K})$ takođe ima unutrašnju tačku, neka je to x_0 tj. za neko $\varepsilon > 0$

$$D(x_0,\,\varepsilon) \subseteq \overline{K} \bigcap (-\overline{K}),$$

gde je $D(x_0,\,\varepsilon)$ lopta poluprečnika $\varepsilon > 0$ sa centrom u x_0. Sledi da je $D(x_0,\,\varepsilon) \subseteq \overline{K}$ i $-D(x_0,\,\varepsilon) \subseteq \overline{K}$ i kako je skup $\overline{K}$ konveksan dobijamo

$$D(0,\,\varepsilon) \subseteq \frac{1}{2}\,D(x_0,\,\varepsilon) - \frac{1}{2}\,D(x_0,\,\varepsilon) \subseteq \overline{K},$$

što znači da je $0 \in \overset{\circ}{\overline{K}}$. ■

1.3a Banahova teorema o otvorenom preslikavanju

Teorema 1.3.6 : (Banahova teorema o otvorenom preslikavanju) Neka su X i Y Banahovi prostori i neka je $A : X \to Y$ ograničen linearni operator "na" Y. Tada je A otvoreno preslikavanje, što znači da za svaki otvoren skup $O \subseteq X$ njegova slika $A(O)$ je otvoren skup u Y.

Dokaz: Neka je D otvorena lopta sa centrom u nuli. D je savršeno konveksan i kako je operator A neprekidan sledi da je $F := A(D)$ savršeno konveksan. Zaista, neka su $y_i \in F$, $y_i = A\,x_i$ gde $x_i \in D$ i neka su $\alpha_i \geq 0$ takvi da je $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1$. Pokažimo da $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\,A\,x_i \in F$. Važi $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\,A\,x_i = \sum_{i=1}^{\infty} A\,(\alpha_i\,x_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A\,(\alpha_i\,x_i) = \lim_{n\to\infty} A \sum_{i=1}^{n}\,\alpha_i\,x_i$ to je dalje, zbog neprekidnosti jednako $A \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\,\alpha_i\,x_i = A \sum_{i=1}^{\infty}\,\alpha_i\,x_i \in F$, jer je D savršeno konveksan. Ako je $z \in F$ neka je $w \in D$ takvo da je $A\,w = z$. Želimo da pokažemo da je z u jezgru skupa F. Uzmimo proizvoljno $y \in Y$ i kako je A "na" preslikavanje, postoji $x \in X$ takvo da je $A\,x = y$. Međutim, $w \in D$ i kako je jezgro od D sam D, postoji $a > 0$ takvo da za sve $0 \leq \lambda \leq a$ važi $\lambda\,x + (1-\lambda)\,w \in D$. Primenjujući A dobijamo $\lambda\,y + (1-\lambda)\,z \in A(D) = F$. Ovim smo pokazali da je F podskup svog jezgra, kako obrnuta inkluzija uvek važi, pokazali smo da se F poklapa sa svojim jezgrom. Sada na osnovu teoreme 1.3.4 imamo da je $F = \overset{\circ}{F}$ tj. skup F je otvoren.

Sada pretpostavimo da je O otvoren skup u X i $y \in A\,O$ tj. $y = A\,x$, $x \in D(x,\,\varepsilon) \subseteq O$, gde je $D(x,\,\varepsilon)$ otvorena lopta poluprečnika $\varepsilon > 0$ sa centrom u x. Iz $A\,D(x,\,\varepsilon) - A\,x = D(0,\,\varepsilon)$ zaključujemo da je $y = A\,x$ unutrašnja tačka od $A\,D(x,\,\varepsilon)$. Odatle sledi da je y unutrašnja tačka od $A\,O$. ■

Posledica 1.3.7 : Neka je $A \in \mathcal{L}(X,\,Y)$ "1-1" i "na". Tada postoji $A^{-1} \in \mathcal{L}(X,\,Y)$.

Ako je $A \in \mathcal{L}(X,\,Y)$ "1-1" i "na", tada je A linearni izomorfizam između prostora X i Y. Drugim rečima, A se može posmatrati kao identičko preslikavanje između X i Y (imenujući $A\,x$ sa x u Y). Kako je A ograničen postoji konstanta C takva da je $\|x\|_Y \leq C\,\|x\|_X$ za svako $x \in X$. Na osnovu posledice 1.3.7 sledi da postoji još jedna konstanta C_1 takva da $\|x\|_X \leq C_1\,\|x\|_Y$ za sve

$x \in X$.

U slučaju linearnog prostora sa dve norme dobijamo sledeću korisnu činjenicu.

Posledica 1.3.8 : Neka je X linearan prostor na kome su definisane dve norme $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$. Pretpostavimo da su $(X, \|\cdot\|_1)$ i $(X, \|\cdot\|_2)$ kompletni normirani prostori i da postoji konstanta C takva da je $\|x\|_2 \leq C\,\|x\|_1$ za svako $x \in X$. Tada su norme $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ ekvivalentne, tj. postoji konstanta C_1 takva da je $\|x\|_1 \leq C_1\,\|x\|_2$ za svako $x \in X$.

1.3b Teorema o zatvorenom grafiku

Neka je $A : X \to Y$ linearni operator. Nećemo pretpostaviti da je A ograničen niti da je domen $\operatorname{Dom} A$, skup na kome je definisan, ceo prostor X. Međutim, imajući u vidu da se bavimo linearnim operatorima, pretpostavićemo da je $\operatorname{Dom} A$ linearan ne nužno zatvoren podprostor od X. Skup

$$\Gamma(A) = \{(x, A\,x) : x \in \operatorname{Dom} A\} \subseteq X \times Y$$

zovemo grafik operatora A. Definisaćemo normu na $X \times Y$ sa $\|(x.y)\| = \|x\| + \|y\|$ (naravno može se uzeti bilo koja ekvivalentna norma). Kažemo da je A operator zatvorenog grafika ako je $\Gamma(A)$ zatvoren skup u $X \times Y$. To znači da kada $x_n \in \operatorname{Dom} A$, $\{x_n\}$ konvergira ka x i $\{A\,x_n\}$ konvergira ka y, tada $x \in \operatorname{Dom} A$ i $A\,x = y$.

Posmatrajmo ograničeni operator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Jasno je da je A operator zatvorenog grafika. Pretpostavimo da je $\operatorname{Ker} A = 0$. Tada je A^{-1} formalno definisano na $\operatorname{Im} A$ ($= \operatorname{Dom} A^{-1}$) i ima zatvoren grafik. Zaista,

$$\Gamma(A^{-1}) = \{(y, A^{-1}\,y) : y \in \operatorname{Im} A\} = \{(A\,x, x) : x \in X\}$$

i znajući da je $\Gamma(A) = \{(x, A\,x) : x \in X\}$ zatvoren u $X \times Y$, sledi da je $\Gamma(A^{-1})$ zatvoren u $Y \times X$.

Definicija 1.3.9 : Kažemo da operator $A : X \to Y$ dopušta zatvaranje ako i samo ako je $\overline{\Gamma(A)} \subseteq X \times Y$ grafik nekog operatora.

Može se pokazati da linearni operator A dopušta zatvaranje ako i samo ako $A\,x_n \to y$ i $x_n \to 0$ implicira da je $y = 0$.

Primeri:

i) Operator $A\,x = \frac{dx}{dt}$ u $C[0, 1]$ sa $\operatorname{Dom} A = C^1[0, 1] := \{x \in C[0, 1] : x' \in C[0, 1]\}$ je operator zatvorenog grafika (to je poznata teorema analize koja kaže, ako $x_n(t) \to x(t)$, $x'_n(t) \to y(t)$ uniformno na $[0, 1]$, tada je $x(t)$ neprekidno diferencijabilna i $x'(t) = y(t)$).

ii) Posmatrajmo operator $A\,x = \frac{dx}{dt}$ u $L_2[0, 1]$ sa $\operatorname{Dom} A = \{x \in L_2[0, 1] : x$ je apsolutno neprekidno, $x' \in L_2[0, 1],\ x(0) = 0\}$. Operator A ima ograničen inverzni operator $(A^{-1}\,y)(t) = \int_0^t y(s)\,ds$ i zato je A operator zatvorenog grafika.

iii) Operator $A\,x = \frac{dx}{dt}$ u $L_2[0, 1]$ sa $\operatorname{Dom} A = \{x \in C[0, 1] : x' \in C[0, 1],\ x(0) = 0\}$ nije operator zatvorenog grafika ali dopušta zatvaranje. Njegovo zatvaranje je operator definisan u prethodnom primeru.

iv) Posmatrajmo operator $A : L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$ dat sa $A\,x = x(0)\,t$ i $\operatorname{Dom} A = C[0, 1]$. Ovaj operator ne dopušta zatvaranje. Zaista, uzmimo

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 - n\,t, & \text{ako } 0 \le t \le \frac{1}{n} \\ 0, & \text{ako } \frac{1}{n} \le t \le 1 \end{cases}.$$

Imamo $(A\,x_n)(t) \to t$ ali $x_n(t) \to 0$ u $L_2[0, 1]$.

Teorema 1.3.10 :(Banahova) Neka su X i Y Banahovi prostori. Neka je $A : X \to Y$ operator zatvorenog grafika i $\operatorname{Dom} A = X$. Tada je A neprekidan (ograničen) operator.

Dokaz: Neka je D_Y otvorena jedinična lopta u Y sa centrom u nuli. Tada je $A^{-1}(D_Y)$ savršeno konveksan. Zaista, uzmimo ograničen niz $\{x_i\} \subseteq A^{-1}(D_Y)$ i neka je $y_i \in D_Y : y_i = A\,x_i$. Neka su $\alpha_i \ge 0$ takvi da je $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1$. Kako su nizovi $\{x_i\}$ i $\{y_i\}$ ograničeni, nizovi $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,x_i$ i $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,y_i$ su Košijevi u Banahovim prostorima, zato konvergiraju redom ka x i y. Zbog savršene konveksnosti skupa D_Y, $y \in D_Y$, a zbog činjenice da je A operator zatvorenog grafika $A\,x = y$ tj. $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,x_i \in A^{-1}(D_Y)$. Iz uslova da je $\operatorname{Dom} A = X$ dobijamo da 0 pripada jezgru skupa $A^{-1}(D_Y)$ i koristeći teoremu 1.3.4 zaključujemo da je 0 unutrašnja tačka skupa $A^{-1}(D_Y)$, odakle sledi neprekidnost operatora A. ■

Ovu teoremu je moguće dokazati korišćenjem teoreme o otvorenom preslikavanju, na sledeći način:

Lako je proveriti da je prostor $X \times Y$ sa normom $\|(x.y)\| = \|x\| + \|y\|$ Banahov prostor. Imajući u vidu da je A operator zatvorenog grafika, podprostor prostora $X \times Y$ koji je indukovan skupom $\Gamma(A) = \{(x, A\,x) : x \in X\}$ je takođe Banahov sa istom normom. Posmatrajmo preslikavanje $T : \Gamma(A) \to X$ definisano sa $T((x, A\,x)) = x$ za svako $x \in X$. Preslikavanje T je linearna bijekcija, što se lako proverava. Iz relacije

$$\|T((x, A\,x))\|_X = \|x\|_X \le \|x\|_X + \|A\,x\|_Y = \|(x, A\,x)\|_{\Gamma(A)}$$

sledi da je T ograničen operator. Sada, na osnovu posledice 1.3.7 teoreme o otvorenom preslikavanju možemo zaključiti da postoji T^{-1} takođe ograničen operator, $T^{-1} : X \to \Gamma(A)$, $T^{-1} x = (x, A x)$ za svako $x \in X$. Odavde sledi da je

$$\|A x\|_Y \leq \|x\|_X + \|A x\|_Y = \|(x, A x)\|_{\Gamma(A)} = \|T^{-1} x\|_{\Gamma(A)} \leq \|T^{-1}\| \, \|x\|_X .$$

Dakle, A je ograničen operator.

Sledi nekoliko primena teoreme o zatvorenom grafiku.

Teorema 1.3.11 :(Hörmander) Neka su X_0, X_1, X_2 Banahovi prostori i neka su $T_1 : X_0 \to X_1$, $T_2 : X_0 \to X_2$ linearna preslikavanja takva da je $\operatorname{Dom} T_1 \subseteq \operatorname{Dom} T_2$, T_1 je operator zatvorenog grafika i T_2 dopušta zatvaranje. Tada postoji $C > 0$ takvo da je $\|T_2 x\| \leq C(\|T_1 x\| + \|x\|)$ za sve $x \in \operatorname{Dom} T_1$.

Dokaz: Posmatrajmo zatvoreni podprostor E prostora $X_0 \times X_1$

$$E = \{(x, T_1 x) : x \in \operatorname{Dom} T_1 \}$$

i uzmimo $V(x, T_1 x) = T_2 x$. Tada je V zatvoren operator. Zaista, ako $(x_n, T_1 x_n) \to (x, y)$ i $T_2 x_n \to z$ tada, imajući u vidu da je T_1 operator zatvorenog grafika, sledi da je $x \in \operatorname{Dom} T_1$ i $y = T_1 x$, a kako T_2 dopušta zatvaranje i $x \in \operatorname{Dom} T_2$, dobijamo $z = T_2 x$ odakle sledi $z = V(x, y)$. Šta više, $\operatorname{Dom} V = E$. Možemo zaključiti da je V neprekidno preslikavanje tj. da postoji konstanta $C > 0$ takva da je $\|T_2 x\| \leq C \|(x, T_1 x)\|$. ■

Primer: Za svako $x \in C^2[0, 1]$ tj. za svaku dva puta neprekidno diferencijabilnu funkciju na $[0, 1]$, imamo $\|x'\| \leq M(\|x''\| + \|x\|)$, gde je $\|\cdot\|$ norma na prostoru $C[0, 1]$.

Teorema 1.3.12 : Neka su E_1, E_2 zatvoreni podprostori Banahovog prostora X takvi da je $E_1 \bigcap E_2 = 0$ i $E_1 + E_2 = X$. Tada, projektor $P : X \to E_1$, paralelan sa E_2 (tj. $\operatorname{Ker} P = E_2$) je ograničen operator. Drugim rečima postoji $C > 0$ takvo da je $C \|x_1 + x_2\| \geq \max(\|x_1\|, \|x_2\|)$ za $x_i \in E_i,\ i = 1, 2$.

Dokaz: Pokažimo da je P zatvoren. Pretpostavimo da $x^{(n)} = x_1^{(n)} + x_2^{(n)}$, $x_i^{(n)} \in E_i$, $x^{(n)} \to x$, $P x^{(n)} = x_1^{(n)} \to x_1$. Imamo $x_2^{(n)} \to x_2$, $x = x_1 + x_2$ i kako su E_1, E_2 zatvoreni, dobijamo $x_1 \in E_1$ i $x_2 \in E_2$, i zato je $P x = x_1$. Imajući u vidu da je $\operatorname{Dom} P = X$, na osnovu teoreme o zatvorenom grafiku dobijamo da je P ograničen, tj. da postoji $m > 0$ takvo da je $\|P x\| = \|x_1\| \leq m \|x\|$.

Primenjujući istu priču na operator $Q = I - P$ dobijamo $\|x_2\| \leq m_1 \|x\|$ za neko $m_1 > 0$. ■

1.3c Banah-Štajnhausova teorema

Definicija 1.3.13 : Za nenegativnu funkciju μ na Banahovom prostoru X kažemo da je savršeno konveksna ako

$$\mu(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \mu(x_n)$$

za svako $a_n \geq 0$ tako da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ i za svaki ograničen niz $\{x_n\} \subseteq X$.

Teorema 1.3.14 : Neka je μ funkcija na Banahovom prostoru X, $\mu(\lambda\, x) = \lambda\, \mu(x)$ za svako $\lambda \geq 0$, i pretpostavimo da je μ savršeno konveksna. Tada postoji $C > 0$ takvo da je $\mu(x) \leq C\, \|x\|$ za svako $x \in X$.

Dokaz: Posmatrajmo skup $M = \{x : \mu\, x \leq 1\}$. Iz uslova $\mu(\lambda\, x) = \lambda\, \mu(x)$, dobijamo da je $0 \in \overset{c}{M}$ i znajući da je μ savršeno konveksna, zaključujemo da je

$$\mu(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\, x_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i\, \mu(x_i) \leq 1$$

za svako $a_i \geq 0$ tako da $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1$ i $x_i \in M$. To znači da je M savršeno konveksan. Sada, na osnovi teoreme 1.3.4 sledi da je $0 \in \overset{\circ}{M}$, što znači da postoji $\delta > 0$ takvo da je lopta D_δ poluprečnika δ i sa centrom u nuli, koja je podskup skupa M. Drugim rečima, postoji $\delta > 0$ takvo da $\|x\| \leq \delta$ implicira $\mu\,(x) \leq 1$. Koristeći ponovo uslov $\mu(\lambda\, x) = \lambda\, \mu(x)$ zaključujemo da je

$$\mu\,(x) \leq \frac{1}{\delta}\, \|x\|$$

za svako $x \in X$. ■

Teorema 1.3.15 :(Banah-Štajnhaus) Neka je $\{A_\alpha : X \to Y\}$ familija ograničenih operatora između Banahovih prostora X i Y, i pretpostavimo da za svako $x \in X$ postoji $C_x > 0$ takvo da je $\sup_\alpha \|A_\alpha\, x\| \leq C_x$. Tada postoji $C > 0$ takvo da $\|A_\alpha\, x\| \leq C\, \|x\|$ za svako $x \in X$ i svako A_α iz familije. To znači da je skup $\{A_\alpha : X \to Y\}$ ograničen skup u $\mathcal{L}(X, Y)$.

Dokaz: Definišimo funkciju $\mu(x) = \sup_\alpha \|A_\alpha\, x\|$. Svi uslovi teoreme 1.3.14 su očigledni. Dakle, postoji $C > 0$ takvo da je $\mu(x) \leq C\, \|x\|$ što je i trebalo pokazati. ■

Posledica 1.3.16 : Neka je X Banahov prostor definisan nad poljem $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Neka je $A \subset X^*$ skup ograničenih linearnih funkcionela takvih da je za svako $x \in X$ skup $\{f(x) : f \in A\}$ ograničen tj. za svako $x \in X$ postoji $C_x > 0$ takvo da je $\sup_{f \in A} |f(x)| \le C_x$. Tada je A ograničen skup u X^* tj. postoji konstanta $C > 0$ takva da je $\|f\| \le C$ za svako $f \in A$.

Dokaz: Posmatrajmo $f \in A$ kao linearni operator $f : X \to F$ i tvrđenje sledi direktno na osnovu teoreme 1.3.15. ■

Posledica 1.3.17 : Neka je $A \subseteq X$ takav da za svako $f \in X^*$ postoji konstanta $C(f)$ takva da $\sup_{x \in A} |f(x)| \le C(f)$. Tada je A ograničen skup tj. postoji konstanta $C > 0$ takva da je $\|x\| \le C$ za svako $x \in A$.

Dokaz: Zaista, primenjujući Banah-Štajnhausovu teoremu na familiju linearnih operatora $\{x : X^* \to F\}_{x \in A}$ sledi tvrđenje ove posledice. ■

Posledica 1.3.18 : Neka je $A \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ skup ograničenih operatora takvih da za svako $x \in X$ i svako $f \in Y^*$ važi $|f(T\,x)| \le C(x, f)$ za svako $T \in A$. Tada postoji $C > 0$ takvo da $\|T\| \le C$ za svako $T \in A$.

Dokaz: Za fiksirano $x \in X$, koristeći posledicu 1.3.17, dobijamo $\|T\,x\| \le C(x)$ za svako $T \in A$. Sada na osnovu Banah-Štajnhausove teoreme sledi $\|T\| \le C$ za svako $T \in A$. ■

Potsetimo se, ako je niz $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Košijev u smislu jake konvergencije tj. da za svako $x \in X$ niz $\{A_n\,x\}_{n \in \mathbb{N}}$ je Košijev u X, tada na osnovu Banah-Štajnhausove teoreme sledi da postoji $A \in \mathcal{L}(X)$ tako da $A_n \overset{s}{\to} A$. Sada ćemo pokazati jos jedno tvrđenje u vezi sa jakom konvergencijom.

Lema 1.3.19 : Niz operatora $T_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ konvergira jako ka operatoru $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ako i samo ako

i) niz $\{T_n\,x\}$ konvergira za svako x iz nekog gustog podskupa od X;
ii) postoji $C > 0$ takvo da je $\|T_n\| \le C$.

Dokaz: Ako niz $\{T_n\,x\}$ konvergira za svako $x \in X$, tada *i*) trivijalno važi, a *ii*) sledi na osnovu Banah-Štajnhausove teoreme.

Pretpostavimo da $\{T_n\,x\}$ konvergira za svako $x \in M$, gde $\overline{M} = X$ i $\|T_n\| \le C$. Za svako $x \in M$ definišimo operator T_0 na sledeći način: $T_0\,x = \lim_{n\to\infty} T_n\,x$. Lako se vidi da je operator T_0 linearan. Iz činjenice $\|T_n\,x\| \le C\,\|x\|$ sledi da je $\|T_0\| \le C$. Proširimo operator T_0 na ceo prostor X tako što za svako $x \in X$ uzmemo $x_m \in M$, $x_m \to x$ i stavimo $T\,x = \lim_{m\to\infty} T_0\,x_m$. Lako se proverava da granica postoji i da ne zavisi od izbora x_m, i važi $\|T\| \le C$. Pokažimo da za svako

$x \in X$, $T_n x \to T x$. Za $\varepsilon > 0$ uzmimo $x_0 \in M$ takvo da $\|x - x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{4(C+1)}$, dalje uzmimo $N_0 > 0$ tako da za svako $n > N_0$, $\|T_n x_0 - T x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Dakle, za svako $n > N_0$ dobijamo

$$\begin{aligned}\|T_n x - T x\| &\leq \|T_n x - T_n x_0\| + \|T_n x_0 - T x_0\| + \|T x_0 - T x\| \\ &\leq (\|T_n\| + \|T\|)\,\|x - x_0\| + \|T_n x - T x_0\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \ \blacksquare\end{aligned}$$

Sada ćemo imati priliku da vidimo nekoliko primena Banah-Štajnhausove teoreme.

i) **Teorema 1.3.20 :** Neka je H Hilbertov prostor i neka je $A : H \to H$ linearan operator takav da je $\operatorname{Dom} A = H$ (ne nužno neprekidan) i $A = A^*$ tj. $\langle A x, y \rangle = \langle x, A y \rangle$. Tada je A neprekidan operator.

Dokaz: Važi:

$$|\langle A x, y \rangle| = |\langle x, A y \rangle| \leq \|x\|\, \|A y\| \leq \|A y\|$$

za svako $x \in H$ takvo da je $\|x\| \leq 1$ i za svako $y \in H$. Na osnovu posledice 1.3.17 zaključujemo da je skup $\{A x : \|x\| \leq 1\}$ ograničen odakle sledi $\|A x\| \leq C \|x\|$. $\blacksquare$

ii) Integralne formule. Definišimo $\phi(f) = \int_0^1 f(t)\, dt$, za $f \in C[0, 1]$. Neka je $\{t_k^{(n)}\}_{k=1}^{k_n} \subseteq [0, 1]$ i neka su $c_k^{(n)}$ brojevi takvi da je

$$\phi_n(f) := \sum_{k=1}^{k_n} c_k^{(n)} f\left(t_k^{(n)}\right) = \phi(f),$$

za svaki polinom f stepena ne većeg od n. Tada važi sledeće:

Teorema 1.3.21 :(Polya) $\phi_n(f) \to \phi(f)$ za svako $f \in C[0, 1]$ ako i samo ako postoji M takvo da $\sum_k |c_k^{(n)}| < M$ za svako n.

Dokaz: Uočimo prvo $\|\phi_n\|^* = \sum_k |c_k^{(n)}|$ kao normu linearne funkcionele na $C[0, 1]$.

Neka $\phi_n(f) \to \phi(f)$ za svako $f \in C[0, 1]$. Na osnovu Banah-Štajnhausove teoreme sledi da $\|\phi_n\|^* = \sum_k |c_k^{(n)}| < M$ za svako n. U suprotnom smeru $\phi_n(f) \to \phi(f)$ na gustom skupu polinoma, jer za svaki polinom f, za dovoljno veliko n imamo $\phi_n(f) = \phi(f)$. Sada tvrđenje sledi iz leme 1.3.19. $\blacksquare$

iii) Primena Banah-Štajnhausove teoreme na konstrukciju kontra primera u analizi. Videćemo jedan primer. Za neprekidnu funkciju $f \in C[-\pi, \pi]$ neka je $S_n f$ parcijalna suma odgovarajućeg Furijeovog reda

$$(S_n f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i k \tau} f(\tau)\, d\tau\right) e^{i k t}.$$

Koristeći formulu

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{-i k(\tau - t)} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(\tau - t)}{\sin \frac{\tau - t}{2}}$$

(poznato kao "Dirišleovo jezgro"), dobijamo

$$(S_n f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(\tau - t)}{\sin \frac{\tau - t}{2}} f(\tau)\, d\tau.$$

Pokazaćemo da postoji funkcija $f \in C[-\pi, \pi]$ takva da $(S_n f)(t)$ ne konvergira (bar u tački nula). Neka je $t = 0$. Definišimo funkcionele

$$\phi_n(f) := (S_n f)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\tau}{\sin \frac{\tau}{2}} f(\tau)\, d\tau$$

koje su očigledno neprekidne na $C[-\pi, \pi]$. Ako za svako $f \in C[-\pi, \pi]$ niz $\phi_n(f)$ konvergira, tada je $\|\phi_n\| \leq C$. Međutim to nije tačno. Zaista,

$$\|\phi_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\tau}{\sin \frac{\tau}{2}} \right| d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left| \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\tau}{\sin \frac{\tau}{2}} \right| d\tau$$
$$\geq \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})\tau|}{\tau} d\tau = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin s|}{s} ds \to \infty$$

kada $n \to \infty$.

1.3d Baze u banahovim prostorima

Neka je X Banahov prostor i neka je $e = \{e_k\}_1^\infty$ kompletan linearno nezavisan sistem u X. Posmatrajmo podprostor $M = \operatorname{span}\{e\}$. Za svako $x \in M$ imamo $x = \sum_1^n a_k e_k$ gde $a_k = e_k^*(x)$, a e_k^* su linearne funkcionele. Imajući u vidu da je e linearno nezavisa sistem, funkcionele e_k^* su dobro definisane i važi $e_k^*(e_n) = \delta_{k n}$. Međutim ove funkcionele definisane na M nisu nužno ograničene. Za sistem kažemo da je minimalan sistem ako postoje linearne funkcionele $e_k^* \in X^*$ takve da je $e_k^*(e_n) = \delta_{k n}$ (zovemo ih biortogonalne funkcionele). Uvedimo na podprostor M linearne projektore

$$U_n\left(\sum_{k=1}^{m} a_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k,$$

za sve $a_k \in F$ (ako je $m < n$ vrednosti a_k za $k > m$ pretpostavljamo da su nula).

Lema 1.3.22 : e je minimalan sistem ako i samo ako su operatori U_n ograničeni.

Dokaz: Ako je e minimalan sistem, tada za svako $x \in M$ imamo

$$x = \sum_{k=1}^{m} a_k\, e_k = \sum_{k=1}^{m} e_k^*(x)\, e_k$$

i $U_n\, x = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x)\, e_k$. Odavde sledi da je $\|U_n\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|e_k^*\|\, \|e_k\| = c_n < \infty$.

Pretpostavimo da su U_n ograničeni operatori. Trebamo pokazati da su funkcionele e_k^* ograničene. Imamo $U_n\, x - U_{n-1}\, x = e_n^*(x)\, e_n$ i $\|e_n^*\|\, \|e_n\| \leq \|U_n - U_{n-1}\|$. Odakle sledi da je e_n^* ograničena linearna funkcionela na podprostoru M. Ovu funkcionelu možemo proširiti na ceo prostor X i dobijamo $e_n^* \in X^*$. ■

Definicija 1.3.23 : e zovemo bazom prostora X ako i samo ako za svako $x \in X$ postoji jedinstven niz $\{a_n\} \subseteq F$ takav da je $x = \sum_1^\infty a_k\, e_k$. Bazu e zovemo Šauderova baza ako je pri tom e minimalan sistem.

Teorema 1.3.24 :(Banahova) Svaka baza Banahovog prostora je Šauderova baza.

Ova teorema je direktna posledica sledećeg tvrđenja.

Teorema 1.3.25 : Neka je e kompletan linearno nezavisan sistem u Banahovom prostoru X. Tada, e je baza prostora X ako i samo ako su projektori U_n definisani ranije na podskupu $M = \text{span}\{e\}$ uniformno ograničeni tj. postoji konstanta $C > 0$ takva da je $\|U_n\| \leq C$ za svako n.

Dokaz: Pokazaćemo prvo dovoljan uslov. Pretpostavimo da postoji $C > 0$ takvo da je $\|U_n\| \leq C$. Na osnovu leme 1.3.22 za niz $e = \{e_n\}_1^\infty$ postoji biortogonalni sistem linearnih ograničenih funkcionela $\{e_n^*\}_1^\infty$. Za svako $x \in X$ uzmimo $S_n\, x = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x)\, e_k$. Jasno da je S_n proširenje U_n na ceo prostor X. Za svako x iz gustog podskupa M, imamo $S_n\, x = U_n\, x$ i zato je $\|S_n\| \leq C$ za svako n, i šta više $S_n\, x \to x$. Na osnovu leme 1.3.19 zaključujemo da $S_n\, x \to x$ za svako $x \in X$. To znači da je $x = \sum_1^\infty a_k\, e_k$ gde su a_k jedinstveno određeni sa $a_k = e_k^*(x)$ tj. e je baza, a samim tim i Šauderova baza jer je e minimalan sistem.

Sada pokažimo da je uslov potreban. Neka je e baza u X. Za svako $x \in X$ imamo $x = \sum_1^\infty a_i\, e_i$. Definišimo novu normu u X na sledeći način: $\|x\|_1 = \sup_j \|\sum_{i=1}^{j} a_i\, e_i\|$. Očigledno važi

$$\|x\|_1 \geq \lim_{j\to\infty} \|\sum_{i=1}^{j} a_i\, e_i\| = \|x\|.$$

Za svako $x = \sum_1^\infty a_i e_i$ definišimo kao ranije operatore U_n sa $U_n x = \sum_{i=1}^n a_i e_i$. Imamo

$$\|U_n x\|_1 = \sup_{1 \le j \le n} \|\sum_{i=1}^j a_i e_i\| \le \sup_j \|\sum_{i=1}^j a_i e_i\| = \|x\|_1$$

odakle sledi da je $\|U_n\|_1 \le 1$. Dalje, e je kompletan u X i sa normom $\|\cdot\|_1$. Zaista, za svako $x = \sum_1^\infty a_i e_i$ imamo

$$\|x - \sum_{i=1}^k a_i e_i\|_1 = \sup_{n \ge k+1} \|\sum_{i=k+1}^n a_i e_i\|, \tag{1.3.26}$$

i kako red $\sum_1^\infty a_i e_i$ konvergira, dobijamo $\|x - \sum_{i=1}^k a_i e_i\|_1 \to 0$ kada $k \to \infty$. Neka je $\hat{X}$ kompletiranje prostora X po normi $\|\cdot\|_1$. Sistem e je kompletan u $\hat{X}$ i kako su U_n uniformno ograničeni po normi prostora $\hat{X}$ na osnovu, prethodno dokazanog dovoljnog uslova, zaključujemo da je e baza prostora $\hat{X}$. Zato za svako $\hat{x} \in \hat{X}$ imamo da je $\hat{x} = \sum_1^\infty a_i e_i$ gde red konvergira po normi $\|\cdot\|_1$. Odatle on takođe konvergira i po slabijoj normi $\|\cdot\|$ i definiše $x = \sum_1^\infty a_i e_i \in X$. Na osnovu 1.3.26 sledi da taj red takođe konvergira ka x po normi $\|\cdot\|_1$. Odatle na osnovu jedinstvenosti možemo zaključiti da je $\hat{x} = x$, što znači da je $\hat{X} = X$.

Dakle, imamo dve norme definisane na X. Prostor X je kompletan po svakoj od njih i za svako $x \in X$ važi $\|x\| \le \|x\|_1$. Na osnovu posledice 1.3.8 zaključujemo da su ove dve norme ekvivalentne. To znači da postoji $C > 0$ takvo da je $\|x\|_1 \le C \|x\|$. Odavde možemo zaključiti da važi

$$\|x\|_1 = \sup_n \|\sum_{i=1}^n a_i e_i\| = \sup_n \|U_n x\| \le C \|x\|$$

što znači da je $\sup_n \|U_n\| \le C$. ■

1.3e Linearne funkcionele i Han-Banahova teorema

Neka je L linearan prostor definisan nad poljem $\mathbb{R}$ realnih brojeva.

Definicija 1.3.27 : Za realnu funkciju $p(x) \ge 0$ kažemo da je sublinearna ako važi

i) $p(x + y) \le p(x) + p(y)$ za sve $x, y \in L$ (subaditivnost) i
ii) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ za $\lambda \ge 0$ (pozitivna homogenost).

Neka je $f \in L^{\#}$ i neka je L_0 podprostor prostora L. Dalje ćemo koristiti sledeću notaciju $f|_{L_0} = f_0$ ako je $f_0 \in L_0^{\#}$ i $f(x) = f_0(x)$ za svako $x \in L_0$. Funkcionelu f ekstenzijom funkcionele f_0, a f_0 zovemo restrikcijom funkcionele f na L_0.

Teorema 1.3.28 :(Han-Banah) Neka je $p(x) < \infty$ za svako $x \in L$ sublinearna funkcija, neka je L_0 podprostor prostora L i $f_0 \in L_0^{\#}$ linearna funkcionela definisana na L_0. Pretpostavimo da je $f_0(x) \leq p(x)$ za svako $x \in L_0$. Tada postoji $f \in L^{\#}$ takva da važi

i) $f(x) \leq p(x)$ za svako $x \in L$ i
ii) $f|_{L_0} = f_0$.

Dokaz: Posmatrajmo skup $P = \{(L_\alpha, f_\alpha)\}$ parova podprostora $L_\alpha \subseteq L$, $L_0 \subseteq L_\alpha$ i linearnih funkcionela $f_\alpha \in L_\alpha^{\#}$ takvih da je $f_\alpha(x) \leq p(x)$ za sve $x \in L_\alpha$ i $f_\alpha|_{L_0} = f_0$. Uvedimo parcijalno uređenje na P na sledeći način: $(L_\alpha, f_\alpha) \prec (L_\beta, f_\beta)$ ako i samo ako $L_\alpha \subseteq L_\beta$ i $f_\beta|_{L_\alpha} = f_\alpha$. Svaki totalno uređen poskup (lanac) skupa P ima gornje ograničenje $(L_\infty, f_\infty) \in P$ gde je $L_\infty = \bigcup L_\alpha$, a funkcionela f_∞ je definisana sa $f_\infty(x) = f_\alpha(x)$ za $x \in L_\alpha$. Linearnost funkcionele f_∞ sledi iz linearnosti funkcionela f_α. Sada na osnovu Leme Zorna postoji maksimalni element $(L_{\alpha_0}, f_{\alpha_0}) \in P$. Trebamo pokazati da je $L_{\alpha_0} = L$. U suprotnom, postoji $y \in L \setminus L_{\alpha_0}$. Definišimo podprostor $L_1 = \text{span}\{y, L_{\alpha_0}\}$. Svako $z \in L_1$ možemo jedinstveno predstaviti kao $z = a\,y + x$ za neko $a \in \mathbb{R}$ i neko $x \in L_{\alpha_0}$. Za svaku ekstenziju f funkcionele f_{α_0} na L_1 važi

$$f(z) = a\,f(y) + f_{\alpha_0}(x).$$

Dakle, izbor ekstenzije je određen vrednošću $f(y)$.

Neka je $C = f(y)$. Treba da odredimo C tako da važi

$$f(a\,y + x) = a\,C + f_{\alpha_0}(x) \leq p(a\,y + x),$$

za svako $x \in L_{\alpha_0}$ i $a \in \mathbb{R}$. Imamo dva slučaja, jedan za $a > 0$ i drugi za $a < 0$:

(1.3.29) $\qquad C \leq p(y + \frac{x}{a}) - f_{\alpha_0}(\frac{x}{a})$ za $a > 0$ i
(1.3.30) $\qquad -p(-\frac{x}{a} - y) - f_{\alpha_0}(\frac{x}{a}) \leq C$ za $a < 0$.

Neka su $x_1 = \frac{x}{a}$ u (1.3.29) i $x_2 = \frac{x}{a}$ u (1.3.30) i posmatrajmo x_1 i x_2 kao različite (nezavisne) vektore iz L_{α_0}. Pokažimo da važi

(1.3.31) $\qquad -p(-x_2 - y) - f_{\alpha_0}(x_2) \leq p(y + x_1) - f_{\alpha_0}(x_1)$

za svako x_1 i x_2 iz L_{α_0}, tj.

$$c' = \sup_{x_2 \in L_{\alpha_0}} (-p(-x_2 - y) - f_{\alpha_0}(x_2)) \leq \inf_{x_1 \in L_{\alpha_0}} (p(y + x_1) - f_{\alpha_0}(x_1)) = c''.$$

Odavde će slediti egzistencija konstante C koja zadovoljava (1.3.29) i (1.3.30). Izabraćemo proizvoljno C tako da je $c' \leq C \leq c''$. Takvo C će takođe zadovoljavati i $f(a\, y + x) = a\, C + f_{\alpha_0}(x) \leq p(a\, y + x)$.

Da bismo pokazali (1.3.31) zapišimo to drugačije

$$f_{\alpha_0}(x_1 - x_2) \leq p(y - x_1) + p(-x_2 - y),$$

to sledi iz činjenice da važi $f_{\alpha_0}(x_1 - x_2) \leq p(x_1 - x_2) \leq p(y - x_1) + p(-x_2 - y)$. Prva nejednakost je zadovoljena sa sve vektore iz L_{α_0}, a druga nejednakost je nejednakost trougla za funkciju p koja važi za svako $y \in L$.

Dakle, postoji ekstenzija funkcionele f_{α_0} na podprostor L_1 koji zadovoljava sve uslove našeg uređenja, što znači da $(L_{\alpha_0}, f_{\alpha_0})$ nije maksimalan element. To je kontradikcija, dakle $L_{\alpha_0} = L$. ■

Sada ćemo se pozabaviti sa kompleksnim slučajem tj. pretpostavićemo da je L linearan prostor nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$.

Definicija 1.3.32 : Za realnu funkciju $p(x) \geq 0$ kažemo da je konveksna ako važi:

i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ za sve $x,\ y \in L$ i
ii) $p(\lambda\, x) = |\lambda|\, p(x)$ za sve $x \in L$ i $\lambda \in \mathbb{C}$.

Teorema 1.3.33 :(Han-Banah) Neka je $p(x)$ konveksna funkcija i $p(x) < \infty$ za sve $x \in L$. Neka je f_0 linearna funkcionela definisana na podprostoru $L_0 \subseteq L$ takva da je $|f_0(x)| \leq p(x)$ za sve $x \in L_0$. Tada postoji linearna funkcionela $f \in L^{\#}$ takva da je $f\,|_{L_0} = f_0$ i $|f(x)| \leq p(x)$ za sve $x \in L$.

Primetimo da su ovde funkcionele f_0 i f sa kompleksnim vrednostima.

Dokaz: Posmatrajmo $\phi_0(x) = \mathrm{Re}\, f_0(x)$ funkcionelu sa realnim vrednostima na L_0 koji tretiramo kao linearni prostor nad $\mathbb{R}$. Tada za svako $x \in L_0$

$$\phi_0(x) \leq |f_0(x)| \leq p(x).$$

Dakle, na osnovu realnog slučaja Han-Banahove teoreme sledi da postoji ekstenzija $\phi \in L^{\#}$ funkcionele ϕ_0 posmatrajući L kao linearni prostor nad $\mathbb{R}$, i $\phi(x) \leq p(x)$.

Uočimo sada vezu između kompleksne linearne funkcionele $f(x) = \phi(x) + i\,\psi(x)$ ($\mathrm{Re}\, f = \phi$, $\mathrm{Im}\, f = \psi$) i njenog realnog dela $\phi(x)$:

$$i\, f(x) = f(i\,x) = \phi(i\,x) + i\,\psi(i\,x).$$

Važi, $f(x) = \psi(i\,x) - i\,\phi(i\,x)$ i odatle $\mathrm{Im}\, f(x) = -\phi(i\,x)$.

Uzmimo realnu funkcionelu $\phi(x)$ definisanu ranije i stavimo $f(x) = \phi(x) - i\,\phi(i\,x)$. Tada

i) $f(x)$ je kompleksna linearna funkcija nad $\mathbb{C}$.

ii) f je ekstenzija funkcionele f_0 jer $\mathrm{Re}\, f\,|_{L_0} = \phi_0$, što znači da je $f_0(x) = \mathrm{Re}\, f_0(x) + i\,\mathrm{Im}\, f_0(x) = \phi_0(x) - i\,\phi_0(i\,x) = f(x)$ za sve $x \in L_0$.

iii) Pokažimo da je $|f(x)| \leq p(x)$. Zaista, možemo zapisati $f(x) = |f(x)|\, e^{i\,\theta(x)}$ tj. $f(e^{-i\,\theta(x)}\, x) = |f(x)|$. Dakle,

$$|f(x)| = f(e^{-i\,\theta(x)}\, x) = \phi(e^{-i\,\theta(x)}\, x) \leq p(e^{-i\,\theta(x)}\, x) = |e^{-i\,\theta(x)}\, x|\; p(x) = p(x). \quad \blacksquare$$

Sada ćemo videti nekoliko posledica i primena Han-Banahove teoreme.

Posledica 1.3.34 : Neka je X normiran prostor, neka je $E_0 \subseteq X$ podprostor i neka je $f_0 \in E_0^*$. Tada postoji $f \in X^*$ takva da je $f\,|_{E_0} = f_0$ i $\|f\|_{X^*} = \|f_0\|_{E_0^*}$.

Dokaz: Da bismo pokazali ovu posledicu uzmimo da je $p(x) = a\,\|x\|$ gde je $a = \|f_0\|_{E_0^*}$. Lako se proverava da su ispunjeni uslovi Han-Banahove teoreme zadovoljeni odakle i sledi tvrđenje.

Posledica 1.3.35 : Ako je X normiran prostor i $x_0 \neq 0$, tada postoji neprekidna linearna funkcionela $f \in X^*$ tako da je $\|f\| = 1$ i $f(x_0) = \|x_0\|$.

Dokaz: Posmatrajmo jednodimenzioni podprostor $E_0 = \{\lambda\, x_0 : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Neka je $\varphi(y) = \varphi(\lambda\, x_0) = \lambda\, \|x_0\|$ za $y = \lambda\, x_0 \in E_0$. φ je linearna funkcionela za koju važi

$$|\varphi(y)| = |\varphi(\lambda\, x_0)| = |\lambda|\, \|x_0\| = \|y\|.$$

Na osnovu Han-Banahove teoreme sledi da postoji funkcionela f definisana na X takva da je $f(y) = \varphi(y)$ za sve $y \in E_0$ i $|f(x)| \leq \|x\|$ za sve $x \in X$. Dakle, $\|f\| \leq 1$. Kako je za x_0, $f(x_0) = \|x_0\|$ sledi da je $\|f\| = 1$. $\blacksquare$

Posledica 1.3.36 : Za svako x_0 postoji $f_0 \neq 0$ takvo da je $f_0(x_0) = \|x_0\| \, \|f_0\|$.

Posledica 1.3.37 : Za sve $x_1 \neq x_2$ postoji $f \in X^*$ takva da je $f(x_1) \neq f(x_2)$. Što znači da je X^* totalan skup.

Dokaz: Tvrđenje sledi direktno iz posledice 1.3.35 za $x_0 = x_1 - x_2$. ■

1.3f Razdvajanje konveksnih skupova

Neka je E linearan prostor nad $\mathbb{R}$, neka je M konveksan skup i neka je $0 \in M \subset E$. Funkcionela Minkovskog je definisana na sledeći način:

$$p_M(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x = 0 \\ \infty, & \text{ako ne postoji } t \in \mathbb{R}^+ : \frac{x}{t} \in M \\ \inf\{t \in \mathbb{R}^+ : \frac{x}{t} \in M\}, & \text{inače.} \end{cases}$$

Primetimo da $0 \leq p(x) \leq 1$ implicira da je $x \in M$. Ako je $p(x) > 1$, tada $x \notin M$ i ako $x \notin M$, tada je $p(x) \geq 1$. Jasno da $0 \in \overset{c}{M}$ ako i samo ako $p(x) < \infty$ za sve $x \in E$.

Lema 1.3.38 : Funkcionela Minkovskog je sublinearna.

Dokaz: Jasno da je funkcionela $p_M(x)$ nenegativna i pozitivno homogena tj. $p(\lambda x) = \lambda \, p(x)$ za $\lambda > 0$. Trebamo pokazati da je $p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2)$ za sve $x_1, x_2 \in E$. U slučajevima kada je $p_M(x_1) = \infty$ ili $p_M(x_2) = \infty$ nema šta da se dokazuje. Pretpostavimo da je $p_M(x_i) = \infty$, $i = 1, 2$. Za svako $\varepsilon > 0$ uzmimo t_i takve da $p_M(x_i) < t_i \leq p_M(x_i) + \varepsilon$. Dakle $\frac{x_i}{t_i} \in M$. Neka je $t = t_1 + t_2$. Tada je

$$\frac{x_1 + x_2}{t_1 + t_2} = \frac{t_1 \, x_1}{t \, t_1} + \frac{t_2 \, x_2}{t \, t_2} \in \left[\frac{x_1}{t_1}, \frac{x_2}{t_2}\right] \subseteq M$$

zbog konveksnosti skupa M. Zato, $p_M(x_1 + x_2) \leq t = t_1 + t_2 \leq p(x_1) + p(x_2) + 2\,\varepsilon$. ■

Teorema 1.3.39 : Neka je K konveksan skup, neka je $x \in \overset{c}{K}$ i neka je $y \in K$. Tada je $\{(1 - \alpha)\, x + \alpha \, y, \; 0 \leq \alpha < 1\} \subseteq \overset{c}{K}$.

Dokaz: Neka je $z = t\, y + (1 - t)\, x$ za neko $t \in (0, 1)$. Za svako $u \in X$, kako je $x \in \overset{c}{K}$, postoji $a \in (0, 1)$ takvo da $x_0 = a\, u + (1 - a)\, x \in K$. Neka je z_0 tačka preseka duži $[z, u]$ i $[y, x_0]$. Može se pokazati da je ta tačka određena relacijama $z_0 = \alpha\, z + (1 - \alpha)\, u = \beta\, y + (1 - \beta)\, x_0$ gde su

$\alpha = \frac{1-a}{1-a\,t}$ i $\beta = \frac{t(1-a)}{1-a\,t}$. Kako je K konveksan i $x_0,\ y \in K$, tačka z_0 pripada K. Koristeći ponovo konveksnost skupa K zaključujemo da je cela duž $[z,\ z_0]$ sadržana u K, što znači da je $z \in \overset{c}{K}$. ■

Teorema 1.3.40 : Neka je K konveksan skup i neka je $M = \overset{c}{K}$. Tada je $\overset{c}{M} = M$.

Dokaz: Iz definicije jezgra sledi, ako je $x \in \overset{c}{M}$ onda je trivijalno $x \in M$. Pretpostavimo da je $x \in M$. Za svako $u \in X$ postoji $a \in (0,\ 1)$ takvo da $x_0 = a\,u + (1-a)\,x \in K$. Iz prethodne teoreme sledi da je $\lambda\,u + (1-\lambda)\,x \in \overset{c}{K} = M$ za sve $0 \leq \lambda < a$ i zato $x \in \overset{c}{M}$. ■

Teorema 1.3.40 :(o razdvajanju konveksnih skupova) Neka su M_1 i M_2 konveksni skupovi u E, neka $\overset{c}{M}_1 \neq \emptyset$ i $\overset{c}{M}_1 \cap M_2 = \emptyset$. Tada postoji konstanta C i $f \in E^{\#}$, $f \neq 0$, takva da je $f(M_1) \leq C \leq f(M_2)$; tj. za sve $x \in M_1$, $f(x) \leq C$ i za sve $y \in M_2$ $f(y) \geq C$.

Dokaz: Posmatrajmo skup $M = \overset{c}{M}_1 - M_2$. Tada $0 \notin M$ i kako je $\overset{c}{M}_1 \neq \emptyset$, koristeći 1.3.3 i prethodnu teoremu dobijamo da je $\overset{c}{M} \neq \emptyset$. Želimo da konstruišemo funkcionelu $f \neq 0$, $f \in E^{\#}$ i $f(M) \leq 0$, tj. da $f(x) \leq 0$ za $x \in M$. Neka je $x_0 \in \overset{c}{M}$. Uvedimo još jedan skup $M_0 = M - x_0$. Tada $0 \in \overset{c}{M}_0$ i funkcionela Minkovskog $p(x) := p_{M_0}(x)$ je definisana i konačna za sve $x \in E$. Takođe, $-x_0 \notin M_0$ jer $0 \notin M$. Posmatrajmo jednodimenzioni prostor $E_0 = \{\lambda\,x_0\}$ i definišimo linearnu funkcionelu $f_0(\lambda\,x_0) = -\lambda$ na E_0. Kako $-x_0 \notin M_0$ imamo $p(-x_0) \geq 1$. Odatle sledi da za svako $\lambda \leq 0$ imamo $f_0(\lambda\,x_0) = -\lambda \leq -\lambda\,p(-x_0) = p(\lambda\,x_0)$. Dalje, za svako $\lambda > 0$ imamo $f_0(\lambda\,x_0) \leq 0 \leq p(\lambda\,x_0)$. Dakle, dobili smo da je $f_0(x) \leq p(x)$ za sve $x \in E_0$. Na osnovu Han-Banahove teoreme, postoji ekstenzija $f \in E^{\#}$ funkcionele f_0 takva da je $f(x) \leq p(x)$ za sve $x \in E$. Sada važi $f(x) \leq p(x) \leq 1$ za $x \in M_0$ i $f(x_0) = f_0(x_0) = -1$. Dalje, za svako $x \in M$, uzimajući $y_0 \in M_0$ takvo da je $x = y_0 + x_0$ dobijamo $f(x) = f(y_0) + f(x_0) \leq 0$, što znači da je $f(M) \leq 0$.

Upravo smo pokazali da za sve $x \in \overset{c}{M}_1$ važi da je $f(x) \leq C$ i za sve $y \in M_2$, $f(y) \geq C$. Ostalo je još da pokažemo da je $f(x) \leq C$ za sve $x \in M_1$. Uzmimo $x_0 \in \overset{c}{M}_1$. Na osnovu teoreme 1.3.39 sledi da za svako $x \in M_1$, $t\,x + (1-t)\,x_0 \in \overset{c}{M}_1$ za svako $t \in [0,\ 1)$. Dakle, za svako $t \in [0,\ 1)$ imamo $t\,f(x) + (1-t)\,f(x_0) \leq C$ odakle sledi da je $f(x) \leq C$. ■

Da bismo nastavili da se bavimo posledicama prethodne teoreme potrebno ja da pokažemo sledeće pomoćno tvrđenje.

Lema 1.3.41 : Neka je X Banahov prostor i neka je $f \in X^{\#}$ takva da postoji lopta $D(x_0,\ \varepsilon)$ i konstanta C takva da je $f(D(x_0,\ \varepsilon)) \leq C$ (ili $\geq C$). Tada $f \in X^{*}$.

Dokaz: Imamo $f(D(0, \varepsilon)) \leq C - f(x_0) = A$. Odavde sledi da za svako y takvo da je $\|y\| \leq \varepsilon$ važe relacije $f(y) \leq A$ i $f(-y) \leq A$. Dakle, imamo $|f(y)| \leq A$ za svako y takvo da je $\|y\| \leq \varepsilon$ što implicira da je $\|f\| \leq \frac{A}{\varepsilon}$. ■

Posledica 1.3.42 : Neka je K zatvoren konveksan skup u Banahovom prostoru X i neka $x_0 \notin K$. Tada postoji $f \in X^*$ takva da je $f(x_0) > \sup\limits_{x \in K} f(x)$.

Dokaz: Neka je $D(x_0, d)$, $d > 0$ lopta takva da je $D(x_0, d) \bigcap K = \emptyset$. Uzimajući $M_1 = K$ i $M_2 = D(x_0, d)$ iz teoreme 1.3.40 zaključujemo da postoji $f \in X^\#$ takva da je $f(D(x_0, d)) \geq C \geq f(K)$. Na osnovu prethodne leme sledi da je $f \in X^*$. Iz relacije $f(D(x_0, d)) \geq C$ dobijamo da je $f(x_0) > C$; u suprotnom uzmemo y takvo da je $f(y) < 0$, $\|y\| < d$ i dobijamo $x_0 + y \in D(x_0, d)$ i $f(x_0 + y) < C$. Dakle, imamo $f(x_0) > C$ i $\sup\limits_{x \in K} f(x) \leq C$. ■

U nastavku ćemo koristiti neke specijalne topologije na Banahovim prostorima X i njegovom dualnom prostoru X^*.

Definicija 1.3.43 : Slaba topologija ili *w*-topologija na Banahovom prostoru X je topologija čiju bazu čine svi skupovi

$$N(x_0; A; \varepsilon) = \{x \in X : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ za sve } f \in A\},$$

gde $x_0 \in X$, A je konačan podskup od X^* i $\varepsilon > 0$.

Za niz $\{x_n\} \subset X$ kažemo da slabo konvergira ka $x \in X$ i pišemo $x_n \overset{w}{\to} x_0$ ako niz $\{x_n\}$ konvergira ka x_0 u *w*-topologiji tj. za sve $f \in X^*$, $f(x_n) \to f(x_0)$.

Slično definišemo slabu* topologiju ili w^*-topologiju na dualnom prostoru X^* čiju bazu čine svi skupovi

$$N(f_0; B; \varepsilon) = \{f \in X^* : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ za sve } x \in B\},$$

gde $f_0 \in X^*$, B je konačan podskup iz X i $\varepsilon > 0$.

Za skup A u linearnom prostoru koristićemo oznaku $\text{conv}(A)$ za skup svih konačnih konveksnih kombinacija tj. linearnih kombinacija oblika $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ gde $x_i \in A$, $\alpha_i \geq 0$ i $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Lema 1.3.44 :(Mazur) Neka $x_n \overset{w}{\to} x_0$. Tada $x_0 \in \overline{\text{conv}(\{x_i\}_1^\infty)}$.

Dokaz: Skup $K = \overline{\text{conv}(\{x_i\}_1^\infty)}$ je konveksan i zatvoren. Pretpostavimo da $x_0 \notin K$. Tada na osnovu posledice 1.3.42 postoji f takva da je $f(x_0) > \sup f(x_i)$ što je u kontradikciji sa slabom konvergencijom $x_n \overset{w}{\to} x_0$. ■

Posledica 1.3.45 : Neka je $K \subseteq X$ konveksan skup. Tada je K zatvoren po normi ako i samo ako je K w-zatvoren (tj. zatvoren u w-topologiji).

Dokaz: Neka je K w-zatvoren skup i neka $x_n \to x$, $x_n \in K$. Za svako $f \in X^*$ imamo $f(x_n) \to f(x)$ odatle $x \in K$. Zato je K zatvoren po normi.

Pretpostavimo sada da je K zatvoren po normi. Pokažimo da je

$$K = \bigcap_{H_f^+(a) \supseteq K} H_f^+(a),$$

gde $H_f^+(a) = \{x : a \le f(x)\}$. Jasno, ako $x \in K$ tada pripada i desnoj strani jednakosti. Ako $x \notin K$, tada na osnovu posledice 1.3.42 postoji $f_0 \in X^*$ takva da je $f_0(x) < a \le f_0(K)$ tj. $K \subseteq H_{f_0}^+(a)$ ali $x \notin H_{f_0}^+(a)$. Dakle, K je presek w-zatvorenih skupova i zato je i sam w-zatvoren. ■

Teorema 1.3.46 :(Alaoglu) Za realan Banahovom prostor X, jedinična lopta $D(X^*) = \{f \in X^* : \|f\| \le 1\}$ je kompaktan skup u w^*-topologiji.

Dokaz: Neka je $I_x = [-\|x\|, \|x\|]$ i neka je $K = \prod I_x$ proizvod intervala indeksirani elementima $x \in X$ snabdeven topologijom proizvoda (Tihonova). Na osnovi teoreme Tihonova K je kompaktan skup u ovoj topologiji. Preimenujmo elemente skupa K u funkcije na X, ne nužno linearne, takve da $|f(x)| \le \|x\|$ za sve $x \in X$. Tada je $D(X^*) \subset K$ i w^*-topologija na $D(X^*)$ je upravo restrikcija topologije proizvoda definisane na K. Skup $D(X^*)$ je presek svih skupova $A(x, y) = \{f \in K : f(x+y) = f(x) + f(y)\}$, $B(x, \lambda) = \{f \in K : f(\lambda x) = \lambda f(x)\}$, $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Svaki od ovih skupova je zatvoren u w^*-topologiji jer su definisani pomoću jednakosti koja je "zatvorena" za tri koordinate $x, y, x+y$ za skupove $A(x, y)$ i dve koordinate $x, \lambda x$ za skupove $B(x, \lambda)$. Odatle je $D(X^*)$ w^*-zatvoren i zato je w^*-kompaktan. ■

1.3g Ekstremne tačke, Krejn-Milmanova teorema

Neka je L linearan prostor nad $\mathbb{R}$. Posmatrajmo podprostor $F \subseteq L^{\#}$ koji razdvaja tačke iz L tj. za sve $x_1 \neq x_2$ postoji $f \in F$ tako da je $f(x_1) \neq f(x_2)$. Slabu topologiu generisanu se F, zovemo $w(F)$-topologija. To je topologija čiju bazu čine sve skupovi

$$N(f_0; A; \varepsilon) = \{x \in L : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ za sve } f \in A\}$$

gde $x_0 \in L$, A je konačan podskup od F i $\varepsilon > 0$.

Neka je K skup u L. Za neprazan podskup $M \subseteq K$ kažemo da je ekstreman skup skupa K ako i samo ako za sve $x \in M$ jedini način da zapišemo $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$ za neko $0 < \alpha < 1$ i neko $x_i \in K$ je da oba x_i moraju biti iz M. Tačku $x_0 \in K$ zovemo ekstremna tačka skupa K ako je $\{x_0\}$ ekstremni skup skupa K. Primetimo da je ekstremni skup M_1 ekstremnog skupa M skupa K i sam ekstremni skup skupa K. Definišimo $\operatorname{Extr} K$ kao skup svih ekstremnih tačaka skupa K.

Teorema 1.3.47 :(Krejn-Milman) Neka je K konveksan i kompaktan skup u prostoru L. Tada

i) $\operatorname{Extr} K \neq \emptyset$ i
ii) $\overline{\operatorname{conv}(\operatorname{Extr} K)} = K$.

Važi i nešto jače tvrđenje. Tačnije, nije nam potreban uslov konveksnosti: za svaki $w(F)$-kompaktni skup $K \subseteq L$, imamo $\overline{\operatorname{conv}(K)} = \overline{\operatorname{conv}(\operatorname{Extr} K)}$.

Dokaz: *i*) Prvo ćemo koristiti lemu Zorna. Posmatrajmo uređenje $(K_a, <)$ gde su $K_a \neq \emptyset$ ekstremni kompaktni podskupovi skupa K i $K_a < K_b$ znači da je $K_a \subseteq K_b$. Ova familija nije prazna jer sadrži K. Neka je $\{K_a\}$ opadajući lanac ekstremnih kompaktnih podskupova skupa K. Neka je $\tilde{K} = \bigcap_a K_a$. Kako je K kompaktan i K_a su zatvoreni, skup $\tilde{K}$ nije prazan i zatvoren je. Lako se može proveriti da je $\tilde{K}$ ekstremni skup. Dakle, svaki lanac ima donje ograničenje pa postoji minimalni element K_0. Trebamo pokazati da K_0 ne sadrži više od jedne tačke. Pretpostavimo da su a i b dve različite tačke skpa K_0. Imajući u vidu da F razdvaja tačke, postoji $f \in F$ takva da je $f(a) = \alpha < f(b) = \beta$. Neka je $t := \min_{x \in K_0} f(x)$, (kako je f neprekidna funkcija na kompaktnom skupu K_0, minimum postoji) i posmatrajmo skup $V = \{y \in K_0 : f(y) = t\}$. Imamo $V \subseteq K_0$, $b \notin V$ tj. V je pravi podskup od K_0 i $V = K_0 \bigcap \{y : f(y) = t\}$ je zatvoren. Dalje, ako je $x \in V$ i $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$ za neko $0 < \alpha < 1$ i neko $x_1, x_2 \in K$, tada kako je $x \in K_0$ i K_0 je ekstremni skup, dobijamo da $x_1, x_2 \in K_0$. Šta više $f(x_1) = f(x_2) = t$. U suprotnom bismo imali $f(x_1) > t$ ili $f(x_2) > t$ odakle sledi $f(x) = \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2) > t$. Zaključujemo da $x_1, x_2 \in V$. Dakle, V je kompaktan ekstremni podskup skupa $K_0 \setminus \{b\}$, što je u kontradikciji sa minimalnošću skupa K_0.

ii) Neka je $E = \overline{\text{conv}(\text{Extr}\, K)}$. Jasno $E \subseteq \overline{\text{conv}(K)}$. Pretpostavimo da postoji elemenat $a \in \overline{\text{conv}(K)} \setminus E$. Tada na osnovu posledice 1.3.42 postoji $f_0 \in F$ takva da je $\alpha = f_0(a) < \min\{f_0(y) : y \in E\}$. Neka je

$$V = \{x \in K : f_0(x) = \min_{y \in K} f_0(y)\} = K \bigcap \{x : f_0(x) = \min_{y \in K} f_0(y)\}.$$

Tada je $V \bigcap E = \varnothing$. V je zatvoren, kompaktan i ekstremni skup skupa K. Iz *i*) sledi da je $\text{Extr}\, V \neq \varnothing$. Znamo da je $V \subseteq K$ i zato je $\text{Extr}\, V \subseteq \text{Extr}\, K \subseteq E$, što je kontradikcija jer je $V \bigcap E = \varnothing$. ■

2. Spektralna teorija

U ovoj glavi definisaćemo i klasifikovati spektar operatora, videćemo strukturu spektra samoadjungovanih i unitarnih operatora kao i njihovu spektralnu dekompoziciju. Upoznaćemo se i sa osnovnim rezultatima u vezi sa neograničenim operatorima.

2.1 Spektar, klasifikacija spektra

Definicija 2.1.1 : Neka je $A \in \mathcal{L}(X)$. Operator $B(:= A^{-1})$ je inverzan operatoru A ako i samo ako je $B\,A = A\,B = \mathrm{Id} = I$.

U slučaju konačno-dimenzionih prostora uslov $B\,A = I$ je dovoljan za zaključak da je A inverzibilan i $B = A^{-1}$. Razlog je činjenica da $\det A \neq 0$ dovodi do formule za A^{-1}.

U beskonačno-dimenzionim prostorima to nije slučaj. Kao potvrda može poslužiti primer desnog operatora u prostoru l_2: za $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ neka je $T\,x = (0, x_1, x_2, \ldots)$. Definišimo na sličan način levi operator $U : l_2 \to l_2$ sa $U\,x = (x_2, x_3, \ldots)$. Ovde je $U\,T = I$, ali $T\,U \neq I$ i $\mathrm{Ker}\,T\,U \neq \{0\}$.

Sada ćemo navesti neke važnije osobine inverzibilnih operatora:

i) Ako su A i B inverzibilni operatori, tada je i $A\,B$ takođe inverzibilan i važi $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$.

ii) Ako je $\|A\| = q < 1$, tada je $I - A$ inverzibilan i $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$. Šta više, $\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$.

iii) Neka je A inverzibilan operator i neka je B takav da je $\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Tada je B takođe inverzibilan operator.

Definišimo sada spekter operatora. Neka je $A : X \to X$ ograničen operator. Kompleksan broj $\lambda \in \mathbb{C}$ zovemo regularnom tačkom operatora A ako i samo ako inverzni operator $(A - \lambda\,I)^{-1} : X \to X$ i ako je on ograničen. Ukoliko λ nije regularna tačka tada λ nazivamo tačkom spektra. Skup svih tačaka spektra nazivamo spektrom operatora i označavamo ga sa $\sigma(A)$. Dakle $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}$.

Na osnovu osobine *iii*) inverzibilnih operatora sledi da je skup regularnih tačaka otvoren. Zaista, neka je $\lambda \in \mathbb{C}$ regularna tačka, pokazaćemo da postoji $\varepsilon > 0$ dakvo da za sve $\mu \in D(\lambda, \varepsilon)$, gded je $D(\lambda, \varepsilon)$ otvorena lopta sa centrom u λ poluprečnika ε, važi da je μ regularna tačka. Kako je λ regularna tačka, postoji $(A - \lambda\,I)^{-1}$ i neka je $\|(A - \lambda\,I)^{-1}\| = M$. Uzmimo $\varepsilon = \frac{1}{2\,M}$. Za proizvoljno $\mu \in D(\lambda, \frac{1}{2\,M})$ važi

$$\|A - \lambda I - (A - \mu I)\| = \|\lambda I - \mu I\| = |\lambda - \mu| < \frac{1}{2M} < \frac{1}{M} = \frac{1}{\|(A-\lambda I)^{-1}\|}$$

odakle sledi da je $A - \mu I$ inverzibilan tj. μ je regularna tačka.

Teorema 2.1.2 : Svako $\lambda \in \mathbb{C}$ sa osobinom $|\lambda| > \|A\|$ je regularna tačka operatora A.

Dokaz: Imamo $A - \lambda I = -\lambda(I - \frac{1}{\lambda} A)$ i $\|\frac{1}{\lambda} A\| < 1$. Na osnovu osobine *ii*) inverzibilnih operatora sledi da je $A - \lambda I$ inverzibilan. ■

Pozabavimo se sada klasifikacijom spektra. Tačke spektra operatora A možemo klasifikovati na sledeći način:

1) Tačkasti spektar $\sigma_p(A)$ je skup svojstvenih (karakterističnih) vrednosti operatora A, tj $\lambda \in \sigma_p(A)$ ako i samo ako postoji $x \in X \setminus \{0\}$ takav da je $A x = \lambda x$. λ je karakteristična vrednost a x je karakteristični vektor koji odgovara karakterističnoj vrednosti λ. Ova činjenica se može izraziti i na sledeći način: $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) \neq 0$. Dimenzija od $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ se naziva višestrukost karakteristične vrednosti λ.

Pretpostavimo da je $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = 0$ što znači da je $A - \lambda I : X \to X$ "1-1" preslikavanje X u $\mathrm{Im}(A - \lambda I)$. Prema Banahovoj teoremi o otvorenom preslikavanju 1.3.6, ako je $\mathrm{Im}(A - \lambda I) = X$ tada postoji inverzan ograničen operator $(A - \lambda I)^{-1}$. Takve tačke λ su regularne tačke.

Pre nego što nastavimo sa klasifikacijom spektra navedimo jedno važno svojstvo tačkastog spektra.

Teorema 2.1.3 : Neka je $A : X \to X$ ograničen operator i neka su $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ različite karakteristične vrednosti operatora A. Neka su $x_i \neq 0$ i $A x_i = \lambda_i x_i$ karakteristični vektori koji odgovaraju različitim karakterističnim vrednostima. Tada su $\{x_i\}_{i=1}^n$ linearno nezavisni.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, da su posmatrani vektori linearno zavisni i neka je $\alpha_1 x_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i x_i$ uz uslov $\alpha_1 \neq 0$. Posmatrajmo polinom $P(\lambda)$ takav da je $P(\lambda_1) = 1$ i $P(\lambda_i) = 0$ za $i \geq 2$. Primetimo da je $P(A) x_i = P(\lambda_i) x_i$ ($P(\lambda_i)$ je svojstvena vrednost operatora $P(A)$). Sada koristeći $P(A)$ dobijamo

$$0 = \alpha_1 P(A) x_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i P(A) x_i = \alpha_1 x_1 .$$

Dakle, $\alpha_1 = 0$ što je suprotno pretpostavci. Slično se pokazuje i za ostale α_i, $i \geq 2$. ■

Vratimo se klasifikaciji spektra.

2) Neprekidni spektar u oznaci $\sigma_c(A)$ definišemo na sledeći način: $\lambda \in \sigma_c(A)$ ako i samo ako $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_p(A)$ i $\mathrm{Im}(A - \lambda I)$ je gust skup u X.

Primer: U $L_2[0, 1]$ definišimo operator $A : L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$ na sledeći način:

$$(A x)(t) = t\, x(t).$$

Tada je $[0, 1] = \sigma(A) = \sigma_c(A)$.

3) Rezidualni spektar je skup $\sigma_r(A) = \sigma(A) \setminus (\sigma_p(A) \bigcup \sigma_c(A))$. Ako $\lambda \in \sigma_r(A)$ tada je $\overline{\mathrm{Im}(A - \lambda I)} \neq X$ i $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = 0$.

Primer: Posmatrajmo levi i desni operator S_l odnosno S_r na l_2. Kako je $\|S_l\| = \|S_r\| = 1$, možemo zaključiti da je svako λ sa $|\lambda| > 1$ regularna tačka za oba ova operatora.

Što se tiče svojstvenih vrednosti, važi sledeće. Ako je $S_l\, x = \lambda\, x$ za $x = (x_1, x_2, \ldots)$ imamo $x_2 = \lambda\, x_1$, $x_3 = \lambda\, x_2$, $x_4 = \lambda\, x_3$, ... što znači $x = x_1(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots)$. Takav vektor je različit od nule i pripada l_2 ako i samo ako $|\lambda| < 1$. Odatle $\sigma_p(S_l) = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$ i za sve λ sa $|\lambda| > 1$, $\dim \mathrm{Ker}(S_l - \lambda I) = 1$. Ako $S_r\, x = \lambda\, x$, dobijamo $0 = \lambda\, x_1$, $x_1 = \lambda\, x_2$, $x_2 = \lambda\, x_3$, ... što znači da je $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = 0$. Zato je $\sigma_p(S_r) = \emptyset$.

Imajući u vidu da je $S_l^* = S_r$ i $S_r^* = S_l$, dobijamo

$$\mathrm{Im}(S_r - \lambda I)^{\perp} = \mathrm{Ker}(S_l - \overline{\lambda} I) \text{ i}$$
$$\mathrm{Im}(S_l - \lambda I)^{\perp} = \mathrm{Ker}(S_r - \overline{\lambda} I).$$

Za λ sa $|\lambda| > 1$ prva jednakost nam daje $\dim \mathrm{Im}(S_r - \lambda I) = \dim \mathrm{Ker}(S_l - \overline{\lambda} I) = 1$. Odatle $\{\lambda : |\lambda| < 1\} \subseteq \sigma_r(S_r)$.

Imajući u vidu da je spektar operatora zatvoren skup, zaključujemo da je $\{\lambda : |\lambda| = 1\} \subset \sigma(S_l), \sigma(S_r)$. Šta više za λ sa $|\lambda| = 1$ iz gornjih jednakosti sledi da je $\overline{\mathrm{Im}(S_r - \lambda I)} = \overline{\mathrm{Im}(S_l - \lambda I)} = l_2$. Odatle je $\sigma_c(S_l) = \sigma_c(S_r) = \{\lambda : |\lambda| = 1\}$.

Dakle, dobili smo da je $\sigma(S_l) = \sigma(S_r) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$ i pri tome $\sigma_p(S_l) = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$, $\sigma_r(S_r) = \emptyset$, $\sigma_p(S_r) = \emptyset$, $\sigma_r(S_l) = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$ i $\sigma_c(S_l) = \sigma_c(S_r) = \{\lambda : |\lambda| = 1\}$.

U nastavku ćemo videti definiciju i neka bitnija tvrđenja u vezi sa kompaktnim operatorima. Kompaktni operatori su detaljno obrađeni u mom diplomskom radu koji je ovde poslužio kao literatura tako da će sledeća tvrđenja biti navedena bez dokaza.

Definicija 2.1.4 : Linearni operator $A : X \to Y$ zovemo kompaktni operator ako i samo ako za svaki ograničeni niz $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, niz $\{A(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ima Košijev podniz.

Teorema 2.1.5 : Za svaki kompaktan operator T važi $0 \in \sigma(T)$.

Teorema 2.1.6 : Za svako $\varepsilon > 0$ postoji samo konačan broj linearno nezavisnih svojstvenih vektora koji odgovaraju svojstvenim vrednostima λ_i, gde je $|\lambda_i| \geq \varepsilon$. Postoji konačan broj $\lambda_i \in \sigma_p$ takvih da je $|\lambda_i| \geq \varepsilon$ i svaki λ_i je konačne višestrukosti tj. $\dim \operatorname{Ker}(T - \lambda I) < \infty$.

Struktura tačkastog spektra je jasna, on je najviše niz $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ koji teži nuli i svaki član tog niza je konačne višestrokosti.

Teorema 2.1.7 : Za svaki kompaktni operator $T : X \to X$ u beskonačno-dimenzionalnom Banahovom prostoru X važi $\sigma(T) = \{0\} \bigcup \sigma_p(T)$.

2.2 Samoadjungovani operatori

Ograničeni operator $A : H \to H$ na Hilbertovom prostoru H zovemo samoadjungovani ili simetrični operator ako i samo ako za svako $x,\ y \in H$ važi $\langle A\,x,\ y\rangle = \langle x,\ A\,y\rangle$. Videćemo nekoliko važnih osobina ovih operatora.

Propozicija 2.2.1 : Za tačkasti spektar σ_p samoadjungovanog operatora A važi $\sigma_p(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Dokaz: Neka je $\lambda \in \sigma_p$ i $A\,x = \lambda\,x$, $(x \neq 0)$. Tada,

$$\lambda\,\|x\|^2 = \langle A\,x,\ x\rangle = \langle x,\ A\,x\rangle = \overline{\lambda}\,\|x\|^2$$

odakle sledi $\lambda = \overline{\lambda}$ tj. $\lambda \in \mathbb{R}$. ■

Propozicija 2.2.2 : Ako je $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \sigma_p$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ i $A\,x_1 = \lambda_1\,x_1$, $A\,x_2 = \lambda_2\,x_2$, tada je $x_1 \perp x_2$.

Dokaz: Primetimo $\lambda_1\,\langle x_1,\ x_2\rangle = \langle A\,x_1,\ x_2\rangle = \langle x_1,\ A\,x_2\rangle = \overline{\lambda}_2\,\langle x_1,\ x_2\rangle$. Znamo $\lambda_1 \neq \lambda_2$ zato $\langle x_1,\ x_2\rangle = 0$. ■

Podprostor L prostora H zovemo invarijantnim u odnosu na operator A, ako i samo ako $A(L) \subseteq L$.

Propozicija 2.2.3 : Ako je L invarijantni podprostor u odnosu na operator A, takav je i $L^{\perp}$.

Dokaz: Uzmimo $y \in L^{\perp}$, $x \in L$. Tada $A\,x \in L$ i imamo $\langle A\,x,\ y \rangle = 0$. Odatle $\langle x,\ A\,y \rangle = 0$ za sve $x \in L$ što znači $A\,y \in L^{\perp}$. ■

Propozicija 2.2.4. : Ako su A i B simetrični operatori i $A\,B = B\,A$ tada je $A\,B$ takođe simetričan operator.

Dokaz: Uzmimo proizvoljne $x,\ y \in H$. Važi

$$\langle A\,B\,x,\ y \rangle = \langle B\,x,\ A\,y \rangle = \langle x,\ B\,A\,y \rangle = \langle x,\ A\,B\,y \rangle.$$

dakle $A\,B$ je simetričan operator. ■

Propozicija 2.2.5 : Definišimo $C = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{|\langle A\,x, x \rangle|}{\|x\|^2}$. Tada, ako je A simetričan operator važi $C = \|A\|$.

Dokaz: Koristeći Koši-Švarcovu nejednakost imamo

$$|\langle A\,x,\ x \rangle| \leq \|A\,x\|\,\|x\| \leq \|A\|\,\|x\|^2$$

odatle $\frac{|\langle A\,x, x \rangle|}{\|x\|^2} \leq \|A\|$ za svako $x \neq 0$ što znači $C \leq \|A\|$.
Pokažimo da važi i obrnuto. Primetimo prvo

$$2\,(\langle A\,x,\ y \rangle + \langle A\,y,\ x \rangle) = \langle A(x+y),\ x+y \rangle - \langle A(x-y),\ x-y \rangle.$$

Koristeći nejednakost trougla imamo

$$2\,|\langle A\,x,\ y \rangle + \langle A\,y,\ x \rangle| \leq |\langle A(x+y),\ x+y \rangle| + |\langle A(x-y),\ x-y \rangle|.$$

Iz definicije C i zakona paralelograma imamo

$$\begin{aligned} |\langle A\,x,\ y \rangle + \langle A\,y,\ x \rangle| &\leq \tfrac{1}{2}\,C(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \\ &= C(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

Neka je sada x proizvoljan vektor takav da je $\|x\| = 1$ i neka je $y = \frac{A\,x}{\|A\,x\|}$ (slučaj $A\,x = 0$ ne daje supremum, zato pretpostavljamo da je $A\,x \neq 0$). Tada $\|y\| = 1$ i

$$\left| \frac{\langle A\,x, A\,x \rangle}{\|A\,x\|} + \frac{\langle A\,x, A\,x \rangle}{\|A\,x\|} \right| \leq 2\,C \Rightarrow \|A\,x\| \leq C$$

za sve $x \in H$ sa $\|x\| = 1$. To znači $\|A\| \leq C$. ■

Propozicija 2.2.6 : Za svako $x \in H$ $\langle A\,x,\, x \rangle \in \mathbb{R}$ ako i samo ako je A simetričan operator.

Dokaz: Obrnuto tvrđenje je očigledno. Da bismo dokazali direktan smer koristićemo standardan trik: izrazićemo bilinearnu formu kombinujući kvadratne forme:

$$4\,\langle A\,x,\; y \rangle = \langle A(x+y),\, x+y \rangle - \langle A(x-y),\, x-y \rangle + i\,\langle A(x+i\,y),\, x+i\,y \rangle - i\,\langle A(x-i\,y),\, x-i\,y \rangle.$$

Menjajući pozicije x-a i y-a i uzimajući kompleksno konjugovane vrednosti desna strana ovog identiteta se neće promeniti, ali će leva postati $4\,\langle x,\; A\,y \rangle$, što znači da je $\langle A\,x,\; y \rangle = \langle x,\; A\,y \rangle$. ■

Da bismo dokazali sledeću propoziciju neophodno je da pre toga pokažemo sledeći koristan rezultat.

Teorema 2.2.7 : Neka je $A \in \mathcal{L}(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ i neka je niz $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ takav da ja $\|x_n\| = 1$ i $A\,x_n - \lambda\,x_n \to 0$ kad $n \to \infty$. Tada je $\lambda \in \sigma(A)$.

Dokaz: Pretpostavimo da je $A - \lambda\,I$ inverzibilan operator. Tada postoji $\delta > 0$ takvo da je $\|(A - \lambda\,I)\,x\| \geq \delta\,\|x\|$ za svako x, što je kontradikcija sa uslovom teoreme. ■

Propozicija 2.2.8 : Neka je A simetričan operator i neka je

$$\|A\| = \mu = \sup\{|\langle A\,x,\, x \rangle| : \|x\| = 1\}$$

Tada je bar jedan od μ ili $-\mu$ elemenat $\sigma(A)$.

Dokaz: Uzmimo x_n takav da je $\|x_n\| = 1$ i $|\langle A\,x_n,\, x_n \rangle| \to \mu$ (ovo je moguće na osnovu propozicije 2.2.5). Neka je $\langle A\,x_n,\, x_n \rangle \to \lambda$ (ovde može biti neophodno preći na podniz). Jasno je $\lambda = \pm\mu$. Dalje imamo

$$0 \leq \|A\,x_n - \lambda\,x_n\|^2 = \|A\,x_n\|^2 - 2\,\lambda\,\langle A\,x_n,\, x_n \rangle + \lambda^2\,\|x_n\|^2 \leq 2\,\lambda^2 - 2\,\lambda\,\langle A\,x_n,\, x_n \rangle$$

što konvergira nuli kad $n \to \infty$. Zato $\lambda \in \sigma(A)$. ■

Propozicija 2.2.9 : Neka je A samoadjungovani operator $A \in \mathcal{L}(H)$ gde je H hilbertov prostor. Tada je $\sigma_r(A) = \emptyset$.

Dokaz: Pokažimo prvo da važi: ako je $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, onda je $(\operatorname{Im} A)^{\perp} = \operatorname{Ker} A^*$. Zaista, ako je $f \in (\operatorname{Im} A)^{\perp}$, tada je $0 = f(A\,x) = (A^* f)(x)$ za sve $x \in X$ i odatle $A^* f = 0$ tj. $f \in \operatorname{Ker} A^*$. Ako je $f \in \operatorname{Ker} A^*$ onda je $f(A\,x) = (A^* f)(x) = 0$ za sve $x \in X$ odakle sledi da je $f(y) = 0$ za sve $y \in \operatorname{Im} A$ tj. $f \in (\operatorname{Im} A)^{\perp}$.

Sada imamo da za svako $\lambda \in \mathbb{C}$ važi

$$\operatorname{Im}(A - \lambda\, I)^{\perp} = \operatorname{Ker}(A^* - \overline{\lambda}\, I) = \operatorname{Ker}(A - \overline{\lambda}\, I)$$

odatle, ako $\overline{\operatorname{Im}(A - \lambda\, I)} \neq H$, onda je $\overline{\lambda}$ svojstvena vrednost operatora A. Imajući u vidu da je A samoadjungovan, $\lambda \in \mathbb{R}$ sledi da je $\lambda = \overline{\lambda}$ svojstvena vrednost operatora A. Zato $\lambda \notin \sigma_r(A)$. ■

2.3 Samoadjungovani kompaktni operatori. Spektralna teorija

Propozicija 2.3.1 : Ako je A kompaktni samoadjungovani operator, tada A ima svojstvenu vrednost λ takvu da $|\lambda| = \|A\|$, šta više maksimum $|\langle A\,x, x\rangle|$ za $\|x\| = 1$ je dostignut za svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrednosti λ.

Dokaz: Postojanje $\lambda \in \sigma_p(A)$ takvo da je $|\lambda| = \|A\|$ sledi iz propozicije 2.2.8 i činjenice da za kompaktne operatore važi $\sigma(A) = \{0\} \cup \sigma_p(A)$. Ako je $A\,x_0 = \lambda\,x_0$ i $\|x_0\| = 1$ tada $|\langle A\,x_0, x_0\rangle| = |\lambda| = \|A\|$. ■

Ova osobina nam govori da svaki ne nula kompaktni operator ima ne nula svojstvenu vrednost.

Teorema 2.3.2 : Ako je T simetričan operator, onda je $\operatorname{Ker} T \perp \operatorname{Im} T$.

Dokaz: Neka su $x \in \operatorname{Ker} T$ i $y \in \operatorname{Im} T$ proizvoljni. Kako je $y \in \operatorname{Im} T$, postoji x_0 takvo da je $T\,x_0 = y$. Sada imamo

$$\langle x, y\rangle = \langle x, T\,x_0\rangle = \langle T\,x, x_0\rangle = \langle 0, x_0\rangle = 0.$$

Odavde sledi tvrđenje. ■

Teorema 2.3.3 :(Prva Hilbert-Šmitova teorema)

Za svaki ne nula kompaktni simetrični operator $T : H \to H$ postoji skup ne nula svojstvenih vrednosti $\{\lambda_i\}_{i\geq 1}$ u $\mathbb{R}$ tako da je

$$|\lambda_1| \geq ... \geq |\lambda_i| \geq |\lambda_{i+1}| \geq ...$$

konačan ili konvergentan ka nuli i ortonormirani sistem $\{e_i\}_{i\geq 1}$ svojstvenih vektora takvih da je $T\, e_i = \lambda\, e_i$ i da važi:

1) Za svako $x \in H$ imamo $x = y + \sum_{i\geq 1} \langle x, e_i\rangle\, e_i$ gde je $y \in \operatorname{Ker} T$
2) $T\, x = \sum_{i\geq 1} \langle T\, x, e_i\rangle\, e_i = \sum_{i\geq 1} \lambda_i \langle x, e_i\rangle\, e_i$

i za svako $z \in \overline{\operatorname{Im} T}$ imamo $z = \sum_{i\geq 1} \langle z, e_i\rangle\, e_i$ tj. $\{e_i\}_{i\geq 1}$ je ortonormirana baza $\overline{\operatorname{Im} T}$-a.

Dokaz: Indukcijom ćemo konstruisati nizove $\{\lambda_i\}_{i\geq 1}$ i $\{e_i\}_{i\geq 1}$. Vektor e_1 dobijamo iz prethodnog tvrđenja iz uslova $\|e_1\| = 1$, $T\, e_1 = \lambda_1\, e_1$, $|\lambda_1| = \|T\|$.

Neka je $\{e_i\}_{i=1}^n$ već definisan niz uz pomoć induktivnog postupka ($T\, e_i = \lambda_i\, e_i$, $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_n|$, $\|e_1\| = 1$). Neka je $E_n = \operatorname{span}\{e_i\}_{i=1}^n$ lineal (skup svih linearnih kombinacija) skupa $\{e_i\}_{i=1}^n$. E_n je invarijantni podprostor od T i zbog toga je $E_n^\perp$ takođe invarijantan podprostor od T. Naravno T je simetričan na svakom invarijantnom podprostoru pa i na $E_n^\perp$. Uzmimo $T_{n+1} = T\,|_{E_n^\perp}$. Primenjujući propoziciju 2.3.1 na operator T_{n+1} dobijamo vektor e_{n+1} takav da je $\|e_{n+1}\| = 1$, $T\, e_{n+1} = \lambda_{n+1}\, e_{n+1}$ i $|\lambda_{n+1}| = \|T_{n+1}\|$. Kako je $E_{n-1} \subseteq E_n$ to je $E_n^\perp \subseteq E_{n-1}^\perp$ i odatle

$$|\lambda_{n+1}| = \|T_{n+1}\| = \|T\,|_{E_n^\perp}\| \leq \|T\,|_{E_{n-1}^\perp}\| = \|T_n\| = |\lambda_n|$$

što daje $|\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n|$ za svako n . Nastavljajući ovaj proces ili ćemo se zaustaviti za $T_{n+1} = 0$ ili ćemo imati beskonačan niz $\{\lambda_i\}_{i\geq 1}$ svojstvenih vrednosti T-a i odgovarajućih svojstvenih vektora $\{e_i\}_{i\geq 1}$. Za svako $x \in H$ neka je $x_n = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle\, e_i$, $y_n = x - x_n$. Jasno je $y_n \in E_n^\perp$. U prvom slučaju imamo $T\, y_n = 0$ i odatle $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle\, e_i + y_n$, $y_n \in \operatorname{Ker} T$. U drugom slučaju skup svojstvenih vrednosti $\{\lambda_i\}_{i\geq 1}$ je beskonačan i na osnovu osobine kompaktnih operatora (teorema 2.1.6) $\lambda_n \to 0$. Odatle

$$\|T\, y_n\| \leq \|T\,|_{E_n^\perp}\|\, \|y_n\| = |\lambda_{n+1}|\, \|y_n\| \leq |\lambda_{n+1}|\, \|x\| \to 0 \text{ kad } n \to \infty.$$

Na osnovu Besel-ove nejednakosti možemo zaključiti da $\lim y_n$ postoji, iz $\|T\, y_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ i iz činjenice da je T ograničen (neprekidan) operator zaključujemo $T\, y = 0$. Zato

$x - \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i = \lim_{n\to\infty} y_n = y \in \operatorname{Ker} T$. Odatle zaključujemo da je $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i + y, \;\; y \in \operatorname{Ker} T$.

Dalje, kako su e_i svojstveni vektori od T sa svojstvenim vrednostima λ_i, dobijamo

$$T x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle x, e_i \rangle e_i .$$

Odatle sledi da je $\operatorname{Im} T \subseteq \overline{\operatorname{span}} \{e_i\}_{i\ge 1}$, a kako je $e_i = \frac{1}{\lambda_i} T e_i \in \operatorname{Im} T$ zaključujemo da je $\overline{\operatorname{Im}} T = \overline{\operatorname{span}} \{e_i\}_{i\ge 1}$. Kako je $\{e_i\}_{i\ge 1}$ ortonarmiran sistem sledi da je $\{e_i\}_{i\ge 1}$ baza $\overline{\operatorname{Im}} T$-a. ■

U sledećim posledicama ćemo uvek pretpostavljati da je T samoadjungovani kompaktni operator u Hilbertovom prostoru H i da su λ_i i e_i svojstvene vrednosti i odgovarajući ortonormirani svojstveni vektori dati prethodnom teoremom.

Posledica 2.3.4 : Ako je H separabilni Hilbertov prostor tada postoji ortonormirana baza svojstvenih vektora $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ operatora T.

Dokaz: Pokazali smo da je $H = \operatorname{Ker} T \oplus \overline{\operatorname{Im}} T$. Ostalo je samo da dodamo slučaj $\operatorname{Ker} T \neq 0$ prethodnoj teoremi. Posmatrajmo ortonormiranu bazu $\{e_i\}_{i\ge 1}$ $\overline{\operatorname{Im}} T$-a koju smo konstruisali malopre. Dodajmo joj bilo koju ortonormiranu bazu $\operatorname{Ker} T$-a recimo $\{f_i\}_{i\ge 1}$. Primetimo $T f_i = 0 \cdot f_i = 0$ imamo da je f_i svojstveni vektor svojstvene vrednosti $\lambda = 0$. ■

Primedba: Na osnovu teoreme 2.3.3 imamo $\langle T x, x \rangle = \sum_{i\ge 1} \lambda_i \left|\langle x, e_i \rangle\right|^2$. Razdvojmo pozitivne i negativne svojstvene vrednosti u izrazu. Označimo sa e_i^+ svojstveni vektor koji odgovara pozitivnoj svojstvenoj vrednosti λ_i^+. Slično, negativne svojstvene vrednosti i negativne svojstvene vektore označavamo sa λ_i^- i e_i^-. Tada

$$\sum \lambda_i^+ \left|\langle x, e_i^+ \rangle\right|^2 + \sum \lambda_i^- \left|\langle x, e_i^- \rangle\right|^2 = \langle T x, x \rangle. \tag{2.3.5}$$

Naravno, ukoliko nema, recimo negativnih svojstvenih vrednosti, druga suma ne postoji.

Pretpostavimo sada da je $\lambda_1^+ \ge \lambda_2^+ \ge \dots$ i $\lambda_1^- \le \lambda_2^- \le \dots$. Tada iz primedbe sledi sledeća posledica.

Posledica 2.3.6 : Neka je H beskonačno-dimenzionalni Hilbertov prostor. Tada su tačna sledeća tvrđenja:

1) Ako postoji pozitivna svojstvena vrednost tada $\max_{\|x\|=1} \langle T x, x \rangle = \lambda_1^+$; ako postoji negativna svojstvena vrednost tada $\min_{\|x\|=1} \langle T x, x \rangle = \lambda_1^-$.

2) $\langle T x, x \rangle \ge 0$ za svako $x \in H$ ako i samo ako ne postoje negativne svojstvene vrednosti.

3) Uzmimo $\lambda^+ = \lambda_1^+$ ako postoje pozitivne svojstvene vrednosti i $\lambda^+ = 0$ ako ne postoje. Slično $\lambda^- = \lambda_1^-$ ako postoje negativne svojstvene vrednosti i $\lambda^- = 0$ u suprotnom. Tada

$$\sup_{\|x\|=1} \langle T\, x,\, x\rangle = \lambda^+ \;\text{ i }\; \inf_{\|x\|=1} \langle T\, x,\, x\rangle = \lambda^-$$

i odatle

$$\lambda^- \|x\|^2 \le \langle T\, x,\, x\rangle \le \lambda^+ \|x\|^2.$$

Dokaz:

1) Pretpostavimo da postoje pozitivne svojstvene vrednosti. Zbog (2.3.5) i Besel-ove nejednakosti za $\|x\| = 1$ sledi

$$\langle T\, x,\, x\rangle \le \sum \lambda_i^+ \,|\langle x,\, e_i^+\rangle|^2 \le \lambda_1^+ \sum |\langle x,\, e_i^+\rangle|^2 \le \lambda_1^+.$$

Dalje, za $x = e_1^+$ imamo $\langle T\, e_1^+,\, e_1^+\rangle = \lambda_1^+$. Za negativne svojstvene vrednosti, dokaz je sličan.

2) Sledi neposredno iz (2.3.5) i (1)

3) Ako postoji pozitivna svojstvena vrednost tada jednakost za λ^+ sledi iz (1). Ako takva svojstvena vrednost ne postoji tada za svako x imamo $\langle T\, x,\, x\rangle \le 0$ i kako $\lambda_i \xrightarrow{i\to\infty} 0$ (ili postaje nula posle nekog i) možemo uzeti $x_n = e_n^-$ i dobijamo $\langle T\, x_n,\, x_n\rangle = \lambda_n^- \to 0$ kada $n \to \infty$. Odatle $\lambda^+ = 0$. Dokaz je sličan za slučaj $\lambda^- = 0$. ■

Posledica 2.3.7 :(Princip minimuma i maksimuma)

Neka je $\lambda_{n+1}^+ > 0$ (znači da postoji najmanje$n + 1$ pozitivna svojstvena vrednost). Tada

$$\lambda_{n+1}^+ = \min_{\{x_1,\ldots,x_n\}} \varphi(x_1,\; \ldots ,\, x_n)$$

gde je $\varphi(x_1,\; \ldots ,\, x_n) = \sup\limits_{\|x\|=1} \{\langle T\, x,\, x\rangle : x \in (\operatorname{span}\{x_i\}_1^n)^\perp\}$.

Slična formula važi za λ_i^-.

Dokaz: Znamo na osnovu posledice 2.3.6 primenjene na restrikciju operatora T na podprostor $(\operatorname{span}\{x_i\}_1^n)^\perp$ da je

$$\lambda_{n+1}^{+} = \max\{\langle T\, x,\, x\rangle : x \in (\operatorname{span}\{e_i\}_1^n)^{\perp}\}$$

Ako pokažemo da je $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \geq \lambda_{n+1}^{+}$ (za svako $\{x_i\}_1^n$) odatle će slediti $\min \varphi = \lambda_{n+1}^{+}$.

Pokažimo prvo da postoji $y \perp (x_1, \ldots, x_n)$, $\|y\| = 1$ i $y \in \operatorname{span}\{e_i^{+}\}_1^{n+1}$. Nađimo $y = \sum_1^{n+1} a_i\, e_i^{+}$ tako da je $0 = \langle y, x_j\rangle = \sum_1^{n+1} a_i \langle e_i^{+}, x_j\rangle$. Ovo je sistem od n jednačina sa $n+1$ nepoznatom $\{a_i\}_{i=1}^{n+1}$. Jasno, postoji ne-nula rešenje y koje možemo normalizovati tako da je $\sum |a_i|^2 = 1$. Dakle konstruisali smo traženo y. Tada važi

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, \ldots, x_n) &\geq \langle T\, y,\, y\rangle \\ &= \sum a_i\, \overline{a}_j \langle T\, e_i^{+}, e_j^{+}\rangle \\ &= \sum_1^{n+1} \lambda_i^{+} |a_i|^2 \geq \lambda_{n+1}^{+}.\end{aligned}$$

■

2.4 Primena na integralne operatore

Teorema 2.4.1 :(Druga Hilbert-Šmitova teorema, teorema o simetričnom jezgru)

Neka je $H = L_2[a, b]$. Posmatrajmo operator

$$(K\, x)(s) = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt$$

gde je $K(s, t) \in L_2(I^2)$, $I = [a, b]$. Poznato je da je takav operator kompaktan. Neka je $K = K^*$ (znači da je $K(s, t) = \overline{K(s, t)}$). Neka su $\{e_i(t)\}$ ortonormirani svojstveni vektori od K (pozivajući se na prvu Hilbert-Šmitovu teoremu) i $K\, e_i = \lambda_i\, e_i$. Tada

$$K(s, t) = \sum_{i \geq 1} \lambda_i\, e_i(s)\, \overline{e_i(t)}$$

(konvergencija reda i jednakost se posmatra u smislu$L_2(I^2)$)

Kao posledicu imamo

$$\sum \lambda_i^2 = \int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2\, ds\, dt < \infty.$$

Dokaz: Neka je $\eta_i(s, t) = e_i(s)\, \overline{e_i(t)}$. Tada je $\{\eta_i\}$ ortonormiran sistem u $L_2(I^2)$. Zato znamo da postoji funkcija $\Phi(s, t)$ kao elemenat $L_2(I^2)$ takav da je

$$\Phi(s, t) = \sum_{i \geq 1} \langle K, \eta_i \rangle_{L_2(I^2)} \eta_i .$$

Pokažimo da je $\langle K, \eta_i \rangle = \lambda_i$. Zaista

$$\begin{aligned}\langle K, \eta_i \rangle_{L_2(I^2)} &= \int_a^b \int_a^b K \langle s, t \rangle \overline{e_i(s)\, \overline{e_i(t)}}\, ds\, dt \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b K(s, t)\, e_i(t)\, dt \right) \overline{e_i(s)}\, ds \\ &= \langle K e_i, e_i \rangle_{L_2(I)} = \lambda_i \langle e_i, e_i \rangle = \lambda_i.\end{aligned}$$

Zato $\Phi(s, t) = \sum \lambda_i \eta_i$.

Uzmimo $x(t)$, $z(t) \in L_2(I)$. Na osnovu prve Hilbert-Šmitove teoreme znamo da je $K z = \sum \langle K z, e_i \rangle e_i$. Tada

$$\langle K z, x \rangle = \int_a^b \int_a^b K(s, t)\, z(t)\, \overline{x(s)}\, dt\, ds = \langle K, x(s)\, \overline{z(t)} \rangle_{L_2(I^2)} \text{ i}$$

$$\langle K z, x \rangle = \langle \sum \langle K z, e_i \rangle e_i, x \rangle = \sum \lambda_i \langle z, e_i \rangle \langle e_i, x \rangle.$$

Ovo može biti zapisano u $L_2(I^2)$ skalarnom proizvodu kao

$$\sum \lambda_i \langle \eta_i, x \bar{z} \rangle_{L_2(I^2)} = \langle \Phi, x \bar{z} \rangle_{L_2(I^2)}.$$

Dakle za sve funkcije $x(s)$ i $z(t)$ iz $L_2(I)$ imamo

$$\langle \Phi, x \bar{z} \rangle = \langle K, x \bar{z} \rangle \text{ ili}$$

$$\langle \Phi - K, x \bar{z} \rangle = 0.$$

Zato je $\Phi - K = 0$ tj. $\Phi = K$ u smislu $L_2(I^2)$. ■

Napomena 2.4.2 : Integralni operator definisan pomoću funkcije jezgra $K(t, s)$ vodi od $L_2(I^2)$ ka maloj podklasi kompaktnih simetričnih operatora. Njihov skup svojstvenih vrednosti mora težiti ka nuli toliko brzo da važi $\sum \lambda_i^2 < \infty$. Na primer, ne postoji operator sa svojstvenim vrednostima $\lambda_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Sa druge strane to je veoma značajna klasa operatora.

Napomena 2.4.3 : Primetimo, ako je $K(x, t)$ neprekidna funkcija tada su i svojstveni vektori $e_i(t)$, koji odgovaraju ne-nula svojstvenim vrednostima, takođe neprekidne funkcije. (Posledica druge Hilbert-Šmitove teoreme)

Teorema 2.4.4 : (Mercer) Neka je $K(s, t)$, $s, t \in I$ neprekidna funkcija, pretpostavimo da su sve svojstvene vrednosti λ_i odgovarajućeg integralnog operatora K nenegativne (što znači $\langle K x, x\rangle \geq 0$ za svako x). Tada,

$$K(s, t) = \sum_{i\geq 1} \lambda_i \, e_i(s) \, \overline{e_i(t)}$$

i ovaj red konvergira apsolutno i uniformno.

Dokaz: Konvergencija u smislu $L_2(I^2)$ je jasna na osnovu teoreme 2.4.1. Pokažimo da red konvergira uniformno. Jasno K je kompaktan operator pa na osnovu prve Hilbert-Šmitove teoreme važi $K x = \sum_{i\geq 1} \lambda_i \langle x, e_i\rangle \, e_i$.

Za dato $s \in I$ dobijamo

$$\lambda_i \, \overline{e_i(s)} = \int_a^b K(s, t) \, \overline{e_i(t)} \, dt$$

što pokazuje da je $\lambda_i \, \overline{e_i(s)}$ Furijeov koeficijent funkcije $t \mapsto K(s, t)$ u odnosu na ortonormirani sistem $\{e_i\}$. Tada iz Beselove nejednakosti i činjenice da je $\int_a^b |K(s, t)|^2 \, dt \leq M$ sledi

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i \, \overline{e_i(s)}|^2 \leq M \text{ za } n \in \mathbb{N}.$$

Za dato $\varepsilon > 0$ zbog Beselove nejednakosti postoji $n \in \mathbb{N}$ takvo da je $\sum_{i=n+1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \varepsilon^2$.

Sada za $p \in \mathbb{N}$ imamo

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} |\lambda_i \langle x, e_i\rangle \, e_i(s)| \leq \left(\sum_{i=n+1}^{n+p} |\lambda_i \, e_i(s)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=n+1}^{n+p} |\langle x, e_i\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Odavde dobijamo

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |\lambda_i \langle x, e_i\rangle \, e_i(s)| \leq \varepsilon \sqrt{M} \text{ za } s \in I$$

što pokazuje da red uniformno konvergira.

Posmatrajmo sada funkciju $K_n(s, t) = K(s, t) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \, e_i(s) \, \overline{e_i(t)}$. Jasno da je ta funkcija neprekidna i da važi $K_n(s, t) = \overline{K_n(s, t)}$. Za $f(s, t) = x(s) \, \overline{x(t)}$ imamo

$$\langle K_n, f\rangle = \int_a^b \int_a^b K_n(s, t)\, \overline{x(s)}\, x(t)\, dt\, ds$$
$$= \int_a^b \Big(\int_a^b K_n(s, t)\, x(t)\, dt\Big)\, \overline{x(s)}\, ds$$
$$= \int_a^b \big(\textstyle\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i \langle x, e_i\rangle\, e_i(s)\big)\, \overline{x(s)}\, ds$$

kako red uniformno konvergira, što smo malo pre pokazali

$$= \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i \langle x, e_i\rangle \int_a^b e_i(s)\, \overline{x(s)}\, ds = \textstyle\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i\, |\langle x, e_i\rangle|^2 \geq 0.$$

Pokažimo da je $K_n(t, t) \geq 0$ za svako $t \in I$. U suprotnom bi bilo $K(t_0, t_0) < 0$ za neko $t_0 \in I$. Tada bi za $\varepsilon > 0$ postojala neka okolina U tačke t_0 takva da je

$$\operatorname{Re} K_n(t, s) \leq -\varepsilon \text{ za } t,\, s \in U.$$

Uzmemo li funkciju $x \in C(I)$ takvu da je na U strogo pozitivna i jednaka nuli van U, onda za $f(s, t) = \overline{x(s)}\, x(t) = x(s)\, x(t)$ imamo

$$0 \leq \langle K_n, f\rangle = \int_U \int_U \operatorname{Re} K_n(t, s)\, x(t)\, x(s)\, dt\, ds + i \int_U \int_U \operatorname{Im} K_n(t, s)\, x(t)\, x(s)\, dt\, ds$$
$$= \int_U \int_U \operatorname{Re} K_n(t, s)\, x(t)\, x(s)\, dt\, ds \leq -\varepsilon\Big(\int_U x(t)\, dt\Big)^2 < 0$$

što je kontradikcija.

Dakle $K_n(t, t) \geq 0$ tj.

$$K(t, t) \geq \textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i(t)\, \overline{e_i(t)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, |e_i(t)|^2.$$

Odavde sledi da red $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, |e_i(t)|^2$ sa pozitivnim članovima konvergira i ima sumu manju ili jednaku $K(t, t)$. Stavimo li $\gamma = \max\{K(t, t) : t \in I\}$ imamo sledeće

$$\big(\textstyle\sum_{i\geq 1} |\lambda_i\, e_i(s)\, \overline{e_i(t)}|\big)^2 = \Big(\displaystyle\sum_{i\geq 1} \Big|\sqrt{\lambda_i}\; e_i(s)\, \sqrt{\lambda_i}\; \overline{e_i(t)}\Big|\Big)^2$$
$$\leq \textstyle\sum_{i\geq 1} \lambda_i\, |e_i(s)|^2 \sum_{i\geq 1} \lambda_i\, |e_i(t)|^2$$
$$\leq K(t, t) \textstyle\sum_{i\geq 1} \lambda_i\, |e_i(s)|^2$$
$$\leq \gamma \textstyle\sum_{i\geq 1} \lambda_i\, |e_i(s)|^2.$$

Dakle, red $\sum_{i\geq 1} \lambda_i\, e_i(s)\, \overline{e_i(t)}$ je majorizovan konvergentnim redom $\gamma \sum_{i\geq 1} \lambda_i\, |e_i(s)|^2$ za svako $s \in I$ što znači da taj red uniformno konvergira. ■

Posledica 2.4.5 : Pod uslovima navedenim u prethodnoj teoremi, $\sum \lambda_i = \int_a^b K(t, t)\, dt$ i $K(t, t) \geq 0$.

Dokaz: Na osnovu Mercerove teoreme $K(t, t) = \sum \lambda_i |e_i(t)|^2$ za svako t. Integraleći obe strane ove jednakosti uzimajući u obzir da je $\int_a^b |e_i(t)|^2\, dt = 1$ dobijamo $\sum \lambda_i = \int_a^b K(t, t)\, dt$. ■

2.5 Poredak u prostoru samoadjungovanih operatora

Definicija 2.5.1 : Operator A zovemo nenegativnim (pozitivno semidefinitni) i pišemo $A \geq 0$ ako i samo ako $\langle A x, x \rangle \geq 0$ za svako $x \in H$. Odavde sledi da je A simetričan operator na osnovu osobine 2.2.6 . Šta više $A \leq B$ znači

i) i A i B su simetrični

ii) $B - A \geq 0$.

2.5.a. Osobine uređenja :

i) $-I \leq A \leq I$ implicira $\|A\| \leq 1$. Zaista, ove nejednakosti znače da $\sup_{\|x\| \leq 1} |\langle A x, x \rangle| \leq 1$.

Koristeći ponovo osobinu 2.2.5 dobijamo $-I\, \|A\| \leq A \leq I\, \|A\|$ za samoadjungovani operator A.

ii) Nejednakost $A \geq 0$ i $A \leq 0$ implicira $A = 0$.

iii) Generalisana Koši-Švarcova nejednakost:

Neka je $A \geq 0$. Tada

$$|\langle A x,\ y \rangle| \leq \sqrt{\langle A x, x \rangle}\ \sqrt{\langle A\, y,\ y \rangle}$$

Ovo sledi iz činjenice da je $\langle\langle x,\ y \rangle\rangle := \langle A x,\ y \rangle$ kvazi skalarni proizvod, primenom Koši-Švarcove nejednakosti na takav proizvod.

iv) Ako je C simetričan operator i $A \leq B$, tada je $A + C \leq B + C$.

v) Ako je A simetričan, tada je $A^{2n} \geq 0$. Zaista

$$\langle A^{2n} x,\ x \rangle = \langle A^n x,\ A^n x \rangle = \|A^n x\|^2 \geq 0.$$

Ako je $A \geq 0$ tada je $A^{2n+1} \geq 0$ zato što

$$\langle A^{2n+1} x,\ x \rangle = \langle A\, A^n x,\ A^n x \rangle \geq 0.$$

Sledi, ako je $A \geq 0$ tada za svaki polinom $P(\lambda)$ sa nenegativnim koeficijentima važi $P(A) \geq 0$.

Teorema 2.5.2 :(O konvergenciji monotonog i ograničenog niza operatora)

Neka je $A_0 \leq A_1 \leq \ldots \leq A_n \leq \ldots \leq A$. Tada $\{A_n\}_n$ jako konvergira (tj. postoji ograničeni operator B takav da je $A_n x \to B x$ za svako $x \in H$).

Dokaz: Za svaki simetričan operator postoji broj C takav da je $A \leq C I$. Menjajući niz u $0 \leq \frac{(A_n - A_0)}{C_1} \leq I$, gde je C_1 takav da je $A - A_0 \leq C_1 I$, možemo pretpostaviti bez gubitka opštosti da naš početni niz već zadovoljava $0 \leq A_n \leq I$. Za $n > m$ definišimo $A_{m n} = A_n - A_m \geq 0$. Kako je $0 \leq A_{m n} \leq I$ važi $\|A_{m n}\| \leq 1$. Koristeći generalisanu Koši-Švarcovu nejednakost sledi da za svako x i $y = A_{m n} x$ imamo

$$\begin{aligned} \|A_m x - A_n x\|^2 &= \langle A_{m n} x, A_{m n} x \rangle = \langle A_{m n} x, y \rangle \\ &\leq \sqrt{\langle A_{m n} x, x \rangle} \sqrt{\langle A_{m n} y, y \rangle} \\ &= \sqrt{\langle A_{m n} x, x \rangle} \sqrt{\langle A_{m n}^2 x, A_{m n} x \rangle} \\ &\leq \sqrt{\langle A_{m n} x, x \rangle} \sqrt{\|A_{m n}^2 x\| \, \|A_{m n} x\|} \\ &\leq \sqrt{\langle A_{m n} x, x \rangle} \, \|x\| \end{aligned}$$

jer je $\|A_{m n}^2 x\| \leq \|x\|$ i $\|A_{m n} x\| \leq \|x\|$. Zato,

$$\|A_m x - A_n x\|^2 \leq \sqrt{|\langle A_n x, x \rangle - \langle A_m x, x \rangle|} \, \|x\| \to 0$$

kada $n > m \to \infty$ za svako $x \in H$, jer je niz $\{\langle A_n x, x \rangle\}$ monoton, rastući i ograničen i zato konvergira. Odatle, $\{A_n x\}$ je Košijev niz i postoji granica $\lim_{n \to \infty} A_n x := B x$. Očigledno da je B linearni operator, šta više iz $0 \leq \langle A_n x, x \rangle \leq \langle x, x \rangle$ sledi $0 \leq \langle B x, x \rangle \leq \|x\|^2$ što dalje implicira da je B ograničen operator. ■

Propozicija 2.5.3 :(Glavna propozicija)

Neka je A operator takav da je

$$m I \leq A \leq M I$$

za neko $m, M \in \mathbb{R}$ i neka je P polinom za koji važi $P(z) \geq 0$ za svako $z \in [m, M]$. Tada je $P(A) \geq 0$.

Najvažniji momenat u dokazu ove propozicije se nalazi u sledećoj lemi.

Lema 2.5.4 : Ako je $A \geq 0$, $B \geq 0$ i $A B = B A$, tada je $A B \geq 0$.

Ovo nije trivijalno, simetričnost operatora $A\,B$ jeste trivijalna ali ne i njegova pozitivnost. Tvrđenje ove leme sledi direktno iz dokaza sledeće leme.

Lema 2.5.5 : Neka je $A \geq 0$. Tada postoji operator X (i on je jedinstven) takav da je $X^2 = A$ i $X \geq 0$. Pišemo $\sqrt{A} = X$. Takođe, za svako B koje komutira sa A tj. $A\,B = B\,A$ važi $\sqrt{A}\,B = B\sqrt{A}$.

Primetimo da lema 2.5.5 implicira lemu 2.5.4

$$\langle A\,B\,x,\,x\rangle = \left\langle \sqrt{A}\,\sqrt{A}\,B\,x,\,x\right\rangle = \left\langle B\sqrt{A}\,x,\,\sqrt{A}\,x\right\rangle \geq 0 \text{ jer je } B \geq 0.$$

Dokaz leme: Želimo da nađemo operator $X \geq 0$ za koji važi $X^2 = A$. Pretpostavićemo da je $0 \leq A \leq I$ (u suprotnom podelimo A odgovarajućom konstantom).

Neka je $B = I - A$ i $Y = I - X$. Tada je $A = I - B$, $X = I - Y$, $0 \leq B \leq I$ i trebamo rešiti jednačinu $X^2 = A$ tj.

$$(I - Y)^2 = I - B$$
$$I^2 - 2\,Y + Y^2 = I - B$$
$$Y = \frac{B + Y^2}{2}.$$

Rešićemo ovu jednačinu pomoću niza sukcesivnih aproksimacija $\{Y_n\}$ definisanog na sledeći način

$$Y_{n+1} = \frac{1}{2}\,(B + Y_n^2) \text{ i } Y_0 = 0.$$

Indukcijom po n možemo videti da važi:

i) $Y_n \geq 0$ i Y_n je polinom sa nenegativnim koeficijentima po B, za svako $n \in \mathbb{N}$.

ii) $Y_n \leq I$. Pretpostavimo da je $Y_{n-1} \leq I$ i pokažimo da je $Y_n \leq I$. $Y_n = \frac{1}{2}\,(B + Y_{n-1}^2)$ znamo da je $B \leq I$ ako pokažemo da je $Y_{n-1}^2 \leq I$ dokazali smo da je $Y_n \leq I$. Zaista

$$\langle Y_{n-1}^2\,x,\,x\rangle = \langle Y_{n-1}\,x,\,Y_{n-1}\,x\rangle \leq \|Y_{n-1}\,x\|^2 \leq \|Y_{n-1}\|^2\,\|x\|^2 \leq \|x\|^2 \text{ jer je } \|Y_{n-1}\| \leq 1.$$

iii) $Y_{n+1} - Y_n \geq 0$. Šta više u pitanju su polinomi, sa nenegativnim koeficijentima , po B. Zaista,

$$Y_{n+1} - Y_n = \frac{1}{2}\,(Y_n^2 - Y_{n-1}^2) = \frac{1}{2}\,(Y_n + Y_{n-1})\,(Y_n - Y_{n-1})$$

(ovde smo koristili $Y_n\,Y_{n-1} = Y_{n-1}\,Y_n$ zato što su zbog (*i*) to polinomi jednog istog operatora B).

Takođe $Y_n + Y_{n-1}$ je polimom sa nenegativnim koeficijentima zbog (*i*). Sada, $Y_1 - Y_0 = \frac{B}{2}$ i pretpostavimo da je $Y_n - Y_{n-1}$ polinom po B sa nenegativnim koeficijentima, indukcijom se lako pokazuje da je $Y_{n+1} - Y_n$ takođe polinom po B sa nenegativnim koeficijentima. Kao rezultat dobijamo

$$Y_{n+1} - Y_n \geq 0 \text{ za svako } n \in \mathbb{N}.$$

Odatle na osnovu teoreme 2.5.2, $Y_n \to Y_\infty$ za neki operator Y_∞ (jako). Jasno, $Y_\infty = \frac{B+Y_\infty^2}{2}$ znači da je $X = I - Y_\infty = \sqrt{A}$. Takođe $0 \leq Y_\infty \leq I$ implicira $X \geq 0$. X je (jaki) limit polinoma po B (takođe i po A). Zato za svako C takvo da je $A\,C = C\,A$ važi $P(A)\,C = C\,P(A)$ odakle sledi $X\,A = X\,A$. ■

Posledica 2.5.6 : Ako je $A \geq 0$ i $\langle A\,x,\, x\rangle = 0$ tada $A\,x = 0$.

Dokaz: Uzmimo da je $X = \sqrt{A}$. Imamo $\langle X^2\,x,\, x\rangle = 0$, a odatle sledi $\langle X\,x,\, X\,x\rangle = 0$ što znači $X\,x = 0$. Zato je $A\,x = 0$. ■

U dokazu leme 2.5.5 nije nam bila potrebna činjenica da je pozitivni kvadratni koren operatora A jedinstven. Bez obzira na to, dokažimo tu činjenicu.

Dakle tvrdimo, ako je $X_1 \geq 0$, $X \geq 0$ i $X_1^2 = A$, $X^2 = A$ tada je $X_1 = X$. Zaista,

i) $X_1\,A = X_1^3 = A\,X_1$ sledi $X\,X_1 = X_1\,X$.
ii) Uzmimo $y = (X - X_1)\,x$, tada

$$\begin{aligned} 0 = \langle (A - A)\,x,\ y\rangle &= \langle (X^2 - X_1^2)\,x,\ y\rangle \\ &= \langle (X + X_1)\,(X - X_1)\,x,\ y\rangle \\ &= \langle (X + X_1)\,y,\ y\rangle \\ &= \langle X\,y,\ y\rangle + \langle X_1\,y,\ y\rangle. \end{aligned}$$

Kako su oba sabirka nenegativna sledi da je $X\,y = 0$ i $X_1\,y = 0$. Odatle $X^2 = X\,X_1 = A$.
iii) $\|(X - X_1)\,x\|^2 = \langle (X - X_1)^2\,x,\, x\rangle = 0$ odakle sledi da je $X = X_1$.

Sada možemo dokazati glavnu propoziciju 2.5.3 pomoću leme 2.5.4 Možemo pretpostaviti da je $m < M$ (za $m = M$ trivijalno važi tvrđenje). Tada $P(z) \geq 0$ za $z \in (m,\, M)$ implicira da $P(z)$ ima realne koeficijente i može se zapisati u obliku:

$$P(z) = c\,\prod_{\alpha_i \leq m} (z - \alpha_i)\,\prod_{\beta_i \geq M} (\beta_i - z)\,\prod\,((z - \gamma_i)^2 + \delta_i^2) \quad \text{gde su } \gamma_i,\, \delta_i \in \mathbb{R}$$

za neko $c > 0$. Zaista, α_i su realni koreni manji od m, β_i su realni koreni veći od M, a kvadratni faktori obuhvataju sve realne korene na (m, M) (koji moraju biti parne višestrukosti) i sve kompleksne korene. Očigledno $A - \alpha_i I \geq 0$, $\beta_i I - A \geq 0$ i $(A - \gamma_i I)^2 + \delta_i^2 I \geq 0$. kako su ovi operatori po parovima komutativni (kao polinomi jednog istog operatora A) njihov proizvod je takođe nenegativan na osnovu leme 2.5.4 ■

Posledica 2.5.7 : Ako $m I \leq A \leq M I$ i $P_1(t)$, $P_2(t)$ su realni polinomi za koje važi $P_1(t) \leq P_2(t)$ za svako $t \in [m, M]$ tada je $P_1(A) \leq P_2(A)$ ■

Teorema 2.5.8 : Ako $m I \leq A \leq M I$ i $\lambda \notin [m, M]$, onda je λ regularna tačka operatora A.

Dokaz: U slučaju $-M I \leq A \leq M I$, koristeći osobinu *i*) iz dela 2.5a dobijamo $\|A\| \leq M$. Iz uslova $\lambda \notin [m, M]$ sledi $|\lambda| > \|A\|$ i odatle je λ regularna tačka. U opštem slučaju posmatrajmo operator $A - \alpha I$ gde je $\alpha = \frac{M+m}{2}$. Imamo $-\beta I \leq A - \alpha I \leq \beta I$ gde je $\beta = \frac{M-m}{2}$. Imajući u vidu da $\lambda \notin [m, M]$, sledi da je $\lambda - \alpha \notin [-\beta, \beta]$. Odatle sledi da je $\lambda - \alpha$ regularna tačka operatora $A - \alpha I$ i zato je λ regularna tačka operatora A. ■

Posledica 2.5.9 : Neka je A ograničeni samoadjungovani operator za koji važi $A \geq \delta I$, $\delta > 0$. Tada je operator A inverzibilan.

Dokaz: Tvrđenje sledi direktno iz prethodne teoreme. Zaista, uzimajući da je $m = \delta$ možemo zaključiti da je $\lambda = 0$ regilarna tačka operatora A. ■

2.6 Projektori

Neka je E linearni prostor. Linearni operator $P : E \to E$ zovemo projektorom ako i samo ako $P^2 = P$. Definišimo $E_1 = \operatorname{Im} P$ i $E_2 = \operatorname{Ker} P$.

2.6.a Osobine projektora u linearnim prostorima

Osobina 2.6.1 : $P_{|E_1} = \operatorname{Id}_{E_1}$ (tj. za svako $x \in E_1$ važi $P x = x$)

Dokaz : Znamo, za svako $x \in E_1$ postoji $y \in E$ takvo da je $P y = x$. Odatle $P^2 y = P x$ pa imamo $x = P y = P^2 y = P x$ i zato $P x = x$. ■

Osobina 2.6.2 : Operator $Q = I - P$ je projektor i $\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker} Q$, $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Im} Q$.

Dokaz : Lako ćemo proveriti da je Q projektor

$$Q^2 = (I - P)^2 = I^2 - 2P + P^2 = I - 2P + P = I - P = Q$$

Pokažimo $\mathrm{Im}\, P = \mathrm{Ker}\, Q$. Neka je $x \in \mathrm{Im}\, P$ sledi $P x = x$ na osnovu prethodne osobine pa važi $(I - P)x = x - Px = x - x = 0$ sledi $x \in \mathrm{Ker}\, Q$. Slično, važi i obrnuto.

Dalje, $\mathrm{Ker}\, P = \mathrm{Im}\, Q$. Neka je $x \in \mathrm{Ker}\, P$ dakle $P x = 0$. Tada je $Q x = (I - P)x = x - Px = x - 0 = x$. Obrnuto, $x \in \mathrm{Im}\, Q$ sledi $x = Qx = (I - P)x = x - Px$ dakle $Px = 0$ tj. $x \in \mathrm{Ker}\, P$. ■

Osobina 2.6.3 : Neka je $E_1 = \mathrm{Im}\, P$ i $E_2 = \mathrm{Ker}\, P$. Tada je $E_1 + E_2 = E$ i $E_1 \cap E_2 = 0$ (tj. $E_1 + E_2$ je direktna suma i E je direktna dekompozicija na E_1 i E_2)

Dokaz : Zaista, $PE + (I - P)E = E$ (jer $\mathrm{Ker}\, P = \mathrm{Im}\, Q$ i $Px = 0$, $(I - P)x = 0$ implicira $x = 0$). ■

Uzimajući u obzir ove osobine možemo reći da je P projektor na E_1 paralelan sa E_2.

Osobina 2.6.4 : Neka je $T : E \to E$ proizvoljan linearni operator, $E_1 + E_2 = E$ i neka je P projektor na E_1 paralelan sa E_2. Tada $PT = TP$ ako i samo ako su E_1 i E_2 invarijantni podprostori operatora T.

Dokaz : Važi, $T E_1 = T P E_1 = P T E_1 \subseteq E_1$. Zato $T : E_1 \to E_1$. Slično se pokazuje za E_2 koristeći $Q = I - P$ umesto P.

Drugi smer: Za $x \in E_1$ imamo $P T x = T x = T P x$ jer je $P x = x$ za $x \in E_1$. Za E_2 koristimo Q umesto P. ■

2.6.b Ortogonalni projektori

Projektor P u Hilbertovom prostoru H zovemo ortogonalni projektor ako je $P = P^*$ tj. $\langle P x, y \rangle = \langle x, P y \rangle$ za svako $x, y \in H$.

Osobina 2.6.5 : Ako je P ortogonalni projektor, tada $\mathrm{Im}\, P \perp \mathrm{Ker}\, P$.

Dokaz : Za svako $x, y \in H$ važi:

$$\langle P x, (I - P) y \rangle = \langle x, (P - P^2) y \rangle = 0$$

što znači da je $\mathrm{Im}\, P \perp \mathrm{Im}(I - P)$ tj. $\mathrm{Im}\, P \perp \mathrm{Ker}\, P$. ■

Osobina 2.6.6 : Ako je P projektor i $\mathrm{Im}\, P \perp \mathrm{Ker}\, P$, tada je $P = P^*$.

Dokaz : Za $x \in \operatorname{Ker} P$ imamo: $\langle P x, y \rangle = \langle x, P y \rangle = 0$ jer je $P x = 0$ i $P y \in \operatorname{Im} P$, a znamo $\operatorname{Im} P \perp \operatorname{Ker} P$.

Za $x \in \operatorname{Im} P$, $\langle P x, (I - P) y \rangle = 0$

$$\begin{aligned} &\langle P x, y - P y \rangle = 0 \\ &\langle P x, y \rangle - \langle P x, P y \rangle = 0 \\ &\langle P x, y \rangle = \langle P x, P y \rangle \\ &\langle P x, y \rangle = \langle x, P y \rangle \end{aligned}$$

jer je $P x = x$ za $x \in \operatorname{Im} P$. Dakle, za svako $x, y \in H$ važi $\langle P x, y \rangle = \langle x, P y \rangle$ tj. $P = P^*$. ■

Osobina 2.6.7 : Za svaki ortogonalni projektor važi $0 \leq P \leq I$.

Dokaz : $\langle P x, x \rangle = \langle P^2 x, x \rangle = \|P x\|^2 \geq 0$. Takođe važi $\|x\|^2 = \|P x\|^2 + \|(I - P) x\|^2$ odakle sledi $\|x\|^2 \geq \|P x\|^2$ i zato $0 \leq P \leq I$. ■

Osobina 2.6.8 : Neka $E_i = \operatorname{Im} P_i$ tj. $E_i = P_i H$. Ako je $P_1 P_2 = 0$, onda je $P_2 P_1 = 0$, $E_1 \perp E_2$ i $P_1 + P_2$ je ortogonalni projektor na $E_1 \oplus E_2$.

Dokaz : Zaista, $0 = (P_1 P_2)^* = P_2 P_1$. Dalje, $\langle P_1 H, P_2 H \rangle = \langle P_2 P_1 H, H \rangle = 0$. $(P_1 + P_2)^2 = P_1 + P_2$ i važi $\operatorname{Im}(P_1 + P_2) = E_1 + E_2$. ■

Osobina 2.6.9 : Neka je $P_1 P_2 = P_2 P_1 = P$. Tada je P ortogonalni projektor i $E = \operatorname{Im} P = E_1 \bigcap E_2$ gde je $E_i = P_i H$.

Dokaz : Očigledno je $E_1 \bigcap E_2$ podskup od E. Takođe, $P x \in E_1$ jer je $P = P_1 P_2$ i $P x \in E_2$ jer je $P = P_2 P_1$. Dakle E je podskup od $E_1 \bigcap E_2$. ■

Osobina 2.6.10 : Ako je $P_1 P_2 = P_1$, onda je E_1 podprostor od E_2 i $P_1 \leq P_2$. Šta više, $P_1 \leq P_2$ implicira $P_1 P_2 = P_1$ i zato je E_1 podprostor od E_2.

Dokaz : $P_1 = P_1^* = P_2 P_1 = P_1 P_2$. Sada možemo primeniti prethodnu osobinu da bismo dobili prvo tvrđenje. Važi i drugo: $0 \leq (P_2 - P_1)^2 = P_2 - P_1$ odakle sledi $P_1 \leq P_2$. Dalje imamo

$$\begin{aligned} &\|P_1 (I - P_2) x\|^2 = \langle P_1 (I - P_2) x, (I - P_2) x \rangle \\ &\leq \langle P_2 (I - P_2) x, (I - P_2) x \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

odakle sledi $P_1 - P_1 P_2 = 0$. ■

Osobina 2.6.11 : Neka je P_n niz ortogonalnih projektora koji konvergira jako ka operatoru P. Tada je P takođe ortogonalni projektor.

Dokaz : Neka $P_n x \to P x$ za sve $x \in H$, gde su P_n ortogonalni projektori. Operator P je takođe samoadjungovan kao jaki limit samoadjungovanih operatora. Koristeći relacije $\|P_n\| \leq 1$ i $P_n P x \to P^2 x$, dobijamo

$$\begin{aligned}\|P^2 x - P_n^2 x\| &\leq \|P^2 x - P_n P x\| + \|P_n P x - P_n^2 x\| \\ &\leq \|P^2 x - P_n P x\| + \|P x - P_n x\| \to 0.\end{aligned}$$

Zato za sve $x \in H$ imamo $P^2 x = \lim P_n^2 x = \lim P_n x = P x$. ■

2.7 Funkcije operatora; spektralna dekompozicija

Neka su $a, b, m, M \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < m \leq M < b$ i neka je A operator za koji važi $m I \leq A \leq M I$. Neka je $K[a, b]$ skup po delovima neprekidnih i ograničenih funkcija koje su granica monotono opadajućeg niza neprekidnih funkcija. Za opadajući niz f_n koji konvergira ka f pišemo $f_n \searrow f$. Takve funkcije su poluneprekidne odozgo (za svako $t \in [a, b]$ važi $\overline{\lim}_{\tau \to t} x(\tau) = x(t)$).

Lema 2.7.1 : Neka je $\varphi(t) \in K[a, b]$. Tada postoji niz polinoma $P_n(t) \searrow \varphi(t)$ za $n \to \infty$ za svako $t \in [a, b]$.

Dokaz : Na osnovu definicije $K[a, b]$ postoji $\varphi_n(t) \in C[a, b]$ takav da $\varphi_n(t) \searrow \varphi(t)$. Primenjujući Vajerštrasovu teoremu na neprekidne funkcije $\varphi_n(t) + \frac{3}{2^{n+2}}$, dobijamo da za svako n postoji polinom $P_n(t)$ takav da je

$$|P_n(t) - (\varphi_n(t) + \tfrac{3}{2^{n+2}})| \leq \tfrac{1}{2^{n+2}} .$$

Tada $P_{n+1}(t) \leq \varphi_{n+1}(t) + \frac{1}{2^{n+1}} \leq \varphi_n(t) + \frac{1}{2^{n+1}} \leq P_n(t)$. Zato, $P_n(t)$ je nerastući i očigledno konvergira ka $\varphi(t)$ jer $\varphi_n(t)$ konvergira. ■

Prethodna lema nam omogućava da definišemo operator $\varphi(A)$ za svako $\varphi \in K$ na način koji će biti opisan u sledećoj definiciji.

Definicija 2.7.2 :(Definicija $\varphi(A)$)

Neka je $P_n(t) \searrow \varphi(t)$ za svako $t \in [m, M]$. Tada je opadajući niz $P_n(A) \geq P_{n+1}(A) \geq \ldots$

ograničen jer je $\varphi(t) \geq -T$ što znači da je $P_n(A) \geq -T\, I$. Na osnovu teoreme 2.5.2 niz $P_n(A)$ jako konvergira i granicu zovemo $\varphi(A)$.

Primetimo da zapis $\varphi(A)$ pretpostavlja da ova granica zavisi samo od operatora A i funkcije φ. Na osnovu konstrukcije $\varphi(A)$ mogli bismo posumnjati da zavisi i od izabranog niza $P_n(t)$ kojim aproksimiramo funkciju $\varphi(t)$. Pokazaćemo granica niza $P_n(A)$ koju zovemo $\varphi(A)$ ne zavisi od niza $P_n(t)$ nego samo od funkcije $\varphi(t)$.

Lema 2.7.3 : Neka su $Q_n(t)$ i $P_n(t)$ nizovi polinoma. Pretpostavimo da za svako $t \in [m, M]$, $Q_n(t) \searrow \psi(t) \in K$ i $P_n(t) \searrow \varphi(t) \in K$. Neka $\psi(t) \leq \varphi(t)$ za svako $t \in [m, M]$. Tada

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(A) := B_1 \leq B_2 := \lim_{n\to\infty} P_n(A).$$

Lako možemo pimetiti, ako je $\psi(t) = \varphi(t)$, onda je $B_1 \leq B_2$ i $B_2 \leq B_1$. Odatle $B_1 = B_2 = \varphi(A)$ i granični operator ne zavisi od izbora niza polinoma koji tačkasto konvergira ka $\varphi(t)$.

Dokaz : Za svako $n \in \mathbb{N}$ i svako $t \in [m, M]$ postoji $N_0(t)$ takvo da za svako $N \geq N_0(t)$, $Q_N(t) < \psi(t) + \frac{1}{n}$ i kako $\psi(t) + \frac{1}{n} \leq \varphi(t) + \frac{1}{n} \leq P_n(t) + \frac{1}{n}$ imamo

(2.7.4) $$Q_N(t) < P_n(t) + \frac{1}{n}.$$

(ovde koristimo činjenicu da je $Q_N(t)$ nerastući niz). Odatle sledi da postoji otvoren interval $I(t)$ oko t gde važi (2.7.4) za $N = N_0(t)$ i zbog toga i za svako $N > N_0(t)$. Dakle, imamo pokrivanje intervala $[m, M]$ otvorenim intervalima. Na osnovu Hajne-Borelove teoreme postoji konačan podpokrivač. Neka je to $\{I(t_i)\}_{i=1}^{M}$. Tada za $N_0 = \max_{1\leq i\leq M} N_0(t_i)$, za svako $n \in \mathbb{N}$ i za svako $N \geq N_0$

$$Q_N(t) < P_n(t) + \frac{1}{n}$$

za svako $t \in [m, M]$. To znači da je $Q_N(A) < P_n(A) + \frac{1}{n}\, I$. Puštajući da $N \to \infty$ dobijamo $B_1 \leq P_n(A) + \frac{1}{n}\, I$ (za sada uzimamo da je n fiksirano). Sada, puštajući da $n \to \infty$ imamo $B_1 \leq B_2$. ■

Zbog ovoga za fiksirani operator A preslikavanje $\varphi \in K \mapsto \varphi(A) \in L(H)$ je dobro definisano. Takođe primetimo neposrednu posledicu poslednje dve leme.

Posledica 2.7.5 : Neka su φ_n neprekidne funkcije takve da je $\varphi_n(t) \searrow \varphi(t)$. Tada $\varphi_n(A) \to \varphi(A)$ jako.

Za sve funkcije φ_i koje smo do sada pominjali su iz klase K. Primetimo da je za samoadjungovani operator A i $P_n(t)$ realan polinom, operator $P_n(A)$ takođe samoadjungovan. Zbog toga za svaku funkciju $\varphi \in K$ operator $\varphi(A)$ je samoadjungovan. Sada ćemo pokazati linearnost, multiplikativnost i uređenje ovih preslikavanja.

i) $\varphi_1 + \varphi_2 \mapsto \varphi_1(A) + \varphi_2(A)$ tj. $(\varphi_1 + \varphi_2)(A) = \varphi_1(A) + \varphi_2(A)$.

Uzmimo $P_n^{(i)} \searrow \varphi_i$, $i = 1, 2$. Tada $P_n^{(1)} + P_n^{(2)} \searrow \varphi_1 + \varphi_2$ i izbor polinoma koji opadajući teže ka $\varphi_1 + \varphi_2$ ne utiče na granični operator.

ii) Za $c > 0$ važi $(c\,\varphi_1)(A) = c\,\varphi_1(A)$.

iii) $(\varphi_1\,\varphi_2)(A) = \varphi_1(A)\,\varphi_2(A)$. U ovom momentu ovo ima smisla jedino za $\varphi_1 \geq 0$ i $\varphi_2 \geq 0$ jer u suprotnom $\varphi_1\,\varphi_2$ ne mora pripadati klasi K.

Uzmimo $P_n^{(i)} \searrow \varphi_i \geq 0$ tada $P_n^{(1)}(t)\,P_n^{(2)}(t) \searrow \varphi_1\,\varphi_2$, odakle sledi tvrđenje.

iv) Iz $\varphi_1 \geq \varphi_2$ sledi $\varphi_1(A) \geq \varphi_2(A)$ (lema 2.7.3)

Posmatrajmo sada funkcije $K - K$ oblika $\psi = f - \varphi$ gde su $f, \varphi \in K$. Definišimo $\psi(A) = f(A) - \varphi(A)$. Lako možemo proveriti da ako $\psi = f_1 - \varphi_1 = f_2 - \varphi_2$ onda $f_1 + \varphi_2 = f_2 + \varphi_1$ odakle sledi $f_1(A) + \varphi_2(A) = f_2(A) + \varphi_1(A)$. Odatle $f_1(A) - \varphi_1(A) = f_2(A) - \varphi_2(A)$ što znači da je $\psi(A)$ dobro definisano tj. da ψ ne zavisi od reprezentacije kao razlike $f - \varphi$. Sada se možemo vratiti na osobine ***ii***) i ***iii***). Možemo uzeti bilo koju konstantu u osobini ***ii***) i ne moramo pretpostaviti da je $\varphi_i \geq 0$ u osobini ***iii***). Pokažimo ovo poslednje tvrđenje. Neka su c_i konstante takve da je $\varphi_1 + c_1 \geq 0$ i $\varphi_2 + c_2 \geq 0$. Definišimo

$$\varphi_1\,\varphi_2 = (\varphi_1 + c_1)(\varphi_2 + c_2) - c_1\,\varphi_2 - c_2\,\varphi_1 - c_1\,c_2 \in K - K.$$

Operator $(\varphi_1\,\varphi_2)(A)$ definisan pomoću ovog identiteta jednak je $\varphi_1(A)\,\varphi_2(A)$.

Ovo važi i za kompleksne funkcije: za $g(t) = \varphi(t) + i\,\psi(t)$ gde $\varphi, \psi \in K - K$ uzmemo $g(A) = \varphi(A) + i\,\psi(A)$.

2.7a Spektralna dekompozicija

Sada smo spremni da izvedemo spektralnu dekompoziciju samoadjungovanog ograničenog operatora u H.

Posmatrajmo funkciju

$$e_\lambda(t) = \begin{cases} 1, & \text{za}\, t \le \lambda \\ 0, & \text{za}\, t > \lambda \end{cases}.$$

Očigledno $e_\lambda(t) \in K[a, b]$. Definišimo $E_\lambda = e_\lambda(A)$. Tada je $E_\lambda^2 = E_\lambda$ jer je $e_\lambda(t)\, e_\lambda(t) = e_\lambda(t)$ i E_λ je simetričan (jer je e_λ realna funkcija).

Važi :

i) E_λ su ortogonalni projektori. Šta više $E_\lambda = 0$ za $a < \lambda < m$ i $E_\lambda = I$ za $\lambda \ge M$.

ii) E_λ je neprekidno sa desne strane u odnosu na λ u "jakom" smislu.

Zaista, neka je $\varphi_n(t)$ niz neprekidnih funkcija takvih da je $\varphi_n(t) \ge e_{\lambda+\frac{1}{n}}(t)$ i $\varphi_n(t) \searrow e_\lambda(t)$. Sada imamo $\varphi_n(A) \ge E_{\lambda+\frac{1}{n}} \ge E_{\lambda+\alpha_n} \ge E_\lambda$ za $\frac{1}{n} \ge \alpha_n \ge 0$. Kada $n \to \infty$, $\varphi_n(A) \searrow E_\lambda$. Zato $E_{\lambda+\alpha_n} \to E_\lambda$ za $\alpha_n \to \infty$.

iii) $E_\lambda\, E_\mu = E_\lambda$ za $\lambda < \mu$.

Ovo sledi iz $e_\lambda(t)\, e_\mu(t) = e_\lambda(t)$ za $\lambda < \mu$. Ovu osobinu možemo zapisati u obliku $E_\lambda \le E_\mu$ za $\lambda < \mu$.

Familija $\{E_\lambda\}$ sa osobinama ***i***) - ***iii***) zovemo "spektralna familija" ili "dekompozicija jedinice".

iv) $E_\lambda\, A = A\, E_\lambda$ (zato što je E_λ jaki limit polinoma po A). Zato, na osnovu osobine 2.6.4 $\mathrm{Im}\, E_\lambda = H_\lambda$ je invarijantni podprostor od A.

2.7b Glavna nejednakost

Neka je $\lambda_1 < \lambda_2$. Tada

$$\lambda_1(e_{\lambda_2}(t) - e_{\lambda_1}(t)) \le t(e_{\lambda_2}(t) - e_{\lambda_1}(t)) \le \lambda_2(e_{\lambda_2}(t) - e_{\lambda_1}(t)).$$

Stavljajući A umesto t i koristeći vezu između funkcija i operatora dobijamo glavnu nejednakost

(2.7.6) $$\lambda_1(E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}) \le A(E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}) \le \lambda_2(E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}).$$

Neki slučajevi ove nejednakosti su od posebnog značaja. Uzimajući $\lambda_1 < m$ i $\lambda_2 = \lambda$ imamo

$$A\, E_\lambda \le \lambda\, E_\lambda$$

i za $\lambda_1 = \lambda$ i $\lambda_2 > M$ imamo

$$\lambda(I - E_\lambda) \le A(I - E_\lambda) \text{ ili } (A - \lambda\, I)\, E_\lambda \le A - \lambda\, I.$$

Uočimo da je $E_{\lambda_1 \lambda_2} := E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}$ ortogonalni projektor. Kako $E_{\lambda_1 \lambda_2}$ komutira sa A, podprostor $H_{\lambda_1 \lambda_2} = \operatorname{Im} E_{\lambda_1 \lambda_2}$ je invarijantan podprostor od A i za $x \in H_{\lambda_1 \lambda_2}$ imamo $\lambda_1\, I_{H_{\lambda_1 \lambda_2}} \le A_{|H_{\lambda_1 \lambda_2}} \le \lambda_2\, I_{H_{\lambda_1 \lambda_2}}$. Zato za $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ imamo

$$-\varepsilon\, I_{H_{\lambda_1 \lambda_2}} \le (A - \lambda\, I)_{|H_{\lambda_1 \lambda_2}} \le \varepsilon\, I_{H_{\lambda_1 \lambda_2}}, \text{ gde je } \varepsilon = \lambda_2 - \lambda_1.$$

Na osnovu osobine ***i***) iz dela 2.5a dobijamo

$$\|A - \lambda\, I\|_{H_{\lambda_1 \lambda_2}} \le \varepsilon.$$

To znači da je naš operator blizu konstantnom operatoru na ovom podprostoru. Primetimo da ne znamo da $H_{\lambda_1 \lambda_2}$ nije trivijalan (nula) podprostor. U suprotnom bismo mogli reći da je λ "skoro" sopstvena vrednost i svaki ne-nula element $H_{\lambda_1 \lambda_2}$ je "skoro" svojstveni vektor.

2.7.c Konstrukcija spektralnog integrala

Sada ćemo napraviti integral koji zovemo "spektralni integral". Posmatrajmo particiju intervala (a, b): $a < \lambda_0 < m \le \lambda_1 < \ldots < \lambda_{n-1} \le M < \lambda_n < b$ tako da važi $\Delta = \max |\lambda_{i+1} - \lambda_i| < \varepsilon$. Izaberimo (proizvoljno) $\mu_i \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}]$. Stavljajući u (2.7.6) imamo

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}) \le A\left(\sum_{k=0}^{n-1} (E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k})\right) = A$$
$$\le \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} (E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}).$$

Posmatrajmo operator $\sum_{k=0}^{n-1} \mu_k (E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k})$. Kako je $-\varepsilon \le \lambda_k - \mu_k$ i $\lambda_{k+1} - \mu_k \le \varepsilon$ sledi

$$
\begin{aligned}
-\varepsilon I &\le \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_k - \mu_k)(E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}) \\
&\le A - \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \mu_k (E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}) \\
&\le \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_{k+1} - \mu_k)(E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}) \\
&\le \varepsilon I.
\end{aligned}
$$

Na osnovu osobine ***i***) iz dela 2.5a $-\varepsilon I \le T \le \varepsilon I$ sledi $\|T\| \le \varepsilon$ dobijamo

$$\|A - \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \mu_k (E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k})\| \le \varepsilon$$

za proizvoljnu particiju intervala, gde je norma particije ne veća od ε i proizvoljan izbor μ_k iz intervala particije.

Tada postoji granica (u normi operatora) kada $\varepsilon \to 0$ i prirodan naziv za tu granicu je "integral". Tako smo definisali pojam spektralnog integrala

$$A = \int_a^b \lambda \, dE_\lambda = \int_{m-0}^M \lambda \, dE_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda .$$

Mogli bismo uzeti bilo koje $a < m$ za donju granicu integrala koju bismo izrazili sa $m - 0$. Takođe možemo uzeti bilo koje $b > M$ ali zbog neprekidnosti sa desne strane za granicu uzimamo baš M. Primetimo da je $E_\lambda \equiv I$ za $\lambda \ge M$ i $E_\lambda \equiv 0$ za $\lambda < m$ tako da formalno možemo zapisati $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda$ jer je dE_λ identički jednak nuli izvan intervala $[m, M)$.

2.7d Hilbertova teorema za spektralnu dekompoziciju samoadjungovanog ograničenog operatora

Teorema 2.7.7 :(Hilbert)

Za svaki samoadjungovani ograničeni operator A na Hilbertovom prostoru H takav da je $m I \le A \le M I$, postoji familija E_λ za $\lambda \in \mathbb{R}$, ortogonalnih projektora takvih da važe sledeća tvrđenja:

i) $E_\lambda = 0$ za $\lambda < m$ i $E_\lambda = I$ za $\lambda \ge M$.
ii) $E_{\lambda+0} = E_\lambda$ (neprekidnost sa desne strane).
iii) $E_{\lambda_1} \le E_{\lambda_2}$ za $\lambda_1 < \lambda_2$ ili ekvivalentno $E_{\lambda_1} E_{\lambda_2} = E_{\lambda_1}$ za $\lambda_1 < \lambda_2$.

(osobine ***i***) - ***iii***) znače da je $\{E_\lambda\}$ spektralna familija)

iv) $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda$ gde integral konvergira u normi operatora.
v) E_λ je jaki limit polinoma po A i zato komutira sa svakim operatorom B koji komutira

sa A.

$\boldsymbol{vi}$) $\|A\,x\|^2 = \int \lambda^2 \, d\langle E_\lambda \, x, x\rangle$.

$\boldsymbol{vii}$) Familija $\{E_\lambda\}$ koja zadovoljava $\boldsymbol{i}$) - $\boldsymbol{iv}$) je jedinstvena.

Dokaz : Već smo ranije dokazali $\boldsymbol{i}$) - $\boldsymbol{v}$). $\boldsymbol{vii}$) nećemo dokazivati jer dokaz prevazilazi okvire ovog rada, ali ćemo dokazati $\boldsymbol{vi}$).

Primetimo da je $\langle E_\lambda \, x, x\rangle$ monotona funkcija po λ za svako x i $\int \lambda^2 \, d\langle E_\lambda \, x, x\rangle$ može biti shvaćen kao Riman-Stiltjesov interal.

Vratimo se definiciji (opisu) integrala $\int \lambda \, d E_\lambda$ i primetimo da su $\Delta\, E_{\lambda_i} \equiv E_{\lambda_{i+1}} - E_{\lambda_i}$ po parovima ortogonalni ortoprojektori: $\Delta\, E_{\lambda_i} \perp \Delta\, E_{\lambda_j}$ za $i \neq j$ tj. $\Delta\, E_{\lambda_i} \, \Delta\, E_{\lambda_j} = 0$. Šta više $\|\Delta\, E_{\lambda_i} \, x\|^2 = \langle \Delta\, E_{\lambda_i} \, x, x\rangle \equiv \langle E_{\lambda_{i+1}} \, x, x\rangle - \langle E_{\lambda_i} \, x, x\rangle$. Kao što je ranije dokazano suma $\sum \mu_i \, \Delta\, E_{\lambda_i}$ konvergira ka operatoru A u normi operatora. odatle sledi da $\sum \mu_i \, \Delta\, E_{\lambda_i} \, x$ konvergira ka $A\,x$ za svako x. Zato za Riman-Stiltjesove sume važi:

$$\begin{aligned}
&\|\textstyle\sum \mu_i \, \Delta\, E_{\lambda_i} \, x\|^2 = \langle \sum \mu_i \, \Delta\, E_{\lambda_i} \, x, \sum \mu_j \, \Delta\, E_{\lambda_j} \, x\rangle \\
&= \textstyle\sum \mu_i \, \mu_j \, \langle \Delta\, E_{\lambda_i} \, x, \Delta\, E_{\lambda_j} \, x\rangle \\
&= \textstyle\sum \mu_i^2 \, \langle \Delta\, E_{\lambda_i} \, x, x\rangle \to \|A\,x\|^2
\end{aligned}$$

što dokazuje $\boldsymbol{vi}$). ■

Propozicija 2.7.8 : Neka je φ neprekidna funkcija na $[a, M]$, $a < m$. Definišimo integral $\int_{m-0}^{M} \varphi(\lambda) \, d E_\lambda$ kao granicu sume $\sum \varphi(\mu_i) \, \Delta\, E_{\lambda_i}$ gde norma particije teži nuli. Ovaj integral konvergira u normi operatora ka operatoru $\varphi(A)$ koji je dat u definiciji 7.0.2. :

$$\varphi(A) = \int_{m-0}^{M} \varphi(\lambda) \, d E_\lambda \text{ i odatle } \|\varphi(A)\,x\|^2 = \int \varphi^2(\lambda) \, d\langle E_\lambda \, x, x\rangle.$$

Dokaz : Neka je $\varphi(t) = t^k$. Tada je

$$A^k \leftarrow \left(\textstyle\sum \mu_i \, \Delta\, E_{\lambda_i}\right)^k = \sum \mu_i^k \, \Delta\, E_{\lambda_i} \to \int \lambda^k \, d E_\lambda.$$

Odatle, $A^k = \int_{m-0}^{M} \lambda^k \, d E_\lambda$. Sledi da za svaki polinom $P(\lambda)$ imamo da je $P(A) = \int_{m-0}^{M} P(\lambda) \, d E_\lambda$. Neka je $\varphi \in C[a, b]$. Za dato $\varepsilon > 0$ nađimo polinom $P(t)$ takav da je $|\varphi(t) - P(t)| < \varepsilon$ za svako $t \in [a, b]$. Veza između funkcija i operatora implicira da važi:

$$-\varepsilon\, I \leq \varphi(A) - P(A) \leq \varepsilon\, I.$$

Tada je

(2.7.9) $\qquad \|\varphi(A) - P(A)\| \le \varepsilon.$

Kao što smo već pokazali za svaki polinom $P(\lambda)$

$$P(A) = \int P(\lambda)\, dE_\lambda$$

i zato znamo da za particiju $\{\lambda_i\}$ intervala $[a, b]$, $b > M$ sa normom particije $\delta > 0$ (uzmimo $\delta < \varepsilon$) i proizvoljno $\lambda_i \le \mu_i \le \lambda_{i+1}$ imamo

(2.7.10) $\qquad \|P(A) - \sum P(\mu_i)\, \Delta E_{\lambda_i}\| \le \varepsilon.$

Neka je

(2.7.11) $\qquad T = \sum P(\mu_i)\, \Delta E_{\lambda_i} - \sum \varphi(\mu_i)\, \Delta E_{\lambda_i}.$

Kako je $-\varepsilon \le P(\mu_i) - \varphi(\mu_i) \le \varepsilon$ imamo, $-\varepsilon \le T \le \varepsilon$ što znači da je $\|T\| \le \varepsilon$. Kombinujući (2.7.9), (2.7.10) i (2.7.11) imamo $\|\varphi(A) - \sum \varphi(\mu_i)\, \Delta E_{\lambda_i}\| \le 3\,\varepsilon$. Odatle, spektralne integralne sume za $\varphi(A)$ konvergiraju u normi ka operatoru ranije definisanom kao $\varphi(A)$. ■

Primeri : *i*) Neka je A kompaktan samoadjungovan operator: $A\,x = \sum \lambda_k \langle x, e_k\rangle\, e_k$. Tada $E_\lambda\, x = \sum_{\lambda_k \le \lambda} \langle x, e_k\rangle\, e_k$ za $\lambda < 0$ i $E_\lambda\, x = x - \sum_{\lambda_k > \lambda} \langle x, e_k\rangle\, e_k$ za $\lambda > 0$.

ii) Posmatrajmo u $L_2[0, 1]$ operator $A\,x(t) = t\,x(t)$. Očigledno je $A^k\, x = t^k\, x$ i zbog toga za svaki polinom $P(A)\, x = P(t)\, x$. Odatle za svaku neprekidnu funkciju imamo $\varphi(A)\, x = \varphi(t)\, x$ i isto važi za svako φ iz klase K tj. $\varphi(A)\, x(t) = \varphi(t)\, x(t)$ i $E_\lambda\, x(t) = e_\lambda(t)\, x(t)$.

2.7e Spektralna familija i spektar samoadjungovanog operatora

Teorema 2.7.12 : Neka je A samoadjungovan ograničen operator. Tačka λ_0 je svojstvena vrednost operatora A ako i samo ako je λ_0 tačka prekida E_λ u jakom smislu. (Neprekidnost E_λ u λ_0 znači da je $\lim_{\lambda \to \lambda_0} E_\lambda = E_{\lambda_0}$.)

Dokaz : Neka je λ_0 tačka prekida E_λ. Posmatrajmo ortoprojektore $E_{\lambda\lambda_0} = E_{\lambda_0} - E_\lambda$, za $\lambda < \lambda_0$ i podprostor $H_{\lambda\lambda_0} = \operatorname{Im} E_{\lambda\lambda_0}$. Na osnovu teoreme 2.5.2 monoton niz $E_{\lambda\lambda_0}$ ima jaki limit P_0 kad $\lambda \nearrow \lambda_0$, a na osnovu osobine 2.6.11 zaključujemo da je P_0 ortoprojektor. Kako E_λ ima prekid u λ_0, postoji vektor x_0 takav da je $\lim_{\lambda \nearrow \lambda_0} E_{\lambda\lambda_0}\, x_0 = x_0 \ne 0$. Pokažimo da je $x_0 \in H_{\mu\lambda_0}$ za svako

$\mu < \lambda_0$. Zaista, $E_{\mu\lambda_0} E_{\lambda\lambda_0} = E_{\lambda\lambda_0}$ za $\mu < \lambda < \lambda_0$, imamo

$$E_{\mu\lambda_0} x_0 = E_{\mu\lambda_0} \lim_{\lambda\nearrow\lambda_0} E_{\lambda\lambda_0} x_0 = \lim_{\lambda\nearrow\lambda_0} E_{\mu\lambda_0} E_{\lambda\lambda_0} x_0 = \lim_{\lambda\nearrow\lambda_0} E_{\lambda\lambda_0} x_0 = x_0$$

što znači da je $x_0 \in H_{\mu\lambda_0}$. Imajući u vidu (2.7b) dobijamo

$$\|(A - \lambda_0 I) x_0\| \leq |\mu - \lambda_0| \, \|x_0\|.$$

Puštajući da μ teži ka λ_0 dobijamo $A x_0 = \lambda_0 x_0$.

Pretpostavimo sada da je λ_0 svojstvena vrednost operatora A. Uzmimo $\varepsilon > 0$. Koristeći nejednakost $\lambda(I - E_\lambda) \leq A(I - E_\lambda)$ (videti 2.7b) sa $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$, dobijamo

$$(\lambda_0 + \varepsilon)(I - E_{\lambda_0+\varepsilon}) \leq A(I - E_{\lambda_0+\varepsilon}).$$

Dalje, stavljajući $\lambda = \lambda_0 - \varepsilon$ u $A E_\lambda \leq \lambda E_\lambda$ dobijamo

$$A E_{\lambda_0-\varepsilon} \leq (\lambda_0 - \varepsilon) E_{\lambda_0-\varepsilon}.$$

Neka je $x_0 \neq 0$ svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrednosti λ_0. Tada važi

$$(\lambda_0 + \varepsilon) \langle (I - E_{\lambda_0+\varepsilon}) x_0, x_0 \rangle \leq \lambda_0 \langle (I - E_{\lambda_0+\varepsilon}) x_0, x_0 \rangle,$$
$$\lambda_0 \langle E_{\lambda_0-\varepsilon} x_0, x_0 \rangle \leq (\lambda_0 - \varepsilon) \langle E_{\lambda_0-\varepsilon} x_0, x_0 \rangle .$$

Kako je $I - E_{\lambda_0+\varepsilon} \geq 0$ i $E_{\lambda_0-\varepsilon} \geq 0$, zaključujemo da je $\varepsilon \langle (I - E_{\lambda_0+\varepsilon}) x_0, x_0 \rangle = 0$ i $\varepsilon \langle E_{\lambda_0-\varepsilon} x_0, x_0 \rangle = 0$. Znamo da za svaki ortogonalni projektor P važi

$$\langle P x, x \rangle = \langle P^2 x, x \rangle = \langle P x, P x \rangle = \|P x\|^2.$$

Zato $E_{\lambda_0-\varepsilon} x_0 = x_0 \neq 0$ i $E_{\lambda_0-\varepsilon} x_0 = 0$. Odatle sledi da je λ_0 tačka prekida E_λ. ■

Teorema 2.7.13 : Neka je E_λ neprekidno u λ_0 u jakom smislu i pretpostavimo da postoje nizovi λ_n neopadajući i μ_n nerastući takvi da $\lambda_n < \lambda_0 < \mu_n$, $\mu_n - \lambda_n \to 0$ i projektori $P_n = E_{\mu_n} - E_{\lambda_n}$ nisu degenerisani tj. $P_n \neq 0$ za svako n. Tada je λ_0 tačka neprekidnog spektra operatora A.

Dokaz : Uzmimo $H_n = \mathrm{Im}\, P_n$. E_λ je jako neprekidno i zato $P_n \to 0$ jako. Znamo $H_n \neq 0$ za svako n. Na osnovu $\|A - \lambda I\|_{H_{\lambda_1 \lambda_2}} \leq \varepsilon$ (videti 2.7b) postoje $x_n \in H_n$, $\|x_n\| = 1$ takvi da je $\|A x_n - \lambda_0 x_n\| \leq \mu_n - \lambda_n \to 0$ kad $n \to \infty$. Odatle je na osnovu teoreme 2.2.7 λ_0 tačka spektra operatora A. Broj λ_0 nije svojstvena vrednost jer je E_λ neprekidno u λ_0. Samoadjungovani operatori nemaju rezidualni spektar, što smo pokazali u teoremi 2.2.9. Zato je λ_0 tačka neprekidnog spektra operatora A. ■

Teorema 2.7.14 : Neka je E_λ spektralna familija samoadjungovanog operatora A i neka je $E_\mu - E_\lambda = 0$, $\mu > \lambda$. Tada je svako $\lambda_0 \in (\lambda, \mu)$ regularna tačka operatora A.

Dokaz : Znamo da važi $\mu(I - E_\mu) \leq A(I - E_\mu)$, $A\, E_\lambda \leq \lambda\, E_\lambda$ (glavna nejednakost 2.7b). Kako je $E_\mu = E_\lambda$ imamo

(2.7.15) $$\mu(I - E_\lambda) \leq A(I - E_\lambda)\ ,\ \ A\, E_\lambda \leq \lambda\, E_\lambda$$

Uzmimo $H_1 = \operatorname{Im} E_\lambda = \operatorname{Im} E_\mu$, $H_2 = \operatorname{Im}(I - E_\lambda)$. Podprostori H_1 i H_2 su invarijantni u odnosu na A i $H_1 \oplus H_2 = H$. Primenjujući (2.7.15) na H_2 imamo $A\,|_{H_2} \geq \mu\, I$ i odatle $(A - \lambda_0\, I)\,|_{H_2} \geq (\mu - \lambda_0)\, I$, $\mu - \lambda_0 > 0$. Slično, koristeći (2.7.15) na H_1 dobijamo $A\,|_{H_1} \leq \lambda\, I$ i odatle $(\lambda_0\, I - A)\,|_{H_1} \geq (\lambda_0 - \lambda)\, I$, $\lambda_0 - \lambda > 0$. Na osnovu posledice 2.5.9 sledi da su operatori $(A - \lambda_0\, I)\,|_{H_2}$ i $(A - \lambda_0\, I)\,|_{H_1}$ inverzibilni. Odatle je i operator $A - \lambda_0\, I$ inverzibilan. Zaista, za $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in H_1$, $x_2 \in H_2$ možemo uzeti

$$(A - \lambda_0\, I)^{-1}\, x = ((A - \lambda_0\, I)\,|_{H_1})^{-1}\, x_1 + ((A - \lambda_0\, I)\,|_{H_2})^{-1}\, x_2$$

i direktno se proverava da je ovaj operator inverzan za $A - \lambda_0\, I$. ■

2.7f Prost spektar

Kažemo da A ima prost spektar ako postoji $x_0 \in H$, koji zovemo generator, takav da je $\{\Delta E_\lambda\, x_0 \equiv (E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1})\, x_0 : \text{za sve}\ \lambda_1 < \lambda_2\}$ kompletan skup u H. Lako se vidi da je ovo ekvivalentno činjenici da je $\{\varphi(A)\, x_0\}$ gust skup u H gde $\varphi(t)$ ide preko familije svih neprekidnih funkcija na $[a, b]$.

Definicija 2.7.16 : Operator $U : H \to H$ zovemo izometrija ako je $\langle U\, x,\ U\, y\rangle = \langle x,\ y\rangle$ za sve $x,\ y \in H$. Ako je operator U izometrija i $\operatorname{Im} U = H$ tada U zovemo unitarni operator.

Kažemo da su dva operatora A_1 i A_2 unitarno ekvivalentni ako postoji unitarni operator U takav da je $A_1 = U^{-1}\, A_2\, U$. Takođe koristimo ovu notaciju i u slučaju $A_i : H_i \to H_i$ za $i = 1, 2$ kad je $U : H_1 \to H_2$ izometrija "na".

Teorema 2.7.17 : Neka je A samoadjungovan ograničen operator sa prostim spektrom i generatorom x_0. Neka $\sigma(\lambda) = \langle E_\lambda x_0, x_0 \rangle$ gde je $\{E_\lambda\}$ spektralna familija ortoprojektora definisana sa A. Tada je A unitarno ekvivalentan operatoru $T : L^2(\sigma(\lambda)) \to L^2(\sigma(\lambda))$ gde $T\,\varphi(\lambda) = \lambda\varphi(\lambda)$.

Dokaz : Prvo posmatrajmo proizvoljnu neprekidnu funkciju $\varphi(\lambda) \in C[a, b]$ (gde $\text{supp}\varphi(\lambda) \subset [a, b]$). Prostor $L^2(\sigma(\lambda))$ je definisan kao komplement takvih funkcija sa normom

$$\|\psi\| = \sqrt{\int_a^b |\psi(\lambda)|^2\, d\sigma(\lambda)}$$

i zato je skup takvih funkcija gust u $L^2(\sigma(\lambda))$.

Posmatrajmo preslikavanje $U : \varphi \to y_\varphi = \varphi(A)\, x_0 = \int \varphi(\lambda)\, dE_\lambda\, x_0$. Tada $\|y_\varphi\|^2 = \int_a^b \varphi^2\, d\langle E_\lambda x_0, x_0 \rangle = \|\varphi\|^2_{L^2(\sigma(\lambda))}$. Lako se proverava da uslov prostog spektra implicira da je $\{y_\varphi\}$ gust skup u H. Na ovaj način linearno preslikavanje U je prošireno sa gustog skupa neprekidnih funkcija na kompletiranje $L^2(\sigma(\lambda))$ i napravili smo izometriju $U : L^2(\sigma(\lambda)) \to H$ ("na", jer je slika izometrije kompletan prostor). Ostaje da se proveri da važi $U^{-1} A\, U\, \varphi = \lambda\varphi(\lambda)$. Kako je

$$A\,\varphi(A)\, x_0 = \int \lambda\varphi(\lambda)\, dE_\lambda\, x_0,$$

imamo da je $U^{-1} A\, y_\varphi \mapsto \lambda\varphi(\lambda)$. ■

2.7.g Spektralna teorija unitarnih operatora

Potsetimo se prvo nekih osobina unitarnih operatora. Operator $U : H \to H$ zovemo unitarni ako je $\langle U x, U y \rangle = \langle x, y \rangle$ za sve $x, y \in H$ i $\text{Im}\, U = H$. Slede neke osnovne osobine unitarnih operatora.

i) $U\, U^* = I = U^*\, U$ tj U je inverzibilan i $U^{-1} = U^*$.

ii) U je linearan operator.

iii) Ako je U linearan operator i $\text{Im}\, U = H$ i $\langle U x, U x \rangle = \langle x, x \rangle$ za sve $x \in H$ tada je U unitaran operator.

Pokažimo prvo da je operator U inverzibilan. Pretpostavimo da je $U x = U y$, $x \neq y$. Tada važi

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle U\,x - U\,y,\, U\,x - U\,y\rangle \\
&= \langle U\,x,\, U\,x\rangle - \langle U\,y,\, U\,x\rangle - \langle U\,x,\, U\,y\rangle + \langle U\,y,\, U\,y\rangle \\
&= \langle x,\, x\rangle - \langle y,\, x\rangle - \langle x,\, y\rangle + \langle y,\, y\rangle \\
&= \langle x - y,\, x - y\rangle \text{ tj. } x = y.
\end{aligned}
$$

Jednakost $\langle U\,x,\, U\,y\rangle = \langle x,\, y\rangle$ za sve $x,\, y \in H$ implicira $\langle U\,f,\, g\rangle = \langle f,\, U^{-1}\,g\rangle$ za $f,\, g \in H$. Neka je $f = \alpha_1\,f_1 + \alpha_2\,f_2$. Imamo,

$$
\begin{aligned}
\langle U\,f,\, g\rangle &= \langle f,\, U^{-1}\,g\rangle \\
&= \alpha_1\,\langle f_1,\, U^{-1}\,g\rangle + \alpha_2\,\langle f_2,\, U^{-1}\,g\rangle \\
&= \alpha_1\,\langle U\,f_1,\, g\rangle + \alpha_2\,\langle U\,f_2,\, g\rangle \\
&= \langle \alpha_1\,U\,f_1 + \alpha_2\,U\,f_2,\, g\rangle.
\end{aligned}
$$

Kako je g proizvoljno sledi da je $U\,f = \alpha_1\,U\,f_1 + \alpha_2\,U\,f_2$. Pokazali smo *i*) i *ii*). Pokažimo da važi *iii*).

Koristeći $\|U\,x\| = \|x\|$ za sve $x \in H$ i činjenicu da je U linearan operator dobijamo

$$
\begin{aligned}
\langle U\,x,\, U\,y\rangle &= \tfrac{1}{4}\,(\|U(x+y)\|^2 - \|U(x-y)\|^2 + i\,\|U(x+i\,y)\|^2 - i\,\|U(x-i\,y)\|^2) \\
&= \tfrac{1}{4}\,(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+i\,y\|^2 - i\,\|x-i\,y\|^2) \\
&= \langle x,\, y\rangle.
\end{aligned}
$$

Primer: Furijeova transformacija na $L_2(-\infty,\, \infty)$

$$
\tilde{f}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f(t)\,e^{i\,t\,\tau}\,dt := (F\,f)\,(\tau)
$$

je unitarni operator. Limes se shvata u smislu $L_2(-\infty,\, \infty)$. Šta više kako je $F^* = F^{-1}$ formula za F^{-1} se dobija zamenom i sa $-i$.

U nastavku ćemo videti osobine spektra unitarnog operatora. Neka je U unitaran operator na Hilbertovom prostoru H. Tada

i) $\sigma(U) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$

Kako je $\|U\| = \|U^*\| = 1$ imamo da je $\sigma(U) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le 1\}$ i $\sigma(U^*) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le 1\}$. S druge strane iz jednakosti $A^{-1} - \lambda^{-1}\,I = (\lambda\,I - A)\,\lambda^{-1}\,A^{-1}$ za $\lambda \neq 0$ zaključujemo da je $A^{-1} - \lambda^{-1}\,I$ inverzibilan ako i samo ako je $A - \lambda\,I$ inverzibilan. Odatle sledi $\sigma(A^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A)\}$. Imajući ovo u vidu i činjenicu da je $U^{-1} = U^*$ dobijamo da je $\sigma(U) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \ge 1\}$. Odakle sledi tvrđenje.

ii) Ako je $U x_i = \lambda_i x_i$ i $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tada je $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$. Zaista

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \langle U x_1, U x_2 \rangle = \lambda_1 \overline{\lambda_2} \langle x_1, x_2 \rangle$$

odakle sledi da je $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$.

iii) Kažemo da podprostor $E \subseteq H$ redukuje A ako i samo ako

$$A : E \to E \text{ i } A : E^\perp \to E^\perp,$$

tj. i E i $E^\perp$ su invarijantni podprostori. Ako $U : E \to E$ i $U^{-1} : E \to E$, tada $U : E^\perp \to E^\perp$ tj. E redukuje U. Ovo sledi iz $\langle U x, y \rangle = \langle x, U^{-1} y \rangle$.

Posmatrajmo Loranov polinom $P(z)$ po z i z^{-1} za $|z| = 1$ tj. $z = e^{i t}$, $t \in \mathbb{R}$

$$P(z) = \sum_{k=-m}^{n} a_k e^{i k t} = \sum_{k=-m}^{n} a_k z^k.$$

Primetimo da važi $\overline{P(z)} = \overline{P}(\overline{z}) = \overline{P}(\frac{1}{z})$. Ovde $\overline{P}(z)$ znači $\overline{P}(z) = \sum \overline{a_k} z^k$.

Sada definišimo operatpr $P(z) |_{z:=U} = P(U) = \sum_{k=-m}^{n} a_k U^k$. Ova veza između Loranovog polinoma i operatora ima sledeće osobine:

i) Linearnost: $(P_1 + P_2)(U) = P_1(U) + P_2(U)$.
ii) Multiplikativnost $(P_1 P_2)(U) = P_1(U) P_2(U)$.
iii) $P(U^*) = \sum \overline{a_k} U^{-k} = \overline{P}(U^{-1}) = \overline{P(z)} |_{z:=U}$.
iv) Ako je $P(z) \geq 0$ za $|z| = 1$, tada je $P(U) \geq 0$.

Ove osobine su očigledne osim *iv*) koju ćemo dokazati. Počećemo sa lemom.

Lema 2.7.18 : Pretpostavimo da je $P(z) \geq 0$ za $|z| = 1$. Tada postoji drugi polinom $Q(z)$ takav da je $P(z) = Q(z) \overline{Q(z)} = |Q(z)|^2$. Primetimo da je $\overline{Q(z)} = \overline{Q}(\overline{z}) = \overline{Q}(\frac{1}{z})$.

Dokaz : Možemo razmatrati $P(z) + \varepsilon > 0$ umesto originalnog $P(z)$ i nakon što postavimo dokaz pustimo da $\varepsilon \to 0$. Imamo

$$z^m P(z) = c \prod_{|\alpha_i|<1} (z - \alpha_i) \prod_{|\beta_i|>1} (z - \beta_i). \tag{2.7.19}$$

Sada za $|z| = 1$

(2.7.20) $\overline{P(z)} = \overline{z^{-m}}\,\bar{c} \prod \left(\frac{1}{z} - \overline{\alpha_i}\right) \prod \left(\frac{1}{z} - \overline{\beta_i}\right) = P(z)$

Poslednja jednakost važi jer je $P(z)$ realan za $|z| = 1$. Primetimo da je $\overline{z^{-m}} = z^m$ i da je broj svih korena $n + m$.

Tako (2.7.20) postaje

$$\overline{P(z)} = \frac{z^m}{z^{n+m}}\, c_1 \prod \left(z - \frac{1}{\overline{\alpha_i}}\right) \prod \left(z - \frac{1}{\overline{\beta_i}}\right) = P(z)$$

ovde smo "pokupili" $\bar{c}$ i proizvode $\overline{\alpha_i}$ i $\overline{\beta_j}$ u broj c_1. Odatle

(2.7.21) $z^n\, P(z) = c_1 \prod \left(z - \frac{1}{\overline{\alpha_i}}\right) \prod \left(z - \frac{1}{\overline{\beta_i}}\right)$

za neko c_1. Upoređujući (2.7.19) sa (2.7.21) dobijamo

$$\frac{z^n}{z^m} \prod (z - \alpha_i) \prod (z - \beta_i) = c' \prod \left(z - \frac{1}{\overline{\alpha_i}}\right) \prod \left(z - \frac{1}{\overline{\beta_i}}\right).$$

Odavde vidimo da je $n = m := k$ i $\beta_i = \frac{1}{\overline{\alpha_i}}$ za svako $i = 1, \ldots, k$. Definišimo $Q(z) = \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i)$. Tada je

$$Q(z)\,\overline{Q(z)} = \frac{c_2}{z^n} \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i) \prod_{i=1}^n (z - \beta_i) = c_3\, P(z).$$

Kako je $P(z) > 0$ za $|z| = 1$ imamo da je $c_3 > 0$ i zbog toga može biti apsorbovano u Q i $\overline{Q}$. ■

Sada dokaz osobine *iv*) sledi direktno iz prethodne leme, jer važi

$$P(U) = Q(U)\, Q(U)^* \geq 0.$$

Dalje nastavljamo kao u slučaju samoadjungovanih operatora. Način rezonovanja koji će biti predstavljen je identičan onom koji smo koristili kod samoadjungovanih operatora.

Ponavljamo konstrukciju funkcije operatora kao što je rađeno u definiciji 2.7.2. počinjemo sa funkcijom $\varphi(e^{i\,t})$, $0 \leq t \leq 2\pi$ iz klase K. Neka je $\varphi(z) = \varphi(e^{i\,t}) \geq 0$ (imajući u vidu $|z| = 1$) i neka $P_n(z) \searrow \varphi(e^{i\,t})$ za svako t. Definišimo $\varphi(U) \geq 0$ kao jaki limit $P_n(U)$. Ovaj limit postoji na osnovu teoreme 2.5.2 i leme 2.7.18. Operator $\varphi(U)$ je dobro definisan, što se može proveriti na identičan način kao što smo lemom 2.7.3 potvrdili definiciju 2.7.2. Proširujemo definiciju $\varphi(U)$ na funkcije oblika $c_1\,\varphi_1 + c_2\,\varphi_2$ za sve realne brojeve c_1 i c_2 i sve kompleksne brojeve c_1 i c_2. Naše definicije su konzistentne imajući u vidu jedinstvenu dekompoziciju $\psi(z) = \psi_1(z) + i\,\psi_2(z)$ za

$\psi_1(z) = \operatorname{Re}\psi(z)$ i $\psi_2(z) = \operatorname{Im}\psi(z)$ i odatle $\psi(U) = \psi_1(U) + i\,\psi_2(U)$.

Sve osobine veze $\varphi(e^{i\,t}) \to \varphi(U)$ kao što su linearnost, multiplikativnost, čuvanje uređenja za funkcije sa realnim vrednostima mogu biti pokazane kao u slučaju samoadjungovanih operatora. Posebno važi

$$\varphi(U)^* = \overline{\varphi(z)}\,|_{z:=U}$$

što sledi iz činjenice da to važi za aproksimativne polinome.

Da bismo napravili "spektralnu familiju projektora" unitarnog operatora, posmatraćemo sledeće funkcije:

$$\psi_\lambda(e^{i\,t}) = \begin{cases} 1\,, & \text{za } 0 < t \le \lambda \\ 0\,, & \text{za } \lambda < t \le 2\,\pi \end{cases}$$

i $\psi_0(e^{i\,t}) \equiv 0$, $\psi_{2\,\pi}(e^{i\,t}) \equiv 1$. Takođe neka je

$$\tilde{\psi}_0(e^{i\,t}) = \begin{cases} 1\,, & \text{za } t = 0 \\ 0\,, & \text{za } 0 < t < 2\,\pi. \end{cases}$$

Tada su $\psi_\lambda(U) = E_\lambda$ i $\tilde{\psi}_0(U) = \tilde{E}_0$ ortoprojektori.

Kao i u slučaju samoadjungovanih operatora važi neprekidnost s desne strane ove familije.

Sada smo spremni da konstruišemo spektralni integral. Prvo, za $t_j > t_{j-1}$ i $\theta_j \in [t_{j-1},\, t_j]$ posmatrajmo funkcije

$$\chi(e^{i\,t}) := e^{i\,t} - \sum_{j=1}^{n} e^{i\,\theta_j}\,(\psi_{t_j}(e^{i\,t}) - \psi_{t_{j-1}}(e^{i\,t})).$$

Pretpostavimo da je $\max_j |t_j - t_{j-1}| < \varepsilon$. Za svako t nađimo k takvo da je $t_{k-1} \le t \le t_k$. Tada

$$|\chi(e^{i\,t})| \le |e^{i\,t} - e^{i\,\theta_k}| \le |t - \theta_k| \le \varepsilon.$$

Zato je $\overline{\chi(e^{i\,t})}\,\chi(e^{i\,t}) \le \varepsilon^2$ odakle sledi da je $\chi(U)^*\,\chi(U) \le \varepsilon^2\,I$ što znači da je

$$\|\chi(U)\| = \|U - \sum_{j=1}^{n} e^{i\,\theta_j}\,(E_{t_j} - E_{t_{j-1}})\| \le \varepsilon.$$

Dakle, integralna suma aproksimira U u odnosu na normu i zato možemo zapisati

$$U = \int_0^{2\pi} e^{i\,t}\, dE_t.$$

Šta više

$$U^n = \int_0^{2\pi} e^{i\,n\,t}\, dE_t$$

za $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (za negativne stepene koristimo adjungovani operator $U^* = U^{-1} = \int_0^{2\pi} e^{-i\,t}\, dE_t$).

Konačno, baš kao što smo to uradili za samoadjungovane operatore, dokazali smo da za svaku neprekidnu funkciju $\varphi(e^{i\,t})$ imamo

$$\varphi(U) = \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\,t})\, dE_t.$$

Lema 2.7.22 : Neka je U unitaran operator. Tačka $e^{i\,\lambda_0}$, $\lambda_0 \in [0, 2\pi]$ je svojstvena vrednost operatora U ako i samo ako je λ_0 tačka prekida za E_λ (u jakom smislu s leva).

Dokaz : Neka je λ_0 tačka prekida za E_λ i neka je $E_{\lambda\lambda_0} = E_{\lambda_0} - E_\lambda$ za $\lambda < \lambda_0$. Kao u dokazu teoreme 2.7.12 dobijamo da postoji $x_0 \neq 0$ takvo da je $x_0 \in \operatorname{Im} E_{\lambda\lambda_0}$ za svako $\lambda < \lambda_0$. Imamo sledeće

$$(U - e^{i\,\lambda_0} I)\, x_0 = (U - e^{i\,\lambda_0} I)\, E_{\lambda\lambda_0}\, x_0 \text{ i}$$

$$\left|(e^{i\,t} - e^{i\,\lambda_0})\, (\psi_{\lambda_0}(e^{i\,t}) - \psi_\lambda(e^{i\,t}))\right| \leq \max_{\lambda \leq t \leq \lambda_0} \left|e^{i\,t} - e^{i\,\lambda_0}\right| \leq |\lambda - \lambda_0|.$$

Koristeći iste argumente kao i kod izvođenja spektralnog integrala zaključujemo

$$\|(U - e^{i\,\lambda_0} I)\, x_0\| \leq \|(U - e^{i\,\lambda_0} I)\, E_{\lambda\lambda_0}\|\, \|x_0\| \leq |\lambda - \lambda_0|\, \|x_0\|.$$

Puštajući da $\lambda \to \lambda_0$ dobijamo $U\, x_0 = e^{i\,\lambda_0}\, x_0$.

Pretpostavimo sada da je $e^{i\,\lambda_0}$ svojstvena vrednost operatora U. Imamo

$$0 = \|(U - e^{i\,\lambda_0} I)\, x_0\|^2 = \int_0^{2\pi} \left|e^{i\,\lambda} - e^{i\,\lambda_0}\right|^2 d\langle E_\lambda\, x_0,\, x_0\rangle.$$

Pretpostavimo da je $0 < \lambda_0 < 2\pi$. Za dovoljno malo $\varepsilon > 0$ dobijamo

$$\int_{\lambda_0+\varepsilon}^{2\pi} \left|e^{i\,\lambda} - e^{i\,\lambda_0}\right|^2 d\langle E_\lambda\, x_0,\, x_0\rangle = 0,$$

$$\int_0^{\lambda_0-\varepsilon} |e^{i\lambda} - e^{i\lambda_0}|^2 \, d\langle E_\lambda x_0, x_0\rangle = 0.$$

Važi $|e^{i\lambda} - e^{i\lambda_0}|^2 \geq \delta^2$ za sve $\lambda \in [0, 2\pi] \setminus (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ za neko $\delta > 0$. Dakle

$$\delta^2 \int_{\lambda_0+\varepsilon}^{2\pi} d\langle E_\lambda x_0, x_0\rangle = 0 = \delta^2 \int_0^{\lambda_0-\varepsilon} d\langle E_\lambda x_0, x_0\rangle$$

odakle sledi

$$\delta^2(\langle x_0, x_0\rangle - \langle E_{\lambda+\varepsilon} x_0, x_0\rangle) = 0 \text{ i}$$

$$\delta^2 \langle E_{\lambda-\varepsilon} x_0, x_0\rangle = 0.$$

Odavde dobijamo

$$\langle E_{\lambda+\varepsilon} x_0, x_0\rangle = \langle x_0, x_0\rangle \text{ i } \langle E_{\lambda-\varepsilon} x_0, x_0\rangle = 0$$

što znači $E_{\lambda+\varepsilon} x_0 = x_0$, $E_{\lambda-\varepsilon} x_0 = 0$. Zato je λ_0 tačka prekida za E_λ. U slučaju $\lambda_0 = 2\pi$ imamo $E_{2\pi} x_0 = x_0$ po definiciji $E_{2\pi}$ i $E_{\lambda-\varepsilon} x_0 = 0$ kao i ranije. ■

Teorema 2.7.23 : Neka je U unitaran operator. Tada postoji samoadjungovani operator A takav da je $U = e^{iA}$.

Dokaz : Neka je E_t spektralna familija projektora unitarnog operatora U. Definišimo operator A na sledeći način:

$$A x = \int_0^{2\pi} t \, dE_t x \text{ , za } x \in H.$$

Iz činjenice da su E_t samoadjungovani operatori sledi da je i A samoadjungovan. Na osnovu spektralne dekompozicije sledi da je $U = e^{iA}$. ■

Teorema 2.7.24 : Neka je U unitaran operator. Tada je $\sigma_r(U) = \emptyset$

Dokaz : Imajući u vidu da je $\sigma(U) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ što smo ranije pokazali, svaka tačka spektra operatora U je oblika $e^{i\lambda_0}$ gde $\lambda_0 \in [0, 2\pi]$. Na osnovu prvog dela dokaza teoreme 2.2.9 imamo

$$(\mathrm{Im}(U - e^{i\lambda_0} I))^{\perp} = \mathrm{Ker}(U^* - e^{-i\lambda_0} I).$$

Odatle, ako je $\overline{\operatorname{Im}(U - e^{i\lambda_0} I)} \neq H$, tada je $\operatorname{Ker}(U^* - e^{-i\lambda_0} I)$ ne trivijalan. Neka je $U^* x_0 = e^{-i\lambda_0} x_0$ gde je $x_0 \neq 0$. Dobijamo da je $U x_0 = e^{i\lambda_0} x_0$, tj. $\operatorname{Ker}(U - e^{i\lambda_0} I) \neq \{0\}$.Odatle sledi da je $e^{i\lambda_0}$ svojstvena vrednost, a ne tačka rezidualnog spektra. ■

Lema 2.7.25 : Neka je E_λ spektralna familija unitarnog operatora U, neka je E_λ neprekidna u jakom smislu u λ_0 i pretpostavimo da postoje nizovi λ_n neopadajući i μ_i nerastući takvi da je $\lambda_n < \lambda_0 < \mu_n$, $\mu_n - \lambda_n \to 0$ i neka projektori $P_n = E_{\mu_n} - E_{\lambda_n}$ nisu degenerisani tj. $P_n \neq 0$ za svako n. Tada je $e^{i\lambda_0}$ tačka neprekidnog spektra operatora U.

Dokaz : Kao u dokazu teoreme 2.7.13 dobijamo niz $x_n \in H_n := \operatorname{Im} P_n$ tako da je $\|x_n\| = 1$. Na isti način kao u lemi 2.7.22 imamo

$$\|(U - e^{i\lambda_0} I)\, x_n\| \leq |\mu_n - \lambda_n|\, \|x_0\| = |\mu_n - \lambda_n| \to 0$$

kad $n \to \infty$. Odatle, na osnovu teoreme 2.2.7 $e^{i\lambda_0}$ je tačka spektra operatora U. tačka $e^{i\lambda_0}$ nije svojstvena vrednost jer je E_λ neprekidna u λ_0. Imajući u vidu da unitarni operatori nemaju rezidualni spektar sledi da je $e^{i\lambda_0}$ tačka neprekidnog spektra operatora U. ■

Teorema 2.7.26 : Neka je E_λ spektralna familija unitarnog operatora U i neka je $E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1} = 0$, $\lambda_2 > \lambda_1$. Tada je svako $\lambda_0 \in (\lambda_1, \lambda_2)$ regularna tačka operatora U.

Dokaz : Uzmimo $H_1 = \operatorname{Im} E_{\lambda_1} = \operatorname{Im} E_{\lambda_2}$, $H_2 = \operatorname{Im}(I - E_{\lambda_2})$. Podprostori H_1 i H_2 su invarijantni u odnosu na U i $H_1 \oplus H_2 = H$. Šta više operatori $U\,|_{H_1}$ i $U\,|_{H_2}$ su unitarni. Za sve $x_1 \in H_1$ imamo $(U - e^{i\lambda_0} I)\, x_1 = (U - e^{i\lambda_0} I)\, E_{\lambda_1} x_1$ i zato

$$\begin{aligned}\|(U - e^{i\lambda_0} I)\, x_1\|^2 &= \int_0^{2\pi} |e^{i\lambda} - e^{i\lambda_0}|^2\, \psi_{\lambda_1}(e^{i\lambda})\, d\langle E_\lambda x_1, x_1\rangle \\ &= \int_0^{\lambda_1} |e^{i\lambda} - e^{i\lambda_0}|^2\, d\langle E_\lambda x_1, x_1\rangle \geq \delta_1^2\, \|x_1\|^2\end{aligned}$$

za neko $\delta_1 > 0$. Slično za svako $x_2 \in H_2$ imamo $(U - e^{i\lambda_0} I)\, x_2 = (U - e^{i\lambda_0} I)\,(I - E_{\lambda_2})\, x_2$ i zato

$$\begin{aligned}\|(U - e^{i\lambda_0} I)\, x_2\|^2 &= \int_0^{2\pi} |e^{i\lambda} - e^{i\lambda_0}|^2\, (1 - \psi_{\lambda_2}(e^{i\lambda}))\, d\langle E_\lambda x_2, x_2\rangle \\ &= \int_{\lambda_2}^{2\pi} |e^{i\lambda} - e^{i\lambda_0}|^2\, d\langle E_\lambda x_2, x_2\rangle \geq \delta_2^2\, \|x_2\|^2\end{aligned}$$

za neko $\delta_2 > 0$. Dakle možemo zaključiti da za unitarne operatore U_1 i U_2 važi

$$\begin{aligned}&\|(U_1 - e^{i\lambda_0} I)\, x_1\| \geq \delta_1\, \|x_1\| \text{ za } x_1 \in H_1, \\ &\|(U_2 - e^{i\lambda_0} I)\, x_2\| \geq \delta_2\, \|x_2\| \text{ za } x_2 \in H_2.\end{aligned}$$

Sledi da $e^{i\lambda_0}$ nije svojstvena vrednost operatora U_1 i U_2. Iz ovih nejednakosti sledi da su $\mathrm{Im}(U_1 - e^{i\lambda_0} I)$ i $\mathrm{Im}(U_2 - e^{i\lambda_0} I)$ zatvoreni podprostori od H_1 i H_2 redom. Zato $e^{i\lambda_0}$ nije tačka neprekidnog spektra operatora U_1 i U_2. Imajući u vidu da unitarni operatori nemaju rezidualni spektar zaključujemo da su operatori $U_1 - e^{i\lambda_0} I$ i $U_2 - e^{i\lambda_0} I$ inverzibilni. Odatle sledi i da je operator $U - e^{i\lambda_0} I$ inverzibilan. Zaista, za $x = x_1 + x_2$ gde $x_1 \in H_1$, $x_2 \in H_2$ uzmimo

$$(U - e^{i\lambda_0})^{-1} x = ((U - e^{i\lambda_0})\,|_{H_1})^{-1} x_1 + ((U - e^{i\lambda_0})\,|_{H_2})^{-1} x_2$$

i direktno se proverava da je ovakav operator inverzan za $U - e^{i\lambda_0} I$. ■

2.8 Neograničeni samoadjungovani i simetrični operatori u *H*

Neka je A linearan operator definisan na nekom (linearnom) podskupu $\mathrm{Dom}\,A$ Hilbertovog prostora H. Uvek ćemo pretpostaviti da je $\overline{\mathrm{Dom}\,A} = H$ i pisaćemo $\mathcal{D}_A$ umesto $\mathrm{Dom}\,A$.

Za dato $y \in H$ pretpostavimo da postoji $y^* \in H$ tako da za svako $x \in \mathcal{D}_A$

(2.8.1) $$\langle A\,x,\ y\rangle = \langle x,\ y^*\rangle.$$

Uslov $\overline{\mathcal{D}_A} = H$ garantuje da ako takvo y^* postoji onda je jedinstveno. Zaista, ako je $\langle A\,x,\ y\rangle = \langle x,\ y_1^*\rangle = \langle x,\ y_2^*\rangle$, onda je $\langle x,\ y_1^* - y_2^*\rangle = 0$ za sve $x \in \mathcal{D}_A$. Odatle sledi da je $y_1^* = y_2^*$. Primetimo, ako je y^* jedinstveno određeno sa (2.8.1), onda $\mathcal{D}_A$ mora biti gust skup u H, u suprotnom uzimajući $y^* \neq 0$ i $y^* \perp \mathcal{D}_A$, dobijamo više od jednog elementa koji odgovara $y = 0$. Dakle, definišimo domen $\mathcal{D}_{A^*}$ dualnog operatora A^* kao skup koji sadrži sve y za koje y^* postoji i operator A^* se ponaša po formuli $y^* = A^*\,y$. Na osnovu toga, za svaki linearni operator A sa $\overline{\mathcal{D}_A} = H$ možemo definisati dualni operator A^*.

Sada ćemo videti nekoliko osobina dualnoh operatora.

i) A^* je zatvoren operator.

Očigledno je, ako $y_n \to y$, $y_n^* \to y^*$ i $\langle A\,x,\ y_n\rangle = \langle x,\ y_n^*\rangle$ za sve $x \in \mathcal{D}_A$, tada $\langle A\,x,\ y\rangle = \langle x,\ y^*\rangle$ što znači da $y \in \mathcal{D}_{A^*}$ i $A^*\,y = y^*$.

ii) Kažemo da je $A_1 \subseteq A_2$ ako $\mathcal{D}_{A_1} \subseteq \mathcal{D}_{A_2}$ i $A_2\,x = A_1\,x$ za sve $x \in \mathcal{D}_{A_1}$ tj. A_1 je restrikcija A_2 na $\mathcal{D}_{A_1}$. Jasno, ako je $A_1 \subseteq A_2$, onda je $A_1^* \supseteq A_2^*$.

iii) Pretpostavimo da A dopušta zatvaranje, tj. zatvaranje grafika operatora A je grafik nekog operatora $\overline{A}$. Pokažimo da je $\overline{A}^* = A^*$ i ako $(A^*)^*$ postoji (što znači da je $\mathcal{D}_{A^*}$ gust u H), tada $\overline{A} \subseteq A^{**}$. Zaista, kako je $A \subseteq \overline{A}$ imamo $\overline{A}^* \subseteq A^*$. Uzmimo $y \in \mathcal{D}_{A^*}$. Neka je $x \in \mathcal{D}_{\overline{A}}$ i $x_n \to x$, $x_n \in \mathcal{D}_A$ i $A x_n \to z = \overline{A} x$. Puštajući limes u jednačini $\langle A x_n, y\rangle = \langle x_n, y^*\rangle$ dobijamo $\langle \overline{A} x, y\rangle = \langle x, y^*\rangle$, odakle sledi da je $y \in \overline{A}^*$. Dalje, za sve $y \in \mathcal{D}_{A^*}$ i $x \in \mathcal{D}_{\overline{A}}$ imamo $\langle \overline{A} x, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle$ ili $\langle A^* y, y\rangle = \langle x, \overline{A} x\rangle$ odakle sledi da je $x \in \mathcal{D}_{A^{**}}$ i $A^{**} x = \overline{A} x$.

Kažemo da je operator A simetričan ako $\overline{\mathcal{D}_A} = H$ i za sve $x, y \in \mathcal{D}_A$

(2.8.2) $$\langle A x, y\rangle = \langle x, A y\rangle.$$

Zato je $A \subseteq A^*$ (ovo je u stvari definicija simetričnosti operatora A)

Primetimo da za svaki simetričan operator $B \supseteq A$ (simetrična ekstenzija) važi $B \subseteq A^*$ jer $B \subseteq B^* \subseteq A^*$. Dakle, sve simetrične ekstenzije B simetričnog operatora A su između A i A^* tj. $A \subseteq B \subseteq A^*$. Kažemo da je operator A samoadjungovan ako je $A = A^*$.

Teorema 2.8.3 : Ako je A simetričan operator i $\operatorname{Im} A = H$, onda je A samoadjungovan operator.

Teorema 2.8.4 : Ako je A samoadjungovan operator i postoji formalni inverzni operator A^{-1} (što znači da je $\operatorname{Ker} A = 0$, tj. A je "1-1" preslikavanje sa $\mathcal{D}_A$ na $\operatorname{Im} A$), tada je A^{-1} takođe samoadjungovan operator.

Teorema 2.8.5 : Neka je A zatvoren simetričan operator. Brojevi $n_z = \operatorname{codim} \Delta_A(z)$ su konstanta za sve z sa $\operatorname{Im} z > 0$ i za sve z sa $\operatorname{Im} z < 0$. tj.

$$\operatorname{codim} \Delta_A(z) \equiv n_1 \text{ za sve } z \text{ sa } \operatorname{Im} z > 0 \text{ i}$$
$$\operatorname{codim} \Delta_A(z) \equiv n_2 \text{ za sve } z \text{ sa } \operatorname{Im} z < 0.$$

Ovde je $\Delta_A(\lambda) = \operatorname{Im}(A - \lambda I)$. Za brojeve n_1 i n_2 kažemo da su indikatori defekta operatora A.

Teorema 2.8.6 : Neka je $A = A^*$. Tada važi

i) indikatori operatora A su $(0, 0)$ i $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$
ii) $\sigma(A) = \sigma_p(A) \bigcup \sigma_c(A)$.

Teorema 2.8.7 : Neka je $\overline{\mathcal{D}_A} = H$. Operator A dopušta zatvaranje ako i samo ako postoji A^{**} (što znači da je $\mathcal{D}_{A^*}$ gust skup u H), i tada je $A^{**} = \overline{A}$.

Neka je A zatvoren simetričan operator. Definišimo za svako $x \in \mathcal{D}_A$

(2.8.8) $$y = (A + i I) x \text{ i } z = (A - i I) x.$$

Prostori $H_1 := \text{Im}(A + i\ I)$ i $H_2 := \text{Im}(A - i\,I)$ su zatvoreni podprostori prostora H. Takođe oba operatora $A \pm i\,I$ su "1-1" jer $\pm i$ ne mogu biti svojstvene vrednosti simetričnog operatora. Dakle, x na jedinstven način definiše i y i z. Definišimo operator $V : H_1 \to H_2$ na sledeći način: $z = V\,y$. Koristeći (2.8.8), imamo

$$\langle V\,y,\, V\,y\rangle = \langle (A - i\,I)\,x,\, (A - i\,I)\,x\rangle = \|A\,x\|^2 + \|x\|^2$$
$$= \langle (A + i\,I)\,x,\, (A + i\,I)\,x\rangle = \langle y,\, y\rangle$$

i odatle sledi da je V izometrija. Primetimo da 1 nije svojstvena vrednost operatora V jer iz $y = z$ sledi $x = 0$ i $z = y = 0$. Ovu izometriju V zovemo Kejlijeva transformacija operatora A.

Inverzna transformacija je

$$x = \frac{1}{2\,i}\,(I - V)\,y \text{ i } A\,x = \frac{1}{2}\,(I + V)\,y.$$

Dakle, $A\,x = i(I + V)\,(I - V)^{-1}\,x$, gde je $(I - V)^{-1}$ formalno definisano jer $1 \notin \sigma_p(V)$.

Ako je A samoadjungovan operator, na osnovu teoreme 2.8.7 $H_1 = H_2 = H$ i zato je V unitarni operator.

Neka je $\{E_\lambda\}_a^b$ familija ortoprojektora takvih da je $E_\lambda \le E_\mu$ za $a \le \lambda \le \mu \le b$ i $E_{\lambda+0} = E_\lambda$ u jakom smislu (poluneprekidnost s desna). Neka su a i b konačni realni brojevi i neka je $\varphi(t)$ neprekidna funkcija na $[a, b]$. Na isti način kao u propoziciji 2.7.8 definišimo integral $\int_a^b \varphi(\lambda)\,dE_\lambda\,x$ za $x \in H$ i dobijamo jednakost

$$\left\|\int_a^b \varphi(\lambda)\,dE_\lambda\,x\right\|^2 = \int_a^b |\varphi(\lambda)|^2\,d\langle E_\lambda\,x,\, x\rangle. \tag{2.8.9}$$

Dalje, definišimo nesvojstveni integral $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\,dE_\lambda\,x$ kao granicu po normi prostora H integrala $\int_{-N}^{M} \varphi(\lambda)\,dE_\lambda\,x$ kad $M,\, N \to \infty$, za one x za koje granica postoji. Iz (2.8.9) zaključujemo da je ovo slučaj ako i samo ako

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2\,d\langle E_\lambda\,x,\, x\rangle < \infty.$$

Teorema 2.8.10 : Neka je $\{E_\lambda\}_{-\infty}^{\infty}$ spektralna familija ortoprojektora E_λ tj. $E_\lambda \le E_\mu$ za $\lambda \le \mu$ i u jakom smislu $E_\lambda \to 0$ kad $\lambda \to -\infty$, $E_\lambda \to I$ kad $\lambda \to \infty$ i $E_{\lambda+0} = E_\lambda$ (poluneprekidnost s desna). Posmatrajmo operator A takav da je

$$\mathcal{D}(A) = \{x : \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2\,d\langle E_\lambda\,x,\, x\rangle < \infty\} \text{ i}$$

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d E_\lambda,$$

što znači da za $x \in \mathcal{D}_A$ imamo $A x = \int \lambda \, d E_\lambda x$. Tada je A samoadjungovan operator i važi

$$\|A x\|^2 = \int \lambda^2 \, d\langle E_\lambda x, x\rangle \, .$$

Kažemo da A ima spektralnu dekompoziciju ako postoji spektralna familija $\{E_\lambda\}_{-\infty}^{\infty}$ takva da za A važe uslovi prethodne teoreme u odnosu na ovu familiju.

Teorema 2.8.11 : Ako je A zatvoren simetričan operator i Kejlijeva transformacija V je unitarni operator (tj. $H_1 = H_2 = H$ ili ekvivalentno, indikatori defekta operatora A su $(0, 0)$), tada je A samoadjungovan operator sa spektralnom dekompozicijom $E_t = F_s$ za $t = -\text{ctg}(\frac{s}{2})$, gde je $\{F_s\}_0^{2\pi}$ spektralna dekompozicija operatora V (definisana u 2.7g). To znači da je

$$\mathcal{D}(A) = \{x : \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \, d\langle E_t x, x\rangle < \infty\} \text{ i}$$

$$A x = \int_{-\infty}^{\infty} t \, d E_t x.$$

U nastavku ćemo videti simetrične i samoadjungovane ekstenzije simetričnih operatora i neke od njihovih osobina.

Neka je A_1 simetrična ekstenzija operatora A, $A_1 \supseteq A$ i $A_1 \neq A$. Tada postoji $x_1 \in \mathcal{D}_{A_1} \setminus \mathcal{D}_A$, što znači da je

$$(A + i I) x_1 = y_1 \text{ i } (A - i I) x_1 = z_1 = V_1 \, y_1,$$

gde $y_1 \notin H_1$ i $z_1 \notin H_2$. Dakle, Kejlijeva transformacija V_1 operatora A_1 je izometrična ekstenzija operatora V koja se ne poklapa sa V. Odatle važi sledeće:

Teorema 2.8.12 : Ako su indikatori defekta $(n, 0)$ ili $(0, n)$ i $n \neq 0$, tada A nema simetričnu ekstenziju, tj. A je maksimalno simetričan i A nije samoadjungovan.

Posmatrajmo sada slučaj kada su oba indikatora defekta različita od nule. Neka je $\mathcal{D}_{V_1} = H_1' = H_1 \oplus L_1$ i $\text{Im}\, V_1 = H_2' = H_2 \oplus L_2$. Tako $V_1 : H_1 \oplus L_1 \to H_2 \oplus L_2$ i V_1 je izometrija. Takođe je i $V_1 \,|_{H_1} = V$ i restrikcija operatora V_1 na L_1 je izometrija između L_1 i L_2. Odatle, $\dim L_1 = \dim L_2$. Tako dolazimo do sledećeg:

Teorema 2.8.13 : Ako su indikatori defekta operatora A (m, n) i $m \neq n$, tada ne postoji samoadjungovana ekstenzija operatora A.

Teorema 2.8.14 : Ako su indikatori defekta simetričnog operatora A (n, n), tada postoji samoadjungovana ekstenzija A_1 operatora A.

Literatura

[1] Yuli Eidelman, Vitali Milman, Antosis Tsolomitis, "Functional Analysis *An Introduction*", Rhode Island 2004.

[2] Olga Hadžić, Stevan Pilipović, "Uvod u funkcionalnu analizu", Novi Sad 1996.

[3] Slobodan Aljančić, "Uvod u realnu i Funkcionalnu analizu", Beograd 1968.

[4] Miloš Kurilić, "Osnovi opšte topologije", Novi Sad 1998.

[5] Svetozar Kurepa, "Funkcionalna analiza, *Elementi teorije operatora*", Zagreb 1981.

Biografija

Rođen sam 28.04.1979. u Somboru (Srbija). U istom gradu sam završio osnovnu i srednju školu. Nakon toga upisao sam Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu i stekao zvanje Diplomirani inženjer matematike. Od diplomiranja sam radio u nekoliko osnovnih škola kao nastavnik matematike. Trenutno sam zaposlen u osnovnoj školi "Svetozar Miletić" u Titelu. Srećno sam oženjen svojom suprugom Jelenom i otac sam devojčice Milice.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Završni rad
VR
Autor: Danilo Rapaić
AU
Mentor: Prof. dr Stevan Pilipović
MN
Naslov rada: Spektralna teorija operatora
MR
Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski/engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2010.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, PMF, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: 2 glave, 11 poglavlja, 72 strane
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Funkcionalna analiza
ND
Ključne reči: operator, kompaktni operator, samoadjungovani operator, unitarni operator, spektralna dekompozicija, spektralni integral, spektar operatora, projektor, ortogonalni projektor, spektralna familija
PO
UDK:

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod:
IZ

Tema ovog rada je spektralna teorija operatora. Rad sadrži dve osnovne celine. U prvom delu su dati osnovni pojmovi, definicije i teoreme u vezi sa temom rada, kao što su teorema o otvorenom preslikavanju, teorema o zatvorenom grafiku, Banah-Štajnhausova teorema, Han-Banahova teorema i njihove najznačajnije posledice. U drugom delu je definisan spektar operatora i klasifikacija spektra kao i struktura spektra samoadjungovanih i unitarnih ograničenih operatora. Takođe, prikazana je spektralna dekompozicija i definisan je spektralni integral ovih operatora. Pored toga izložen je kratak pregled tvrđenja i osnovnih osobina neogranicenih operatora.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 24.09.2009.
DP
Datum odbrane:.
DO
Članovi komisije:
KO
***Predsednik*:** Dr. Miloš Kurilić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
***Član*:** Dr.Stevan Pilipović, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, mentor
***Član*:** Dr. Ljiljana Gajić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FAKULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents Code: Master thesis
CC
Author: Danilo Rapaić
AU
Mentor: Ph. D. Stevan Pilipović
MN
Title: Spectral Theory of Operators
TI
Language of text: Serbian
LT
Language of abstract: English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2010.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: 2 chapters, 11 subchapters, 72 pages
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Functional Analysis
SD
Key words: operator, compact operator, selfadjoint operator, unitary operator, spectral decomposition, spectral integral, spectar of operator, spectral family, projector, ortogonal projector
UC:

Holding data: In library of Department of Mathematics

HD
Note:
N
Abstract:
AB
The main subject of this thesis is i spectral theory of operators. This work is consisted of two main chapters. In the first chapter we define some basic notion, definitions and theorems concerning the subject of this work, such as The Banach open mapping theorem, the closed graph theorem, the Banach-Steinhaus theorem, the Hahn-Banach theorem and their main corollaries. In the second chapter spectrum of operators is defined. In the this chapter classification of spectrum and strcture of selfadjoint and unitary operators are discussed and spectral decomposition and spectral integral are defined. Beside this, a short review of main propositions of unbounded operators is given.

Accepted by the Scientific Board on: 24.09.2009.
ASB
Defended:
Thesis defend board:
DB
***President*:** Ph. D. Miloš Kurilić, Full Profesor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad
***Member*:** Ph. D. Stevan Pilipović, Full Profesor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad, menthor
***Member*:** Ph. D. Ljiljana Gajić, Full Profesor Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad